MASTER

Een oefenboek voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

Neggers, Heleen

Award date:
2001

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Afstudeerverslag

Een oefenboek voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

Heleen Neggers

Afstudeercommissie: drs. J.G.M. Donkers
dr. A.G. van Asch
prof. dr. A. Blokhuis
dr. H.G. ter Morsche

augustus 2001

Voorwoord

In het kader van mijn afstuderen in de richting Didaktiek van de Wiskunde heb ik gewerkt aan een oefenboek voor de wiskundeolympiade. Dit is een verslag van mijn werk en een aanzet voor het oefenboek.

In het eerste deel van mijn verslag leg ik uit wat de doelstelling van het oefenboek is en voor welke opzet ik heb gekozen. Het tweede deel bestaat uit het daadwerkelijke oefenboek. Hierin is een groot aantal olympiadeopgaven met uitwerkingen te vinden.

Drs. J.G.M. Donkers was en bleef mijn afstudeerbegeleider, ook nadat hij met pensioen ging, en daarvoor wil ik hem hartelijk bedanken. Mijn afstudeerperiode verliep niet altijd even geweldig; ik wil iedereen bedanken die samen met mij bleef geloven dat ik ooit zou afstuderen, in het bijzonder Jeannette Danes van STU, Annie van Esch en Jan Draisma.

Heleen Neggers

Inhoudsopgave

Samenvatting

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. De olympiadeopgaven hebben het karakter van problemen: een leerling ziet meestal niet meteen de oplossing(sweg). Om leerlingen de kans te geven zich voor te bereiden op de NWO wordt een oefenboek ontwikkeld. Tijdens mijn afstudeerperiode heb ik een aanzet geschreven voor een oefenboek voor de tweede ronde van de olympiade.

Omdat ik afstudeer in de richting Didaktiek van de Wiskunde, was 'hoe schrijf je voor leerlingen?' de belangrijkste vraag die mij tijdens deze periode bezighield. Door veel opgaven te maken en verschillende oplossingen te zien heb ik een beeld gekregen van de olympiadeopgaven. Het schrijven van geschikte teksten was vooral een kwestie van proberen en veel schaven.

Het door mij geschreven oefenboek bevat opgaven, hints en uitgebreide oplossingen, alsmede theorie over probleemoplossen en stof die buiten het curriculum valt. De olympiadeopgaven kunnen verdeeld worden in verschillende categorieën; in mijn oefenboek komen slechts enkele categorieën aan bod. Naast het oefenboek bevat dit verslag een verantwoording van mijn werk.

Mijn aanzet voor het oefenboek zal gebruikt worden bij het schrijven van het uiteindelijke oefenboek. Leerlingen kunnen mijn oefenboek wellicht nu al gebruiken om zich voor te bereiden op de tweede ronde.

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Nederlandse Wiskunde Olympiade

De Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) is een jaarlijkse wedstrijd voor leerlingen van de middelbare school. De doelstellingen van de NWO zijn: leerlingen plezier laten beleven aan het oplossen van uitdagende wiskundeproblemen en het ontdekken van wiskundig talent.

De olympiade bestaat uit twee ronden. De eerste ronde is voor alle leerlingen die geïnteresseerd zijn in het oplossen van wiskundeproblemen, en wordt gehouden op de scholen. De leerlingen krijgen dertien opgaven van verschillende moeilijkheidsgraad op te lossen. Jaarlijks nemen ongeveer 2500 leerlingen op 220 scholen deel aan de eerste ronde. De honderd beste leerlingen gaan door naar de tweede ronde, waar ze vier of vijf lastigere opgaven krijgen. De beste tien leerlingen uit de tweede ronde gaan door naar de training voor de International Mathematics Olympiad (IMO) Aan de IMO mogen uiteindelijk zes leerlingen meedoen.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt gehouden sinds 1962 en sinds 1969 doet Nederland mee aan de International Mathematics Olympiad.

Alle leerlingen van de middelbare school mogen meedoen aan de olympiade, maar de bovenbouw is de doelgroep.

1.2 Karakter van de olympiadeopgaven

De olympiadeopgaven verschillen van de sommen die leerlingen op school maken. Een leerling die goed heeft opgelet in de lessen, weet dat hij/zij de oplossing van een som kan vinden. De leerling kan dit zeker weten omdat hij/zij het antwoord meteen kan geven, of omdat hij/zij een recept of algoritme kent waarmee de oplossing te vinden is. Een voorbeeld van zo'n recept is de *abc*-formule.

De olympiadeopgaven hebben (voor de meeste leerlingen) het karakter van een probleem. Een opgave is voor een leerling een probleem als hij/zij niet onmiddelijk de oplossing(sweg) ziet [8]. Zo'n opgave kan de leerling proberen op te lossen met behulp van heuristieken, ook wel onderzoeksmethoden genoemd. Een heuristiek is een tactiek die de leerling in de goede richting kan leiden bij het zoeken naar de oplossing; de heuristiek garandeert echter niet dat de leerling een oplossing vindt. Een voorbeeld van een heuristiek is 'teken eens een plaatje'.

1.3 Doel van het oefenboek

Probleemoplossen zit niet voor alle leerlingen in het schoolcurriculum. Sinds de invoering van de tweede fase krijgen bovenbouwleerlingen met het profiel Natuur en Techniek voortgezette meetkunde. Het doel hiervan is niet de kennis van meetkundige stellingen, maar het ontwikkelen van wiskundig en logisch denken met behulp van de meetkunde. In veel wiskundemethoden wordt het vinden van een bewijs algoritmisch onderwezen, maar in Moderne Wiskunde [2] wordt wel aandacht besteed aan heuristische denkmethoden en reflectie op de eigen probleemaanpak. Dit gebeurt in de zogenaamde Systematische Probleem Aanpakken (SPA's). Leerlingen die (nog) niet hebben gekozen voor het profiel Natuur en Techniek, of die met een methode werken waarin geen aandacht is voor probleemoplossen, zullen meer moeite hebben met de olympiadeopgaven.

Op sommige scholen besteedt een leraar een extra uur aan wiskundeproblemen voor enthousiaste leerlingen, of krijgen leerlingen oude opgaven mee naar huis. Op andere scholen wordt geen aandacht besteed aan de voorbereiding op de olympiade. Omdat er geen Nederlands materiaal is, gericht op de wiskundeolympiade[1], zijn niet alle leraren toegerust op het voorbereiden van hun leerlingen op deze wedstrijd. Sommige onderwerpen uit de olympiadeopgaven, zoals het laatjesprincipe of het principe van in- en exclusie, komen in de middelbare-schoolstof niet aan bod en deze worden door de leraren dan ook niet altijd in de opgaven herkend. Trainen voor de olympiade is niet alleen een kwestie van nieuwe truukjes leren, maar vooral van leren hoe je wiskundeproblemen aanpakt.

Ook zonder voorbereiding kan meedoen aan de olympiade leuk zijn, maar geoefende leerlingen kunnen meer opgaven oplossen. Leerlingen die problemen met succes kunnen aanpakken, worden uitgedaagd om nieuwe problemen op te lossen en zoals bij veel dingen geldt ook hier: hoe beter je iets kan, hoe leuker je het vindt.

Het oefenboek is bedoeld om alle leerlingen de kans te geven zich voor te bereiden op de olympiade.

Voor voorbereiding op de eerste ronde zullen opgaven en uitwerkingen van eerste-rondeopgaven uitgegeven worden. Het deel voor de tweede ronde bevat naast opgaven en uitwerkingen ook hints, theorie over probleemoplossen en over stof die niet in het schoolprogramma zit. Ik heb me alleen bezig gehouden met het oefenboek voor de tweede ronde.

1.4 Opbouw van dit verslag en verschil met het oefenboek

Mijn verslag bestaat uit een deel van het oefenboek en een verantwoording. Tot het oefenboek behoren de inleiding van het oefenboek (hoofdstuk 3), de strategie van Polya (4), de theorie van Combinatoriek en Algebra (hoofdstuk 5 en 6), de geselecteerde opgaven per categorie en hints en oplossingen daarbij (hoofstukken 7, 8, 9 en 10), evenals de indices achterin.

In dit verslag zijn alle opgaven uit de periode 1980-2000 uit de vier categorieën opgenomen, niet alleen de geselecteerde. Ook is per categorie een verantwoording van de selectie opgenomen. Deze behoren niet tot het oefenboek. Mijn verantwoording van het oefenboek staat in hoofdstuk 2.

De literatuurlijst staat na de indices omdat, de laatste bij het oefenboek horen en de eerste alleen bij mijn verslag.

[1] Sinds enkele jaren zijn de opgaven en uitwerkingen van de tweede ronde wel te vinden op internet [10].

Hoofdstuk 2

Verantwoording van het oefenboek

De invulling van mijn afstudeerwerk was behoorlijk vrij. De aan het oefenboek gestelde eisen zijn:

- Leerlingen vanaf 3 HAVO/VWO moeten zelfstandig kunnen werken met het oefenboek.
- Het oefenboek mag ongeveer 50 tweede-rondeopgaven bevatten.
- Een mogelijke invulling van het oefenboek bestaat uit opgaven, beknopte oplossingen, hints en aanvullingen op de middelbare-schoolstof.

Ik heb er voor gekozen de opgaven te verdelen in categorieën. Per categorie heb ik een aantal opgaven geselecteerd en bij deze opgaven horen hints en oplossingen. De hints geven de leerling een aanknopingspunt en verwijzen soms naar theorie die hij/zij kan doorlezen. De oplossingen bestaan niet alleen uit een berekening of bewijs, maar geven ook aan hoe je de oplossing zou kunnen vinden.

Om de leerling op weg te helpen heb ik Polya's strategie voor het oplossen van problemen opgenomen (hoofdstuk 4).

In de oplossingen komen begrippen aan bod die buiten de middelbare-schoolstof vallen. Theorie over de onderwerpen die horen bij de categorieën Combinatoriek en Algebra, is te vinden in de hoofdstukken 5 en 6.

Achterin het oefenboek zijn enkele trefwoordenlijsten opgenomen.

In de rest van dit hoofdstuk bespreek ik de opzet van het oefenboek nader.

2.1 Indeling in categorieën

Arno Theune studeerde in 1990 af aan de TU/e op de classificatie en analyse van NWO-opgaven [7]. Ik gebruik zijn classificatie, met twee aanpassingen: omdat kansrekening de laatste en toekomstige jaren niet meer aan bod komt in de olympiade, heb ik de categorie Waarschijnlijkheidsrekening en combinatoriek omgedoopt tot Combinatoriek. Verder heb ik de opgaven uit de restcategorie (drie opgaven tussen 1980 en 2000) ondergebracht bij de categorie Combinatoriek.

Het voordeel van een indeling in categorieën is dat de samenhang tussen de verschillende onderwerpen duidelijker naar voren komt. Het is voor leerlingen makkelijker om de belangrijke begrippen per onderwerp te leren, dan om telkens te wisselen tussen bijvoorbeeld de eigenschappen van lijnen (Ruimtemeetkunde) en delers (Getaltheorie). Om de situatie van de tweede ronde na te bootsen kunnen leerlingen zelf opgaven uit verschillende categorieën kiezen, of ze kunnen alle opgaven van een bepaald jaar van het internet halen.

Aan het begin van mijn afstudeerproject heb ik gewerkt aan opgaven uit alle categorieën. Het schrijven van gemakkelijk leesbare uitwerkingen en theorie voor alle categorieën bleek teveel tijd te kosten; daarom heb ik me beperkt tot de uitwerkingen van de opgaven Algebra, Combinatoriek, Getaltheorie en Vlakke meetkunde en de theorie van Algebra en Combinatoriek. De categorieën die in mijn verslag niet aan bod komen zijn Ruimtemeetkunde en Rijen en reeksen.

2.2 Taalgebruik

Het oefenboek is voor leerlingen vanaf 3 HAVO/VWO en daarom moet de tekst voor hen makkelijk leesbaar zijn. Daartoe zijn de meeste denkstappen opgenomen in de tekst.

Nieuwe begrippen en notaties worden uitgelegd in de theorie, maar leerlingen hebben zich deze na een keer lezen nog niet eigen gemaakt. Daarom benoem ik in de uitwerkingen welke regels ik toepas (bv. som van een rekenkundige reeks). Notatie die in de wiskunde gebruikt wordt om formules beknopt weer te geven, maar die niet gebruikt wordt op school, heb ik waar mogelijk niet gebruikt. Zo schrijf ik $a > 0$ en $b > 0$ in plaats van $a, b > 0$ en gebruik ik bijvoorbeeld het $\forall$-teken niet.

Natuurlijk moet de tekst wiskundig correct zijn.

2.3 Strategie van Polya

Op school leren leerlingen weinig over probleemoplossen. Daarom zullen ze best moeite hebben met het zoeken naar een oplossing van de olympiadeopgaven. Om hen op weg te helpen heb ik de strategie van Polya voor het oplossen van problemen opgenomen in het oefenboek. Het is een letterlijke vertaling uit Polya's boek How To Solve It? [5].

2.4 Theorie

Sommige begrippen komen regelmatig aan bod in de olympiadeopgaven, maar behoren niet tot de schoolstof. Deze begrippen worden uitgelegd in de theoriehoofdstukken. Omdat alle leerlingen vanaf de derde klas met het boek moeten kunnen werken, is ook uitleg opgenomen over onderwerpen die pas in de laatste klassen aan bod komen.

Voor het schrijven van de theorie heb ik onder andere de volgende wiskundeboeken bekeken: Netwerk [1], Getal en ruimte [6], Problem-Solving Strategies van Engel [3] en The Mathematical Olympiad Handbook van Gardiner [4]. Op de website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren [11] vond ik welke onderwerpen bij het wiskundeonderwijs in de tweede fase worden behandeld.

2.5 Selectie

Het oefenboek mag ongeveer vijftig opgaven bevatten. Omdat de schoolstof sinds 1962 behoorlijk is veranderd heb ik een selectie gemaakt uit de opgaven vanaf 1980. De periode 1980 tot en met 2000 omvat 95 opgaven, verdeeld over zes categorieën. Het lijkt logisch om van elke categorie ongeveer de helft van de opgaven te selecteren.

Dit geeft de volgende aantallen: Algebra: 10 van 19, Combinatoriek: 7 van 13, Getaltheorie: 13 van 25, Vlakke meetkunde: 13 van 25, Ruimtemeetkunde: 3 uit 6, Rijen en reeksen: 6 van 12.

(De selectie uit deze laatste twee categorieën maak ik niet. Twee opgaven behoren zowel tot de categorie Algebra als tot Getaltheorie en twee zowel tot Vlakke meetkunde als Rijen en Reeksen.)

Het idee achter de selectie is om zoveel mogelijk onderwerpen in de opgaven te zien. Belangrijke onderwerpen komen vaak meer dan eenmaal aan bod. Als veel opgaven dezelfde oplossingsmethode hebben selecteer ik een deel van deze opgaven.

Opgaven die niet (meer) aansluiten op de school- en olympiadestof vallen af. Zo vallen in de categorie Combinatoriek de opgaven over kansrekening af omdat dat onderwerp de laatste jaren en in de nabije toekomst niet meer aan bod komt.

Omdat er hoe dan ook opgaven moeten afvallen heb ik ervoor gekozen geen aangepaste opgaven op te nemen, tenzij een belangrijk principe anders helemaal niet aan bod zou komen. Het bleek niet nodig om om die reden aangepaste opgaven op te nemen.

2.6 Oplossingen

De oplossingen heb ik geschreven op basis van mijn eigen oplossingen, de officiële uitwerkingen en verrassende oplossingen van leerlingen. Soms zijn meerdere oplossingen van een opgave opgenomen.

De door mij geschreven oplossingen zijn niet beknopt; de meeste tussenstappen van een berekening of bewijs heb ik opgenomen, zodat een leerling de tekst goed kan volgen en niet bij elke stap hoeft te puzzelen wat er gebeurd is. Hoewel dat laatste misschien geen probleem is voor goede leerlingen, haakt een leerling die de oplossing niet zelf gevonden heeft daardoor misschien af.

Om te voorkomen dat een leerling een oplossing ziet en snapt, maar er geen vertrouwen in heeft dat hij of zij zelf zo'n oplossing kan bedenken, beschrijf ik ook hoe je aan het idee voor de oplossing komt. Onderzoeksmethoden die niet tot een oplossing leiden heb ik meestal niet beschreven omdat de uitwerkingen dan te lang worden.

2.7 Hints

Voor zover mogelijk geef ik bij elke opgave eerst algemene hints en daarna eventueel voor die opgave specifieke aanwijzingen en verwijzigingen naar de theorie.

Algemene hints kan de leerling ook vinden in het hoofdstuk Strategie van Polya.

In de hints spreek ik de lezer aan met 'je'. In de oplossingen en theorie gebruik ik 'we' omdat de lezer daarin aan de hand wordt meegenomen.

2.8 Indices

Achterin het oefenboek zijn drie indices opgenomen. De trefwoordenlijst bij de theorie geeft een overzicht van alle onderwerpen die in de theorie besproken worden. De trefwoordenlijst bij de opgaven geeft per onderwerp aan in welke opgaven dat onderwerp aan bod kan komen. De opgavenlijst geeft bij elke opgave een overzicht van de onderwerpen die in een oplossing van die opgave aan bod kunnen komen.

2.9 Olympiadeboeken uit het buitenland

Er is nog geen Nederlandse literatuur over de wiskundeolympiade, maar buiten Nederland zijn verschillende boeken over olympiades en probleemoplossen verschenen. Enkele daarvan heb ik bekeken. De boeken verschillen sterk van opzet en moeilijkheidsgraad.

Enkele boeken bestaan uit de olympiadeopgaven en hun officiële oplossingen van een aantal jaren, zonder verder commentaar. De opzet van zo'n boek verschilt niet veel van de Nederlandse olympiadesite.

A. Gardiner [4] heeft een boek geschreven over probleemoplossen aan de hand van de opgaven van de British Mathematical Olympiad (BMO). De doelgroep van zijn boek bestaat uit leerlingen vanaf 15 jaar. Hij begint zijn boek met wat theorie, met daarin oefeningen van verschillend niveau en geeft een uitgebreide boekenlijst. Het boek bevat alle opgaven van de BMO van 1965 tot en met 1996. Gardiner geeft uitwerkingen bij alle opgaven vanaf 1975 en deze hebben de volgende structuur: hij geeft een hint en leidt de lezer stap voor stap naar de oplossing, waarbij de lezer zelf nog verschillende dingen moet uitrekenen en invullen. Het exacte antwoord wordt niet gegeven. Als je een opgave zelf hebt opgelost, kan je in dit boek niet vlug even vinden of je het goed hebt gedaan; dat vind ik een gemis.

Problem-Solving Strategies van Arthur Engel [3] is geschreven voor deelnemers aan wiskundecompetities tot op het niveau van de IMO en (vooral) voor hun trainers. In het boek komen aan de hand van verschillende onderwerpen (het extreme-waardenprincipe, getaltheorie) ontzettend veel stellingen en problemen aan bod. Korte oplossingen worden gegeven. Engels boek is te moeilijk voor leerlingen die zich willen voorbereiden op de tweede ronde. Voor leraren die hun leerlingen willen helpen, maar niet precies weten welke begrippen ze nodig hebben voor de tweede ronde is dit boek te omvangrijk. Het boek wordt in Nederland wel gebruikt bij de training voor de IMO, naast de speciaal voor deze training ontwikkelde lesbrieven over verschillende onderwerpen.

Het bekendste boek over probleemoplossen is How To Solve It van Polya [5]. Polya geeft een strategie om een probleem aan te pakken die bestaat uit het jezelf stellen van een groot aantal vragen die inzicht in het probleem moeten bevorderen. Ik heb de strategie van Polya in het oefenboek opgenomen.

Hoofdstuk 3

Inleiding van het oefenboek

Met dit boek kun je je voorbereiden op de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Je kunt het oefenboek natuurlijk ook doorwerken omdat je wiskunde gewoon interessant vindt.

3.1 Nederlandse Wiskunde Olympiade

De Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) is een jaarlijkse wedstrijd voor leerlingen van de middelbare school. De olympiade bestaat uit twee ronden. De eerste ronde is voor alle leerlingen die geïnteresseerd zijn in het oplossen van wiskundeproblemen, en wordt gehouden op de scholen. De leerlingen krijgen dertien opgaven van verschillende moeilijkheidsgraad op te lossen. De honderd beste leerlingen gaan door naar de tweede ronde, waar ze vier of vijf lastigere opgaven krijgen. De beste leerlingen uit de tweede ronde gaan door naar de training voor de International Mathematics Olympiad (IMO). Aan de IMO mogen uiteindelijk zes leerlingen meedoen.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt gehouden sinds 1962 en sinds 1969 doet Nederland mee aan de International Mathematics Olympiad.

Alle leerlingen van de middelbare school mogen meedoen aan de olympiade, maar doelgroep is de bovenbouw.

3.2 Waarom een oefenboek?

Als je wordt uitgenodigd voor de tweede ronde hoef je jezelf niet voor te bereiden. Ook zonder voorbereiding is het een leuke wedstrijd. Maar misschien wil je graag weten wat voor soort opgaven je krijgt. En hoe kom je eigenlijk op het idee voor een oplossing? Soms heb je wel een goed idee voor een oplossing, maar weet je niet hoe je dat moet opschrijven.

In dit boek vind je voorbeeldopgaven, hints voor het vinden van een oplossing en uitwerkingen. In die uitwerkingen zie je hoe je een oplossing vindt en opschrijft. Soms helpen technieken of eigenschappen van begrippen die je (nog) niet gehad hebt op school bij het vinden van een oplossing. Daarom bevat het oefenboek ook stukken theorie die je door kunt lezen.

3.3 Opzet van het oefenboek

De olympiadeopgaven kunnen verdeeld worden in verschillende categorieën: Algebra, Combinatoriek, Getaltheorie, Vlakke meetkunde, Ruimtemeetkunde en Rijen en reeksen. In dit boek vind je de opgaven gesorteerd naar categorie. Dat heeft als voordeel, dat je het verband tussen verschillende opgaven kunt zien en dat je onderwerp voor onderwerp kunt oefenen. Een nadeel is natuurlijk dat je de opgaven tijdens de tweede ronde wel door elkaar krijgt.

Je kunt beginnen met het maken van opgaven en de theorie die je nodig hebt opzoeken. (Achterin het boek staat per opgave welke theorie je daarbij zou kunnen gebruiken.) Je kunt ook eerst de theorie doorlezen en daarna beginnen aan de opgaven; aan jou de keus.

De strategie van Polya (hoofdstuk 4) is een aanpak die je kan gebruiken om een opgave op te lossen. De strategie bestaat eruit jezelf een groot aantal vragen te stellen om je inzicht in de opgave te bevorderen.

Probeer een opgave die je niet meteen kunt oplossen later nog een keer, of kijk of de hints je op weg helpen. De meeste opgaven kun je op verschillende manieren oplossen, dus jouw oplossing hoeft niet hetzelfde te zijn als de uitwerking in het oefenboek. Kijk als je een oplossing gevonden hebt of je ook een andere manier van oplossen kan vinden en vergelijk je oplossing eens met de uitwerking uit het boek.

3.4 Meer oefenen?

Alle opgaven en uitwerkingen van de tweede ronde vanaf 1991 zijn te vinden op internet:

http://olympiads.win.tue.nl/nwo/

Op deze site vind je ook een link naar de International Mathematics Olympiad.

Hoofdstuk 4

Strategie van Polya

Als je een olympiadeopgave probeert te maken, weet je meestal niet meteen wat je moet doen om de oplossing te vinden. De wiskundige G. Polya heeft in 1945 een strategie ontwikkeld voor het oplossen van problemen. Problemen zijn opgaven waarvan je de oplossing of oplossingsmethode niet direct ziet. Zijn strategie bestaat uit vier stappen waarin je jezelf veel vragen stelt om inzicht te krijgen in de opgave.

In dit hoofdstuk vind je Polya's strategie en een uitwerking van opgave 80.4 aan de hand van deze strategie.

Stap 1: Het probleem begrijpen. *Wat wordt gevraagd? Wat zijn de gegevens? Wat zijn de voorwaarden?*

Is het mogelijk om aan de voorwaarden te voldoen? Zijn de voorwaarden voldoende om de onbekende te bepalen? Of zijn ze niet voldoende? Is een deel van de voorwaarden overbodig (redundant)? Spreken de voorwaarden elkaar tegen?

Teken een plaatje. Introduceer passende notatie. Splits de voorwaarden in verschillende onderdelen, kun je deze, in je eigen woorden, opschrijven?

Stap 2: Een plan maken. Herken je het probleem? Of heb je hetzelfde probleem al eens in een iets andere vorm gezien?

Ken je een vergelijkbaar probleem? Ken je een stelling die je misschien kan gebruiken?

Kijk naar het gevraagde! Probeer een bekend probleem te vinden dat dezelfde of een soortgelijke onbekende heeft.

Hier is een probleem dat samenhangt met het jouwe dat je al eerder opgelost hebt. Kun je het gebruiken? Kun je de resultaten gebruiken? Kun je de methode gebruiken? Moet je een extra element toevoegen om gebruik te kunnen maken van dat probleem?

Kun je het probleem anders, in je eigen woorden, formuleren? Kun je het op nog een andere manier formuleren? Bekijk de definities van dingen die voorkomen in het probleem.

Als je het probleem niet kunt oplossen, kijk dan naar een makkelijker probleem dat ermee samenhangt. Kun je een algemener probleem bedenken? Of een ander probleem van dezelfde soort? Bekijk speciale of bijzondere gevallen van het probleem. Neem een concreet voorbeeld, of vul een getal voor een parameter in. Kun je een deel van het probleem oplossen? Gebruik slechts een deel van de voorwaarden, laat de rest vallen; in hoeverre kun je het gevraagde nu bepalen, en hoe kan het nog veranderen? Kun je iets nuttigs uit de gegevens halen? Kun je andere gegevens bedenken waarmee je het gevraagde zou kunnen vinden? Kun je de gegevens of het gevraagde, of allebei, veranderen zodat de nieuwe gegevens en het nieuwe gevraagde dichter bij elkaar liggen?

Heb je alle gegevens gebruikt? Heb je aan alle voorwaarden voldaan?

Stap 3: Het plan uitvoeren. Terwijl je je plan voor de oplossing uitwerkt, moet je *elke stap controleren.* Kun je zien dat de stap juist is? En kun je dat bewijzen?

Stap 4: Terugkijken. *Onderzoek de gevonden oplossing.* Kun je het antwoord *controleren*? Kun je de redenering controleren? Kun je het antwoord op een andere manier vinden? Kun je het antwoord gemakkelijk inzien? Kun je het resultaat, of de gebruikte methode gebruiken voor een ander probleem?

Voorbeeld van een uitwerking volgens de strategie van Polya

Opgave 80.4 In Venetianië is de kleinste munteenheid de dukaat. De minister van financiën geeft zijn ambtenaren de volgende opdracht: 'Ik wens zes soorten geldbiljetten, elk ter waarde van een geheel aantal dukaten. Die zes waarden dienen zo te zijn, dat er een getal N bestaat met de volgende eigenschap:

Elk geldbedrag van n dukaten (n positief en geheel) waarbij $n \leq N$ is, kan worden betaald op zo'n manier dat van elke soort biljetten ten hoogste twee exemplaren worden gebruikt, hetzij om te betalen, hetzij om terug te geven. Ik wens die zes waarden bovendien zo, dat N zo groot mogelijk is.

Bepaal die zes waarden en geef daarbij een bewijs dat aan alle gestelde voorwaarden is voldaan.'

Los het probleem van die ambtenaren op.

Stap 1: Het probleem begrijpen *Wat wordt gevraagd?* We moeten zes biljetwaarden geven en bewijzen dat elk bedrag van n dukaten, $n \leq N$ betaald kan worden èn bewijzen dat N zo groot mogelijk is. *Wat zijn de gegevens?* De biljetwaarden en de bedragen die betaald moeten worden zijn in gehele dukaten. *Wat zijn de voorwaarden?* Bij een transactie mogen van elke biljetsoort maximaal twee biljetten van eigenaar wisselen. *Introduceer passende notatie.* We noemen de biljetwaarden w_i, waarbij i van 1 tot en met 6 loopt. Er mogen maximaal twee biljetten van een soort van eigenaar wisselen bij een transactie, dat betekend dat iemand er maximaal twee betaalt of twee krijgt. We noemen het aantal biljetten van waarde w_i dat bij een zekere transactie wordt betaald nu a_i, dan geldt $a_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Het betaalde bedrag is dan gelijk aan $\sum_{i=1}^{6} a_i w_i$. Als een bedrag n betaald kan worden, dan kan $-n = \sum_{i=1}^{6} -a_i w_i$ ook betaald worden.

Stap 2: Een plan maken *Kijk naar een makkelijker probleem dat ermee samenhangt.* We kunnen het probleem op twee manieren makkelijker maken: door minder biljetwaarden te zoeken of door het aantal biljetten dat tijdens een transactie gebruikt mag worden te verminderen. In beide gevallen wordt N natuurlijk kleiner. Laten we transacties bekijken waarbij minder biljetten gebruikt mogen worden.

- Tijdens een transactie mag maximaal 1 biljet gegeven worden, ofwel $a_i \in \{0, 1\}$. Als we 1 biljetwaarde hebben moet dit $w_1 = 1$ zijn, zodat we alle bedragen $0 \leq n \leq 1$ kunnen betalen. Als we 2 biljetwaarden hebben willen we ook $n = 2$ kunnen betalen, dus voegen we $w_2 = 2$ toe. We kunnen nu bedragen $0 \leq n \leq 1 + 2 = 3$ betalen. Als we $w_3 = 4$ toevoegen kunnen we bedragen $0 \leq n \leq 1 + 2 + 4 = 7$ betalen, etcetera.
- Tijdens een transactie mag maximaal 1 biljet gegeven of gekregen worden, ofwel $a_i \in \{-1, 0, 1\}$. Als we 1 biljetwaarde hebben moet dit $w_1 = 1$ zijn en geldt voor de bedragen n die we kunnen betalen $-1 \leq n \leq 1$. Als we 2 biljetwaarden hebben willen we ook $n = 2$ kunnen betalen; door w_2 zo te kiezen dat $w_2 - 1 = 2$ lukt dat. Als we kiezen $w_1 = 1$ en $w_2 = 3$ vinden we $-4 \leq n \leq 4$. Met $w_1 = 2$ en $w_2 = 3$ kunnen we $n = 4$ niet betalen en vinden we dus een kleinere n. Het lijkt goed om de oude biljetwaarde(n)

te behouden bij het toevoegen van een nieuwe waarde. Als we 3 biljetwaarden hebben willen we ook $n = 5$ kunnen betalen; dat kan als $w_3 - 4 = 5$, $w_3 = 9$. Dan geldt $-13 \leq n \leq 13$.

We bekijken nu weer ons oorspronkelijke probleem waarbij $a_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ en beginnen met 1 biljetwaarde. $w_1 = 1$ en $-2 \leq n \leq 2$. Met 2 biljetwaarden willen we ook $n = 3$ kunnen betalen, dus $w_2 - 2 = 3$, $w_2 = 5$. Er geldt $-12 \leq n \leq 12$. Met 3 biljetwaarden willen we $n = 13$ kunnen betalen, dat kan als $w_3 - 12 = 13$, $w_3 = 25$ en er geldt $-62 \leq n \leq 62$. Voor w_4 vinden we op deze manier $w_4 - 62 = 63$, $w_4 = 125$. We herkennen machten van 5. Ons vermoeden is nu dat met $w_i = 5^{i-1}$ geldt dat we bedragen n kunnen betalen met $n \leq 2 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + \ldots + 2 \cdot 5^5 = 7812$.

Stap 3: Het plan uitvoeren We willen nu bewijzen dat voor biljetwaarden $w_i = 5^{i-1}$, $1 \leq i \leq 6$ geldt dat alle bedragen n met $n \leq N$ betaald kunnen worden en dat N maximaal is. We vermoeden $N = 7812$. We bewijzen eerst dat we alle bedragen n kunnen betalen.

$n = \sum_{i=1}^{6} a_i 5^{i-1}$, $a_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ Het 5-tallig stelsel is makkelijker te bekijken als de coëfficiënten a_i in $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ zitten. $n + 2 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + \ldots + 2 \cdot 5^5 = \sum_{i=1}^{6} (a_i + 2) 5^{i-1}$, dus $n + 7812 = \sum_{i=1}^{6} b_i 5^{i-1}$ met $b_i = a_i + 2$ en $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. In het 5-tallig stelsel heeft elk getal kleiner dan 5^6 een unieke schrijfwijze met coëfficienten $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ voor i is 1 tot en met 6. We kunnen alle $n + 7812 < 5^6$ dus zo schrijven en dus alle bedragen $n \leq 5^6 - 1 - 7812 = 7812$ betalen. We weten nu ook dat $N \geq 7812$.

Nu willen we nog bewijzen dat $N = 7812$. Dat kan door te bewijzen dat $N \leq 7812$. We hebben 6 biljetwaarden en 5 mogelijkheden voor het aantal biljetten van zekere waarde dat van eigenaar verwisseld, dus hebben we 5^6 mogelijke transacties. Als we alle bedragen $n \leq N$ kunnen betalen, dan kunnen we alle bedragen n met $-N \leq n \leq N$ betalen en dit zijn er $2N + 1$. Er geldt dus $2N + 1 \leq 5^6$ en hieruit volgt $N \leq 7812$. Samen met $N \geq 7812$ levert dit gelijkheid.

Stap 4: Terugkijken *Kun je het antwoord controleren?* De boven- en ondergrens van N zijn aan elkaar gelijk en dat is een goed teken. *Kun je het resultaat gebruiken voor een ander probleem?* Als we een biljettenstelsel zoeken met k biljetwaarden, waarbij maximaal $\frac{l-1}{2}$ exemplaren van eigenaar mogen verwisselen, dan vinden we biljetwaarden $w_i = l^{i-1}$ voor $1 \leq i \leq k$ en er geldt $N = \frac{l^k - 1}{2}$.

Hoofdstuk 5

Theorie Combinatoriek

Combinatoriek gaat over het tellen van dingen (mensen, knikkers, wegen) die aan bepaalde eisen voldoen. Om het tellen te vereenvoudigen en om die eisen helder weer te geven voeren we eerst wat notatie in.

5.1 $\ldots$-notatie

Als we veel getallen bij elkaar op moeten tellen, bijvoorbeeld alle natuurlijke getallen kleiner of gelijk aan 100, dan schrijven we die som liever niet helemaal uit. We kunnen puntjes gebruiken om aan te geven dat niet alle termen genoemd worden. De afspraak is dat we $\ldots$ (drie puntjes) schrijven als duidelijk is wat bedoeld wordt. In het algemeen is het niet zo dat op de drie plaatsen van de puntjes precies drie termen ingevuld moeten worden. De puntjes kunnen we zowel binnen als buiten een opsomming schrijven; we zien eerst een aantal voorbeelden van dat eerste.

In het voorbeeld zouden we schrijven $1 + 2 + \ldots + 100$ en er vanuit gaan dat de lezer ziet dat het verschil tussen de termen telkens 1 is. Maar als we het optellen van de natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan 16 afkorten als $1 + 2 + \ldots + 16$ kan de lezer ook denken dat een term uit de voorafgaande term ontstaat door met 2 te vermenigvuldigen. In dit geval kunnen we de som beter afkorten als $1 + 2 + 3 + \ldots + 16$, zodat er geen twijfel kan zijn over het verband tussen de termen.

Ook gebruiken we de notatie met puntjes als het aantal dingen dat opgeteld moet worden niet vast is. We schrijven de som van de natuurlijke getallen kleiner of gelijk aan n als $1 + 2 + 3 + \ldots + n$. We kunnen deze som niet helemaal uitschrijven zonder puntjes.

De $\ldots$-notatie wordt niet alleen gebruikt als we getallen bij elkaar optellen. We schrijven bijvoorbeeld ook $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$ voor het produkt van de getallen 1 tot en met 10. Een rij getallen, of in het algemeen een rij termen, kunnen we weergeven met puntjes: $1, 2, \ldots, 10$, maar ook $1, 2, 3, \ldots$ als de rij oneindig doorgaat. Dat laatste geval is een voorbeeld van puntjes buiten de opsomming; de rij bestaat nu uit alle positieve gehele getallen. Ook $a_1, a_2, a_3, \ldots$ noemen we een rij. a_i is een term van de rij en i noemen we de index (meervoud: *indices*). De index doorloopt de gehele getallen vanaf 0 of 1. Op de plaats van de puntjes moeten nu de termen met passende indices worden gelezen. $a_1, a_2, \ldots a_5$ staat bijvoorbeeld voor a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

5.2 $\sum$-notatie

Een som van veel of een onbepaald aantal getallen kunnen we behalve met de puntjesnotatie ook schrijven met de $\sum$-notatie. $\sum$ (spreek uit: *sigma*) is de griekse hoofdletter s van som. Een voorbeeld: $1+2+\ldots+n$ korten we af tot $\sum_{i=1}^{n} i$. i loopt dan over de gehele getallen vanaf 1 tot en met n. Er geldt $1+2+4+\ldots+64 = 2^0+2^1+2^2+\ldots+2^6 = \sum_{i=0}^{6} 2^i$ en $a_1+a_2+\ldots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Bij het $\sum$-teken horen een gebonden variabele, een onder- en een bovengrens voor die variabele, en een functie die aangeeft op welke manier de termen die opgeteld worden afhangen van de variable. We bekijken een voorbeeld: $\sum_{i=k}^{l} f(i) = f(k) + f(k+1) + \ldots + f(l)$. Hierin is i de gebonden variabele, k de onder- en l de bovengrens voor i (er wordt dus gesommeerd over alle gehele getallen i waarvoor geldt $k \leq i \leq l$) en is f de functie. Dat i een gebonden variabele is betekent dat we i mogen vervangen door een andere letter, mits we dat doen voor alle voorkomens van i, en dat de waarde van de uitdrukking dan niet verandert: $\sum_{i=k}^{l} f(i) = \sum_{j=k}^{l} f(j)$. Niet-gebonden variabelen mogen we niet zomaar door een andere letter vervangen.

Normaal is de ondergrens kleiner of gelijk aan de bovengrens. Als de ondergrens groter dan de bovengrens is zijn er helemaal geen termen die gesommeerd kunnen worden. We spreken af dat de uitkomst van de som dan 0 is. Dit noemen we de lege-somconventie. Er geldt dus bijvoorbeeld $\sum_{i=0}^{-5} i = 0$. (Merk op dat dit niet hetzelfde is als $\sum_{i=-5}^{0} i$; deze laatste som is -15.)

De functie f kan ook eenvoudiger (bijvoorbeeld een constante) of ingewikkelder zijn. Zo is $\sum_{i=1}^{10} 3 = 3+3+\ldots+3 = 30$, $\sum_{i=0}^{49}(2i+1) = 1+3+5+\ldots+99$ en $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1+4+9+\ldots+100$. Het voordeel van de $\sum$-notatie is dat de functie f het verband tussen de termen al aangeeft, terwijl we dat verband bij de notatie met puntjes zelf moeten zoeken. Het voordeel van de puntjesnotatie is dat deze meer lijkt op de gewone som. We gebruiken beide notaties door elkaar.

$\sum_{i=1}^{10}(i+4) = (1+4)+(2+4)+\ldots+(10+4) = (1+2+\ldots+10)+\underbrace{4+4+\ldots+4}_{10 \text{ termen } 4} = \sum_{i=1}^{10} i+40$ (let op de haakjes; het verschil tussen $(i+4)$ en $i+40$), $\sum_{i=1}^{10}(i+5) = \sum_{i=1}^{10} i+50$ en voor een constante c geldt dus $\sum_{i=1}^{10}(i+c) = \sum_{i=1}^{10} i + 10c$. $\sum_{i=1}^{10}(i+j) = \sum_{i=1}^{10} i + 10j$, want j is een constante als we sommeren over i, en nu geldt $\sum_{j=1}^{10}(\sum_{i=1}^{10}(i+j)) = \sum_{j=1}^{10}(\sum_{i=1}^{10} i + 10j) = \sum_{j=1}^{10}(55+10j) = 550 + 10 \cdot \sum_{j=1}^{10} j = 550 + 10 \cdot 55 = 1100$. We kunnen dus ook over twee variabelen sommeren. De haakjes om de tweede som mogen we weglaten, we schrijven $\sum_{j=1}^{10}\sum_{i=1}^{10}(i+j)$. Als de grenzen van de tweede som niet afhankelijk zijn van de variabele van de eerste mogen we de somtekens verwisselen: $\sum_{j=1}^{10}\sum_{i=1}^{10}(i+j) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}(i+j)$.

We bekijken een voorbeeld met een dubbele som. Hoeveel mogelijke eindstanden van een voetbalwedstrijd zijn er als we weten dat team A maximaal 4 doelpunten heeft gemaakt en heeft gewonnen? Dan heeft A 1, 2, 3 of 4 doelpunten gescoord en B minder dan respectievelijk 1, 2, 3 of 4. Met twee somtekens kunnen we het aantal mogelijke uitslagen nu als volgt opschrijven: $\sum_{a=1}^{4}\sum_{b=0}^{a-1} 1$. (De functie van de tweede som is 1, omdat elke eindstand 1 bijdraagt aan het aantal mogelijke eindstanden.) We mogen de somtekens nu niet omwisselen, want als we $\sum_{b=0}^{a-1}\sum_{a=1}^{4} 1$ uit willen rekenen weten we niet hoe groot de bovengrens van de eerste som is.

Natuurlijk kunnen we ook meer dan twee somtekens gebruiken in een uitdrukking.

Eigenschappen van de som:

- $\sum_{i=k}^{l}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=k}^{l} f(i) + \sum_{i=k}^{l} g(i)$
- $\sum_{i=k}^{l} c \cdot f(i) = c \cdot \sum_{i=k}^{l} f(i)$

  Bewijs: $\sum_{i=k}^{l} c \cdot f(i) = c \cdot f(k) + c \cdot f(k+1) + \ldots + c \cdot f(l) = c \cdot (f(k)+f(k+1)+\ldots+f(l)) = c \cdot \sum_{i=k}^{l} f(i)$.
- $\sum_{i=k}^{l} f(i) = f(k) + \sum_{i=k+1}^{l} f(i) = \sum_{i=k}^{l-1} f(i) + f(l)$
- $\sum_{i=k}^{l} f(i) + \sum_{i=l+1}^{m} f(i) = \sum_{i=k}^{m} f(i)$
- $\sum_{i=k}^{l} c = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{l-k+1 \text{ termen } c} = (l-k+1) \cdot c$

5.3 $\prod$-notatie

Op analoge wijze als de $\sum$-notatie voor het optellen van veel termen, voeren we nu de $\prod$-notatie in voor het vermenigvuldigen van veel termen. De letter $\prod$ (spreek uit: *pi*) is de griekse hoofdletter p van produkt. Een voorbeeld: $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 = \prod_{i=1}^{10} i$ en $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{100} = \prod_{i=1}^{100} x_i$.

Ook bij het $\prod$-teken horen een gebonden variabele, een onder- en een bovengrens voor die variabele, en een functie die aangeeft op welke manier de termen die opgeteld worden afhangen van de variable. We bekijken weer een voorbeeld: $\prod_{i=k}^{l} f(i) = f(k) \cdot f(k+1) \cdot \ldots \cdot f(l)$. Hierin is i de gebonden variabele, k de onder- en l de bovengrens voor i (er wordt dus vermenigvuldigd over alle i's waarvoor geldt $k \leq i \leq l$) en is f de functie.

Als de ondergrens groter dan de bovengrens is zijn er geen termen die vermenigvuldigd kunnen worden. We spreken af dat de uitkomst van het produkt dan 1 is. Dit noemen we de leeg-produktconventie. Een voorbeeld: $\prod_{i=2}^{0} f(i) = 1$.

Net zoals bij het somteken kunnen we ook meer dan één produktteken gebruiken in een uitdrukking.

Eigenschappen van het produkt:

- $\prod_{i=k}^{l} (f(i) \cdot g(i)) = \prod_{i=k}^{l} f(i) \cdot \prod_{i=k}^{l} g(i)$
- $\prod_{i=k}^{l} f(i) = f(k) \cdot \left(\prod_{i=k+1}^{l} f(i)\right) = \left(\prod_{i=k}^{l-1} f(i)\right) \cdot f(l)$
- $\prod_{i=k}^{l} f(i) \cdot \prod_{i=l+1}^{m} f(i) = \prod_{i=k}^{m} f(i)$
- $\prod_{i=k}^{l} c = c^{k-l+1}$

  Bewijs: $\prod_{i=k}^{l} c = \underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{k-l+1 \text{ factoren } c} = c^{k-l+1}$.

5.4 Rekenkundige rij

Soms kunnen we een som van de vorm $\sum_{i=1}^{n} t_i$ gemakkelijk uitrekenen, zelfs als n onbekend is.

Als het verschil tussen de opeenvolgende termen in een rij $t_1, t_2, t_3, \ldots$ constant is noemen we de rij een rekenkundige rij. Voor alle indices i geldt dan $t_{i+1} - t_i = v$, waarbij v het constante verschil is. Er geldt $t_2 = t_1 + v$, $t_3 = t_2 + v = t_1 + 2v$ en dus $t_n = t_1 + (n-1)v$; t_1 noemen we de beginterm. Een voorbeeld van zo'n rekenkundige rij is $3, 7, 11, 15, \ldots$; bij deze rij horen beginterm 3 en verschil 4.

De som $\sum_{i=1}^{n} t_i$ van de eerste n termen van een rekenkundige rij kunnen we nu eenvoudig uitrekenen.

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 + (t_1 + v) + \ldots + (t_1 + (n-1)v)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = (t_1 + (n-1)v) + \ldots + (t_1 + v) + t_1 \qquad +$$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \underbrace{(2t_1 + (n-1)v) + (2t_1 + (n-1)v) + \ldots + (2t_1 + (n-1)v)}_{\text{aantal termen is } n}$$

Het rechterlid kunnen we schrijven als $n \cdot (2t_1 + (n-1)v)$ en dat is gelijk aan $n \cdot (t_1 + t_n)$. We delen beide kanten door twee en vinden als formule voor de som van de eerste n termen van een rekenkundige rij:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (t_1 + t_n)$$

In woorden: de som van de eerste n termen van een rekenkundige rij is de helft van het aantal termen n maal de eerste plus de laatste term.

Enkele voorbeelden:

$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$,

$3 + 7 + 11 + \ldots + 99 = \sum_{i=1}^{24} (3 + (n-1) \cdot 4) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (3 + 99) = 1224$.

5.5 Meetkundige rij

Een andere bijzondere rij is de meetkundige rij. We noemen een rij $t_1, t_2, t_3 \ldots$ meetkundig als het quotiënt van twee opeenvolgende termen constant is. Voor alle indices i geldt dan $\frac{t_{i+1}}{t_i} = r$, waarbij we r de constante reden noemen. Als we de beginterm t_1 nu b noemen geldt $t_n = b \cdot r^{n-1}$ en ziet de rij er uit als $b, br, br^2, \ldots$. Ook van een meetkundige rij kunnen we de som van de eerste n termen eenvoudig uitrekenen.

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} b \cdot r^{i-1} & = & b + br + \ldots + br^n \\ r \cdot \sum_{i=1}^{n} b \cdot r^{i-1} & = & \quad br + \ldots + br^{n-1} + br^n \quad - \\ \hline (1-r) \cdot \sum_{i=1}^{n} b \cdot r^{i-1} & = & b - br^n \end{array}$$

Beide kanten delen door $1 - r$ levert de formule voor de som van de eerste n termen van een meetkundige rij:

$$\sum_{i=1}^{n} b \cdot r^{i-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} \cdot b$$

Een voorbeeld:

$1 + 2 + 4 + \ldots + 64 = \sum_{i=1}^{7} 1 \cdot 2^{i-1} = \frac{1-2^7}{1-2} \cdot 1 = 2^7 - 1$.

5.6 Verzamelingenleer

Met $\{1, 2, \ldots, 10\}$ bedoelen we de verzameling van de getallen 1 tot en met 10. We kunnen deze ook schrijven als $\{n | \quad 1 \leq n \leq 10, \quad n \text{ geheel}\}$ en dit lezen we als de verzameling van alle n die voldoen aan de eisen '$1 \leq n \leq 10$' en 'n is een geheel getal'. Een ander voorbeeld is de verzameling D_{12} van delers van 12: $D_{12} = \{d | \quad d \text{ is een deler van } 12\} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ en $D_{12}^{+} = \{d | \quad d \text{ is een deler van } 12, d > 0\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

$4 \in D_{12}$ (spreek uit: *4 is een element van* D_{12}) geeft aan dat 4 in de verzameling D_{12} zit. Er geldt $5 \notin D_{12}$ (*5 is geen element van* D_{12}).

De verzameling die geen enkel element bevat noemen we de lege verzameling, we schrijven $\emptyset$.

Omdat alle delers van 6 ook delers van 12 zijn geldt $D_6 \subseteq D_{12}$ (*D_6 is een deelverzameling van D_{12}*). Niet alle delers van 8 zijn een deler van 12 en dus geldt $D_8 \nsubseteq D_{12}$ (*D_8 is geen deelverzameling van D_{12}*).

De vereniging van A en B bevat alle elementen die in A of in B of in allebei zitten; we schrijven $A \cup B$. $D_{12}^+ \cup D_{15}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15\}$. De doorsnede van A en B bevat alle elementen die in A èn in B zitten, ofwel het gemeenschappelijke deel van A en B; we schrijven $A \cap B$. $D_{12}^+ \cap D_{15}^+ = \{1, 3\}$ is de verzameling van alle positieve delers van 12 èn 15. We noemen twee (of meer) verzamelingen disjunct als ze geen enkel element gemeenschappelijk hebben, dus als hun doorsnede leeg is.

Met $|A|$ (soms ook $\#A$) bedoelen we de grootte, ofwel het aantal elementen, van de verzameling A. Er geldt $|D_{12}^+| = 6$.

$\min D_{12}^+ \quad (= 1)$ is het kleinste element van de verzameling en $\max D_{12}^+ \quad (= 12)$ het grootste. Niet elke verzameling heeft een grootste en kleinste element. De grootste gemene deler van 12 en 15 is nu $\max\{d| \quad d$ is een deler van 12 èn van $15\} = \max(D_{12} \cap D_{15}) = \max\{-3, -1, 1, 3\} = 3$.

Enkele speciale verzamelingen zijn

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, de verzameling natuurlijke getallen, ofwel de verzameling van positieve gehele getallen en 0 (in sommige boeken wordt 0 niet tot de natuurlijke getallen gerekend),
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, de verzameling gehele getallen,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}| \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}\}$, de verzameling rationale getallen, ofwel de verzameling breuken,
- $\mathbb{R}$, de verzameling reële getallen, zoals bijvoorbeeld $sqrt2$, $\ln(5)$ en π, maar ook 1.

Er geldt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

5.7 Principe van inclusie en exclusie

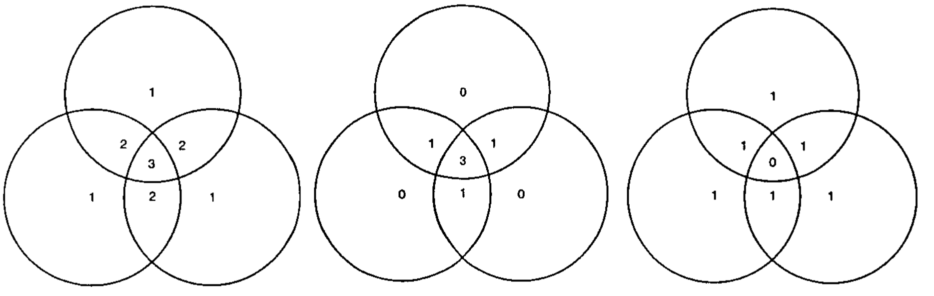
Soms hebben elementen uit een verzameling meerdere eigenschappen en willen we het aantal elementen met een of meer van die eigenschappen tellen. Een voorbeeld: De verzameling positieve natuurlijke getallen kleiner of gelijk aan 100 (ofwel {1,2,...,100}) bevat 50 getallen die een tweevoud zijn en 33 getallen die een drievoud zijn. Hoeveel getallen zijn nu een twee- of drievoud? 6 is zowel een tweevoud als een drievoud. Omdat de eigenschappen 'is een tweevoud' en 'is een drievoud' niet onafhankelijk zijn, krijgen we het gevraagde aantal niet door het aantal tweevouden en het aantal drievouden op te tellen. Dan zouden we een getal als 6 immers dubbel tellen. Alle getallen die een tweevoud èn een drievoud zijn tellen we dubbel, dit zijn precies alle getallen die een zesvoud zijn. De verzameling bevat 16 getallen die een zesvoud zijn. Het aantal getallen dat een twee- of drievoud is, is dus gelijk aan $50 + 33 - 16 = 67$.

We noemen in bovenstaand voorbeeld de verzameling tweevouden A en de verzameling drievouden B. De verzameling zesvouden is dan gelijk aan $A \cap B$. Er geldt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

en dit is algemeen waar voor twee verzamelingen A en B. We noemen dit het principe van inclusie en exclusie. We kunnen het principe van inclusie en exclusie ook voor meerdere verzamelingen formuleren, bijvoorbeeld voor drie:

Gegeven drie verzamelingen A, B en C, bereken $|A \cup B \cup C|$. Als we het aantal elementen van A, B en C bij elkaar optellen, dan tellen we sommige elementen dubbel of zelfs driedubbel. In het eerste plaatje zien we de drie verzamelingen. In elke deelverzameling staat aangegeven hoeveel keer de elementen uit die deelverzameling geteld worden.



Als we nu het aantal elementen van $A \cap B$, $B \cap C$ en $C \cap A$ van $|A| + |B| + |C|$ afhalen, hoe vaak tellen we alle elementen dan? In het tweede plaatje staat aangegeven hoeveel keer de elementen uit elke deelverzameling geteld worden als we $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$ berekenen.In het derde plaatje staat aangegeven hoeveel keer de elementen uit elke deelverzameling geteld worden als we $|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|)$ berekenen. We zien dat we dan alle elementen één keer tellen, behalve de elementen van $A \cap B \cap C$. Er geldt dus

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

5.8 Laatjesprincipe

Het laatjesprincipe zegt dat als je tien sokken over negen laden verdeelt, er dan tenminste één lade is met twee (of meer) sokken. We kunnen met het laatjesprincipe bijvoorbeeld ook bewijzen dat er in een groep met 1000 mensen altijd drie mensen zijn die op dezelfde dag jarig zijn. Als we 1000 mensen over 365 (of 366) mogelijke verjaardagen verdelen is er immers altijd een dag waarop drie (of meer) mensen jarig zijn.

5.9 Combinaties en rangschikkingen

We bekijken verschillende telproblemen.

5.9.1 Rangschikking met herhaling

Een voorbeeld: Op hoeveel manieren kunnen vijf leerlingen een van drie verschillende vakken kiezen? Elke leerling kiest uit drie vakken en het maakt natuurlijk verschil of Anne wiskunde kiest of Bob. Het aantal manieren waarop de leerlingen kunnen kiezen is $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.

Het herhaaldelijk kiezen van een vak door verschillende leerlingen is een voorbeeld van een rangschikking met herhaling. Bij een rangschikking is de volgorde van belang en 'met herhaling' geeft aan dat een zelfde keuze meerdere keren gemaakt kan worden. Het aantal rangschikkingen met herhaling van k uit n is n^k.

5.9.2 Permutatie

Een voorbeeld: Op hoeveel manieren kun je vijf mensen op een rijtje zetten? Voor de eerste plaats kun je kiezen uit vijf mensen, voor de tweede plaats zijn dan nog vier mogelijkheden, voor de derde plaats nog drie, etc. Het aantal manieren waarop je vijf mensen op een rijtje kunt zetten is $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Het op een rijtje zetten van vijf mensen is een voorbeeld van een permutatie. Bij een permutatie wordt een aantal dingen in een bepaalde volgorde gezet. Het aantal permutaties van n is $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Een kortere schrijfwijze voor $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ is $n!$ (spreek uit: n *faculteit*). We spreken af dat $0! = 1$.

5.9.3 Rangschikking zonder herhaling

Een ander voorbeeld: Op hoeveel manieren kan uit een vereniging met zeven leden een bestuur met een voorzitter, een secretaris en een penningmeester worden gevormd? Eerst wordt een voorzitter gekozen, hiervoor zijn 7 kandidaten, vervolgens zijn er nog 6 kandidaten voor de functie van secretaris en daarna nog 5 kandidaten voor de functie van penningmeester. Het aantal manieren waarop dit bestuur gevormd kan worden is $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$.

Het kiezen van een bestuur is een voorbeeld van een rangschikking zonder herhaling. Bij een rangschikking is de volgorde van belang en 'zonder herhaling' geeft aan dat elke keuze slechts eenmaal gemaakt kan worden. Het aantal rangschikkingen zonder herhaling van k uit n is $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Merk op dat een rangschikking zonder herhaling van n uit n hetzelfde is als een permutatie van n elementen.

Een veel voorkomend telprobleem is het trekken van knikkers uit een vaas met verschillende kleuren knikkers. 'Trekken met terugleggen' betekent dat een knikker die uit de vaas getrokken wordt meteen wordt teruggelegd in de vaas. Het aantal knikkers (van de verschillende kleuren) in de vaas verandert dan niet. 'Trekken zonder terugleggen' betekent dat een knikker die uit de vaas getrokken wordt niet wordt teruggelegd in de vaas. Het aantal knikkers (van de verschillende kleuren) in de vaas verandert dan dus wel. 'Trekken met terugleggen' is een rangschikking met herhaling en 'trekken zonder terugleggen' is een rangschikking zonder herhaling.

5.9.4 Combinatie

Weer een ander voorbeeld: Op hoeveel manieren kun je uit zeven mensen een groepje van drie vormen? Eerst kies je iemand, vervolgens nog iemand en daarna nog iemand, dit geeft $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ mogelijkheden. Maar voor het groepje maakt de volgorde waarin de mensen gekozen zijn niet uit. ('Anne, Bob, Cees' levert immers hetzelfde groepje op als 'Cees, Anne, Bob'.) Op hoeveel manieren kun je drie mensen kiezen die hetzelfde groepje vormen? Dat kan op $3! = 6$ manieren (het aantal permutaties van 3). Van de 210 mogelijkheden leveren er dus steeds 6 hetzelfde groepje op. Het aantal verschillende groepjes dat gevormd kan worden is dus $\frac{210}{6} = 35$.

Het vormen van een groepje is een voorbeeld van een combinatie. Het aantal combinaties van k uit n is het aantal manieren om k objecten uit n objecten te kiezen.Bij een combinatie is de volgorde niet van belang en kan elke keuze slechts eenmaal gemaakt worden. Het aantal combinaties van k uit n is $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ en we korten dit af tot $\binom{n}{k}$ (spreek uit: n *boven* k).

Ook bij dit telprobleem hoort een voorbeeld waarin knikkers uit een vaas met verschillende kleuren knikkers worden getrokken. Een greep doen uit een vaas met knikkers (er dus enkele tegelijk pakken) is een combinatie. Het kiezen van een deelverzameling van k elementen uit een verzameling van n elementen is ook een combinatie. Het aantal van deze combinaties is $\binom{n}{k}$.

Handen schudden is een ander voorbeeld. Als tien mensen elkaar de hand schudden, hoeveel handdrukken zijn er dan in totaal? Voor een handdruk zijn twee mensen nodig en het aantal handdrukken is dus gelijk aan het aantal combinaties van twee uit tien, is $\binom{10}{2} = 45$.

5.9.5 Binomium van Newton

Hoe ziet $(a+b)^n$ eruit als we de haakjes wegwerken? Voor kleine n werken we die haakjes gewoon zelf uit en we zien dat geldt

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Maar voor grotere n is het wegwerken van de haakjes veel werk. Is er een snelle manier om te weten hoe de uitdrukking er zonder haakjes uit ziet?

De algemene formule voor de uitwerking van $(a+b)^n$ noemen we het binomium van Newton. Binomium betekent tweeterm. Voor willekeurige n zien de termen van de formule eruit als $a^{n-k}b^k$, waarbij k de waarden 0 tot en met n aanneemt. De coëfficiënt van $a^{n-k}b^k$, ook wel binomiaalcoëfficiënt geheten, noemen we nu c_k, dan geldt

$$(a+b)^n = c_0a^n + c_1a^{n-1}b + \ldots + c_nb^n$$

Nu bepalen we c_k. Bij de vermenigvuldiging van n termen $(a+b)$ ontstaat de term $a^{n-k}b^k$ als van die n termen $n-k$ keer de a wordt gekozen en k keer de b. Het aantal manieren om uit n termen $(a+b)$ k keer de term b te kiezen is gelijk aan het aantal combinaties k uit n. Er geldt dus dat de binomiaalcoëfficiënt c_k gelijk is aan $\binom{n}{k}$.

Het binomium van Newton is dus de formule die zegt dat

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

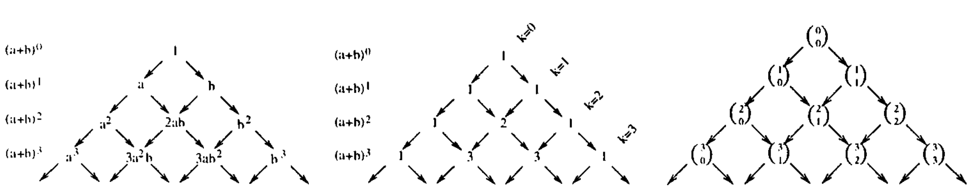
En deze formule hebben we hierboven bewezen. Aan het Binomium van Newton, waarin de rollen van a en b natuurlijk omgedraaid kunnen worden, maar ook aan de definitie van de binomiaalcoëfficiënt, zien we dat $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Door $a = 1$ en $b = 1$ in te vullen in het binomium van Newton vinden we de volgende relatie tussen de binomiaalcoëfficiënten:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

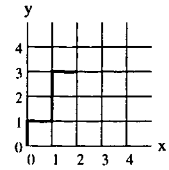
5.9.6 Driehoek van Pascal 1

We zetten de machten van $(a+b)^n$ nu voor $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ op een speciale manier in een plaatje. We zien getekend dat $(a+b)^{n+1} = a\cdot(a+b)^n$ (pijltjes naar links) $+b\cdot(a+b)^n$ (pijltjes naar rechts) . We vinden de coëfficiënt van een term nu door de som te nemen van de coëfficiënten links- en rechtsboven die term.



Als we alleen de binomiaalcoëfficiënten in de tekening opnemen verkrijgen we nu de zogenaamde driehoek van Pascal (zie het rechterplaatje). We zien dat geldt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

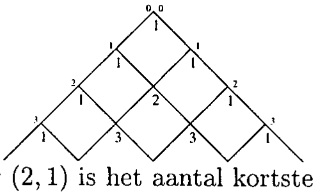
5.9.7 Routes tellen in een rooster



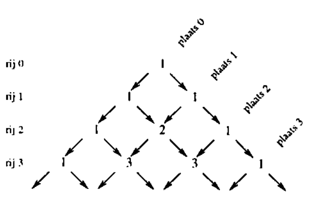
We bekijken kortste routes in een rooster. Hiernaast zien we een kortste route vanuit de oorsprong naar punt $(2,3)$. Kenmerkend voor een kortste route is dat deze alleen stappen naar rechts en naar boven bevat, er wordt niet teruggelopen. Hoeveel kortste routes zijn er nu naar het punt (p,q)?

Een kortste route naar (p,q) bestaat uit p stappen naar rechts en q naar boven, en dus in totaal uit $p+q$ stappen. We vinden een willekeurige kortste route door van de $p+q$ stappen die gedaan worden, er p te kiezen die naar rechts zijn (de rest is dan naar boven). Het aantal kortste routes is dus gelijk aan het aantal manieren om p stappen te kiezen uit $p+q$ en dus aan het aantal combinaties van p uit $p+q$. Het aantal kortste routes vanuit de oorsprong naar (p,q) is $\binom{p+q}{p}$.

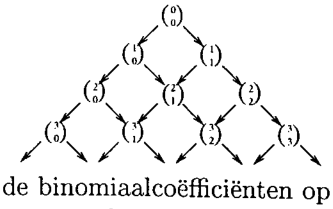
5.9.8 Driehoek van Pascal 2



We kunnen de driehoek van Pascal ook vinden door het rooster te kantelen. Als we het rooster kantelen gebeurt het volgende: stappen in de richting van de x- en y-as gaan nu over in respectievelijk stappen naar links en rechts. Van de oorsprong naar de oorsprong is precies één kortste route. Naar het punt $(0,1)$ is één kortste route, namelijk de stap van $(0,0)$ naar $(0,1)$. Het aantal kortste routes naar $(2,1)$ is het aantal kortste routes naar $(0,1)$ plus het aantal kortste routes naar $(1,0)$, is twee. We kunnen het aantal kortste routes naar een punt vinden door het aantal kortste routes naar de linker- en rechterbovenbuur op te tellen. Op deze manier tellen we geen routes dubbel. In het plaatje staat nu bij een punt het aantal kortste routes naar dat punt.



Alle punten die we in precies n stappen bereiken zien we nu in de n^e rij van de driehoek staan. (De bovenste rij is de 0^e; we bereiken de oorsprong immers in 0 stappen.) Het eerste punt in de rij bereiken we door 0 stappen naar rechts te doen. Elk volgend punt in de rij bereiken we door één stap meer naar rechts te doen. Een route met k stappen naar rechts en n stappen in totaal hoort bij een combinatie van k uit n. Op plaats k van rij n staat dus het aantal combinaties $\binom{n}{k}$ van k uit n; mits we de plaatsen in zo'n rij bij 0 beginnen te tellen. In rij n vinden we dus achtereenvolgens $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$.



Door het aantal kortste routes naar de punten weer te geven met binomiaalcoëfficiënten vinden we weer de driehoek van Pascal. We zagen al dat het aantal kortste routes naar een punt gelijk is aan het aantal kortste routes naar de linkerbovenbuur plus die naar de rechterbovenbuur. Er geldt dus wederom $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Het totaal aantal routes met n stappen is nu gelijk aan de som van de binomiaalcoëfficiënten op de n^e rij: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$. Maar we kunnen een route met n stappen ook zien als een rijtje met n termen links (l) of rechts (r), een voorbeeld: $l, r, r, \ldots, l$. Het aantal routes is nu gelijk aan het aantal aantal rangschikkingen van n uit 2. Dit aantal is 2^n. We vinden dus weer

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Hoofdstuk 6

Theorie Algebra

Veel van de algebraopgaven vragen een bepaalde relatie te bewijzen, zoals een vergelijking of ongelijkheid in een aantal variabelen. We bekijken hiervoor een aantal technieken.

6.1 Algemene technieken

Soms wordt een ongelijkheid of vergelijking gemakkelijker om te bewijzen als we een substitutie uitvoeren. Bij een substitutie worden alle voorkomens van een bepaalde variabele vervangen door een vaste uitdrukking. Een voorbeeld: $(x-2)^2 = 5$, substitueer $x = y + 2$ dan gaat de vergelijking over in $y^2 = 5$ met oplossingen $y = \pm\sqrt{5}$ en dus met oplossingen $x = \pm\sqrt{5} + 2$. Het is belangrijk om àlle voorkomens van de variabele te vervangen, let daar in het bijzonder op bij een uitdrukking met een somteken. Een voorbeeld: $\sum_{i=2}^{11}(i-1)$, substitueer $j = i - 1$ en let op de grenzen, dan gaat de uitdrukking over in $\sum_{j=1}^{10} j$.

We noemen een uitdrukking symmetrisch in twee (of meer) variabelen als de uitdrukking niet veranderd als we de rollen van de variabelen verwisselen. Zo is $(a+b)^3$ symmetrisch in a en b. Elke eigenschap die we voor een van de variabelen afleiden geldt, als we de rollen verwisselen, ook voor de andere. Soms kun je eigenschappen voor een symmetrische uitdrukking afleiden door de variabelen te ordenen naar grootte; neem bijvoorbeeld aan dat $|a| \geq |b| \geq |c| \geq \dots$.

Als een vergelijking breuken bevat helpt het soms om deze gelijknamig (met dezelfde noemer) te maken.

6.2 Ongelijkheden

Enkele bekende ongelijkheden bekijken we nader.

6.2.1 Kwadratische ongelijkheden

De volgende ongelijkheden kunnen we afleiden uit de eenvoudige kwadratische ongelijkheid $x^2 \geq 0$:

$$x^2 \geq 0 \tag{1}$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab \tag{2}$$
$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \tag{3}$$
$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \tag{4}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ voor alle } a > 0, b > 0 \tag{5}$$
$$y + \frac{1}{y} \geq 2, \text{ voor alle } y > 0 \tag{6}$$

Immers: substitutie van $x = a - b$ in ongelijkheid (1) geeft (2). Optellen van $a^2 + b^2$ bij (2) geeft (3) en optellen van $2ab$ bij (2) en daarna worteltrekken geeft (4). Delen door ab van (2) levert voor $a > 0$ en $b > 0$ ongelijkheid (5). Substitutie van $a = y$ en $b = 1$ in (5) geeft (6).

Voorbeelden van opgaven waarin we deze ongelijkheden gebruiken zijn 86.3 en 91.1.

6.2.2 Driehoeksongelijkheid

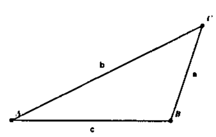
De volgende ongelijkheden noemen we de driehoeksongelijkheid:

$$|a| + |b| \geq |a+b| \quad \text{en} \quad ||a| - |b|| \leq |a-b| \quad \text{voor alle } a \text{ en } b$$

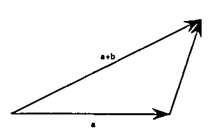
De eerste ongelijkheid bewijzen we door naar het kwadraat van $|a| + |b|$ te kijken. Er geldt $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|a||b| + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = |a+b|^2$. Omdat $|a| + |b| \geq 0$ en $|a+b| \geq 0$ vinden we met worteltrekken dat $|a| + |b| \geq |a+b|$.

De driehoeksongelijkheid is symmetrisch in a en b; zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $|a| \geq |b|$. Om de tweede ongelijkheid te bewijzen vervangen we in de eerste ongelijkheid a door $a - b$. Dit geeft $|a-b| + |b| \geq |a - b + b| = |a|$ en dus $|a-b| \geq |a| - |b| = ||a| - |b||$ (immers $|a| \geq |b|$).

De driehoeksongelijkheid dankt zijn naam aan het volgende: als a, b en c de lengtes zijn van de zijden van een driehoek dan geldt $a+b \geq c$, $b+c \geq a$ en $c+a \geq b$, zoals je direct kan zien aan het plaatje. Alleen als de drie punten op één lijn liggen geldt gelijkheid (voor één van de drie vergelijkingen).



Twee vectoren a en b met lengtes $|a|$ en $|b|$ tellen we op door ze kop-staart te leggen. $a + b$ is hun somvector en deze heeft lengte $|a+b|$. De drie vectoren vormen een driehoek (tenzij a en b dezelfde of tegengestelde richting hebben). Er geldt $|a| + |b| \geq |a+b|$. Gelijkheid is alleen mogelijk als a en b in elkaars verlengde liggen.



6.3 Polynomen

Een polynoom $f(x)$ is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots, + a_1 x_1 + a_0$$

x is de variabele van het polynoom en de getallen a_i zijn de coëfficiënten. De graad van het polynoom is de hoogste exponent van x die voorkomt; het is de grootste n waarvoor geldt $a_n \neq 0$.

(Vaak bekijken we polynomen met $a_n = 1$.) We korten de graad van polynoom $f(x)$ af tot $\deg f(x)$. Als $\deg f(x) = 0$ dan is $f(x) = a_0 x^0 = a_0$; f is dan onafhankelijk van x en f is dus een constante. Deze constante kan ook gelijk zijn aan 0, in dat geval kan $a_n = a_0$ dus wel gelijk zijn aan 0.

We kunnen polynomen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Enkele voorbeelden:

$$\begin{aligned}(x^3 - 2x + 5) + (x^6 + 2x - 1) &= x^6 + x^3 + 4\\ (x^3 - 2x + 5) - (x^3 + 4) &= -2x + 1\\ (x^2 - 5) \cdot (2x + 3) &= 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15\end{aligned}$$

Ook kunnen we delen met rest: bij twee polynomen $f(x)$ en $g(x)$ (met $\deg g(x) \leq \deg f(x)$) kunnen we twee unieke polynomen $q(x)$ (quotiënt) en $r(x)$ (rest) vinden waarvoor geldt:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{met } \deg r(x) < \deg g(x)$$

We kunnen $q(x)$ en $r(x)$ vinden met een staartdeling. Een voorbeeld: $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3$ en $g(x) = x^2 + 2x$,

$$\begin{array}{rlll} x^2 + 2x / & 2x^4 - x^3 & & + 3 \backslash 2x^2 - 5x \\ & \underline{2x^4 + 4x^3} & & \\ & \quad - 5x^3 & & + 3 \\ & \quad \underline{-5x^3 - 10x} & & \\ & & 10x & + 3 \end{array}$$

dus $q(x) = 2x^2 - 5x$ en $r(x) = 10x + 3$.

Als $f(a) = 0$ dan heet a een nulpunt van het polynoom $f(x)$. We zeggen ook wel: a is een wortel van de vergelijking $f(x) = 0$. Als we $f(x)$ delen door het polynoom $(x - a)$ dan vinden we unieke polynomen $q(x)$ en $r(x)$ zodanig dat

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x) \quad \text{met } \deg r(x) < \deg(x - a) = 1$$

Het polynoom $r(x)$ is dus een constante. Er geldt $f(a) = 0 \cdot q(a) + r$ en hieruit volgt $r = f(a) = 0$. Als a een nulpunt is van $f(x)$ dan is er dus een polynoom $q(x)$ zodat geldt

$$f(x) = (x - a)q(x)$$

We kunnen bovenstaand proces herhalen voor alle nulpunten van $f(x)$. Als $\deg f(x) = n$ vinden we n nulpunten, noem deze $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dan geldt

$$f(x) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Dit noemen we het ontbinden in factoren van $f(x)$. Enkele voorbeelden:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 35 \\ &= (x - 7)(x + 5) \end{aligned}$$

$$g(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 + 8x$$

We zien direct dat $g(0) = 0$ en met wat uitproberen vinden we ook $g(1) = 0$ dus

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 0)(x - 1)(x^2 + 2x - 8) \\ &= x(x - 1)(x - 2)(x + 4) \end{aligned}$$

We bekijken het polynoom $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. De vergelijking $f(x) = 0$ heeft drie wortels, noem deze x_1, x_2, x_3. Het verband tussen de polynoomcoëfficiënten en de wortels vinden we door haakjes weg te werken in de ontbinding in factoren van $f(x)$:

$$\begin{aligned} x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -(x_1 + x_2 + x_3) \\ a_1 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ a_0 &= -x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Dit soort vergelijkingen kunnen we gebruiken bij de sommige olympiadeopgaven, bijvoorbeeld bij 80.1 en 97.3.

Hoofdstuk 7

Algebra

7.1 Opgaven

Opgave 90.3 en 92.4 behoren ook tot de categorie Getaltheorie.

80.1 Gegeven is dat de functie f gedefiniëerd door

$$f(x) = x^3 - ax + 1, a \in \mathbb{R}$$

drie verschillende reëele nulpunten heeft.
Bewijs dat het nulpunt x_0 met de kleinste absolute waarde voldoet aan

$$\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$$

82.1 Welke van de beide getallen $(17091982!)^2$ en $17091982^{17091982}$ is het grootst?
(Onder $n!$, met n een natuurlijk getal, verstaat men $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

83.3 Gegeven zijn vier reëele getallen a, b, c en p. De getallen a, b en c zijn niet alle drie gelijk. Verder geldt dat

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$$

Bepaal alle mogelijke waarden van p en bewijs dat $abc + p = 0$.

84.3 Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ wordt a_n gedefinieerd door:

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$$

Bewijs dat voor elke n geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}$$

85.1 Voor zeker reëel getal p bestaat de oplossingsverzameling van de vergelijking

$$x^3 + px^2 + 3x - 10 = 0$$

uit drie verschillende reëele getallen a, b en c, waarbij $c - b = b - a > 0$.
Bereken p, a, b en c.

86.1 Men definieert een functie f door

$$f(x) = \frac{12x+9}{19x+86} \quad (x \neq -\frac{86}{19})$$

Laat zien dat er één reëel getal x_0 bestaat, zo dat de uitdrukking

$$f(x_0+h) \cdot f(x_0-h)$$

niet afhankelijk is van de keuze van h en bereken dat getal x_0.

86.3 Bewijs dat

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 10$$

als $a, b, c, d \geq 0$ en $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$.

87.2 a) Bewijs dat voor alle $x > 0$ geldt:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) Bewijs dat voor alle gehele getallen $n \geq 2$ geldt dat

$$1 < 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2$$

88.1 Gegeven zijn de reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ met de eigenschap dat:

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot (x-x_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

voor alle reële getallen x. Verder geldt dat $x_i \neq 0$ voor alle i.
Druk $x_1^{-2} + x_2^{-2} + \cdots + x_n^{-2}$ uit in $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

88.3 Gegeven zijn drie reële getallen a, b, c met de eigenschap dat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

Bewijs dat voor alle positieve oneven getallen n geldt dat

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}$$

90.1 Bewijs dat voor alle gehele $n > 1$ geldt:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) < n^n$$

90.3 Gegeven is van de functie $f : x \to ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$:

- alle coëfficiënten a, b, c en d zijn positief;
- voor elke $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ is $f(x)$ een geheel getal;
- $f(1) = 1$ en $f(5) = 70$.

a) Bewijs dat $a = \frac{1}{24}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{11}{24}$ en $d = \frac{1}{4}$.

b) Bewijs: voor elke $x \in \mathbb{Z}$ is $f(x)$ een geheel getal.

91.1 Bewijs dat voor elk drietal positieve reële getallen a, b en c geldt:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{a+b+c}$$

91.3 f is een reële functie. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$4f(f(x))-2f(x)-3x=0$$

Bewijs dat f alleen bij $x=0$ de waarde 0 aanneemt.

92.4 Voor ieder positief geheel getal n wordt $n?$ als volgt gedefinieerd:

$$n?=\begin{cases}1 & \text{als } n=1,\\ \frac{n}{(n-1)?} & \text{als } n\geq 2.\end{cases}$$

Bewijs dat geldt: $\sqrt{1992}<1992?<\frac{4}{3}\sqrt{1992}$.

94.5 Van de reële getallen a, b en c is gegeven dat ze voldoen aan de ongelijkheid

$$\left|ax^2+bx+c\right|\leq 1 \quad \text{voor alle } x\in[-1,+1]$$

Bewijs:

$$\left|cx^2+bx+a\right|\leq 2 \quad \text{voor alle } x\in[-1,+1]$$

95.3 Je hebt 101 knikkers, genummerd van 1 tot en met 101. De knikkers zijn verdeeld over twee bakken A en B. De knikker met nummer 40 zit in bak A. Je pakt deze knikker uit bak A en gooit hem in bak B. Hierdoor stijgt de waarde van het gemiddelde van alle nummers in A met $\frac{1}{4}$. Ook de waarde van alle nummers in bak B stijgt hierdoor met $\frac{1}{4}$.

Hoeveel knikkers zaten er oorspronkelijk in bak A?

97.3 a) Bekijk de tweedegraadsvergelijking $x^2+?x+?=0$.

Twee spelers zetten achtereenvolgens elk op de plaats van een vraagteken een geheel getal.

Toon aan dat de tweede speler er altijd voor kan zorgen dat de vergelijking twee gehele oplossingen krijgt.

(Nota bene: als de vergelijking twee gelijke gehele oplossingen heeft zeggen we ook dat de vergelijking twee gehele oplossingen heeft.)

b) Bekijk de derdegraadsvergelijking $x^3+?x^2+?x+?=0$.

Drie spelers zetten achtereenvolgens elk op de plaats van een vraagteken een geheel getal. De vergelijking blijkt drie gehele (waarbij weer eventueel gelijke) oplossingen te hebben. Gegeven is dat twee spelers elk een 3 op de plaats van een vraagteken gezet hebben.

Welk getal heeft de derde speler gezet? Bepaal dat getal en de plaats waar het gezet is en bewijs dat er maar één getal mogelijk is.

98.5 Bepaal alle oplossingen van de vergelijking

$$(x+1995)(x+1997)(x+1999)(x+2001)+16=0$$

7.2 Selectie

Van de negentien opgaven Algebra heb ik er tien geselecteerd. Bij deze geselecteerde opgaven geef ik hints en oplossingen. Hieronder geeft ik redenen waarom ik een opgave wel of niet geselecteerd heb.

Niet-geselecteerde opgaven

83.3 Bij het oplossen van deze opgave gebruik je alleen dat de vergelijking symmetrisch is. Daar er weinig theorie achter zit valt weinig meer te doen dan de oplossing geven, maar deze geeft geen kennis voor het oplossen van andere opgaven.

84.3 is vooral een oefening in volledige inductie, maar volledige inductie wordt in opgave 82.1 en 87.2 al geoefend.

85.1 De oplossing is wat getruukt en maakt gebruik van de betekenis van polynoomcoëfficiënten. Dit laatste komt aan bod in opgave 80.1 en 97.3.

88.1 demonstreert de techniek van eenvoudig beginnen, maar het uitschrijven van kleine gevallen en daarmee gevoel krijgen voor de uitdrukking neemt erg veel ruimte in beslag. Eenvoudig beginnen komt ook aan bod in 82.1 en 92.4.

88.3 Ook achter deze opgave zit weinig algemene theorie en deze geeft dan ook geen kennis voor het oplossen van andere opgaven.

90.1 De technieken die deze oplossing gebruikt (volledige inductie en het binomium van Newton of merkwaardig produkt) komen ook aan bod in 82.1 of 87.2 en 97.3.

90.3 is geselecteerd in de categorie Getaltheorie.

95.3 bestaat vooral uit het opstellen van vergelijkingen en dit komt al aan bod in opgave 90.3 van de categorie Getaltheorie en in de schoolstof.

98.5 Het enige interessante aan de oplossing van deze opgave is de substitutie $y = x + 1998$. Substitutie en het introduceren van nieuwe variabelen komen aan bod in opgave 91.1.

Geselecteerde opgaven

80.1 is een mooie illustratie van de betekenis van polynoomcoëfficiënten en een bewijs uit het ongerijmde.

82.1 gebruikt volledige inductie en het binomium van Newton, of eerst kijken naar een eenvoudig geval.

86.1 Deze opgave is ook mooi op te lossen met een plaatje van de functie en verder is het belangrijk om te weten wat het betekent dat een uitdrukking onafhankelijk is van een bepaalde variabele.

86.3 Enkele belangrijke ongelijkheden worden gebruikt om deze afschatting te maken.

87.2 vraagt een ongelijkheid met een somteken te bewijzen en daar dit lastig is voor leerlingen, maar wel af en toe voorkomt, selecteer ik deze opgave. Ook wordt in deze opgave gebruik gemaakt van substitutie en het merkwaardig produkt.

91.1 In de oplossing worden substitutie en een kwadratische ongelijkheid gebruikt. Substitutie zit in veel opgaven, maar vaak is het niet erg voor de hand liggend om toe te passen.

91.3 illustreert wat dan-en-slechts-dan inhoudt. Zo'n soort bewijs moeten leerlingen kunnen geven bij opgaven uit verschillende categorieën.

92.4 illustreert de heuristiek 'eenvoudig beginnen' en gebruikt eenvoudige afschattingen.

94.5 is de enige opgave waarin twee toch belangrijke technieken (extreme waarden-principe en driehoeksongelijkheid) aan bod komen.

97.3 De kennis die nodig is voor deze opgave ligt dicht bij de leerling (tweede- en derdegraadsvergelijking) en ook deze opgave gebruikt de betekenis van polynoomcoëfficiënten en het merkwaardig produkt.

7.3 Hints

80.1 Wat betekent het dat het polynoom f drie verschillende nulpunten heeft?

Kun de vergelijking herschrijven zodat deze makkelijker is? Is x_0 posititef of negatief?

82.1 Welk getal is het grootst denk je?

Kun je je vermoeden bewijzen voor een willekeurig getal n in plaats van voor $n = 17091982$?

Kun je het binomium van Newton gebruiken?

86.1 Wat betekent het dat de uitdrukking onafhanhelijk is van h?

Teken een plaatje.

86.3 Werkschema bij het bewijzen van ongelijkheden:

- Herken je een standaardongelijkheid?
- Gaat de ongelijkheid door substitutie over in een standaardongelijkheid?
- Kun je de variabelen schikken naar grootte?
- Kun je de ongelijkheid opdelen in stukken die je makkelijk kunt bewijzen?

87.2 a) Kun je het merkwaardig produkt gebruiken?

b) Je kunt de vergelijking splitsen in een linker- en rechterkant die je apart kunt bewijzen. Gebruik het resultaat van onderdeel a), gesommeerd over enkele k's.

91.1 Zie het werkschema bij het bewijzen van een ongelijkheid, in de hint bij 86.3.

91.3 Stel dat $f(0) = a$ en bewijs dat $a = 0$. Bewijs ook dat als geldt $f(b) = 0$, dat dan geldt $b = 0$.

92.4 Hoe ziet 1992? eruit?

Kun je de te bewijzen ongelijkheid eenvoudiger schrijven?

Bewijs de linker- en rechterongelijkheid los van elkaar.

94.5 Wat kun je uit de gegeven ongelijkheid halen?

Bekijk de extreme waarden van $cx^2 + bx + a$.

Kun j gebruik maken van standaardongelijkheden?

97.3 Wat betekent het dat een tweede- of derdegraadsvergelijking gehele oplossingen a en b of a, b en c heeft?

7.4 Oplossingen

80.1 Noem de nulpunten van f x_0, x_1 en x_2, waarbij we veronderstellen dat

$$|x_0| \leq |x_1| \leq |x_2| \tag{1}$$

Er geldt $f(x) = x^3 - ax + 1 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

dus (haakjes wegwerken)

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 &= 0 && (2)\\ x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 &= -a \\ -x_0x_1x_2 &= 1 && (3) \end{aligned}$$

We willen de ongelijkheid $\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$ afleiden voor x_0. We kijken eerst of x_0 positief of negatief is, dan weten we ook of a positief of negatief moet zijn.

Uit (3) volgt dat geen van de nulpunten gelijk is aan 0 en dat één of drie van de nulpunten negatief zijn en met (2) dat niet alledrie de nulpunten negatief zijn; er is dus precies één nulpunt dat negatief is. Stel $x_0 < 0$ dan geldt $x_1 > 0$ en $x_2 > 0$ en met $|x_2| \geq |x_0|$ dat $x_0 + x_1 + x_2 > 0$ wat in tegenspraak is met (2). Dus $x_0 > 0$.

Wil de ongelijkheid gelden moet in elk geval ook gelden dat $a > 0$; dat controleren we: $f(x_0) = x_0^3 - ax_0 + 1 = 0$ dus $a = \frac{x_0^3+1}{x_0} > 0$.

Omdat $a > 0$ is het in plaats van $\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$ ook voldoende om te bewijzen dat $1 < ax_0 < 2$. Omdat geldt $ax_0 = x_0^3 + 1$ is het ook voldoende om te bewijzen dat $0 < x_0^3 < 1$, ofwel $0 < x_0 < 1$.

$x_0 > 0$ hebben we al bewezen, dus hoeven we alleen $x_0 < 1$ nog te bewijzen. Stel $x_0 \geq 1$ dan geldt vanwege (1) en omdat de drie nulpunten verschillend zijn dat $|x_1| \geq 1$ en $|x_2| > 1$, maar dit geeft een tegenspraak met (3). Dus $x_0 < 1$ en de ongelijkheid $\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$ geldt.

82.1i Omdat 17091982 een te groot getal is om te onderzoeken op je rekenmachine, bekijken we eerst een paar kleinere gevallen: $1 = (1!)^2 = 1^1 = 1$, $4 = (2!)^2 = 2^2 = 4$, $36 = (3!)^2 > 3^3 = 27$, $576 = (4!)^2 > 4^4 = 256$. We vermoeden dat geldt $(n!)^2 > n^n$ voor voldoende grote n.

Met volledige inductie bewijzen we de stelling $(n!)^2 > n^n$, voor alle natuurlijke getallen $n \geq 3$.

De stelling is waar voor $n = 3$, zoals we hiervoor al zagen.

Stel dat voor zekere $n \geq 3$ geldt dat $(n!)^2 > n^n$ (de inductiehypothese); we bewijzen $((n+1)!)^2 > (n+1)^{n+1}$ door allebei de kanten naar elkaar toe te werken:

$$\begin{aligned} (n+1)^{n+1} &= (n+1)(n+1)^n \\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k \quad \text{binomium van Newton} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((n+1)!)^2 &= (n+1)^2 \cdot (n!)^2 \\ &> (n+1)(n+1)\cdot n^n \quad \text{inductiehypothese} \\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} n^n \end{aligned}$$

Als we nu kunnen bewijzen dat $n^n > \binom{n}{k}$ voor alle k dan zijn we klaar. Er geldt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}n^k &= \frac{1}{(n-k)!}\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot n^k \\ &< \frac{1}{(n-k)!}\cdot \underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{\text{aantal termen is } n-k}\cdot n^k \qquad \text{als } n-k>1\text{, anders geldt gelijkheid} \\ &= \frac{1}{(n-k)!}\cdot n^{n-k}\cdot n^k \\ &= \frac{1}{(n-k)!}\cdot n^n \\ &< n^n\end{aligned}$$

Omdat $n \geq 3$ bevat de som over k is 0 tot en met n zeker een term k waarvoor geldt $n-k>1$ en kunnen we bovenstaande afschatting gebruiken. Er geldt

$$((n+1)!)^2 > (n+1)\sum_{k=0}^{n} n^n > (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k = (n+1)^{n+!}$$

Met volledige inductie geldt nu $(n!)^2 > n^n$ voor alle $n \geq 3$, en dus ook voor 17091982.

82.1ii Omdat 17091982 een te groot getal is om te onderzoeken op je rekenmachine, bekijken we eerst een paar kleinere gevallen: $1 = (1!)^2 = 1^1 = 1$, $4 = (2!)^2 = 2^2 = 4$, $36 = (3!)^2 > 3^3 = 27$, $576 = (4!)^2 < 4^4 = 256$. We vermoeden dat geldt $(n!)^2 > n^n$ voor voldoende grote n.

Voor n geldt

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n)^2 \\ &= (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot\ldots\cdot(n\cdot 1) \\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)\end{aligned}$$

We willen nu graag bewijzen dat geldt $k(n-k+1) > n$ voor $1 \leq k \leq n$. Dit is hetzelfde als bewijzen dat $kn - k^2 + k - n > 0$ en dit is weer hetzelfde als $n(k-1) > k(k-1)$. Dit laatste is waar voor $1 < k < n$ en gelijkheid geldt als $k = 1$ of $k = n$. Er geldt dus

$$k(n-k+1) > n \text{ voor } 1 < k < n \qquad (*)$$

Als $n > 2$ kunnen we $(*)$ gebruiken om $\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$ af te schatten, want dan bevat het produkt een term waarvoor geldt $1 < k < n$. We vinden

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) > \prod_{k=1}^{n} n = n^n$$

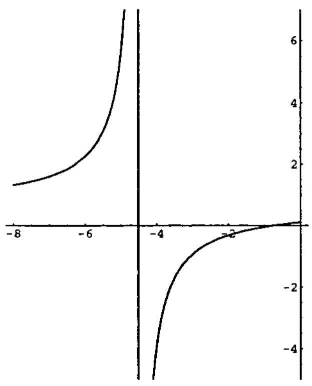
$(n!)^2 > n^n$ geldt voor $n > 2$ en dus ook voor 17091982.

86.1i Laat x_0 een reëel getal zijn waarvoor geldt dat $f(x_0+h)\cdot f(x_0-h)$ niet afhankelijk is van h. Dan geldt voor een zekere constante c dat

$$f(x_0+h)\cdot f(x_0-h) = c \quad \text{voor alle } h$$

Als $c = 0$ dan moet voor alle h gelden dat $f(x_0+h) = 0$ of $f(x_0-h) = 0$, en omdat $x = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$ het enige nulpunt van $f(x)$ is kan dat niet waar zijn.

Er geldt dus $c \neq 0$ en het produkt $f(x_0+h)\cdot f(x_0-h)$ is tekenvast: als bij veranderen van h een van de factoren van $f(x_0+h)\cdot f(x_0-h)$ van teken verandert, dan moet de andere ook van teken veranderen.



De grafiek van f is een hyperbool en $f(x)$ verandert alleen van teken als x het nulpunt of de verticale asymptoot passeert.

Laat h_0 de waarde zijn waarvoor geldt dat $f(x_0+h_0)$ het nulpunt $-\frac{3}{4}$ passeert, dan moet $f(x_0-h_0)$ de verticale asymptoot $-\frac{86}{19}$ passeren. Er geldt:

$$\begin{aligned} x_0 + h_0 &= -\frac{3}{4} \\ x_0 - h_0 &= -\frac{86}{19} \end{aligned}$$

Optellen levert $x_0 = \frac{1}{2}(-\frac{3}{4} - \frac{86}{19}) = -\frac{401}{152}$ en dit is de enige oplossing voor x_0.

86.1ii Laat x_0 een reëel getal zijn waarvoor geldt dat $f(x_0+h)\cdot f(x_0-h)$ niet afhankelijk is van h. Dan geldt voor een zekere constante c dat

$$f(x_0+h)\cdot f(x_0-h) = c \qquad \text{voor alle } h \qquad (*)$$

Omdat dit ook voor $h=0$ geldt is c gelijk aan $f(x_0)^2$.

$$\begin{aligned} f(x_0+h)\cdot f(x_0-h) &= f(x_0)^2 & \text{voor alle } h \\ \frac{(12(x_0+h)+9)(12(x_0-h)+9)}{(19(x_0+h)+86)(19(x_0-h)+86)} &= \frac{(12x_0+9)^2}{(19x_0+86)^2} & \text{voor alle } h \end{aligned}$$

Kruislings vermenigvuldigen en gelijke termen wegstrepen geeft

$$h^2(-392616x_0 - 1035783) = 0 \qquad \text{voor alle } h$$

Bovenstaande geldt voor alle h en dus ook voor $h=1$, hieruit volgt

$$\begin{aligned} (-392616x_0 - 1035783) &= 0 \\ x_0 &= -\frac{401}{152} \end{aligned}$$

$x_0 = -\frac{401}{152}$ is de enige oplossing van vergelijking $(*)$.

86.3 Voor alle x en y geldt $x^2+y^2 \geq 2xy$ en als we dit toepassen voor $x=a, y=b$ en $x=c, y=d$ zien we dat

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 2ab+2cd+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

$abcd = 1$ levert $cd = \frac{1}{ab}$ en dus

$$2ab+2cd+ab+ac+ad+bc+bd+cd = 3(ab+\frac{1}{ab}) + ac + \frac{1}{ac} + ad + \frac{1}{ad}$$

Voor alle positieve x geldt $x + \frac{1}{x} \geq 2$ en als we dit toepassen voor $x = ab$, $x = ac$ en $x = ad$ zien we dat geldt

$$3(ab+\frac{1}{ab}) + ac + \frac{1}{ac} + ad + \frac{1}{ad} \geq 3\cdot 2 + 2 + 2 = 10$$

En dus geldt de gegeven ongelijkheid.

87.2 a) Er geldt

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

en

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

waarmee de ongelijkheid bewezen is.

We kunnen de linker- en rechterhelft van de ongelijkheid (de zogenaamde linker- en rechterongelijkheid) ook bewijzen door de termen te kwadrateren en daarmee verder te rekenen.

b) Elke k die in de te bewijzen ongelijkheid voorkomt is een geheel positief getal en voor zo'n k geldt de ongelijkheid uit het eerste onderdeel

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \tag{1}$$

Eerst bekijken we de rechterkant van de te bewijzen ongelijkheid. We willen $2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ naar boven afschatten. Dit kunnen we doen door een afschatting naar beneden van $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ te gebruiken (merk op: de noemer bevat een 2).

Ongelijkheid (1) geeft een afschatting naar beneden van $\frac{1}{2\sqrt{k}}$. We mogen de ongelijkheden voor $k = 1$ tot n optellen, dit geeft

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

Van de sommatie aan de rechterkant blijven slechts twee termen over.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}-1 \tag{2}$$

Er geldt nu

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} &= 2\sqrt{n} - 2(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}) \\ &< 2\sqrt{n} - 2(\sqrt{n+1}-1) \quad \text{met (2)} \\ &= 2 + 2(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) \\ &< 2 \end{aligned}$$

En hiermee hebben we de rechterongelijkheid bewezen.

Nu bekijken we de linkerkant van de te bewijzen ongelijkheid. We willen $2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ naar beneden afschatten. Dit kunnen we doen door een afschatting naar boven van $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ te gebruiken.

Ongelijkheid (1) geeft geen afschatting naar boven van $\frac{1}{2\sqrt{k}}$, maar wel van $\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$. We mogen de ongelijkheden voor $k = 1$ tot n weer optellen, dit geeft

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{n+1}-1$$

We willen een afschatting voor een som met de algemene term $\frac{1}{2\sqrt{k}}$, daarom vervangen we $k+1$ door l, ofwel k door $l-1$, dan gaat de ongelijkheid over in

$$\sum_{l-1=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{l-1+1}} < \sqrt{n+1}-1$$

$$\sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{l}} < \sqrt{n+1}-1$$

De som waarvoor we een afschatting willen loopt tot n, daarom vervangen we $n+1$ door n (we vervangen eerst n door m en substitueren vervolgens $n-1$ voor m).

$$\sum_{l=2}^{n} \frac{1}{2\sqrt{l}} < \sqrt{n}-1$$

We breiden de som uit met de term voor $l = 1$.

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{l}} < \frac{1}{2}+\sqrt{n}-1 \tag{3}$$

Er geldt nu

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} &= 2\sqrt{n}-2\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}\Big) \\ &> 2\sqrt{n}-2\Big(\frac{1}{2}+\sqrt{n}-1\Big) \quad \text{met (3)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

En hiermee hebben we de linkerongelijkheid bewezen.
Combinatie van rechter- en linkerongelijkheid levert $1 < 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2$, de te bewijzen ongelijkheid, op.

91.1 In de gevraagde ongelijkheid herkennen we geen standaardongelijkheid. We kunnen de ongelijkheid opdelen in stukken, waarna we $\frac{1}{a+b} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a+b+c}$ en twee analoge ongelijkheden voor $\frac{1}{b+c}$ en $\frac{1}{c+a}$ moeten bewijzen, maar deze drie zijn in het algemeen niet gelijktijdig waar.
We kunnen de gevraagde ongelijkheid vereenvoudigen door de volgende substitutie: $a+b=x$, $b+c=y$ en $c+a=z$. Te bewijzen is nu dat voor positieve reële getallen x, y en z geldt $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$, ofwel $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \geq 9$. Er geldt

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+3$$

Voor alle positieve p geldt $p+\frac{1}{p} \geq 2$; toepassen van deze regel voor $p=\frac{x}{y}$, $p=\frac{y}{z}$ en $p=\frac{z}{x}$ geeft

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \geq 2+2+2+3=9$$

En we hebben de gevraagde ongelijkheid

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{a+b+c}$$

dus bewezen.

91.3 Te bewijzen is dat f alleen bij $x = 0$ de waarde 0 aanneemt. Ofwel 0 is een nulpunt van f en dit is het enige nulpunt van f. We bewijzen deze twee delen los van elkaar en beginnen bij het eerste deel, $f(0) = 0$. We weten dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$4f(f(x)) - 2f(x) - 3x = 0 \qquad (*)$$

Noem $f(0) = a$, dan moeten we bewijzen dat $a = 0$. We kunnen beginnen met het invullen van $x = 0$ in $(*)$:

$$4f(f(0)) - 2f(0) - 3 \cdot 0 = 0, \quad 4f(a) - 2a = 0, \quad f(a) = \frac{1}{2}a$$

We willen bewijzen dat $a = 2f(a) = 0$ en bekijken daarom $f(a)$; we vullen $x = a$ in in $(*)$

$$4f(f(a)) - 2f(a) - 3a = 0, \quad 4f(\frac{1}{2}a) - a - 3a = 0, \quad f(\frac{1}{2}a) = a$$

We willen bewijzen dat $a = f(\frac{1}{2}a) = 0$. We vullen $x = \frac{1}{2}a$ in in $(*)$.

$$4f(f(\frac{1}{2}a)) - 2f(\frac{1}{2}a) - \frac{3}{2}a = 0, \quad 4f(a) - 2a - \frac{3}{2}a = 0,$$
$$2a - 2a - \frac{3}{2}a = 0, \quad a = 0$$

En dit is wat we wilden bewijzen. Er geldt dus $f(0) = 0$.

Nu moeten we nog bewijzen dat 0 het enige nulpunt van f is, ofwel als $f(b) = 0$ voor zekere b dan geldt $b = 0$. Veronderstel $f(b) = 0$ en vul $x = b$ in in $(*)$, dan

$$4f(f(b)) - 2f(b) - 3b = 0, \quad 4f(0) - 0 - 3b = 0, \quad 0 - 3b = 0, \quad b = 0$$

0 is dus het enige nulpunt van f.

92.4 Eerst bekijken we hoe $n?$ eruit ziet voor kleine n: $2? = 2$, $3? = \frac{3}{2}$, $4? = \frac{4 \cdot 2}{3}$, $5? = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$ en $6? = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$ en dus $1992? = \frac{1992 \cdot 1990 \cdot 1988 \cdot \ldots \cdot 2}{1991 \cdot 1989 \cdot 1987 \cdot \ldots \cdot 1}$.

We moeten bewijzen dat $\sqrt{1992} < 1992? < \frac{4}{3}\sqrt{1992}$, ofwel $1992 < (1992?)^2 < \frac{16}{9} \cdot 1992$ en daarom bekijken we $(1992?)^2 = \frac{1992^2 \cdot 1990^2 \cdot 1988^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}{1991^2 \cdot 1989^2 \cdot 1987^2 \cdot \ldots \cdot 1^2}$.

We bewijzen eerst $(1992?)^2 < \frac{16}{9} \cdot 1992$. Voor alle n geldt $\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} < 1$ en deze afschatting gebruiken we voor $n = 1991, 1989, \ldots, 5$.

$$\begin{aligned}
(1992?)^2 &= 1992 \cdot (\frac{1992 \cdot 1990^2 \cdot 1988^2 \cdot \ldots \cdot 4}{1991^2 \cdot 1989^2 \cdot 1987^2 \cdot \ldots \cdot 5^2}) \cdot \frac{4 \cdot 2^2}{3^2} \\
&= 1992 \cdot (\frac{1992 \cdot 1990}{1991^2} \cdot \frac{1990 \cdot 1988}{1989^2} \cdot \ldots \cdot \frac{6 \cdot 4}{5^2}) \cdot \frac{16}{9} \\
(1992?)^2 &< 1992 \cdot \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

We gebruiken de afschatting $\frac{n^2}{(n+1)(n-1)} > 1$ voor $n = 1990, 1988, \ldots, 2$ om $(1992?)^2 > 1992$ te bewijzen.

$$\begin{aligned}
(1992?)^2 &= 1992 \cdot (\frac{1992 \cdot 1990^2 \cdot 1988^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}{1991^2 \cdot 1989^2 \cdot 1987^2 \cdot \ldots \cdot 1^2}) \\
&= 1992 \cdot (\frac{1992}{1991}) \cdot (\frac{1990^2}{1991 \cdot 1989} \cdot \frac{1988^2}{1989 \cdot 1987} \cdot \ldots \cdot \frac{2^2}{3 \cdot 1}) \\
(1992?)^2 &> 1992 \cdot (\frac{1992}{1991}) \\
&> 1992
\end{aligned}$$

Combinatie van de linker-en rechterongelijkheid en worteltrekken levert de te bewijzen ongelijkheid $\sqrt{1992} < 1992? < \frac{4}{3}\sqrt{1992}$.

94.5 We definiëren de functie f door $f(x) = cx^2 + bx + a$ en de functie g door $g(x) = ax^2 + bx + c$. We moeten nu bewijzen dat $|f(x)| \leq 2$ voor $x \in [-1,1]$ en gegeven is dat $|g(x)| \leq 1$ voor $x \in [-1,1]$, dus geldt onder andere dat $|g(0)| = |c| \leq 1$, $|g(1)| = |a+b+c| \leq 1$ en $g(-1) = |a-b+c| \leq 1$.

We bekijken nu de functie $f(x) = cx^2 + bx + a$ en onderscheiden twee gevallen:

- De functie heeft geen extreem op $\langle -1, 1\rangle$ of de waarde van het extreem is kleiner dan de waarde van een van de randextremen $x = 1$ en $x = -1$. Voor de waarde van de randextremen geldt $|f(1)| = |c+b+a| = |g(1)| \leq 1$ en $|f(-1)| = |c-b+a| = |g(-1)| \leq 1$.
- f heeft een extreem op $\langle -1, 1\rangle$ waarvan de waarde hoger is dan de waarde van de randextremen. $f(x)$ is een parabool dus de top ligt bij $x = \frac{-b}{2c}$ (immers $f(x) = cx^2 + bx + a = c(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}) = c(x + \frac{b}{2c})^2 + c(\frac{4ac-b^2}{4c^2}))$ en omdat de extreme waarde op $\langle -1, 1\rangle$ ligt geldt
$$|\frac{-b}{2c}| \leq 1 \tag{1}$$

De waarde $f(\frac{-b}{2c})$ van dit extreem is absoluut genomen gelijk aan $|\frac{4ac-b^2}{4c}|$ en deze willen we nu afschatten op kleiner of gelijk aan 2.

$$\begin{aligned}
|\frac{4ac-b^2}{4c}| &= |a - \frac{b^2}{4c}| \\
&\leq |a| + |\frac{b^2}{4c}| && \text{met de driehoeksongelijkheid} \\
&\leq |a| + |\frac{b}{2}| && \text{vanwege (1)}
\end{aligned}$$

a en b kunnen we moeilijk los van elkaar afschatten, we weten wel dat $|a+b+c| \leq 1$ en $|a-b+c| \leq 1$ en hieruit volgt $|a+c| + |b| \leq 1$. Met de driehoeksongelijkheid geldt $|a+c| \geq ||a|-|c|| \geq |a| - |c|$. Samen levert dit $|a| - |c| + |b| \leq 1$ en dus

$$\begin{aligned}
|\frac{4ac-b^2}{4c}| &\leq (1 + |c| - |b|) + |\frac{b}{2}| \\
&= 1 + |c| - |\frac{b}{2}| \\
&\leq 1 + |c| \\
&\leq 2 && \text{want } |c| = |g(0)| \leq 1
\end{aligned}$$

Alle extremen van f(x) op $[-1,1]$ zijn kleiner of gelijk aan twee, dus $|cx^2 + bx + a| \leq 2$ voor alle $x \in [-1,1]$.

97.3 a) Als we de oplossingen van de vergelijking a en b noemen kunnen we schrijven $x^2+?x+? = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = 0$.

Als speler 1 op de plaats van het eerste vraagteken het gehele getal p invult zoeken we getallen a en b zodanig dat $-(a+b) = p$ en ab is geheel. Door $a = -p$ en $b = 0$ te kiezen vinden we $ab = 0$. Als speler 2 op de plaats van het tweede vraagteken een 0 plaatst heeft de vergelijking de volgende twee gehele oplossingen: $x = 0$ en $x = -p$.

Als speler 1 op de plaats van het tweede vraagteken het gehele getal p invult zoeken we getallen a en b zodanig dat $ab = p$ en $-(a+b)$ is geheel. Door $a = p$ en $b = 1$ te kiezen vinden we $-(a+b) = -p-1$. Als speler 2 op de plaats van het eerste vraagteken $-p-1$ plaatst heeft de vergelijking de volgende twee gehele oplossingen: $x = p$ en $x = 1$.

Speler 2 kan dus altijd zorgen dat de vergelijking twee gehele oplossingen heeft. Overigens zijn er ook andere manieren waarop speler 2 hiervoor kan zorgen.

b) Als de vergelijking drie gehele oplossingen a, b en c heeft kunnen we schrijven

$$x^3+?x^2+?x+? = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$$

Op de plaats van twee van de drie vraagtekens wordt een drie wordt geplaatst. Stel nu dat er een drie op de laatste plaats staat. Dan geldt $-abc = 3$ en omdat a, b en c geheel zijn geldt voor de verzameling nulpunten dat $\{a, b, c\} = \{1, 1, -3\} \vee \{-1, -1, -3\} \vee \{-1, 1, 3\}$. Als je deze mogelijkheden uitschrijft vind je in geen van de gevallen dat $-(a+b+c) = 3$ of $ab+bc+ca = 3$ en dit geeft een tegenspraak. Op de laatste plaats staat geen drie en op de andere twee plaatsen dus wel. Er geldt $-(a+b+c) = 3$ en $ab+bc+ca = 3$. We zoeken nu gehele getallen a, b en c met deze eigenschappen.

$ab+bc+ca$ doet denken aan het dubbel produkt van het merkwaardig produkt $(a+b+c)^2$. Er geldt $9 = (-(a+b+c))^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ dus $a^2+b^2+c^2 = 9-2\cdot 3 = 3$. Nu geldt $0 \leq a^2 \leq 3$ en a is geheel, dus $a^2 = 0$ of 1. Hetzelfde geldt voor b^2 en c^2 en omdat $a^2+b^2+c^2 = 3$ geldt nu $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Gecombineerd met $a+b+c = -3$ levert dit $a = b = c = -1$ en het getal op de plaats van het laatste vraagteken is $-abc = 1$.

Speler 3 heeft een 1 gezet op de plaats van het laatste vraagteken.

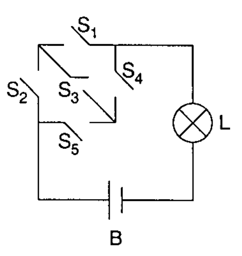
Hoofdstuk 8

Combinatoriek

8.1 Opgaven

82.3 We verdelen 5 knikkers over 7 knikkerzakken. Daarbij veronderstellen we dat voor iedere knikker en iedere knikkerzak de kans dat die knikker in die zak terecht komt, even groot is. Het aantal zakken waar precies één knikker in is gekomen, noemen we x.
Dit experiment voeren we n maal uit, we bepalen telkens x, en nemen dan het gemiddelde (dus de som van alle x-waarden gedeeld door n).
Tot welk getal zal dit gemiddelde naderen als we n steeds groter laten worden?

84.2 Het getekende schakelschema bevat een batterij B, een lampje L en vijf schakelaars S_1 tot en met S_5. De kans dat schakelaar S_3 gesloten is (contact maakt) is $\frac{2}{3}$, voor de andere vier schakelaars is die kans $\frac{1}{2}$ (de kansen zijn onderling onafhankelijk).
Bereken de kans dat het lampje brandt.



84.4 Door haakjes te plaatsen in de uitdrukking 1:2:3 kunnen we twee verschillende getalwaarden krijgen: $(1:2):3 = \frac{1}{6}$ en $1:(2:3) = \frac{3}{2}$.
Nu worden haakjes geplaatst in de uitdrukking 1:2:3:4:5:6:7:8 en hierbij zijn meerdere paren haakjes toegestaan, al dan niet in 'nestvorm'.

a) Wat is de grootste getalwaarde die we dan kunnen krijgen, en wat de kleinste?

b) Hoeveel verschillende getalwaarden kunnen verkregen worden?

85.3 In een fabriek moeten vierkante tafeltjes van 40×40 cm^2 betegeld worden met telkens vier tegels van 20×20 cm^2. De tegels zijn voorzien van een asymmetrisch patroon (bijvoorbeeld de letter J), en allemaal hetzelfde.
Hoeveel verschillende tafeltjes kan de fabriek produceren?

92.1 Vier dobbelstenen worden tegelijk opgegooid.

Hoe groot is de kans dat het produkt van het aantal ogen gelijk is aan 36?

93.5 Op een lijn zijn elf verschillende punten gegeven $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$. Voor elk tweetal punten geldt: afstand $P_iP_j \leq 1$.

Bewijs dat de som van alle (55) afstanden P_iP_j, $1 \leq i < j \leq 11$ kleiner is dan 30.

96.1 Hoeveel verschillende (niet gelijkvormige) driehoeken zijn er waarvan de hoeken een geheel aantal graden hebben?

96.3 Wat is het grootste aantal paarden dat je op een schaakbord kunt zetten zonder dat er ergens een tweetal paarden is dat elkaar kan slaan?

a) Beschrijf een opstelling met dat maximale aantal.

b) Bewijs dat een groter aantal niet mogelijk is.

(Een schaakbord bestaat uit 8×8 velden en een paard springt van een veld naar een ander veld volgens de regel 'twee vakjes verticaal en een vakje horizontaal' of 'een vakje verticaal en twee vakjes horizontaal'.)

97.4 We bekijken een octaëder, een regelmatig achtvlak, waarvan één van de zijvlakken rood is geverfd en de zeven andere zijvlakken blauw. We werpen de octaëder als een dobbelsteen. Het vlak dat bovenkomt wordt geverfd: als het rood is wordt het blauw geverfd en als het blauw is wordt het rood geverfd. Vervolgens werpen we de octaëder nog eens en verven weer volgens de bovenstaande regel. In totaal werpen we de octaëder 10 keer.

Hoeveel verschillende octaëders kunnen we krijgen na afloop van de 10^e keer verven?

(Twee octaëders zijn verschillend als ze niet door draaiing in elkaar zijn over te voeren.)

99.2 Van een vierkant bestaande uit 81 eenheidsvierkanten worden sommige vierkanten zwart gekleurd en andere vierkanten wit en wel zó, dat van elke rechthoek die uit 6 eenheidsvierkanten bestaat van de vorm 2×3 of 3×2 er twee vierkanten zwart zijn en vier wit.

Hoeveel zwarte vierkanten bevat het gehele vierkant? Beredeneer dat er geen enkel ander antwoord mogelijk is.

99.4 Een 8×8-matrix is een getallenschema met 64 getallen ingedeeld in 8 horizontale rijen en 8 verticale kolommen. De getallen in de matrix mogen gewijzigd worden volgens de volgende twee spelregels:

- Alle getallen in een rij worden verdubbeld.
- Alle getallen in een kolom worden met 1 verminderd.

Bewijs dat elke 8×8-matrix die alleen gehele getallen groter dan 0 bevat met bovenstaande spelregels te veranderen is in een matrix die alleen nullen bevat.

00.2 Er zijn drie bakken met elk 600 ballen. In de eerste bak zitten 600 identieke rode ballen, in de tweede bak 600 identieke witte ballen en in de derde bak 600 identieke blauwe ballen. Er worden in totaal 900 ballen getrokken uit de drie bakken zonder teruglegging.

Hoeveel verschillende kleurencombinaties zijn er mogelijk? Voorbeelden van kleurencombinaties zijn 250 rode, 187 witte en 463 blauwe ballen of 360 rode en 540 blauwe ballen.

00.4 Er staan 15 spelers op een veld, elk met een bal. De afstanden tussen elk tweetal spelers zijn alle verschillend. Elke speler gooit de bal naar die speler die het dichtst bij hem staat.

a) Bewijs dat er minstens één speler is naar wie geen bal gegooid wordt.

b) Bewijs dat er nooit meer dan 5 ballen naar één speler gegooid worden.

8.2 Selectie

Van de dertien opgaven Combinatoriek heb ik er zeven geselecteerd. Bij deze zeven geef ik hints en oplossingen. Hieronder staan de redenen op grond waarvan ik een opgave wel of niet gekozen heb. Opgaven over kansrekening vallen af omdat dit onderwerp de laatste jaren en in de nabije toekomst niet meer aan bod komt. Ik heb vooral geselecteerd op negatieve gronden, daardoor vielen al voldoende opgaven af.

Niet-geselecteerde opgaven

82.3 gaat over kansrekening en het lastige begrip verwachtingswaarde.

84.2 Ook deze opgave gaat over kansrekening. De opgave kan eenvoudig aangepast worden tot een telprobleem, maar omdat er voldoende originele opgaven zijn is dat niet nodig. 84.2 kan het principe van in- en exclusie illustreren, maar dit komt toch wel aan bod in 84.4.

92.1 zie opgave 84.2

96.3 is net als 99.2 op te lossen met een bewijs uit het ongerijmde. Omdat 99.2 meer verschillende oplossingen heeft selecteer ik 99.2. Een bewijs uit het ongerijmde wordt ook gebruikt voor 00.5.

97.4 Deze opgave is niet moeilijk en je kunt de kennis opgedaan door de oplossing niet gebruiken om andere opgaven te maken.

00.2 85.3, 96.1 en 00.2 zijn telproblemen waarbij in- en exclusie gebruikt kan worden. 00.2 geeft aanleiding tot een oplossing met veel somtekens en valt daarom af.

Geselecteerde opgaven

84.4 De uitdrukking waarmee gewerkt wordt in 84.4 is duidelijk voor de leerling en maakt dat hij of zij meteen voorbeelden kan geven. De begrippen rangschikking met herhaling en combinatie kunnen aan bod komen bij de oplossing.

85.3 is een goed voorbeeld van in- en exclusie.

96.1 zie 85.3. 96.1 kan ook opgelost worden met gevalsonderscheid.

93.5 geeft aanleiding tot verschillende oplossingen.

99.2 heeft verschillende bewijzen uit het ongerijmde.

99.4 is een voorbeeld van een algoritme.

00.4 heeft een meetkundige interpretatie en geeft weer een voorbeeld van een bewijs uit het ongerijmde.

8.3 Hints

84.4 a) Bekijk eerst een eenvoudiger geval, bijvoorbeeld $1 : 2 : 3 : 4$. Wat is de grootste getalwaarde nu, en de kleinste? Hoe verkrijg je die?

b) Wanneer verkrijg je dezelfde getalwaarde? Hoe vaak vind je diezelfde waarde?

85.3 Wanneer zijn twee tafeltjes hetzelfde? Teken een plaatje. Zijn er verschillende soorten van 'hetzelfde zijn'?

Denk aan het principe van in- en exclusie.

93.5 Teken een plaatje. Voor de onderlinge afstanden geldt $P_1P_2 + P_2P_{11} = P_1P_{11} \leq 1$, etcetera.

Ook het volgende kun je gebruiken: omdat alle punten op één lijn liggen kun je die lijn wel de x-as noemen. Beschrijf de punten en hun onderlinge afstanden door de coördinaten van de punten.

96.1 Wanneer zijn driehoeken gelijkvormig? Denk aan het principe van in- en exclusie.

99.2 Beredeneer dat geen ander antwoord mogelijk is met een bewijs uit het ongerijmde.

99.4 Zorg dat getallen die al 0 zijn niet veranderen. Als de andere getallen steeds kleiner worden, worden ze uiteindelijk ook 0.

00.4 a) Bekijk eerst een eenvoudiger (kleiner) voorbeeld.

b) Teken een plaatje; wat gebeurt er als er 6 of meer ballen naar één speler worden gegooid?

8.4 Oplossingen

84.4i De haakjes maken dat sommige getallen in de teller van de uitdrukking komen en andere in de noemer. Het getal 1 staat altijd in de teller en 2 staat altijd in de noemer. De andere getallen kunnen (onafhankelijk van elkaar) in teller of noemer voorkomen, want als we een uitdrukking teller : noemer hebben kunnen we een getal a op twee manieren toevoegen:

$$\begin{aligned}(\text{teller} : \text{noemer}) : a &= \frac{\text{teller}}{\text{noemer} \cdot a}\\ \text{teller} : (\text{noemer} : a) &= \frac{\text{teller} \cdot a}{\text{noemer}}\end{aligned}$$

a) Het grootst mogelijke getal is nu $\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8}{2} = 10080$ en het kleinst mogelijke getal is $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8} = \frac{1}{40320}$.

b) Alle uitdrukkingen zien eruit als $\frac{1}{2} \cdot \frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$ met de getallen 3 tot en met 8 onafhankelijk van elkaar in teller of noemer. Hoeveel van de 2^6 uitdrukkingen die we zo krijgen leveren dezelfde getalwaarde op?

$3 \cdot 8 = 2^3 \cdot 3 = 4 \cdot 6$ dus de uitdrukkingen waarbij $3 \cdot 8$ in de teller en $4 \cdot 6$ in de noemer staat leveren dezelfde getalwaarde op als die waarbij $4 \cdot 6$ in de teller en $3 \cdot 8$ in de noemer staat. Geen andere combinaties van getallen leveren dezelfde getalwaarde op. Het aantal uitdrukkingen waarvoor geldt dat $3 \cdot 8$ in de teller en $4 \cdot 6$ in de noemer staat moet je dus aftrekken van het totaal aantal uitdrukkingen. Deze uitdrukkingen zien eruit als $\frac{1 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$, met 5 en 7 verdeeld over teller en noemer; het aantal uitdrukkingen van deze soort is 2^2.

$2^6 - 2^2 = 60$ verschillende getalwaarden kunnen verkregen worden.

84.4ii De haakjes maken dat sommige getallen in de teller van de uitdrukking komen en andere in de noemer. Het getal 1 staat altijd in de teller en 2 staat altijd in de noemer. De andere getallen kunnen (onafhankelijk van elkaar) in teller of noemer voorkomen, want als we een uitdrukking teller : noemer hebben kunnen we een getal a op twee manieren toevoegen:

$$\begin{aligned}(\text{teller} : \text{noemer}) : a &= \frac{\text{teller}}{\text{noemer} \cdot a}\\ \text{teller} : (\text{noemer} : a) &= \frac{\text{teller} \cdot a}{\text{noemer}}\end{aligned}$$

We kunnen de uitdrukking nu als volgt schrijven

$$1^1 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{a_3} \cdot 4^{a_4} \cdot 5^{a_5} \cdot 6^{a_6} \cdot 7^{a_7} \cdot 8^{a_8} \quad \text{met } a_i \in \{-1, 1\}$$

Als $a_i = 1$ dan staat getal i in de teller en als $a_i = -1$ staat i in de noemer. Door te ontbinden in factoren gaat de uitdrukking over in

$$2^{-1+2a_4+a_6+3a_8} \cdot 3^{a_3+a_6} \cdot 5^{a_5} \cdot 7^{a_7} \quad \text{met } a_i \in \{-1, 1\} \tag{$*$}$$

a) Het grootst mogelijke getal krijgen we door alle a_i gelijk aan 1 te kiezen. Het grootste getal is $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 10080$.

Het kleinst mogelijke getal krijgen door alle a_i gelijk aan -1 te kiezen. Het kleinste getal is $2^{-7} \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-1} \cdot 7^{-1} = \frac{1}{40320}$.

b) De uitdrukking $(*)$ wordt bepaald door de waarde van de a_i's. Er zijn 2^6 verschillende combinaties van de a_i-waardes. Levert elk van deze combinaties een andere getalwaarde voor uitdrukking $(*)$?

De macht van 3 in $(*)$ is $a_3 + a_6$ en deze is hetzelfde voor $a_3 = 1, a_6 = -1$ en voor $a_3 = -1, a_6 = 1$. Nu verandert in deze twee gevallen ook de macht van 2 door de verandering van de waarde van a_6.

De macht van 2 is $-1+2a_4+a_6+3a_8$ en als we a_6 veranderen kunnen we deze macht toch hetzelfde houden door a_4 en a_8 ook te veranderen. De macht van 2 is hetzelfde voor $a_6=-1, a_4=-1, a_8=1$ en voor $a_6=1, a_4=1, a_8=-1$. En $2^{-1+2a_4+a_6+3a_8} \,.\, 3^{a_3+a_6}$ is dus hetzelfde voor $a_3=a_8=1, a_4=a_6=-1$ en voor $a_3=a_8=-1, a_4=a_6=1$; als de andere a_i niet veranderen is de getalwaarde van uitdrukking $(*)$ ook hetzelfde.

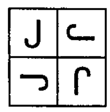
De machten van 5 en die van 7 wordt bepaald door slechts één a_i, daarom kunnen deze machten als die a_i verandert niet dezelfde macht opleveren. Voor de machten van 2 en 3 zijn er geen andere gevallen dan de bovengenoemde waarin ze hetzelfde zijn voor verschillende combinaties van de a_i-waardes.

Hoeveel combinaties van de a_i-waardes leveren nu dezelfde getalwaarde voor $(*)$ op? Dat aantal is hetzelfde als het aantal combinaties van de a_i-waardes waarvoor geldt $a_3=a_8=1, a_4=a_6=-1$; bij deze combinaties zijn dus alleen a_5 en a_7 vrij te kiezen. Het aantal van deze combinaties is 2^2.

Van de 2^6 combinaties van de a_i-waardes leveren er dus 2^2 dezelfde getalwaarde voor de uitdrukking op. Er kunnen $2^6-2^2=60$ verschillende getalwaarden verkregen worden.

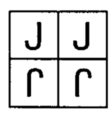
85.3 Elk van de 4 tegels kun je op 4 manieren neerleggen, dit geeft $4^4=256$ mogelijkheden, waarvan sommige hetzelfde zijn.

Er zijn tafeltjes die er na eenmaal roteren over 90° als zichzelf uitzien. Deze vinden we door de positie van één tegel vrij te kiezen, de posities van de andere tegels volgen dan uit de eis dat eenmaal roteren het tafeltje zelf oplevert. Een voorbeeld van zo'n tafeltje zien we hiernaast.



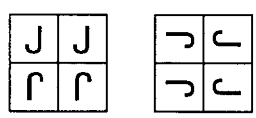
Het aantal tafeltjes waarbij eenmaal roteren het tafeltje zelf oplevert is dus gelijk aan het aantal manieren waarop je één tegel kan plaatsen en dat is 4.

Er zijn ook tafeltjes die er na tweemaal roteren over 90° wel , maar na eenmaal roteren niet als zichzelf uitzien. Alle tafeltjes die na tweemaal roteren het tafeltje zelf opleveren verkrijgen we door de positie van twee tegels vrij te kiezen, de positie van de andere volgt dan uit de gestelde eis. Hiernaast zien we een voorbeeld van zo'n tafeltje.



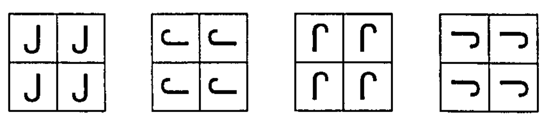
Het aantal tafeltjes dat er na tweemaal roteren uitziet als zichzelf is dus gelijk aan het aantal manieren waarop je twee tegeltjes vrij kan plaatsen is 4^2. Bij het tellen van de tafeltjes die na tweemaal roteren zichzelf opleveren hebben we de tafeltjes die na eenmaal roteren zichzelf opleveren meegeteld: deze leveren na tweemaal roteren immers ook hetzelfde tafeltje. Het aantal tafeltjes dat na tweemaal roteren wel hetzelfde, maar na eenmaal roteren niet hetzelfde tafeltje oplevert is nu $4^2-4=12$.

Van deze 12 zijn er telkens 2 door rotatie (eenmaal over 90°) in elkaar over te voeren. We geven een voorbeeld van zo'n paar. Het aantal *verschillende* tafeltjes dat er na twee (maar niet na één) rotaties uitziet als zichzelf is dus $\frac{12}{2}=6$.



Van het totaal van $4^4=256$ tafeltjes zijn er 4 die na eenmaal roteren over 90° zichzelf opleveren en 12 die na tweemaal (maar niet na eenmaal) roteren zichzelf opleveren. Tafeltjes die na driemaal, maar niet na eenmaal of tweemaal roteren zichzelf opleveren zijn er niet. Van de 256 blijven dus $256-4-12=240$ tafeltjes over die na een-, twee of driemaal roteren niet zichzelf opleveren.

Van deze 240 zijn er telkens 4 door rotatie in elkaar over te voeren. Een voorbeeld van zo'n groepje van 4 zien we hiernaast. Er zijn dus $\frac{240}{4}=60$ *verschillende* tafeltjes die niet in zichzelf over te voeren zijn door een of twee (of drie) rotaties.



Het totaal aantal verschillende tafeltjes is nu $4+6+60=70$.

93.5i Zonder verlies van algemeenheid zeggen we dat de punten in de volgorde $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ op de lijn liggen. Er geldt $P_1P_{11} \leq 1$ en $P_1P_2 + P_2P_{11} = P_1P_{11}$, etc. Omdat alle P_i verschillende punten zijn geldt dat $P_2P_{10} < P_1P_{11}$.

We schrijven de som van alle afstanden P_iP_j als $\sum_{1\leq i<j\leq 11} P_iP_j$. Eerst splitsen we alle afstanden met $i = 1$ of $j = 11$ af, daarna die met $i = 2$ of $j = 10$ enzovoorts. Er geldt

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq 11} P_iP_j &= P_1P_{11} + (P_1P_2 + P_2P_{11}) + \ldots + (P_1P_{10} + P_{10}P_{11}) \\
&\quad + \sum_{2\leq i<j\leq 10} P_iP_j \\
&= P_1P_{11} + (P_1P_2 + P_2P_{11}) + \ldots + (P_1P_{10} + P_{10}P_{11}) \\
&\quad + P_2P_{10} + (P_2P_3 + P_3P_{10}) + \ldots + (P_2P_9 + P_9P_{10}) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + P_5P_7 + (P_5P_6 + P_6P_7) \\
&= 10 \cdot P_1P_{11} + 8 \cdot P_2P_{10} + \ldots + 2 \cdot P_5P_7 \\
&< (10 + 8 + \ldots + 2) \cdot P_1P_{11} = 30 \cdot P_1P_{11} \leq 30
\end{aligned}$$

De som van alle afstanden P_iP_j is dus kleiner dan 30.

93.5ii Zonder verlies van algemeenheid zeggen we dat de punten in de volgorde $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ op de lijn liggen. Als we de lijn nu x-as noemen kunnen de punten en hun onderlinge afstanden ook met hun x-coördinaten beschrijven: $P_iP_j = x_j - x_i$. Als we het nulpunt van de x-as in P_1 leggen geldt $x_1 = 0$ en gaat $P_1P_{11} \leq 1$ over in $x_{11} \leq 1$ en dus geldt $0 \leq x_i \leq 1$ voor alle i. Voor de som van alle afstanden $x_j - x_i$ geldt nu

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq 11} x_j - x_i &= (x_{11} - x_{10}) + (x_{11} - x_9) + \ldots + (x_{11} - x_1) \\
&\quad + (x_{10} - x_9) + \ldots + (x_{10} - x_1) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + (x_2 - x_1) \\
&= 10x_{11} + (9x_{10} - x_{10}) + (8x_9 - 2x_9) + \ldots + (x_2 - 9x_2) - 10x_1 \\
&< 10x_{11} + 8x_{10} + \ldots + 2x_7 \\
&< 10 + 8 + \ldots + 2 = 30
\end{aligned}$$

De som van alle afstanden $x_j - x_i$ is dus kleiner dan 30.

93.5iii Zonder verlies van algemeenheid zeggen we dat de punten in de volgorde $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ op de lijn liggen. Als we de lijn nu x-as noemen kunnen de punten en hun onderlinge afstanden ook met hun x-coördinaten beschrijven: $P_iP_j = x_j - x_i$. Als we het nulpunt van de x-as in P_1 leggen geldt $x_1 = 0$ en gaat $P_1P_{11} \leq 1$ over in $x_{11} \leq 1$ en dus geldt $0 \leq x_i \leq 1$ voor alle i.

De som van alle afstanden is nu $\sum_{1\leq i<j\leq 11} x_j - x_i$ en we tellen nu voor alle k hoeveel keer $+x_k$ en $-x_k$ in deze som voorkomen. Bij vaste $+x_k$ heb je $k-1$ verschillende mogelijkheden voor i in $x_k - x_i$ en dus komt $+x_k$ precies $k-1$ keer voor. Bij vaste $-x_k$ heb je $11-k$ verschillende mogelijkheden voor j in $x_j - x_k$ en dus komt $-x_k$ precies $11-k$ keer voor. Je telt x_k dus $(k-1) - (11-k) = 2k - 12$ keer.

De som van alle afstanden is dus gelijk aan $\sum_{k=1}^{11}(2k-12)x_k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{11}(k-6)x_k$

Omdat $x_k \geq 0$ geldt voor $k \leq 6$ dat $(k-6)x_k \leq 0$. Voor $k > 6$ geldt ook $x_k \leq 1$ (en gelijkheid geldt alleen voor x_{11}) dus $2 \cdot \sum_{k=1}^{11}(k-6)x_k < 2 \cdot \sum_{k=7}^{11}(k-6) = 2 \cdot (1+2+3+4+5) = 30$.

De som van alle afstanden $x_j - x_i$ is dus kleiner dan 30.

96.1i We noemen de hoeken van een driehoek α, β en γ. Er geldt (gemakshalve laten we °-tekens weg)

$$\begin{aligned} \alpha,\beta,\gamma &\quad \text{geheel} \\ \alpha,\beta,\gamma &\geq 1 \\ \alpha+\beta+\gamma &= 180 \end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned} 1 \leq \alpha &\leq 178 \\ 1 \leq \beta &\leq 179-\alpha \\ \gamma &= 180-\alpha-\beta \end{aligned}$$

We willen het aantal mogelijkheden voor $[\alpha,\beta,\gamma]$ tellen. Als we α en β kennen, ligt γ vast. Bij een zekere waarde van α zijn er $179-\alpha$ mogelijke waarden voor β. Het aantal mogelijkheden voor $[\alpha,\beta,\gamma]$ is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{178}(179-\alpha) &= \frac{1}{2}\cdot 178\cdot(178+1) \\ &= 15931 \end{aligned}$$

Waarbij we gebruik maken van de formule voor de som van een rekenkundige reeks.

Sommige van de $[\alpha,\beta,\gamma]$ die we hierboven telden stellen gelijkvormige driehoeken voor, bijvoorbeeld $[90,60,30]$ en $[90,30,60]$. We bekijken op hoeveel manieren een bepaalde driehoek geschreven kan worden in de vorm $[\alpha,\beta,\gamma]$.

Er is één driehoek met drie gelijke zijden (en dus drie gelijke hoeken) en deze kunnen we alleen schrijven als $[60,60,60]$.

Driehoeken met precies twee gelijke zijden hebben hoeken van de vorm k, k, $180-2k$. Uit $1 \leq 180-2k$ volgt $2k \leq 179$ en omdat k geheel is en positief geldt $1 \leq k \leq 89$. Daar precies twee zijden gelijk zijn geldt $k \neq 60$ en dus houden we $89-1=88$ mogelijkheden over voor k. Zo'n driehoek met twee gelijke zijden kunnen we op drie manieren schrijven, namelijk als $[k,k,180-2k]$, $[k,180-2k,k]$ en $[180-2k,k,k]$.

Driehoeken met drie ongelijke zijden kunnen we op $3!=6$ manieren schrijven. Noem het aantal verschillende driehoeken met drie ongelijke zijden x, dan geldt $1\cdot 1+3\cdot 88+6\cdot x=15931$ en dus $x=\frac{15931-1\cdot 1-3\cdot 88}{6}=2611$.

Het totaal aantal verschillende driehoeken is nu $1+88+2611=2700$.

96.1ii Voor de drie hoeken α, β en γ geldt (gemakshalve laten we °-tekens weg en indien nodig hernoemen we de hoeken zodat α de kleinste en γ de grootste is)

$$\begin{aligned} &\alpha,\beta,\gamma \quad \text{positief en geheel} \\ &\alpha+\beta+\gamma=180 \\ &\alpha\leq\beta\leq\gamma \end{aligned}$$

En deze laatste eis kunnen we uitsplitsen in de volgende elkaar uitsluitende gevallen:

$$\alpha=\beta=\gamma \tag{1}$$
$$\alpha=\beta<\gamma \tag{2}$$
$$\alpha<\beta=\gamma \tag{3}$$
$$\alpha<\beta<\gamma \tag{4}$$

Voor elk van deze vier gevallen tellen we het aantal driehoeken.

Geval (1) geeft 1 driehoek, namelijk de gelijkzijdige driehoek.

In geval (2) geldt $\gamma = 180 - 2\alpha$. Uit $\gamma = 180 - 2\alpha > \alpha$ volgt $3\alpha < 180$, ofwel $\alpha < 60$. Er geldt $1 \leq \alpha \leq 59$ en het aantal mogelijkheden voor α (en daarmee het aantal driehoeken) is gelijk aan 59.

In geval (3) geldt $\alpha = 180 - 2\beta$. Uit $\alpha = 180 - 2\beta < \beta$ volgt $3\beta > 180$, ofwel $\beta > 60$. Uit $\alpha = 180 - 2\beta > 0$ volgt $2\beta < 180$, ofwel $\beta < 90$. Er geldt $61 \leq \beta \leq 89$ en het aantal mogelijkheden voor β (en daarmee het aantal driehoeken) is gelijk aan $89 - 61 + 1 = 29$.

In geval (4) geldt $1 \leq \alpha \leq \beta - 1 \leq \gamma - 1$ en $\alpha + 1 \leq \beta \leq \gamma + 1$. Hieruit volgt $\gamma = 180 - \alpha - \beta \leq 180 - 1 - 2 = 177$ en $\gamma \geq 180 - (\gamma - 2) - (\gamma - 1)$, $3\gamma \geq 183$ en dus $61 \leq \gamma \leq 177$.

Bij een gegeven γ kunnen we verschillende β's kiezen, waarbij verschillende driehoeken horen. Het aantal driehoeken bij zo'n γ noemen we $N(\gamma)$. Er geldt $\beta = 180 - \alpha - \gamma \leq 180 - 1 - \gamma = 179 - \gamma$, en ook $\beta \leq \gamma - 1$. We kunnen β naar beneden afschatten door $\beta \geq 180 - (\beta - 1) - \gamma$ en hieruit volgt $\beta \geq \frac{181-\gamma}{2}$. $N(\gamma)$ is nu gelijk aan het aantal β's dat aan deze eisen voldoet, dus $N(\gamma) = \#\{\beta | \frac{181-\gamma}{2} \leq \beta \leq min(\gamma - 1, 179 - \gamma),\ \beta \text{ geheel}\}$.

Voor even γ, $\gamma = 2n$ is de ondergrens $\frac{181-\gamma}{2}$ voor β gelijk aan $91 - n$. Voor oneven γ, $\gamma = 2n + 1$ is de ondergrens gelijk aan $90 - n$. Als $\gamma - 1 \leq 179 - \gamma$, dus als $\gamma \leq 90$ dan is de bovengrens voor β gelijk aan $\gamma - 1$ en anders is deze $179 - \gamma$. We onderscheiden dus vier gevallen:

$$
\begin{array}{lll}
\gamma = 2n \leq 90, & n \leq 45 & N(\gamma) = \#\{\beta | 91 - n \leq \beta \leq 2n - 1\} \\
 & & = 2n - 1 - (91 - n) + 1 = 3n - 91 \\
\gamma = 2n > 90, & n > 45 & N(\gamma) = \#\{\beta | 91 - n \leq \beta \leq 179 - 2n\} \\
 & & = 179 - 2n - (91 - n) + 1 = -n + 89 \\
\gamma = 2n + 1 \leq 90, & n \leq 44 & N(\gamma) = \#\{\beta | 90 - n \leq \beta \leq 2n + 1 - 1\} \\
 & & = 2n - (90 - n) + 1 = 3n - 89 \\
\gamma = 2n + 1 > 90, & n \geq 45 & N(\gamma) = \#\{\beta | 90 - n \leq \beta \leq 179 - (2n + 1)\} \\
 & & = 178 - 2n - (90 - n) + 1 = -n + 89
\end{array}
$$

We vinden het totaal aantal driehoeken van type (4) nu door $N(\gamma)$ voor alle waarden van γ op te tellen:

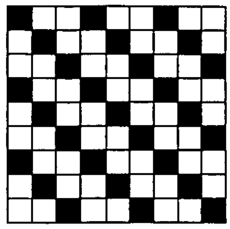
$$
\begin{aligned}
\sum_{\gamma=61}^{177} N(\gamma) &= \sum_{n=31}^{45} (3n - 91) + \sum_{n=46}^{88} (-n + 89) + \sum_{n=30}^{44} (3n - 89) + \sum_{n=45}^{88} (-n + 89) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (2 + 44) + \frac{1}{2} \cdot 43 \cdot (43 + 1) + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (1 + 43) + \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot (44 + 1) \\
&= 2611
\end{aligned}
$$

En het totaal aantal verschillende driehoeken is $1 + 59 + 29 + 2611 = 2700$.

99.2i Met 27 zwarte vierkantjes kunnen we het 9×9-vierkant zo kleuren dat het voldoet aan de eis dat elke 2×3- of 3×2-rechthoek precies twee zwarte vierkantjes bevat, zie de figuur.

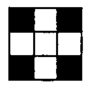
Stel dat we het 9×9-vierkant met minder dan 27 zwarte vierkantjes kunnen kleuren zodat het voldoet aan de eis. Dan is er een 3×3-vierkant dat minder dan 3 zwarte vierkantjes bevat. Maar de vier 2×3- en 3×2-rechthoeken die dit 3×3-vierkant bevat kunnen dan niet allemaal aan de eis voldoen. Met minder dan 27 zwarte vierkantjes kunnen we zo'n kleuring dus niet maken.

Stel dat we het 9×9-vierkant met meer dan 27 zwarte vierkantjes kunnen kleuren zodat het voldoet aan de eis. Dan is er een 3×3-vierkant dat meer dan 3 zwarte vierkantjes bevat.


.

Dit 3×3-vierkant bevat tenminste 4 zwarte vierkantjes. Een 3×3-vierkant met 5 of meer zwarte vierkantjes voldoet niet aan de eis dat elke 2×3- of 3×2-rechthoek precies 2 zwarte vierkantjes bevat.

Er is wel een 3×3-vierkant met 4 zwarte vlakjes dat aan de eis voldoet, zie de figuur rechts.



Stel dat het 9×9-vierkant zo'n 3×3-vierkant met 4 zwarte vierkantjes bevat. Noem de rijen 1, 2 en 3 en de kolommen A, B en C; het vierkant bestaat dus uit $A1$, $A2$, etcetera. $A1 - C3$ grenst aan een ander 3×3-vierkant met 3 of meer zwarte vierkantjes, zeg dat dit vierkant rechts van $A1 - C3$ ligt en noem het $D1 - F3$. Kolom C bevat 2 zwarte vierkantjes en kolom D 1 of meer, dus $C1 - D3$ bevat nu meer dan 2 zwarte vierkantjes. Dit kan niet en dus bevat het 9×9-vierkant geen 3×3-vierkanten met 4 zwarte vierkantjes. Een kleuring met meer dan 27 zwarte vierkantjes voldoet niet aan de eis.

Het aantal zwarte vierkantjes in het 9×9-vierkant is dus precies 27.

99.2ii Het 9×9-vierkant is op te delen in dertien 2×3- en 3×2-rechthoeken en één 3×1-rechthoek. Elke 3×2-rechthoek bevat precies 2 zwarte vierkantjes en we bewijzen nu dat de overgebleven 3×1-rechthoek precies 1 zwart vierkantje bevat. De rijen van deze 3×1-rechthoek noemen we 1, 2 en 3 en de kolom A. Rechthoek $A1 - A3$ bestaat uit $A1$, $A2$, $A3$. $A1 - A3$ grenst aan een 3×2-rechthoek die we $B1 - C3$ noemen.

Stel $A1 - A3$ bevat geen zwarte vierkantjes. Omdat $A1 - B3$ een 3×2-rechthoek is, bevat $B1 - B3$ twee zwarte vierkantjes en $C1 - C3$ geen. Maar dan bevat minstens een van de twee 2×3-rechthoeken $A1 - C2$ en $A2 - C3$ slechts 1 zwart vierkantje, wat in tegenspraak is met de eis.

Stel $A1 - A3$ bevat 2 zwarte vierkantjes. Dan bevat $B1 - B3$ geen zwarte vierkantjes en $C1 - C3$ twee. De aan $B1 - C3$ grenzende 3×2-rechthoek $D1 - E3$ bevat geen zwarte vierkantjes in $D1 - D3$. Maar nu bevat minstens een van de twee 2×3-rechthoeken $B1 - D2$ en $B2 - D3$ slechts 1 zwart vierkantje, wat in tegenspraak is met de eis.

$A1 - A3$ kan ook niet 3 zwarte vierkantjes bevatten en bevat dus precies 1 zwart vierkantje.

Het totaal aantal zwarte vierkantjes in het 9×9-vierkant is dus $13 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 27$.

99.4 Noem de matrix A en de elementen a_{ij}.

We zorgen kolom voor kolom dat deze uit alleen maar nullen bestaat.

Beschouw kolom j. Als alle elementen a_{ij} in deze kolom gelijk zijn aan 1, maken we ze 0 door kolom j met 1 te verminderen.

Als niet alle elementen gelijk zijn aan 1, definieer dan k_j als het aantal elementen in kolom j dat gelijk is aan 1 en m_j als het kleinste element groter dan 1 in de kolom. Verdubbel de rijen i waarin wel $a_{ij} = 1$ en verminder vervolgens alle getallen in kolom j met 1. Er geldt nu ofwel dat k_j groter is dan voorheen ofwel dat k_j gelijk gebleven is en m_j kleiner is dan voorheen.

Herhaal deze stap totdat alle elementen in kolom j gelijk zijn aan 1. (Bij elke stap neemt k_j toe of m_j af. Omdat k_j maximaal 8 kan worden en m_j minimaal 2 is herhalen we deze stap niet eindeloos en zijn alle elementen van kolom j op een gegeven moment 1.) Door kolom j met 1 te verminderen bestaat kolom j nu uit alleen maar nullen.

Het bovenstaande proces herhalen we voor iedere kolom. Op de kolommen die al gelijk zijn aan 0 heeft rijverdubbeling geen effect meer. Uiteindelijk hebben we dus een matrix die alleen nullen bevat.

00.4 a) Orden alle afstanden tussen de spelers van klein naar groot. De twee spelers die de kleinste onderlinge afstand hebben, gooien de bal naar elkaar. We laten deze twee spelers buiten beschouwing en ordenen de onderlinge afstanden van de overige dertien spelers. De twee spelers die nu de kleinste onderlinge afstand hebben, gooien hun bal of naar elkaar, of naar een van de twee vorige spelers. Ze gooien hun bal niet naar een van de elf andere spelers. Deze redenering kunnen we voortzetten tot we één speler overhouden die geen bal krijgt toegespeeld.

b) We beschouwen een willekeurige speler K. Als we vanuit speler K in de rondte kijken zien we de spelers die hem een bal toespelen, zeg dat we achtereenvolgens speler A, B, C, etc. zien. Omdat A en B hun bal naar K spelen, geldt dat de afstand AB groter is dan zowel AK als BK. In driehoek ABK is AB dus de langste zijde en daarmee is $\angle AKB$ de grootste hoek van die driehoek. Omdat de zijden verschillend zijn van lengte, zijn de hoeken ook verschillend van grootte en er geldt $\angle AKB > 60°$.

Zo geldt ook $\angle BKC > 60°$, etc. Daar de cirkel die we rondkijken 360° bevat, passen er zeker niet meer dan vijf hoeken van meer dan 60° in. Het aantal spelers dat een bal naar speler K gooit is dus maximaal vijf.

Daar K een willekeurige speler is krijgt geen enkele speler meer dan vijf ballen toegespeeld.

Hoofdstuk 9

Getaltheorie

9.1 Opgaven

Opgave 90.3 en 92.4 behoren ook tot de categorie Algebra.

80.2 a) Bepaal het produkt van alle delers van 1980.

b) Bepaal het produkt van alle delers van 1980^n, n geheel en groter dan 1.

N.B. Onder de delers van een positief geheel getal M verstaat men de positieve gehele getallen d waarvoor $\frac{M}{d}$ een geheel getal is.

80.4 In Venetianië is de kleinste munteenheid de dukaat. De minister van financiën geeft zijn ambtenaren de volgende opdracht: 'Ik wens zes soorten geldbiljetten, elk ter waarde van een geheel aantal dukaten. Die zes waarden dienen zo te zijn, dat er een getal N bestaat met de volgende eigenschap:

Elk geldbedrag van n dukaten (n positief en geheel) waarbij $n \leq N$ is, kan worden betaald op zo'n manier dat van elke soort biljetten ten hoogste twee exemplaren worden gebruikt, hetzij om te betalen, hetzij om terug te geven. Ik wens die zes waarden bovendien zo, dat N zo groot mogelijk is.

Bepaal die zes waarden en geef daarbij een bewijs dat aan alle gestelde voorwaarden is voldaan.'

Los het probleem van die ambtenaren op.

81.1 Op $\mathbb{R}$ is de functie f gedefiniëerd door:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor$$

Hierin is $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal dat kleiner dan of x is.

Welke waarden kan $f(x)$ aannemen?

81.3 Men wil de verzameling van de natuurlijke getallen van 1 tot en met $3n$, waar n een natuurlijk getal is, splitsen in n onderling disjuncte verzamelingen $\{x, y, z\}$ van drie elementen zo, dat telkens geldt: $x + y = 3z$.
Is dat mogelijk voor $n = 5$? En voor $n = 10$?
Geef in beide gevallen hetzij zo'n splitsing, hetzij een bewijs dat zo'n splitsing onmogelijk is.

82.4 Stel $n = 9^{753}$. Bepaal de grootste gemene deler van de getallen $n^2 + 2$ en $n^3 + 1$.
(De grootste gemene deler van twee gehele getallen x en y is het grootste positieve gehele getal g zo, dat x en y beide een geheel veelvoud van g zijn.)

83.2 Bewijs dat
$$2^{2n}(2^{2n+1}-1)$$
voor elk oneven natuurlijk getal n een getal is dat eindigt op 28 als het in het tientallig stelsel wordt uitgeschreven.

85.2 Hoeveel kwadraten zijn er onder de 10^{10} getallen
$$x_n = 11n + 10^{11},\ (n = 1, 2, \ldots, 10^{10})\ ?$$

87.1 Bepaal alle drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen die voldoen aan
$$a^2 = 2^b + c^4$$
waarbij tevens geldt dat a oneven is.

89.1 Voor een rij gehele getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ met $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ geldt:
$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} \text{ voor } n > 2$$
Verder is gegeven dat $a_4 = 194$.

Bereken a_5.

90.3 Gegeven is van de functie $f : x \to ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$:

- alle coëfficiënten a, b, c en d zijn positief;
- voor elke $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ is $f(x)$ een geheel getal;
- $f(1) = 1$ en $f(5) = 70$.

a) Bewijs dat $a = \frac{1}{24}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{11}{24}$ en $d = \frac{1}{4}$.

b) Bewijs: voor elke $x \in \mathbb{Z}$ is $f(x)$ een geheel getal.

91.4 Van drie reële getallen a, b en c is gegeven:
$$a + b + c = 3\ ,\ a^2 + b^2 + c^2 = 9\ ,\ a^3 + b^3 + c^3 = 24$$
Bereken $a^4 + b^4 + c^4$.

92.2 In deze opgave staat elke letter voor een cijfer. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. De teller en de noemer van de breuk zijn onderling ondeelbaar. De decimale schrijfwijze repeteert met een periode van vier cijfers (.123 is hetzelfde als 0,123).

Bepaal de waarde van de volgende repeterende breuk (ADA KOK won op de olympische spelen in Mexico (1968) een gouden medaille op de 200m vlinderslag.):
$$\frac{ADA}{KOK} = .SNELSNELSNELSNEL\ldots$$

92.4 Voor ieder positief geheel getal n wordt $n?$ als volgt gedefinieerd:
$$n? = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1, \\ \frac{n}{(n-1)?} & \text{als } n \geq 2. \end{cases}$$
Bewijs dat geldt: $\sqrt{1992} < 1992? < \frac{4}{3}\sqrt{1992}$.

93.1 V is de verzameling getallen $\{1, 2, 3, \ldots, 24, 25\}$.

a) Laat zien dat uit V een deelverzameling van 16 getallen gekozen kan worden waarvoor geldt dat het produkt van geen enkel tweetal getallen uit die deelverzameling het kwadraat van een geheel getal is.

b) Laat zien dat elke deelverzameling van V met 17 of meer elementen een tweetal getallen bevat waarvan het produkt een kwadraat van een geheel getal is.

94.3 a) Bewijs dat elk veelvoud van 6 te schrijven is als de som van vier derde machten van gehele getallen.

b) Bewijs dat elk geheel getal te schrijven is als de som van vijf derde machten van gehele getallen.

95.1 Een kangoeroe springt van roosterpunt naar roosterpunt in het (x, y)-vlak. Zij kan maar twee soorten sprongen maken.

Sprong A: hierbij springt ze 1 naar rechts (in de positieve x-richting) en 3 omhoog (in de positieve y-richting).

Sprong B: hierbij springt ze 2 naar links en 4 omlaag.

a) De startpositie van de kangoeroe is de oorsprong $(0, 0)$. Toon aan dat de kangoeroe naar het punt $(19, 95)$ kan springen en bereken het aantal sprongen dat ze daarvoor nodig heeft.

b) De startpositie is nu het punt $(1, 0)$. Toon aan dat ze het punt $(19, 95)$ nooit kan bereiken.

c) De startpositie van de kangoeroe is weer de oorsprong $(0, 0)$. Naar welke punten (m, n) met $m, n \geq 0$ kan zij springen en naar welke kan zij dat niet?

95.5 We beschouwen de rijtjes $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ van 13 gehele getallen. Zo'n rijtje heet 'tam' indien voor iedere $i \in \{1, 2, \ldots, 13\}$ geldt: als je a_i uit het rijtje weglaat kun je de resterende twaalf getallen verdelen in twee groepjes, zodanig dat de som van de getallen in beide groepjes hetzelfde is.

a) Geef een voorbeeld van een tam rijtje waarvan niet alle getallen gelijk zijn. Laat zien dat dit rijtje inderdaad tam is!

b) Bewijs dat ieder tam rijtje geheel uit even òf geheel uit oneven getallen bestaat.

Een tam rijtje heet 'turbo tam' als je de resterende twaalf getallen telkens kunt verdelen in twee groepjes van ieder zes getallen met dezelfde som.

c) Bewijs dat in ieder turbo tam rijtje alle getallen gelijk zijn.

96.2 Onderzoek of voor twee positieve gehele getallen m en n de getallen $m^2 + n$ en $n^2 + m$ beide kwadraten kunnen zijn van gehele getallen.

96.5 Voor de positieve gehele getallen x, y en z geldt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

Bewijs dat als de drie getallen x, y en z geen enkele gemeenschappelijke deler groter dan 1 hebben, $x + y$ het kwadraat is van een geheel getal.

97.1 Bij elk positief geheel getal n definiëren we $f(n)$ als het produkt van de som van de cijfers van n met n zelf.

Voorbeelden: $f(19) = (1 + 9) \cdot 19 = 190$, $f(97) = (9 + 7) \cdot 97 = 1552$.

Toon aan dat er geen getal n bestaat met $f(n) = 19091997$.

98.1 We zetten de getallen $0, 1, 2, \ldots, 9$ in een willekeurige volgorde. Van elk drietal opeenvolgend geplaatste getallen in een rijtje bepalen we de som.

Het maximum van die sommen noemen we M.

Voorbeeld: voor het rijtje $4, 6, 2, 9, 0, 1, 8, 5, 7, 3$ is M gelijk aan 20 $(= 8 + 5 + 7)$.

a) Bepaal een rijtje met $M = 13$.

b) Bewijs dat er geen rijtje bestaat met $M = 12$.

98.3 Van twee positieve gehele getallen m en n is het kleinste gemeenschappelijk veelvoud gelijk aan 133866 $(= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 67)$. Het verschil $m - n$ is gelijk aan 189.

Bereken m en n.

(Het is niet voldoende getallen voor m en n te noemen en te laten zien dat deze aan de voorwaarden voldoen. Uit een berekening of redenering zal moeten blijken dat je alle mogelijkheden gevonden hebt.)

99.1 Een functie f heeft de volgende twee eigenschappen:

- $f(n) = 1$ of $f(n) = -1$ voor elk geheel getal n,
- $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ voor alle gehele getallen m en n.

Laat zien dat er een getal a bestaat, $1 \leq a \leq 12$, met $f(a) = 1$ en $f(a + 1) = 1$.

00.1 We zeggen dat a een macht van b is als er een positief geheel getal n bestaat zodanig dat $a = b^n$. We zeggen dat a een veelvoud van b is als er een geheel getal n bestaat zodanig dat $a = n \cdot b$.

Van de positieve gehele getallen x, y en z is gegeven dat z zowel een macht van x is als een macht van y.

Welke van de volgende beweringen geldt (gelden) voor alle drietallen x, y en z die aan bovenstaande eis voldoen? Beargumenteer je antwoord.

a) $x + y$ is een even getal.

b) Van de getallen x en y is er één een veelvoud van het andere.

c) Van de getallen x en y is er één een macht van het andere.

d) Er is een getal v waarvan zowel x als y een macht is.

e) Bij elke macht van x en elke macht van y is er een getal w dat van elk van deze machten een macht is.

f) Er is een macht x^k met $x^k > y$.

00.5 Een rij velden is genummerd $1, 2, 3, \ldots$. Een pion mag bij elke stap volgens een van de volgende regels van veld veranderen:

1. van veld n naar veld $2n$,
2. van veld $2n$ naar veld n,
3. van veld n naar veld $3n + 1$,
4. van veld $3n + 1$ naar veld n.

a) Laat zien dat een pion van veld 29 naar veld 1 kan komen in een eindig aantal stappen.

b) Laat zien dat een pion van veld 63 naar veld 1 kan komen in een eindig aantal stappen.

c) Bewijs dat een pion van elk veld in de rij naar het veld met nummer 1 kan komen in een eindig aantal stappen.

9.2 Selectie

Van de vijfentwintig opgaven getaltheorie heb ik er veertien geselecteerd. Bij dertien daarvan geef ik in dit hoofdstuk hints en oplossingen. Opgave 80.4 los ik op met de strategie van Polya in hoofdstuk 4. Hieronder geef ik redenen waarom ik een opgave wel of niet geselecteerd heb. Door het weglaten van de afgevallen opgaven blijven nagenoeg alle theorie en begrippen die in alle opgaven uit deze categorie samen voorkomen aan bod komen, alleen de entier-functie valt weg.

Niet-geselecteerde opgaven

81.1 Deze opgave leidt vooral tot veel gevalsonderscheid en is daarom niet zo leuk. Modulo rekenen komt in andere opgaven voldoende aan bod.

81.3 Het bewijs dat het opsplitsen niet mogelijk is voor $n = 10$ is leuk, maar misschien meer algebraïsch van aard. Het zoeken naar een voorbeeld voor $n = 5$ is niet boeiend.

85.2 leidt of tot veel gevalsonderscheid, of tot een korte oplossing met weinig uitleg.

87.1 Omdat het puzzelen is om de oplossing te vinden, geeft deze weinig kennis voor het maken van andere opgaven.

91.4 Ook het vinde van deze oplossing is vooral puzzelen, met voldoende tijd lukt dat wel.

92.4 Hoewel de afschatting mooi is, geeft deze weinig kennis voor andere opgaven in de categorie Getaltheorie. Bij Algebra is deze opgave ook niet geselecteerd omdat andere opgaven daar meer kennis geven.

93.1 draait om wat het betekent dat een getal een kwadraat is, net zoals de wel-geselecteerde opgave 96.5.

95.1 Voor deze oplossing moeten vooral lineaire vergelijkingen opgesteld en opgelost worden, dat leren leerlingen voldoende op school.

95.5 Ik vind het geen gemis om deze opgave weg te laten, alleen het precies opschrijven van de bewijzen is lastig; het idee achter de oplossing niet.

96.2 Ik denk dat deze opgave vrij gemakkelijk is en dat het geven van de oplossing daardoor weinig toevoegt.

99.1 Omdat $0 \in \mathbb{N}$ is deze opgave flauw. Daar er sowieso opgaven af moeten vallen pas ik deze niet aan tot een niet-flauwe opgave.

Geselecteerde opgaven

80.2 Factorisatie en delers zijn belangrijke begrippen en deze komen in deze opgave goed aan bod.

80.4 In deze opgave komt het n-tallig (5-tallig) stelsel aan bod.

82.4 gebruikt het algoritme van Euclides.

83.2 De oplossing gebruikt modulo rekenen en volledige inductie.

89.1 De enige opgave (in deze categorie) met recursie.

90.3 Er moet gewerkt worden met lineaire vergelijkingen en uitdrukkingen en in het tweede onderdeel met ontbinden in factoren.

92.2 De repeterende breuk geeft samen met letters die voor cijfers staan een op het eerste oog ingewikkelde opgave.

94.3 Eenvoudige gevallen bekijken geeft een heel aardig idee voor een oplossing.

96.5 handelt over de betekenis van kwadraat-zijn.

97.1 is geselecteerd vanwege de negenproef.

98.1 Bij deze opgave hoort veel gevalsonderscheid, of de voor deze categorie opvallende hint: maak een plaatje.

98.3 Een eenvoudige maar aardige opgave met daarin het begrip kleinste gemeenschappelijke veelvoud.

00.1 Veel eigenschappen van getallen worden behandeld en de leerling moet weten hoe je bewijst dat iets waar danwel onwaar is.

00.5 is een goed voorbeeld van een algoritme.

9.3 Hints

80.2 Hoe ziet een willekeurige deler van 1980 eruit? Kan je het produkt van alle delers met dezelfde structuur beschrijven?

82.4 Als d een deler is van x en van y, dan is d ook een deler van $x+y$ en $x-y$.

83.2 Bekijk eenvoudige voorbeelden.

Hoe kun je 'getal x eindigt op 28' op een wiskundige manier schrijven?

Iets bewijzen voor alle oneven n kan met volledige inductie.

89.1 Wat heb je nodig om het gevraagde uit te rekenen? Wat is gegeven, aan welke voorwaarden moet worden voldaan?

90.3 a) Gebruik alle gegevens.

b) Hoe ziet $f(x)$ er uit voor alle x? Wat betekent $f(x)$ is geheel?

92.2 Misschien kun je het volgende gebruiken?

$$\begin{aligned} 10 \cdot 0.999\ldots - 1 \cdot 0.999\ldots &= 9.999\ldots - 0.999\ldots \\ 9 \cdot 0.999\ldots &= 9 \\ 0.999\ldots &= \frac{9}{9} = 1 \end{aligned}$$

Wat betekent 'onderling ondeelbaar'?

94.3 a) Bekijk eerst eenvoudige gevallen; kun je een regelmaat ontdekken?

b) Gebruik het resultaat uit onderdeel a).

96.5 Wat betekent het dat $x+y$ een kwadraat is? Wat geldt voor de factorisatie van een kwadraat?

97.1 Een belangrijke eigenschap van de cijfersom is de negenproef: een getal is deelbaar door negen als zijn cijfersom deelbaar is door negen, en andersom.

98.1 b) Geef een bewijs uit het ongerijmde.

De som van drie opeenvolgende getallen is kleiner of gelijk aan M, wat geldt voor de som van alle getallen?

Teken een plaatje.

98.3 Hoe zien de getallen m en n eruit als ze voldoen aan de genoemde eigenschappen?

00.1 Bekijk eenvoudige gevallen; welke beweringen zijn vermoedelijk waar en welke onwaar? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

00.5 Bewijs dat je vanuit elk veld k naar een veld dichterbij veld 1 kan komen. Voor welke k is dit makkelijk? Kun je alle getallen k opsplitsen in verschillende klassen van getallen die je gemakkelijk dichterbij 1 kan brengen?

9.4 Oplossingen

80.2 a) $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Een deler d van 1980 ziet er dus uit als $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 11^{a_4}$, met a_1 en $a_2 \in \{0,1,2\}$ en a_3 en $a_4 \in \{0,1\}$. Het produkt van alle delers is van de vorm $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 11^{x_4}$ met x_i geheel. We willen deze x_i nu bepalen.

Een deler met $a_1 = 1$ draagt 1 bij aan x_1. Een deler met $a_1 = 2$ draagt 2 bij aan x_1 en een deler met $a_1 = 0$ draagt niets bij aan x_1. Als we het aantal delers waarvoor geldt dat $a_1 = 0$ aangeven met $|\{d|a_1 = 0\}|$ dan kunnen we x_1 als volgt schrijven

$$x_1 = 0 \cdot |\{d|a_1 = 0\}| + 1 \cdot |\{d|a_1 = 1\}| + 2 \cdot |\{d|a_1 = 2\}|$$

Hoeveel delers met $a_1 = 1$ zijn er? Deze delers zijn van de vorm $2 \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 11^{a_4}$ en bij zo'n deler zijn er 3 mogelijkheden voor a_2, 2 voor a_3 en 2 voor a_4, dus $|\{d|a_1 = 1\}| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Zo vinden we ook $|\{d|a_1 = 2\}| = 12$ $(= |\{d|a_1 = 0\}|)$. Er geldt

$$x_1 = 1 \cdot 12 + 2 \cdot 12 = 36$$

Op dezelfde manier vinden we $x_2 = 36$, $x_3 = 0 + 1 \cdot |\{d|a_3 = 1\}| = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ en $x_4 = 18$.

Het produkt van alle delers van 1980 is $2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 5^{18} \cdot 11^{18}$ $(= 1980^{18})$.

b) $1980^n = 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 11^n$. Een deler ziet eruit als $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 11^{a_4}$ met a_1 en $a_2 \in \{0,1,\ldots,2n\}$ en a_3 en $a_4 \in \{0,1,\ldots,n\}$. Het produkt van de delers ziet eruit als $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 11^{x_4}$ met de x_i geheel. Er geldt

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{j=0}^{2n} (j \cdot |\{d|a_1 = j\}|) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \big(j \cdot (2n+1)(n+1)(n+1)\big) \\ &= (n+1)^2(2n+1) \cdot \sum_{j=0}^{2n} j \\ &= (n+1)^2(2n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2n(2n+1) \\ &= n(n+1)^2(2n+1)^2 \end{aligned}$$

Op dezelfde manier vinden we $x_2 = x_1$ en $x_3 = x_4 = (2n+1)^2(n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)^2(2n+1)^2$. Het produkt van de delers van 1980^n is

$$(2 \cdot 3)^{n(n+1)^2(2n+1)^2} \cdot (5 \cdot 11)^{\frac{1}{2}n(n+1)^2(2n+1)^2} (= 1980^{\frac{1}{2}n(n+1)^2(2n+1)^2})$$

82.4 De grootste gemene deler (ggd) van twee getallen x en y verandert niet als je van een van beide een geheel veelvoud van het andere getal aftrekt: $\mathrm{ggd}(x,y) = \mathrm{ggd}(x - ky, y)$, k geheel. Elke gemeenschappelijke deler van x en y is immers een deler van $x - ky$ en y en omgekeerd. Nu geldt

$$\begin{aligned} \mathrm{ggd}(n^2+2, n^3+1) &= \mathrm{ggd}(n^2+2, n^3+1-n(n^2+2)) \\ &= \mathrm{ggd}(n^2+2, -2n+1) \end{aligned}$$

Omdat $-2n+1$ oneven is, is 2 geen deler van $-2n+1$. De ggd van $-2n+1$ en een willekeurig getal x zal dus geen factor 2 bevatten. Er geldt nu $\text{ggd}(x,-2n+1) = \text{ggd}(2x,-2n+1)$. Elke gemeenschappelijke deler van x en $-2n+1$ is immers een deler van $2x$ en elke gemeenschappelijke deler van $2x$ en $-2n+1$ bevat geen factor 2 en is dus een deler van x. Er geldt

$$\begin{aligned}\text{ggd}(n^2+2,-2n+1) &= \text{ggd}(2n^2+4,-2n+1)\\ &= \text{ggd}(2n^2+4+n(-2n+1),-2n+1)\\ &= \text{ggd}(n+4,-2n+1)\\ &= \text{ggd}(n+4,-2n+1+2(n+4))\\ &= \text{ggd}(n+4,9)\end{aligned}$$

De ggd van $n+4$ en 9 is een deler van 9 en is dus gelijk aan 1, 3 of 9. n is een negenvoud en dus een drievoud. $n+4$ is een drievoud plus 1 en dus geen drievoud. De ggd is gelijk aan 1.

83.2 We definiëren $f(n)$ door $f(n) = 2^{2n}(2^{2n+1}-1)$ voor oneven n. We willen bewijzen dat $f(n)$ eindigt op 28, voor alle oneven n. Eindigen op 28 is hetzelfde als modulo 100 gelijk zijn aan 28. We bewijzen nu met volledige inductie dat $f(n) = 28 \mod 100$ voor alle oneven n.

$f(1) = 2^2(2^3-1) = 28 \mod 100$

Stel $f(n) \mod 100 = 28$ (de inductiehypothese). We bewijzen nu dat $f(n+2) = 28 \mod 100$:

$$\begin{aligned}f(n+2) &= 2^{2n+4}(2^{2n+5}-1)\\ &= 2^4\cdot 2^{2n}\big((2^{2n+1}-1)+(2^{2n+5}-2^{2n+1})\big)\\ &= 2^4\cdot\big(f(n)+2^{4n}(2^5-2^1)\big)\\ &= 16\cdot(28+16^n\cdot 30) \mod 100 \qquad \text{inductiehypothese}\\ &= 48+16^n\cdot 80 \mod 100\end{aligned}$$

Daar $16\cdot 80 = 80 \mod 100$ geldt $16^n\cdot 80 = 80 \mod 100$ en dus

$$\begin{aligned}f(n+2) &= 48+80 \mod 100\\ &= 28 \mod 100\end{aligned}$$

$f(1) = 28 \mod 100$ en als $f(n) = 28 \mod 100$ dan ook $f(n+2) = 28 \mod 100$ dus geldt met volledige inductie dat $f(n) = 28 \mod 100$ voor alle oneven n.

89.1 Met de recursieve definitie kunnen we a_4 uitdrukken in a_2 en a_1:

$$194 = a_4 = 4a_3 - a_2 = 4\cdot(4a_2-a_1)-a_2 = 15a_2-4a_1$$

$a_2 > a_1$ dus $194 = 15a_2 - 4a_1 > 15a_1 - 4a_1 = 11a_1$ ofwel $a_1 < \frac{194}{11}$ en a_1 is geheel dus $a_1 < 17$.

We bekijken de uitdrukking $194 = 15a_2 - 4a_1$ modulo 3 en 5 (dan vallen de a_2's weg), er geldt $a_1 = 1 \mod 3$ en $a_1 = -1 \mod 5$. Samen met de eis $a_1 < 17$ volgt hieruit dat $a_1 = 4$. Er geldt $a_2 = \frac{194+4\cdot 4}{15} = 14$, $a_3 = 4\cdot 14 - 4 = 52$ en $a_5 = 4\cdot 194 - 52 = 724$.

90.3 a) a,b,c,d positief en $f(1) = a+b+c+d = 1$ dus $0 < a+c < 1$ en $0 < b+d < 1$.
$f(-1) = a-b+c-d$ is geheel dus zijn $f(1)+f(-1) = 2a+2c$ en $f(1)-f(-1) = 2b+2d$ geheel.
Er geldt nu $0 < 2a+2c < 2$ en $2a+2c$ geheel dus $2a+2c = 1$, ofwel $a+c = \frac{1}{2}$ en op dezelfde manier vinden we ook $b+d = \frac{1}{2}$.

$f(2) + f(-2) = 32a + 8c$ is geheel en $2a + 2c$ ook, dus is $32a + 8c - 4(2a + 2c) = 24a$ geheel. $f(2) - f(-2) = 16b + 4c$ is geheel, dus is $12b$ geheel. Voor zekere positieve en gehele p en q geldt nu $a = \frac{p}{24}$ en $b = \frac{q}{12}$. Er geldt

$$\begin{aligned}
f(5) &= 625a + 125b + 25c + 5d \\
70 &= 600a + 25(a + c) + 120b + 5(b + d) \\
70 - 30 \cdot \frac{1}{2} &= 600a + 120b \\
11 &= 120a + 24b \\
11 &= 5p + 2q
\end{aligned}$$

En omdat p en q positief en geheel zijn is de enige oplossing van deze vergelijking $p = 1$ en $q = 3$. Hieruit volgt $a = \frac{1}{24}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}$ en $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

b) We vullen de gevonden coëfficiënten in en ontbinden de functie in factoren.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^2 + \frac{1}{4}x \\
&= \frac{1}{24} \cdot (x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x) \\
&= \frac{1}{24} \cdot x(x + 1)(x + 2)(x + 3)
\end{aligned}$$

Voor elke $x \in \mathbb{Z}$ geldt dat van $x(x+1)(x+2)(x+3)$ een van de termen een tweevoud en geen viervoud is, een van de termen een drievoud is en een van de termen een viervoud is. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ is dus een $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$-voud en $f(x)$ is een 24-voud gedeeld door 24 en dus geheel.

92.2

$$\begin{aligned}
10000 \cdot \frac{ADA}{KOK} - 1 \cdot \frac{ADA}{KOK} &= SNEL.SNELSNELSNELSNEL\ldots \\
&\quad - .SNELSNELSNELSNEL\ldots \\
9999 \cdot \frac{ADA}{KOK} &= SNEL
\end{aligned}$$

Teller ADA en noemer KOK zijn onderling ondeelbaar, dus $9999 \cdot \frac{1}{KOK}$ is een geheel getal. KOK is een deler van $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$, dus KOK is 101 of 303 of 909. Als $KOK = 101$ dan $\frac{ADA}{KOK} > 1$ en dat kan niet. Als $KOK = 909$ dan $11 \cdot ADA = SNEL$ dus $A = L$ en dat kan niet. Dus $KOK = 303$.

Omdat $\frac{ADA}{303} < 1$ geldt A is 1 of 2. Als $A = 1$ dan $3 \cdot 11 \cdot 1D1 = SNEL$ dus $L = 3$, maar er geldt al $K = 3$ dus dat kan niet. Dus $A = 2$.

Omdat ADA en KOK onderling ondeelbaar zijn bevat ADA geen factor 3 en blijven alleen 212, 242, 272 en 292 als kandidaten voor ADA over (D mag immers niet gelijk zijn aan 0, 2 of 3). Als we voor al deze mogelijkheden $\frac{ADA}{KOK}$ uitrekenen vinden we dat alleen $ADA = 242$ voldoet.

$$\begin{aligned}
\frac{ADA}{KOK} &= .SNELSNELSNELSNEL\ldots \\
\frac{242}{303} &= .7986798679867986\ldots
\end{aligned}$$

94.3 a) Een zesvoud ziet eruit als $6n$, waarbij n een geheel getal is. Laten we eerst eens een paar zesvouden bekijken

$$\begin{aligned}
6 \cdot 1 &= 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + 0^3 \\
6 \cdot 2 &= 3^3 + (-2)^3 + (-2)^3 + 1^3 \\
6 \cdot 3 &= 3^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 \\
&= 4^3 + (-3)^3 + (-3)^3 + 2^3
\end{aligned}$$

We zien dat sommige zesvouden op meer dan een manier als de som van vier derde machten geschreven kunnen worden. Is er een manier die voor alle zesvouden werkt? Derde machten zien eruit als k^3, $(k+1)^3$ etc. met k een geheel getal. Als we de haakjes in $(k+1)^3$ wegwerken zien we

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\
6k &= 2(k+1)^3 - 2k^3 - 6k^2 - 2
\end{aligned}$$

Maar op deze manier hebben we meer dan vier derdemachten nodig, en kunnen we $-6k^2 - 2$ wel als een som van derde machten schrijven?

$$\begin{aligned}
(k-1)^3 &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1 \\
(k+1)^3 + (k-1)^3 &= 2k^3 + 6k \\
6k &= (k+1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3 + (k-1)^3
\end{aligned}$$

We kunnen elk zesvoud $6n$ dus op de volgende manier als de som van vier derdemachten schrijven:

$$6n = (n+1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 + (n-1)^3$$

b) Elk geheel getal m is te schrijven als een zesvoud plus een rest, $m = 6n + r$, met n een geheel getal en $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Elk zesvoud kunnen we schrijven als een som van vier derde machten, dus als we r kunnen schrijven als een derde macht, of als een derde macht plus een zesvoud, dan zijn we klaar.

$$\begin{array}{lll}
r = 0, & r = 0^3, & m = 6n + 0^3 \\
r = 1, & r = 1^3, & m = 6n + 1^3 \\
r = 2, & r = 2^3 - 6, & m = 6(n-1) + 2^3 \\
r = 3, & r = (-3)^3 + 30, & m = 6(n+5) + (-3)^3 \\
r = 4, & r = (-2)^3 + 12, & m = 6(n+2) + (-2)^3 \\
r = 5, & r = (-1)^3 + 6, & m = 6(n+1) + (-1)^3
\end{array}$$

De zesvouden $6n$, $6(n-1)$, $6(n+5)$, $6(n+2)$ en $6(n+1)$ kunnen we op de manier van onderdeel a) schrijven als de som van vier derde machten en dus kunnen we elke gehele m schrijven als de som van vijf derde machten.

96.5 De gegeven formule gaat eenvoudig over in

$$z(x+y) = xy \qquad (*)$$

We willen bewijzen dat $x + y$ een kwadraat is. Voor een kwadraat geldt dat als we het kwadraat ontbinden in priemfactoren de macht van elke priemfactor even is.

Stel p is een priemgetal waarvoor geldt dat p^{2k+1} een deler is van $x+y$, k geheel. (We willen nu bewijzen dat p^{2k+2}, een even macht van p, ook een deler is van $x+y$.) Uit $(*)$ volgt dat p^{2k+1} een deler is van xy.

Nu bevat x of y minstens $k+1$ factoren p. Maar als p^{k+1} een deler is van x en van $x+y$, dan ook van y, en andersom. p^{k+1} is dus een deler van x èn van y. Er geldt dat p^{2k+2} een deler is van xy.

p is geen deler van z, want x, y en z hebben geen gemeenschappelijke delers groter dan 1. Met $(*)$ volgt nu dat p^{2k+2} een deler is van $x+y$.

Dus als geldt dat p^{2k+1} een deler is van $x+y$, dan is p^{2k+2} dat ook. De ontbinding in priemfactoren van $x+y$ bevat hierdoor alleen maar even machten van priemgetallen en dus is $x+y$ een kwadraat.

97.1 Stel dat er een getal n is waarvoor geldt $f(n) = 19091997$. We definiëren $s(n)$ als de som van de cijfers van n en nu geldt $f(n) = s(n) \cdot n$.

Als een getal deelbaar is door negen, dan is de som van de cijfers van dat getal ook deelbaar door negen, en andersom (de negenproef).

$s(n) \cdot n = 19091997 = 3^3 \cdot 707111$ en 707111 bevat geen factor 3 meer, dus of n bevat een factor 9, of $s(n)$, maar niet allebei. Maar de negenproef zegt dat als n of $s(n)$ een factor 9 bevat, dat beiden dan een factor 9 bevatten en dit geeft een tegenspraak.

Er is dus geen getal n met $f(n) = 19091997$.

98.1 a) Bijvoorbeeld: $9, 3, 1, 7, 4, 2, 6, 5, 0, 8$.

b) De som van de getallen $0, 1, \ldots, 9$ is 45. Stel dat er wel zo'n rijtje bestaat, dan kan de som van de getallen op twee verschillende manieren geteld worden:

$$\begin{array}{ccccccccc} *** & & *** & & *** & & * & & \\ \leq 12 & + & \leq 12 & + & \leq 12 & + & \leq 9 & = & 45 \\ & & \leq 36 & & & + & \leq 9 & = & 45 \end{array}$$

Dus het getal op de laatste positie moet gelijk zijn aan 9.

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & *** & & *** & & *** & & \\ \leq 9 & + & \leq 12 & + & \leq 12 & + & \leq 12 & = & 45 \\ \leq 9 & + & & & \leq 36 & & & = & 45 \end{array}$$

Dus het getal op de eerste positie moet ook gelijk zijn aan 9.
Maar omdat elk getal slechts één keer in het rijtje mag voorkomen levert dit een tegenspraak op. Zo'n rijtje met $M = 12$ bestaat dus niet.

98.3 Omdat het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van m en n een 27-voud is, moet minstens een van beide getallen een 27-voud zijn. Omdat het verschil $m - n$ ook een 27-voud is $(189 = 3^3 \cdot 7)$, moeten beide getallen een 27-voud zijn.

Noem $m = 27 \cdot p$ en $n = 27 \cdot q$, dan geldt voor p en q dat $p - q = 7$ en het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van p en q is gelijk aan $2 \cdot 37 \cdot 67$. Omdat $p - q = 7$ kunnen p en q alleen 7 en 1 als gemeenschappelijk deler hebben en omdat 7 geen factor is van het kleinste gemeenschappelijke veelvoud hebben p en q alleen 1 als gemeenschappelijke deler. Dus geldt $p \cdot q = 2 \cdot 37 \cdot 67$. Samen met $p - q = 7$ geeft dit als enige oplossing $p = 2 \cdot 37 = 74$ en $q = 67$.

Hieruit volgt $m = 1998$ en $n = 1809$.

00.1 Gegeven zo'n drietal x, y en z. We definiëren m en n zo dat $z = x^m = y^n$. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $x \geq y$ en dus geldt $m \leq n$.

a) Geldt voor alle drietallen. De macht van een even getal is even en de macht van een oneven getal is oneven. Omdat z een macht is van x èn een macht van y, zijn x en y òf allebei even òf allebei oneven. $x + y$ is dus altijd even.

b) Geldt voor alle drietallen. Als d een deler is van y, dan is d^n een deler van $y^n = z = x^m$. Omdat $m \leq n$ moet elk van de m factoren x in x^m wel een factor d bevatten en dus is d een deler van x. Alle delers van y zijn een deler van x en dus is x een veelvoud van y.

c) Geldt niet voor alle drietallen; $x = 8$, $y = 4$, $z = 64$ is een tegenvoorbeeld. 64 is een macht van 8 en een macht van 4, maar 8 is geen macht van 4 (en andersom is 4 geen macht van 8).

d) Geldt voor alle drietallen. Ontbind x en y in priemfactoren, $x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ en $y = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k}$. $x^m = z = y^n$ dus $b_i = \frac{a_i m}{n}$ en $\frac{a_i m}{n}$ is daarom geheel voor alle i.

We definiëren c_i als de grootste gemene deler (ggd) van a_i en b_i voor alle i. En we definiëren v door $v = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{c_k}$.

Voor alle i geldt $c_i \cdot a_1 = \text{ggd}(a_i, \frac{a_i m}{n}) \cdot a_1 = \text{ggd}(a_i \cdot a_1, \frac{a_i m}{n} \cdot a_1) = \text{ggd}(a_1, \frac{a_1 m}{n}) \cdot a_i$ omdat $\frac{a_1 m}{n}$ geheel is, en dus geldt $c_i \cdot a_1 = c_1 \cdot a_i$.

Nu geldt voor alle i dat $(p_i^{c_i})^{\frac{a_1}{c_1}} = p_i^{\frac{c_i \cdot a_1}{c_1}} = p_i^{\frac{c_1 \cdot a_i}{c_1}} = p_i^{a_i}$ en dus geldt $v^{\frac{a_1}{c_1}} = x$. Op dezelfde manier kunnen we bewijzen dat $v^{\frac{b_1}{c_1}} = y$. x en y zijn dus een macht van v.

e) Geldt voor alle drietallen; we nemen een willekeurige macht van x, zeg x^a en een willekeurige macht van y, zeg y^b. Dan geldt $(x^a)^{mb} = (x^m)^{ab} = z^{ab} = (y^n)^{ab} = (y^b)^{na}$ en dus voldoet $w = x^{abm}$ aan de eis.

f) Geldt niet voor alle drietallen; omdat niet gegeven is dat x en y verschillend zijn is $x = y = 1 (= z)$ een tegenvoorbeeld. Elke macht van x is dan gelijk aan y, dus is er geen groter.

00.5 We geven elke stap aan met een pijl; boven de pijl staat welke regel we gebruiken.

a) Een mogelijke manier is

$29 \xrightarrow{1} 58 \xrightarrow{4} 19 \xrightarrow{1} 38 \xrightarrow{1} 76 \xrightarrow{4} 25 \xrightarrow{4} 8 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{2} 1$

b) Een mogelijke manier is

$63 \xrightarrow{3} 190 \xrightarrow{1} 380 \xrightarrow{1} 760 \xrightarrow{4} 253 \xrightarrow{4} 84 \xrightarrow{2} 42 \xrightarrow{3} 127 \xrightarrow{1} 254 \xrightarrow{1} 508 \xrightarrow{4}$
$169 \xrightarrow{4} 56 \xrightarrow{2} 28 \xrightarrow{2} 14 \xrightarrow{2} 7 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{2} 1$

c) Elk veld heeft een positief geheel getal als nummer. We bewijzen dat een pion van veld $k \neq 1$ in een eindig aantal stappen naar veld l kan komen, met $l < k$. Met inductie bewijzen we dan dat een pion van veld k in een eindig aantal stappen naar veld 1 kan komen.

Als k een tweevoud is kunnen we k gemakkelijk terugbrengen naar een kleiner getal. Daarom bekijken we tweevouden plus rest. Kunnen we $k = 2m + 1$ ook gemakkelijk terugbrengen naar een kleiner getal? Wat proberen levert niet direct resultaat.

Als k een drievoud plus een is kunnen we k weer gemakkelijk terugbrengen naar een kleiner getal. Daarom bekijken we drievouden plus rest. We kunnen elk positief getal schrijven als een drievoud plus een rest uit $\{0, 1, 2\}$. Wat proberen levert

$3m \longrightarrow 2m$

Immers $3m \xrightarrow{3} 9m + 1 \xrightarrow{1} 18m + 2 \xrightarrow{1} 36m + 4 \xrightarrow{4} 12m + 1 \xrightarrow{4} 4m \xrightarrow{2} 2m$ en als $3m$ een positief geheel getal is dan is $2m$ dat ook en geldt bovendien $2m < 3m$.

$3m + 1 \longrightarrow m$, mits $m \neq 0$

Immers als $m \neq 0$ geldt $3m + 1 \xrightarrow{4} m$ en dan is m een positief geheel getal en er geldt $m < 3m + 1$.

$3m + 2 \longrightarrow 2m + 1$

Immers $3m + 2 \xrightarrow{2} 6m + 4 \xrightarrow{4} 2m + 1$ en als $3m + 2$ een positief geheel getal is, dan is $2m + 1$ dat ook en er geldt $2m + 1 < 3m + 2$.

We brengen een positief geheel getal k nu als volgt terug tot 1: als $k = 1$ zijn we klaar. Als $k \neq 1$ dan brengen we k volgens bovenstaande stappen terug tot een kleiner positief geheel getal l en gaan we verder met l. Omdat het getal dat teruggebracht moet worden tot 1 bij elke stap kleiner wordt en altijd groter of gelijk aan 1 is, eindigt dit proces bij 1.

(Overigens kan ander gevalsonderscheid, bijvoorbeeld naar zesvouden plus rest, ook een werkend algoritme opleveren.)

Hoofdstuk 10

Vlakke meetkunde

10.1 Opgaven

Opgave 91.2 en 92.5 behoren ook tot de categorie Rijen en reeksen.

80.3 Gegeven is een niet-rechthoekige driehoek ABC. D is het voetpunt van de hoogtelijn uit A, E dat van de hoogtelijn uit B, en F dat van de hoogtelijn uit C. P is het midden van het lijnstuk EF, Q dat van FD en R dat van DE. p is de lijn door P loodrecht op de lijn BC, q de lijn door Q loodrecht op CA en r de lijn door R loodrecht op AB.

Bewijs dat de lijnen p, q en r door één punt gaan.

81.2 Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met centrum M. Op de zijden CA en CB kiest men punten D, respectievelijk E zo, dat $CD = CE$. Het punt F ligt zodanig dat $DMBF$ een parallellogram is.

Bewijs dat driehoek MEF gelijkzijdig is.

82.2 In een driehoek ABC is M het midden van het lijnstuk AB en P een willekeurig punt op het lijnstuk AC.

Beschrijf een methode (en bewijs dat die methode juist is) om het punt Q op het lijnstuk BC te vinden dat dezelfde afstand tot de lijn CM heeft als P. Hierbij mag je alleen gebruik maken van een potlood en een lineaal zonder schaalverdeling (dus je kunt wel lijnen trekken, maar geen afstanden meten).

83.1 Een lijn door het hoekpunt A verdeelt driehoek ABC in twee gelijkbenige driehoeken. Gegeven is dat een van de hoeken van driehoek ABC gelijk is aan $30°$.

Bereken in alle mogelijke gevallen hoe groot de andere hoeken van de driehoek kunnen zijn.

83.4 Binnen een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 15 zijn 111 punten gekozen.

Bewijs dat het - hoe die punten ook gekozen zijn - altijd mogelijk is een ronde munt met diameter $\sqrt{3}$ ergens op de driehoek te leggen op zo'n manier dat de munt minstens drie van de gekozen punten bedekt.(De munt mag gedeeltelijk buiten de driehoek liggen.)

84.1 Twee cirkels C_1 en C_2 met stralen r_1 en r_2 raken de lijn p in het punt P. Cirkel C_1 ligt verder geheel binnen cirkel C_2. De lijn q snijdt p loodrecht in het punt S, raakt cirkel C_1 in R en snijdt C_2 in M en N, waarbij N tussen R en S ligt.

a) Bewijs dat de lijn PR de hoek MPN middendoor deelt.

b) Bereken de verhouding $r_1 : r_2$ als bovendien nog geldt dat lijn PN hoek RPS middendoor deelt.

85.4 Gegeven is een zeshoek $ABCDEF$ zonder inspringende hoeken met de eigenschap dat de diagonalen AD, BE en CF de zeshoek telkens in twee stukken van gelijke opervlakte verdelen.

Bewijs dat AD, BE en CF door één punt gaan.

86.4 Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen a en b en een punt A op a. Men kiest een cirkel γ door A die de lijn b raakt. Het raakpunt noemt men B en het tweede snijpunt van γ en a noemt men T. De raaklijn in T aan γ heet t.

a) Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van γ, een vast punt P bestaat, zo dat BT door P gaat.

b) Bewijs dat er, onafhankelijk van de keuze van γ, een vaste cirkel δ bestaat, zo dat t raaklijn is van δ.

88.4 Gegeven is een gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 2$ en $AC = BC = 3$. Men beschouwt vierkanten waarvoor geldt dat A, B en C op de zijden van het vierkant liggen (en dus niet op het verlengde van zo'n zijde).

Bepaal de maximale en de minimale waarde van de oppervlakte van zo'n vierkant. Motiveer het antwoord.

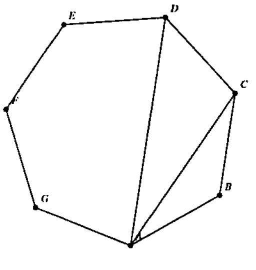
89.2 E is een willekeurig punt op de zijde BC van een vierkant $ABCD$. Op de zijde CD ligt het punt F zo dat $\angle EAF = 45°$.

Bewijs dat het lijnstuk EF raakt aan de cirkel met middelpunt A en de lengte van de zijde van het vierkant als straal.

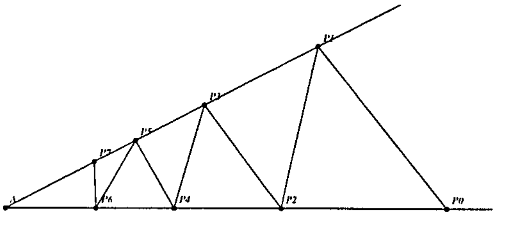
90.4 Gegeven is een regelmatige zevenhoek $ABCDEFG$ met zijde $AB = 1$.

Bewijs dat voor de diagonalen AC en AD geldt:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$$



91.2 Gegeven zijn een $\angle A = \alpha$ met $0 < \alpha < \pi$ en het punt P_0 op een van de benen van de hoek met $AP_0 = 2$. Op het andere been van de hoek wordt een punt P_1 gekozen. Voor zover mogelijk worden nu de punten $P_2, P_3, P_4, \ldots$ getekend steeds zo dat P_n tussen A en P_{n-2} ligt en $\Delta P_n P_{n-1} P_{n-2}$ gelijkbenig is met top P_n (dus $P_nP_{n-1} = P_nP_{n-2}$ voor $n \geq 2$).



In de tekening breekt de rij af na P_7.

a) Bewijs dat er bij elke waarde van α precies één punt P_1 gekozen kan worden zodanig dat de rij $P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ niet afbreekt.

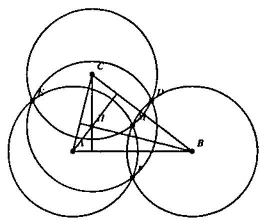
b) Gegeven is dat de rij $P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ niet afbreekt en dat de lengte van het gebroken (zigzag) lijnstuk $P_0P_1P_2 \ldots P_k$ tot 5 nadert als k naar oneindig gaat.
Bereken de lengte van P_0P_1.

91.5 Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met hoogtepunt H.
M is het middelpunt en r de lengte van de straal van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$; notatie $\odot(M,r)$.

$\odot(A,r)$ en $\odot(B,r)$ snijden elkaar in de punten M en F,

$\odot(A,r)$ en $\odot(C,r)$ snijden elkaar in M en E en

$\odot(B,r)$ en $\odot(C,r)$ snijden elkaar in M en D.

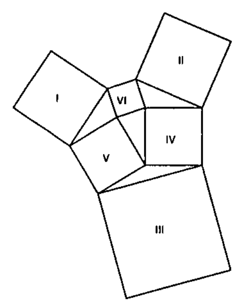


a) Bewijs: de punten D, E en F liggen op $\odot(H,r)$.

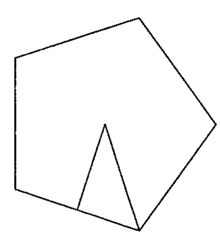
b) Bewijs: de oppervlakte van het gebied dat bestaat uit $\odot(H,r)$ zonder de drie gebieden die gevormd worden door de bogen MD, ME en MF (zie het gearceerde deel in de figuur) is gelijk aan tweemaal de oppervlakte van $\triangle ABC$.

92.3 Zes vierkanten liggen met hoekpunten teggen elkaar, daarbij driehoeken insluitend.

Bewijs dat de totale oppervlakte van de drie buitenste vierkanten (I, II, III) gelijk is aan driemaal de totale oppervlakte van de drie binnenste vierkanten (IV, V, VI).



92.5 We bekijken regelmatige n-hoeken met een vaste omtrek 4. De afstand van het middelpunt van zo'n n-hoek tot een hoekpunt noemen we r_n en de afstand van het middelpunt tot een zijde a_n. Zie de tekening met $n = 5$.



a) Bereken a_4, r_4, a_8 en r_8.

b) Bedenk een passende definitie voor a_2 en r_2.

c) Bewijs: $a_{2n} = \frac{1}{2}(a_n + r_n)$ en $r_{2n} = \sqrt{a_{2n} r_n}$

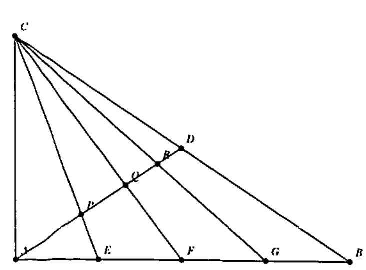
De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ wordt nu als volgt gedefinieerd:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{n-2} + u_{n-1}) & \text{als } n \text{ even is,} \\ \sqrt{u_{n-2} \cdot u_{n-1}} & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

d) Bepaal: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

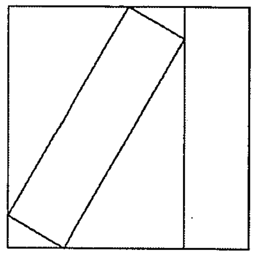
93.2 Gegeven is een driehoek ABC, $\angle A = 90°$. D is het midden van BC, F is het midden van AB, E het midden van AF en G het midden van FB. AD snijdt CE, CF en CG respectievelijk in P, Q en R.

Bepaal de verhouding van de lengten van de lijnstukken PQ en QR.



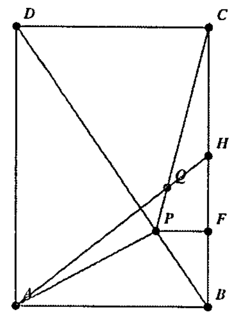
94.1 Een vierkant met ribbe 1 wordt in twee rechthoeken verdeeld, zodanig dat de kleinste van de twee rechthoeken met zijn hoekpunten op de zijden van de grootste rechthoek geplaatst kan worden, waarbij elk hoekpunt op precies één zijde ligt.

Bereken de lengte en de breedte van de kleinste rechthoek.



94.4 In de rechthoek $ABCD$ is P een willekeurig punt op diagonaal BD. Punt F is voetpunt van de loodlijn uit P op BC, punt H ligt op BC zó dat $BF = FH$. Het snijpunt van AH en CP noemen we Q.

Bewijs: $\text{Opp}(APQ) = \text{Opp}(CHQ)$.



95.2 Op een lijnstuk AB wordt een punt P gekozen. Op AP en PB worden gelijkbenige rechthoekige driehoeken (geodriehoeken) AQP en PRB geconstrueerd met Q en R aan dezelfde zijde van AB. M is het midden van QR.

Bepaal de verzameling van de punten M als P het lijnstuk AB doorloopt.

96.4 Een lijn l snijdt het lijnstuk AB loodrecht in C. Drie cirkels zijn getekend met achtereenvolgens AB, AC en BC als middellijn. De grootste cirkel snijdt l in D. De lijnstukken DA en DB snijden de twee kleinere cirkels nog in E en F.

a) Bewijs dat vierhoek $CFDE$ een rechthoek is.

b) Bewijs dat de lijn door E en F de cirkels met middellijnen AC en BC raakt in E en F.

97.2 Binnen een driehoek ABC snijden de lijnen AD, BE en CF elkaar in S.

Gegeven is dat $AS : DS = 3 : 2$ en $BS : ES = 4 : 3$.

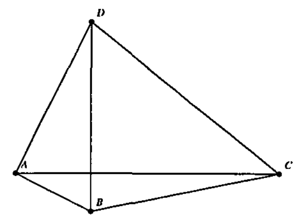
Bepaal de verhouding $CS : FS$.

97.5 Gegeven zijn driehoek ABC en een punt K binnen de driehoek. Het punt K wordt gespiegeld in de zijden van de driehoek: P, Q en R zijn de gespiegelden van K in respectievelijk AB, BC en CA. M is het middelpunt van de cirkel door de hoekpunten van driehoek PQR. M wordt weer gespiegeld in de zijden van de driehoek ABC: P', Q' en R' zijn de gespiegelden van M in respectievelijk AB, BC en CA.

a) Bewijs dat K het middelpunt van de cirkel door de hoekpunten van driehoek $P'Q'R'$ is.

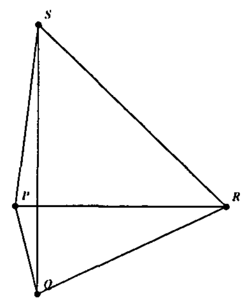
b) Waar moet je K kiezen binnen driehoek ABC zodat M en K samenvallen? Bewijs je antwoord.

98.4 Gegeven is een convexe vierhoek $ABCD$ waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan. (Convex betekent: alle hoeken zijn kleiner dan 180°.)

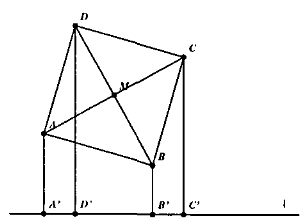


a) Bewijs: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

b) Als $PQRS$ een convexe vierhoek is met $PQ = AB, QR = BC, RS = CD, SP = DA$ dan staan de diagonalen loodrecht op elkaar. Bewijs dit.



99.3 Gegeven zijn een vierkant $ABCD$ en een lijn l. Het punt M is het snijpunt van de diagonalen van het vierkant. De lengte van elk van de diagonalen van het vierkant is 2 en de afstand van M tot de lijn l is groter dan 1. De hoekpunten A, B, C en D worden op l geprojecteerd. De projecties zijn respectievelijk A', B', C' en D'. Het vierkant wordt gedraaid om M, waarbij de punten A, B, C,D meedraaien en hun projecties A', B', C', D' op l meebewegen.



Bewijs dat de waarde van $A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2$ tijdens het draaien niet verandert.

00.3 Gegeven is een parallellogram $PQRS$. Twee gelijkbenige en gelijkvormige driehoeken driehoeken QPA en SPB worden buiten het parallellogram getekend met tophoeken Q en S.

Bewijs dat driehoek RAB gelijkvormig is met de driehoeken QPA en SPB.

10.2 Selectie

Van de vijfentwintig opgaven Vlakke meetkunde heb ik er dertien geselecteerd. Wegens tijdgebrek geef ik slechts bij zes van deze opgaven hints en uitwerkingen. Hieronder geef ik aan welke opgaven ik wel en niet geselecteerd heb.

Niet-geselecteerde opgaven

81.2 valt af omdat er teveel geschikte opgaven zijn.

82.2 Met een lineaal kan je geen loodlijnen en evenwijdige lijnen tekenen, dus zoals de opgave nu gesteld is kan deze niet worden opgelost.

83.1 Deze opgave leidt vooral tot veel gevalsonderscheid.

85.4 gebruikt goniometrie

89.2 kan worden opgelost met een spiegeling, net als de geselecteerde opgave 94.1, of met analytische meetkunde.

92.5 behoort ook tot de categorie Rijen en reeksen.

93.2 kan worden opgelost met spiegelen of met veel berekeningen.

95.2 is niet zo verrassend.

97.2 kan worden opgelost door te gebruiken dat de oppervlakte evenredig is met de hoogte, mits de basis niet verandert. Dit wordt ook gebruikt in de geselecteerde opgave 94.4.

98.4 is een gemakkelijke opgave.

99.3 gebruikt projectie en de stelling van Pythagoras.

00.3 gebruikt gevalsonderscheid en is verder niet zo ingewikkeld.

Geselecteerde opgaven

80.3 kan op verschillende manieren worden opgelost.

83.4 is een leuke opgave waarin het laatjesprincipe aan bod komt.

84.1 De begrippen gelijkvormigheid en omtrekshoek komen aan bod.

86.4 De vermoedens die bewezen moeten worden ontstaan door veel plaatjes te tekenen.

88.4 Deze opgave is heel helder gesteld voor een leerling; verder komen extreme waarden aan bod.

90.4 gebruikt het begrip omtrekshoek.

91.2 behoort ook tot de categorie Rijen en reeksen en is een leuke combinatie van beide categorieën.

91.5 kan op verschillende manieren worden opgelost.

92.3 De oplossing maakt gebruik van de cosinusregel.

94.1 kan worden opgelost met een spiegeling.

94.4 gebruikt dat de oppervlakte van een driehoek niet verandert als de top evenwijdig aan de basis wordt verschoven.

96.4 gebruikt dat een omtrekshoek op de boog door een middellijn gelijk is aan 90°.

97.5 De begrippen ingeschreven en omgeschreven cirkel komen aan bod.

Ik heb hints en oplossingen opgenomen van de opgaven 83.4, 84.1, 90.4, 92.3, 94.1 en 94.4.

10.3 Hints

Een hint die bij alle opgaven Vlakke meetkunde zeer bruikbaar is, is 'teken een plaatje'. Schrijf daarbij al je vermoedens (bijvoorbeeld lijnen die evenwijdig lijken te lopen, of hoeken die even groot lijken te zijn). Als je zo'n vermoeden gebruikt in de oplossing, moet je het natuurlijk bewijzen.

Teken ook bijzondere gevallen (als je bijvoorbeeld de eigenschappen van een driehoek onderzoekt, onderzoek dan ook een gelijkzijdige driehoek). Let wel op dat je niet alleen de bijzondere gevallen onderzoekt (voor een gelijkzijdige driehoek kun je meer eigenschappen afleiden dan voor een willekeurige driehoek).

83.4 Denk aan het laatjesprincipe.

84.1 a) Onderzoek welke hoeken aan elkaar gelijk zijn.

b) Teken een plaatje voor dit bijzondere geval.

90.4 Leid verhoudingen met AC en AD af uit gelijkvormige driehoeken.

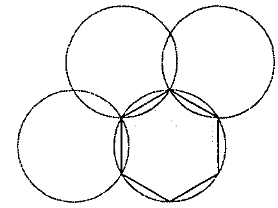
92.3 Gebruik de cosinusregel.

94.1 Maak gebruik van gelijkvormigheid en goniometrie.

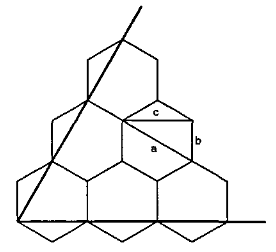
94.4 De oppervlakte van een driehoek verandert niet als de top evenwijdig aan de basis wordt verschoven.

10.4 Oplossingen

83.4 Als we de driehoek kunnen bedekken met n munten en we kiezen $2n+1$ punten in de driehoek, dan is er volgens het laatjesprincipe altijd een munt die drie of meer punten bedekt. We hebben 111 punten en bewijzen nu dat we de driehoek kunnen bedekken met 55 munten (cirkels met diameter $\sqrt{3}$).



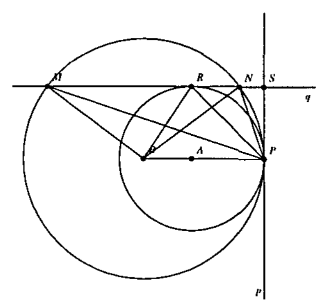
Wat is het minimum aantal cirkels met diameter $\sqrt{3}$ waarmee we de hele driehoek kunnen bedekken? Om met cirkels een aaneengesloten gebied te bedekken, moeten we ze een beetje laten overlappen. In het eerste plaatje zien we dat we dan net zo goed kunnen werken met regelmatige zeshoeken die precies op elkaar aansluiten.



Wat is het minimum aantal regelmatige zeshoeken met diameter $\sqrt{3}$ waarmee we de hele driehoek kunnen bedekken? Als $a = \sqrt{3}$, dan $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{3}{2}$. Op de basis van de driehoek kunnen we dus $\frac{15}{\frac{3}{2}} = 10$ zeshoeken kwijt. De rij daarboven bevat een zeshoek minder, enzovoort, tot aan de bovenste rij die één zeshoek bevat. We kunnen de driehoek dus bedekken met $10 + 9 + \ldots + 1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 = 55$ zeshoeken.

Als we 111 punten in de driehoek kiezen, dan zal er altijd een zeshoek onder die 55 zijn die drie of meer punten bevat. Door de munt op de cirkel die bij die zeshoek hoort te leggen, bedekt de munt drie of meer punten.

84.1 a) Eerst tekenen we de situatie. A en B zijn de middelpunten van de cirkels C_1 en C_2.



We moeten bewijzen dat PR $\angle MPN$ middendoor deelt, dus dat $\angle MPR = \angle RPN$. PR is een diagonaal van vierkant $APSR$, dus $\angle APR = \angle RPS = 45°$. Het is daarom ook voldoende om te bewijzen dat $\angle APM = \angle NPS$. We noemen de grootte van $\angle APM$ nu x en kijken welke hoeken gelijk zijn aan x.

$\triangle MBP$ is gelijkbenig, dus $\angle BMP = x$. $q \parallel BP$ dus $\angle RMP = \angle BPM = x$.

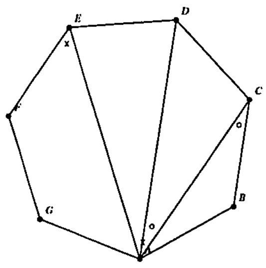
p is de raaklijn aan C_2 in punt P, dus $\angle SPN$ is een omtrekshoek op boog PN. $\angle PMN$ is een omtrekshoek op diezelfde boog en dus geldt $\angle SPN = \angle PMN = x$.

$\angle NPS = \angle AMP$ dus PR is de bissectrice van $\angle MPN$.

b) Als PN de bissectrice is van $\angle RPS$ dan zijn alle vier de hoeken bij P gelijk aan $22,5°$ (en dus $x = 22,5°$).

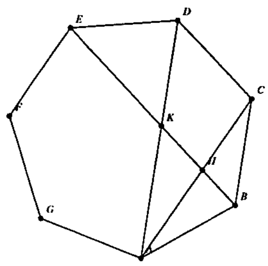
$\angle BMR = \angle BPR$ en $BP \parallel MR$ dus $BPRM$ is een parallellogram en $PR = BM = r_2$. Maar met de stelling van Pythagoras vinden we $PR^2 = PS^2 + SR^2 = 2r_1^2$. Er geldt $r_2 = \sqrt{2} \cdot r_1$ en de verhouding $r_1 : r_2$ is $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

90.4 We moeten bewijzen dat $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$, ofwel $\frac{1}{AC} = \frac{AD-1}{AD}$ of $AC = \frac{AD}{AD-1}$. We zoeken dus een relatie tussen de lengtes AC en AD. Verhoudingen in meetkundige figuren vinden we bijvoorbeeld in gelijkvormige driehoeken, dus gaan we op zoek naar snavelbek- en zandloperfiguren.



In het plaatje zien we AC en AD getekend en het lijkt zo te zijn dat $AD \parallel BC$ en $AC \parallel FE$. Kunnen we dat ook bewijzen? $\angle CAD$ is de omtrekshoek op boog CD en $\angle ACB$ is de omtrekshoek op boog AB. Omdat de zevenhoek regelmatig is zijn beide bogen even lang, en daarmee zijn de hoeken ook even groot. AD en BC snijden de lijn door AC onder gelijke hoeken en daaruit volgt $AD \parallel BC$.

Op dezelfde wijze bewijzen we $AC \parallel FE$: we tekenen de hulplijn AE. Nu geldt $\angle CAE$ is de omtrekshoek op boog CE en $\angle FEA$ is de omtrekshoek op boog FA. Deze bogen zijn gelijk, de hoeken ook en dus snijden AC en FE de lijn door AE onder gelijke hoeken. $AC \parallel FE$.



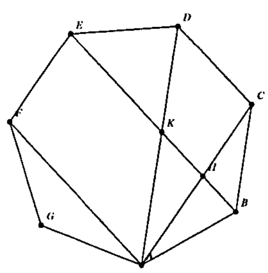
We zijn op zoek naar snavelbek- en zandloperfiguren met AD en AC als zijden. Met hulplijn BE en snijpunten H en K van deze hulplijn met respectievelijk AC en AD vinden we $\triangle AHK \sim \triangle ACD$ en er geldt

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AK}{AD} \tag{1}$$

We willen nu AH en AK uitdrukken in AC en AD.

Net zoals $AD \parallel BC$ geldt $BE \parallel CD$ en daarom is vierhoek $KBCD$ een parallellogram. Hieruit volgt $DK = BC = 1$ en $AK = AD - 1$. Invullen in (1) geeft

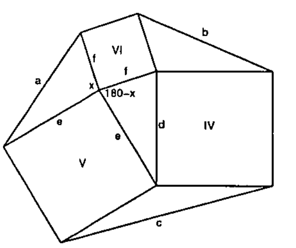
$$\frac{AH}{AC} = \frac{AD-1}{AD} \tag{2}$$



We vinden AH met behulp van vierhoek $FAHE$. $AH \parallel FE$ en $AF \parallel CD \parallel BE$ dus $FAHE$ is een parallellogram en $AH = FE = 1$. Invullen in (2) geeft

$$\frac{1}{AC} = \frac{AD-1}{AD} \tag{3}$$

En zoals we in de inleiding al zagen hebben we met (3) de gevraagde uitdrukking bewezen.



92.3 Rechts is een deel van de figuur uit de opgave getekend. De lengtes van de zijden noemen we $a, b, \ldots, f$ zoals te zien is in het plaatje. De hoek tussen vierkant V en VI noemen we x.

We willen nu de oppervlakte van I ($= a^2$) uitdrukken in de oppervlakte van IV, V en VI. Met de cosinusregel geldt

$$a^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos x$$

We willen de term $-2ef\cos x$ wegkrijgen.

$$\begin{aligned} d^2 &= e^2 + f^2 - 2ef\cos(180° - x) \\ &= e^2 + f^2 + 2ef\cos x \\ a^2 + d^2 &= 2e^2 + 2f^2 \\ a^2 &= 2e^2 + 2f^2 - d^2 \end{aligned}$$

Op dezelfde manier vinden we de volgende uitdrukkingen voor b^2 en c^2:

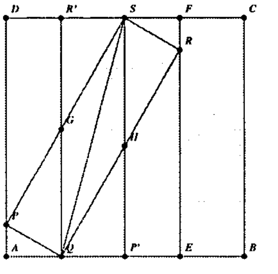
$$\begin{aligned} b^2 &= 2d^2 + 2f^2 - e^2 \\ c^2 &= 2d^2 + 2e^2 - f^2 \end{aligned}$$

Optellen geeft

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(d^2 + e^2 + f^2)$$

De totale oppervlakte van de drie buitenste vierkanten is dus gelijk aan driemaal de totale oppervlakte van de drie binnenste vierkanten.

94.1 In het plaatje is zo'n verdeling getekend die aan de eisen voldoet. De punten hebben een naam gekregen en hulplijnen door S en Q evenwijdig aan BC zijn getekend. De gearceerde rechthoeken zijn congruent. De lengte van kleinste rechthoek is natuurlijk 1 en we willen nu de breedte FC berekenen.



Er geldt $SF = \frac{1}{2} - FC$ en $\cos\angle FSR = \frac{\frac{1}{2}-FC}{FC}$. Als we $\angle FSR$ kennen kunnen we FC berekenen. Daarom zoeken we een driehoek die gelijkvormig is met $\triangle FSR$ en waarvan we de hoeken wel kennen. Van $\triangle DPS$ kunnen we de hoeken berekenen, is deze driehoek nu gelijkvormig met $\triangle FSR$?

$\triangle FSR \sim \triangle RHS$. QS is een diagonaal van $PQRS$ en $P'QR'S$. $R'S = \frac{1}{2} - AQ = \frac{1}{2} - SF = FC = RS$ en dus is $P'QR'S$ het beeld van $PQRS$ bij spiegeling in QS. Er geldt $\triangle RHS \sim \triangle R'GS \sim \triangle DPS$.

Hieruit vinden we $\angle FSR = \angle DPS$ en $\sin\angle DPS = \frac{DS}{PS} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, $\angle DPS = 30^\circ$.

$$\frac{\frac{1}{2} - FC}{FC} = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}FC = \frac{1}{2} - FC$$

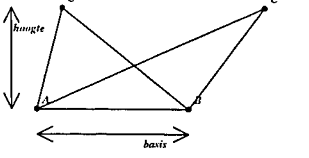
$$(2 + \sqrt{3})FC = 1$$

$$FC = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$$

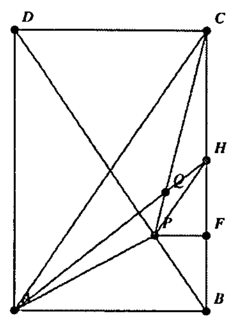
De breedte van de kleinste rechthoek is $2 - \sqrt{3}$.

94.4i We moeten bewijzen dat de twee driehoeken dezelfde oppervlakte hebben. We bekijken hoe we uit een driehoek een andere driehoek kunnen construeren met dezelfde oppervlakte.

De formule voor de oppervlakte van een driehoek is $\frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte. Als AB de basis is van de hiernaast getekende $\triangle ABC$ dan verandert de oppervlakte van de driehoek niet als we top C verschuiven zodanig dat de afstand van C tot AB (de hoogte van $\triangle ABC$) gelijk blijft. We kunnen C dus verschuiven over de lijn door C evenwijdig aan basis AB zonder dat Opp(ABC) verandert.



Kunnen we de driehoeken APQ en CHQ nu zien als twee driehoeken met dezelfde basis en toppen op gelijke afstand van die basis? We tekenen hulplijn PH en er geldt $PH \parallel AC$, immers $\triangle PFH \sim \triangle PFB \sim \triangle DCB \sim \triangle ABC$. Uit $PH \parallel AC$ volgt $\text{Opp}(APH) = \text{Opp}(CHP)$. Door van allebei de kanten $\text{Opp}(PHQ)$ af te trekken vinden we $\text{Opp}(APQ) = \text{Opp}(CHQ)$.



94.4ii We berekenen de oppervlakte van $\triangle APQ$ door deze uit te drukken in de som van de opppervlaktes van andere driehoeken. Zonder verlies van algemeenheid geldt $AB = 1$. Verder definiëren we $x = AD$ en $y = BF$. Er geldt

$$\begin{aligned}\text{Opp}(APQ) &= \text{Opp}(ABH) - \text{Opp}(ABP) - \text{Opp}(BFP) - (\text{Opp}(PFC) - \text{Opp}(CQH)) \\ &= \frac{1 \cdot 2y}{2} - \frac{1 \cdot y}{2} - \frac{y \cdot PF}{2} - \frac{(x-y) \cdot PF}{2} + \text{Opp}(CQH) \\ &= \frac{y}{2} - \frac{x \cdot PF}{2} + \text{Opp}(CQH)\end{aligned}$$

$\triangle PFB \sim \triangle BAD$ dus $\frac{PF}{BA} = \frac{FB}{AD}$ en $PF = \frac{y}{x}$.

$$\text{Opp}(APQ) = 0 + \text{Opp}(CQH)$$

En dat is wat we wilden bewijzen.

Trefwoordenlijst bij de theorie

Trefwoordenlijst bij de opgaven

Opgavenlijst

Bibliografie

[1] A.W. Boon, R. van Brakel, C. Brouwer, et al. *Netwerk.* Wolters-Noordhoff, 1998.

[2] Dick Bos, Marja Bos, Carel van de Giessen, et al. *Moderne Wiskunde.* Wolters-Noordhoff, 1999.

[3] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, 1998.

[4] A. Gardiner. *The Mathematical Olympiad Handbook.* Oxford University Press, 1997.

[5] G. Polya. *How To Solve It.* Doubleday Anchor Books, 1957.

[6] R.A.J. Vuijk, L.A. Reichard, S. Rozemond, et al. *Getal en Ruimte.* Educatieve Partners Nederland, 1998.

[7] A.P.A. Theune. *NWO 1962-1990: Classificatie en analyse.* Afstudeerverslag, Technische Universiteit Eindhoven, 1990.

[8] Anne van Streun. *Heuristisch wiskunde-onderwijs.* Proefschrift, Rijksuniversiteit Groningen, 1989.

[9] http://mathforum.com. The Math Forum, An Online Math Education Community Center.

[10] http://olympiads.win.tue.nl/nwo/. Website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

[11] http://www.nvvw.nl, 1998,1999. Eindtermen HAVO/VWO, Website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.