MASTER

Ontwikkeling van een planautomaat voor de werkplekplanning in academische ziekenhuizen

van de Ven, P.M.

Award date:
2001

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

AFSTUDEERVERSLAG

Ontwikkeling van een planautomaat voor de werkplekplanning in academische ziekenhuizen

door

P.M. van de Ven

Afstudeerdocent: prof.dr. J.K. Lenstra

augustus 2001

VOORWOORD

Als afstudeeropdracht voor de studie Technische Wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven heb ik een bedrijfsstage gelopen bij het bedrijf ORTEC Consultants B.V. te Gouda. In de periode van oktober 2000 tot juli 2001 ben ik daar bezig geweest met het ontwikkelen van het algoritme voor een planautomaat voor de werkplekplanning in grote ziekenhuizen.
Het uiteindelijk resultaat heb ik vastgelegd in deze scriptie. Tijdens deze periode ben ik begeleid door Judith Keijsper en Leen Stougie van de Technische Universiteit Eindhoven en Wouter Luijten van ORTEC Consultants BV. Ik wil hen bij deze hartelijk bedanken voor hun ondersteuning en adviezen tijdens deze periode. Tevens wil ik de overige werknemers van de afdeling Arbeidstijdmanagement bedanken voor hun ondersteuning.

Peter van de Ven,
Augustus 2001

INLEIDING

Deze scriptie is geschreven naar aanleiding van een stage bij het bedrijf ORTEC Consultants B.V. in Gouda. In de periode van oktober 2000 tot juli 2001 heb ik mij op de afdeling Arbeidstijdmanagement van dat bedrijf in het kader van een afstudeerproject bezig gehouden met het werkplekplanningsprobleem binnen grote ziekenhuizen.

Het onderwerp kwam naar voren bij een opdracht van het Academisch Ziekenhuis Rotterdam. Het Academisch Ziekenhuis Rotterdam was toe aan vernieuwing van de dienstroostersoftware en koos voor het door ORTEC ontwikkelde HARMONY. Met HARMONY was het mogelijk, om rekening houdend met de geldende regels, zowel handmatig als automatisch de diensten van het personeel in te roosteren. Binnen verschillende afdelingen van het Academisch Ziekenhuis Rotterdam was er echter ook behoefte aan een planautomaat voor de werkplekplanning. Een dergelijke planautomaat maakte nog geen deel uit van HARMONY. Mijn opdracht was het ontwikkelen van deze planautomaat die de binnen een afdeling beschikbare werknemers op efficiënte wijze aan de te bezetten werkplekken moest toewijzen. De ontwikkelde planautomaat zal deel uit gaan maken van HARMONY.

De behoefte aan een planautomaat voor de werkplekplanning was er vooral binnen de apotheekafdeling van het Academisch Ziekenhuis Rotterdam. In overleg met de planners van de apotheek is men gekomen tot een eerste omschrijving van het werkplekplanningsprobleem. Het probleem is vervolgens wat ruimer gedefinieerd om de planautomaat ook van toepassing te laten zijn op andere afdelingen.

De indeling van deze scriptie is als volgt. In hoofdstuk 1 wordt een omschrijving gegeven van het werkplekplanningsprobleem. Vervolgens wordt in hoofdstuk 2 een formele wiskundige omschrijving van het probleem gegeven, waarna in hoofdstuk 3 de complexiteit van het probleem aan bod komt. In hoofdstuk 4 wordt de theorie beschreven waarvan gebruik gemaakt is bij het ontwikkelen van het algoritme. In hoofdstuk 5 wordt een algoritme voor het oplossen van het werkplekplanningsprobleem bij de apotheekafdeling gegeven. Dit algoritme wordt vervolgens in hoofdstuk 6 aangepast om het ook van toepassing te laten zijn op afdelingen waar sprake is van kamers waarbinnen werkplekken gelijktijdig bezet moeten worden. In hoofdstuk 7 wordt aangegeven op welke manier het algoritme kan worden aangepast aan eventuele wensen die aan een werkplekplanning gesteld kunnen worden, waarna in hoofdstuk 8 iets zal worden gezegd over de rekentijd van het algoritme. Tenslotte worden in hoofdstuk 9 enkele conclusies en suggesties voor verder onderzoek gegeven worden.

1. PROBLEEMOMSCHRIJVING

Binnen het Academisch Ziekenhuis Rotterdam is er binnen enkele afdelingen behoefte aan een planautomaat voor de werkplekplanning. Deze planautomaat moet in staat zijn om voor een willekeurige periode de beschikbare werknemers op een zo goed mogelijke manier toe te wijzen aan de verschillende werkplekken binnen de afdeling. In dit hoofdstuk zal dat probleem preciezer beschreven worden. Allereerst zullen in paragraaf 1.1 enkele definities gegeven worden van begrippen die gebruikt worden bij de beschrijving van het probleem. Vervolgens zal in paragraaf 1.2 het probleem beschreven worden.

1.1. DEFINITIES

In deze paragraaf worden enkele begrippen gedefinieerd die een belangrijke rol spelen in deze scriptie. Het betreft de begrippen *werkplek*, *kamer*, *bezettingseis*, *werkplektoewijzing*, *toegelaten werkplektoewijzing*, *werkplekplanning* en *toegelaten werkplekplanning*.

- Een *werkplek* is een verzameling activiteiten waaraan op elk moment door hoogstens één werknemer gewerkt kan worden.

- Een *kamer* is een verzameling van werkplekken, bestaande uit een aantal vereiste werkplekken en een aantal niet-vereiste werkplekken. Voor elke werkplek binnen een kamer geldt dat deze uitsluitend bezet mag worden wanneer alle vereiste werkplekken binnen de kamer bezet worden.

- Een *bezettingseis* is een vraag naar de bezetting van een werkplek of een kamer binnen een bepaald interval en voor een bepaalde benodigde tijdsduur. Aan elke bezettingseis is een prioriteit gekoppeld, die aangeeft hoe belangrijk deze bezettingseis is in vergelijking met de andere bezettingseisen.

- Een *werkplektoewijzing* is de toewijzing van een werknemer voor een tijdsinterval aan een werkplek met als doel hierdoor gedeeltelijk of geheel aan een bepaalde bezettingseis te voldoen.

- Een *toegelaten werkplektoewijzing* is een werkplektoewijzing waarvoor geldt dat de werknemer de gehele duur van het interval beschikbaar is en bovendien beschikt over de voor de werkplek vereiste kwalificaties en het vereiste minimum ervaringsniveau bij elk van deze kwalificaties.

- Een *werkplekplanning* is een verzameling van toegelaten werkplektoewijzingen voor een planningsperiode.

- Een *toegelaten werkplekplanning* is een werkplekplanning waarbij voor ieder tijdstip in de planningsperiode geldt dat elke werknemer hoogstens aan één werkplek is toegewezen en dat aan elke werkplek hoogstens één werknemer is toegewezen.

1.2 PROBLEEMFORMULERING

Er moet een planautomaat komen die het werkplekplanningsprobleem voor een door de gebruiker op te geven planningsperiode exact oplost. Het werkplekplanningsprobleem voor een planningsperiode kan als volgt beschreven worden. Gegeven is een verzameling werknemers, waarbij voor elke werknemer bekend is wanneer hij binnen de planningsperiode beschikbaar is. Ook is voor elke werknemer bekend welke kwalificaties hij bezit en over welk ervaringsniveau hij bij elk van deze kwalificaties beschikt. Verder is gegeven een verzameling werkplekken, waarbij voor elke werkplek bekend is over welke kwalificaties en bijbehorend ervaringsniveau een werknemer minimaal moet beschikken om deze werkplek te bezetten. Tenslotte is een verzameling bezettingseisen gegeven, welke zowel bezettingseisen voor afzonderlijke werkplekken als bezettingseisen voor kamers kan bevatten. De uitvoer van de planautomaat zal moeten bestaan uit de optimale toegelaten werkplekplanning. Een toegelaten werkplekplanning is optimaal wanneer er zo mogelijk aan alle bezettingseisen of anders aan een zo goed mogelijke selectie uit deze bezettingseisen volledig voldaan wordt. Een selectie is beter naarmate deze meer bezettingseisen bevat en naarmate deze bezettingseisen een hogere prioriteit hebben. De manier waarop de afweging tussen deze twee criteria precies plaats moet vinden, is niet nader gespecificeerd.

2. WISKUNDIGE PROBLEEMFORMULERING

In dit hoofdstuk zal een wiskundige formulering van het werkplekplanningsprobleem gegeven worden. Allereerst wordt in paragraaf 2.1 aangeven welke parameters als input voor het probleem verwacht worden. Daarna wordt in paragraaf 2.2 aangegeven hoe de output van het probleem er uit zal zien. In paragraaf 2.2.1. wordt aangegeven hoe de output gerepresenteerd kan worden en het gekozen optimaliteitscriterium wordt in paragraaf 2.2.2. toegelicht. Tenslotte wordt in paragraaf 2.3 een stricte definitie van het werkplekplanningsprobleem gegeven.

2.1 DE INPUT VAN HET PROBLEEM

Gegeven is de planningsperiode $\boldsymbol{p} = [0\ , p)$ waarvoor een werkplekplanningsprobleem moet worden opgelost en laat $p \in \mathbb{N}$ het aantal tijdseenheden zijn waaruit deze planningsperiode bestaat. Laat verder $\{\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}\}$, met $\delta_i = [\, i, i+1\,) \subset \mathbb{R}$ voor $i \in \{0, \ldots, p\text{-}1\}$, de verzameling van een eenheidsintervallen zijn waarin de planningsperiode is opgedeeld.

Gegeven is een verzameling $\boldsymbol{W}$ van werknemers (bijvoorbeeld een roostergroep of een afdeling) waarvoor de werkplekplanning plaats moet vinden. Voor elke werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ is bekend gedurende welke intervallen $\boldsymbol{B}(w, \boldsymbol{p}) \subseteq \{\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}\}$ binnen de planningsperiode hij beschikbaar is voor het bezetten van werkplekken. Laat $\boldsymbol{K}$ de verzameling van alle verschillende kwalificaties zijn. Voor elke werknemer is bekend over welke kwalificatie(s) $\boldsymbol{K}(w) \subseteq \boldsymbol{K}$ hij beschikt. Bovendien is voor elke combinatie van een werknemer w en een kwalificatie $k \in \boldsymbol{K}(w)$ een ervaringsniveau $x(k,w) \in \mathbb{N}$ bekend.

Gegeven is verder een verzameling werkplekken $\boldsymbol{S}$. Voor elke werkplek $s \in \boldsymbol{S}$ is bekend over welke kwalificatie(s) $\boldsymbol{K}(s) \subseteq \boldsymbol{K}$ een werknemer moet beschikken om de werkplek te mogen bezetten. Ook is er voor elke combinatie van een werkplek s en een kwalificatie $k \in \boldsymbol{K}(s)$ een minimum vereist ervaringsniveau $x(k,s) \in \mathbb{N}$ bekend, dit is het ervaringsniveau waarover een werknemer minimaal moet beschikken om werkplek s te mogen bezetten.

Ook is er een verzameling kamers $\boldsymbol{R}$ gegeven. Voor elke kamer $r \in \boldsymbol{R}$ is bekend uit welke verzameling werkplekken $\boldsymbol{S}(r) \subseteq \boldsymbol{S}$ deze kamer is samengesteld. Ook is bekend welke werkplekken $\boldsymbol{S}^*(r) \subseteq \boldsymbol{S}(r)$ er vereist zijn voor opening van de kamer.

Voor de verzameling werkplekken $\boldsymbol{S}$, de verzameling kamers $\boldsymbol{R}$ en de planningsperiode $\boldsymbol{p}$ is een verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}$ gegeven. De verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}$ kan worden opgesplitst in twee deelverzamelingen $\boldsymbol{E}^S$ en $\boldsymbol{E}^R$. De verzameling $\boldsymbol{E}^S$ bestaat uit bezettingseisen voor werkplekken afzonderlijk. Laat $q_{max} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ een maximum zijn voor de door de gebruiker op te geven prioriteit van een bezettingseis. Een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^S$ wordt vastgelegd door een werkplek $s(e) \in \boldsymbol{S}$, een begintijd $t_{begin}(e) \in \{0,\ldots, p\text{-}1\}$ een eindtijd $t_{eind}(e) \in \{1,\ldots, p\}$, een benodigde tijdsduur $d_{benodigd}(e) \in \{1,\ldots, p\}$ en een prioriteit $q(e) \in \{1, \ldots, q_{max}\}$. De verzameling $\boldsymbol{E}^R$ bestaat uit bezettingseisen voor de kamers. Een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^R$ wordt vastgelegd door een kamer $r(e) \in \boldsymbol{R}$, een begintijd $t_{begin}(e) \in \{0,\ldots, p\text{-}1\}$, een eindtijd $t_{eind}(e) \in \{1, \ldots, p\}$, een benodigde tijdsduur $d_{benodigd}(e) \in \{1,\ldots, p\}$ en een prioriteit $q(e) \in \{1, \ldots, q_{max}\}$.

2.2 DE OUTPUT VAN HET PROBLEEM

2.2.1 RESPRESENTATIE VAN EEN TOEGELATEN WERKPLEKPLANNING

De output van het probleem zal bestaan uit een toegelaten werkplekplanning voor de planningsperiode. In paragraaf 1.1 is een werkplekplanning gedefinieerd als zijnde een verzameling van toegelaten werkplektoewijzingen. Laat met $\boldsymbol{Z}$ een werkplekplanning, dat wil zeggen de verzameling van toegelaten werkplektoewijzing aangeduid worden. Een werkplektoewijzing z wordt vastgelegd door een werknemer $w(z) \in \boldsymbol{W}$, een bezettingseis $e(z) \in \boldsymbol{E}$, een werkplek $s(z) \in \boldsymbol{S}(r(e(z))$ wanneer $e(z) \in \boldsymbol{E}^R$ en $s(z) = s(e(z))$ voor $e(z) \in \boldsymbol{E}^S$, een begintijd $t_{begin}(z) \in \{0,\dots, p\text{-}1\}$ en een eindtijd $t_{eind}(z) \in \{1,\dots, p\}$. De werkplektoewijzing $z \in \boldsymbol{Z}$ geeft aan dat in de werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ werknemer $w(z)$ voor het interval $[t_{begin}(z), t_{eind}(z)) \subset \mathbb{R}$ in het kader van bezettingseis $e(z)$ wordt toegewezen aan de werkplek $s(z)$.

Een werkplektoewijzing z is toegelaten wanneer:
- de werknemer $w(z)$ gedurende het gehele interval $[t_{begin}(z), t_{eind}(z))$ beschikbaar is, dus wanneer er voor alle $i \in \{t_{begin}(z), \dots, t_{eind}(z) - 1\}$ geldt dat $\delta_i \in \boldsymbol{B}(w(z))$;
- de werknemer $w(z)$ gekwalificeerd en voldoende ervaren is voor de werkplek $s(z)$, dus wanneer er geldt dat $(k \in \boldsymbol{K}(w(z)) \wedge x(k,w(z)) \geq x(k,s(z)))$ voor alle $k \in \boldsymbol{K}(s(z))$.

Een werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ is toegelaten wanneer voor de verzameling werkplektoewijzingen $\boldsymbol{Z}$ geldt dat:
- elke werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ elk moment hoogstens aan één werkplek $s \in \boldsymbol{S}$ is toegewezen, dat wil zeggen dat $(w(z_1) = w(z_2)) \Rightarrow (t_{eind}(z_2) \leq t_{begin}(z_1) \vee t_{begin}(z_2) \geq t_{eind}(z_1))$ voor alle z_1, $z_2 \in \boldsymbol{Z}$.
- aan elke werkplek $s \in \boldsymbol{S}$ elk moment hoogstens één werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ is toegewezen, dat wil zeggen dat $(s(z_1) = s(z_2)) \Rightarrow (t_{eind}(z_2) \leq t_{begin}(z_1) \vee t_{begin}(z_2) \geq t_{eind}(z_1))$ voor alle z_1, $z_2 \in \boldsymbol{Z}$.
- voor elke kamer $r \in \boldsymbol{R}$ moet gelden dat elk moment dat er een werkplek binnen de kamer bezet is, alle voor opening vereiste werkplekken in de kamer bezet zijn, dat wil zeggen dat $s(z_1) \in \boldsymbol{S}(r)$ voor een zeker $r \in \boldsymbol{R}$ en $z_1 \in \boldsymbol{Z}$ impliceert dat voor elk paar $(s\ , t)$ met $s \in \boldsymbol{S}^*(r)$ en $t \in \{0, \dots, p\}$ waarvoor geldt dat $t_{begin}(z_1) \leq t < t_{eind}(z_1)$ er een toegelaten werkplektoewijzing $z \in \boldsymbol{Z}$ bestaat met $t_{begin}(z) \leq t < t_{eind}(z)$, $s(z) = s$ en $e(z)= e(z_1)$.

2.2.2 HET OPTIMALITEITSCRITERIUM

Wanneer er geen toegelaten werkplekplanning bestaat waarbij aan alle bezettingseisen voldaan wordt zal een afweging gemaakt moeten worden tussen de verschillende toegelaten werkplekplanningen. In de probleemomschrijving in paragraaf 1.2 is vermeld dat een toegelaten werkplekplanning beter is naarmate er aan meer bezettingseisen volledig voldaan wordt en naarmate de bezettingseisen waaraan volledig voldaan wordt een hogere prioriteit hebben. De manier waarop de afweging tussen deze twee criteria precies plaats moet vinden, is niet nader gespecificeerd. In deze paragraaf zullen allereerst enkele aannames gemaakt worden. Daarna zal, mede op basis van deze aannames, een optimaliteitscriterium gekozen worden.

AANNAME **2.1**: Er wordt aangenomen dat het niet zinvol is om slechts gedeeltelijk aan een bezettingseis te voldoen door de werkplek $s(e)$ of kamer $r(e)$ slechts voor een tijdsduur $d < d_{benodigd}(e)$ te bezetten.

AANNAME **2.2**: Er wordt aangenomen dat het niet zinvol is om de niet voor opening vereiste werkplekken in een kamer te bezetten, wanneer dat tot gevolg heeft dat aan een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ niet voldaan kan worden.

AANNAME **2.3**: Er wordt aangenomen dat het voldoen aan een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^R$ met prioriteit $q^* = q(e)$ voor een kamer r met een aantal $n = |\boldsymbol{S}^*(r)|$ voor opening vereiste werkplekken even zinvol is als het voldoen aan n bezettingseisen uit $\boldsymbol{E}^S$ met ieder prioriteit $q(e) = q^*$.

Op basis van de eerste van deze aannames (AANNAME 2.1) wordt ervoor gekozen om in het optimaliteitscriterium gebruik te maken van een *unit penalty function* U_Z: $\boldsymbol{E} \rightarrow \{1,0\}$. Voor een gegeven toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ kan voor elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ de *unit penalty* $U_Z(e)$ bepaald worden door:

$U_Z(e) = 0$,	wanneer $e \in E^S$ én de werkplek $s(e)$ in de werkplekplanning Z voor een tijdsduur $d_{benodigd}$ bezet wordt;
$U_Z(e) = 0$,	wanneer $e \in E^R$ én de werkplekken uit $S^*(r)$ in de werkplekplanning Z alle gelijktijdig en voor een tijdsduur $d_{benodigd}$ bezet worden;
$U_Z(e) = 1$,	anders.

De parameter $\gamma(e)$ geeft het verlies als gevolg van het niet voldoen aan bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ aan en wordt gedefinieerd als:

$\gamma(e) = q(e)$, wanneer $e \in \boldsymbol{E}^S$;
$\gamma(e) = q(e) \cdot |S^*(r(e))|$, wanneer $e \in \boldsymbol{E}^R$.

Als optimaliteitscriterium zal gekozen worden:

$$\min \sum_{e \in E} Uz(e) \cdot \gamma(e) \tag{2.1}$$

waarbij geminimaliseerd wordt over alle toegelaten werkplekplanningen. Er is dus gekozen om het totale verlies veroorzaakt door het niet volledig voldoen aan enkele bezettingeisen uit $\boldsymbol{E}$ te minimaliseren.

De uitdrukking $\sum_{e \in E} Uz(e) \cdot \gamma(e)$ zal in het vervolg met de term *doelfunctie* worden aangeduid.

Een optimaliteitscriterium dat equivalent is aan (2.1) is het volgende:

$$\min \sum_{e \in E} Uz'(e) \cdot \gamma(e) \tag{2.2}$$

met $U_Z'(e) = U_Z(e) - 1$ voor alle $e \in \boldsymbol{E}$ en waarbij er weer geminimaliseerd wordt over alle toegelaten werkplekplanningen.

2.3 EEN STRICTE DEFINITIE VAN HET PROBLEEM

Nu de vorm van de input en output en het optimaliteitscriterium bekend zijn, is het mogelijk een stricte definitie van het werkplekplanningsprobleem te geven. Elke toegelaten werkplekplanning kan gerepresenteerd worden door een verzameling van toegelaten werkplektoewijzingen $\boldsymbol{Z}$ en een daarmee corresponderende vector U_Z: $\boldsymbol{E} \rightarrow \{1,0\}$, waarbij de vector U_Z aangeeft aan welke bezettingseisen bij deze werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ volledig voldaan wordt en de verzameling $\boldsymbol{Z}$ aangeeft welke werknemer wanneer welke werkplek bezet.

DEFINITIE 2.1 (WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM)

Gegeven zijn een planningsperiode $\boldsymbol{p}$, een verzameling werknemers $\boldsymbol{W}$, de beschikbaarheid van deze werknemers in de vorm van de verzamelingen $\boldsymbol{B}(w,\boldsymbol{p})$ voor $w \in \boldsymbol{W}$, een verzameling werkplekken $\boldsymbol{S}$, een verzameling kamers $\boldsymbol{R}$, een verzameling kwalificaties $\boldsymbol{K}$ en een verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}$. Verder zijn gegeven de parameters $x(k,w)$ voor alle $w \in \boldsymbol{W}$ en $k \in \boldsymbol{K}(w)$ en $x(k,s)$ voor alle $s \in \boldsymbol{S}$ en $k \in \boldsymbol{K}(s)$.

De vraag is een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ te bepalen waarvoor geldt dat de doelfunctie $\sum_{e \in E} Uz(e) \cdot \gamma(e)$ minimaal is.

3. COMPLEXITEIT VAN HET WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM

Het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is NP-volledig. Dit kan worden aangetoond door middel van een reductie vanuit het KNAPZAKPROBLEEM. Laat WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B het beslissingprobleem behorende bij het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM zijn.
Het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B kan als volgt gedefinieerd worden:

DEFINITIE 3.1(WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B)
Gegeven zijn een planningperiode $\boldsymbol{p}$, een verzameling werknemers $\boldsymbol{W}$, de beschikbaarheid van deze werknemers in de vorm van de verzamelingen $\boldsymbol{B}(w, \boldsymbol{p})$ voor $w \in \boldsymbol{W}$, een verzameling werkplekken $\boldsymbol{S}$, een verzameling kamers $\boldsymbol{R}$, een verzameling kwalificaties $\boldsymbol{K}$ en een verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}$. Verder zijn gegeven de parameters $x(k,w)$ voor alle $w \in \boldsymbol{W}$ en $k \in \boldsymbol{K}(w)$, $x(k,s)$ voor alle $s \in \boldsymbol{S}$ en $k \in \boldsymbol{K}(s)$ en een grenswaarde $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Gevraagd wordt te beslissen of er een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ bestaat waarvoor geldt dat $\sum_{e \in E} U_Z(e) \cdot \gamma(e) \le c$?

Het KNAPZAKPROBLEEM (o.a. in Garey & Johnson (1979)) kan als volgt gedefinieerd worden:

DEFINITIE 3.2(KNAPZAKPROBLEEM)
Gegeven is een eindige verzameling $\boldsymbol{V}$ en voor elke $v \in \boldsymbol{V}$ een gewicht $g(v) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ en een waarde $h(v) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ en $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Gevraagd wordt te beslissen of er een deelverzameling $\boldsymbol{V'} \subseteq \boldsymbol{V}$ bestaat waarvoor geldt dat dat $\sum_{v \in V'} g(v) \le m$ en $\sum_{v \in V'} h(v) \ge n$?

Voor het KNAPZAKPROBLEEM geldt dat het NP-volledig is (Garey & Johnson, 1979).

STELLING 3.1:
Het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B is NP-volledig.

BEWIJS:
1) Het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B $\in$ *NP*. Elke oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B kan door middel van een certificaat van polynomiale lengte gerepresenteerd worden en dit certificaat kan in polynomiale tijd gecheckt worden. Met polynomaal wordt hier bedoeld polynomiaal in de lengte van de invoer van het probleem. (Dit alles volgt uit paragraaf 2.2).
2) Elke instantie van het KNAPZAKPROBLEEM is in polynomiale tijd transformeerbaar tot een instantie van WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B. Beschouw een willekeurige instantie van het KNAPZAKPROBLEEM. Deze kan op de volgende manier tot een instantie van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B getransformeerd worden. Laat gedurende de planningsperiode precies één werkplek bezet moeten worden, d.w.z. $\boldsymbol{S} = \{s\}$, precies één werknemer beschikbaar zijn, d.w.z. $\boldsymbol{W} = \{w\}$, en laat verder $\boldsymbol{R} = \emptyset$, $\boldsymbol{K}(w) = \boldsymbol{K}(s) = k$ en $x(k,w) = x(k,s)$. Construeer de verzameling $\boldsymbol{E}$ door voor elke $v \in \boldsymbol{V}$ een bezettingseis $e(v)$ te definiëren met $s(e(v)) = s$, $t_{begin}(e(v)) = 0$, $t_{eind}(e(v)) = m$, $d_{benodigd}(e(v)) = g(v)$ en $q(e(v)) = h(v)$. Neem als planningsperiode de periode tussen de tijdstippen 0 en m en laat $c = \sum_{e \in E} q(e) - n$.
Stel nu dat er bij deze instantie van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ bestaat waarvoor geldt dat $\sum_{e \in E} U_Z(e) \cdot \gamma(e) \le c$.

Uit deze werkplekplanning Z kan een oplossing van het KNAPZAKPROBLEEM worden afgeleid door $v \in V$ als element van V' te nemen dan en slechts dan als $U_Z(e(v)) = 0$. Voor deze oplossing geldt dat:

$$\sum_{v\in V'} h(v) = \sum_{v\in V} h(v) - \sum_{v\in V\setminus V'} h(v) = \sum_{v\in V} q(e(v)) - \sum_{v\in V\setminus V'} U_Z(e(v))\cdot h(v) = \sum_{e\in E} q(e) - \sum_{e\in E} U_Z(e)\cdot q(e)$$

$$= \sum_{e\in E} q(e) - \sum_{e\in E} U_Z(e)\cdot \gamma(e) \geq \sum_{e\in E} q(e) - c = n$$

Ook geldt er voor de zo verkregen oplossing voor het KNAPZAKPROBLEEM dat $\sum_{v\in V'} g(v) \leq m$. Dit doordat er een werkplekplanning bestaat waarbij er aan elke eis $e(v)$ voor $v \in V'$ volledig voldaan wordt. Aangezien er slechts één werknemer beschikbaar is en deze bovendien voor m tijdseenheden beschikbaar is, geldt er dat: $\sum_{v\in V'} d_{benodigd}(e(v)) \leq m$. Omdat er bovendien voor alle $v \in V$ geldt dat $d_{benodigd}(e(v)) = g(v)$ geldt er dat: $\sum_{v\in V'} g(v) \leq m$.

Stel nu dat er een oplossing voor het KNAPZAKPROBLEEM bestaat waarbij geldt dat $\sum_{v\in V'} g(v) \leq m$ en $\sum_{v\in V'} h(v) \geq n$. Uit deze oplossing kan door de werknemer w in een willekeurige volgorde aan alle bezettingseisen $e(v)$ met $v \in V'$ toe te wijzen, een toegelaten werkplekplanning Z worden afgeleid waarvoor geldt dat $\sum_{e\in E} U_Z(e)\cdot\gamma(e) \leq c$

Voor elke instantie van het KNAPZAKPROBLEEM is het dus mogelijk om in polynomiale tijd een instantie van WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B construeren waarbij geldt dat het antwoord op het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B 'ja' is dan en slechts dan als het antwoord op het KNAPZAKPROBLEEM 'ja' is.

Uit (1) en (2) volgt dat het beslissingprobleem WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM-B NP-volledig is.

□

Omdat het beslissingsprobleem WERKPLEKPLANNING-B NP-volledig is, geldt er per definitie dat het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM NP-volledig is. De NP-volledigheid van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is een sterk argument voor de stelling dat een algoritme met polynomiale rekentijd voor het bepalen van een optimale oplossing voor dit probleem niet bestaat. Het gebruik van enumeratieve optimalisatiemethoden en benaderingsalgoritmen voor de oplossing van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM lijkt dus gerechtvaardigd.

4. RELEVANTE THEORIE

In dit hoofdstuk zal enkele theorie aan bod komen die gebruikt is bij het zoeken naar een geschikt algoritme voor het bepalen van een oplossing voor WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. Vaak gebruikte methoden voor het oplossen van NP-volledige problemen zijn onder andere lineaire programmering, kolom-generatie en lagrange-relaxatie. Bij elk van de genoemde methoden geldt dat er gebruik gemaakt wordt van een LP-solver. Voor het oplossen van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM heeft een algoritme waarin geen gebruik gemaakt wordt van een LP-solver echter de voorkeur. De reden hiervoor is dat een LP-solver in ziekenhuizen verder niet gebruikt zal worden en het aanschaffen van een licentie voor een LP-solver een dure aangelegenheid is. Er is gekozen voor een algoritme waarin gebruik gemaakt wordt van de techniek branch-and-bound. Deze techniek zal worden toegelicht in paragraaf 4.1. Verder is het algoritme vooral gebaseerd op theorie met betrekking tot flow-problemen. Een overzicht van de relevante theorie met betrekking tot flow-problemen zal worden gegeven in paragraaf 4.2. In paragraaf 4.3. wordt tenslotte een algoritme gegeven voor het bepalen van de grootste gemeenschappelijk deler van een verzameling natuurlijke getallen.

4.1 BRANCH-AND-BOUND

De inhoud van deze sectie is gebaseerd op hoofdstuk 18 van Papadimitriou & Steiglitz (1982). Branch-and-bound is een techniek die vaak gebruikt wordt bij het oplossen van NP-volledige problemen. Bij branch-and-bound wordt er getracht een bewijs te leveren dat een oplossing optimaal is, dat gebaseerd is op het herhaaldelijk opsplitsen van de oplossingsruimte van het probleem. De term *branch* verwijst naar het proces van het opsplitsen van de oplossingsruimte en de term *bound* verwijst naar de ondergrenzen die worden gebruikt om een bewijs voor optimaliteit te leveren zonder dat volledige enumeratie nodig is. In paragraaf 4.1.1 worden de ideëen achter branch-and-bound nader toegelicht aan de hand van het ILP-probleem. Daarna zal in paragraaf 4.1.2 worden toegelicht hoe branch-and-bound bij andere problemen kan worden toegepast.

4.1.1 BRANCH-AND-BOUND VOOR ILP-PROBLEMEN

Beschouw het volgende ILP-probleem:

Probleem 0

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x = c(x) \\ Ax &\le b \\ x &\ge 0, \text{ integer} \end{aligned}$$

Wanneer de LP-relaxatie van dit probleem wordt opgelost, wordt een oplossing x^0 gevonden welke over het algemeen niet-geheeltallig zal zijn. De kosten $c(x^0)$ bij deze oplossing vormen een ondergrens voor de optimale kosten $c(x^*)$ (waarin x^* een optimale oplossing is voor probleem 0).

Het probleem 0 kan op de volgende manier in twee deelproblemen gesplitst worden:

Probleem 1

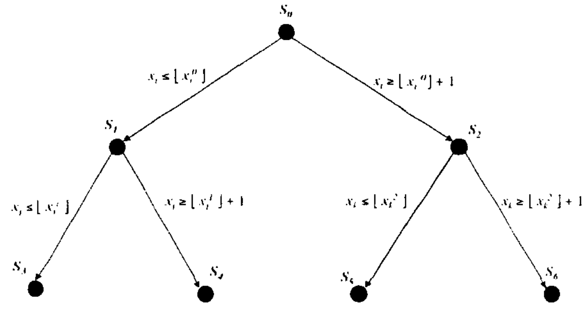
$$\begin{aligned} \min z &= c^T x = c(x) \\ Ax &\le b \\ x &\ge 0, \text{ integer} \\ x_i &\le \lfloor x_i^0 \rfloor \end{aligned}$$

en

Probleem 2

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x = c(x) \\ Ax &\le b \\ x &\ge 0, \text{ integer} \\ x_i &\ge \lfloor x_i^0 \rfloor + 1 \end{aligned}$$

De toegevoegde constraints zorgen ervoor dat de oplossingsruimte van het probleem 0, zeg S_0, gesplist wordt in twee deelruimten (S_1 voor probleem 1 en een S_2 voor probleem 2), waarvoor geldt dat $S_1 \cup S_2 = S_0$ en $S_1 \cap S_2 = \phi$. Het oplossen van probleem i, voor $i \in \{1, 2\}$, levert een ondergrens voor de kosten van elke oplossing in de deelverzameling S_i. Het branching-proces kan gevisualiseerd worden als een boom. De wortel representeert de toegelaten ruimte voor het oorspronkelijke probleem en elke knoop representeert een deelprobleem. Het splitsen van de oplossingsruimte bij een knoop wordt aangegeven door het vertakken naar de kinderen van de knoop.



Figuur 1: Grafische representatie van het opsplitsen van de oplossingruimte in een boomstructuur

Wanneer met het branching-proces door wordt gegaan totdat alle knopen corresponderen met ofwel een geheeltallige oplossing (en dus een toegelaten oplossing voor probleem 0) ofwel een LP zonder een toegelaten oplossing, geldt voor het blad met laagste kosten dat het de optimale oplossing is voor het originele ILP-probleem.
Wanneer nu op een bepaald moment de beste gevonden geheeltallig oplossing kosten z_m heeft en er de mogelijkheid is tot branchen vanuit een knoop met een ondergrens $z_k = c(x_k)$ waarvoor geldt dat $z_k \geq z_m$ is het niet zinvol om vanuit deze knoop te branchen. In dat geval wordt er gezegd dat de knoop x_k *dood* is. De knopen van waaruit branching nog steeds zinvol kan zijn worden *levend* genoemd.

Tenslotte zijn er nog twee details die relevant zijn voor het algoritme. Allereerst moet er elke stap gekozen worden, vanuit welke knoop er gebranched zal worden. Tevens moet er gekozen worden door welke niet-integer variable de toegevoegde constraints bepaald zullen worden. Voor beide keuzes geldt dat er tot op heden geen algemene stellingen bekend zijn die aangeven wat de beste strategie is.

4.1.2 BRANCH-AND-BOUND IN EEN ALGEMENE CONTEXT

Branch-and-bound is een geschikte methode voor het vinden van de optimale oplossing voor een zeer grote verzameling van uiteenlopende problemen. De enige voorwaarde voor de toepassing van branch-and-bound bij optimaliseringsproblemen is dat het probleem aan de volgende twee eigenschappen voldoet:

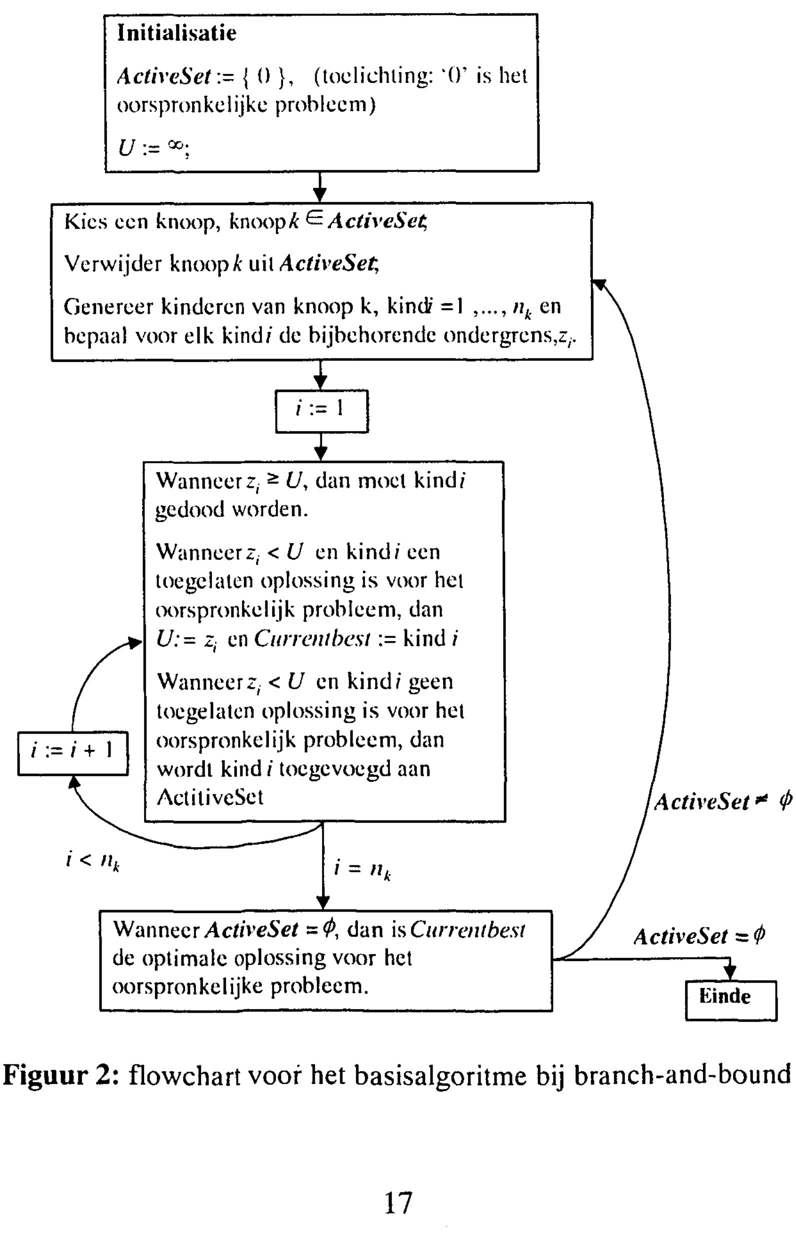
1. *Branching*: Een verzameling oplossingen S (gerepresenteerd door een knoop) van het probleem kan gesplitst worden in een aantal verzamelingen S_j, voor $j = 1, .., n$ waarvoor geldt dat $S_i \cap S_j = \phi$ voor $j \neq i$. Elk van deze deelverzamelingen S_j wordt gerepresenteerd door een kind van de knoop S.
2. *Lower Bounding*: Een algoritme is beschikbaar voor het berekenen van een ondergrens voor de kosten van elke willekeurige oplossing in een gegeven deelverzameling S_j.

Voor het maken van de keuze vanuit welke knoop er in een bepaalde stap gebranched zal worden zijn verschillende algemene strategieën bekend. De meest toegepaste strategieën zijn *depth-first-search*, *breadth-first-search* en *best-bound-first-search*:

- Bij de *depth-first-search*-strategie wordt er eerst vanuit alle onderliggende knopen van een knoop gebranched voordat er vanuit de naastliggende knopen van deze knoop (d.w.z. de kinderen van dezelfde voorganger) gebranched wordt.
- Bij de *breadth-first-search*-strategie wordt er eerst vanuit alle naastliggende knopen van een knoop gebranched voordat er vanuit de onderliggende knopen van deze knoop gebranched wordt.
- Bij de *best-bound-first-search*-strategie wordt er in elke stap gebranched vanuit de knoop met de laagste ondergrens.

Het voordeel van de *depth-first-search-* en *breadth-first-search*-strategie is dat deze relatief eenvoudig te implementeren zijn. De *best-bound-first*-strategie is wat lastiger te implementeren maar heeft als voordeel dat het totaal aantal knopen dat bij deze strategie onderzocht moet worden vaak lager is dan bij de andere strategieën. De *depth-first-search-* en *best-bound-first*-strategie hebben als voordeel dat hierbij vaak sneller dan bij *breadth-first-search* een goede oplossing voor het oorspronkelijke probleem gevonden wordt.

In figuur 2 is een flowchart weergegeven voor het basisalgoritme bij branch-and-bound. In de verzameling ***ActiveSet*** worden de levende knopen bijgehouden, de variabele *U* wordt gebruikt voor het bijhouden van de kosten van de beste bekende oplossing voor het oorspronkelijke probleem.



Figuur 2: flowchart voor het basisalgoritme bij branch-and-bound

4.2 MINIMUM-COST-MAXIMUM-FLOW-PROBLEMEN

In deze paragraaf zal de relevante theorie met betrekking tot flow-problemen aan bod komen. Deze hele paragraaf is gebaseerd op hoofdstukken 2, 5 en 9 van Ahuja, Magnanti & Orlin (1993). Er zal een algoritme voor het bepalen van een optimale oplossing voor het zogenaamde minimum-cost-maximum-flow probleem gegeven worden. Dit algoritme is een belangrijke bouwsteen van het in deze scriptie ontwikkelde algoritme voor het oplossen van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. In paragraaf 4.2.1. zal een definitie voor het minimum-cost-maximum-flow probleem gegeven worden. Vervolgens zal in paragraaf 4.2.2. een algoritme gegeven worden waarmee een kortste pad tussen twee knopen in het netwerk bepaald kan worden. Dit algoritme vormt een belangrijke bouwsteen voor het algoritme waarmee het minimum-cost-maximum-flow probleem opgelost kan worden. In paragraaf 4.2.3. zal de theorie met betrekking tot het zogenaamde residuele netwerk behandeld worden. Het residuele netwerk speelt een belangrijk rol in het in paragraaf 4.2.4. gegeven algoritme voor het bepalen van een minimum-cost-maximum-flow in een netwerk. In paragraaf 4.2.5. zal de geheeltalligheidseigenschap van netwerk-flow problemen kort toegelicht worden.

4.2.1. DEFINITIES

Laat $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{A})$ een gericht netwerk zijn met kosten $c(i \rightarrow j) \in \mathbb{R}$ en capaciteit $u(i \rightarrow j) \in \mathbb{N}$ geassocieerd met elke pijl $(i \rightarrow j) \in \boldsymbol{A}$. Laat verder een source-knoop $s \in \boldsymbol{V}$ en sink-knoop $t \in \boldsymbol{V}$ bekend zijn. Een *flow* is een functie $f: \boldsymbol{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ die voldoet aan de volgende eisen:

(1) Voor alle $(i \rightarrow j) \in \boldsymbol{A}$ geldt dat $f(i \rightarrow j) \leq u(i \rightarrow j)$.
(2) Voor elke $v \in V$, $v \notin \{s, t\}$,

$$\sum_{i \in V : (i \rightarrow v) \in A} f(i \rightarrow v) = \sum_{j \in V : (v \rightarrow j) \in A} f(v \rightarrow j).$$

De waarde $F(f)$ van een flow wordt gedefinieerd als:

$$F(f) = \sum_{i \in V : (i \rightarrow t) \in A} f(i \rightarrow t).$$

De kosten $C(f)$ van een flow worden gedefinieerd als:

$$C(f) = \sum_{(i \rightarrow j) \in A} f(i \rightarrow j) \cdot c(i \rightarrow j).$$

Een maximum-flow f in een netwerk $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{A})$ is een flow waarvoor geldt dat $F(f)$ maximaal is. Een minimum-cost-maximum-flow is een maximum-flow waarvoor bovendien geldt dat de kosten $C(f)$ minimaal zijn.

Het probleem MINIMUM-COST-MAXIMUM-FLOW is als volgt gedefinieerd.

DEFINITIE 4.1(MINIMUM-COST-MAXIMUM-FLOW)
Gegeven is een netwerk $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{A})$ met kosten kosten $c(i \rightarrow j) \in \mathbb{R}$ en capaciteit $u(i \rightarrow j) \in \mathbb{N}$ geassocieerd met elke pijl $(i \rightarrow j) \in \boldsymbol{A}$ en een source-knoop $s \in \boldsymbol{V}$ en sink-knoop $t \in \boldsymbol{V}$. Bepaal een minimum-cost-maximum-flow in $\boldsymbol{G}$.

Een (gericht) pad $\boldsymbol{P}$ in het netwerk $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{A})$ wordt gedefineerd als een opeenvolging van knopen en pijlen $v_1 - a_1 - v_2 - a_2 - \ldots - v_{r-1} - a_r - v_r$ die voldoet aan de eigenschap dat voor elke $1 \leq k \leq r-1$ geldt dat $a_k = (v_{k-1} \rightarrow v_k) \in \boldsymbol{A}$ en voor elk paar v_k en v_l met $1 \leq k \leq r-1$ en $k < l \leq r$ geldt dat $v_k \neq v_l$. In het vervolg zullen paden aangeduid worden als een opeenvolging van knopen en zullen de pijlen niet expliciet vermeld worden, bijvoorbeeld $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_{r-1} \rightarrow v_r$ in plaats van $v_1 - a_1 - v_2 - a_2 - \ldots - v_{r-1} - a_r - v_r$.

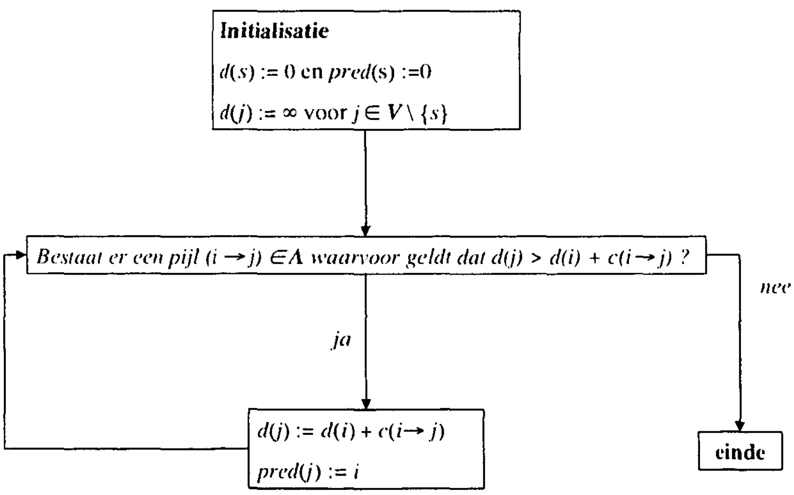
4.2.2. HET BEPALEN VAN EEN KORTSTE PAD IN EEN NETWERK

Voor het bepalen van een minimum-cost-maximum-flow kan gebruik gemaakt worden van een algoritme dat in elke stap het goedkoopste pad van s naar t in het residuele netwerk bepaald. De constructie van een residueel netwerk wordt in de volgende paragraaf behandeld. In deze paragraaf wordt een algoritme beschreven waarmee het kortste pad tussen twee punten in een netwerk $G = (V, A)$ bepaald kan worden. Het beschreven algoritme is het *generic label-correcting algorithm*. Dit algoritme kan alleen succesvol worden toegepast wanneer er in het netwerk geen cykels met een negatieve lengte voorkomen.

Bij het doorlopen van het algoritme wordt in elk stadium een verzameling afstandslabels $d(\cdot)$ bijgehouden. Het label $d(j)$ is ofwel ∞, hetgeen aangeeft dat er nog geen gericht pad van de bron naar knoop j gevonden is, ofwel de lengte van een gericht pad van de bron naar knoop j. Voor elke knoop j wordt er ook een voorgangerindex, *pred*(j) bijgehouden. Deze voorgangerindex geeft de knoop aan die in het gerichte pad met lengte $d(j)$ aan de knoop j voorafgaat. Na het doorlopen van het algoritme kan met behulp van de voorgangersindices het kortste pad van de bron naar elk punt j bepaald worden. De labels $d(j)$ voor $j \in V$ geven de afstand van het kortste pad van de source-knoop naar de knoop j aan dan en slechts dan wanneer zij voldoen aan de *kortste pad optimaliteit condities*:

$$d(j) \leq d(i) + c(i \rightarrow j) \quad \text{voor alle } i,j \in V \text{ waarvoor } (i \rightarrow j) \in A.$$

Het *generic label-correcting algorithm* past de afstandslabels aan totdat zij voldoen aan de kortste pad optimaliteit condities. Dit algoritme is in figuur 3 schematisch weergegeven.



Figuur 3: *generic label-correcting algoritme*

Door de pijlen A te rangschikken in een bepaalde volgorde kan een polynomiale implementatie van het *generic label-correcting algorithm* verkregen worden die slechts $O(|V||A|)$ tijd vereist. Deze implementatie wordt verkregen door telkens de pijlen $(i \rightarrow j)$ in A één voor één na te lopen en te controleren of aan de conditie $d(j) > d(i) + c(i \rightarrow j)$ voldaan is. Wanneer voor de pijl aan de conditie voldoet is moet $d(j)$ worden aangepast volgens:

$$d(j) := d(i) + c(i \rightarrow j)$$

Om een $O(|V||A|)$ rekentijd te bereiken moeten de pijlen uit de verzameling A in een volgorde gezet worden waarin pijlen met dezelfde eindknoop elkaar opvolgen. Laat voor elke knoop $i \in V$ de verzameling pijlen $A(i) \subset A$ bestaan uit alle pijlen in A met knoop i als beginknoop. Bij het nalopen van de de pijlen A wordt voor elk van deze pijlen gecontroleerd of aan de optimaliteitsconditie voldaan is. Wanneer tijdens het doorlopen van de pijlen A het afstandslabel naar knoop i niet wordt aangepast, zal er wanneer de pijlen A de volgende keer nagelopen worden gelden dat $d(j) \leq d(i) + c_{ij}$ voor elke $(i \rightarrow j) \in A(j)$ en hoeft er dus niet worden nagegaan of aan deze condities voldaan is. Wanneer dus bij het nalopen van de verzameling A in een lijst wordt bijgehouden voor welke knopen de afstandslabels veranderen, hoeven de volgende keer dat de pijlen nagelopen worden alleen de pijlen beschouwd te worden waarvoor geldt dat de eindknoop in de lijst staat. Implementatie van deze methode is mogelijk door elke keer dat de verzameling pijlen nagelopen wordt, de knopen waarvoor de afstandslabels veranderen op te slaan in een lijst en de volgende keer deze lijst in first-in, first-out (FIFO) volgorde na te lopen en bij knoop i uit de lijst voor de pijlen uit $A(i)$ te controleren of er aan de optimaliteitsconditie voldaan is. Met dit *FIFO – label-correcting algoritme* kan een kortste pad in $O(|V||A|)$ tijd bepaald worden.

4.2.3. HET RESIDUELE NETWERK

Het *residuele netwerk* speelt een belangrijke rol bij maximum-flow algoritmen. Bij de toelichting van het residuele netwerk wordt er aangenomen dat het netwerk $G = (V, A)$ de eigenschap bezit dat voor elk paar knopen $i,j \in V$ geldt dat $(i \rightarrow j) \in A \Rightarrow (j \rightarrow i) \notin A$. Deze aanname mag hier gemaakt worden, omdat alle netwerken die in het vervolg van deze scriptie beschouwd worden eveneens deze eigenschap bezitten.

DEFINITIE 4.2(*residuele netwerk*)

Het residuele netwerk bij een netwerk $G = (V, A)$ en een flow f wordt gedefinieerd als een netwerk $G_{RES} = (V, A_{RES})$. Er geldt dat $(i \rightarrow j) \in A_{RES}$, wanneer $(i \rightarrow j) \in A$ of $(j \rightarrow i) \in A$. De capaciteiten in het residuele netwerk worden gegeven door:

$\overline{u(i \rightarrow j)} = u(i \rightarrow j) - f(i \rightarrow j)$ voor alle $i,j \in V$ waarvoor $(i \rightarrow j) \in A$

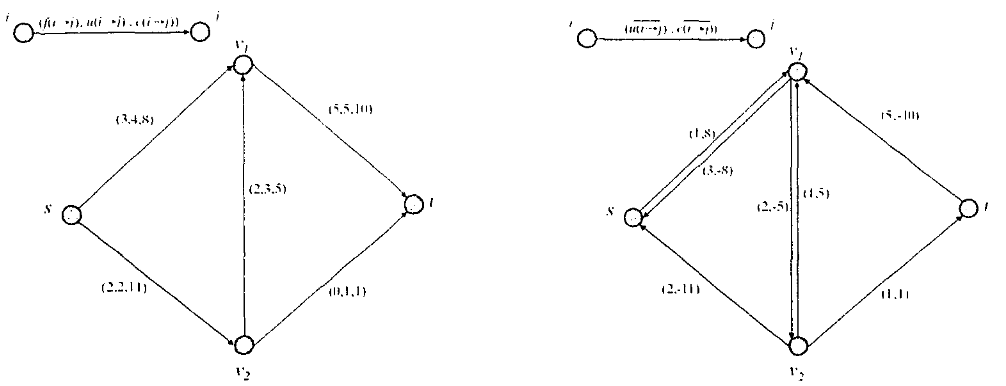
$\overline{u(j \rightarrow i)} = f(i \rightarrow j)$ voor alle $i,j \in V$ waarvoor $(i \rightarrow j) \in A$

In het residuele netwerk gelden de volgende kosten:

$\overline{c(i \rightarrow j)} = c(i \rightarrow j)$ voor alle $i,j \in V$ waarvoor $(i \rightarrow j) \in A$

$\overline{c(j \rightarrow i)} = -c(i \rightarrow j)$ voor alle $i,j \in V$ waarvoor $(i \rightarrow j) \in A$

In figuur 4 is voorbeeld van een residueel netwerk gegeven.

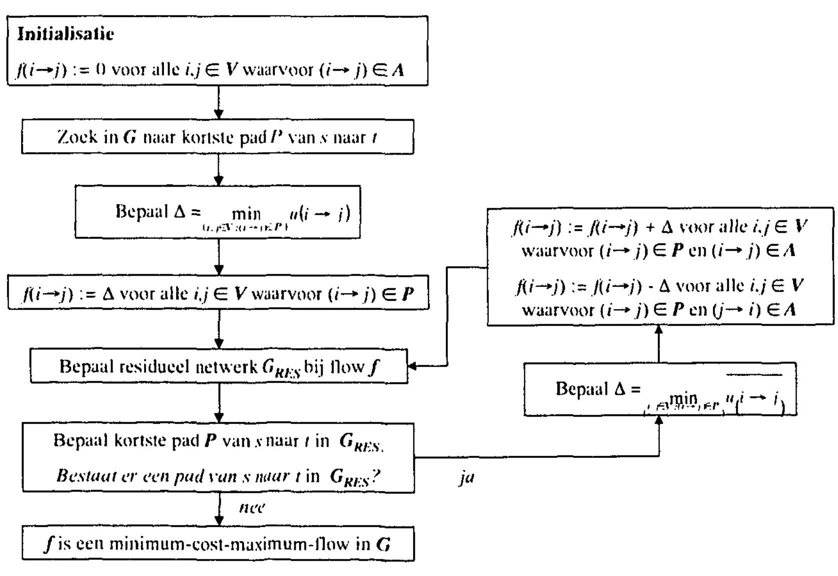


(a) (b)

Figuur 4: voorbeeld van een residueel netwerk: (a) oorspronkelijk netwerk G met flow f; (b) residueel netwerk G_{RES}.

4.2.4. HET BEPALEN VAN EEN MINIMUM-COST-MAXIMUM-FLOW

Een algoritme voor het vinden van een minimum-cost-maximum-flow in een netwerk $G = (V, A)$ is het *successive shortest path algoritme* van Busacker en Gowen (o.a. in Busacker & Saaty, 1965). Een minimum-cost-maximum-flow kan bepaald worden door het achtereenvolgens oplossen van een aantal kortste pad problemen, waarbij $c(i \rightarrow j)$ als de afstand bij een pijl $(i \rightarrow j) \in A$ beschouwd wordt. Er wordt begonnen met de nulstroom. In de eerste stap van het algoritme gezocht naar het kortste pad P van s naar t in G en wordt de stroom over dit pad P verhoogd met het maximum aantal eenheden van $\Delta = \min_{(i,j \in V : (i \rightarrow j) \in P)} u(i \rightarrow j)$. In de volgende stappen wordt er telkens in het residuele netwerk bij de flow een kortste pad P gezocht van s naar t. De stroom over dit pad P wordt vervolgens verhoogd met $\Delta = \min_{(i,j \in V : (i \rightarrow j) \in P)} \overline{u(i \rightarrow j)}$ eenheden. Vervolgens wordt bij de nieuwe flow het residuele netwerk opgesteld, waarin vervolgens weer naar een kortste pad gezocht wordt. Hiermee wordt doorgegaan totdat een residueel netwerk verkregen is, waarin geen kortste pad van s naar t meer bestaat. Dit algoritme is in figuur 5 weergegeven.



Figuur 5: *successive shortest path algoritme* van Busacker en Gowen

4.2.5. DE GEHEELTALLIGHEIDSEIGENSCHAP

De geheeltalligheidseigenschap van minimum-cost-maximum-flow problemen houdt in dat er voor elk minimum-cost-maximum-flow probleem waarvoor geldt dat alle capaciteiten $u(i \rightarrow j)$ geheeltallig zijn een geheeltallige optimale oplossing bestaat. Omdat in het successive shortest path algoritme van Busacker en Gowen voor elke verhoging Δ van de flow geldt dat deze geheeltallig is, zal voor de optimale oplossing die met dit algoritme gevonden wordt gelden dat deze geheeltallig is.
Wanneer alle capaciteiten een veelvoud zijn van $\alpha \in \mathbb{N}$, zal elke verhoging Δ van de flow een veelvoud zijn van α. In dat geval zal voor de oplossing die verkregen wordt met het *successive shortest path algoritme* gelden dat voor alle $i,j \in V$ met $(i \rightarrow j) \in A$ de flow $f(i \rightarrow j)$ door de pijl $(i \rightarrow j)$ een veelvoud is van α.

4.3 DE GROOTSTE GEMEENSCHAPPELIJKE DELER

In deze paragraaf zal worden toegelicht hoe de grootste gemeenschappelijke deler van een verzameling van natuurlijke getallen bepaald kan worden. In paragraaf 4.3.1. zal het algoritme van Euclides voor het bepalen van de grootste gemeenschappelijke deler van twee natuurlijke getallen worden toegelicht. In paragraaf 4.3.2. zal een algoritme gegeven worden waarmee de grootste gemeenschappelijk deler van een verzameling van natuurlijke getallen bepaald kan worden.

4.3.1 DE GROOTSTE GEMEENSCHAPPELIJKE DELER VAN TWEE NATUURLIJKE GETALLEN

Het algoritme van Euclides is een efficiënt algoritme voor het vinden van de grootste gemeenschappelijke deler van twee natuurlijke getallen. Van Lint & Nienhuys (1991) geven een beschrijving van het algoritme van Euclides. Ook geven zij een bovengrens voor de rekentijd van het algoritme. In figuur 6 is weergegeven hoe de ggd(a,b), de grootste gemeenschappelijk deler van twee natuurlijke getallen a en b met behulp van een recursieve procedure bepaald kan worden:

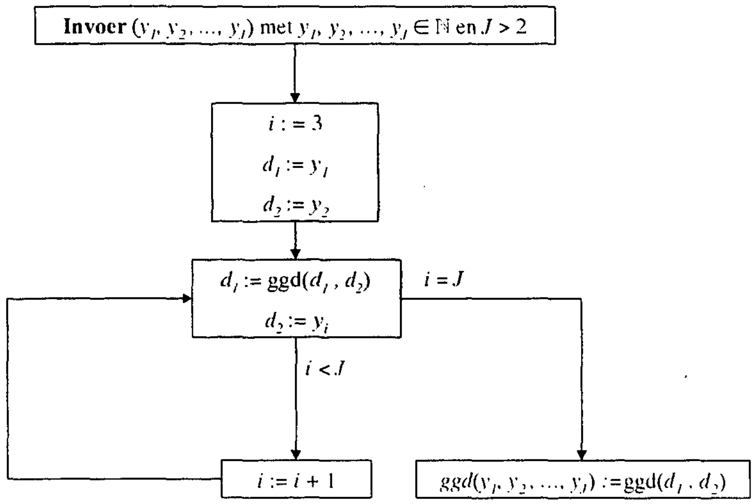
```
procedure ggd(a,b)
begin
 if b = 0 do
   result := a
 else
   if  a < b then
     ggd(b,a)
   else
     ggd(a-b, b);
end;
```

Figuur 6: recursieve procedure voor de bepaling van de ggd(a,b)

Een bovengrens voor het aantal elementaire operaties bij het toepassen van het algoritme van Euclides is $5 \cdot \lceil {}^{10}\log(\max(a,b)) \rceil$.

4.3.2 DE GROOTSTE GEMEENSCHAPPELIJKE DELER VAN EEN VERZAMELING NATUURLIJKE GETALLEN

Bshouty (1989) geeft een algoritme voor het bepalen van de grootste gemeenschappelijke deler van een verzameling natuurlijke getallen. Dit algoritme voor het bepalen van de ggd(y_1, y_2, ...y_J) met $y_1, y_2, \ldots y_J \in \mathbb{N}$ is in figuur 7 weergegeven.



Figuur 7: algoritme voor het bepalen van de ggd(y_1, y_2, ...y_J).

Wanneer in het algoritme in figuur 7 ggd(d_1, d_2) bepaald wordt met behulp van het algoritme van Euclides, zal het vinden van ggd(y_1, y_2, ...y_J) niet meer dan $5 \cdot (J-1) \cdot \lceil {}^{10}\log(\max(y_1, y_2, \ldots y_J)) \rceil$ operaties kosten. Het algoritme in figuur 7 bestaat immers uit het bepalen van J-1 grootste gemeenschappelijke delers ggd(d_1, d_2) met $d_1, d_2 \leq \max(y_1, y_2, \ldots y_J)$.

5. MODELLERING VAN HET PROBLEEM VOOR AFDELINGEN ZONDER KAMERS

In dit hoofdstuk wordt een algoritme gegeven waarmee het werkplekplanningsprobleem voor afdelingen zonder kamers kan worden opgelost. In paragraaf 5.1 wordt een stricte definitie van het werkplekplanningsprobleem voor afdelingen zonder kamers gegeven. Hierna wordt in paragraaf 5.2 toegelicht op welke manier de planningsperiode is op te delen in een verzameling intervallen, waarvoor geldt dat er binnen elk van deze intervallen geen verandering optreedt in zowel de beschikbaarheid van werknemers als de vraag naar bezetting van werkplekken. Vervolgens wordt in paragraaf 5.3 het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) gedefinieerd en in wordt in paragraaf 5.4 toegelicht op welke manier een oplossing voor dat probleem geïntepreteerd kan worden in termen van het werkplekplanningsprobleem. In paragraaf 5.5 zal worden toegelicht op welke manier uit de oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) in polynomiale tijd een toegelaten werkplekplanning kan worden afgeleid. Daarna wordt in paragraaf 5.6 toegelicht hoe met behulp van branch and bound een optimale verzameling van bezettingseisen gevonden kan worden, waarvoor geldt dat er gegeven de beschikbaarheid van de werknemers volledig aan kan worden voldaan. In paragraaf 5.7 wordt tenslotte een overzicht van dit algoritme gegeven.

5.1 PROBLEEMFORMULERING EN COMPLEXITEIT

De apotheekafdeling van het Academisch Ziekenhuis Rotterdam is een voorbeeld van een afdeling waarin kamers geen rol spelen is. Het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM kan als volgt worden geformuleerd:

DEFINITIE 5.1(APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM)

Gegeven zijn een planningsperiode $\boldsymbol{p}$, een verzameling werknemers $\boldsymbol{W}$, de beschikbaarheid van deze werknemers in de vorm van de verzamelingen $\boldsymbol{B}(w, \boldsymbol{p})$ voor $w \in \boldsymbol{W}$, een verzameling werkplekken $\boldsymbol{S}$, een verzameling kwalificaties $\boldsymbol{K}$ en een verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}$. Verder zijn gegeven de parameters $x(k,w)$ voor alle $w \in \boldsymbol{W}$ en $k \in \boldsymbol{K}(w)$ en $x(k,s)$ voor alle $s \in \boldsymbol{S}$ en $k \in \boldsymbol{K}(s)$.

De vraag is een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ te bepalen waarvoor geldt dat de doelfunctie $\sum_{e \in E} U_Z(e) \cdot q(e)$ minimaal is.

Wanneer men DEFINITIE 5.1 met DEFINITIE 2.1 vergelijkt ziet men dat het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM in feite het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is met $\boldsymbol{R} = \varnothing$ en derhalve ook $\boldsymbol{E}^R = \varnothing$.

Aangezien elke willekeurige instantie van het KNAPZAKPROBLEEM, op de in het bewijs van stelling 3.1 aangegeven manier, in polynomiale tijd transformeerbaar is tot een instantie van APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM, geldt dat het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM NP-volledig is.

5.2 HET OPDELEN VAN DE PLANNINGSPERIODE IN INTERVALLEN

Voor het oplossen van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM zal de planningsperiode $\boldsymbol{p}$ gesplitst worden in een verzameling van deelintervallen $\boldsymbol{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$ met de volgende eigenschappen:

- Voor elke combinatie van een werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ en een interval $T \in \boldsymbol{T}$ geldt dat de werknemer w ofwel gedurende het gehele interval T beschikbaar is ofwel gedurende het hele interval T niet beschikbaar is.
- Voor elke combinatie van een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ en een interval $T \in \boldsymbol{T}$ geldt dat het tijdsinterval tussen $t_{begin}(e)$ en $t_{eind}(e)$ ofwel het gehele interval T omvat ofwel in het geheel niet met het interval T overlapt.
- Voor elk eenheidsinterval $\delta_j \in \{\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}\}$ in de planningsperiode geldt dat het deel uitmaakt van precies één interval $T \in \boldsymbol{T}$.

Een verzameling $\boldsymbol{T}$ kan samengesteld worden door alle verschillende tijdstippen $t_{begin}(e)$, $t_{eind}(e)$ voor alle bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}$ en tijdstippen j waarvoor geldt dat $(\delta_{j-1} \in \boldsymbol{B}(w, \boldsymbol{p}) \wedge \delta_j \notin \boldsymbol{B}(w, \boldsymbol{p})) \vee (\delta_{j-1} \notin \boldsymbol{B}(w, \boldsymbol{p}) \wedge \delta_j \in \boldsymbol{B}(w, \boldsymbol{p}))$ voor tenminste één $w \in \boldsymbol{W}$ te rangschikken. Hierdoor wordt een lijst $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ van tijdstippen verkregen. Door vervolgens als elementen voor de verzameling $\boldsymbol{T}$ de intervallen T_i (voor $1 \leq i \leq n$) te kiezen als zijnde het interval tussen de tijdstippen t_{i-1} en t_i, wordt een verzameling van niet-overlappende intervallen gevonden, die voldoet aan alle hierboven genoemde eigenschappen.

5.3 DEFINITIE VAN HET PROBLEEM MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$)

Voor een verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}$ kan als volgt een netwerk $G(\boldsymbol{E}) = (V(\boldsymbol{E}), A(\boldsymbol{E}))$ worden geconstrueerd.

De verzameling van knopen $V(\boldsymbol{E})$ in het netwerk $G(\boldsymbol{E})$ zal bestaan uit:

- s source-node;
- (w, T) voor alle paren (w, T) met $w \in \boldsymbol{W}$ en $T \in \boldsymbol{T}$, waarvoor geldt dat werknemer w beschikbaar is gedurende het interval T;
- (e, T) voor alle paren (e, T) met $e \in \boldsymbol{E}$ en $T \in \boldsymbol{T}$, waarvoor geldt dat interval T ligt tussen de tijdstippen $t_{begin}(e)$ en $t_{eind}(e)$;
- e voor alle $e \in \boldsymbol{E}$;
- t sink-node.

De verzameling van pijlen $A(\boldsymbol{E})$ in het netwerk $G(\boldsymbol{E})$ zal bestaan uit:

- $s \rightarrow (w, T)$ voor alle knopen $(w, T) \in V(\boldsymbol{E})$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, T) \rightarrow (e, T)$ voor alle knopen $(w, T) \in V(\boldsymbol{E})$ en $(e, T) \in V(\boldsymbol{E})$ waarvoor geldt dat de werknemer w gekwalificeerd en voldoende ervaren is voor de werkplek $s(e)$, dus waarvoor geldt dat $(k \in \boldsymbol{K}(w) \wedge x(k,w) \geq x(k,s(e)))$ voor alle $k \in \boldsymbol{K}(s(e))$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(e, T) \rightarrow e$ voor alle knopen $(e, T) \in V(\boldsymbol{E})$ en $e \in V(\boldsymbol{E})$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $e \rightarrow t$ voor alle knopen $e \in V(\boldsymbol{E})$,
  capaciteit $u = d_{benodigd}(e)$ en kosten $c = -q(e) / d_{benodigd}(e)$.

Met $l(T)$ wordt de lengte van het interval T in een vooraf gekozen tijdseenheid bedoeld. Het minimum-cost-maximum-flow-probleem op het netwerk $G(\boldsymbol{E})$ zal in het vervolg worden aangeduid met MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$).

Wanneer een algoritme een complexiteit heeft die polynomiaal is onder een unaire codering van de inputparameters, wordt het een *pseudopolynomiale-tijd* algoritme genoemd. (Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan & Shmoys, 1993).

Het successive shortest path algoritme heeft complexiteit $O(|V|^2|A|U)$ waarin U een bovengrens is voor de totale flow van s naar t (Ahuja, Magnanti & Orlin, 1993). Voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) geldt dat:

$$|V| \leq |\boldsymbol{W}| \cdot p + |\boldsymbol{E}|\, p + |\boldsymbol{E}| + 2,$$

$$|A| \leq |\boldsymbol{W}| \cdot p + |\boldsymbol{W}|\,|\boldsymbol{E}| + |\boldsymbol{E}| \cdot p + |\boldsymbol{E}| \text{ en}$$

$$U \leq \sum_{e \in \boldsymbol{E}} d_{benodigd}(e).$$

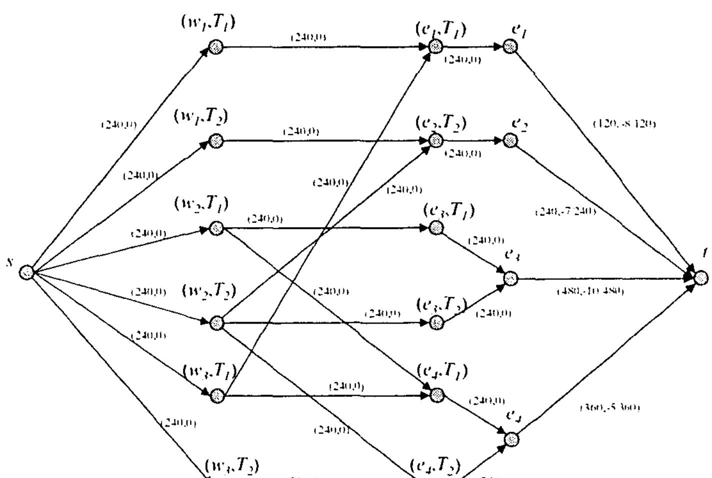
Er geldt dus dat het successive shortest path algoritme voor het oplossen van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) een complexiteit heeft die polynomiaal is in de inputparameters $|E|$, $|W|$, p en $\sum_{e \in E} d_{benodigd}(e)$ van het werkplekplanningsprobleem. Met polynomiaal wordt hier bedoelt polynomiaal bij een unaire codering van de input parameters p en $d_{benodigd}(e)$ voor $e \in E$, het gaat hier dus om een pseudopolynomiale-tijd algoritme.

VOORBEELD 5.1

Op een afdeling hebben op een dag drie werknemers $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ dienst. Alle werknemers hebben op die dag een dienst van 7:30 tot 16:00 en tussen 11:30 en 12:00 hebben zij gezamenlijk pauze. De bewuste dag zijn er vier werkplekken die bezet moet worden. In onderstaande tabel is voor elk van de vier werkplekken een bezettingseis voor die bewuste dag gegeven.

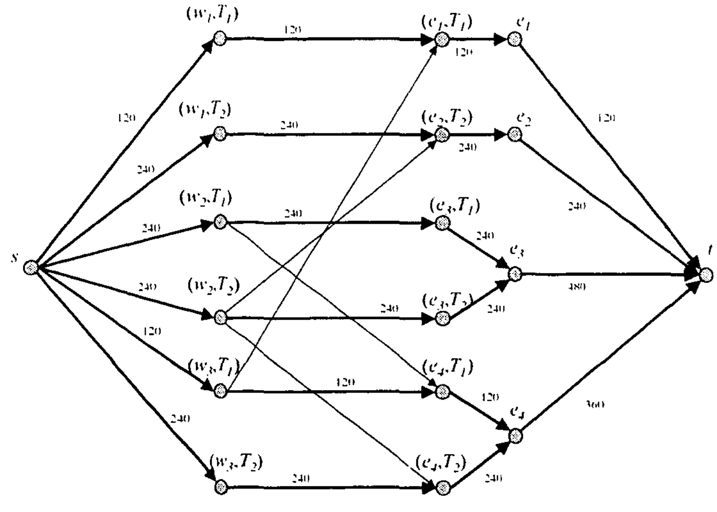
Bezettingseis	Begintijd	Eindtijd	Benodigde tijd	Prioriteit	Gekwalificeerde werknemers
e_1	7:30	11:30	2:00	8	$\{w_1, w_3\}$
e_2	12:00	16:00	4:00	7	$\{w_1, w_2\}$
e_3	7:30	16:00	8:00	10	$\{w_2\}$
e_4	7:30	16:00	6:00	5	$\{w_2, w_3\}$

Als verzameling T van tijdsintervallen zal bij dit probleem gekozen worden voor $T = \{T_1, T_2\}$ met T_1 het interval tussen 7:30 en 11:30 en T_2 het interval tussen 12:00 en 16:00. Het netwerk $G(E)$ voor dit probleem is weergegeven in de volgende figuur.



Figuur 8: netwerk $G(E)$

In onderstaande figuur is een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) weergegeven. Bij pijlen in het netwerk waardoor bij deze oplossing een stroom loopt is de hoeveelheid stroom aangegeven. De stroom $f(e \rightarrow t)$ door de pijlen $(e \rightarrow t)$ is voor elke bezettingseis $e \in E$ gelijk aan de capaciteit $u(e \rightarrow t)$ van de pijl, hetgeen betekent dat aan alle bezettingseisen $e \in E$ voldoende tijd is toegewezen.



Figuur 9: oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E)

In voorbeeld 5.1 is gekozen om elke eenheid flow met de tijdseenheid van een minuut te laten corresponderen, terwijl het ook mogelijk was een eenheid flow te laten corresponderen met de tijdseenheid van een uur. De verzameling knopen $V(E)$ en pijlen $A(E)$ zullen wanneer er gekozen zou worden om elke eenheid flow te laten corresponderen met de tijdseenheid van een uur in plaats van een minuut, ongewijzigd blijven. Alleen de capaciteiten en kosten in het netwerk $G(E)$ zullen in dat geval veranderen: de capaciteiten $u(a)$ worden een factor 60 kleiner en de kosten $c(a)$ een factor 60 groter. De keuze van de tijdseenheid heeft geen invloed op het aantal keer dat er binnen het successive shortest path algoritme naar een kortste vermeerderend pad gezocht moet worden. Ook heeft deze keuze geen invloed op de rekentijd van het generic shortest path algoritme.

5.4 INTERPRETATIE VAN DE OPLOSSING VAN EEN PROBLEEM MIN-COST-MAX-FLOW(E)

Omdat een flow in het netwerk $G(E)$ niet direct correspondeert met een werkplekplanning, zoals gedefinieerd in paragraaf 1.1, zullen hier de begrippen gedeeltelijke werkplektoewijzing en gedeeltelijke werkplekplanning gedefinieerd worden.

DEFINITIE 5.1
Een *gedeeltelijke werkplektoewijzing* m is de toewijzing van een werknemer $w(m) \in \boldsymbol{W}$ binnen een bepaald tijdsinterval $T(m) \in \boldsymbol{T}$ in het kader van een bezettingseis $e(m) \in \boldsymbol{E}$ voor een bepaalde duur $d(m) \in \{1, \ldots, l(T(m))\}$ aan een werkplek $s(m) \in \boldsymbol{S}$ met als doel hierdoor gedeeltelijk of geheel aan de bezettingseis $e(m)$ te voldoen. Hierbij wordt aangenomen dat de verzameling tijdsintervallen $\boldsymbol{T}$ de in paragraaf 5.2 genoemde eigenschappen bezit.

Een gedeeltelijke werkplektoewijzing verschilt van een werkplektoewijzing, in die zin dat een gedeeltelijke werkplektoewijzing slechts aangeeft voor hoeveel tijdseenheden een werknemer binnen een bepaald interval aan een werkplek moet worden toegewezen, terwijl een werkplektoewijzing aangeeft dat een werknemer voor de volledige duur van een bepaald interval aan een werkplek wordt toegewezen.

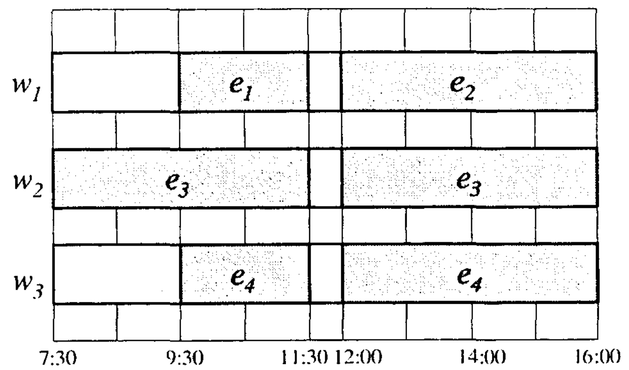
DEFINITIE 5.2
Een *gedeeltelijk werkplekplanning* is een verzameling van gedeeltelijke werkplektoewijzingen $\boldsymbol{M}$, waarbij:

- voor elk paar (w,T) met $w \in \boldsymbol{W}$ en $T \in \boldsymbol{T}$ geldt dat $\sum_{m \in M:(w(m)=w \wedge T(m)=T)} d(m) \leq l(T(m))$ en
- voor elk paar (s,T) met $s \in \boldsymbol{S}$ en $T \in \boldsymbol{T}$ geldt dat $\sum_{m \in M:(s(m)=s \wedge T(m)=T)} d(m) \leq l(T(m))$
- voor elke $m_1, m_2 \in \boldsymbol{M}$ geldt dat $w(m_1) \neq w(m_2) \vee T(m_1) \neq T(m_2) \vee s(m_1) \neq s(m_2)$.

Ook hierbij wordt aangenomen dat de verzameling tijdsintervallen $\boldsymbol{T}$ de in paragraaf 5.2 genoemde eigenschappen bezit.

Beschouw een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$). Elke eenheid stroom van s naar t in deze oplossing zal gaan via een pad $\boldsymbol{P}$ van de vorm: $s \rightarrow (w, T) \rightarrow (e, T) \rightarrow e \rightarrow t$. Wanneer de stroom van s naar t via een pad $\boldsymbol{P}$ in het netwerk $f(\boldsymbol{P})$ eenheden bedraagt, wijst de bij deze stroom behorende gedeeltelijke werkplekplanning de werknemer w binnen het interval T voor een duur van $f(\boldsymbol{P})$ tijdseenheden aan de werkplek $s(e)$ toe.

Een mogelijke werkplekplanning bij het VOORBEELD 5.1. is bijvoorbeeld:



Figuur 10: werkplekplanning die correspondeert met de stroom in figuur 9

Wanneer in een oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) geldt dat de totale hoeveelheid stroom $f(e \rightarrow t)$ door een pijl $e \rightarrow t$ gelijk is aan de capaciteit $u(e \rightarrow t) = d_{benodigd}(e)$, zal dat betekenen dat er in die oplossing voldoende tijd aan de bezettingseis e besteed wordt. Wanneer de stroom $f(e \rightarrow t)$ echter 0 bedraagt, zal er totaal geen tijd aan de bezettingseis e besteed worden. Wanneer er tenslotte geldt dat $0 < f(e \rightarrow t) < d_{benodigd}(e)$ wordt er onvoldoende tijd aan de bezettingseis e besteed.

Het vinden van een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) zal over het algemeen niet voldoende zijn voor het oplossen van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. Deze twee problemen verschillen namelijk op de volgende punten:

1) Een verschil in optimaliteitscriterium. Bij MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) kan het ook voordeling zijn wanneer aan een bezettingseis e niet volledig voldaan wordt. Het voordeel is rechtevenredig met de totale tijdsduur $f(e \rightarrow t)$ die er in de oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) aan de bezettingseis e besteed wordt. Wanneer er voldoende tijd aan de bezettingseis besteed wordt zal de winst gelijk zijn aan de prioriteit $q(e)$. Bij het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM heeft het gedeeltelijk voldoen aan een bezettingseis geen voordeel.

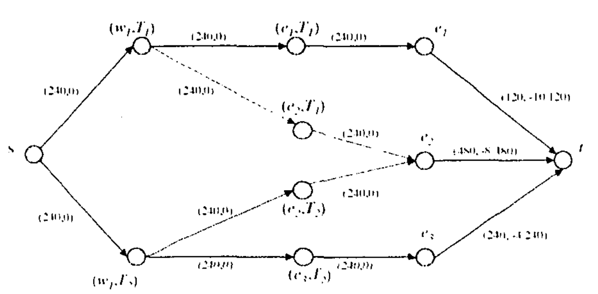
2) De oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) geeft alleen aan hoeveel tijdseenheden een werknemer w binnen een interval T in het kader van een bezettingseis e aan een werkplek $s(e)$ moet worden toegewezen, met andere woorden de oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) geeft slechts een gedeeltelijke werkplekplanning. Aangezien er is aangenomen dat op elk tijdstip niet door meerdere werknemers aan dezelfde bezettingseis gewerkt mag worden, hoeft het afleiden van een werkplekplanning uit een oplossing van MIN-COST-MAX-FLOW(E) nog niet triviaal te zijn . In paragraaf 5.5 zal worden aangetoond dat er uit elke oplossing voor het probleem flow f in $G(E)$ in polynomiale tijd een toegelaten werkplekplanning kan worden afgeleid.

Het eerste punt zal nu worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 5.2
Op een afdeling heeft op een dag één werknemer $W = \{w_1\}$ dienst. Deze werknemer heeft op die dag een dienst van 7:30 tot 16:00 en tussen 11:30 en 12:00 heeft hij een pauze. De bewuste dag zijn er drie werkplekken die bezet moet worden. In onderstaande tabel is voor elk van de drie werkplekken een bezettingseis voor die bewuste dag gegeven. De werknemer is gekwalificeerd voor de werkzaamheden op elk van de drie werkplekken.

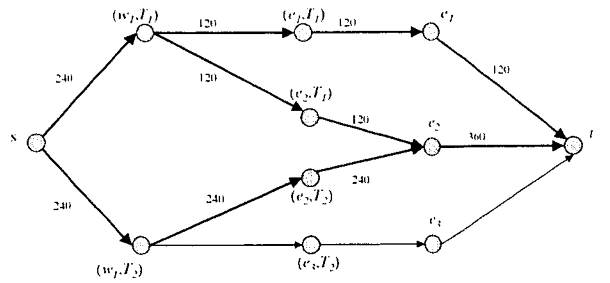
Bezettingseis	Begintijd	Eindtijd	Benodigde tijd	Prioriteit
e_1	7:30	11:30	2:00	10
e_2	7:30	16:00	8:00	8
e_3	12:00	16:00	4:00	4

Als verzameling T van tijdsintervallen zal bij dit probleem gekozen worden voor $T = \{T_1, T_2\}$ met T_1 het interval tussen 7:30 en 11:30 en T_2 het interval tussen 12:00 en 16:00. Het netwerk $G(E)$ bij dit probleem is weergegeven in figuur 11.



Figuur 11: netwerk $G(E)$

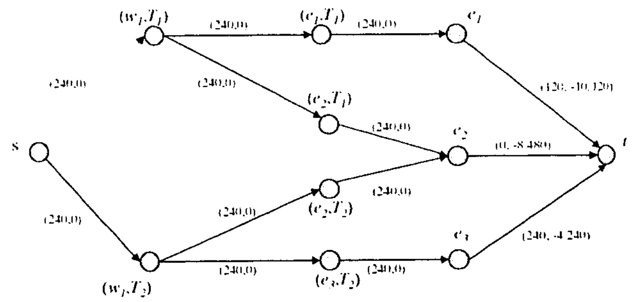
Een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) bij het bovenstaande netwerk is in figuur 12 weergegeven.



Figuur 12: oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$)

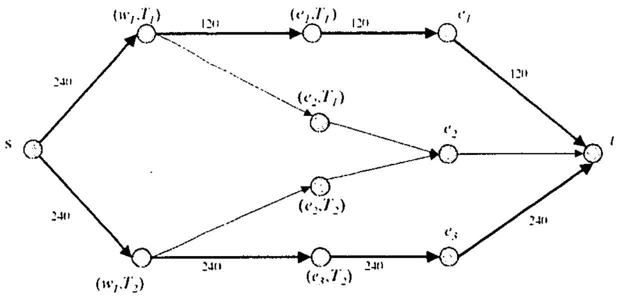
Doordat het slechts gedeeltelijk voldoen aan een bezettingseis in het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) ook voordeel kan hebben, wordt er in de hierboven gegeven optimale oplossing 6 uur besteed aan de bezettingseis e_2, terwijl de vereiste bezettingsduur 8 uur bedraagt. Aangezien bij deze oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) alleen aan bezettingseis e_1 voldoende tijd besteed wordt, geldt voor de met deze oplossing corresponderende werkplekplanning dat $_{e \in E}\, U(e)\, q(e) = q(e_2) + q(e_3) = 12$.

Een betere oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM kan verkregen worden door de capaciteit van de pijl $(e_2 \rightarrow t)$ op 0 te zetten en vervolgens een minimum-cost-maximum-flow probleem voor het gewijzigde netwerk op te lossen, hetgeen equivalent is aan het oplossen van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E} \setminus \{ e_2 \}$). Laat $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{E})$ het netwerk zijn dat uit $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{E})$ verkregen wordt door de capaciteit van de pijl $(e_2 \rightarrow t)$ op 0 te zetten. Het netwerk $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{E})$ is in figuur 13 weergegeven.



Figuur 13: netwerk $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{E})$

Een oplossing voor het min-cost-max-flow probleem voor het netwerk $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{E})$ is in figuur 14 weergegeven.



Figuur 14: oplossing van het min-cost-max-flow probleem op het netwerk $G'(E)$

Aangezien er voor de stroom in figuur 11 geldt dat er voldoende tijd aan de bezettingseisen e_1 en e_3 besteed wordt, geldt voor een met deze stroom corresponderende werkplekplanning dat ${}_{e \in E}\, U(e)\, q(e) = q(e_2) = 8$.

Uit het gegeven voorbeeld valt af te leiden dat het verschil in optimaliteitscriterium tot gevolg kan hebben dat de oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) niet correspondeert met de optimale oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. Dit is niet verwonderlijk aangezien het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM NP-volledig is en MIN-COST-MAX-FLOW(E) in polynomiale tijd kan worden opgelost.

5.5. BIJ ELKE FLOW f IN HET NETWERK $G(E)$ KAN IN PSEUDOPOLYNOMALE-TIJD EEN WERKPLEKPLANNING GEVONDEN WORDEN

In de vorige paragraaf is kort aangegeven op welke manier een flow f in het netwerk $G(E)$ correspondeert met een gedeeltelijke werkplekplanning M. Elke eenheid stroom van s naar t in de flow f gaat via een pad P van de vorm: $s \rightarrow (w, T) \rightarrow (e, T) \rightarrow e \rightarrow t$. Wanneer de stroom van s naar t via een pad P in het netwerk $f(P)$ eenheden bedraagt wordt in de met deze stroom corresponderende gedeeltelijke werkplekplanning M de werknemer w binnen het interval T voor een duur van $f(P)$ tijdseenheden in het kader van bezettingseis e aan de werkplek $s(e)$ toegewezen, dat wil zeggen dat er een $m \in M$ is waarvoor geldt dat $w(m)=w$, $T(m)=T$, $e(m)=e$, $s(m)=s(e)$ en $d(m) = f(P)$.

STELLING 5.1

(i) Bij elke flow f in het netwerk $G(E)$ is eenvoudig een corresponderende gedeeltelijke werkplekplanning M te bepalen.

(ii) Bij elke gedeeltelijke werkplekplanning M is eenvoudig een corresponderende flow f in het netwerk $G(E)$ te bepalen.

(iii) Elke flow f in het netwerk $G(E)$ correspondeert met precies één gedeeltelijke werkplekplanning M en elke gedeeltelijke werkplekplanning correspondert met precies één flow f in het netwerk $G(E)$.

BEWIJS

(i) Voor een gegeven flow f in het netwerk $G(E)$ kan een corresponderende gedeeltelijke werkplekplanning M als volgt gevonden worden. Begin met een lege verzameling M. Door voor elk paar van knopen $(w, T) \in V(E)$ en $(e, T) \in V(E)$, waarvoor in de oplossing f geldt dat $f((w, T) \rightarrow (e, T)) > 0$, een gedeeltelijke werkplektoewijzing m aan de verzameling M toe te voegen met $w(m) = w$, $T(m) = T$, $e(m) = e$, $s(m) = s(e)$ en $d(m) = f((w, T) \rightarrow (e, T))$, wordt een gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ verkregen.

(ii) Voor een gegeven gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ kan de corresponderende flow f in het netwerk $G(\boldsymbol{E})$ als volgt gevonden worden. Begin met de 0-stroom f. Door vervolgens voor elke gedeeltelijke werkplektoewijzing $m \in \boldsymbol{M}$ de stroom over het pad $s \rightarrow (w(m), T(m)) \rightarrow (e(m), T(m)) \rightarrow e(m) \rightarrow t$ met $d(m)$ eenheden te verhogen, wordt een met $\boldsymbol{M}$ corresponderende flow f verkregen . Het is eenvoudig in te zien dat wanneer bij deze flow f op de hierboven beschreven manier een gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}'$ bepaald wordt er zal gelden dat $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}$.

(iii) Laat f_1 en f_2 twee flows in het netwerk $G(\boldsymbol{E})$ zijn en laat $\boldsymbol{M}_1$ en $\boldsymbol{M}_2$ de hiermee corresponderende gedeeltelijke werkplekplanningen zijn. Dan geldt er dat $f_1 \neq f_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{M}_1 \neq \boldsymbol{M}_2$.
($\Rightarrow$) Wanneer $f_1 \neq f_2$ bestaat er in $G(\boldsymbol{E})$ immers tenminste één pad $\boldsymbol{P}$ van s naar t is waarvoor geldt dat $f_1(\boldsymbol{P}) \neq f_2(\boldsymbol{P})$. Laat het pad $\boldsymbol{P}$ gegeven zijn door $s \rightarrow (w, T) \rightarrow (e, T) \rightarrow e \rightarrow t$. Aangezien er geldt dat $f_1(\boldsymbol{P}) \neq f_2(\boldsymbol{P})$ geldt er ook dat $f_1((w, T) \rightarrow (e, T)) \neq f_2((w, T) \rightarrow (e, T))$, waar weer uit volgt dat de met f_1 en f_2 corresponderende gedeeltelijke werkplekplanningen $\boldsymbol{M}_1$ en $\boldsymbol{M}_2$ moeten verschillen.
($\Rightarrow$) Wanneer $\boldsymbol{M}_1 \neq \boldsymbol{M}_2$ bestaan er $m_1 \in \boldsymbol{M}_1$ en $m_2 \in \boldsymbol{M}_2$ waarvoor geldt dat $w(m_1) = w(m_2)$, $T(m_1) = T(m_2)$, $e(m_1) = e(m_2)$, maar $d(m_1) \neq d(m_2)$ of een $m_1 \in \boldsymbol{M}_1$ (respectievelijk een $m_2 \in \boldsymbol{M}_2$) waarvoor geldt dat er geen $m_2 \in \boldsymbol{M}_2$ (respectievelijk geen $m_1 \in \boldsymbol{M}_1$) bestaat waarvoor geldt dat $w(m_1) = w(m_2)$, $T(m_1) = T(m_2)$, $e(m_1) = e(m_2)$. In beide situaties volgt dat er een pad $\boldsymbol{P}$ in $G(\boldsymbol{E})$ bestaat waarvoor geldt dat $f_1(\boldsymbol{P}) \neq f_2(\boldsymbol{P})$. Hieruit volgt dat de corresponderende flows f_1 en f_2 moeten verschillen.
□

Er geldt dat bij elke gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ (en dus ook bij elke flow f in het netwerk $G(\boldsymbol{E})$) in pseudopolynomiale tijd een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ bepaald kan worden, waarin aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ in een interval $T \in \boldsymbol{T}$ precies $f((e, T) \rightarrow e)$ tijdseenheden besteed worden.

STELLING 5.2
Gegeven een gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ met $e(m) \in \boldsymbol{E}^S$ voor alle m $\in \boldsymbol{M}$.
(i) Er bestaat een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ waarin aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ in een interval $T \in \boldsymbol{T}$ precies $\sum_{m \in M : e(m)=e, T(m)=T} d(m)$ tijdseenheden besteed worden.
(ii) Deze werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ kan voor gegeven $\boldsymbol{M}$ in pseudopolynomiale tijd bepaald worden.

BEWIJS
(i) Uit de gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ is voor elk interval $T \in \boldsymbol{T}$ bekend hoeveel tijdseenheden er aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ besteed moeten worden. Laat $\beta(e,T)$ de hoeveelheid tijdseenheden zijn die er in het interval $T \in \boldsymbol{T}$ aan een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ moet worden, dat wil zeggen

$$\beta(e,T) := \sum_{m \in M : e(m)=e \wedge T(m)=T} d(m)$$

Uit stelling 5.1(ii) volgt dat er een met $\boldsymbol{M}$ corresponderende flow f door het netwerk $G(\boldsymbol{E})$ gevonden kan worden. Voor deze flow geldt dat $f((e, T) \rightarrow e) = \beta(e,T)$.

Beschouw nu een interval $T \in \boldsymbol{T}$. Laat $l(\tau)$ gedefinieerd zijn als de grootste gemeenschappelijk deler van alle $\beta(e,T) \neq 0$, voor $e \in \boldsymbol{E}$, en $l(T)$. Deel het interval T op in een verzameling van $n = (\ l(T) \ / \ l(\tau)\ )$ niet-overlappende intervallen van lengte $l(\tau)$ en laat deze verzameling intervallen gegeven zijn door $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1 , \tau_2 ,..., \tau_n \}$.

Beschouw het deelnetwerk $G(\boldsymbol{E}, T)$ van $G(\boldsymbol{E})$ met een verzameling knopen $V(\boldsymbol{E}, T)$ bestaande uit:

- s
- (w , T) voor alle knopen $(w , T) \in V(\boldsymbol{E})$;

- (e, T) voor alle knopen $(e, T) \in V(E)$;
- e voor alle knopen $e \in V(E)$ waarvoor geldt dat $(e, T) \in V(E)$;
- t

Laat de verzameling pijlen $A(E, T)$ bestaan uit:

- $s \rightarrow (w, T)$ voor alle knopen $(w, T) \in V(E, T)$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, T) \rightarrow (e, T)$ voor alle knopen $(w, T) \in V(E, T)$ en $(e, T) \in V(E,T)$,
  waarvoor geldt dat $(w, T) \rightarrow (e, T) \in A(E)$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(e, T) \rightarrow e$ voor alle knopen $(e, T) \in V(E, T)$ en $e \in V(E,T)$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $e \rightarrow t$ voor alle knopen $e \in V(E,T)$,
  capaciteit $u = \beta(e,T)$ en kosten $c = -q(e) / d_{benodigd}(e)$.

In het netwerk $G(E, T)$ bestaat een maximale stroom van:

$$\sum_{\{e \in E | (e,T) \in V(E)\}} \beta(e,T) \text{ eenheden}$$

Deze stroom is te bepalen door de stroom tussen elk van de paren van knopen uit $V(E)/\{t\}$ uit de flow f over te nemen (de capaciteit van de pijlen tussen deze knopen in het netwerk $G(E, T)$ is immers hetzelfde als die van de corresponderende pijl in het netwerk $G(E)$). Aangezien elke knoop $e \in V(E, T)$ slechts één inkomende pijl, namelijk $(e, T) \rightarrow e$, heeft zullen in de knoop e van dit deelnetwerk precies $\beta(e,T)$ eenheden stroom aankomen die door de pijl $e \rightarrow t$ naar t gevoerd kunnen worden.

Voor elke interval $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ kan nu een netwerk $G(E, \tau)$ geconstrueerd worden met een verzameling knopen $V(E, \tau)$ bestaande uit:

- s
- (w, τ) voor alle $w \in W$ waarvoor $(w, T) \in V(E, T)$;
- (e, τ) voor alle $e \in E$ waarvoor $(e, T) \in V(E, T)$;
- e voor alle $e \in E$ waarvoor $(\tau, e) \in V(E, \tau)$;
- t

Laat de verzameling pijlen $A(E, \tau)$ in $G(E, \tau)$ bestaan uit:

- $s \rightarrow (w, \tau)$ voor alle knopen $(w, \tau) \in V(E, \tau)$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, \tau) \rightarrow (e, \tau)$ voor knopen $(w, \tau) \in V(E, \tau)$ en $(e, \tau) \in V(E, \tau)$ met w en e
  waarvoor $(w, T) \rightarrow (e, T) \in A(E, T)$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(e, \tau) \rightarrow e$ voor alle knopen $(e, \tau) \in V(E, \tau)$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $e \rightarrow t$ voor alle knopen $e \in V(E, \tau)$,
  capaciteit $\beta(e,T) \cdot l(\tau) / l(T)$ en kosten $c = -q(e) / d_{benodigd}(e)$.

Het netwerk $G(E, \tau)$ is identiek aan het netwerk $G(E, T)$ behalve dan dat alle capaciteiten in het netwerk $G(E, T)$ een factor $n = l(T) / l(\tau)$ groter zijn. Een gevolg is dat de maximum-flow in elk netwerk $G(E, \tau)$ voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ waarde:

$$\sum_{\{e \in E | (e,T) \in V(E)\}} \beta(e,T) / n \text{ eenheden heeft.}$$

Construeer nu het volgende netwerk $G_\tau(E, T)$ op de verzameling knopen $V_\tau(E, T)$ bestaande uit:

- s
- (w, τ) voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$, voor $w \in \boldsymbol{W}$ waarvoor $(w, T) \in V(\boldsymbol{E}, T)$;
- (e, τ) voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$, voor $e \in \boldsymbol{E}$ waarvoor $(e, T) \in V(\boldsymbol{E}, T)$;
- e voor knopen $e \in V(\boldsymbol{E})$ waarvoor $(e, \tau) \in V_\tau(\boldsymbol{E}, T)$;
- t

Laat de verzameling pijlen $A_\tau(E, T)$ in $G_\tau(E, T)$ bestaan uit:

- $s \to (w, \tau)$ voor alle knopen $(w, \tau) \in V_\tau(E, T)$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, \tau) \to (e, \tau)$ voor alle w $\in \boldsymbol{W}$ en e $\in \boldsymbol{E}$ waarvoor $(w, \tau) \in V_\tau(E, T)$,
  $(e, \tau) \in V_\tau(E, T)$ en $((w, T) \to (e, T)) \in A(E)$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(e, \tau) \to e$ voor alle knopen $(e, \tau) \in V_\tau(E, T)$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $e \to t$ voor alle knopen $e \in V_\tau(E, T)$,
  capaciteit $u = \beta(e,T)$ en kosten $c = -q(e) / d_{benodigd}(e)$.

Het netwerk $G_\tau(E, \tau)$ bestaat in feite uit de n afzonderlijke netwerken $G(E, \tau)$ voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$. Alleen zijn de pijlen $e \to t$ in $A(E, \tau)$ samengevoegd tot één pijl $e \to t$ in $A_\tau(E, T)$ en zijn de verschillende source-nodes samengevoegd tot één punt. De capaciteit van de pijl $e \to t$ in $A_\tau(E, T)$ is gelijk aan de gezamelijke capaciteit van de n pijlen $e \to t$ in $A(E, \tau)$ van de netwerken $G(E, \tau)$ voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$. In het netwerk $G_\tau(E, T)$ bestaat derhalve een stroom van:

$$\sum_{\tau \in \boldsymbol{\tau}} \sum_{\{e \in E : (e,T) \in V(E)\}} \beta(e,T)/n = \sum_{\{e \in E : (e,T) \in V(E)\}} \beta(e,T) \text{ eenheden.}$$

Deze stroom is maximaal omdat er geldt dat:

$$\sum_{\{e \in V_\tau(E,T)\}} u(e \to t) = \sum_{\{e \in E : (e,T) \in V(E)\}} \beta(e,T)$$

Omdat de waarde van de stroom gelijk is aan de totale capaciteit van de pijlen die knoop t als eindpunt hebben, zal een stroom met van een grotere waarde niet bestaan in het netwerk $G_\tau(E, T)$.
Voor de $\beta(e,T)/n$ hoeft niet te gelden dat ze geheeltallig zijn. Dit is geen probleem aangezien alle capaciteiten in het netwerk $G_\tau(E, T)$ veelvouden zijn van $l(\tau)$ en er dus vanwege de geheeltalligheidseigenschap van minimum-cost-maximum-flow-problemen (paragraaf 4.2.5) geldt dat er een maximum flow in het netwerk $G_\tau(E, T)$ bestaat waarvoor geldt dat de stroom $f(a)$ door elke pijl $a \in A_\tau(E, T)$ een veelvoud is van $l(\tau)$. Deze maximum flow zal gevonden worden met behulp van het successive shortest path algoritme van Busacker & Gowen.

Voor elk interval T kan er dus een maximum flow in het netwerk $G_\tau(E, T)$ gevonden van:

$$\sum_{\{e | (e,T) \in V(E)\}} \beta(e,T) \text{ eenheden}$$

Bij deze maximum flow geldt dat $f(e \to t) = \beta(e,T)$ voor alle $e \in E$. Aangezien voor de met het successive shortest path algoritme gevonden maximum-flow in het netwerk $G_\tau(E, T)$ geldt dat de stroom $f(a)$ door elke pijl $a \in A_\tau(E, T)$ een veelvoud van $l(\tau)$ zal voor elke $w \in \boldsymbol{W}$, $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ en $e \in \boldsymbol{E}$ waarvoor $(w, \tau) \to (e, \tau) \in A_\tau(E, T)$ gelden dat $f((w, \tau) \to (e, \tau)) = l(\tau)$. Met deze flow correspondeert een werkplekplanning voor het interval T. Deze werkplekplanning wijst een werknemer w voor het gehele interval τ toe aan een werkplek $s(e)$ wanneer er over het pad $s \rightarrow (w, \tau) \rightarrow (e, \tau) \rightarrow t$ een stroom van waarde $l(\tau)$ eenheden loopt. Aangezien de toewijzing telkens voor de gehele duur van een interval τ zal geschieden en de capaciteit van alle pijlen $s \rightarrow (w, \tau)$ gelijk is aan $l(\tau)$, geldt er dat elke werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ een interval $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ of voor de volledige duur van het interval aan precies één bezettingseis wordt toegewezen of aan geen enkele bezettingseis wordt toegewezen. Omdat er verder geldt dat de capaciteit van de pijlen $(e, \tau) \rightarrow e$ gelijk is aan $l(\tau)$ zal er gelden dat aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ in een interval $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ of een werknemer wordt toegewezen voor de volledige duur van het interval of geen werknemer wordt toegewezen gedurende het hele interval τ. Bij elke gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ is dus een toegelaten werkplekplanning te $\boldsymbol{Z}$ bepalen door de corresponderende flow f in het netwerk $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{E})$ te bepalen en voor elk interval T een maximale stroom door het netwerk $\boldsymbol{G}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ te bepalen.

(ii) Voor het bepalen van τ voor een interval $T \in \boldsymbol{T}$ moet de grootste gemeenschappelijk deler van maximaal $|\boldsymbol{E}|+1$ getallen uit $\{0, \ldots, l(T)\}$ bepaald worden. Wanneer er gebruik gemaakt wordt van het algoritme in paragraaf 4.3.2. kan τ voor een interval $T \in \boldsymbol{T}$ dus in $5 \cdot |\boldsymbol{E}| \cdot \lceil {}^{10}\log(l(T)) \rceil$ operaties bepaald worden.

Voor het interval T moet vervolgens een maximum-flow probleem op het netwerk $\boldsymbol{G}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ worden opgelost. Voor de verzameling knopen $\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ en verzameling pijlen $\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ in dit netwerk geldt dat:

$$|\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{E},T)| \le |\boldsymbol{W}| \frac{l(T)}{l(\tau)} + |\boldsymbol{E}| \frac{l(T)}{l(\tau)} + |\boldsymbol{E}| + 2 \qquad (5.1)$$

$$|\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{E},T)| \le |\boldsymbol{W}| \cdot \frac{l(T)}{l(\tau)} + |\boldsymbol{W}| \cdot |\boldsymbol{E}| + |\boldsymbol{E}| \cdot \frac{l(T)}{l(\tau)} + |\boldsymbol{E}| \qquad (5.2)$$

Bij het successive shortest path algoritme wordt er elke iteratie gezocht naar een kortste pad van s naar t. Het vinden van een kortste pad van s naar t in een netwerk $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{A})$ kost $O(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{A}|)$ operaties. Elke iteratie zal de stroom van s naar t verhoogd worden met $l(\tau)$ eenheden. In het netwerk $\boldsymbol{G}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ wordt er wordt gezocht naar een maximale flow van waarde

$$\rho(T) := \sum_{m \in M: T(m) = T} d(m) \text{ eenheden.}$$

Het totaal aantal iteraties zal dus $n(T) := \dfrac{\rho(T)}{l(\tau)}$ bedragen.

Het oplossen van het maximum-flow probleem op het netwerk $\boldsymbol{G}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ kost

$$O\big(n(T) \cdot |\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{E},T)| \cdot |\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{E},T)|\big) \text{ operaties.}$$

In (5.1) respectievelijk (5.2) zijn uitdrukkingen voor de bovengrenzen voor de termen $|\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{E},T)|$ en $|\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{E},T)|$ gegeven. Wanneer voor elke $T \in \boldsymbol{T}$ een grootste gemeenschappelijk deler bepaald wordt en een maximum flow probleem op het netwerk $\boldsymbol{G}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ opgelost wordt kost dit in totaal dus:

$$O\left(\sum_{T \in \boldsymbol{T}} \left(|\boldsymbol{E}| \cdot \lceil {}^{10}\log(p) \rceil + \varphi(|\boldsymbol{W}|, |\boldsymbol{E}|, p) \cdot \sum_{m \in M: T(m) = T} d(m) \right) \right) \text{ operaties.}$$

In bovenstaande uitdrukking is $\varphi(|\boldsymbol{W}|, |\boldsymbol{E}|, p)$:

$$\varphi(|\boldsymbol{W}|, |\boldsymbol{E}|, p) = \big(|\boldsymbol{W}| \cdot p + |\boldsymbol{E}| \cdot p + |\boldsymbol{E}| + 2\big) \cdot \big(|\boldsymbol{W}| \cdot p + |\boldsymbol{W}||\boldsymbol{E}| + |\boldsymbol{E}| \cdot p + |\boldsymbol{E}|\big).$$

Er geldt dat:

$$\sum_{T\in\mathbf{T}} \sum_{m\in M:T(m)=T} d(m) \leq \sum_{e\in E} d_{benodigd}(e)$$

en dus kan de complexiteit van het in het bewijs van 5.1(i) beschreven algoritme in termen van de inputparameters van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM gegeven worden door:

$$O\left(p\cdot|\boldsymbol{E}|\cdot\left\lceil {}^{10}\log(p)\right\rceil+\varphi(|\boldsymbol{W}|,|\boldsymbol{E}|,p)\cdot\sum_{e\in E} d_{benodigd}(e)\right)$$

Bij elke flow f door $\boldsymbol{G(E)}$ kan dus in pseudopolynomiale tijd een werkplekplanning bepaald worden, waarin in het interval T precies $\beta(e,T) = f((e, T)\rightarrow e)$ tijdseenheden aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ besteed worden. In totaal worden in deze werkplekplanning dus $f(e\rightarrow t)$ tijdseenheden aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ besteed. □

Uit stelling 5.1(i) en stelling 5.2. volgt dat uit de oplossing f van een probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) in pseudopolynomiale tijd een toegelaten werkplekplanning kan worden afgeleid waarin precies $f(e \rightarrow t)$ tijdseenheden aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ besteed wordt. Wanneer gegeven de beschikbaarheid van de werknemers aan alle bezettingseisen uit $\boldsymbol{E}$ kan worden voldaan, zal door het oplossen van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) in polynomiale tijd een oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM gevonden kunnen worden.

STELLING 5.3
Voor elke toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ kan er eenvoudig een corresponderende flow f in het netwerk $\boldsymbol{G(E)}$ worden afgeleid.

BEWIJS
Een gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ is uit de werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ af te leiden. Begin met een een lege verzameling $\boldsymbol{M}$. Bepaal voor elke $T \in \boldsymbol{T}$, $w \in \boldsymbol{W}$, $e \in \boldsymbol{W}$ het totaal aantal tijdseenheden $\alpha(w, T, e)$ dat de werknemer w bij de werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ in het interval T in het kader van een bezettingseis e aan een de werkplek $s(e)$ wordt toegewezen en voeg de gedeeltelijke werkplektoewijzing m met $w(m)=w$, $T(m)=T$, $e(m)=e$, $s(m)=s(e)$ en $d(m)= \alpha(w, T, e)$ toe aan de verzameling $\boldsymbol{M}$. De met $\boldsymbol{M}$ corresponderende flow f is af te leiden op de manier zoals beschreven in het bewijs van stelling 5.1(ii) □

5.6 HET BEPALEN VAN EEN OPTIMALE VERZAMELING BEZETTINGSEISEN WAARAAN VOLLEDIG VOLDAAN KAN WORDEN

In deze paragraaf zal worden aangegeven hoe een optimale oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM gevonden kan worden. In paragraaf 5.6.1. zal worden toegelicht op welke manier een ondergrens voor de waarde van de optimale oplossing van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM afgeleid kan worden. In paragraaf 5.6.2. wordt vervolgens een bovengrens voor de waarde van deze oplossing afgeleid. Tenslotte wordt in paragraaf 5.6.3. aangegeven hoe de optimale oplossing met branch-and-bound bepaald kan worden.

5.6.1. HET BEPALEN VAN EEN ONDERGRENS VOOR DE OPTIMALE OPLOSSING

Voor de toelichting van het algoritme wordt uitgegaan van de formulering van het optimaliteitscriterium zoals die in (2.2) gegegeven is. Aangezien er bij het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM geldt dat $\gamma(e) = q(e)$ voor alle $e \in \boldsymbol{E}$ kan het optimaliteitscriterium geschreven worden als:

$$g := \min \sum_{e \in E} U_Z'(e) \cdot q(e) \tag{5.3}$$

met $U_Z'(e) = U_Z(e) - 1$ voor alle $e \in \boldsymbol{E}$ en waarbij geminimaliseerd wordt over alle toegelaten werkplektoewijzingen. De doelfunctie wordt $\sum_{e \in E} U_Z'(e) \cdot q(e)$.

Aan de hand van de oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) kan een ondergrens LB(f) en een bovengrens UB(f) voor de optimale oplossing van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM met bezettingseisen $\boldsymbol{E}$ bepaald worden.

Het optimaliteitscriterium voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E) wordt gegeven door:

$$\min \sum_{e \in E} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right),$$

waarbij geminimaliseerd wordt over alle maximum flows in het netwerk.Aan de hand van de volgende stelling kan een ondergrens voor de waarde van het optimaliteitscriterium g bij een optimale oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM met bezettingseisen $\boldsymbol{E}$ bepaald worden.

STELLING 5.4:

$$\min \sum_{e \in E} U_Z'(e) \cdot q(e) \geq \min \sum_{e \in E} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right)$$

BEWIJS:
Stel dat er een oplossing $\boldsymbol{Z}$ voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bestaat waarvoor geldt dat:

$$\sum_{e \in E} U_Z'(e) \cdot q(e) = c$$

Dan geldt dat er een oplossing f bestaat voor het MIN-COST-MAX-FLOW(E)-probleem met:

$$\sum_{e \in E} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right) \leq c$$

Immers, laat $\boldsymbol{E}_I$ de verzameling van alle bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}$ zijn, waarvoor geldt dat $U_Z'(e) = -1$. Voor elk van de bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}_I$ geldt dus dat $U(e) = 0$. Er bestaat dus een werkplekplanning waarbij aan elk van de bezettingseisen uit $\boldsymbol{E}_I$ volledig voldaan wordt. Aangezien op grond van stelling 5.3 elke toegelaten oplossing $\boldsymbol{Z}$ in het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM correspondeert met een toegelaten flow in het netwerk $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}))$, zal er derhalve ook een flow f moeten bestaan waarvoor geldt dat $f(e \to t) = d_{benodigd}(e)$ voor alle $e \in \boldsymbol{E}_I$.

Aangezien voor alle $e \in \boldsymbol{E} \setminus \boldsymbol{E}_I$ geldt dat $f(e \to t) \geq 0$, zal er voor deze flow f gelden dat:

$$\sum_{e \in E} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right) \leq \sum_{e \in E_I} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right)$$
$$= \sum_{e \in E_I} d_{benodigd}(e) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right)$$
$$= \sum_{e \in E_I} -q(e) = \sum_{e \in E_I} U_Z'(e) \cdot q(e) = \sum_{e \in E} U_Z'(e) \cdot q(e) = c \qquad \square$$

Uit het bovenstaande volgt dat een ondergrens voor de optimale oplossing van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bepaald kan worden door het oplossen van het MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$)-probleem. Laat f de flow zijn die correspondeert met een optimale oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$). Een ondergrens voor de optimale oplossing van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is dus:

$$LB(f) = \sum_{e \in E} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right) \tag{5.4}$$

5.6.2. HET BEPALEN VAN EEN BOVENGRENS VOOR DE OPTIMALE OPLOSSING

Een bovengrens voor waarde van de doelfunctie bij een optimale oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM met bezettingseisen $\boldsymbol{E}$ kan bepaald worden aan de hand van de volgende stelling.

STELLING 5.5:
Laat voor een zeker maximum flow f in $G(\boldsymbol{E})$ nu de verzameling $\boldsymbol{E}_{opt}$ gegeven zijn door $\boldsymbol{E}_{opt} = \{ e \in \boldsymbol{E} \mid f(e \to t) = d_{benodigd}(e) \}$ zijn. Een bovengrens voor de optimale oplossing van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is dan:

$$\textbf{min} \sum_{e \in E} Uz'(e) \cdot q(e) \leq \sum_{e \in E_{opt}} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right)$$

BEWIJS:
Uit het bewijs van stelling 5.2 is af te leiden dat uit elke oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) een oplossing $\boldsymbol{Z}$ voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM kan worden afgeleid, waarbij voor elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ geldt dat er $f(e \to t)$ tijdseenheden aan de bezettingseis e besteed worden. Voor alle bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}_{opt}$ geldt dus dat er bij de werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ volledig aan voldaan wordt. Er bestaat dus een oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM waarin aan alle bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}_{opt}$ volledig voldaan wordt. Voor deze oplossing geldt dat:

$$\sum_{e \in E} Uz'(e) \cdot q(e) = \sum_{e \in E_{opt}} -1 \cdot q(e) = \sum_{e \in E_{opt}} d_{benodigd}(e) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right)$$
$$= \sum_{e \in E_{opt}} f(e \to t) \cdot \left(-q(e) / d_{benodigd}(e)\right)$$

Voor het optimaliteitscriterium geldt dus dat:

$$g = \min \sum_{e \in E} Uz'(e) \cdot q(e) \leq \sum_{e \in E_{opt}} f(e \rightarrow t) \cdot \left(-q(e)/d_{benodigd}(e)\right) \qquad \square$$

Uit het bovenstaande volgt dat een bovengrens voor de optimale oplossing van het werkplekplanningsprobleem bepaald kan worden door het oplossen van het MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$)-probleem. Laat f een optimale oplossing zijn voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$). Een bovengrens voor de optimale oplossing van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is dan:

$$UB(f) = \sum_{e \in E_{opt}} f(e \rightarrow t) \cdot \left(-q(e)/d_{benodigd}(e)\right) \tag{5.5}$$

waarin $\boldsymbol{E}_{opt} = \{ e \in \boldsymbol{E} \mid f(e \rightarrow t) = d_{benodigd}(e) \}$.

5.6.3. HET BEPALEN VAN EEN OPTIMALE VERZAMELING BEZETTINGSEISEN MET BEHULP VAN BRANCH-AND-BOUND

In de vorige paragraaf is aangetoond dat het door het bepalen van een oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) mogelijk is een ondergrens $LB(f)$ en een bovengrens $UB(f)$ te bepalen voor:

$$\min \sum_{e \in E} Uz'(e)\, q(e)$$

Bovendien kan uit de oplossing f een oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM worden afgeleid waarvoor geldt dat $\sum_{e \in E} Uz'(e)\, q(e) = UB(f)$. In deze oplossing zal aan alle bezettingseisen uit $\boldsymbol{E}_{opt} = \{ e \in \boldsymbol{E} \mid f(e \rightarrow t) = d_{benodigd}(e) \}$ voldaan worden.

Met behulp van branch-and-bound kan een optimale oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bepaald worden. Het probleem bezit immers de in paragraaf 4.1.2. genoemde vereiste eigenschappen, namelijk mogelijkheden tot *Branching* en *Lower Bounding*.

Het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) kan gezien worden als het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM waarbij de eis dat er ofwel volledig ofwel in het geheel niet aan een bezettingseis voldaan moet worden gerelaxeerd is. De beloning voor het volledig voldoen aan een bezettingseis is in het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is in het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) vervangen door een evenredige beloning per tijdseenheid dat er aan die bezettingseis besteed wordt.

Branching kan plaatsvinden door voor het ene kind van een knoop te eisen dat aan een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ volledig voldaan wordt en voor een tweede kind van deze knoop te eisen dat in het geheel niet aan deze bezettingseis e voldaan wordt. Op deze manier wordt de oplossingsverzameling gesplist in twee disjuncte deelverzamelingen. De knopen zullen aangeduid worden met $N(\boldsymbol{E}^+, \boldsymbol{E}^-)$ voor $\boldsymbol{E}^+ \subseteq \boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{E}^- \subset \boldsymbol{E}$, met $\boldsymbol{E}^+ \cap \boldsymbol{E}^- = \emptyset$. De verzameling $\boldsymbol{E}^+$ bestaat uit alle bezettingseisen waarvoor geëist is dat er volledig aan moet worden voldaan en $\boldsymbol{E}^-$ is de verzameling van bezettingseisen waarvoor geëist is dat er in het geheel niet aan moet worden voldaan.

Definieer het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{E}^-$) voor een knoop $N(\boldsymbol{E}^+ , \boldsymbol{E}^-)$ als zijnde het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) waarbij de kosten en capaciteiten van de pijlen $(e \rightarrow t)$ als volgt zijn aangepast:

- capaciteit $u(e \rightarrow t) = 0$ en kosten $c(e \rightarrow t) = 0$ wanneer $e \in \boldsymbol{E}^-$
- capaciteit $u(e \rightarrow t) = d_{benodigd}(e)$ en kosten $c(e \rightarrow t) = -M$ wanneer $e \in \boldsymbol{E}^+$
- capaciteit $u(e \rightarrow t) = d_{benodigd}(e)$ en kosten $c(e \rightarrow t) = -q(e) / d_{benodigd}(e)$ wanneer $e \in \boldsymbol{E} \setminus (\boldsymbol{E}^- \cup \boldsymbol{E}^+)$

Wanneer M voldoende groot gekozen zal worden, zal er, wanneer dit mogelijk is, in de werkplekplanning die correspondeert met de oplossing van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+,E^-) altijd aan alle bezettingseisen uit de verzameling E^+ voldaan worden. Aan alle bezettingseisen uit E^- zal in het geheel niet voldaan worden.

STELLING 5.5

Laat f een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) zijn en $M := \sum_{e \in E} q(e) + 1$.

Wanneer er voor tenminste één $e \in E^+$ geldt dat in de flow f $f(e \rightarrow t) < u(e \rightarrow t)$, zal dat betekenen dat er geen toegelaten oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) bestaat waarin $f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)$ voor alle $e \in E^+$.

BEWIJS

Bij de keuze van M zal er voor alle $E^+, E^- \subseteq E$ gelden dat $\sum_{e \in E \setminus (E^- \cup E^+)} u(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) \geq -M + 1$. Voor elke oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) waarin $f(e \rightarrow t) < u(e \rightarrow t)$ voor tenminste één $e \in E^+$ geldt dat:

$$
\begin{aligned}
C(f) &= \sum_{e \in E} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) = \sum_{e \in E^+} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) + \sum_{e \in E \setminus (E^- \cup E^+)} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) \\
&\geq \left(\left(\sum_{e \in E^+} u(e \rightarrow t) \right) - 1 \right) \cdot -M + \sum_{e \in E \setminus (E^- \cup E^+)} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) \\
&\geq \left(\left(\sum_{e \in E^+} u(e \rightarrow t) \right) - 1 \right) \cdot -M - M + 1 = \sum_{e \in E^+} u(e \rightarrow t) \cdot -M + 1 > \sum_{e \in E^+} u(e \rightarrow t) \cdot -M .
\end{aligned}
$$

Voor een flow f in het netwerk waarin $f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)$ voor alle $e \in E^+$ geldt dat:

$$
\begin{aligned}
C(f) &= \sum_{e \in E} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) = \sum_{e \in E^+} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) + \sum_{e \in E \setminus (E^- \cup E^+)} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) \\
&= \sum_{e \in E^+} u(e \rightarrow t) \cdot -M + \sum_{e \in E \setminus (E^- \cup E^+)} f(e \rightarrow t) \cdot c(e \rightarrow t) \leq \sum_{e \in E^+} u(e \rightarrow t) \cdot -M .
\end{aligned}
$$

Bij de keuze $M = \sum_{e \in E} q(e) + 1$ geldt er dus dat de kosten van een flow met $f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)$ voor alle $e \in E^+$ lager zijn dan de kosten van elke willekeurige flow met $f(e \rightarrow t) < u(e \rightarrow t)$ voor tenminste één $e \in E^+$. Wanneer voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) een optimale oplossing f gevonden wordt waarin $f(e \rightarrow t) < u(e \rightarrow t)$ voor tenminste één $e \in E^+$, bestaat er geen toegelaten oplossing f^* waarin $f^*(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)$ voor alle $e \in E^+$, omdat voor deze oplossing zou gelden dat $C(f^*) < C(f)$ en f^* dus de optimale oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) zou zijn. □

Lowerbouding kan plaats vinden doordat voor elke oplossing f met $f(e \rightarrow t) = d_{benodigd}(e)$ voor alle $e \in E^+$ geldt dat $LB(f)$ zoals bepaald in (5.4) een ondergrens is voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM met de extra eisen dat aan alle bezettingseisen uit E^+ voldaan moet worden en aan alle bezettingseisen uit E^- in het geheel niet voldaan mag worden.

Laat LUB op elk moment in het branch-and-bound-proces de waarde van de laagste (en dus beste) bekende bovengrens zijn en laat $LUB := \infty$ wanneer er nog geen bovengrens bekend is.

In elke knoop zal een oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) bepaald worden.

- Wanneer er in de oplossing f aan tenminste één eis $e \in E^+$ geldt dat $f(e \rightarrow t) < u(e \rightarrow t)$, bestaat er voor het deelprobleem bij de knoop geen toegelaten oplossing. Aangezien voor alle afstammelingen $N(E_N^+, E_N^-)$ van de knoop $N(E^+ , E^-)$ zal gelden dat $E_N^+ \subsetneq E^+$ zal er ook geen toegelaten oplossing voor de deelproblemen bij deze knopen bestaan. De onderliggende knopen hoeven dus niet meer onderzocht te worden.
- Wanneer er in de oplossing f voor elke eis $e \in E^+$ geldt dat $f(e \rightarrow t) < u(e \rightarrow t)$ en er bovendien geen eis $e \in E \setminus E^-$ is waarvoor geldt dat $0 < f(e \rightarrow t) < d_{benodigd}(e)$, geldt er voor de knoop dat $LB(f) = UB(f)$ en hoeft er niet verder gebranched te worden. Wanneer er geldt dat $UB(f) \leq LUB$ dan moet LUB aangepast worden, $LUB := UB(f)$.
- Wanneer er in de oplossing f voor elke eis $e \in E^+$ geldt dat $f(e \rightarrow t) < u(e \rightarrow t)$ en er een eis $e \in E \setminus E^-$ is waarvoor geldt dat $0 < f(e \rightarrow t) < d_{benodigd}(e)$ en bovendien geldt dat $LB(f) < LUB$, zullen de kinderen van de knoop $N(E^+ , E^-)$ onderzocht moeten worden.

Zoals in paragraaf 4.1.1. reeds is vermeld, zijn er bij branch-and-bound naast de manier van *branching* en de wijze waarop *lower-bounding* plaats zal vinden, nog twee details relevant:
1. Er moet elke stap gekozen worden vanuit welke knoop er gebranched wordt.
2. Er moet gekozen worden door welke bezettingseis e de toegevoegde constraints bepaald worden.

Ad.1 Er is gekozen voor de *depth-first-search*-strategie vanwege de reeds in paragraaf 4.1.2. genoemde voordelen. Allereerst is deze strategie met behulp van een recursie eenvoudig te implementeren. Bovendien wordt met deze strategie over het algemeen sneller dan bij de *breadth-first-search*-strategie een goede oplossing voor het probleem verkregen. Dit kan met name een voordeel zijn voor de afdelingen waarvoor de instanties van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM relatief groot zijn. Om de totale rekentijd van het algoritme beperkt te houden kan het noodzakelijk zijn een stopcriterium in te bouwen. Dit stopcriterium kan bijvoorbeeld een maximum zijn voor het aantal knopen dat onderzocht wordt. Wanneer dit maximum bereikt is zal de beste gevonden oplossing gekozen moeten worden. Hierbij kan het dus van belang zijn om snel een goede oplossing voor het probleem te vinden.
Het is ook mogelijk een stopcriterium te definiëren dat gebaseerd is op de mate waarin de kosten van de beste gevonden oplossing maximaal afwijken van de kosten van de optimale oplossing. Laat hiervoor de laagste ondergrens bij een nog levende knoop na een bepaalde stap gegeven zijn door L. Dan zal er gelden dat kosten van de beste tot dan toe gevonden oplossing binnen een ratio van $|(LUB-L)/L|$ van de kosten van de optimale oplossing liggen (Papadimitriou & Steiglitz, 1982). Het is dus mogelijk een stopcriterium te definieren dat gebaseerd is op de ratio $|(LUB-L)/L|$. Een dergelijk stopcriterium zal de rekentijd van het algoritme naar alle waarschijnlijkheid verminderen. Het geeft echter geen garantie voor de looptijd van het algoritme in de vorm van een maximale rekentijd.

Ad.2 In elke knoop $N(E^+ , E^-)$ wordt er een bezettingseis $e \in E \setminus (E^+ \cup E^-)$ gekozen waarvoor in de oplossing f van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+, E^-) geldt dat $0 < f(e \rightarrow t) < d_{benodigd}(e)$. Deze bezettingseis bepaald de toegevoegde constraints, dat wil zeggen dat als kinderen van de knoop $N(E^+ , E^-)$, de knopen $N(E^+ \cup \{e\} , E^-)$ en $N(E^+ , E^- \cup \{e\})$ gekozen zullen worden. Deze keuze zal er namelijk voor zorgen dat de oplossing voor het deelprobleem bij beide kinderen $N(E^+ \cup \{e\} , E^-)$ en $N(E^+ , E^- \cup \{e\})$ zal verschillen van de oplossing voor het deelprobleem $N(E^+ , E^-)$, waardoor er voor beide kinderen de kans bestaat dat de ondergrens groter zal zijn dan de ondergrens bij de knoop $N(E^+ , E^-)$. Wanneer er voor een bezettingseis e met $f(e \rightarrow t) = d_{benodigd}(e)$ gekozen zal worden, zal de ondergrens bij de knoop $N(E^+ \cup \{e\} , E^-)$ gelijk zijn aan de ondergrens bij de knoop $N(E^+ , E^-)$. Wanneer er tenslotte voor een bezettingseis e met $f(e \rightarrow t) = 0$ gekozen zal worden, zal de lowerbound bij de knoop $N(E^+, E^- \cup \{e\})$ gelijk zijn aan de ondergrens bij de knoop $N(E^+ , E^-)$. In gevallen waarin er voor meerdere bezettingseisen $e \in E \setminus (E^+ \cup E^-)$ geldt dat $0 < f(e \rightarrow t) < d_{benodigd}(e)$, wordt ervoor gekozen om de bezettingseis met de hoogste prioriteit de toegevoegde constraints te laten bepalen.

5.7 HET BEPALEN VAN EEN OPTIMALE OPLOSSING VOOR HET PROBLEEM VOOR AFDELINGEN ZONDER KAMERS

Met behulp van branch-and-bound kan er dus een optimale verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}_{opt}$ gevonden worden, waar gegeven de beschikbare werknemers en hun kwalificaties aan kan worden voldaan. De oplossing f_{opt} voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}_{opt}$) correspondeert met een optimale gedeeltelijke werkplekplanning, in die zin dat deze oplossing aangeeft dat werknemer w in het interval T in het kader van een bezettingseis e voor de duur van $f_{opt}((w, T) \rightarrow (e, T))$ tijdseenheden aan de werkplek $s(e)$ moet worden toegewezen. Wanneer er geldt dat $0 < f_{opt}((w, T) \rightarrow (e, T)) < l(T)$ is het echter nog niet bekend welke tijdseenheden binnen het interval dat precies zijn. Hiervoor zal, zoals reeds is aangegeven het bewijs van stelling 5.2(i), voor een aantal intervallen $T \in \boldsymbol{T}$ een extra minimum-cost-maximum-flow-probleem moeten worden opgelost.

Beschouw een interval T waarvoor geldt dat in de oplossing f_{opt} voor MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}_{opt}$) $0 < f_{opt}((w,T) \rightarrow (e,T)) < l(T)$ voor tenminste één paar (w, e) met $w \in \boldsymbol{W}$ en $e \in \boldsymbol{E}_{opt}$.

Voor het interval T is bekend hoeveel tijdseenheden er binnen dit interval T aan elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}_{opt}$ besteed moeten worden. Laat $\beta(e,T)$ de hoeveelheid tijdseenheden zijn die in het interval $T \in \boldsymbol{T}$ aan een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}_{opt}$ besteed moet worden, dus $\beta(e,T) = f_{opt}((e,T) \rightarrow e)$.

Laat $l(\tau)$ gedefinieerd zijn als de grootste gemeenschappelijk deler van alle $\beta(e,T) \neq 0$, voor $e \in \boldsymbol{E}$, en $l(T)$. Deel het interval T op in een verzameling van $n = (l(T) \,/\, l(\tau)\,)$ niet-overlappende intervallen van lengte $l(\tau)$ en laat deze verzameling intervallen gegeven zijn door $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$.

Construeer nu het netwerk $G_\tau(E_{opt}, T)$ met een verzameling knopen $V_\tau(E_{opt}, T)$ bestaande uit:

- s
- (w, τ) voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ en voor $w \in \boldsymbol{W}$ waarvoor $(w, T) \in V(\boldsymbol{E}, T)$;
- (e, τ) voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ en voor $e \in \boldsymbol{E}_{opt}$ waarvoor $(e, T) \in V(\boldsymbol{E}, T)$;
- e met $(e, \tau) \in V_\tau(\boldsymbol{E}, T)$;
- t

Laat de verzameling pijlen $A_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$ in $G_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$ bestaan uit:

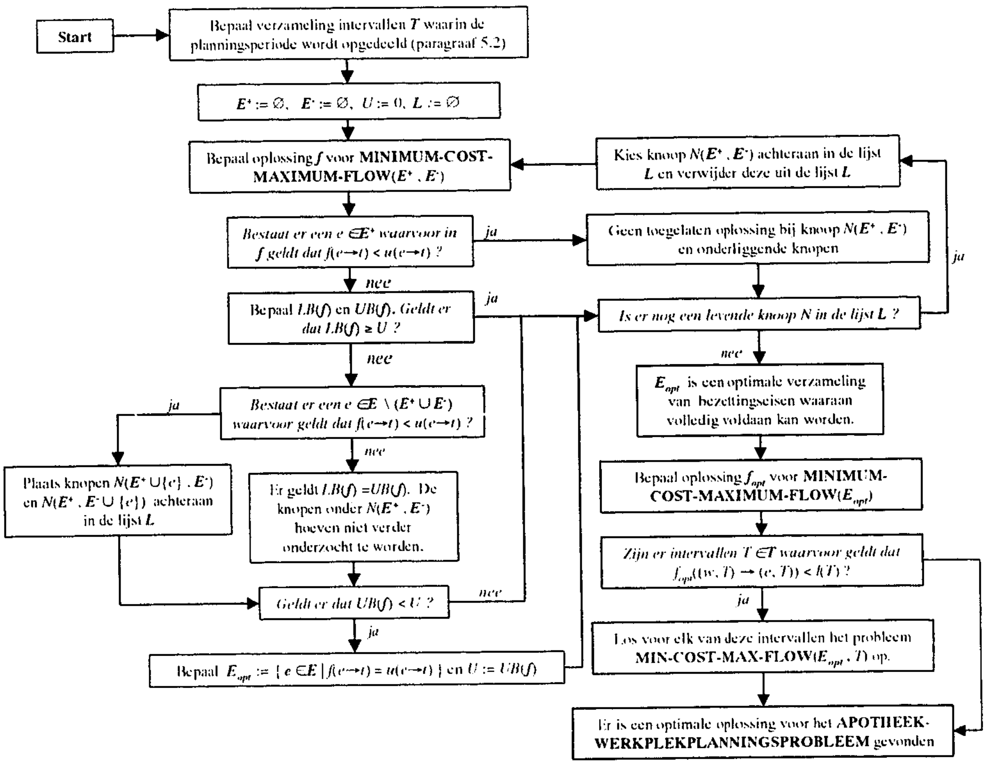
- $s \rightarrow (w, \tau)$ voor alle knopen $(w, \tau) \in V_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$, capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, \tau) \rightarrow (e, \tau)$ voor alle knopen $(w, \tau) \in V_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$ en $(e, \tau) \in V_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$, waarvoor geldt dat $((w, T) \rightarrow (e, T)) \in A(\boldsymbol{E})$ capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(e, \tau) \rightarrow e$ voor alle knopen $(e, \tau) \in V_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$, capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $e \rightarrow t$ voor knopen $e \in V_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$, capaciteit $u = \beta(e,T)$ en kosten $c = -q(e) / d_{benodigd}(e)$.

Het minimum-cost-maximum-flow-probleem op het netwerk $G_\tau(\boldsymbol{E}_{opt}, T)$ zal in het vervolg worden aangeduid met MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}_{opt}, T$). Een werkplekplanning voor het interval T kan nu bepaald worden door met behulp van het successive shortest path algorithm een oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}_{opt}, T$) te bepalen en een werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ voor het interval $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ in het kader van een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}_{opt}$ aan een werkplek $s(e)$ toe te wijzen wanneer er geldt dat $f((w, \tau) \rightarrow (e, \tau)) = l(\tau)$.

Een oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM kan dus op de volgende manier uit een oplossing f_{opt} voor MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}_{opt}$) worden afgeleid:
Loop de intervallen $T \in \boldsymbol{T}$ na en doe voor elk tijdsinterval T het volgende: ga na of voor elk paar (w, e) met $(w, T) \rightarrow (e, T) \in A(\boldsymbol{E})$ geldt dat $f_{opt}((w,T) \rightarrow (e,T)) = 0$ of $f_{opt}((w,T) \rightarrow (e,T)) = l(T)$.

- Wanneer dit het geval is kan een werknemer w met $(w, T) \in V(\boldsymbol{E})$ voor de volledige duur van het interval T aan een werkplek $s(e)$ met $(e, T) \in V(\boldsymbol{E})$ worden toegewezen wanneer geldt dat $f_{opt}((w,T) \rightarrow (e,T)) = l(T)$. In dat geval zal een werkplektoewijzing z met $w(z) = w$, $s(z) = s(e)$, $e(z) = e$, $t_{begin}(z) = t_{begin}(T)$ en $t_{eind}(z) = t_{eind}(T)$ aan de verzameling $\boldsymbol{Z}$ worden toegevoegd.
  Wanneer er voor een bepaalde werknemer w met $(w, T) \in V(\boldsymbol{E})$ geen knoop $(e, T) \in V(\boldsymbol{E})$ bestaat waarvoor geldt dat $f_{opt}((w,T) \rightarrow (e,T)) = l(T)$ zal de werknemer w het interval T niet aan een werkplek worden toegewezen.
- Wanneer er tenminste één paar met $(w, T) \rightarrow (e, T) \in A(\boldsymbol{E})$ geldt dat $0 < f_{opt}((w,T) \rightarrow (e,T)) < l(T)$ zal voor het interval T het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}_{opt}, T$) moeten worden opgelost. Laat f_τ een oplossing zijn voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}_{opt}, T$) zijn. Door nu elke werknemer w met $(w, T) \in V(\boldsymbol{E})$ voor de volledige duur van een interval τ aan een werkplek $s(e)$ met $(e, T) \in V(\boldsymbol{E})$ toe te wijzen wanneer geldt dat $f_\tau((w,\tau) \rightarrow (e,\tau)) = l(\tau)$ wordt een toewijzing van de werknemers aan de werkplekken binnen het interval T verkregen. Voor elke combinatie van $w \in \boldsymbol{W}$, $e \in \boldsymbol{E}$ en $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ waarvoor geldt dat $f_\tau((w,\tau) \rightarrow (e,\tau)) = l(\tau)$ wordt een werkplektoewijzing z met $w(z) = w$, $s(z) = s(e)$, $e(z) = e$, $t_{begin}(z) = t_{begin}(\tau)$ en $t_{eind}(z) = t_{begin}(\tau)$ moet nu aan de verzameling $\boldsymbol{Z}$ worden toegevoegd

Een overzicht van het totale algoritme is hieronder in de vorm van een flowchart weergegeven:



Figuur 15: algoritme waarmee een optimale oplossing voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bepaald kan worden

6. MODELLERING VAN PROBLEEM VOOR AFDELINGEN MET KAMERS

Beschouw het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM zoals gedefinieerd in hoofdstuk 2. Het in hoofdstuk 5 beschreven algoritme voor is niet geschikt voor het vinden van een optimale oplossing voor dit probleem. Dit komt doordat op nog geen enkele manier geëist kan worden dat de werkplekken binnen een kamer gelijktijdig bezet worden. Enkele aanpassingen zullen dus noodzakelijk zijn. In dit hoofdstuk zal het algoritme voor het oplossen van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM op enkele punten worden aangepast zodat er ook rekening gehouden worden met de eis dat de werkplekken binnen dezelfde kamer gelijktijdig bezet zullen zijn. In de oplossing zal een werkplek binnen een kamer in de oplossing van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM pas bezet worden wanneer alle vereiste werkplekken binnen de kamer in de oplossing bezet zijn.
In paragraaf 6.1. zal het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$) gedefinieerd worden en vervolgens wordt in paragraaf 6.2 toegelicht hoe een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$) geïntepreteerd kan worden in termen van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. In paragraaf 6.3 wordt aangegeven hoe een optimale verzameling van bezettingseisen, waar gegeven de beschikbaarheid van de werknemers volledig aan kan worden voldaan, bepaald kan worden. In paragraaf 6.3.1. wordt dit aangegeven voor de situatie waarin alle bezettingseisen voor kamers strict zijn en in paragraaf 6.3.2. komt het de situatie waarin er sprake is van enkele niet-stricte bezettingseisen voor kamers aan bod. Tenslotte zal in paragraaf 6.4 een overzicht van het algoritme gegeven worden.

6.1 DEFINITIE VAN HET PROBLEEM MIN-COST-MAX-FLOW$_R$(E) VOOR AFDELINGEN MET KAMERS

Allereerst zal de planningsperiode weer worden opgedeeld in een verzameling van intervallen $\boldsymbol{T}$. Dit kan net als bij het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM gebeuren op de manier die beschreven is in paragraaf 5.2. Daarna kan voor een verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E}$ als volgt een netwerk $\boldsymbol{G_R(E)} = (\boldsymbol{V_R(E)}, \boldsymbol{A_R(E)})$ geconstrueerd worden.

Laat de verzameling van knopen $\boldsymbol{V_R(E)}$ in het netwerk $\boldsymbol{G_R(E)}$ bestaan uit:

- s
- (w, T) voor alle paren (w, T) met $w \in \boldsymbol{W}$ en $T \in \boldsymbol{T}$, waarvoor geldt dat de werknemer w beschikbaar is gedurende het interval T;
- (e^S, T) voor alle paren (e^S, T) met $T \in \boldsymbol{T}$ en $e^S \in \boldsymbol{E^S}$, waarvoor geldt dat het interval T ligt tussen tijdstippen $t_{begin}(e^S)$ en $t_{eind}(e^S)$;
- (e^R, s, T) voor alle paren (e^R, T) met $T \in \boldsymbol{T}$ en $e^R \in \boldsymbol{E^R}$, waarvoor geldt dat het interval T ligt tussen tijdstippen $t_{begin}(e^R)$ en $t_{eind}(e^R)$, voor alle $s \in S^*(r(e^R))$;
- (e^R, s) voor alle paren (e^R, s) met $e^R \in \boldsymbol{E^R}$ en $s \in S^*(r(e^R))$;
- e^R voor alle $e^R \in \boldsymbol{E^R}$;
- e^S voor alle $e^S \in \boldsymbol{E^S}$;
- t

Laat de verzameling van pijlen $\boldsymbol{A_R(E)}$ in het netwerk $\boldsymbol{G_R(E)}$ bestaan uit:

- $s \rightarrow (w, T)$ voor alle knopen $(w, T) \in \boldsymbol{V_R(E)}$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, T) \rightarrow (e^S, T)$ voor alle knopen $(w, T) \in \boldsymbol{V_R(E)}$ en alle $(e^S, T) \in \boldsymbol{V_R(E)}$ wanneer werknemer w de kwalificaties heeft voor werkplek $s(e^S)$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, T) \rightarrow (e^R, s, T)$ voor alle knopen $(w, T) \in \boldsymbol{V_R(E)}$ en $(e^R, s, T) \in \boldsymbol{V_R(E)}$, waarvoor geldt dat werknemer w de kwalificaties heeft voor werkplek s,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(e^S, T) \rightarrow e^S$ voor alle knopen $(e^S, T) \in \boldsymbol{V_R(E)}$ en $e^S \in \boldsymbol{V_R(E)}$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(e^R, s, T) \rightarrow (e^R, s)$ voor alle knopen $(e^R, s, T) \in \boldsymbol{V_R(E)}$ en $(e^R, s) \in \boldsymbol{V_R(E)}$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;

- $(e^R, s) \rightarrow e^R$ voor alle knopen $(e^R, s) \in V_R(E)$ en $e^R \in V_R(E)$,
  capaciteit $u = d_{benodigd}(e^R)$ en kosten $c = 0$;
- $e^S \rightarrow t$ voor alle $e^S \in V_R(E)$,
  capaciteit $u = d_{benodigd}(e^S)$ en kosten $c = -q(e^S) / d_{benodigd}(e^S)$;
- $e^R \rightarrow t$ voor alle $e^R \in V_R(E)$,
  capaciteit $u = |S^*(r(e^R))| \cdot d_{benodigd}(e^R)$ en
  kosten $c = -q(e^R) / d_{benodigd}(e^R)$.

Het minimum-cost-maximum-flow-probleem op het netwerk $G_R(E)$ zal in het vervolg worden aangeduid met MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$. Voor de situatie met $E^R = \phi$ geldt dat het netwerk $G_R(E)$ gelijk is aan het netwerk $G(E)$ als in paragraaf 5.3.

In het netwerk $G_R(E)$ zijn de werkplekken uit $S(r) \setminus S^*(r)$ voor $r \in R$ niet opgenomen. Het bezetten van deze werkplekken heeft namelijk geen (gunstige) invloed op het optimaliteitscriterium. Om deze reden is ervoor gekozen om eerst een werkplekplanning te bepalen voor de afzonderlijk werkplekken en de werkplekken die voor de opening van een kamer vereist zijn. Na het bepalen van deze werkplekplanning is bekend wanneer er eventueel nog werknemers beschikbaar zijn en welke van de werkplekken uit $S(r) \setminus S^*(r)$ voor $r \in R$ wanneer bezet mogen worden. Een werkplek in een kamer mag immers pas bezet worden op momenten dat alle voor opening vereiste werkplekken bezet zijn.

6.2 INTERPRETATIE VAN EEN OPLOSSING VAN HET PROBLEEM MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$

In het netwerk $G_R(E)$ zijn twee typen paden van s naar t te onderscheiden:
- Paden die een werknemer w toewijzen aan een werkplek $s(e^S)$ in het kader van een bezettingseis $e^S \in E^S$. Dit zijn de paden van de vorm: $s \rightarrow (w, T) \rightarrow (e^S, T) \rightarrow e^S \rightarrow t$
- Paden die een werknemer w toewijzen aan een werkplek s in het kader van bezettingseis $e^R \in E^R$. Dit zijn de paden van de vorm: $s \rightarrow (w, T) \rightarrow (e^R, s, T) \rightarrow (e^R, s) \rightarrow e^R \rightarrow t$

Een flow in het netwerk $G_R(E)$ correspondeert dus op een vergelijkbare manier met een toewijzing van de werknemers aan de werkplekken als een flow in het netwerk $G(E)$. Verder kan bij een gegeven werkplekplanning eenvoudig een bijbehorende flow in $G_R(E)$ bepaald worden.

Ook in dit geval zal het oplossen van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$ niet voldoende zijn voor het oplossen van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. Redenen hiervoor zijn al gegeven in paragraaf 5.4, namelijk:

1) Een eerste reden is het verschil in optimaliteitscriterium tussen het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$ en het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. Het verschil wordt veroorzaakt doordat het slechts gedeeltelijk voldoen aan een bezettingseis in een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$ wel beloond wordt, terwijl in het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM alleen het volledig voldoen aan een bezettingseis beloond wordt. Aangezien er bij het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM ook sprake is van een eis van gelijktijdige bezetting van de werkplekken $S^*(r)$ voor elke kamer $r \in R$ kan onder het niet volledig voldoen aan een bezettingseis nu ook het bezetten van slechts een deel van de werkplekken uit $S^*(r)$ worden verstaan. Ook het op deze manier niet volledig voldoen aan een bezettingseis zal in een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$ beloond worden.
2) Een tweede reden is dat een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$ niet direct correspondeert met een oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM.

6.3 HET BEPALEN VAN EEN OPTIMALE VERZAMELING BEZETTINGSEISEN WAARAAN VOLLEDIG VOLDAAN KAN WORDEN

In deze paragraaf zal worden toegelicht hoe het algemene WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM kan worden opgelost. Een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ zal *strict* worden genoemd wanneer er geldt dat $d_{benodigd}(e) = t_{eind}(e) - t_{begin}(e)$. Er zal onderscheid gemaakt worden tussen een situatie waarin slechts sprake is van stricte bezettingseisen voor de kamers (paragraaf 6.3.1) en de situatie waarin er ook niet-stricte bezettingseisen voor kamers zijn (paragraaf 6.3.2. en verder). Wanneer in het probleem slechts sprake is van stricte bezettingseisen voor de kamers kan het probleem met behulp van het algoritme in hoofdstuk 5 worden opgelost. Hierin moet het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) dan vervangen worden door het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$). In de situatie met niet-stricte bezettingseisen voor enkele kamers zullen enkele extra stappen nodig zijn. Er zal worden aangenomen dat de bezetting van een kamer altijd aaneengesloten zal moeten zijn. Dat wil zeggen dat een kamer een aaneengesloten interval met lengte $d_{benodigd}(e^R)$ tijdseenheden geopend zal moeten zijn en dat gedurende dit interval alle voor opening van de kamer vereiste werkplekken dan continu bezet zullen moeten worden.

6.3.1 DE SITUATIE WAARIN ALLE BEZETTINGSEISEN VOOR KAMERS STRICT ZIJN

Voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM waar voor elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^R$ geldt dat deze strict is, kan het algoritme voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM gebruikt worden. Het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) moet dan vervangen worden door het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$). De rol van de pijlen $(e \rightarrow t) \in A(\boldsymbol{E})$ zal worden overgenomen door de pijlen $(e^S \rightarrow t) \in \boldsymbol{A}_R(\boldsymbol{E})$ en $(e^R \rightarrow t) \in \boldsymbol{A}_R(\boldsymbol{E})$.

Voor elke bezettingseis $e^S \in \boldsymbol{E}^S$ geldt dat er in een oplossing f van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$) volledig aan deze bezettingseis wordt voldaan dan en slechts dan als $f(e^S \rightarrow t) = u(e^S \rightarrow t)$. De paden van s naar t in het netwerk $\boldsymbol{G}_R(\boldsymbol{E})$ die corresponderen met het toewijzen van een werknemer aan werkplek in het kader van een bezettingseis $e^S \in \boldsymbol{E}^S$ zijn immers dezelfde als die in het netwerk $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{E})$.
Voor elke bezettingseis $e^R \in \boldsymbol{E}^R$ geldt er in een oplossing f van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$) volledig aan deze bezettingseis wordt voldaan dan en slechts dan als $f(e^R \rightarrow t) = u(e^R \rightarrow t)$. In dat geval geldt er namelijk dat er door de pijl $(e^R \rightarrow t)$ in de oplossing f een stroom $f(e^R \rightarrow t)$ loopt die gelijk is aan de capaciteit $u(e^R \rightarrow t) = |\, S^*(r(e^R))| \cdot d_{benodigd}(e^R)$ en zal er derhalve voor elke pijl $(e^R, s) \rightarrow e^R \in \boldsymbol{A}_R(\boldsymbol{E})$ moeten gelden dat $f((e^R, s) \rightarrow e^R) = u((e^R, s) \rightarrow e^R) = d_{benodigd}(e^R)$. Aangezien de bezettingseis e^R strict is, zal er wanneer $u(e^R \rightarrow t) = |\, S^*(r(e^R))| \cdot d_{benodigd}(e^R)$, gelden dat alle voor de opening van de kamer vereiste werkplekken in de oplossing tussen $t_{begin}(e^R)$ en $t_{eind}(e^R)$ bezet zijn en dus de kamer geopend is. (De tijdstippen $t_{begin}(e^R)$ en $t_{eind}(e^R)$ zijn beide begin- en/of eindtijden van intervallen in $\boldsymbol{T}$) . Wanneer voor een bezettingseis $e^R \in \boldsymbol{E}$ echter geldt dat er door de pijl $(e^R \rightarrow t)$ in een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$) een stroom loopt die kleiner is dan de capaciteit van de pijl d.w.z. $f(e^R \rightarrow t) < u(e^R \rightarrow t)$ zal tenminste één van de voor opening van de kamer $r(e^R)$ vereiste werkplekken onvoldoende lang bezet worden.

Uit het voorgaande blijkt dat wanneer door in het algoritme voor het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM de onderstaande wijzingen aan te brengen een algoritme verkregen wordt wat geschikt is voor het oplossen van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM in de gevallen waarin alle bezettingseisen voor kamers strict zijn.

- $f(e \rightarrow t)$ moet worden gedefinieerd als $f(e \rightarrow t) = f(e^R \rightarrow t)$ wanneer $e \in \boldsymbol{E}^R$ en $f(e \rightarrow t) = f(e^S \rightarrow t)$ wanneer $e \in \boldsymbol{E}^S$. Het probleem MIN-COST-MAX-FLOW($\boldsymbol{E}$) moet vervangen worden door het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$($\boldsymbol{E}$).

- Het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) moet vervangen worden door het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$(E^+ , E^-), dat gedefineerd is als zijnde het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$(E) waarbij de capaciteit van de pijlen ($e \rightarrow t$) voor $e \in E^-$ is vervangen door $u(e \rightarrow t) = 0$, de kosten aan de pijlen ($e \rightarrow t$) voor $e \in E^-$ zijn vervangen door $c(e \rightarrow t) = 0$ en de kosten aan de pijlen ($e \rightarrow t$) voor $e \in E^+$ zijn vervangen door $c(e \rightarrow t) = -M$. Waarbij M voldoende groot is om ervoor te zorgen dat er, wanneer dit mogelijk is, altijd $f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)$ voor alle $e \in E^+$ voldaan wordt.

  Een geschikte keuze voor M is $M := \sum_{e \in E} \gamma(e) + 1$. Het bewijs hiervoor is equivalent aan het bewijs van stelling 5.6 met $q(e)$ vervangen door $\gamma(e)$ en het probleem MIN-COST-MAX-FLOW(E^+ , E^-) vervangen door het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$(E^+ , E^-).

Ook in dit geval kan er bij een gegeven flow f eenvoudig een gedeeltelijke werkplekplanning bepaald worden.

STELLING 6.1
Wanneer de verzameling $\boldsymbol{T}$ de in paragraaf 5.2 genoemde eigenschappen bezit, geldt voor elke flow f in het netwerk $G_R(E)$ dat er uit deze flow f eenvoudig een hiermee corresponderende gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ af te leiden is.

BEWIJS
Voor een gegeven flow f in het netwerk $G_R(E)$ kan een corresponderende gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ als volgt gevonden worden. Begin met een lege verzameling $\boldsymbol{M}$. Door voor elk paar van knopen $(w, T) \in V(E)$ en $(e, T) \in V(E)$, waarvoor in de oplossing f geldt dat $f((w, T) \rightarrow (e, T)) > 0$, een gedeeltelijke werkplektoewijzing m aan de verzameling $\boldsymbol{M}$ toe te voegen met $w(m) = w$, $T(m) = T$, $e(m) = e$, $s(m) = s(e)$ en $d(m) = f((w, T) \rightarrow (e, T))$ en voor elk paar knopen $(e, s, T) \in V(E)$ en $(e, s) \in V(E)$, waarvoor in de oplossing f geldt dat $f((e, s, T) \rightarrow (e, s)) > 0$ een gedeeltelijke werkplektoewijzing m aan de verzameling $\boldsymbol{M}$ toe met $w(m) = w$, $T(m) = T$, $e(m) = e$, $s(m) = s$ en $d(m) = f((e, s, T) \rightarrow (e, s))$ wordt een gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ verkregen, die met de flow f correspondeert.

Wanneer voor een gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ geldt dat $\sum_{m \in M : e(m) = e \wedge s(m) \in S^*(r(e))} d(m) \in \{0, |S^*(r(e))| \cdot d_{benodigd}(e)\}$ en bovendien alle bezettingseisen strict zijn geldt dat er in pseudopolynomiale tijd een corresponderende toegelaten werkplekplanning bepaald kan worden.

STELLING 6.2
Gegeven een gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ met $\sum_{m \in M : e(m) = e \wedge s(m) \in S^*(r(e))} d(m) \in \{0, |S^*(r(e))| \cdot d_{benodigd}(e)\}$ voor alle $e \in E^R$. Wanneer alle bezettingseisen voor kamers $e \in E^R$ strict zijn geldt er dat:

(i) Er bestaat een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ waarin elke werkplek $s \in S$ in het interval $T \in \boldsymbol{T}$ precies $\sum_{m \in M : e(m) = e \wedge s(m) = s \wedge T(m) = T} d(m)$ tijdseenheden in het kader van de bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ bezet wordt.

(ii) Deze werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ kan voor gegeven $\boldsymbol{M}$ in pseudopolynomiale tijd bepaald worden.

BEWIJS
(i) Deze stelling kan bewezen worden met behulp van stelling 5.2(i). De gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M}$ geeft aan dat elke werkplek $s \in S$ in het interval $T \in \boldsymbol{T}$ precies $\sum_{m \in M : e(m) = e \wedge s(m) = s \wedge T(m) = T} d(m)$ tijdseenheden in het kader van de bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ bezet moet worden. Bij stelling 5.2(i) werd de voorwaarde $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^S$, dat wil zeggen $s = e(s)$ voor alle $e \in \boldsymbol{E}$,

gesteld. Wanneer niet aan deze voorwaarde voldaan is, kan een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}$ betrekking hebben op meerdere werkplekken, namelijk alle vereiste werkplekken binnen een bepaalde kamer.

Er kan een met $\boldsymbol{M}$ equivalente gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M'}$ geconstrueerd worden waarvoor wel aan de voorwaarde is voldaan.

Creëer hiertoe voor elke combinatie van een bezettingeis $e \in \boldsymbol{E}$ en een werkplek $s \in \boldsymbol{S}$ met $\sum_{m \in M: e(m)=e \wedge s(m)=s} d(m) > 0$ een nieuwe bezettingseis e' met $t_{begin}(e') = t_{begin}(e)$, $t_{eind}(e') = t_{eind}(e)$, $d_{benodigd}(e') = d_{benodigd}(e)$, $s(e') = s$, $q(e')=q(e)$ en $\eta(e') = e$. De variabele $\eta(e')$ geeft voor alle $e' \in \boldsymbol{E'}$ de bezettingseis uit $\boldsymbol{E}$ aan waarvan de bezettingseis e' is afgeleid. Door elk van de zojuist gecreëerde bezettingseisen op te nemen in een verzameling $\boldsymbol{E'}$ wordt een verzameling met bezettingseisen voor afzonderlijke werkplekken verkregen.

Creëer vervolgens voor elke combinatie van een bezettingseis $e' \in \boldsymbol{E}$, een werkplek $s \in \boldsymbol{S}$ en een interval $T \in \boldsymbol{T}$ waarvoor $\sum_{m \in M: e(m)=\eta(e') \wedge s(m)=s \wedge T(m)=T} d(m) > 0$ een gedeeltelijke werkplektoewijzing m' met $w(m') = w(m)$, $T(m') = T$, $e(m') = e'$ en $s(m') = s$. Door elk van de zojuist gecreëerde gedeeltelijke werkplektoewijzing op te nemen in een verzameling $\boldsymbol{M'}$ wordt een gedeeltelijke werkplektoewijzingen bij $\boldsymbol{E'}$ verkregen die equivalent is aan $\boldsymbol{M}$.

Door nu stelling 5.2(i) toe te passen op de gedeeltelijke werkplekplanning $\boldsymbol{M'}$ en de verzameling bezettingseisen $\boldsymbol{E'}$, volgt dat er een werkplekplanning $\boldsymbol{Z'}$ bestaat waarvoor geldt dat er aan elke bezettingseis $e' \in \boldsymbol{E'}$ in een interval $T \in \boldsymbol{T}$ precies $\sum_{m \in M: e'(m)=e' \wedge T(m)=T} d(m)$ tijdseenheden besteed worden.

Uit de werkplekplanning $\boldsymbol{Z'}$ kan een werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ worden afgeleid door voor elke $z' \in \boldsymbol{Z'}$ een werkplektoewijzing z te creëren met $w(z) = w(z')$, $T(z) = T(z')$, $d(z) = d(z')$, $s(z) = s(z')$ en $e(z) = \eta(e(z'))$ en deze op te nemen in de verzameling $\boldsymbol{Z}$.

Voor de werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ geldt dat deze toegelaten is. Uit het bewijs van stelling 5.2(i) volgt namelijk dat elke werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ elk moment maar aan hoogstens één bezettingseis $e' \in \boldsymbol{E'}$ is toegewezen en dat bovendien aan elke bezettingseis $e' \in \boldsymbol{E'}$ elk moment hoogstens een werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ is toegewezen. Een derde eis die aan een toegelaten werkplekplanning gesteld wordt (zie paragraaf 2.2.1) is dat een werkplek binnen een kamer slechts bezet wordt op momenten dat alle vereiste werkplekken binnen de kamer bezet zijn. Wanneer alle bezettingseisen in $\boldsymbol{E}^R$ strict zijn is voor elke $e \in \boldsymbol{E}^R$ met $\sum_{m \in M: e(m)=e \wedge s(m) \in S^*(r(e))} d(m) \in \{0, |\boldsymbol{S}^*(r(e))| \cdot d_{benodigd}(e)\}$ automatisch daaraan voldaan.

(ii) Het bepalen van de toegelaten werkplekplanning met behulp van de in (i) beschreven procedure kan worden opgedeeld in de volgende stappen:

1 Het creëren van de verzameling $\boldsymbol{M'}$. Laat $\hat{S} := \max_{r \in R} S^*(r)$. Het creeren van de verzameling $\boldsymbol{M'}$ kost dan $O(|\boldsymbol{E}| \cdot \hat{S} \cdot |\boldsymbol{M}|)$ en in termen van de inputparameters $O(|\boldsymbol{W}| \cdot |\boldsymbol{E}|^2 \cdot \hat{S}^2 \cdot p)$ operaties.

2. Het creëren van de verzameling $\boldsymbol{E'}$. Dit kost $O(|\boldsymbol{E}| \cdot \hat{S} \cdot |\boldsymbol{T}| \cdot |\boldsymbol{M}|)$ en in termen van de inputparameters $O(|\boldsymbol{W}| \cdot |\boldsymbol{E}|^2 \cdot \hat{S}^2 \cdot p^2)$ operaties.

3. Het bepalen van werkplekplanning $\boldsymbol{Z'}$ bij $\boldsymbol{M'}$ en $\boldsymbol{E'}$ zoals beschreven in bewijs van stelling 5.2(i). Met behulp van

$$|E'| \le |E'| \cdot \max_{r \in R} \left|S^*(r)\right| \le |E| \cdot \hat{S},$$

$$\sum_{m \in M' : T(m') = T} d(m') = \sum_{m \in M : T(m) = T} d(m) \text{ en}$$

volgt dat dit

$$O\left(p \cdot |E| \cdot \hat{S} \cdot \left\lceil {}^{10}\log(p) \right\rceil + \phi(|W|, |E|, p, \hat{S}) \cdot \sum_{e \in E} d_{benodigd}(e) \right) \tag{6.1}$$

operaties kost.

In (6.1) wordt $\phi(|W|, |E|, p, \hat{S})$ gegeven door:

$$\phi(|W|, |E|, p, \hat{S}) := \left(|W| \cdot p + |E| \cdot \hat{S} \cdot p + |E| \cdot \hat{S} + 2\right) \cdot \left(|W| \cdot p + |W| \cdot |E| \cdot \hat{S} + |E| \cdot \hat{S} \cdot p + |E| \cdot \hat{S}\right)$$

4. Het bepalen van $\boldsymbol{Z'}$ uit $\boldsymbol{Z}$. Dit kost $|\boldsymbol{Z'}|$ operaties en omdat er geldt dat $|Z'| \le |M| \cdot \max_{T \in T}(l(T))$ kost dit $O\left(|M| \cdot \max_{T \in T}(l(T))\right)$ en in termen van de inputparamters $O(|E| \cdot p)$ operaties.

Alle vier de stappen hebben dus een looptijd die pseudopolynomiaal is. Dus kan er voor een gegeven verzameling $\boldsymbol{M}$ in polynomiale tijd een toegelaten werkplekplanning $\boldsymbol{Z}$ gevonden worden

6.3.2 DE SITUATIE MET NIET-STRICTE BEZETTINGSEISEN VOOR ENKELE KAMERS

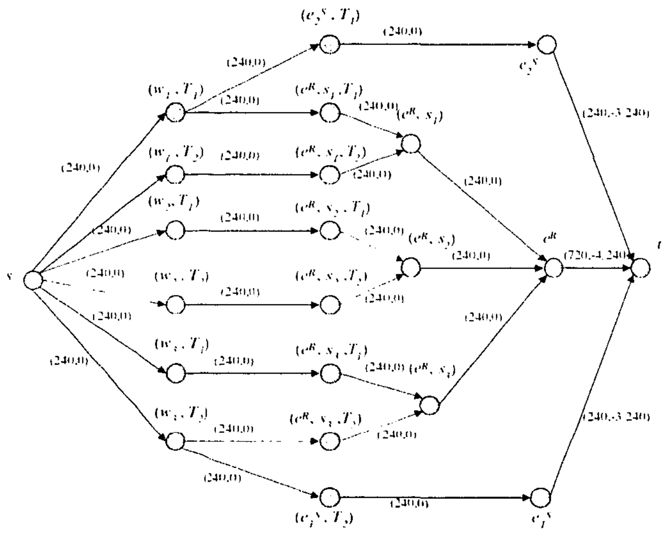
Wanneer er tenminste één niet-stricte bezettingseis is gedefinieerd zal het algoritme voor het oplossen van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM niet meer volstaan voor het vinden van oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM.

Wanneer er voor een bezettingseis $e^R \in \boldsymbol{E^R}$ in de oplossing van MIN-COST-MAX-FLOW$_R(\boldsymbol{E})$ geldt dat $f(e^R \to t) = u(e^R \to t)$, worden alle werkplekken $s \in \boldsymbol{S}^*(r(e^R))$ voldoende lang bezet. Het kan immers zo zijn dat voor $e^R \in \boldsymbol{E^R}$ geldt dat $f(e^R \to t) = u(e^R \to t)$ maar $f((e^R, s_1, T) \to (e^R, s_1)) \neq f((e^R, s_2, T) \to (e^R, s_2))$ voor een bepaalde $T \in \boldsymbol{T}$ en $s_1, s_2 \in \boldsymbol{S}^*(r(e^R))$. In de met deze stroom corresponderende gedeeltelijke werkplekplanning zou de werkplek s_1 in het interval T gedurende $f((e^R, s_1, T) \to (e^R, s_1))$ tijdseenheden bezet zijn, en de werkplek s_2 gedurende $f((e^R, s_2, T) \to (e^R, s_2))$ tijdseenheden. Een corresponderende toegelaten werkplekplanning bestaat er niet omdat voor een toegelaten werkplekplanning moet gelden dat wanneer er op een bepaald moment tenminste één werkplek in de kamer $r(e^R)$ bezet wordt, dat dan alle vereiste werkplekken binnen deze kamer bezet moeten zijn. Dit is niet mogelijk wanneer $f((e^R, s_1, T) \to (e^R, s_1)) \neq f((e^R, s_2, T) \to (e^R, s_2))$. Dit wordt geillustreerd in het volgende voorbeeld.

VOORBEELD 6.1.

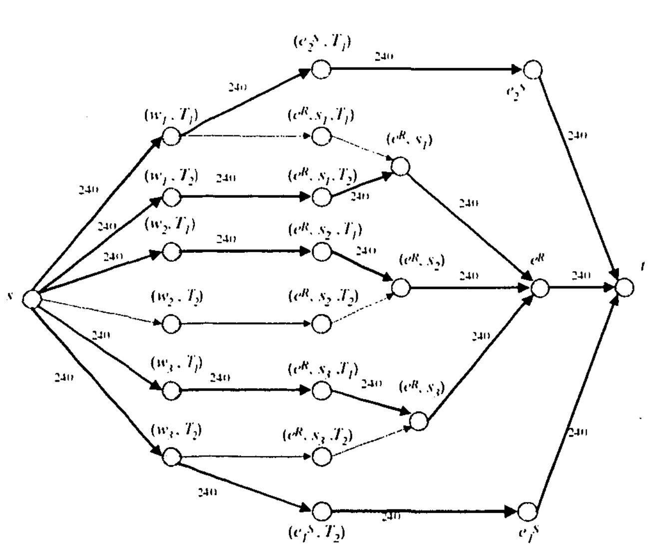
Op een afdeling hebben op een dag drie werknemers $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ dienst. Alle werknemers hebben op die dag een dienst van 7:30 tot 16:00. Tussen 11:30 en 12:00 hebben zij gezamenlijk pauze. Op de afdeling is er een kamer r die bestaat uit drie werkplekken $S(r) = \{s_1, s_2, s_3\}$ waarvoor geldt dat alle drie de werkplekken vereist zijn voor de opening van de kamer. Voor deze kamer bestaat een bezettingseis e^R die zegt dat de kamer de bewuste dag tussen 7:30 en 16:00 voor de duur van 4 uur geopend moet zijn. Verder geldt er op die dag nog een bezettingseis e_1^S voor een werkplek s_4 die zegt dat deze werkplek tussen 12:00 en 16:00 voor de duur van 4 uur geopend moet zijn en een bezettingseis e_2^S voor een werkplek s_5 die zegt dat deze werkplek tussen 7:30 en 11:30 voor de duur van 4 uur geopend moet zijn . Voor elke werknemer w_i geldt dat deze als enige gekwalificeerd is voor werkplek s_i, $i \in \{1,2,3\}$. Verder is werknemer w_3 als enige gekwalificeerd voor werkplek s_4 en is werknemer w_1 als enige gekwalificeerd voor werkplek s_5.

Het netwerk $G_R(E)$ voor dit probleem is weergegeven in figuur 16.



Figuur 16: netwerk $G_R(E)$ bij probleem in voorbeeld 6.1.

Een optimale oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E)$ is weergegeven in figuur 17.



Figuur 17: optimale flow in het netwerk $G_R(E)$

Voor de oplossing in figuur 17 van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$(E) geldt dat $f(e^R \rightarrow t) = u(e^R \rightarrow t)$. Doordat werkplek s_2 en s_3 tussen 12:00 en 16:00 uur bezet worden, maar werkplek s_1 tussen 7:30 en 11:30 uur bezet wordt wordt er echter niet aan de bezettingseis e^R voldaan.

Uit het voorbeeld kan worden afgeleid dat de bovengrens $UB(f)$ in de situatie met niet-stricte bezettingseisen voor kamers niet noodzakelijk correspondeert met de waarde van de doelfunctie voor een toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM. Wanneer $UB(f)$ bepaald wordt met behulp van (5.3) volgt dat $UB(f) = -3 - 3 \cdot 4 - 3 = -18$

.

Een oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM waarvoor geldt dat de doelfunctie de waarde -18 heeft bestaat er echter niet omdat hiervoor volledig aan alle bezettingseisen moeten worden voldaan. Dit is echter niet mogelijk omdat dat zou betekenen dat werknemer w_3 van 12:00 tot 16:00 uur aan werkplek s_4 wordt toegewezen en werknemer w_1 van 7:30 tot 11:30 uur aan werkplek s_5 wordt toegewezen (dit is namelijk de enige mogelijkheid om aan de bezettingseisen e_1^S en e_2^S te voldoen). Om aan de bezettingseis e^R volledig te voldoen moeten de werknemers gedurende 4 uur alle drie beschikbaar zijn, dit is echter niet meer het geval omdat werknemer w_1 alleen nog maar tussen 12:00 tot 16:00 uur beschikbaar is en werknemer w_3 alleen nog maar tussen 7:30 tot 11:30 uur.

6.3.2.1. BESTAAT ER EEN OPLOSSING VOOR HET WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM WAARVOOR DE DOELFUNCTIE WAARDE $UB(f)$ HEEFT ?

Laat voor een oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R$(E^+, E^-) de verzameling E_{MCMF} gedefinieerd zijn door $E_{MCMF} := \{ e \in E \mid f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t) \}$.

Voor de knopen $N(E^+, E^-)$ met $LB(f) = UB(f)$ zal er nog moeten worden nagegaan of er een toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bestaat waarbij volledig wordt voldaan aan alle bezettingeisen in E_{MCMF}. Wanneer dit het geval is, zal $UB(f)$ inderdaad een bovengrens voor de waarde van de doelfunctie bij het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM zijn. De knopen onder $N(E^+, E^-)$ hoeven dan niet meer onderzocht te worden. Wanneer er echter geen toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM blijkt te bestaan waarbij er volledig wordt voldaan aan alle bezettingeisen in E_{MCMF}, zal het nodig zijn de knopen onder $N(E^+, E^-)$ te onderzoeken.

Laat de verzameling E_{MCMF}^* gedefinieerd zijn door $E_{MCMF}^* := \{e \in E_{MCMF} \cap E^R \mid d_{benodigd}(e) < t_{eind}(e) - t_{begin}(e) \}$.

Wanneer geldt dat $E_{MCMF}^* = \emptyset$ zal er in de oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM aan geen enkele niet-stricte bezettingseis voldaan hoeven worden. In dat geval zal er altijd een oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bestaan waarvoor de doelfunctie de waarde de $UB(f)$ heeft. (Zie paragraaf 6.3.1. voor de situatie waarin alle bezettingseisen voor de kamers strict zijn)

Wanneer er geldt dat $E_{MCMF}^* \neq \phi$ zal er moeten worden nagegaan of er een toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bestaat waarbij volledig aan alle bezettingseisen in E_{MCMF} wordt voldaan. Hiervoor zal er moeten worden nagegaan of het mogelijk is om aan elke bezettingseis $e \in E_{MCMF}^*$ een enkele niet-overlappende tijdsintervallen, liggend tussen de tijdstippen $t_{begin}(e)$ en $t_{eind}(e)$ en met een totale lengte van $d_{benodigd}(e)$, te koppelen gedurende welke de kamer $r(e)$ geopend zal zijn. Om het aantal mogelijkheden waarop aan een niet-stricte bezettingseis voor een kamer voldaan kan worden te beperken, wordt aangenomen dat de bezetting van de kamer aaneengesloten moet zijn. In paragraaf 6.3.2.2. zal er worden toegelicht op welke manier een verzameling openingsintervallen bij een niet-stricte bezettingseis bepaald kan worden.

Laat $T^R(e)$ een verzameling van openingsintervallen bij de niet-stricte bezettingseis $e \in E_{MCMF}^*$ zijn en laat T^R een vector zijn die op elk moment aangeeft welk openingsinterval er voor de verschillende bezettingseisen $e \in E_{MCMF}^*$ is gekozen.

Door nu uit elke verzameling $\boldsymbol{T}^R(e)$ voor $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$ precies één interval $T^R(e)$ te kiezen wordt een verzameling van de bezettingseisen verkregen waarvoor geldt dat elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^R$ strict is. In dat geval is er aan de in stelling 6.2 gestelde voorwaarde voldaan. De begin- en eindtijden van de intervallen in $\boldsymbol{T}^R(e^R)$ hoeven niet overeen te komen met de begin- en eindtijden van intervallen in $\boldsymbol{T}$, hierdoor zal er over het algemeen niet aan de voorwaarde voor stelling 6.1 voldaan zijn.

Na het strict maken van de bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$ moet de verzameling intervallen $\boldsymbol{T}$ dus nog aangepast worden aan de nieuwe begin- en eindtijden bij de bezettingseisen in $\boldsymbol{E}_{MCMF}^*$, om zo aan de voorwaarde voor stelling 6.1 te voldoen.
Een nieuwe verzameling tijdsintervallen $\boldsymbol{T}'$ is als volgt te bepalen. Een verzameling $\boldsymbol{T}'$ kan samengesteld worden door alle verschillende tijdstippen $t_{begin}(e)$, $t_{eind}(e)$ voor alle bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \setminus \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$, $t_{begin}(\boldsymbol{T}^R(e))$, $t_{eind}(\boldsymbol{T}^R(e))$ voor alle bezettingseisen $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$ en tijdstippen j waarvoor geldt dat $(\delta_{j-1} \in \boldsymbol{B}(w, p) \wedge \delta_j \notin \boldsymbol{B}(w, p)) \vee (\delta_{j-1} \notin \boldsymbol{B}(w, p) \wedge \delta_j \in \boldsymbol{B}(w, p))$ voor tenminste één $w \in \boldsymbol{W}$ te rangschikken. Hierdoor wordt een lijst $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ van tijdstippen verkregen. Kies nu als elementen voor de verzameling $\boldsymbol{T}'$ de intervallen T_i (voor $1 \le i \le n$) als zijnde het interval tussen de tijdstippen t_{i-1} en t_i, wordt een verzameling van niet-overlappende intervallen gevonden, die voldoet aan alle hierboven genoemde eigenschappen.

Door nu bij deze nieuwe verzameling van tijdsintervallen $\boldsymbol{T}'$ een netwerk $G_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ te construeren zoals beschreven in paragraaf 6.1 (voor het netwerk $G_R(\boldsymbol{E})$), maar waarbij de $t_{begin}(e^R)$ en $t_{eind}(e^R)$, voor $e^R \in \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$ zijn vervangen door $t_{begin}(\boldsymbol{T}^R(e^R))$ respectievelijk $t_{eind}(\boldsymbol{T}^R(e^R))$ en de verzameling $\boldsymbol{E}$ is beperkt tot de verzameling $\boldsymbol{E}_{MCMF}$ (en de verzameling $\boldsymbol{E}^S$ tot $\boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^S$ en de verzameling $\boldsymbol{E}^R$ tot $\boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^R$), wordt een netwerk verkregen met dezelfde structuur als het netwerk $G_R(\boldsymbol{E})$ en is er bovendien aan de voorwaarde in stelling 6.1. voldaan.

Het netwerk $G_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ kan als volgt gedefinieerd worden:

De verzameling knopen $V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ in het netwerk $G_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ bestaat uit:

- s
- (w, T) — voor alle paren (w, T) met $w \in \boldsymbol{W}$ en $T \in \boldsymbol{T}'$, waarvoor geldt dat de werknemer w beschikbaar is gedurende het interval T;
- (e^S, T) — voor alle paren (e^S, T) met $T \in \boldsymbol{T}'$ en $e^S \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^S$, waarvoor geldt dat het interval T ligt tussen tijdstippen $t_{begin}(e^S)$ en $t_{eind}(e^S)$;
- (e^R, s, T) — voor alle paren (e^R, T) met $T \in \boldsymbol{T}'$ en $e^R \in (\boldsymbol{E}_{MCMF} \setminus \boldsymbol{E}_{MCMF}^*) \cap \boldsymbol{E}^R$, waarvoor geldt dat het interval T ligt tussen tijdstippen $t_{begin}(e^R)$ en $t_{eind}(e^R)$, voor alle $s \in S^*(r(e^R))$ en voor alle paren (e^R, T) met $T \in \boldsymbol{T}'$ en $e^R \in \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$, waarvoor geldt dat het interval T ligt tussen tijdstippen $t_{begin}(\boldsymbol{T}^R(e^R))$ en $t_{eind}(\boldsymbol{T}^R(e^R))$, voor alle $s \in S^*(r(e^R))$;
- (e^R, s) — voor alle paren (e^R, s) met $e^R \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^R$ en $s \in S^*(r(e^R))$;
- e^R — voor alle $e^R \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^R$;
- e^S — voor alle $e^S \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^S$;
- t

De verzameling van pijlen $A_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ in het netwerk $G_R(\boldsymbol{E})$ bestaat uit:

- $s \rightarrow (w, T)$ — voor alle knopen $(w, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, T) \rightarrow (e^S, T)$ — voor alle knopen $(w, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ en alle $(e^S, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ wanneer werknemer w de kwalificaties heeft voor werkplek $s(e^S)$,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, T) \rightarrow (e^R, s, T)$ — voor alle knopen $(w, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ en $(e^R, s, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ waarvoor geldt dat werknemer w de kwalificaties heeft voor werkplek s,
  capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;

- $(e^S, T) \rightarrow e^S$ voor alle knopen $(e^S, T) \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$ en $e^S \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$, capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(e^R, s, T) \rightarrow (e^R, s)$ voor alle knopen $(e^R, s, T) \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$ en $(e^R, s) \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$, capaciteit $u = l(T)$ en kosten $c = 0$;
- $(e^R, s) \rightarrow e^R$ voor alle knopen $(e^R, s) \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$ en $e^R \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$, capaciteit $u = d_{benodigd}(e^R)$ en kosten $c = 0$;
- $e^S \rightarrow t$ voor alle $e^S \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$, capaciteit $u = d_{benodigd}(e^S)$ en kosten $c = -q(e^S) \,/\, d_{benodigd}(e^S)$;
- $e^R \rightarrow t$ voor alle $e^R \in V_R(E_{MCMF}, T^R)$, capaciteit $u = |S^*(r(e^R))| \cdot d_{benodigd}(e^R)$ en kosten $c = -q(e^R) \,/\, d_{benodigd}(e^R)$.

Laat het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E_{MCMF}, T^R)$ gedefinieerd zijn als het minimum-cost-maximum-flow probleem op het netwerk $G_R(E_{MCMF}, T^R)$. Wanneer dit probleem een oplossing f geeft waarvoor geldt dat $f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)$ voor alle $e \in E_{MCMF}$, kan er geconcludeerd worden dat bij de openingsintervallen T^R bij de niet-stricte bezettingseisen uit E_{MCMF}^* een werkplekplanning bestaat waarin volledig aan alle bezettingseis uit E_{MCMF} voldaan wordt. Omdat het netwerk $G_R(E_{MCMF}, T^R)$ dezelfde structuur heeft als het in paragraaf 6.1. gedefinieerde netwerk $G_R(E)$ en er door de keuze van de intervallen T' aan de in stelling 6.1. gestelde voorwaarde is voldaan, kan er uit elke oplossing f voor een probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E_{MCMF}, T^R)$ een gedeeltelijke werkplekplanning M worden afgeleid waarin aan alle bezettingseisen $E_{VOLDAAN} := \{e \in E_{MCMF} \mid f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)\}$ volledig voldaan wordt. Op grond van stelling 6.2 kan uit deze gedeeltelijke werkplekplanning M een corresponderende toegelaten werkplekplanning Z bepaald worden waarin aan alle bezettingseisen uit $E_{VOLDAAN}$ voldaan wordt.

Er kan gekeken worden of er een toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bestaat waarin aan alle bezettingseisen uit E_{MCMF} voldaan is, door voor de verschillende combinaties van openingsintervallen T^R voor de niet-stricte bezettingseisen uit E_{MCMF}^* het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E_{MCMF}, T^R)$ op te lossen en te stoppen wanneer er een oplossing f gevonden wordt waarvoor geldt dat $f(e \rightarrow t) = u(e \rightarrow t)$ voor alle $e \in E_{MCMF}$ en dus $E_{VOLDAAN} = E_{MCMF}$ of wanneer alle mogelijke combinaties onderzocht zijn.

De oplossing van het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E_{MCMF}, T^R)$ geeft aan hoeveel tijdseenheden een werknemer elk interval in T' moet worden toegewezen. De oplossing correspondeert dus direct met een gedeeltelijke werkplekplanning. Voor het bepalen van een toegelaten werkplekplanning bij een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E_{MCMF}, T^R)$ moet er voor enkele intervallen in T' nog een minimum-cost-maximum-flow probleem opgelost worden. De hieronder beschreven methode is equivalent aan de in het bewijs van stelling 6.2(i) beschreven methode.

Laat $\beta(e,T)$ het aantal tijdseenheden zijn dat in de oplossing voor MIN-COST-MAX-FLOW$_R(E_{MCMF}, T^R)$ in het interval T aan de bezettingseis e besteed wordt. Voor intervallen $T \in T'$ waarvoor geldt dat $0 < \beta(e,T) < l(T)$ moet er

Laat $l(\tau)$ gedefinieerd zijn als de grootste gemeenschappelijk deler van alle $\beta(e,T) \neq 0$ voor $e \in E$, en $l(T)$. Deel het interval T op in een verzameling van $n = (\ l(T) \,/\, l(\tau)\ )$ niet-overlappende intervallen van lengte $l(\tau)$ en laat deze verzameling intervallen gegeven zijn door $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$.

Construeer nu het netwerk $G_\tau(E, T)$ met een verzameling knopen $V_\tau(E, T)$ bestaande uit:

- s
- (w, τ) voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ en $w \in \boldsymbol{W}$ waarvoor $(w, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$;
- (s, τ) voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ en $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^R$ waarvoor $(e, s, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$;
  voor $\tau \in \boldsymbol{\tau}$ en $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^S$, waarvoor $(e, T) \in V_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ en $s(e) = s$,
- e voor $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^S$ waarvoor $(s(e), \tau) \in V_\tau^\alpha(E, T)$,
  voor $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^R$ waarvoor $(s, \tau) \in V_\tau^\alpha(E, T)$ en $s \in \boldsymbol{S}^*(r(e))$
- t

Laat de verzameling pijlen $A_\tau(E, T)$ in $G_\tau(E, T)$ bestaan uit:

- $s \rightarrow (w, \tau)$ voor alle knopen $(w, \tau) \in V_\tau(E, T)$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(w, \tau) \rightarrow (s, \tau)$ voor alle knopen $(w, \tau) \in V_\tau(E, T)$ en $(s, \tau) \in V_\tau(E, T)$,
  waarvoor geldt dat $(w, T) \rightarrow (e, s, T) \in A_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ voor $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^R$ of $(w, T) \rightarrow (e, T) \in A_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ voor $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF} \cap \boldsymbol{E}^S$.
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $(s, \tau) \rightarrow e$ voor alle knopen $(s, \tau) \in V_\tau(E, T)$ en $e \in V_\tau(E, T)$
  waarvoor geldt dat $s \in \boldsymbol{S}^*(r(e))$ of $s(e) = s$,
  capaciteit $u = l(\tau)$ en kosten $c = 0$;
- $e \rightarrow t$ voor $e \in V_\tau(E, T)$,
  capaciteit $u = \beta(e,T)$ en kosten $c = 0$;

Het minimum-cost-maximum-flow-probleem op het netwerk $G_\tau(E, T)$ zal in het vervolg worden aangeduid met MIN-COST-MAX-FLOW$_R(\boldsymbol{E}, T)$. Bij een oplossing voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ kan een werkplekplanning voor het interval T, bepaald worden door een oplossing f voor het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(\boldsymbol{E}, T)$ te bepalen en een werknemer $w \in \boldsymbol{E}$ aan een werkpek $s \in \boldsymbol{S}$ toe te wijzen wanneer $f((w, \tau) \rightarrow (s, \tau)) = l(\tau)$.

6.3.2.2. SAMENSTELLEN VAN EEN VERZAMELING OPENINGSINTERVALLEN BIJ EEN BEZETTINGSEIS

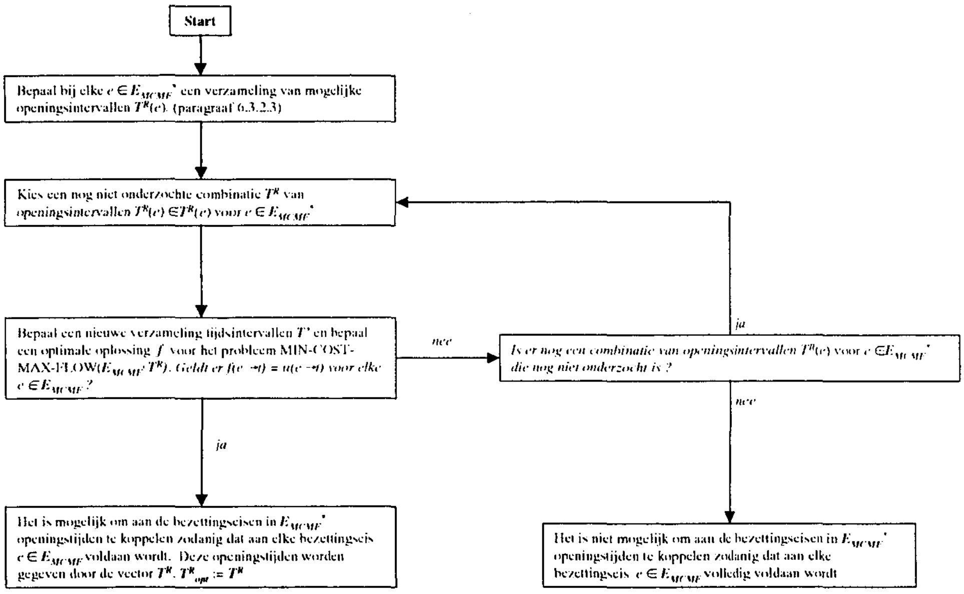
In de vorige paragraaf is er gesproken over het samenstellen van een verzameling van mogelijke openingsintervallen $\boldsymbol{T}^R(e)$ voor elke bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$. Er is echter nog niet toegelicht op wat voor een manier dit zou moeten gebeuren. Een manier waarop dit kan gebeuren is de volgende.
Laat $t_{begin}(T)$ en $t_{eind}(T)$ het begintijdstip respectievelijk het eindtijdstip zijn van het interval $T \in \boldsymbol{T}$. Bepaal de grootste gemeenschappelijke deler γ van alle begin- en eindtijdstippen $t_{begin}(T)$ en $t_{eind}(T)$ en alle $d_{benodigd}(e)$ voor $e \in \boldsymbol{E}$. Voor alle $e \in \boldsymbol{E}_{MCMF}^*$ kan een verzameling $\boldsymbol{T}^R(e)$ van openingsintervallen samengesteld worden door de periode $[t_{begin}(e), t_{eind}(e)]$ op te delen $n = (t_{eind}(e) - t_{begin}(e)) / \gamma$ niet-overlappende intervallen van lengte γ.

$$\boldsymbol{T}^R(e) = \{(t_{begin}(e) + i\gamma, t_{begin}(e) + (i+1)\gamma) | 0 \le i \le n-1\}$$

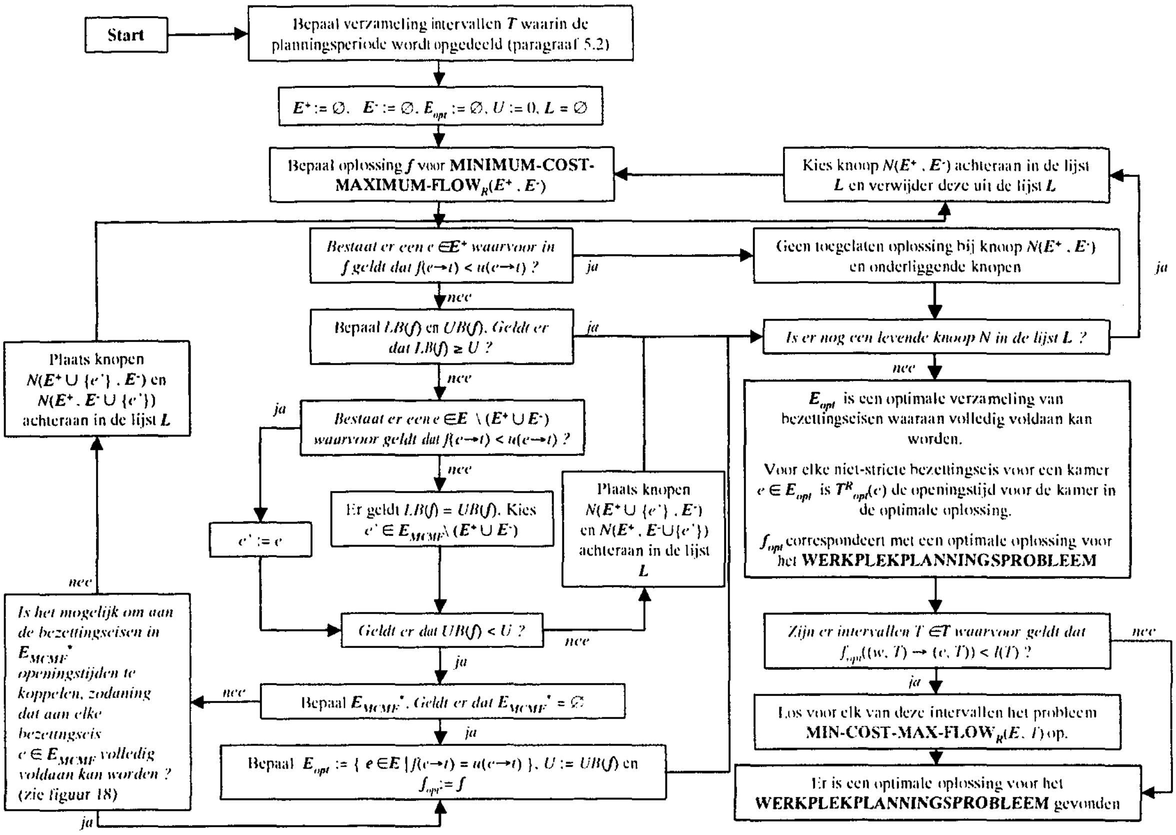
Er wordt aangenomen dat γ niet al te klein zijn, waardoor het aantal openingsintervallen dat per bezettingseis beschouwd wordt niet al te groot zijn. Deze aanname lijkt redelijk omdat het over het algemeen niet zinvol zijn bezettingseisen op de minuut nauwkeurig te definieren en dit eerder op het hele uur, het halve uur of eventueel het kwartier nauwkeurig zal gebeuren.

6.3.4. BEPALEN VAN EEN OPTIMALE OPLOSSING VOOR HET WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM

In de situatie waarbij er sprake is van niet-stricte bezettingseisen voor één of meerdere kamers mag er wanneer er in een knoop $N(E^+, E^-)$ van de branch-and-bound-boom geldt dat $UB(f) = LB(f)$ niet zonder meer vanuit worden gegaan dat er een toegelaten oplossing van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bestaat waarbij de waarde van de doelfunctie gelijk is aan $UB(f)$. Dit blijkt uit VOORBEELD 6.1. In figuur 18 is een manier aangegeven waarop bepaald kan worden of er een toegelaten oplossing van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bestaat waarbij de waarde van de doelfunctie gelijk is aan $UB(f)$. In figuur 19 is een flowchart voor het algoritme voor het optimaal oplossen van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM weergegeven. Met het in deze flowchart weergegeven algoritme kunnen alle instanties van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM (en dus ook alle instanties van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM) optimaal worden opgelost.



Figuur 18: algoritme waarmee een verzameling van openingstijden bij de niet-stricte bezettingseisen voor de kamers bepaald wordt



Figuur 19: Algoritme waarmee een optimale oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bepaald kan worden

7. MOGELIJKHEDEN OM IN HET MODEL REKENING TE HOUDEN MET WENSEN VAN PLANNER EN WERKNEMERS

Bij de wiskundige formulering in hoofdstuk 2 is het optimaliteitscriterium geformuleerd. Tot nu toe is er bij het zoeken naar een optimale oplossing alleen nog maar rekening gehouden met dit criterium. Vaak zullen er echter ook andere criteria een rol spelen. In dit hoofdstuk zal aangegeven worden op welke manieren het mogelijk is om binnen het model rekening te houden met extra criteria. Voor twee criteria zal worden aangegeven hoe deze in het model kunnen worden opgenomen. In paragraaf 7.1. wordt toegelicht op welke manier het aantal malen dat er binnen een dienst van werkplek gewisseld moet worden beperkt kan worden. In paragraaf 7.2. wordt aangegeven hoe met een maximum aaneengesloten duur voor de bezetting van een werkplek door eenzelfde werknemer rekening kan worden gehouden.

7.1. BEPERKEN VAN HET AANTAL WISSELINGEN VAN WERKPLEK BINNEN EEN DIENST

In gevallen waarin er sprake is van een groot aantal verschillende begin- en eindtijden voor de bezettingseisen, zal de planningsperiode in een groot aantal intervallen $T \in \boldsymbol{T}$ opgedeeld worden. In deze gevallen zal het niet wenselijk zijn dat een werknemer elk van de intervallen uit $\boldsymbol{T}$ waarin hij beschikbaar is aan een andere werkplek wordt toegewezen. Een manier om het aantal wisselingen te beperken is het aantrekkelijker maken van bepaalde combinaties van werknemer en werkplek door random kosten in het model op te nemen.
Dit kan gebeuren door voor elke combinatie van een werknemer $w \in \boldsymbol{W}$ en een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^S$, waarvoor geldt dat werknemer w gekwalificeerd en voldoende ervaren is voor werkplek $s(e)$, een random getal $\varepsilon(w, e)$, $0 \leq \varepsilon(w, e) \leq 1$, te trekken. Ook moet voor elke combinatie van een werknemer $w \in \boldsymbol{W}$, een bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^R$ en een werkplek $s \in \boldsymbol{S}^*(r(e))$ een random getal $\varepsilon(w, s, e)$, $0 < \varepsilon(w, s, e) < 1$ getrokken worden.

$$\text{Laat } \omega := -\frac{\max_{e \in E} c(e \to t)}{\sum_{e \in E} u(e \to t)}.$$

Aangezien er geldt dat $c(e \to t) < 0$ voor alle $e \in \boldsymbol{E}$, zal er gelden dat $\omega > 0$. In de netwerken $\boldsymbol{G}_R(\boldsymbol{E})$ en $\boldsymbol{G}_R(\boldsymbol{E}_{MCMF}, \boldsymbol{T}^R)$ wordt aan de pijlen $(w, T) \to (e^R, s, T)$ kosten $\omega \cdot \varepsilon(w, s, e)$ en aan de pijlen $(w, T) \to (e^S, T)$ kosten $\omega \cdot \varepsilon(w, e)$ gekoppeld. Ook in het netwerk $\boldsymbol{G}_\tau(\boldsymbol{E}, T)$ bij het probleem MIN-COST-MAX-FLOW$_R(\boldsymbol{E}, T)$ worden de kosten aan de pijlen $(w, \tau) \to (s, \tau)$ vervangen door $\omega \cdot \varepsilon(w, s, e)$ wanneer $s \in \boldsymbol{S}^*(r(e))$ en door $\omega \cdot \varepsilon(w, e)$ wanneer $s = s(e)$.

De hier geïntroduceerde kosten zijn in absolute waarde vele malen kleiner zijn dan de kosten die aan de pijlen $(e \to t)$ hangen. Laat de verzameling $\boldsymbol{A}$ bestaan uit alle pijlen $(w, T) \to (e^R, s, T)$ en $(w, T) \to (e^S, T)$ in het netwerk $\boldsymbol{G}_R(\boldsymbol{E})$. Wanneer er door dit netwerk van s naar t een stroom f loopt van waarde F eenheden geldt dat:

$$\sum_{a \in A} f(a) = F$$

Dit geldt omdat elk pad van s naar t in $\boldsymbol{G}_R(\boldsymbol{E})$ precies één pijl uit de verzameling $\boldsymbol{A}$ bevat. Een bovengrens voor de waarde van een flow van s naar t in $\boldsymbol{G}_R(\boldsymbol{E})$ is $\sum_{e \in E} u(e \to t)$ (meer stroom kan er immers niet in knoop t aankomen).

Voor de totale kosten als gevolg van de stochastische kosten bij een flow f in $G_R(E)$ zal dus gelden dat:

$$\sum_{a\in A} f(a)\cdot c(a) < \sum_{a\in A} f(a)\cdot \omega = F\cdot \omega \leq \frac{\sum_{e\in E} u(e\rightarrow t)\cdot -\max_{e\in E} c(e\rightarrow t)}{\sum_{e\in E} u(e\rightarrow t)} = -\max_{e\in E} c(e\rightarrow t)$$

Het invoeren van deze stochastische kosten heeft dus geen invloed op de hoeveelheid flow die in de optimale oplossing van het minimum-cost-maximum-flow probleem op het netwerk $G_R(E)$ door de pijlen $e \rightarrow t$ stroomt. De reden hiervoor is dat het verlies wat deze stochastische kosten maximaal kunnen veroorzaken altijd kleiner is dan de winst die verkregen wordt bij het sturen van één eenheid stroom door een willekeurige pijl $e \rightarrow t$. Een soortgelijke bewijs kan gegeven worden voor de netwerken $G_R(E_{MCMF}, T^R)$ en $G_t(E, T)$.

Bij het opnemen van deze stochastische kosten in het model zal er dus binnen de verzameling van oplossingen die optimaal zijn gegeven het optimaliteitscriterium in hoofdstuk 2, gezocht worden naar een oplossing waarvoor de in deze paragraaf geïntroduceerde kosten minimaal zijn. De ingevoerde random kosten zorgen ervoor dat elke werkplek voor een bepaalde werknemer of voor een kleine verzameling van werknemers aantrekkelijker wordt dan de andere werkplekken, hierdoor zal het aantal wisselingen van werkplek zeer waarschijnlijk beperkt worden. Deze heuristische methode bleek in de praktijk vaak te leiden tot een vermindering van het aantal wisselingen van werkplek.

7.2. MAXIMUM AANEENGESLOTEN DUUR VOOR BEZETTING WERKPLEK DOOR EENZELFDE WERKNEMER

Voor de werkplek 'mengen' binnen de apotheek-afdeling van het Academisch Ziekenhuis Rotterdam geldt dat, vanwege de RSI-gevoeligheid van de taak op die werkplek, het niet geoorloofd is dat een werknemer langer dan een dienstdeel (ochtend of middag) aan deze werkplek wordt toegewezen. Hier kan rekening mee gehouden worden door voor het construeren van het netwerk $G_R(E)$ van te voren een willekeurig aangewezen helft van de op die dag beschikbare en bovendien voor de werkplek gekwalificeerde werknemers slechts toe te staan 's-ochtends de werkplek te bezetten. De andere helft wordt slechts toegestaan deze werkplek 's-middags te bezetten. Wanneer voor deze werkplek 'mengen' een bezettingseis e^S gedefinieerd is, moet de pijl $(w, T) \rightarrow (e^S, T)$ slechts in het netwerk opgenomen worden wanneer de werknemer w het dienstdeel waarin het interval T valt wordt toegestaan de werkplek te bezetten.

8. REKENTIJD

Zoals al vermeld is branch-and-bound een methode die vaak wordt toegepast bij het oplossen van NP-volledige problemen. Over de rekentijd is bij de toepassing van branch-and-bound echter weinig te zeggen. De effectiviteit hangt sterk af van de strategie die men kiest en het probleem dat men wil oplossen (Papadimitriou & Steiglitz, 1980). Een belangrijk onderdeel van de strategie is de manier waarop er een ondergrens bepaald wordt voor de oplossing van de deelproblemen bij de knopen. Hierbij heeft men vaak de keuze tussen tussen grenzen die relatief strak zijn maar een relatief lange rekentijd vragen en minder strakke grenzen die snel bepaald kunnen worden. Een minimum-cost-maximum-flow kan in (pseudo)polynomiale tijd bepaald worden.

Voor de instanties van het APOTHEEK-WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM waarin er met de beschikbare werknemers aan alle bezettingseisen kan worden voldaan, geeft het ontwikkelde algoritme in pseudopolynomiale tijd een optimale oplossing. Ook voor instanties van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM waarbij geldt dat alle bezettingseisen voor kamers strict zijn en er met de beschikbare werknemers aan alle bezettingseisen kan worden voldaan, vindt het algoritme in pseudopolynomiale tijd een optimale oplossing.

Voor instanties van het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM waarin er slechts aan enkele bezettingseisen niet kan worden voldaan zal er gelden dat er niet tot diep in de boom gebranched hoeven te worden. Al voor relatief kleine verzamelingen E^- zal dan voor de oplossing van het deelprobleem bij knopen $N(E^+, E^-)$ gelden dat $LB(f) = UB(f)$. De kinderen van deze knopen hoeven dan niet meer onderzocht te worden. Ook in de situatie waarin er slechts aan enkele bezettingseisen wel zal kunnen worden voldaan, zal er niet tot diep in de boom gebrached hoeven worden. Al voor relatief kleine verzamelingen E^+ zal dan voor de oplossing van het deelprobleem bij knopen $N(E^+, E^-)$ gelden dat $LB(f)=UB(f)$.

In situaties waarin er relatief veel knopen onderzocht moeten worden, zal het gebruik van *depth-first-search* ertoe leiden dat er over het algemeen snel een goede toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM gevonden wordt. Het inbouwen van een stopcriterium is mogelijk (zie hiervoor paragraaf 5.6.3.).

Tenslotte geldt er voor de instanties waarin er geen sprake is van niet-stricte bezettingseisen voor kamers dat bij elke oplossing f in een knoop in pseudopolynomiale tijd een toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM bepaald kan worden waarvoor de doelfunctie waarde $UB(f)$ heeft. Voor het vinden van een goede toegelaten oplossing voor het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM is het dus niet altijd noodzakelijk om door te gaan met branchen totdat er een knoop gevonden is waarin er voor de oplossing f^* van het deelprobleem geldt dat $LB(f^*)=UB(f^*)$.

9. CONCLUSIES

In deze scriptie is een algoritme beschreven waarmee het werkplanningsprobleem binnen afdelingen van grotere ziekenhuizen kan worden opgelost. Dit algoritme wijst de binnen een planningsperiode beschikbare werknemers op een efficiënte manier toe aan de binnen de afdeling te bezetten werkplekken. Het algoritme maakt gebruik van de enumeratieve methode branch-and-bound om een optimale deelverzameling van de bezettingseisen te vinden waar, gegeven de beschikbaarheid van de werknemers, volledig aan kan worden voldaan. Door het oplossen van een minimum-cost-maximum-flow probleem worden ondergrenzen voor de deelproblemen bepaald.

Het algoritme is inmiddels geprogrammeerd in Delphi en maakt deel uit van het door ORTEC ontwikkelde softwarepakket HARMONY, zoals dat inmiddels op de pilot-afdelingen bij het Academisch Ziekenhuis Rotterdam is geïnstalleerd. Binnen het Academisch Ziekenhuis Rotterdam wordt er op dit moment nog gezocht naar een pilot-afdeling waar vereiste gezamelijke bezetting van werkplekken binnen kamers een rol speelt.

Over de rekentijd van het algoritme in de praktijk is op dit moment nog weinig bekend. Aangezien de werkplekplanningsproblemen voor verschillende afdelingen sterk kunnen verschillen, zal ook de rekentijd van het algoritme voor het oplossen van deze problemen sterk kunnen verschillen. In gevallen dat de rekentijd van het algoritme voor het oplossen van het werkplekplanningsprobleem op een bepaalde afdeling te groot blijkt te zijn, bestaat er de mogelijkheid een stopcriterium in het algoritme op te nemen.

LITERATUUR

Ahuja, R.K., Magnanti, T.L. & Orlin, J.B. (1993), Network Flows: Theory, algorithms and applications. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Bshouty, N.H. (1989), Euclidian GCD algorithm is not optimal. Computer Science Technical Reports 1989-376-38, The University of Calgary, Calgary.

Busacker, R.G. & Saaty, T.L. (1965), Finite graphs and networks: An introduction with applications. McGraw-Hill, New York.

Garey, M.R. & Johnson, D.S. (1979), Computers and intractability: A guide to the theory of NP-Completeness. Bell Laboratories, Murray Hill, NJ.

Lawler E.L., Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G. & Shmoys, D.B. (1993), Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity. In Graves, S.C. et al. (Eds), Handbooks in OR & MS, Vol 4. Elsevier Science Publishers B.V.

Lint, J.H. van & Nienhuys, J.W. (1991), Discrete Wiskunde. Academic Service, Schoonhoven.

Papadimitriou, C.H. & Steiglitz, K. (1982), Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

APPENDIX A: SYMBOLEN-LIJST

A.1 VERKLARING SYMBOLEN M.B.T. FORMULERING WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM

p	de periode waarvoor er een werkplekplanning plaats moet vinden.
δ_i	een eenheidsinterval binnen de planningsperiode
$\boldsymbol{W}$	de verzameling van alle werknemers.
w	een werknemer uit de verzameling $\boldsymbol{W}$.
$\boldsymbol{B}(w,p)$	de verzameling van intervallen binnen de planningsperiode p gedurende welke werknemer w beschikbaar is voor het bezetten van werkplekken.
$\boldsymbol{R}$	de verzameling van alle kamers.
r	een kamer uit de verzameling $\boldsymbol{R}$.
$\boldsymbol{S}$	de verzameling van alle werkplekken.
$S(r)$	de verzameling van alle werkplekken binnen de kamer r. Er geldt dat $S(r) \subseteq \boldsymbol{S}$ voor alle $r \in \boldsymbol{R}$.
$S^*(r)$	de verzameling van alle werkplekken binnen de kamer r, die voor opening van de kamer r vereist zijn. Er geldt dat $\boldsymbol{S}^*(r) \subseteq \boldsymbol{S}$ voor alle $r \in \boldsymbol{R}$.
s	een werkplek uit de verzameling $\boldsymbol{S}$.
$\boldsymbol{K}$	de verzameling van alle kwalificaties.
$\boldsymbol{K}(w)$	de verzameling van kwalificaties waarover werknemer w beschikt. Hiervoor geldt dat $\boldsymbol{K}(w) \subseteq \boldsymbol{K}$.
$\boldsymbol{K}(s)$	de verzameling van kwalificaties waarover een werknemer moet beschikken om werkplek s te mogen bezetten. Hiervoor geldt dat $\boldsymbol{K}(s) \subseteq \boldsymbol{K}$.
$x(k,w)$	het ervaringsniveau van werknemer w bij een kwalificatie k.
$x(k,s)$	het minimum ervaringsniveau dat vereist is bij een kwalificatie k om werkplek s te mogen bezetten.
$\boldsymbol{E}$	de verzameling van alle voor de periode p gedefinieerde bezettingseisen.
$\boldsymbol{E}^S$	de verzameling van alle voor de periode p gedefinieerde bezettingseisen voor a afzonderlijke werkplekken. Hiervoor geldt dat $\boldsymbol{E}^S \subseteq \boldsymbol{E}$.
$\boldsymbol{E}^R$	de verzameling van alle voor de periode p gedefinieerde bezettingseisen voor kamers. Hiervoor geldt dat $\boldsymbol{E}^R = \boldsymbol{E} \setminus \boldsymbol{E}^S$.
e	een bezettingseis uit de verzameling $\boldsymbol{E}$.
e^S	een bezettingseis uit de verzameling $\boldsymbol{E}^S$.
e^R	een bezettingseis uit de verzameling $\boldsymbol{E}^R$.
$t_{begin}(e)$	het begintijdstip bij een bezettingseis e.
$t_{eind}(e)$	het eindtijdstip bij een bezettingseis e.
$d_{benodigd}(e)$	de benodigde bezettingsduur bij een bezettingseis e. Hiervoor geldt dat $d_{benodigd}(e) \leq t_{eind}(e) - t_{begin}(e)$.
$q(e)$	de prioriteit bij een bezettingseis e.
$s(e^S)$	de werkplek waarvoor bezettingseis e^S geldt.
$r(e^R)$	de kamer waarvoor bezettingseis e^R geldt.
$\boldsymbol{Z}$	een verzameling toegelaten werkplektoewijzingen
z	een toegelaten werkplektoewijzing
$w(z)$	de werknemer bij een toegelaten werkplektoewijzing z
$e(z)$	de bezettingseis bij een toegelaten werkplektoewijzing z
$s(z)$	de werkplek bij een toegelaten werkplektoewijzing z
$t_{begin}(z)$	het begintijdstip bij een toegelaten werkplektoewijzing z
$t_{eind}(z)$	het eindtijdstip bij een toegelaten werkplektoewijzing z
$U(e)$	unit-penalty bij een gegeven oplossing. Hiervoor geldt dat $U(e) = 0$ wanneer er in de oplossing volledig wordt voldaan aan bezettingseis e en $U(e) = 1$ in wanneer dit niet het geval is.
$\gamma(e)$	de kosten als gevolg van het niet volledig voldoen aan bezettingseis e.

A.2. VERKLARING SYMBOLEN M.B.T. FLOW-PROBLEMEN

G, G_R, G_τ, etc	een netwerk $G = (V, A)$, $G_R = (V_R, A_R)$, $G_\tau = (V_\tau, A_\tau)$, etc.
V, V_R, V_τ, etc	een verzameling van knopen in respectievelijk netwerk G, G_R, G_τ, etc.
A, A_R, A_τ, etc	een verzameling van pijlen respectievelijk netwerk G, G_R, G_τ, etc.
v, v_i	een knoop uit een verzameling van knopen.
s	de source-knoop in een netwerk
t	de sink-knoop in een netwerk
$v_i \rightarrow v_j$	de pijlen tussen de knopen v_i en v_j.
a, a_i	een pijl uit een verzameling van pijlen.
$c(v_i \rightarrow v_j)$	de kosten per eenheid stroom door de pijl $v_i \rightarrow v_j$.
$u(v_i \rightarrow v_j)$	de capaciteit van de pijl $v_i \rightarrow v_j$.
G_{RES}	een residueel netwerk
A_{RES}	de verzameling pijlen in residuele het netwerk
$\overline{c(v_i \rightarrow v_j)}$	de kosten per eenheid stroom door de pijl $v_i \rightarrow v_j \in A_{RES}$ in het residuele netwerk.
$\overline{u(v_i \rightarrow v_j)}$	de capaciteit van een pijl $v_i \rightarrow v_j \in A_{RES}$ in het residuele netwerk.
f, f_{opt}	een flow door het netwerk.
$C(f)$	de totale kosten van de flow f
$F(f)$	de totale hoeveelheid flow die door het netwerk van s naar t gaat bij de flow f.
$f(v_i \rightarrow v_j)$	de flow door een pijl $v_i \rightarrow v_j$ bij een flow f door het netwerk.
P	een gericht pad in het netwerk.

A.3. VERKLARING SYMBOLEN M.B.T. BRANCH-AND-BOUND EN ALGORITME

E^+	een verzameling bezettingseisen waarvoor in een deelprobleem is geëist dat er volledig aan voldaan wordt. $E^+ \subseteq E$.
E^-	een verzameling bezettingseisen waarvoor in een deelprobleem is geëist dat in het geheel niet aan voldaan wordt. $E^- \subseteq E$.
$N(E^+, E^-)$	een specifieke knoop in de branch-and-bound-boom.
N	een willekeurige knoop in de branch-and-bound-boom.
f	een oplossing voor het deelprobleem bij een knoop.
$LB(f)$	een ondergrens voor de doelfunctie bij alle oplossingen van het deelprobleem bij de knoop, met f de oplossing voor het deelprobleem.
$UB(f)$	een bovengrens voor de doelfunctie bij alle oplossingen van het deelprobleem bij de knoop, met f de oplossing voor het deelprobleem.
LUB	de waarde van de doelfunctie bij de beste reeds bekende oplossing voor het oorspronkelijke probleem.
$\beta(e, T)$	het aantal tijdseenheden dat er in een oplossing voor een deelprobleem binnen het interval T besteed wordt aan een bezettingseis e.
E_{opt}	de verzameling van bezettingseisen waarvoor geldt dat er bij de beste reeds bekende oplossing voor het oorspronkelijke probleem volledig aan voldaan wordt. $E_{opt} \subseteq E$.
L	een lijst van alle nog levende knopen in de boom.
$\mathbf{T}^R(e^R)$	een verzameling van mogelijke openingstijden bij een bezettingseis e^R, waarvoor geldt dat $d_{benodigd}(e^R) < t_{eind}(e^R) - t_{begin}(e^R)$.
$T^R(e^R)$	mogelijke openingstijd bij een bezettingseis e^R, waarvoor geldt dat $d_{benodigd}(e^R) < t_{eind}(e^R) - t_{begin}(e^R)$.
$T^R_{opt}(e^R)$	openingstijd bij een bezettingseis e^R met $d_{benodigd}(e^R) < t_{eind}(e^R) - t_{begin}(e^R)$ bij de beste reeds bekende oplossing voor het oorspronkelijke probleem.

APPENDIX B: EEN ILP-FORMULERING VAN HET WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM

Het is niet ondenkbaar dat er naast ziekenhuizen ook andere instellingen zijn waarbinnen werkplekplanningsproblemen een rol spelen. Mogelijk zijn er onder die instellingen ook enkele die reeds in het bezit zijn van een LP-solver of over een wat ruimer budget beschikken dan de ziekenhuizen. Het WERKPLEKPLANNINGSPROBLEEM zal geformuleerd worden als een ILP-probleem. Alle beslissingsvariabelen zijn 0-1 variabelen. Bij deze formulering is ervan uitgegaan dat alle tijdstippen en tijdsduren bijvoorbeeld op het uur of halve uur nauwkeurig gegeven zijn. Wanneer alle tijdstippen en benodigde bezettingsduren bijvoorbeeld op het uur nauwkeurig gegeven zijn, kan de planningsperiode worden opgedeeld in een verzameling van intervallen $\boldsymbol{T} = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, waarin t_i het i^{de} uur is binnen de planningsperiode.

Beslissingsvariabelen

Definieer $x_{w,t,e}$ voor alle (w,t,e) met $w \in \boldsymbol{W}$, $t \in \boldsymbol{T}$ en $e \in \boldsymbol{E}^S$ door:

$x_{w,t,e} = 1$ wanneer werknemer w voor het interval $t \in \boldsymbol{T}$ in het kader van bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^S$ aan werkplek $s(e)$ wordst toegewezen;

$x_{w,t,e} = 0$ anders.

Definieer $x_{w,t,e,s}$ voor alle (w,t,e,s) met $w \in \boldsymbol{W}$, $t \in \boldsymbol{T}$, $e \in \boldsymbol{E}^R$ en $s \in \boldsymbol{S}(r(e))$ door:

$x_{w,t,e,s} = 1$ wanneer werknemer w voor het interval $t \in \boldsymbol{T}$ in het kader van bezettingseis $e \in \boldsymbol{E}^S$ aan werkplek s wordt toegewezen;

$x_{w,t,e,s} = 0$ anders.

Definieer $o_{t,e}$ voor alle (t,e) met $t \in \boldsymbol{T}$ en $e \in \boldsymbol{E}$ door:

$o_{t,e} = 1$ wanneer het interval t (gedeeltelijk) aan bezettingseis e voldaan wordt;

$o_{t,e} = 0$ anders.

Definieer o_e voor alle e met $e \in \boldsymbol{E}$ door:

$o_e = 1$ wanneer aan bezettingseis e voldaan wordt;

$o_e = 0$ anders.

Parameters

Laat voor alle (w, t) met $w \in \boldsymbol{W}$ en $t \in \boldsymbol{T}$ $b_{w,t}$ gegeven zijn door:

$b_{w,t} = 1$ wanneer werknemer w beschikbaar is in het interval t;

$b_{w,t} = 0$ anders.

Laat voor alle (w, t) met $t \in \boldsymbol{T}$ en $e \in \boldsymbol{E}$ $a_{t,e}$ gegeven zijn door:

$a_{t,e} = 1$ wanneer het interval t tussen tijdstippen $t_{begin}(e)$ en $t_{eind}(e)$ ligt;

$a_{t,e} = 0$ anders.

Laat voor alle (w, s) met $w \in \boldsymbol{W}$ en $s \in \boldsymbol{S}$ $k_{w,s}$ gegeven zijn door:

$k_{w,s} = 1$ wanneer werknemer w gekwalificeerd en voldoende ervaren is voor het bezetten van werkplek w;

$k_{w,s} = 0$ anders.

Laat tenslotte l de lengte zijn van elk interval in $\boldsymbol{T}$.

Restricties

Een werknemer w mag pas voor een interval t in het kader van een bezettingseis e aan een werkplek s worden toegewezen wanneer de werknemer w het interval t beschikbaar is ($b_{w,t} = 1$), in het interval t aan de bezettingseis e voldaan mag worden ($a_{t,e} = 1$), besloten wordt dat in het interval t (gedeeltelijk) aan bezettingseis e voldaan zal worden ($o_{t,e} := 1$) en de werknemer w gekwalificeerd en voldoende ervaren is voor de werkplek s ($k_{w,s} = 1$). Dit kan worden afgedwongen met behulp van de constraints (1) en (2):

(1) $\quad x_{w,t,e} - b_{w,t} \cdot a_{t,e} \cdot o_{t,e} \cdot k_{w,s} \leq 0 \quad$ voor alle (w,t,e,s) met $w \in W$, $t \in T$ en $e \in E^S$ met $s = s(e)$.

(2) $\quad x_{w,t,e,s} - b_{w,t} \cdot a_{t,e} \cdot o_{t,e} \cdot k_{w,s} \leq 0 \quad$ voor alle (w,t,e,s) met $w \in W$, $t \in T$ en $e \in E^R$ en $s \in S(r(e))$.

Wanneer besloten wordt dat in het interval t gedeeltelijk aan een bezettingseis e voldaan wordt ($o_{t,e} := 1$), zal er wanneer $e \in E^S$ precies één werknemer $w \in W$ aan de werkplek $s(e)$ moeten wordt toegewezen (constraint 3). Wanneer $e \in E^R$ zal voor elk van de voor opening van de kamer $r(e)$ vereiste werkplekken moeten gelden dat er precies één werknemer $w \in W$ aan deze werkplek wordt toegewezen (constraint 4). Wanneer $e \in E^R$ zullen ook de niet voor opening van de kamer $r(e)$ vereiste werkplekken bezet mogen worden. Wanneer besloten wordt dat in het interval t niet aan een bezettingseis e voldaan wordt ($o_{t,e} := 0$), mogen de niet voor opening van de kamer $r(e)$ vereiste werkplekken niet bezet worden. (constraint 5).

(3) $\quad \sum_{w \in W} x_{w,t,e} - o_{t,e} = 0 \quad$ voor alle (w,t,e) met $w \in W$, $t \in T$ en $e \in E^S$.

(4) $\quad \sum_{w \in W} x_{w,t,e,s} - o_{t,e} = 0 \quad$ voor alle (w,t,e,s) met $w \in W$, $t \in T$ en $e \in E^R$ en $s \in S^*(r(e))$.

(5) $\quad \sum_{w \in W} x_{w,t,e,s} - o_{t,e} \leq 0 \quad$ voor alle (w,t,e,s) met $w \in W$, $t \in T$ en $e \in E^R$ en

$s \in S(r(e)) \setminus S^*(r(e))$.

Er mag pas besloten worden om in het interval t (gedeeltelijk) aan een bezettingseis e te voldoen ($o_{t,e} := 0$) wanneer er ook besloten wordt om aan de bezettingseis e te voldoen. Dit kan afgedwongen worden door constraint 6.

(6) $\quad o_{t,e} - o_e \leq 0 \quad$ voor alle (w,t) met $w \in W$ en $t \in T$.

Wanneer er besloten wordt om aan een bezettingseis e te voldoen ($o_e := 1$), zal er ook volledig aan de bezettingseis moeten worden voldaan. Dit wordt afgedwongen door constraint 7.

(7) $\quad \sum_{t \in T} o_{t,e} \cdot l - o_e \cdot d_{benodigd}(e) = 0$ voor alle (t,e) met $t \in T$ en $e \in E$.

Optimaliteitscriterium:

$$\min \sum_{e \in E} o_e \gamma(e)$$

Aangezien er geldt dat $o_e = 1$ dan en slechts dan als er volledig aan de bezettingseis e voldaan wordt (hetgeen afgedwongen wordt met constraint 7) is het optimaliteitscriterium equivalent aan het in hoofdstuk 2 geformuleerde optimaliteitscriterium. Om ook het bezetten van de niet voor opening vereiste werkplekken binnen de kamers aantrekkelijk te maken kan er een extra term in de doelfunctie worden opgenomen:

$$\min \sum_{e \in E} o_e \gamma(e) - \lambda \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} \sum_{e \in E^R} \sum_{s \in S(r(e)) \setminus S^*(r(e))} x_{w,t,e,s}$$

Hierbij moet > 0 voldoende klein gekozen worden om ervoor te zorgen dat het bezetten van de niet voor opening vereiste werkplekken niet tot gevolg zal hebben dat hierdoor aan andere bezettingseisen niet voldaan kan worden. Een mogelijke keuze voor is bijvoorbeeld:

$$\lambda := \frac{1}{|\boldsymbol{W}| \cdot |\boldsymbol{T}| \cdot |\boldsymbol{E}| \cdot |\boldsymbol{S}|} \cdot \min_{e \in E}(\gamma(e)).$$

Tenslotte kan ervoor gezorgd worden dat werknemers niet onnodig vaak van werkplek moet wisselen. Ook hier kan voor gezorgd worden door het opnemen van een extra term in doelfunctie:

$$\min \sum_{e \in E} o_e \gamma(e) - \lambda \left(\sum_{w \in W} \sum_{t \in T} \sum_{e \in E^R} \sum_{s \in S(r(e)) \setminus S^*(r(e))} x_{w,t,e,s} + \sum_{w \in W} \sum_{0 \le i < |T|} \sum_{e \in E^S} (x_{w,t_i,e} - 2x_{w,t_{i+1},e}) + \sum_{w \in W} \sum_{0 \le i < |T|} \sum_{e \in E^R} \sum_{s \in S(r(e))} (x_{w,t_i,e,s} - 2x_{w,t_{i+1},e,s}) \right)$$

Een voordeel van deze modellering is dat bekende technieken voor het oplossen van LP-problemen gebruikt kunnen worden bij het oplossen van het werkplekplanningsprobleem. Een voordeel vergeleken met de gekozen methode is dat in dit model ook mogelijk is om werknemers aan de niet-voor opening vereiste werkplekken in kamers toe te wijzen en te eisen dat dit alleen gebeurt wanneer de vereiste werkplekken binnen de kamer bezet zijn. Een tweede voordeel is dat de manier waarop het aantal wisselingen van werkplek beperkt gehouden kan worden zonder stochastiek in het model in te voeren. Een nadeel van deze LP-formulering is dat voor grotere afdelingen het aantal beslissingsvariabelen erg groot kan worden.