

## MASTER

### Breedtebepaling van isolerende stroken tussen randkanalen in het integer Quantum Hall Regime

den Otter, M.W.

*Award date:*  
1995

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

**Breedtebepaling van isolerende stroken  
tussen randkanalen in het  
Integer Quantum Hall regime**

M.W. den Otter

- Dit afstudeeronderzoek werd verricht bij de groep halfgeleiderfysica, onderdeel van de vakgroep vaste stof fysica aan de TU Eindhoven.
- Begeleider : Dr. Ir. F.A.P. Blom.
- In de periode september 1994 - september 1995.

---

## Inhoudsopgave

Inleiding	2
Hoofdstuk 1 Theorie	
§1.1 Inleiding	4
§1.2 Het skipping orbits model	7
§1.3 Het ontstaan van randkanalen	8
§1.4 'Absence of backscattering' en het Quantum Hall Effect	9
§1.5 Het Chklovskii model	12
Hoofdstuk 2 Capaciteit en randkanalen	
§2.1 Inleiding	18
§2.2 Front gate over de bulk van het 2DEG	18
§2.3 Het Oto model: Front gate over de rand	22
§2.4 Het gebruikte model	26
Hoofdstuk 3 Experimentele opzet	
§3.1 Opstellingen	29
§3.2 Preparaten	29
§3.3 Beïnvloeding van de randpotentiaal	31
§3.4 Schakeling en experimenten	39
Hoofdstuk 4 Resultaten	
§4.1 Inleiding	41
§4.2 Gradiëntloze resultaten	41
§4.3 Breedte van de isolerende stroken	44
Hoofdstuk 5 Discussie, conclusies en aanbevelingen	
§5.1 Discussie en conclusies	48
§5.2 Aanbevelingen	49
Appendices	50

---

## Samenvatting

Het Quantum Hall Effect (QHE)<sup>1</sup> kan verklaard worden door het optreden van randkanalen. Chklovskii *et al.*<sup>2</sup> hebben aangetoond dat de randkanalen een eindige breedte hebben. Bovendien zouden de randkanalen metallisch gedrag vertonen. De stroken tussen de randkanalen hebben heeltallige vulfactoren en zijn isolatoren. De isolerende stroken zijn veel smaller dan de geleidende randkanalen. Het verschil in elektrisch geleidingsvermogen tussen de randkanalen en de stroken ertussen maakt het mogelijk om de breedten van de stroken te bepalen. Op het oppervlak van het preparaat wordt een front gate aangebracht. De front gate vormt samen met het 2DEG een vlakke condensator. De capaciteit van deze condensator hangt af van het deel van het 2DEG dat onder de front gate ligt en bovendien metallisch gedrag vertoont.<sup>3,4</sup>

De randpotentiaal bepaalt de positie van de randkanalen en kan beïnvloed worden met behulp van een gatengas. Het gatengas bevindt zich in een vlak parallel aan het 2DEG en heeft een lage mobiliteit. Een spanningsverschil over het gatengas induceert in het 2DEG een ladingsverdeling. Bij de opsluitpotentiaal moet dan de elektrostatische potentiaal van het gatengas opgeteld worden. Op deze manier kunnen de kanalen losgemaakt worden van de rand van het 2DEG en bovendien worden de geleidende kanalen macroscopisch breed.<sup>5-7</sup> Door een front gate over de bulk van het 2DEG te leggen kan de relatie tussen de breedten van de stroken en de opsluitpotentiaal bepaald worden.

Het is gebleken dat alleen de breedten van de isolerende stroken direct uit de capaciteitsmetingen gehaald kunnen worden. De vulfactor in de isolerende stroken blijkt heeltallig te zijn, in tegenstelling tot de vulfactoren in de geleidende stroken. Hieruit kan geconcludeerd worden dat de elektrische stroom door de stroken met niet-heeltallige vulfactor loopt. De breedten van de isolerende stroken variëren met de verandering van de opsluitpotentiaal van veel groter tot veel kleiner dan de breedte van de front gate. De breedten van de isolerende stroken hangt nauwelijks af van de vulfactor in de stroken. De uitkomsten van de experimenten zijn in overeenstemming met de conclusies van Chklovskii *et al.*

## Inleiding

In een metaal zijn er elektronen die vrij zijn om in drie dimensies te bewegen. Het blijkt mogelijk te zijn om speciale halfgeleiderkristallen te maken waarin elektronen in twee dimensies kunnen bewegen. De elektronen zijn dan opgesloten in de derde richting. Een dergelijk systeem wordt een twee-dimensionaal elektronengas (2DEG) genoemd.

Als een sterk magneetveld wordt aangelegd dat loodrecht staat op het vlak waarin de elektronen kunnen bewegen, krijgen de elektronen discrete energieën. De energieniveaus waarop de elektronen dan zitten, worden Landauniveaus<sup>8</sup> genoemd. Overall in het 2DEG is de energie van de elektronen gequantiseerd op de energie van de Landauniveaus, behalve aan de rand van het 2DEG. Daar wordt de beweging van de elektronen beperkt door de zgn. opsluitpotential. Deze zorgt ervoor dat de Landauniveaus naar hogere energie worden afgebogen. Per definitie blijven in een gedegenererd elektronengas de Landauniveaus gevuld tot aan het Fermi-niveau. Over de gehele lengte van de rand van het 2DEG snijden de Landauniveaus die in de bulk bezet waren, door het Fermi-niveau. Deze snijlijnen worden randkanalen genoemd.

Op basis van elektrostatistische overwegingen kwamen Chklovskii *et al.*<sup>2</sup> tot de conclusie dat randkanalen een eindige breedte hebben. De randkanalen vertonen metallisch gedrag. De stroken tussen de randkanalen zijn elektrische isolatoren. Deze zijn veel smaller dan de geleidende stroken. In het geval van een heeltallige vulfactor (zie paragraaf §1.1) in de bulk van het preparaat is de elektrische geleiding in de bulk slecht. In deze situatie lopen langs de randen van het 2DEG geleidende randkanalen, gescheiden door isolerende stroken, terwijl de bulk ook goed isoleert. Door het verschil in elektrische transportverschijnselen tussen de geleidende randkanalen en de isolerende stroken ertussen wordt het mogelijk om de breedte van de isolerende stroken te bepalen. De methode die hier gepresenteerd wordt, berust op het meten van de capaciteit van een vlakke condensator. In een vlak parallel aan het 2DEG kan een metaallaagje over de rand van het 2DEG, dus over de randkanalen, worden aangebracht. Het metaallaagje fungeert als de eerste plaat van de vlakke condensator en wordt 'front gate' genoemd. De capaciteit van de front gate en het 2DEG is recht evenredig met het metallisch oppervlak in het 2DEG dat onder de front gate ligt. De tweede plaat van de vlakke condensator wordt door dit deel van het 2DEG gevormd. Bij gehele vulfactor (zie paragraaf §1.1) in de bulk van het 2DEG isoleert het 2DEG

in de bulk goed. De bijdrage van de bulk aan de capaciteit is dan erg klein. De capaciteit die dan gemeten wordt, is het gevolg van de breedte van de (metallische) randkanalen. Het metallisch oppervlak onder de front gate wordt immers alleen gevormd door de randkanalen. Experimenten<sup>3,4</sup> hebben aangetoond dat op deze manier de breedten van de randkanalen bepaald kunnen worden.

Het blijkt mogelijk te zijn om de randpotentiaal te beïnvloeden<sup>5-7</sup>. Hierdoor wordt het mogelijk om de randkanalen naar de bulk van het 2DEG te verplaatsen. Bovendien worden de geleidende kanalen macroscopisch breed. Een front gate kan ook over een gedeelte van de bulk van het 2DEG aangebracht worden. De overlap van de front gate met de rand van het 2DEG is nu niet meer nodig om de breedten van de stroken te bepalen omdat de kanalen naar de bulk van het 2DEG gebracht kunnen worden. De overlap van de geleidende stroken met de front gate is dan nog steeds bepalend voor de capaciteit die wordt gemeten tussen de front gate en het 2DEG. Op deze manier is het mogelijk om te bekijken hoe de breedten van de stroken samen hangen met de aangebrachte veranderingen in de opsluitpotentiaal. De geleidende stroken zijn zeer veel breder dan de isolerende stroken, zie paragraaf §1.4. De breedte van de front gate ligt er tussen in. Daardoor is het alleen mogelijk om de breedten van de isolerende stroken direct uit de capaciteitsmetingen te berekenen. Alleen deze stroken passen over hun volle breedte onder de front gate. De bepaling van de breedten van de isolerende stroken in de bulk van het 2DEG was het doel van dit afstudeerwerk.

## Hoofdstuk 1 Theorie

### §1.1 Inleiding

Een twee-dimensionaal elektronengas (2DEG) is een verzameling van vrije elektronen die in twee richtingen vrij kunnen bewegen. De opsluiting in de derde richting ontstaat onder bepaalde omstandigheden als twee halfgeleidende materialen door middel van molecular beam epitaxy (MBE)<sup>9</sup> op elkaar worden gegroeid. Het 2DEG ontstaat in het vlak waar de geleidingsband lager ligt dan het Fermi-niveau, dat is bij de scheiding van de twee materialen. Het 2DEG wordt in het  $xy$ -vlak gelegd zodat de elektronen in de  $z$ -richting opgesloten zijn. Als er een sterk magneetveld in de  $z$ -richting wordt aangebracht, wijzigen de golf functies van de deeltjes zich. Het magneetveld veroorzaakt een potentiaal die vergelijkbaar is met die van een harmonische oscillator. De energieniveaus die de deeltjes kunnen bezetten worden Landauniveaus genoemd en worden gegeven door

$$E = (n + 1/2)\hbar\omega_c \quad (1.1)$$

waarin  $\omega_c$  de cyclotronfrequentie is en  $n$  het hoofdquantumgetal van de deeltjes. In elk Landauniveau kan een groot aantal deeltjes. Het aantal deeltjes per oppervlakte-eenheid dat in een Landauniveau kan zitten zonder het Pauliverbod te schenden, wordt gegeven door

$$N_L = eB/h. \quad (1.2)$$

Dit wordt ook wel de degeneratie van een Landauniveau genoemd en komt terug in de density of states (DOS) of toestandsdichtheid, zie figuur 1.1. Dit is een functie van de energie  $\epsilon$ , die aangeeft hoeveel deeltjes er in een infinitesimaal klein energieinterval tussen  $\epsilon$  en  $\epsilon + d\epsilon$  passen. De toestandsdichtheid is in feite de energieverdeling van de deeltjes. In het geval van  $N_L$  onverstroorde elektronen per Landauniveau wordt de toestandsdichtheid gegeven door een serie  $\delta$ -functies zoals getekend in figuur 1.1a. Een belangrijk effect dat de toestandsdichtheid beïnvloedt, is de spin van de elektronen. De elektronenspin zorgt ervoor dat een Landauniveau bestaat uit twee spingesplitste niveaus. Hierdoor kunnen er  $eB/h$  elektronen in elk spingesplitst Landauniveau en  $2eB/h$  elektronen in elk Landauniveau. Een grootheid

die nauw verbonden is met de degeneratie per Landauniveau is de vulfactor, symbool  $\nu$ . De vulfactor is een maat voor het aantal bezette spingsplitste Landauniveaus:

$$N_e = \nu N_L = \frac{e}{h} \nu B. \quad (1.3)$$

De vulfactor is een reëel getal dat afhangt van het magneetveld  $B$  en de elektronenconcentratie  $N_e$ . In het geval dat de vulfactor gelijk is aan een geheel getal, treden er bijzondere effecten op in het 2DEG<sup>10, 11</sup>. Een deel daarvan zal in dit verslag aan de orde komen. Voor niet te hoge magneetvelden zijn de spinniveaus niet te onderscheiden, zodat voornoemde effecten dan alleen optreden bij even vulfactoren.

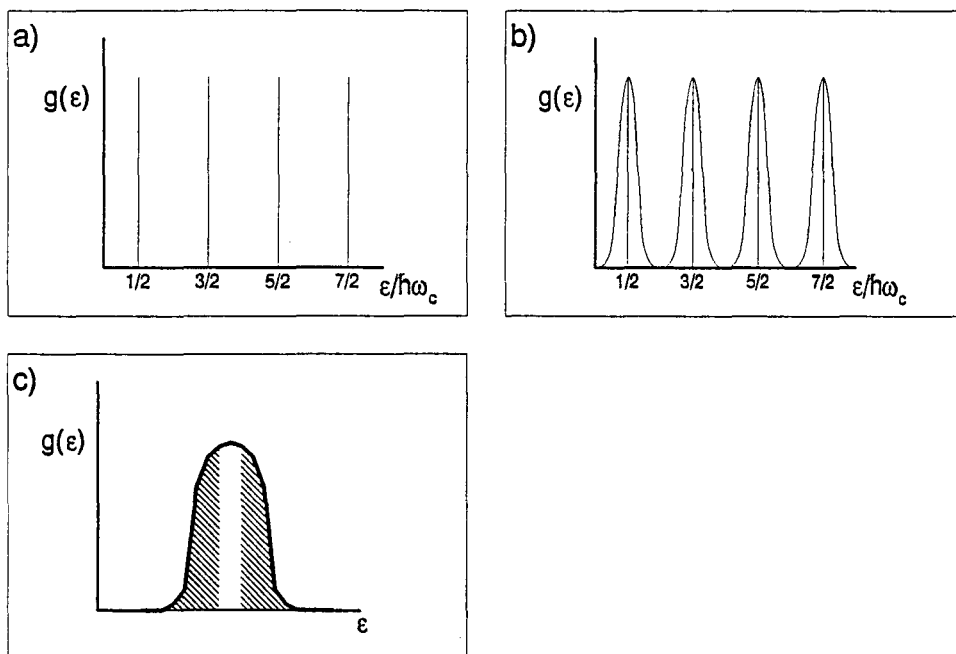


FIG. 1.1 a) De toestandsdichtheid bestaat uit deltapieken bij de energie van elk Landauniveau. b) De Landauniveaus verbreden als gevolg van verstoringen van de potentiaal. c) Een verbreed Landauniveau. Gedelokaliseerde toestanden zijn gearceerd.

De elektronen in het 2DEG zijn afkomstig van donoren. Als de donoren geïoniseerd worden, kunnen de vrijgekomen elektronen in het 2DEG terecht komen. De geladen ionen bevinden zich vlakbij het 2DEG en veroorzaken daarom een potentiaallandschap in het 2DEG, dat resulteert in verbreding van de Landauniveaus. De degeneratie per Landauniveau blijft gelijk. De toestandsdichtheid komt er dan uit te zien als in figuur 1.1b. In het potentiaallandschap ontstaan bergen en dalen. De elektronen bewegen zich langs equipotentiaalijnen.<sup>7</sup> Rond de toppen van de bergen en in de dalen zijn deze equipotentiaalijnen gesloten. De elektronen zitten 'vast' in



hun equipotentiaallijn. Deze elektronen worden daarom gelokaliseerd genoemd. Het potentiaallandschap beïnvloedt de energie van deze elektronen sterk. De gelokaliseerde elektronen hebben daarom energieën die veel van  $(n+1/2)\hbar\omega_c$  afwijken. De gelokaliseerde toestanden zijn in figuur 1.1c gearceerd. Alléén de elektronen die niet rond een berg of in een dal zitten, kunnen vrij door het 2DEG bewegen. Deze elektronen worden gedelokaliseerd genoemd en kunnen bijdragen aan elektrische transportverschijnselen. In figuur 1.1c zijn deze toestanden blank gelaten. De scheiding tussen de gelokaliseerde en gedelokaliseerde toestanden wordt de 'mobility edge' genoemd.

Een belangrijk gevolg van de verbreding is dat er elektronen zijn die niet precies de gequantiseerde energie van de Landauniveaus hebben. Hierdoor hoeft het Fermi-niveau niet meer precies op deze discrete energieniveaus te liggen.

De elektronenconcentratie  $N_e$  is een belangrijke grootheid in het onderzoek naar de eigenschappen van een 2DEG. De dimensie van de elektronenconcentratie is  $\text{m}^{-2}$ . De elektronenconcentratie ligt in het algemeen in de orde van  $10^{15}$  elektronen per vierkante meter. Uit de oscillaties in bijvoorbeeld de magnetoweerstand kan de elektronenconcentratie worden bepaald. Deze oscillaties worden het Shubnikov - de Haas effect genoemd. De magnetoweerstand is per definitie evenredig met de verhouding tussen de spanning van twee zijcontacten aan dezelfde kant van het preparaat en de stroom in een vierpuntsmeting, zie figuur 1.4. De magnetoweerstand (figuur 1.2) vertoont minima bij gehele vulfactoren.<sup>10</sup> Er treden minima op bij 1.1, 1.4, 2.2, (2.9) en 4.3 Tesla. Bij deze magneetvelden is er een heeltallige vulfactor. Het verschil in vulfactor tussen twee opeenvolgende minima moet twee bedragen als de spinsplitsing niet is opgelost.<sup>10, 11</sup> Samen met formule (1.3) geeft dit voldoende vergelijkingen om de elektronenconcentratie op te lossen, want  $\nu_1 B_1 = \nu_2 B_2 = (\nu_1 + 2) B_2$ . Daaruit volgt dat  $(1 + 2/\nu_1) = B_1/B_2$ . Daaruit kan eenvoudig de vulfactor  $\nu_1$  bepaald worden. Deze moet dan vermenigvuldigd worden met  $eB_1/h$  voor de elektronenconcentratie, die in dit geval  $2.07 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  bedraagt. De vulfactor bij 2.9 Tesla is drie. Deze oneven vulfactor is het gevolg van de spingsplitsing. Bij vulfactor drie zijn er precies drie energieniveaus bezet: twee spingsplitste niveaus van het laagste Landauniveau en één spingsplitst niveau van het volgende Landauniveau.

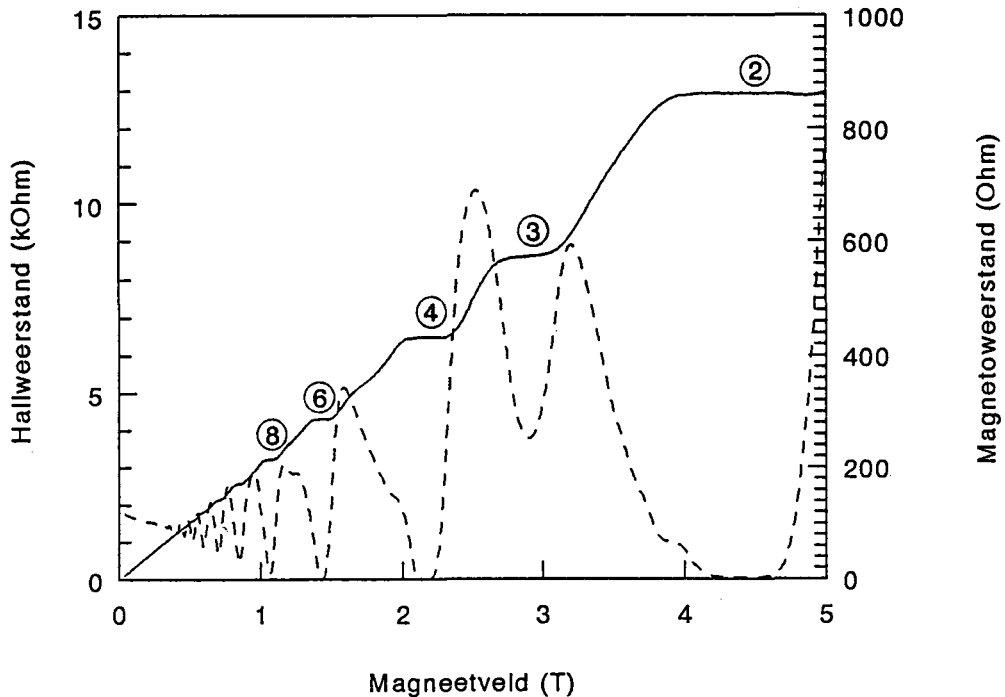


FIG. 1.2 De magnetoweerstand vertoont oscillaties. Uit de positie van de minima kan de elektronenconcentratie bepaald worden, omdat daar de vulfactor heeltalig is. De Hallweerstand vertoont plateaus in de minima van de magnetoweerstand.

## §1.2 Het skipping orbits model

Het skipping orbits model is een klassieke, kwalitatieve beschrijving van het ontstaan van randkanalen, zie figuur 1.3. Daarbij wordt uitgegaan van ballistisch transport, dat wil zeggen dat de elektronen cyclotronbanen beschrijven en in de bulk van het 2DEG zelden verstrooid worden. In de klassieke limiet beschrijft een elektron cyclotronbanen. Een gedeelte van de elektronen kan daarbij botsen tegen een onzuiverheid of tegen de rand van het 2DEG. In het eerste geval blijft het elektron segmenten van cyclotronbanen beschrijven en zal het telkens blijven botsen tegen dezelfde verontreiniging. Dit zal doorgaan totdat het elektron tegen een andere verontreiniging of tegen de rand van het 2DEG botst. In het geval dat deze rand wordt beschreven als een oneindig steile potentiaalmuur, zal er spiegelende reflectie optreden. Nadat een elektron tegen de rand is gebotst, zal het weer een segment van een cyclotronbaan beschrijven, totdat het weer tegen de rand botst. Netto is het elektron dan verplaatst. Alle elektronen die een cyclotronbaan beschrijven waarvan het centrum minder dan een cyclotronstraal van de rand van het 2DEG verwijderd

ligt, zullen zich langs de rand van het 2DEG verplaatsen. Daarbij zal elk van deze elektronen in dezelfde richting het 2DEG rondgaan. In de bulk van het 2DEG worden de banen van de elektronen niet verstoord. De elektronen blijven in dezelfde cyclotronbanen en verplaatsen het centrum van hun baan niet. Daardoor is er in het skipping orbits model geen netto transport door de bulk.

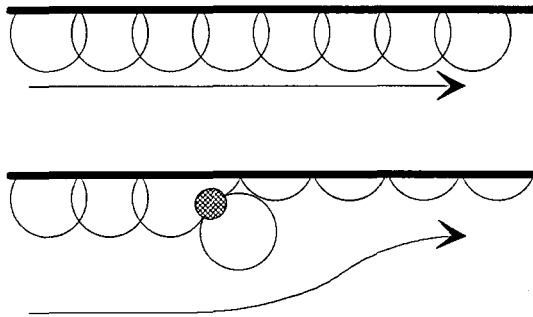


FIG. 1.3 In het skipping orbits model beschrijven de elektronen cyclotronbanen. Elektronen aan de rand van het 2DEG zijn mobiel. Onzuiverheden kunnen de baan verstoren, maar de elektronen kunnen de overkant van het 2DEG niet bereiken.

### §1.3 Het ontstaan van randkanalen

Aan de rand van het 2DEG ondervinden de elektronen de opsluitpotentiaal. Deze zorgt ervoor dat de elektronen binnen het 2DEG blijven opgesloten. De potentiaal loopt aan de randen van het 2DEG op naar hogere energie. De elektronen kunnen deze energie niet opbrengen en blijven daarom in het elektronengas. De opsluitpotentiaal loopt op over afstanden die (bij voldoende groot magneetveld) veel groter zijn dan de cyclotronstraal.<sup>2</sup> Daarom mag verondersteld worden dat de energie van de Landauniveaus aan de rand vermeerderd mag worden met de opsluitpotentiaal ter plekke, zie figuur 1.5b. Het Fermi-niveau is per definitie over het hele kristal constant en zal over de hele lengte van de rand door de Landauniveaus gaan (figuur 1.5a en b). De lijnen waar dat gebeurt worden randkanalen genoemd. Deze kanalen spelen een uiterst belangrijke rol in de elektrische transportverschijnselen die in een 2DEG in een magnetisch veld op kunnen treden. Hoewel niet geheel duidelijk is of de stroom door de randkanalen loopt of door de stroken ertussen, zal in dit werk worden aangenomen dat de randkanalen de stroom voeren.<sup>13-15</sup> De parallel met het

skipping orbits model is dan direct duidelijk. In beide modellen treedt alleen transport op langs de rand van het 2DEG.

### §1.4 'Absence of backscattering' en het Quantum Hall Effect

In de bulk treedt geen transport op als de vulfactor in de bulk een heel getal is.<sup>16</sup> De isolatie van de bulk van het 2DEG is dan goed. De elektronen die zich in een kanaal aan de ene kant van het preparaat bevinden, kunnen bij hele vulfactor in de bulk niet verstrooid worden naar de kanalen aan de andere kant van het 2DEG. Dit wordt 'absence of backscattering' genoemd. Dit betekent dat de bulk van het 2DEG isoleert. Büttiker heeft dit gegeven gebruikt om het Quantum Hall effect<sup>16</sup> te verklaren.

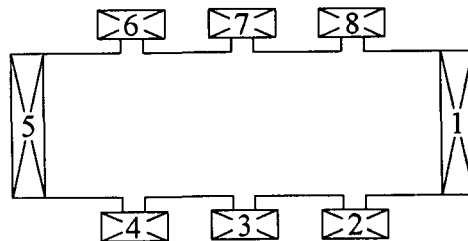


FIG. 1.4 Hall-bar geometrie. De stroom loopt i.h.a. tussen contacten 1 en 5. De Hallspanning ontstaat bijvoorbeeld tussen contacten 4 en 6. De magnetoweerstand wordt gemeten tussen contacten aan dezelfde kant van het preparaat, bijvoorbeeld 3 en 4.

Een effect dat nauw met het QHE verbonden is, is dat de magnetoweerstand (figuur 1.2) naar nul gaat bij gehele vulfactor. Door de randkanalen wordt dan een stroom gestuurd, terwijl de afname van de chemische potentiaal in een kanaal gemeten wordt met zijcontacten, zie figuur 1.4. De verhouding van het potentiaalverschil dat in deze vierpuntsmeting gemeten wordt en de stroom is per definitie evenredig met de magnetoweerstand. De evenredigheidsconstante wordt bepaald door de geometrie van het preparaat. Bij gehele vulfactor in de bulk wordt gemeten dat de magnetoweerstand nul wordt. De verklaring hiervan ligt in de absence of backscattering. Als er geen elektronen van een randkanaal aan de ene kant naar een randkanaal aan de andere kant kunnen verstrooien, moeten ze wel in hetzelfde kanaal blijven. De chemische potentiaal van een kanaal is direct gekoppeld aan de bezettingsgraad van het kanaal. Als de bezetting niet verandert, blijft de chemische potentiaal constant. Als gevolg van 'absence of backscattering' bij gehele vulfactor blijft de chemische potentiaal over de gehele lengte van een randkanaal constant. De verandering van de elektrostatiche potentiaal in een randkanaal is dan nul. Het

bijzondere van dit effect is dat de magnetoweerstand nul is bij gehele vulfactor in de bulk *ongeacht de geometrie van het preparaat*.<sup>16</sup> Als van contact 5 naar contact 1 (zie figuur 1.4) een elektrische stroom wordt gestuurd, en het magneetveld het papier uit wijst, hebben contacten 5, 6, 7 en 8 allemaal gelijke chemische potentiaal als er absence of backscattering is. De contacten 1, 2, 3, en 4 hebben ook gelijke chemische potentiaal. Vlakbij een contact met een andere chemische potentiaal blijkt de spanningsval op te treden.<sup>17</sup> Alleen daar treedt dissipatie op.

Het Halleffect wordt per definitie gemeten in een vierpuntsmeting, zie figuur 1.4. In de lengterichting van het preparaat, dat wil zeggen van contact 1 naar contact 5 wordt een stroom gestuurd. De Hallspanning wordt dan gemeten tussen twee zijcontacten tegenover elkaar, bijvoorbeeld contacten 4 en 6. De Hallweerstand wordt gedefinieerd als de verhouding tussen de Hallspanning en de opgelegde stroom. Bij het Quantum Hall Effect treden er plateaus op in de Hallweerstand als functie van het magneetveld. Om de ligging van de plateaus af te leiden, moeten enkele aannames gemaakt worden. De belangrijkste is wel de aanname van één-dimensionaal transport door de randkanalen. De contacten nemen de binnenkomende stroom van de kanalen volledig op. De kanalen die een contact verlaten zijn gevuld tot aan de chemische potentiaal van het contact dat ze verlaten. De stroom die wordt opgewekt door een opgelegd potentiaalverschil tussen twee contacten kan nu berekend worden. Deze volgt uit een integratie over alle elektronen met een energie tussen  $\mu_1$  en  $\mu_2$ . De bijdrage aan de stroom van  $dN$  elektronen met energie  $\epsilon$  wordt gegeven door

$$dI = v(\epsilon) \cdot e \cdot dN. \quad (1.4)$$

Hierin staat  $v(\epsilon)$  voor de snelheid van de deeltjes. Als in de integraal op de energie  $\epsilon$  wordt overgegaan, volgt voor de stroom

$$dI = v(\epsilon) \cdot e \cdot \frac{\partial N}{\partial \epsilon} \cdot d\epsilon. \quad (1.5)$$

In deze uitdrukking staat de afgeleide van het aantal deeltjes naar de energie. Dit is de toestandsdichtheid. Als één-dimensionaal transport wordt aangenomen, is de toestandsdichtheid omgekeerd evenredig met de snelheid van de deeltjes:

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon} = \frac{1}{\hbar v}. \quad (1.6)$$

Er geldt dat  $\mu_2 - \mu_1 = eV_{12}$ . Dit geeft voor de stroom

$$I = \frac{e^2}{h} V_{12}. \quad (1.7)$$

Dit is de stroom die door één kanaal loopt, mits er één-dimensionaal transport optreedt. Er kunnen echter meerdere kanalen parallel langs de rand van het 2DEG lopen. Als het aantal kanalen gegeven wordt door  $N_c$ , wordt de relatie

$$V_{12} = I \cdot \frac{h}{e^2} \frac{1}{N_c} \quad (1.8)$$

verkregen. Deze formule geldt onder de voorwaarde van absence of backscattering en onder de aanname van één-dimensionaal transport.

De Hallspanning wordt per definitie in een vierpuntsmeting gemeten. Daarbij wordt in de lengterichting door het preparaat een stroom gestuurd (contacten 1 en 5 van figuur 1.4) terwijl de Hallspanning wordt gemeten tussen twee zijcontacten (bijvoorbeeld 4 en 6). De zijcontacten zitten tegenover elkaar in het preparaat. In het geval van absence of backscattering heeft elk zijcontact dezelfde potentiaal als het stroomcontact waar de kanalen vandaan komen. Daarom geldt voor de Hallspanning  $V_H$ :

$$V_H = I \cdot \frac{h}{e^2} \frac{1}{N_c}. \quad (1.9)$$

Het aantal kanalen  $N_c$  hangt nauw samen met de vulfactor  $\nu$ , zie figuur 1.2. Stel dat het Fermiverniveau in de bulk in de gelokaliseerde toestanden ligt. Er zijn dan een aftelbaar aantal gedelokaliseerde energiegebieden onder het Fermiverniveau. Dit aantal is dan gelijk aan het aantal randkanalen  $N_c$ . Zolang het Fermiverniveau in de gelokaliseerde toestanden blijft liggen, verandert het aantal randkanalen  $N_c$  niet. De spanning tussen de twee contacten verandert dan niet met het magneetveld als de opgelegde stroom constant wordt gehouden. Zodra het Fermiverniveau in de gedelokaliseerde toestanden terecht komt, verandert de Hallspanning weer met het magneetveld.

In het geval van hoge vulfactor in de bulk wordt het klassieke Halleffect gemeten. Daarin geldt voor de Hallspanning

$$V_H = \frac{BI}{eN_e} \tag{1.10}$$

### §1.5 Het Chklovskii model

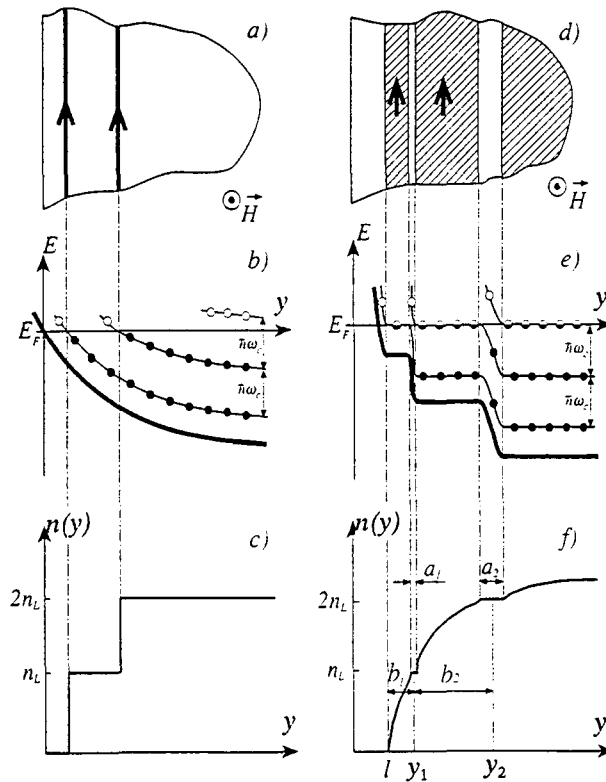


FIG. 1.5 Büttiker model (links) en Chklovskii model (rechts). De pijlen geven de stroom aan. Gearceerde stroken zijn metallisch. Volle bolletjes staan voor bezette toestanden, lege voor onbezette toestanden.

Tot nu toe is aangenomen dat de randkanalen lijnvormig zouden zijn. De Landauniveaus zouden het Fermineveau snijden zoals getekend in figuur 1.5b. Figuur 1.5c expliciteert dat in deze situatie de elektronenconcentratie van buiten naar binnen stapsgewijs toeneemt met de degeneratie van een Landauniveau. Een dergelijk verloop van de elektronenconcentratie is ongeloofwaardig. Het is zeker niet zo dat de elektronen in deze verdeling minimale potentiële energie hebben. Daarom zijn modellen ontwikkeld die nog wel met deltafuncties in de toestandsdichtheid werken,

maar die voor elk deeltje minimale potentiële energie opleveren. Het model van D. B. Chklovskii *et al.*<sup>2</sup> zal hier worden besproken. De resultaten van Chklovskii worden bevestigd door berekeningen van K. Lier *et al.*<sup>19</sup> In het model van Chklovskii treden de stappen in de elektronenconcentratie niet op. De discontinuïteiten in de elektronenconcentratie zijn opgeheven. De vorming van geleidende en niet geleidende stroken van *eindige breedte* is een consequentie van het model. In het model van Chklovskii wordt een preparaat als volgt beschreven. Een grote geleidende plaat (links in figuur 1.6) zorgt voor de opsluitpotentiaal. Het 2DEG staat rechts in de figuur en ligt aan aarde. De geïoniseerde donoren zijn met plusjes aangegeven. Het 2DEG, de plaat en de donoren liggen in hetzelfde vlak, dat tevens het oppervlak van het preparaat vormt. Het preparaat heeft diëlektrische constante  $\epsilon$ .

De geleidende plaat wordt op een negatieve spanning  $-V_g$  gebracht. De elektronen in het 2DEG worden hierdoor afgestoten. Over een breedte  $2l$  langs de rand van de plaat zijn geen vrije elektronen. Alleen de positieve donoren, die vast zitten in het rooster, zijn in dit gebied achter gebleven. Voor  $x \geq l$  neemt de elektronenconcentratie toe met toenemende  $x$ , zie figuur 1.7. Dit gebied wordt de gedeeltelijk gedepleerde zone genoemd. Op voldoende grote afstand van de plaat wordt de elektronenconcentratie gelijk aan de concentratie van geïoniseerde donoren.

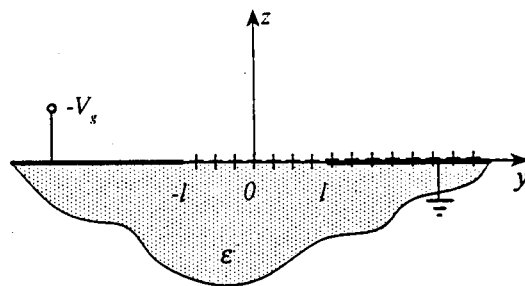


FIG. 1.6 Overzicht van de opzet van het model van Chklovskii. Links de geleidende plaat, rechts het elektronengas. De geïoniseerde donoren zijn met plusjes aangegeven. De plaat, de donoren en het 2DEG liggen op het oppervlak van het preparaat.

In de gedeeltelijk gedepleerd zone bevinden zich al elektronen. Deze zijn vrij en daarom geleidt het 2DEG. Als door het 2DEG geen stroom loopt, wordt het een equipotentiaalvlak. Hierdoor wordt het gehele systeem gereduceerd tot een systeem van twee geleidende vlakken, op onderlinge afstand  $2l$  met daartussen de oppervlaktelading van de donoren in de gedepleerde zone. Het elektronengas wordt



aan aarde gelegd zodat de potentiaal ervan nul is. Het bijbehorende elektrostatiche probleem kan worden opgelost. Het magneetveld wordt hierbij nog op nul gehouden. Dit levert onder meer de elektronenconcentratie als functie van de afstand tot de plaat op.

Er wordt nu een sterk magnetisch veld ingevoerd. Aangenomen wordt vanaf nu dat de toestandsdichtheid bestaat uit deltafuncties op  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ , met  $n$  een geheel getal. Spinsplitsing wordt niet meegenomen in de berekeningen. *De kern van het model van Chklovskii is dat de elektronenconcentratie als functie van de afstand tot de negatieve plaat niet verandert tijdens het aanbrengen van het magneetveld.* Het aanbrengen van het magneetveld beïnvloedt de elektronenconcentratie zoals zonder magneetveld werd berekend niet. Een verandering van deze elektronenconcentratie kost erg veel energie die volgens de wetten van de elektrostatica niet door het magnetisch veld geleverd kan worden.

De aanname van de deltafuncties zorgt ervoor dat het Fermivolume over (vrijwel) de gehele breedte van de gedeeltelijk gedepleerde zone op een Landauniveau moet liggen. De energieniveaus boven het Fermivolume zijn immers helemaal leeg en die eronder helemaal vol. Het Fermivolume moet op een Landauniveau liggen, anders kan de elektronenconcentratie niet van de afstand tot de negatieve plaat afhangen, zie figuur 1.7. In dit geval is bovendien de elektrostatiche potentiaal constant over de breedte van deze strook. Deze strook gedraagt zich metallisch. In figuur 1.5d is dit aangegeven door de arcering, de isolerende stroken zijn blank. Het potentiaalverschil  $\hbar\omega_c/e$  wordt overbrugd in de isolerende stroken die tussen de geleidende stroken in liggen, zie figuur 1.5e en 1.7. In deze isolerende stroken ligt het Fermivolume niet op een Landauniveau. Hierdoor is de vulfactor in deze stroken precies heeltallig. Deze stroken isoleren goed. In de situatie zonder magnetisch veld loopt de elektronenconcentratie continu op met toenemende afstand tot de negatieve plaat, maar de elektronenconcentratie in de isolerende stroken is constant (zie figuur 1.7); de vulfactor is er immers over de hele breedte van de isolerende strook exact heeltallig. Omdat de elektronenconcentratie nauwelijks mag veranderen tijdens het aanbrengen van het magneetveld, moeten de isolerende stroken (met constante elektronenconcentratie) wel erg smal zijn vergeleken met de geleidende stroken ertussen, zie figuur 1.7.

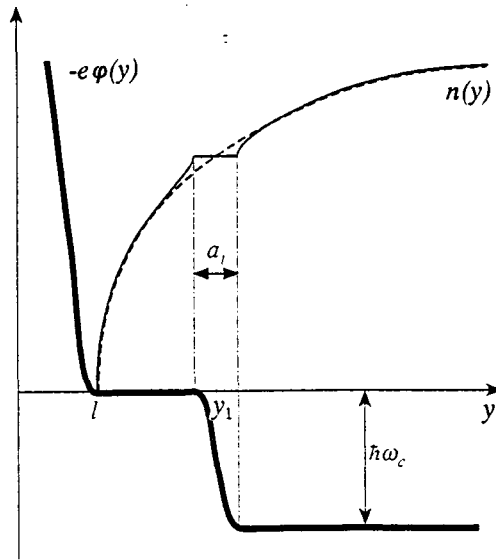


FIG. 1.7 Rand van het 2DEG in het Chklovskii model, met vulfactor in de bulk gelijk aan 1,5. De stippellijn is de elektronenconcentratie zonder magneetveld, de getrokken lijn die met magneetveld. De dikke lijn is de elektrostatistische potentiaal.

De afleiding van de breedten van de stroken zal hier niet gegeven worden. Er zal worden volstaan met de einduitkomsten. De isolerende stroken bevinden zich op bij  $y=y_v$ , waarbij  $v$  staat voor de (heeltallige) vulfactor. Hierbij staat  $y$  voor de afstand tot het midden van de gedepleerde zone.

De breedten  $a_v$  van de isolerende stroken zijn

$$a_v = \left[ \frac{8\hbar\omega_c \varepsilon}{\pi e^2 \frac{dN_e}{dy} \Big|_{y=y_v}} \right]^{1/2}. \quad (1.11)$$

Deze breedten zijn zeer veel kleiner dan de breedten van de geleidende stroken. De afstand tussen twee lijnen met een verschil in vulfactor van één wordt gegeven door

$$b_v = y_v - y_{v-1} \approx \frac{N_L}{dN_e/dy \Big|_{y=y_v}}. \quad (1.12)$$

De breedte van de geleidende stroken wordt dan gegeven door  $b-a$ .

In het geval van een lineaire gradiënt in de elektronenconcentratie is direct in te zien dat deze formule correct is. De vulfactor neemt dan met één toe over een afstand  $b_v$ .

De elektronengradiënt is dan gelijk aan  $N_L/b_v = dN_e/dy$ . Uiteraard is de elektronenconcentratie die in bovenstaande formules verschijnt die in de situatie zonder magneetveld.

Het model van Chklovskii verklaart het ontstaan van brede, geleidende en smalle, isolerende stroken langs de rand van het 2DEG. Dit zijn belangrijke conclusies die het inzicht in de effecten rond randkanalen vergroten. Helaas geeft het model van Chklovskii slechts een theoretisch beeld van de breedten van de stroken. Dit is het gevolg van de vele veronderstellingen die nodig zijn om bovenstaande formules te verkrijgen. De aanname dat de rand van het 2DEG beschreven kan worden door een grote geleidende plaat in hetzelfde vlak als het 2DEG is hiervan wel het beste voorbeeld. Er zijn nog vele andere randvoorwaarden die de praktijk nauwelijks benaderen. Er is geen verbreding van de Landauniveaus, er zijn geen verontreinigingen, er is geen afstand tussen de geïoniseerde donoren en het 2DEG en er zijn geen fluctuaties in de concentratie van geïoniseerde donoren. Aan formule (1.11) mag daarom niet te veel waarde gehecht worden. De afleiding van formule (1.12) is veel eenvoudiger. Er zijn veel minder aannames nodig die de geldigheid van deze formule zouden kunnen aantasten. Daarom kan deze formule wel worden toegepast.

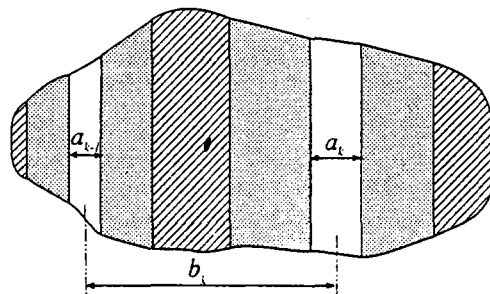


FIG. 1.8 De verschillende stroken bij verbrede Landauniveaus. De gelokaliseerde stroken (gestippeld) zitten aan weerskanten van de gedelokaliseerde stroken (gearceerd). De blanke stroken zijn incompressibel, de andere stroken zijn compressibel.

Figuur 1.8 is een overzicht van de stroken waarin de verbreding van de Landauniveaus is weergegeven. Samen met de verbreding van de Landauniveaus werden in paragraaf §1.1 gelokaliseerde en gedelokaliseerde toestanden ingevoerd. In de figuur zijn stroken met gedelokaliseerde toestanden aan het Fermi-niveau gearceerd. In de overige stroken ligt het Fermi-niveau in gelokaliseerde toestanden. In

---

de blanke stroken is een exact heeltallige vulfactor. Deze stroken worden incompressibel genoemd. In de andere stroken is de vulfactor niet heeltallig, deze stroken worden compressibel genoemd. Elektrisch transport vindt plaats door de gedelokaliseerde compressibele stroken (gearceerd). De overige stroken isoleren.

---

## Hoofdstuk 2 Capaciteit en randkanalen

### §2.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk is uitgelegd dat de randkanalen een eindige breedte hebben. Dit is het gevolg van de optredende elektrostatische effecten. De eindige breedte van de stroken maakt het mogelijk de breedten ervan te bepalen. De gebruikte methode om de breedte van de stroken te bepalen werkt met behulp van een front gate. Dit is een geleidend metaallaagje dat op een deel van het oppervlak van het preparaat wordt aangebracht. Het ligt dan parallel aan het 2DEG. Het deel van het 2DEG dat bijdraagt aan de capaciteit van het systeem front gate - 2DEG moet aan twee voorwaarden voldoen: het moet geleiden en het moet de front gate overlappen. De capaciteit kan gemeten worden, zie paragraaf §3.4. De front gate en het 2DEG zijn van elkaar gescheiden door een laag die bij lage temperaturen goed isoleert. Voor de positie van de front gate zijn er twee gevallen te onderscheiden: de front gate ligt over de bulk van het 2DEG of hij ligt over de rand. In dit hoofdstuk zullen beide gevallen besproken worden.

### §2.2 Front gate over de bulk van het 2DEG

In de bulk van het 2DEG spelen plaatsafhankelijke effecten een veel kleinere rol dan aan de rand van het 2DEG. In de bulk van het 2DEG is de elektronenconcentratie niet plaatsafhankelijk, de vulfactor is constant. De geleiding van het 2DEG speelt een cruciale rol in alle capaciteitsmetingen. In 1985 hebben R.K. Goodall *et al.*<sup>20</sup> een model ontwikkeld waarin dit naar voren komt. Dit model wordt het resistive plate model genoemd. De opzet van dit model is als volgt. De front gate geleidt zeer veel beter dan het 2DEG. Het elektronengas wordt verbonden met een wisselspanningsbron die een kleine spanning met hoekfrequentie  $\omega$  afgeeft. De condensator, die wordt gevormd tussen het 2DEG en de front gate, wordt zo opgeladen en weer ontladen. Hierdoor loopt er een periodieke stroom van en naar het 2DEG. Deze stroom kan gedetecteerd worden, zodat de impedantie van het systeem bepaald kan worden. Het magneetveld wordt in eerste instantie nul gehouden.

Figuur 2.1 bevat de kern van het resistive plate model. Aan de hand van dit plaatje zijn twee limietgevallen te onderscheiden: De geleiding van het 2DEG is zeer groot

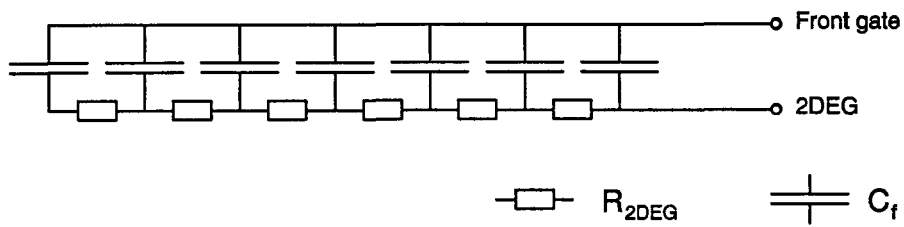


FIG. 2.1 Elektrisch vervangingschema voor het resistive plate model.

of zeer klein, corresponderend met  $R_{2DEG} \downarrow 0$  respectievelijk  $R_{2DEG} \rightarrow \infty$ . In het eerste geval gedraagt het systeem zich als de parallelschakeling van alle infinitesimaal kleine vlakke condensatorpjes. Dit levert de bekende formule voor een vlakke condensator op voor de capaciteit. Hierdoor wordt de impedantie van het systeem gegeven door de bekende formule voor een condensator  $Z = 1/j\omega C_{front}$ .

In het andere limietgeval,  $R_{2DEG} \rightarrow \infty$ , is het direct duidelijk dat de impedantie van het systeem naar oneindig moet gaan. Er loopt geen stroom. De capaciteit van de front gate en het 2DEG wordt dan klein.

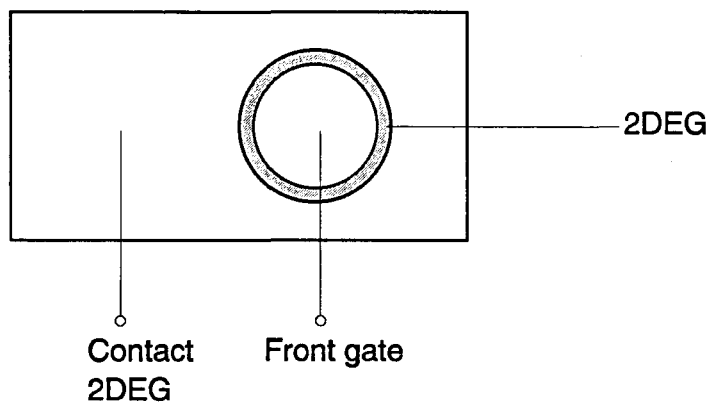


FIG. 2.2 Geometrie waarvoor de complexe capaciteit wordt uitgerekend. Het 2DEG (grijs) wordt omringd door een geleidend contact. Het 2DEG bevindt zich voornamelijk onder de front gate.

De weerstanden die in figuur 2.1 zijn getekend worden in het resistive plate model vervangen door de geleiding  $\sigma$ . De geometrie waarvoor in de literatuur de impedantie uitgerekend wordt, is als volgt, zie figuur 2.2. De front gate is cirkelvormig en ligt

parallel aan het 2DEG op het oppervlak van het preparaat. Het 2DEG is ook cirkelvormig en ligt vrijwel helemaal onder de front gate. Het 2DEG en de front gate zijn van elkaar gescheiden door een dunne isolerende laag. De straal van het 2DEG is groter dan de straal van de front gate. Een contact ligt om het 2DEG heen. De stroom loopt in radiële richting als er geen magneetveld is aangebracht. Voor de capaciteit geldt dan de formule

$$C_{front} = C_{max} \cdot \frac{\tanh(\alpha)}{\alpha} \quad (2.1)$$

waarvan de afleiding in de appendix staat. In deze formule geldt voor de grootte  $\alpha$

$$\alpha = \left( \frac{j\omega C_{max}}{\pi\sigma} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

In deze formules is  $\alpha$  een complexe, dimensieloze grootte. Deze bepaalt het hele gedrag van de capaciteit, die ook complex is. Uit formule (2.2) blijkt dat  $\alpha^2$  staat voor de verhouding van het capacitieve en het resistieve gedrag van de resistive plate. Omdat  $\alpha$  complex is, ontstaat er een reëel deel van de capaciteit en een imaginair deel. De reële en imaginaire delen van  $\tanh(\alpha)/\alpha$  zijn getekend in figuur 2.3. Het is interessant om nogmaals naar de limietgevallen van goede en slechte geleiding te kijken. Deze komen overeen met kleine respectievelijk grote  $\alpha$ . In de eerste limiet geleidt het elektronengas goed. De resistive plate benadert de geleiding van de goed geleidende plaat. Voor kleine  $\alpha$  geldt dat  $\tanh(\alpha) \sim \alpha$ . Hierdoor wordt, zoals verwacht, de capaciteit zuiver reëel en de impedantie zuiver imaginair. De stroom loopt nu  $90^\circ$  achter op de opgelegde spanning, zoals bij een gewone condensator.

In het tweede geval, slechte geleiding, wordt de weerstand van de resistive plate steeds belangrijker. De weerstand van het elektronengas neemt dusdanig toe dat de condensator nauwelijks opgeladen kan worden. Dit zorgt ervoor dat  $\alpha$  groot wordt. Uit de grafiek volgt dan dat het reële deel van de complexe capaciteit gelijk wordt aan het imaginaire deel. De stroom loopt dus precies  $45^\circ$  achter op de opgelegde spanning, in plaats van  $90^\circ$ . Zowel het imaginaire deel als het reële deel worden omgekeerd evenredig met  $\alpha$ , dat wil zeggen, evenredig met de wortel uit de geleiding  $\sigma$ . De beide delen van de capaciteit gaan naar nul. De (complexe) impedantie is omgekeerd evenredig met de complexe capaciteit ( $Z = 1/j\omega C$ ) en gaat naar oneindig, zoals verwacht werd volgens bovenstaande beschouwing.

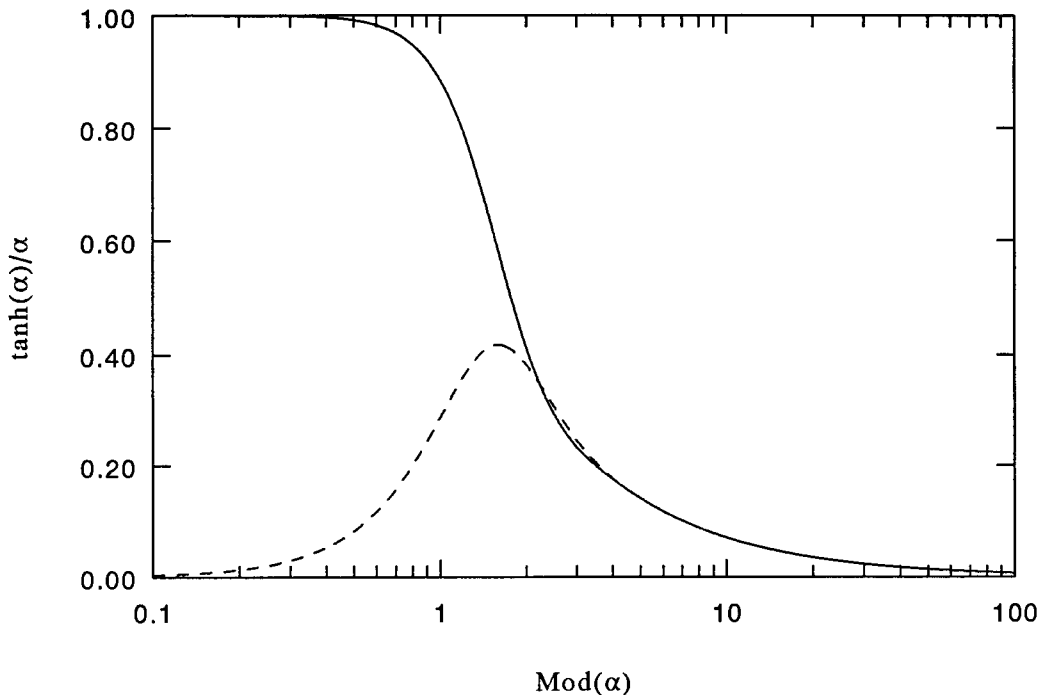


FIG. 2.3 Het reële en imaginaire deel van  $\tanh(\alpha)/\alpha$  tegen  $|\alpha|$ . Het imaginaire deel is gestippeld.

Het is mogelijk om een preparaat te maken dat de geometrie heeft van figuur 2.2. Het reële deel en het imaginaire deel van de capaciteit kunnen dan experimenteel bepaald worden als functie van het magneetveld. Als de vulfactor in de bulk een geheel (even) getal is, vertoont het reële deel van de capaciteit minima vanwege het isolerend gedrag van de bulk, terwijl bij niet-heeltallige vulfactoren de capaciteit de situatie zonder magneetveld benadert, zie figuur 2.4. Het verloop van de capaciteit met het magneetveld kan met het resistive plate model verklaard worden. Als de vulfactor een heel getal is, treedt er 'absence of backscattering' op. Dit wil zeggen dat er van de ene kant van het preparaat geen elektronen verstrooid kunnen worden naar de andere kant. Dit betekent dat de bulk van het preparaat, waar de front gate overheen ligt, isoleert. Hierdoor wordt de gemeten capaciteit klein. In hoofdstuk 4 zal hierop worden teruggekomen.

Volgens het bovenstaand model hangt de gemeten capaciteit alleen af van de geleiding  $\sigma$  onder de front gate. Bij heeltallige vulfactor is de geleiding slecht, maar de geleiding hangt wel af van de temperatuur. Ook bij andere vulfactoren daalt de geleiding met de temperatuur, als het Fermiverniveau maar in gelocaliseerde toestanden



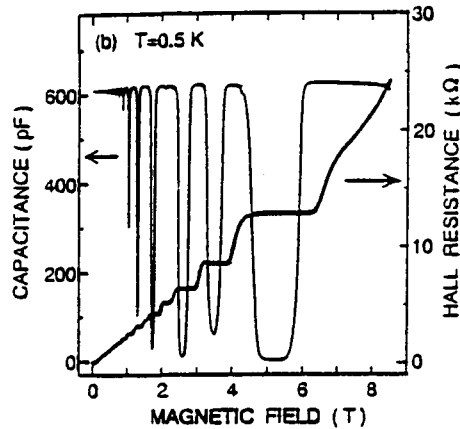


FIG. 2.4 Het reële deel van de capaciteit samen met de Hallweerstand als functie van het magneetveld. De capaciteit is bij gehele vulfactoren minimaal omdat de bulk dan isoleert. (Ref 16, 20).

ligt. Als het Fermi-niveau midden tussen twee Landauniveaus in ligt, is de geleiding 'fonon assisted'. De geleiding hangt af van het aantal elektronen dat thermisch geëxciteerd kan worden naar een volgend energieniveau, en op daarom van de temperatuur  $T$ . Uit figuur 2.5 blijkt hoe de geleiding daalt met de temperatuur, mits de vulfactor geheel is. Als de excitatie-energie veel groter is dan  $k_B T$  kan de Fermi-Dirac statistiek benaderd worden met de Boltzmann statistiek. De geleiding hangt dan exponentieel af van  $1/T$ :

$$\sigma = \sigma_{min} \cdot \exp\left[-\frac{\Delta E}{k_B T}\right]. \quad (2.3)$$

In deze formule staat  $\Delta E$  voor het energieverval tussen het Fermi-niveau (dat midden tussen twee Landauniveaus moet liggen) en de energie van de laagste gedelokaliseerde toestand van het laagste Landauniveau boven het Fermi-niveau. De capaciteit hangt van de geleiding af volgens formules (2.1) en (2.2). Bij dalende temperatuur nemen het reële en imaginaire deel van de capaciteit af, mits het Fermi-niveau tussen twee energieniveaus ligt. De impedantie wordt dan groot. In de volgende paragraaf zal uitgelegd worden hoe van dit effect gebruik kan worden gemaakt.

### §2.3 Het Oto model: Front gate over de rand

Het model van Goodall *et al.* wordt het 'resistive plate' model genoemd. Formules (2.1-2) zijn afgeleid voor een cirkelvormige front gate. In de praktijk is dit vaak niet

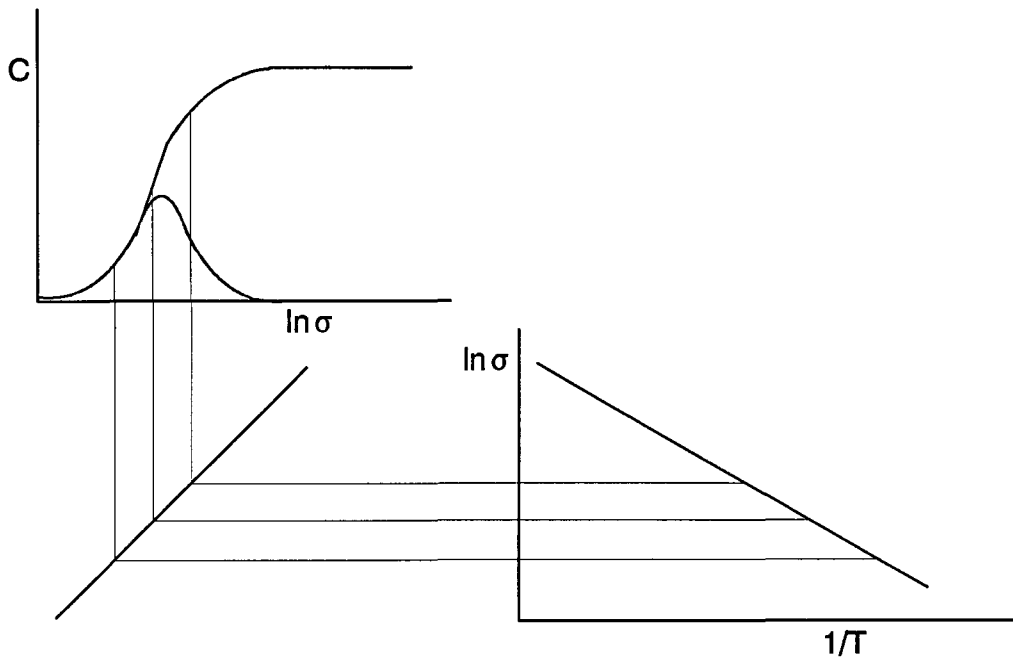


FIG. 2.5 De geleiding van de gebieden met heeltallige vulfactor is slecht, maar hangt wel af van de temperatuur  $T$ . Daardoor daalt in het resistive plate model de capaciteit.

handig, vandaar dat K. Oto *et al.*<sup>3</sup> een licht gewijzigd model voorstellen. Dit model zal worden aangeduid met het Oto-model. Zij wilden de breedte van de kanalen aan de rand bepalen uit de capaciteitsmetingen. De front gate moet dan over de rand van het 2DEG gelegd worden. De randkanalen geven dan een reële bijdrage aan de capaciteit, omdat ze metallisch gedrag vertonen. Tussen de randkanalen in liggen de isolerende stroken. De geringe geleiding daarvan wordt in het model van K. Oto *et al.* niet verwaarloosd. Hoewel de isolerende stroken lang en smal zijn, wordt aangenomen dat de formules voor een cirkelvormig gebied met slechte geleiding geldig zijn. Onder deze aanname zijn de formules (2.1) en (2.2) geldig.

In het Oto-model worden twee bijdragen in de capaciteit onderscheiden, zie figuur 2.6. De eerste,  $C_e$ , is het gevolg van de geleidende kanalen onder de front gate. Hiervoor wordt de formule voor de vlakke condensator gebruikt,  $C_e = \epsilon_0 \epsilon_r A/d$ . Voor het oppervlak  $A$  wordt de overlap van de front gate met de geleidende kanalen genomen. De bijdrage aan de capaciteit van de geleidende stroken is reëel. De tweede bijdrage is complex en is afkomstig van het resistive plate model. Als de

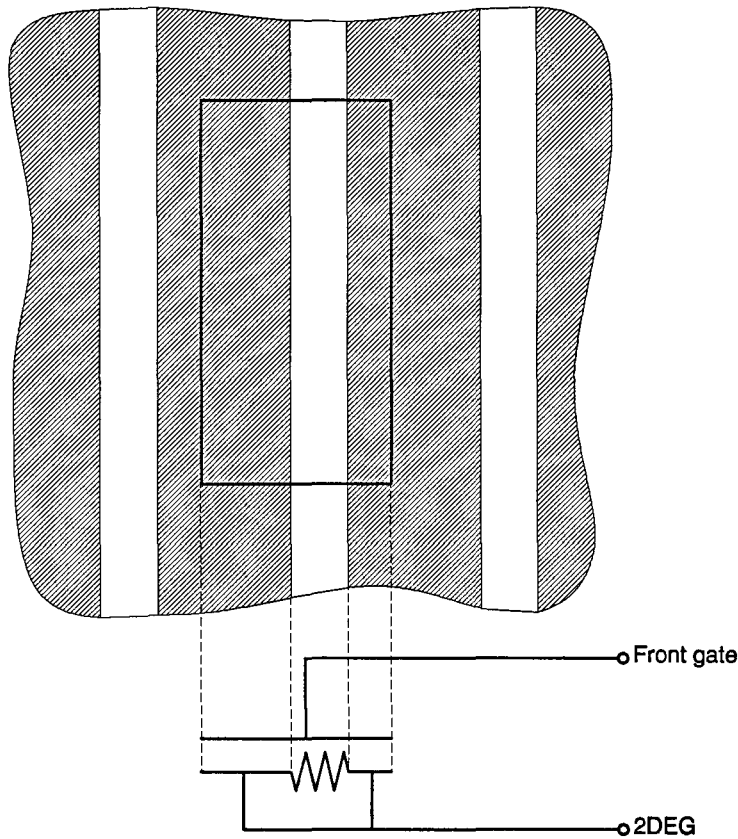


FIG. 2.6 In de capaciteit zijn er twee bijdragen te onderscheiden. De geleidende stroken zijn gearceerd en de isolerende stroken zijn blank. Deze figuur is niet op schaal.

(geringe) geleiding van de isolerende stroken tussen de randkanalen niet verwaarloosd wordt, is deze bijdrage nodig. In dit model geldt voor de complexe capaciteit  $C_{meet}$  die uit de metingen gehaald wordt:

$$C_{meet} = C_e + C_{rp}(\sigma) = C_e + (C_{tot} - C_e) \frac{\tanh(\alpha)}{\alpha}. \quad (2.4)$$

De capaciteit van de geleidende kanalen wordt opgeteld bij die van de resistive plate; dit komt overeen met een parallelschakeling van beide capaciteiten. Bovenstaande formule kan geïnterpreteerd worden als een 'uitwisseling' van het resistive plate model met het vlakke condensator model. Figuur 2.6 illustreert dit. Hierin is te zien dat een verbreding van de isolerende strook ten koste gaat van de bijdrage van de

geleidende stroken, en andersom. Voor de duidelijkheid is hierin de rand van het 2DEG niet getekend.

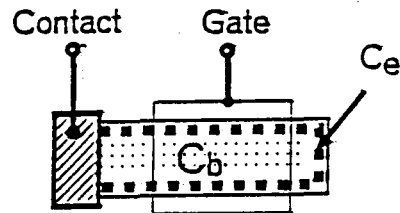


FIG. 2.7 Het preparaat van K. Oto *et al.* De geleidende randkanalen zijn met blokjes aangegeven. De stippen staan voor de bijdrage van de bulk aan de capaciteit. De front gate ligt aan weerskanten over de rand van het 2DEG.

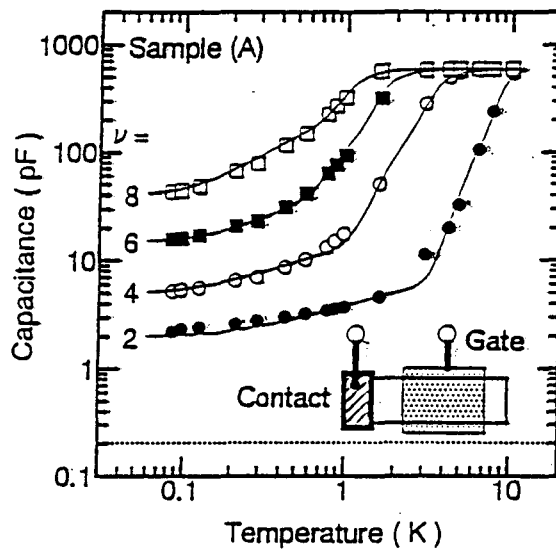


FIG. 2.8 Grafiek van de temperatuurafhankelijkheid van de capaciteit bij gehele vulfactor in de bulk, volgens K. Oto *et al.*

K. Oto *et al.* voerden hun experimenten uit aan een rechthoekig preparaat met een rechthoekige front gate. Deze front gate ligt aan twee kanten over de rand van het preparaat heen, zoals getekend in figuur 2.7. Bij een groot aantal temperaturen werden grafieken van de capaciteit tegen het magneetveld gemaakt. De capaciteit bij gehele vulfactor in de bulk werd in deze grafieken opgezocht. Deze waarden van de capaciteit in de minima kunnen dan in een grafiek worden uitgezet tegen de temperatuur, zie figuur 2.8. De bijdrage van de bulk aan de capaciteit is klein bij gehele vulfactor en wordt nog kleiner bij het verlagen van de temperatuur. De bijdrage van de randkanalen aan de capaciteit blijft dan over. Zodra de capaciteit bij

gehele vulfactor niet meer van de temperatuur afhangt, kan worden aangenomen dat de bijdrage van het resistive plate model te verwaarlozen is bij die van de metallische randkanalen. Voor vulfactoren 2 en 4 blijkt dat de bijdrage van het resistive plate model bij temperaturen onder 1 K verwaarloosd mag worden.

Het temperatuurtraject waarbij gemeten is, lag tussen 10 mK en 10 K. Bij dalende temperatuur blijkt de capaciteit in de minima af te nemen tot een verzadigingswaarde. De afname is het gevolg van de temperatuurafhankelijkheid van de geleiding in het resistive plate model en de verzadigingswaarde is het gevolg van de metallische randkanalen onder de front gate, zodat eenvoudig de breedte van de geleidende stroken bepaald kan worden. Deze breedten variëren van 0,7  $\mu\text{m}$  bij vulfactor 2 bij 4,8 Tesla tot 13  $\mu\text{m}$  bij vulfactor 8 bij 1,2 Tesla, zie tabel 1.

Tabel 1 <i>Experimentele resultaten van K. Oto et al.</i> <sup>3</sup>				
Vulfactor	2	4	6	8
Magneetveld	4.8 T	2.4 T	1.6 T	1.2 T
Breedte	0.7 $\mu\text{m}$	1.7 $\mu\text{m}$	5.2 $\mu\text{m}$	13 $\mu\text{m}$

## §2.4 Het gebruikte model

Er werden preparaten gebruikt waarin het mogelijk is de geleidende kanalen van de rand af te drukken en ze naar de bulk van het preparaat te brengen. Dit kan op een goed beheersbare manier gebeuren. Deze techniek zal besproken worden in paragraaf §3.3. Voor het moment is het voldoende om te weten dat de posities van de stroken veranderd kunnen worden.

Bij de beschrijving zal verondersteld worden dat de kanalen een zijdelingse beweging uitvoeren. Voor de duidelijkheid zullen de kanalen als goede geleiders behandeld worden en de gebieden ertussen als goede isolatoren. Dit is correct bij voldoende lage temperatuur.<sup>3</sup> De capaciteit wordt dan bepaald door het geleidende deel van het 2DEG direct onder de front gate volgens de formules van de vlakke condensator. Figuur 2.9 is een overzicht van de optredende effecten. In deze figuur verplaatsen de kanalen zich naar rechts als ze de fasen 1, 2, 3 en 4 achtereenvolgens doorlopen. Zoals in het Chklovskii model werd aangetoond, zijn de geleidende stroken veel

breder dan de isolerende stroken. Daarom zal worden uitgegaan van een geleidende strook die de front gate volledig overlapt (1). De capaciteit is dan maximaal. Zodra er een isolerende strook onder de front gate komt (2), neemt de overlap van de geleidende strook met de front gate lineair af met de verplaatsing. Hierdoor neemt de capaciteit ook lineair af met de verplaatsing. Dit gaat door totdat de isolerende strook over zijn hele breedte onder de front gate ligt (3). Dan blijft de capaciteit constant. De volgende geleidende strook komt dan onder de front gate. De afname van de gemeten capaciteit komt helemaal voor rekening van de ene isolerende strook, die nu over zijn gehele breedte onder de front gate ligt. Zodra deze strook de overkant van de front gate heeft bereikt, neemt de capaciteit weer toe (4). Dit gaat lineair met de verplaatsing. De afgeleide van de capaciteit naar de verplaatsing is gelijk maar tegengesteld van teken, vergeleken met de afnemende capaciteit. Zodra de isolerende strook onder de front gate uit is geschoven, wordt weer de capaciteit gemeten die in de situatie zonder magnetisch veld ook werd gemeten. In beide gevallen is de geleiding onder de front gate in het 2DEG immers hoog: bij hoge magneetvelden door het metallisch karakter van de kanalen en zonder magneetveld door de geleiding van het 2DEG. De capaciteit is gelijk aan de capaciteit in de situatie zonder magneetveld tenzij een niet-geleidende strook met breedte  $a$  onder de front gate schuift. Dan neemt de capaciteit af met maximaal  $\epsilon_0 \epsilon_r l_f a/d_f = a l_f C_f$ . Hierin is  $l_f$  de lengte van de front gate en  $d_f$  staat voor de afstand van de front gate tot het 2DEG, terwijl  $C_f$  staat voor de capaciteit per oppervlakte-eenheid. De breedte  $a$  van de isolerende stroken kan zo uit de capaciteit gehaald worden.

Samenvattend kan worden gesteld dat de capaciteit als functie van de verplaatsing gelijk is aan de capaciteit bij  $B = 0$  Tesla, met een aantal afwijkingen. Deze afwijkingen ontstaan als isolerende stroken onder de front gate schuiven. De capaciteit kan worden getekend met rechte horizontale lijnen met rechte, diagonale lijnen ertussen. Deze hellingen van deze diagonale lijnen zijn gelijk, afgezien van een plus- of minteken.

Bij de interpretatie van de resultaten moet rekening gehouden worden met het ontstaan van gelokaliseerde en gedelokaliseerde toestanden. De stroken waar het Fermi-niveau in gelokaliseerde toestanden ligt, isoleren. De stroken waar het Fermi-niveau in gedelokaliseerde toestanden ligt, zijn de geleidende stroken.

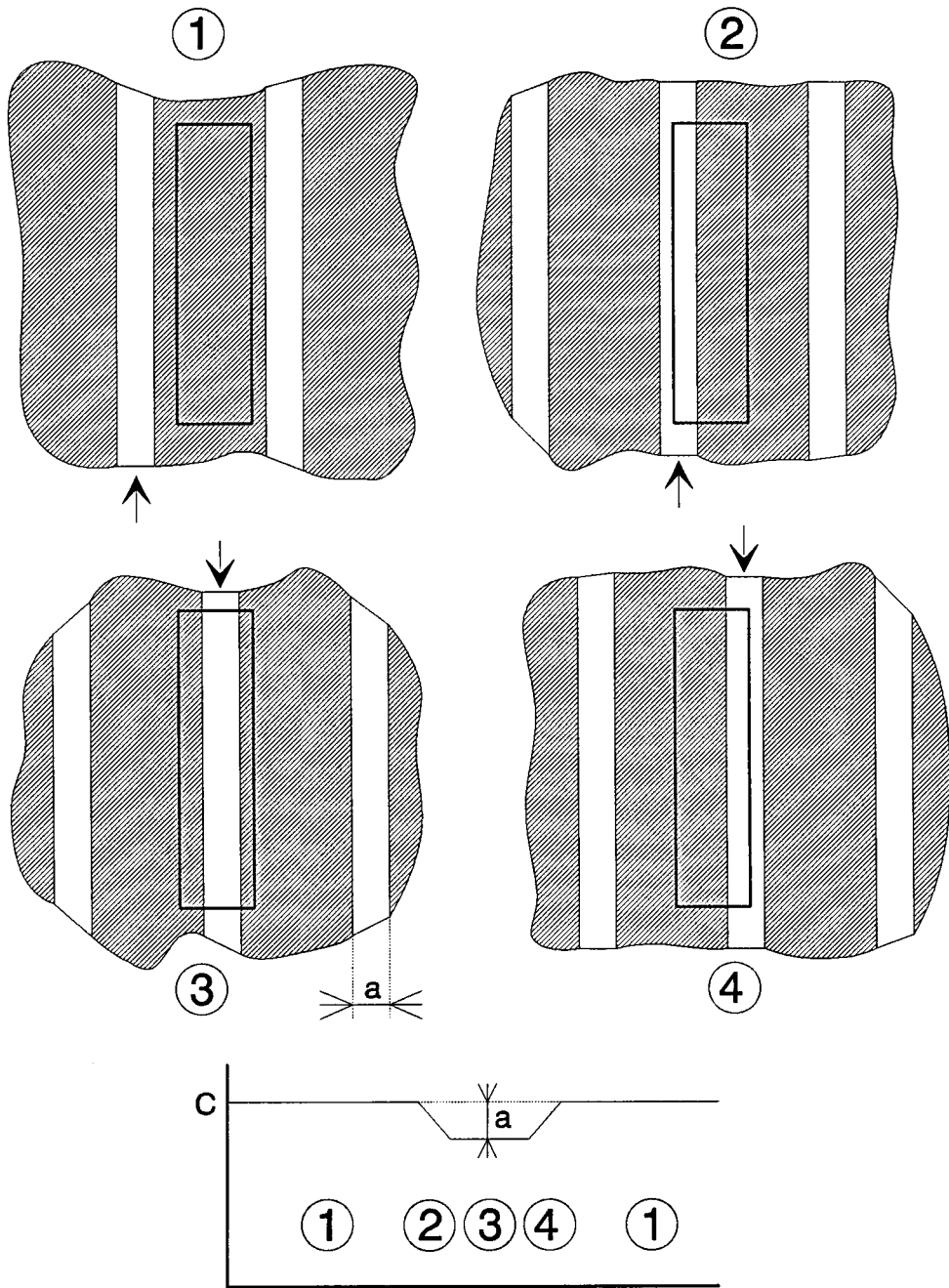


FIG. 2.9 De stroken verplaatsen zich van links naar rechts. Daarbij verandert de capaciteit als gevolg van verschillen in de geleiding van de stroken. De verhouding van de breedten van de isolerende en geleidende stroken is niet op schaal.

## Hoofdstuk 3 Experimentele opzet

### §3.1 Opstellingen

Bij twee temperaturen werden experimenten uitgevoerd. Een temperatuur van 1,5 K en een magnetveld van 7 Tesla konden in een gewone cryostaat bereikt worden. Een ander systeem om lage temperaturen te bereiken is de mengkoeler. In een mengkoeler daalt de temperatuur tot ongeveer 100 mK. In deze opstelling kan een magnetveld veld van maximaal 12 Tesla opgewekt worden.

### §3.2 Preparaten

De resultaten die in dit verslag gepresenteerd worden, zijn verricht aan preparaat W485-13 en aan preparaat W510-10. De lagenstructuren van de wafers waarvan deze preparaten zijn gemaakt, worden gegeven in tabel 2. De dikten van de meeste lagen zijn bij beide wafers gelijk; alleen de gedoteerde laag en de laag op het substraat hebben andere dikten.

Tabel 2 <i>Lagenstructuur van wafers W485 en W510.</i>			
W485	W510	Samenstelling	Dotering
17 nm	17 nm	GaAs	-
38 nm	31 nm	$\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$	$\text{Si } 1,33 \cdot 10^{18} \text{ cm}^3$
20 nm	20 nm	$\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$	(Spacer)
0,72 $\mu\text{m}$	0,72 $\mu\text{m}$	GaAs	-
$\delta$	$\delta$	Be	Be (Acceptor)
0,1 $\mu\text{m}$	0,1 $\mu\text{m}$	GaAs	-
0,5 $\mu\text{m}$	0,5 $\mu\text{m}$	2,5 nm GaAs 2,5 nm $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$	Superrooster van 200 laagjes.
0,28 $\mu\text{m}$	0,16 $\mu\text{m}$	GaAs	-
Substraat	Substraat	GaAs	-



Deze lagen worden door middel van Molecular Beam Epitaxy op elkaar gegroeid. Op het GaAs wordt een superrooster van 200 laagjes gegroeid. Onzuiverheden op het oppervlak van het substraat blijven in dit superrooster achter. Bovenop dit superrooster wordt  $0,82 \mu\text{m}$  GaAs gegroeid. Het groeien van deze laag wordt alleen onderbroken om een dunne laag beryllium te groeien. Met deze  $\delta$ -laag kan de opsluitpotentiaal beïnvloed worden, zie paragraaf §3.3. Vlakbij de grens van de GaAs laag en de spacer ontstaat het 2DEG. Op de spacer wordt het gedoteerde AlGaAs gegroeid. Deze donoren leveren de elektronen die in het 2DEG terecht zullen komen. De gedoteerde laag wordt afgedekt met een dun laagje GaAs omdat anders het aluminium in de gedoteerde laag zou oxyderen.

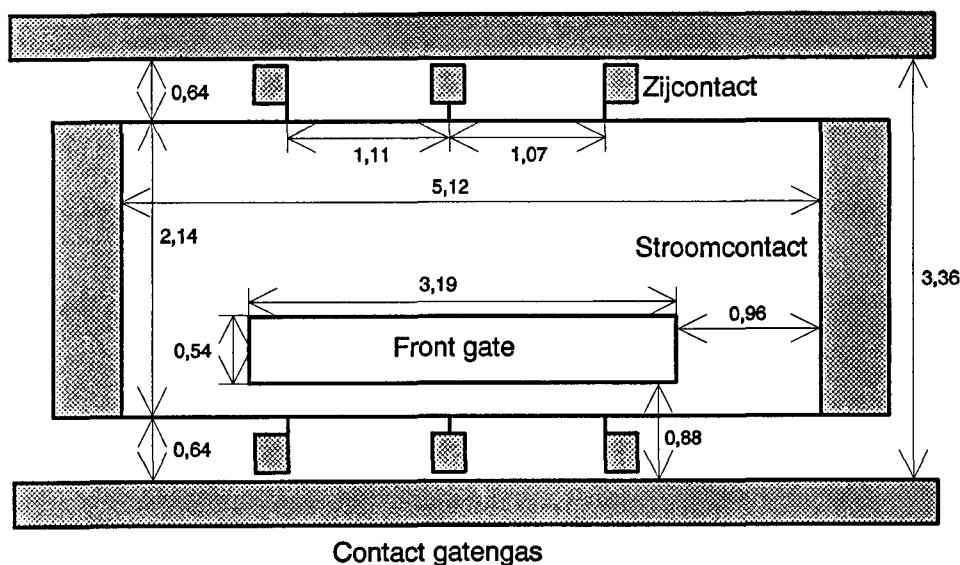


FIG. 3.1 De belangrijkste afmetingen van preparaat W485-13.

Uit de wafer wordt een klein stukje genomen. Met lithografische technieken is het mogelijk om hiervan een preparaat te maken. Figuur 3.1 is een overzicht van preparaat W485-13. In figuur 3.2 staat preparaat W510-10. Aan dit preparaat werden de metingen in de mengkoeler verricht. De lange smalle rechthoek onder het midden van de preparaten is de front gate. De gearceerde gebieden zijn contacten. Het 2DEG ligt tussen de twee grote contacten links en rechts. Deze contacten werden als stroomcontacten gebruikt. Aan elke kant van het preparaat bevinden zich drie spanningscontacten. Hierdoor worden vierpuntsmetingen mogelijk gemaakt. De overige twee contacten zijn verbonden met het gatengas onder het 2DEG.

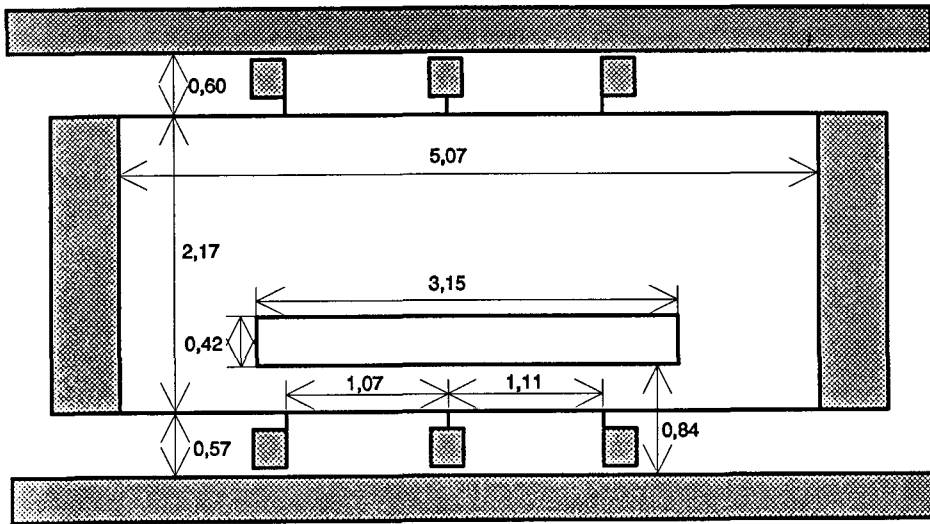


FIG. 3.2 De belangrijkste afmetingen van preparaat W510-10.

Een voorwaarde waaraan de front gate moet voldoen is dat hij zeer veel beter dan het 2DEG moet geleiden. Daarom is de front gate van goud, en 170 nm dik. Dit is zeer veel groter dan de Fermigolflengte van goud, zodat klassieke formules voor de weerstand mogen worden gebruikt. De soortelijke weerstand van goud<sup>21</sup> tussen 1 K en 10 K is gelijk aan  $0,022 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ . Door normering op de dikte van de front gate wordt de weerstand per oppervlakte-eenheid verkregen, die ongeveer  $10^{-3} \Omega$  bedraagt. De soortelijke weerstand van het 2DEG ligt, indien er geen magneetveld is aangebracht, rond  $1 \text{ k}\Omega$ . Dat is  $10^6$  maal zo groot als de weerstand van de front gate, die daarom als een perfecte geleider beschouwd mag worden. De front gate en de halfgeleider vormen samen een Schottky barrière.

### §3.3 Beïnvloeding van de randpotentiaal

In paragraaf §1.3 is het ontstaan van randkanalen aan de rand van het 2DEG verklaard. Als gevolg van de opsluitpotentiaal worden de Landauniveaus aan de rand van het elektronengas naar hogere energie afgebogen. Op de lijnen waar het Fermivolume door de Landauniveaus heen gaat, ontstaan de randkanalen.

De randpotentiaal kan worden beïnvloed. Hierdoor kunnen de kanalen naar de bulk van het elektronengas verplaatst worden. Onder het elektronengas is een  $\delta$ -laag van beryllium gegroeid. In deze  $\delta$ -laag ontstaat een gatengas met lage mobiliteit en hoge

weerstand. Hierdoor kan een spanningsverschil over de contacten aan het gatengas aangebracht worden. De weerstand van het gatengas is hoog, zodat de elektrostatische potentiaal in het gatengas lineair verandert met de afstand tot de contacten die eraan zitten. Deze potentiaal induceert een ladingsverplaatsing in het 2DEG. De elektronenconcentratie op een zekere plaats in het 2DEG hangt dan af van de elektrostatische potentiaal in het gatengas vlakbij deze plaats.

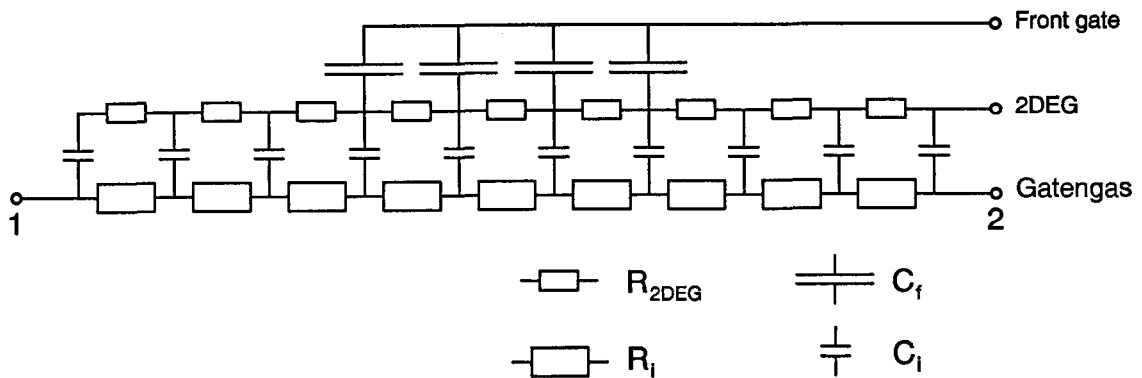


FIG. 3.3 Eén-dimensionaal vervangingsschema van de preparaten.

De werking van het gatengas wordt direct duidelijk aan de hand van figuur 3.3. Van boven naar beneden zijn de front gate, het 2DEG en het gatengas schematisch aangegeven. De weerstanden geven aan dat de betreffende laag slecht geleidt. Het gatengas geleidt slechter dan het 2DEG. De condensatoren staan voor de capaciteit per oppervlakte-eenheid  $C_i$  en  $C_f$ . Hoe groter de weerstanden (condensatoren) in de figuur getekend zijn, hoe groter de weerstand (capaciteit). De lading in het 2DEG zit op de bovenste helft van de condensatoren  $C_i$ . De contacten 1 en 2 aan het gatengas worden op constante spanningen gehouden. Deze spanningen hoeven niet gelijk aan elkaar te zijn. Hierdoor werken de weerstanden  $R_i$  als spanningsdeler. De spanning in het gatengas verandert lineair met de plaats, zie figuur 3.4, maar niet met de tijd. Dit resulteert in een constante elektronengradiënt in het elektronengas. Het gatengas induceert de elektronengradiënt. Een andere manier om dit te formuleren is dat het gatengas de opsluitpotentiaal van de elektronen in het 2DEG verandert. De gradiënt kan zeer precies geregeld worden met het spanningsverschil tussen de beide contacten aan het gatengas. De energie van de Landauniveaus is nu plaatsafhankelijk geworden. De randkanalen ontstaan op de stroken waarbij de energie van de Landauniveaus gelijk is aan het Fermi-niveau. De effectieve ligging van het Fermi-niveau kan ook

beïnvloed worden met de spanning van het gatengas. Door beide contacten 1 en 2 op dezelfde negatieve spanning te brengen ten opzichte van het 2DEG, is effectief het Fermi-niveau verlaagd ten opzichte van de situatie waarbij het gatengas en het 2DEG op dezelfde spanning zijn.

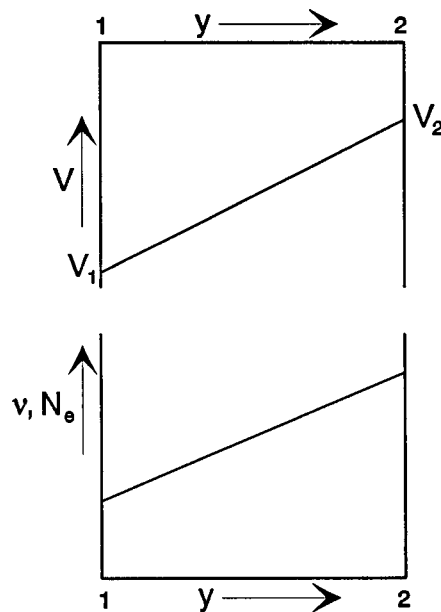


FIG. 3.4 De lineair veranderende potentiaal in het gatengas induceert een constante gradiënt in de elektronenconcentratie.

Een tweede belangrijk gevolg van de gradiënt in de elektronenconcentratie is de verbreding van de kanalen, zie figuur 3.6. Aan de rand van het 2DEG is een veel grotere gradiënt (zie paragraaf §1.5) dan in de bulk gemaakt kan worden. De kleinere gradiënt zorgt voor bredere stroken. Op basis van de formules van Chklovskii voor de breedten van de stroken werd dit al verwacht. Bij een kleine gradiënt is er een grote afstand nodig om de degeneratie  $N_L$  te overbruggen. Dit geeft een brede geleidende strook. De beide optredende effecten zijn schematisch in figuur 3.6 weergegeven.

De elektrostatische potentiaal die door het gatengas opgewekt wordt, moet worden opgeteld bij de randpotentiaal. Effectief wordt de randpotentiaal beïnvloed door de potentiaal van het gatengas. De formule voor de elektrostatische potentiaal in de bulk kan afgeleid worden. De contacten aan het gatengas zullen contact 1 en contact 2 genoemd worden. De breedte van het gatengas zal met  $w_i$  aangeduid worden. De afstand van een punt in het gatengas tot contact 1 zal met  $y$  worden aangeduid. Als

gevolg van de lage mobiliteit hangt de weerstand van het gatengas niet af van het magneetveld. Het gatengas gedraagt zich als een Ohmse weerstand. Dit impliceert dat de elektrostatische potentiaal lineair verandert tussen de contacten. De weerstand van de contacten aan het gatengas wordt verwaarloosd. Voor de spanning in het gatengas geldt dan:

$$V(y) = V_1 + (V_2 - V_1) \cdot \frac{y}{w_i} \quad (3.1)$$

De spanningen zijn gegeven ten opzichte van aarde. Bij alle capaciteitsmetingen in dit verslag was het 2DEG via een Ampèremeter met aarde verbonden. Het 2DEG is daarom een equipotentiaalvlak dat aan aarde ligt.

De elektronenconcentratie in het elektronengas hangt af van de potentiaal in het gatengas eronder en die kan -zoals hierboven besproken- beïnvloed worden. Als de afstand tussen het 2DEG en het gatengas met  $d_i$  wordt aangeduid kan de capaciteit per oppervlakte-eenheid tussen het gatengas en het 2DEG worden gegeven door

$$C_i = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{d_i} \quad (3.2)$$

zodat de elektronenconcentratie  $N_e$  wordt gegeven door

$$N_e(y) = N_0 + \frac{C_i}{e} \cdot V(y) = N_0 + \frac{C_i}{e} \cdot \left[ V_1 + (V_2 - V_1) \cdot \frac{y}{w_i} \right] \quad (3.3)$$

Uit deze formule blijkt dat als  $V_1$  en  $V_2$  niet gelijk zijn, er een gradiënt in de elektronenconcentratie optreedt. Als er geen gradiënt wordt gekozen kan  $C_i/e$  bepaald worden door de elektronenconcentraties bij verschillende spanningen van het gatengas te bepalen. Het verband tussen de elektronenconcentratie en de vulfactor wordt gegeven door formule (3.4). De vulfactor kan op elke plaats in het preparaat worden bepaald door deling door  $N_L = eB/h$ . Dit levert op

$$v(y) = v_0 + \frac{C_i}{e^2 B/h} \cdot \left[ V_1 + (V_2 - V_1) \cdot \frac{y}{w_i} \right] \quad (3.4)$$

Stel dat  $V_1$  kleiner is dan  $V_2$ . Beide zijn negatief. Dan blijkt uit bovenstaande formule dat de vulfactor lineair toeneemt met toenemende afstand tot contact 1.

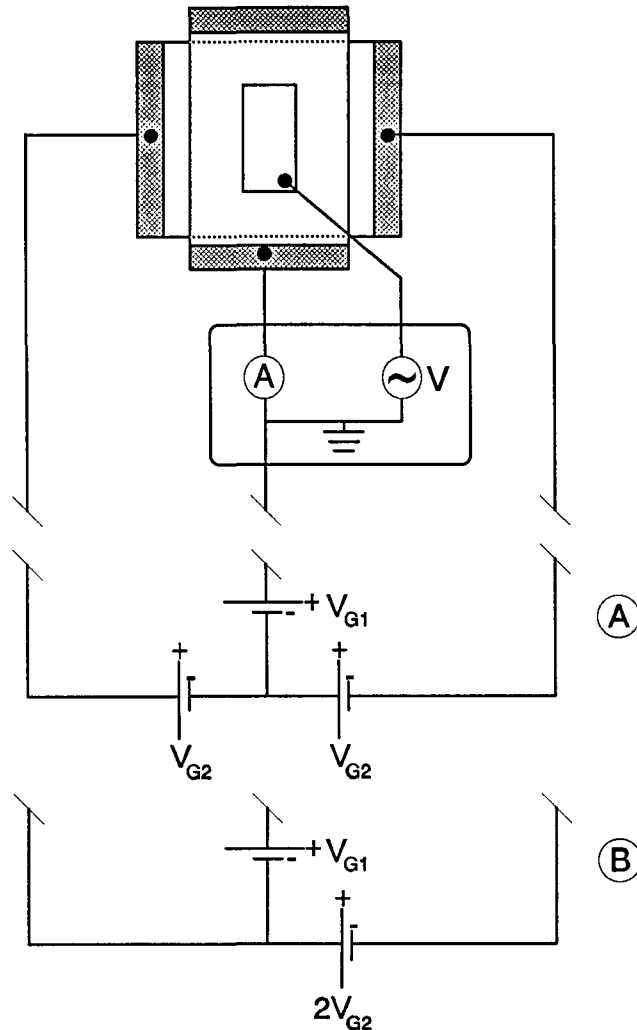


FIG. 3.5 Elektrisch schakelschema van de schakeling om capaciteiten te bepalen. De stroomcontacten aan het 2DEG van het preparaat zijn boven- en onderaan getekend. Links en rechts zijn de contacten 1 en 2 aan het gatengas getekend.

Het gatengas en het elektronengas vormen samen een  $p-n$  overgang. Deze heeft de bekende  $V-I$ - karakteristiek van een diode. Als het gatengas negatief wordt gemaakt ten opzichte van het elektronengas wordt de  $p-n$  overgang geblokkeerd. De elektronenconcentratie in het 2DEG wordt dan verminderd. Voor elk elektron dat uit het elektronengas wordt gedrukt gaat er één naar het gatengas. Het 2DEG mag nergens positief worden ten opzichte van het gatengas omdat er dan een grote stroom gaat lopen. Hierdoor kan het preparaat beschadigen.

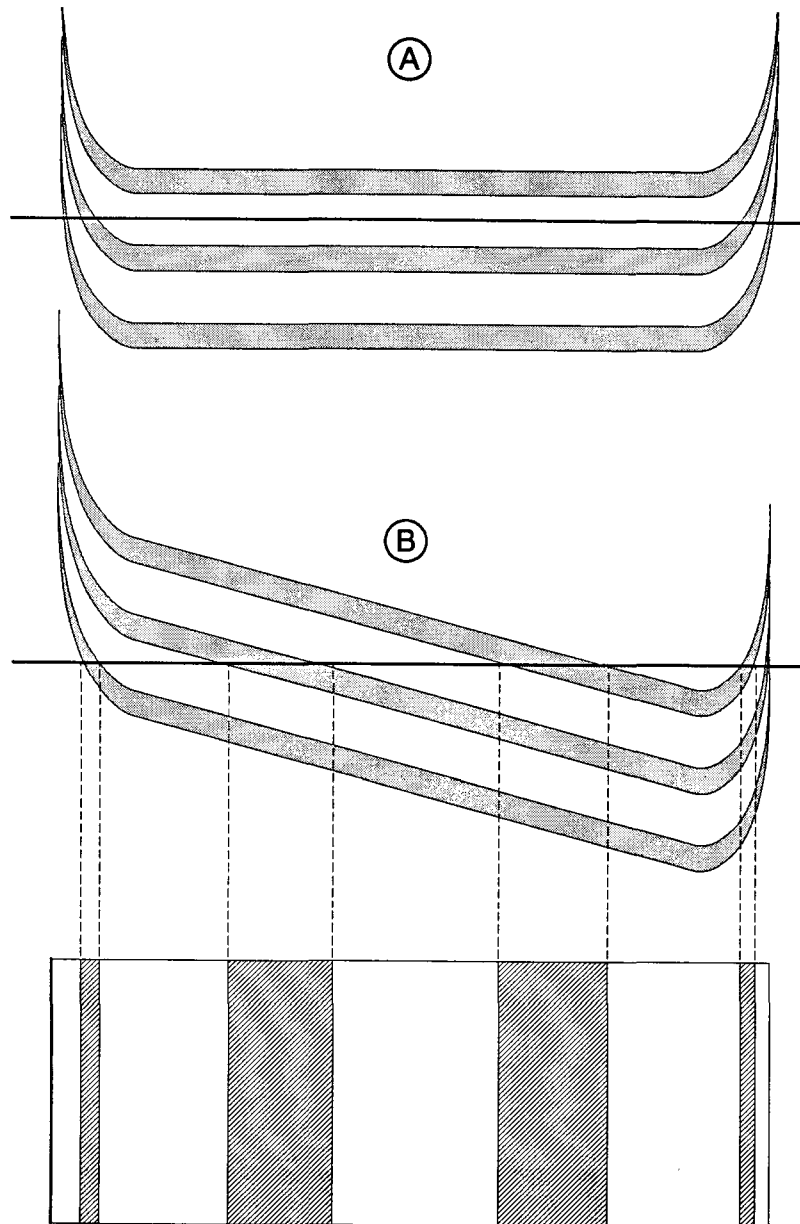


FIG. 3.6 Schematisch overzicht zonder (A) en met gradiënt (B). In (A) liggen de kanalen aan de rand. Gelijkspanningen op het gatengas (B) kunnen de kanalen naar de bulk van het preparaat brengen. De kanalen worden dan ook verbreed.

Er zijn twee manieren om de potentiaal van de beide contacten te regelen, zie figuur 3.5A en B. Voor sommige toepassingen is het handig om de elektronenconcentratie onder het midden van het preparaat constant te laten. Deze situatie kan worden bereikt door gebruik te maken van een schakeling die een aangeboden stuurspanning van teken kan laten omkeren. Hiermee worden dan de beide spanningsbronnen  $V_{G2}$

aangestuurd, zie figuur 3.5A. De situatie die dan optreedt is schematisch in figuur 3.6 weergegeven. De elektronenconcentratie in het midden van het preparaat is gelijk gebleven aan die in de gradiëntloze situatie. Aan de linkerkant van het 2DEG is de elektronenconcentratie afgenomen met meer dan de degeneratie van een Landauniveau. Hierdoor wordt het bijbehorende randkanaal van de rand af gedrukt. Bij verder toenemende gradiënt zal het randkanaal verder naar het midden van het 2DEG gaan. Aan de rechterkant van het 2DEG is een extra Landauniveau onder het Fermi-niveau gekomen. Dit Landauniveau wordt dan meteen gevuld tot aan het Fermi-niveau. Als de gradiënt verder toeneemt, zal het Landauniveau aan de rechterkant steeds verder onder het Fermi-niveau komen te liggen. Hierdoor zijn er aan de rechterkant twee kanalen bij gekomen. Eén ervan bevindt zich aan de rand, het andere ligt in de bulk. Het kanaal in de bulk zal verder naar het midden schuiven als de gradiënt groter wordt. Bij toenemende gradiënt worden er dus van beide kanten van het preparaat kanalen naar het midden van het preparaat gebracht. Een nadeel van deze methode is dat bij deze methode opgepast moet worden dat het gatengas nergens positief wordt ten opzichte van het elektronengas. Het voordeel van de andere methode (figuur 3.5B) is dat het gatengas niet positief kan worden ten opzichte van het elektronengas. Er wordt gebruikt gemaakt van twee spanningsbronnen in plaats van drie, en deze zijn zo geschakeld dat alleen de negatieve polen met het gatengas verbonden zijn. Met de eerste spanningsbron  $V_{G1}$  kan ervoor gezorgd worden dat de elektronenconcentratie overal in het 2DEG met dezelfde waarde afneemt. Effectief zal het lijken alsof het Fermi-niveau verlaagd wordt. Met de tweede spanningsbron  $V_{G2}$  kan de gradiënt in de elektronenconcentratie geregeld worden. Bij de metingen die in dit verslag gepresenteerd worden, is voornamelijk gebruik gemaakt van deze laatste methode.

Vooraf bij kleine gradiënten in de elektronenconcentratie is de positie van de stroken in de bulk van het 2DEG sterk afhankelijk van de offsetspanning  $V_{G1}$ , zie figuur 3.7. In deze figuur zijn twee effectieve Fermi-niveaus aangegeven met stippellijnen. In situatie A ligt het randkanaal helemaal links in het preparaat, maar het is wel net los van de rand. Het effectieve Fermi-niveau wordt verlaagd door de offsetspanning  $V_{G1}$  negatiever te maken. Het randkanaal schuift dan naar rechts. In situatie B komt het randkanaal net aan bij contact 2. Het is eenvoudig in te zien dat de offsetspanning  $V_{G1}$  met de gradiëntspanning  $2 \times V_{G2}$  verlaagd moet worden om dit randkanaal over de breedte  $w_i$  van het gatengas te verplaatsen. In situatie A komt het randkanaal net los van de rand bij contact 1. De spanning in het gatengas direct onder het kanaal, zodra



het los raakt van de rand, speelt vanaf nu de belangrijkste rol in de verplaatsing. Het kanaal blijft recht boven de positie waar in het gatengas deze potentiaal heerst. Zodra de offsetspanning met de gradiëntspanning is verlaagd, is er nog maar één lijn in het preparaat waar deze spanning heerst. Deze lijn is bij contact 2. Het randkanaal heeft zich over de breedte van het gatengas verplaatst als de offsetspanning met de gradiëntspanning is afgenomen. Als de gradiëntspanning klein is, hangt de positie van de randkanalen in de bulk van het 2DEG sterk af van de effectieve ligging van het Fermivolume en dus van de offsetspanning  $V_{G1}$ . Daardoor is het interval in de offsetspanning, waarbij een isolerende strook onder de front gate ligt, erg smal. Alleen dan neemt de capaciteit af. Verwacht wordt daarom dat de minima in de capaciteit als functie van de offsetspanning erg smal zullen zijn.

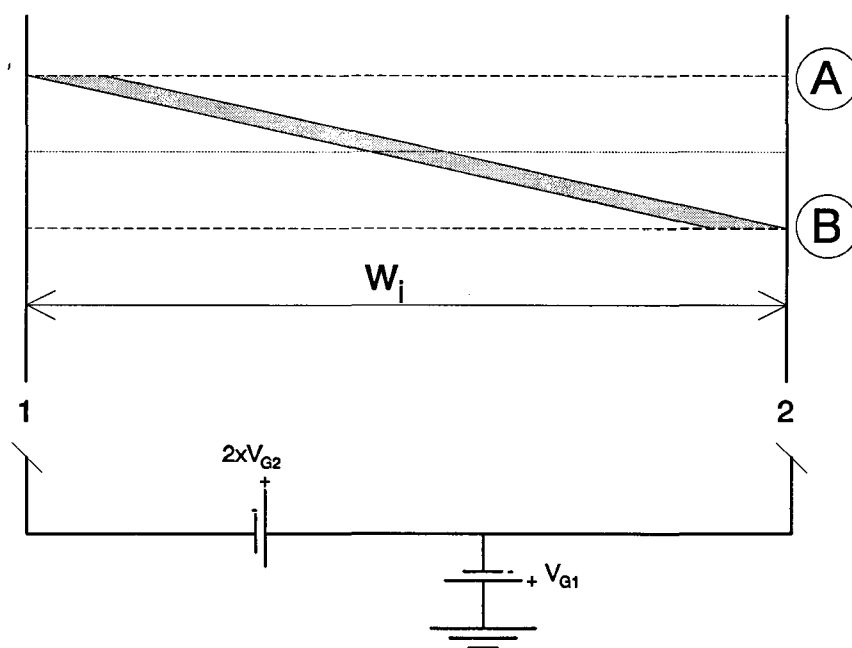


FIG. 3.7 Bij kleine gradiënten is de positie van een kanaal sterk afhankelijk van de offsetspanning  $V_{G1}$ , die effectief het Fermivolume beïnvloedt.

De front gate ligt bij de gebruikte preparaten, zie figuren 3.1 en 3.2, ver van het midden van het preparaat. Hierdoor is het mogelijk om grote gradiënten aan te leggen zonder dat direct de elektronenconcentratie onder de front gate sterk afneemt, zie figuur 3.8. Het gatengas mag nergens positief worden ten opzichte van het 2DEG, dat aan aarde ligt. De hoogste spanning van een contact aan het gatengas moet daarom kleiner of gelijk zijn aan nul volt. Het andere contact moet negatief gemaakt

worden om een gradiënt aan te leggen. De elektronenconcentratie in het midden van het preparaat neemt veel meer af dan aan de rand waar het contact aan aarde ligt. Hierdoor is de vulfactor bij contact 2 hoger zodat er meer isolerende stroken onderdoor gebracht kunnen worden.

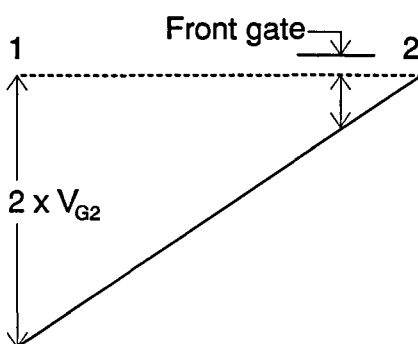


FIG. 3.8 Als de front gate niet in het midden van het preparaat ligt, kunnen grote gradiënten aangebracht worden zonder dat de elektronenconcentratie onder de front gate veel verandert.

### §3.4 Schakeling en experimenten

In paragraaf §2.4 is uitgelegd dat de capaciteit (impedantie) van het systeem van de front gate en het 2DEG een maat moet zijn voor de breedte van de isolerende stroken. De impedantie kan bepaald worden uit de stroom die door een opgelegde wisselspanning wordt opgewekt. De stroom werd gemeten met een lock-in amplifier (model 5210, EG&G Princeton Applied Research). Deze lock-in kan deze stromen meten mits de frequentie ervan niet te hoog wordt gekozen. In de praktijk werkt de Ampèremeter goed beneden 1 kHz. De gebruikte schakeling is schematisch getekend in figuur 3.5.

De lock-in heeft een interne oscillator waarvan frequentie en amplitude geregeld kunnen worden. Bij alle metingen werd een frequentie van 795 Hz gekozen en een amplitude van 10 mV. Deze spanning wordt op de front gate aangebracht. De lock-in heeft een coax-ingang waarmee direct de stroom gemeten kan worden. De mantel ervan lag altijd aan aarde zodat de kern virtueel aan aarde ligt, want tussen mantel en kern ligt de laagohmige Ampèremeter. De kern werd verbonden met het 2DEG.

Op deze manier kan de complexe amplitude van de stroom gemeten worden. Hieruit kan de impedantie  $Z$  bepaald worden volgens  $V=IZ$ .

De excitatiespanning van het systeem mag niet te groot zijn. In het geval van te hoge excitatiespanning slaat de front gate door naar het 2DEG. Hierdoor gaat het preparaat stuk. De excitatiespanning moet wel groot genoeg zijn om een detecteerbare stroom op te wekken, maar klein genoeg om het systeem niet te veel te verstoren. Bij een capaciteit van 1,4 nF, een front gate oppervlak van 1,33 mm<sup>2</sup> en een excitatiespanning van 10 mV, varieert de elektronenconcentratie onder de front gate  $6,57 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$ . Dit is veel kleiner dan de bezetting van een Landauniveau bij de magnetische velden waaronder gemeten werd.

Grafieken van de optredende effecten kunnen gemaakt worden door het signaal op de uitgang van de lock-in aan te bieden aan een XY-schrijver en/of meetcomputer. Voor het signaal langs de horizontale as kan het magneetveld gekozen worden of de spanning van één van de spanningsbronnen. Bij de meeste experimenten is een constante elektronengradiënt en een constant magneetveld aangebracht terwijl daarna het elektronengas werd leeggedrukt. Hierdoor verandert de breedte van de geleidende en isolerende stroken niet tijdens het leegdrukken van het elektronengas. De gradiënten die met het gatengas gemaakt kunnen worden, zijn veel kleiner dan de gradiënten die optreden aan de rand van het 2DEG. Hierdoor zijn over het algemeen de geleidende stroken in de bulk van het preparaat veel breder dan de front gate, terwijl de isolerende stroken veel smaller<sup>2</sup> zijn dan de front gate (zie hoofdstuk 4). In feite kunnen alleen de breedten van de isolerende stroken direct uit de capaciteitsmetingen bepaald worden.

## Hoofdstuk 4 Resultaten

### §4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal de gemeten data worden gepresenteerd. De resultaten vallen in twee delen uiteen. Als voorbereiding op de metingen in de mengkoeler is eerst aangetoond dat met een front gate metingen aan de breedte van de stroken gedaan kunnen worden. Deze inleidende metingen zijn in een gewone afgepompte cryostaat verricht, bij een temperatuur van 1,5 K. Een aantal metingen aan preparaat W485-13 zullen worden besproken. De gepresenteerde resultaten van de breedte van de isolerende stroken werden gemeten aan preparaat W510-10 in de mengkoeler. De resultaten met gradiënt van preparaat W485-13 en preparaat W510-10 zijn vergelijkbaar, maar tijdens de metingen aan het tweede preparaat was de temperatuur veel lager. Daarom worden in paragraaf §4.3 alleen de resultaten met gradiënt van preparaat W510-10 besproken.

In het voorafgaande is uiteengezet dat de grootte  $C_i/e$  een belangrijke grootte is. Deze bepaalt de relatie tussen de spanning van het gatengas op een punt en de elektronenconcentratie direct erboven in het elektronengas. Op grond van het groeirecept (tabel 2) wordt een waarde van  $1 \cdot 10^{15} \text{m}^2/\text{V}$  verwacht. Voor preparaat W485-13 geldt de waarde  $0,96 \cdot 10^{15} \text{m}^2/\text{V}$ , maar voor preparaat W510-10 slechts  $0,77 \cdot 10^{15} \text{m}^2/\text{V}$ . In principe kan de afwijking alleen het gevolg zijn van de afstand van het elektronengas tot het gatengas. De elektronenconcentraties  $N_0$  van beide preparaten als het gatengas aan aarde lag bedroegen  $2,07 \cdot 10^{15} \text{m}^{-2}$  voor preparaat W485-13 en  $1,85 \cdot 10^{15} \text{m}^{-2}$  voor preparaat W510-10. De mobiliteiten in deze preparaten bedragen  $27 \text{m}^2/\text{Vs}$  respectievelijk  $31 \text{m}^2/\text{Vs}$ .

### §4.2 Gradiëntloze resultaten

De resultaten die in deze paragraaf gepresenteerd worden, werden opgemeten aan preparaat W485-13. De temperatuur tijdens deze metingen was 1.5 K. In figuur 4.1 zijn zowel de Hallweerstand als het reële deel van de capaciteit weergegeven. In deze situatie was er geen gradiënt aangebracht. Dit betekent dat de resistive plate theorie van Goodall en Higgins moet gelden. In de figuur is te zien dat de minima in het reële deel van de capaciteit samenvallen met de plateaus in de Hallweerstand. Om dit effect verder te illustreren is in figuur 4.2 het reële deel van de capaciteit

getekend samen met de magnetowerstand. De minima in de magnetowerstand vallen samen met de minima in de capaciteit. In het minimum van het reële deel van de capaciteit is de vulfactor in het 2DEG onder de front gate heeltallig. In het minimum van de magnetowerstand is de vulfactor in de bulk heeltallig. Op deze plekken zijn de vulfactoren bij hetzelfde magneetveld gelijk. Dit betekent dat de elektronenconcentratie onder de front gate en in de bulk van het 2DEG gelijk moeten zijn.

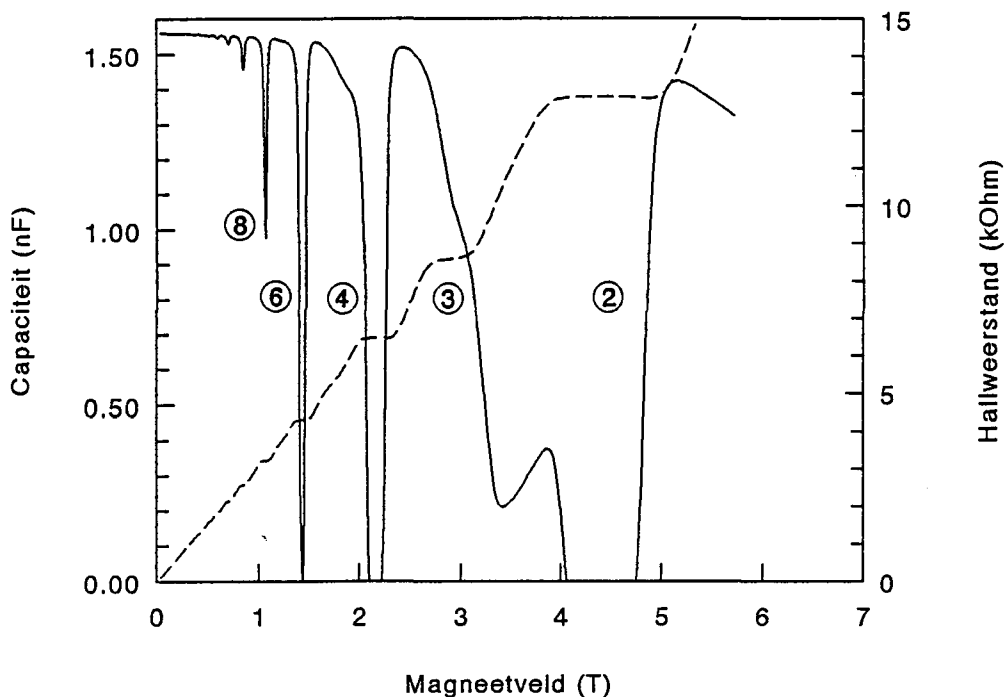


FIG. 4.1 Het reële deel van de capaciteit samen met de Hallweerstand. Het reële deel van de capaciteit is getekend met een getrokken lijn.

Het reële en het imaginaire deel van de capaciteit zijn in figuur 4.3 afgebeeld. Beide zijn opgemeten in de gradiëntloze situatie, waarbij het gatengas aan aarde lag. In deze situatie moet weer het resistive plate model geldig zijn. In de minima van het reële deel komt het imaginaire deel naar het reële deel toe. Vervolgens worden beide delen aan elkaar gelijk en gaan ze beide naar nul. In deze situatie geleidt het gebied onder de front gate slecht. Dit gedrag wordt voorspeld door het resistive plate model.

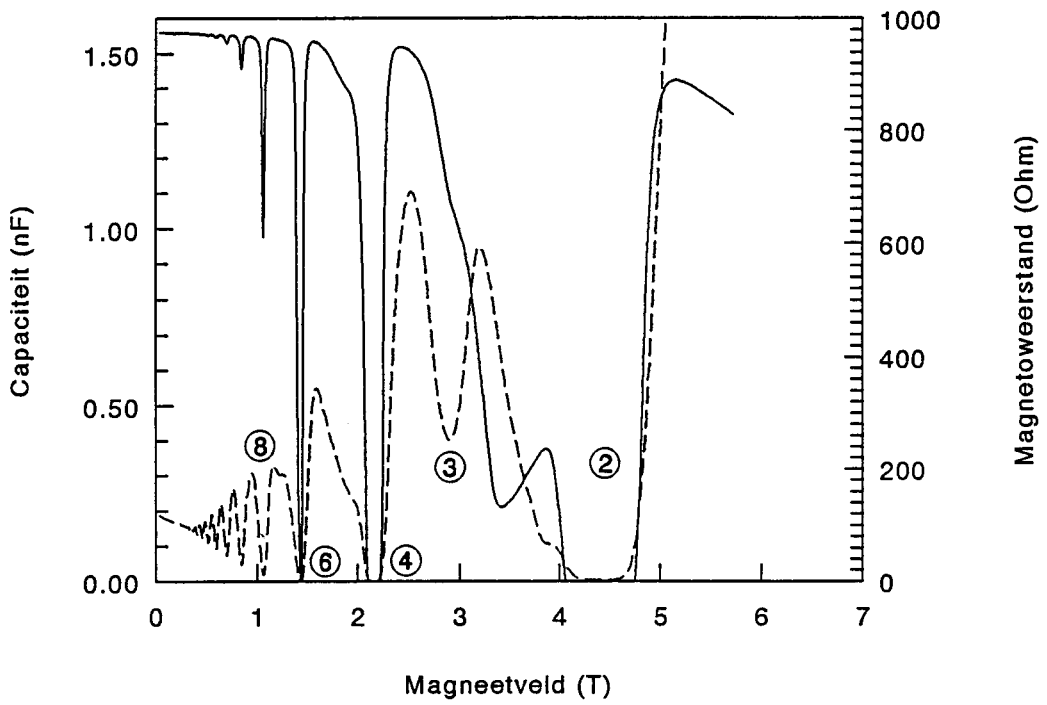


FIG. 4.2 Het reële deel van de capaciteit samen met de magnetoweerstand. De minima in beide grafieken vallen precies samen. Het reële deel van de capaciteit is getekend met een getrokken lijn.

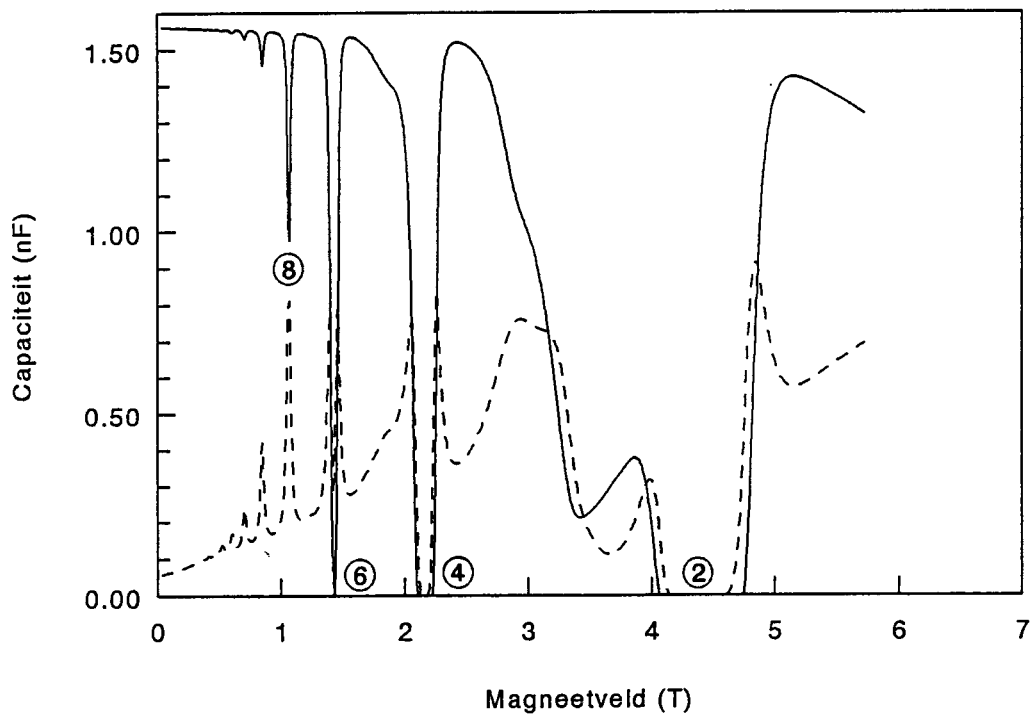


FIG. 4.3 Het reële en het imaginaire deel van de capaciteit. Het reële deel is getekend met een getrokken lijn.

## §4.3 Breedte van de isolerende stroken

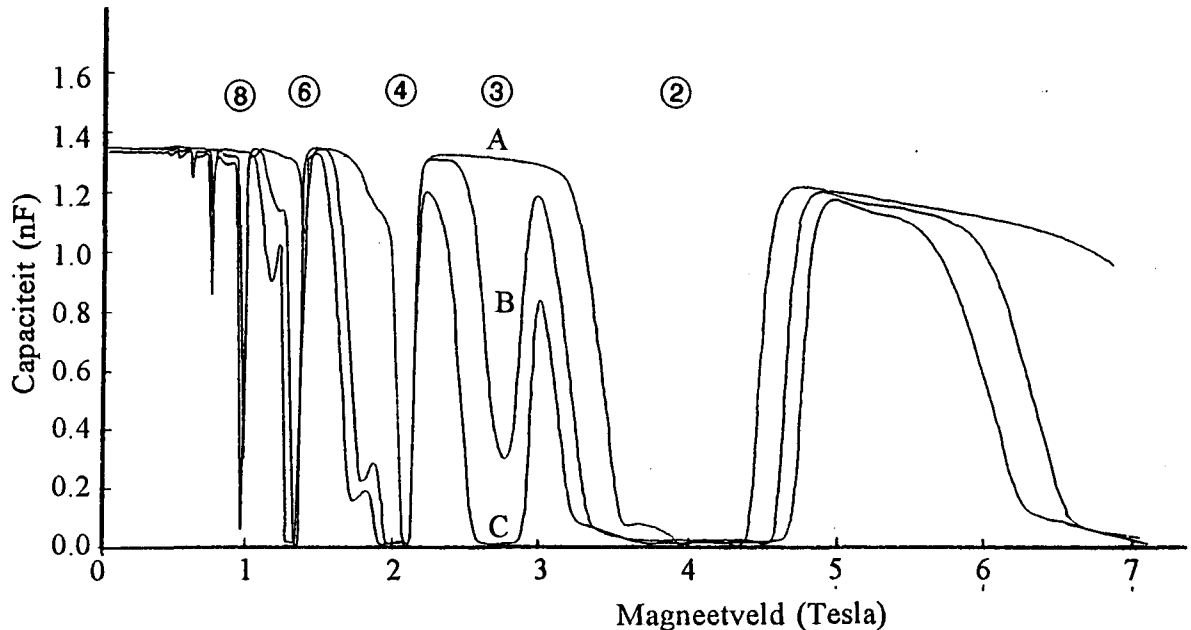


FIG. 4.4 Het reële deel van de capaciteit bij 4,2 K (A) , 660 mK (B) en 75 mK (C). De minima dalen met afnemende temperatuur. Vooral bij vultactor 3 rond 2,7 Tesla is dit goed te zien. Er is geen gradiënt aangebracht.

Toen aangetoond was dat het inderdaad mogelijk is om metingen aan de magnetocapaciteit te doen, zijn verdere experimenten in een mengkoeler verricht aan preparaat W510-10. De temperatuur in een mengkoeler (100 mK) is nog een factor 15 lager dan in een gewone afgepompte cryostaat (1,5 K). De isolatie van de gebieden met heeltallige vultactor wordt dan nog beter. De bijdrage van het resistive plate model aan de capaciteit wordt dan verkleind. Hierdoor worden alle minima in de capaciteit lager. Dat dit effect optreedt wordt in figuur 4.4 aangetoond. In deze figuur staat bij drie temperaturen het reële deel van de capaciteit als functie van het magneetveld. Deze grafieken werden opgemeten aan preparaat W510-10. De temperaturen waren 4,2 K, 660 mK en 75 mK. Vooral bij vultactor drie rond 2,6 Tesla is dit effect goed te zien. Bij 4,2 K is vultactor drie niet opgelost, terwijl bij 660 mK er al een minimum te zien is. Bij de laagste temperatuur die in de mengkoeler bereikt is, 75 mK, is te zien dat de capaciteit bij vultactor drie nul is geworden.

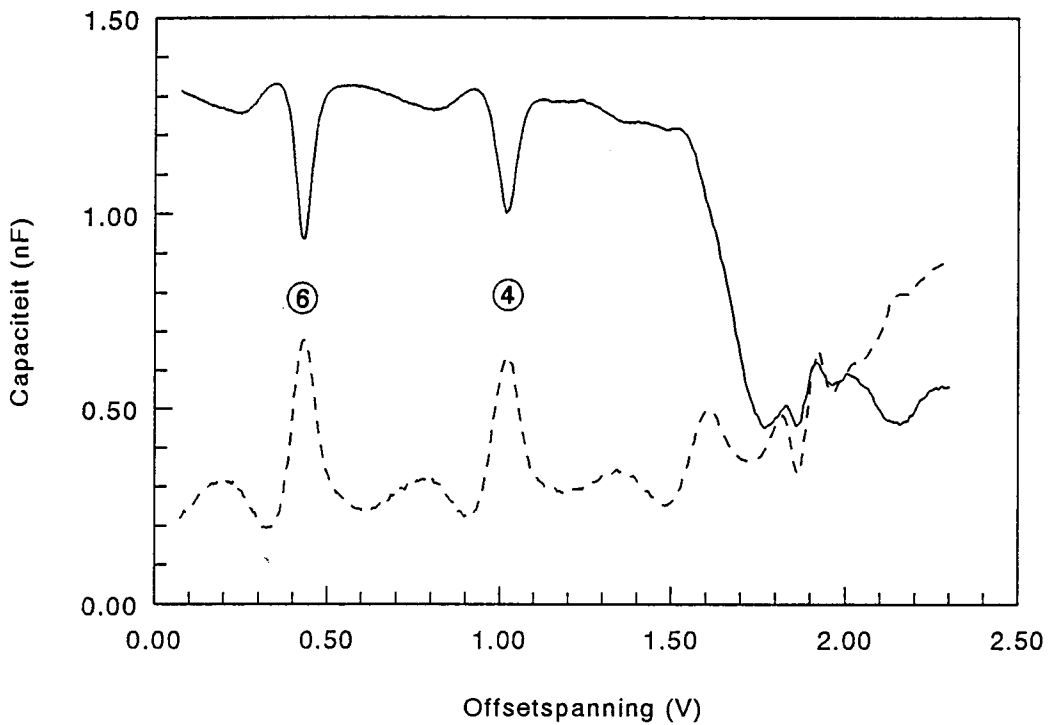


FIG. 4.5 Een karakteristieke meting waaruit de breedte van de isolerende stroken gehaald werd bij een gradiëntspanning van  $2 \times V_{G2} = 400$  mV. De getrokken lijn staat voor het reële deel van de capaciteit.

In figuur 4.5 staat een karakteristieke meting waaruit de breedten van de isolerende stroken zijn gehaald. In deze grafiek zijn het reële deel en het imaginaire deel van de capaciteit uitgezet tegen de absolute waarde van de offsetspanning. De gradiënt was constant en bedroeg  $2 \times V_{G2} = 400$  mV. Daarbij had het contact aan het gatengas, dat het verst van de front gate ligt, de laagste potentiaal, zodat de elektronenconcentratie onder de front gate maximaal was. De spanning van het andere contact werd langzaam steeds negatiever gemaakt, zodat het 2DEG met een constante gradiënt leeg gedrukt werd. Het magneetveld bedroeg 1.0 Tesla, de temperatuur 80 mK. Met de formule (3.4) kan de vulfactor onder de front gate in elk punt van de grafiek bepaald worden. Het blijkt dat de vulfactor onder de front gate in de minima van de capaciteit een geheel (even) getal is, óók als een gradiënt is aangebracht. Hieruit blijkt dat de gebieden met gehele vulfactor isoleren en de overige gebieden geleiden. Dit is een directe kwalitatieve bevestiging van het model van Chklovskii. De minima van de beide vulfactoren hebben vrijwel gelijke capaciteit, zie figuur 4.4. Dat blijkt bij vrijwel elke gradiënt zo te zijn. De breedte van de isolerende stroken hangt dus nauwelijks af van de vulfactor. Op basis van het model van Chklovskii wordt dit ook verwacht, zie formules (1.11) en (1.12). De breedten van de isolerende stroken zijn, zo blijkt uit deze formule, onafhankelijk van de vulfactor in deze stroken. Helemaal



rechts in de grafiek is de elektronenconcentratie zo sterk afgenomen dat hieruit geen informatie meer gehaald kan worden.

Van de grafiek die hierboven besproken werd, zijn verschillende versies gemaakt. Daarbij werden twee magneetvelden gekozen en een groot aantal elektronengradiënten. Hieruit kan de breedte van de isolerende stroken bepaald worden. In figuur 4.6 staat een grafiek van de breedte van deze isolerende stroken onder de front gate met vulfactoren vier en zes tegen de gradiëntspanning. Het magneetveld bij deze metingen was 1,0 Tesla en de temperatuur 100 mK. Bij de analyse van de data is ervan uitgegaan dat alleen de metallische stroken bijdragen aan de capaciteit. De capaciteit bij gehele vulfactor is opgemeten en geschaald met de breedte van de front gate, 422  $\mu\text{m}$ . Uit de grafiek kunnen we zien dat de isolerende stroken onder de front gate smaller worden met toenemende gradiënt. De grafieken met vulfactoren vier en zes vallen vrijwel samen. De breedte van de isolerende stroken hangt daarom nauwelijks af van de vulfactor in deze stroken.

Figuur 4.7 bevat een soortgelijke grafiek bij een magneetveld van 1,5 Tesla. De vulfactoren in deze grafiek zijn twee en vier. Vulfactor vier verdwijnt bij hoge gradiënten omdat de vulfactor onder de front gate lager dan vier is geworden. Dit is het gevolg van het effect dat in paragraaf §3.3 en figuur 3.8 besproken is. De afplatting links in de grafiek is het gevolg van de beperkte breedte van de front gate (422  $\mu\text{m}$ ). De isolerende stroken kunnen breder worden dan de front gate. Dit trad op bij lage gradiënten. Deze situatie is in de grafieken aangegeven door de breedte van de isolerende stroken gelijk te *kiezen* aan de breedte van de front gate. Het is niet zo dat de breedte van de isolerende stroken bij lage gradiënten onafhankelijk is van de gradiënt.

De grafieken van de gradiënten eindigen bij betrekkelijk lage gradiënten. Dit hangt samen met de warmteontwikkeling in het gatengas. Als een gradiënt van bijvoorbeeld 1 Volt wordt aangelegd, loopt er een stroom van ongeveer 50  $\mu\text{A}$ . Deze stroom zorgt voor een warmteontwikkeling van 50  $\mu\text{W}$ . Dit is vergelijkbaar met het koelvermogen van de mengkoeler. Er treedt daarom opwarming op direct nadat een grote gradiënt (orde 1 Volt) is aangelegd. Onmiddellijk nadat de gradiënt teruggebracht wordt naar nul, daalt de temperatuur. Bij een gradiënt van 1 Volt steeg de temperatuur snel tot boven 150 mK, terwijl de temperatuur 75 mK bedroeg zonder gradiënt.

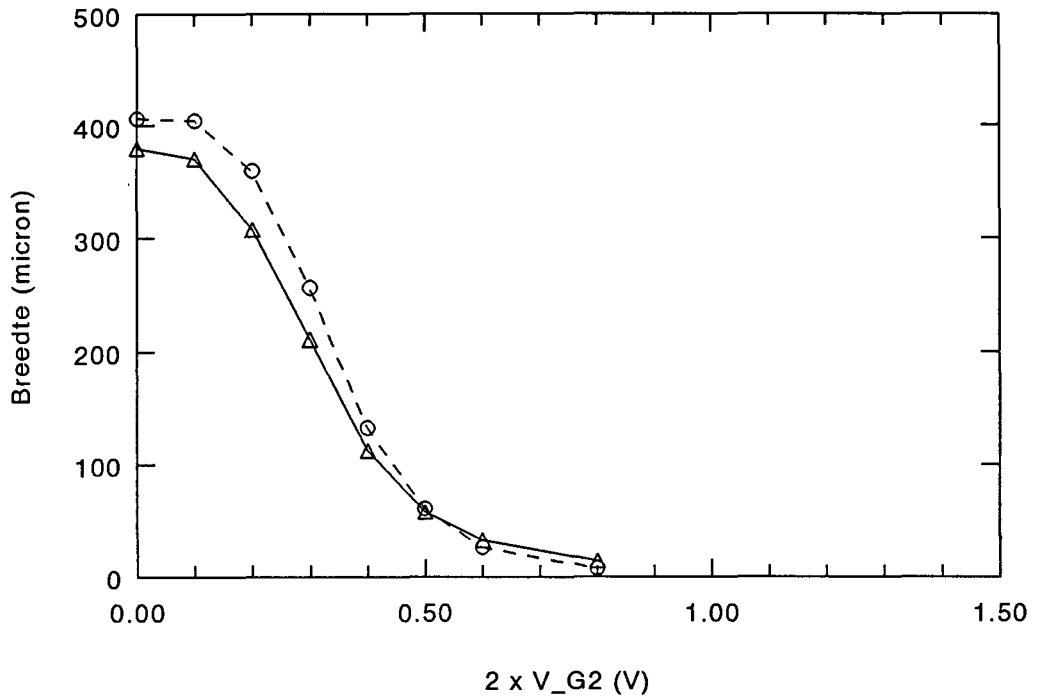


FIG. 4.6 De breedte van de isolerende stroken bij een magneetveld van 1 Tesla en een temperatuur van 100 mK. Vulfactor 4 is met driehoekjes aangegeven, vulfactor 6 met cirkeltjes.

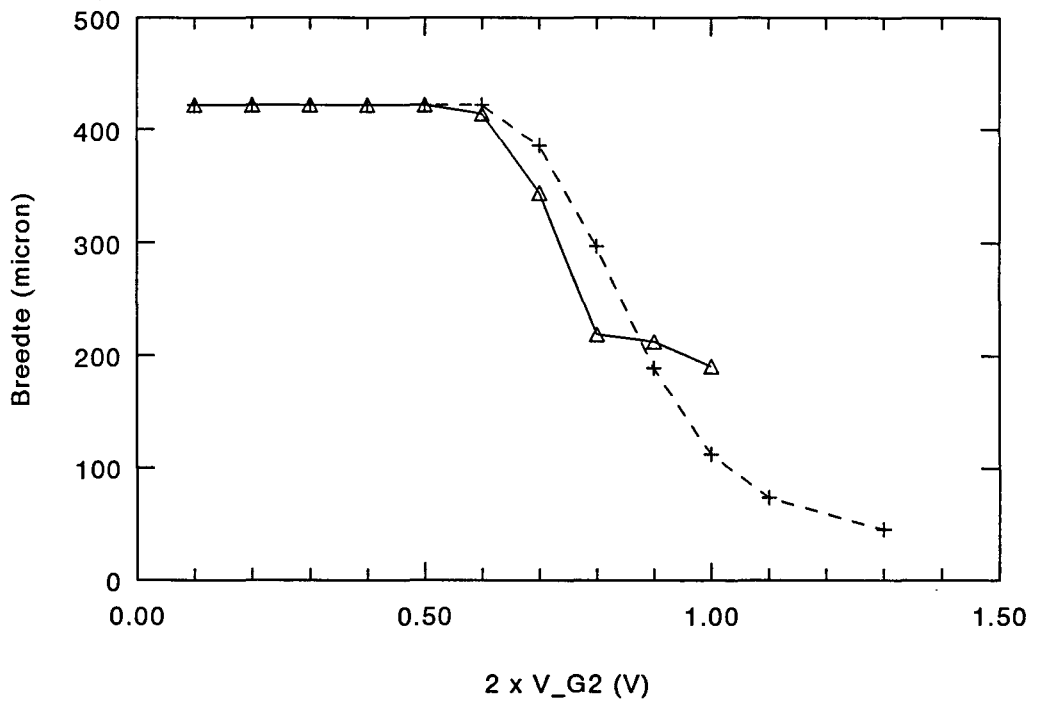


FIG. 4.7 De breedte van de isolerende stroken bij een magneetveld van 1.5 Tesla en een temperatuur van 100 mK. Vulfactor 2 is met plusjes aangegeven, vulfactor 4 met driehoekjes.

---

## Hoofdstuk 5 Discussie, conclusies en aanbevelingen

### §5.1 Discussie en conclusies

Door een front gate over de bulk van het 2DEG te leggen, kan de capaciteit van de front gate naar het 2DEG bepaald worden. Het resistive plate model van Goodall *et al.* wordt experimenteel gevolgd. Dit blijkt uit het optreden van de fasedraaiing van  $45^\circ$ . Met de front gate kan de lokale elektronenconcentratie onder de front gate bepaald worden. Uit de magnetoweerstand worden de elektronenconcentraties in de bulk bepaald. Het blijkt dat de elektronenconcentratie onder de bulk gelijk is aan de elektronenconcentratie onder de front gate.

Door Chklovskii *et al.* werd het ontstaan van geleidende en isolerende stroken aan de randen van een 2DEG in een sterk magneetveld voorspeld. De stroken werden tijdens dit afstudeerwerk experimenteel waargenomen. Met de ontwikkelde methode wordt het mogelijk om de breedten van de stroken te bepalen. De gradiënt in de elektronenconcentratie is volgens Chklovskii bepalend voor de breedten van de stroken. De gradiënt kan met behulp van het gatengas beïnvloed worden. Bovendien kunnen de stroken naar de bulk verplaatst worden. Hierdoor kan de samenhang tussen de breedte van de stroken en de gradiënt in de elektronenconcentratie experimenteel bepaald worden. Het is inderdaad gebleken dat de elektronengradiënt sterke invloed heeft op de breedte van de stroken. De breedten van de isolerende stroken is volgens Chklovskii ook afhankelijk van de sterkte van het magneetveld. Ook dit effect is aangetoond. De theoretische formules van Chklovskii voorspellen dat de breedte van de isolerende stroken niet afhankelijk is van de vulfactor in deze stroken. Dit effect is nu voor het eerst experimenteel waargenomen.

De (incompressibele) stroken met gehele vulfactor zijn volgens de theorie van Chklovskii goede isolatoren. De (compressibele) stroken zonder gehele vulfactor zijn volgens de theorie van Chklovskii goede geleiders. Deze hypothese is nu voor het eerst experimenteel getoetst en is juist gebleken. In de literatuur is een discussie gaande over de vraag waar de stroom loopt in een 2DEG. Daarbij wordt voorgesteld dat de stroom door de (incompressibele) stroken met heeltallige vulfactor loopt<sup>14</sup>, dat de stroom door de compressibele stroken loopt<sup>13</sup> en dat de stroom door zowel de compressibele als de incompressibele stroken loopt<sup>15</sup>. Tijdens dit afstudeerwerk is experimenteel aangetoond dat de stroom door de compressibele stroken loopt. De

condensator kan zich alleen opladen als de overlappende strook in het 2DEG geleidend is. Dit blijkt in de compressibele stroken te zijn.

In de experimenten van K. Oto *et al.* werd een front gate over de rand van het 2DEG gelegd. Bij de interpretatie van de metingen is ervan uitgegaan dat de eindige waarde van de minima in de magnetocapaciteit veroorzaakt wordt door de geleidende randkanalen. Tijdens dit afstudeerwerk is deze hypothese experimenteel bevestigd.

## §5.2 Aanbevelingen

In dit verslag is aangenomen dat het 2DEG perfect homogeen is, dat wil zeggen dat de elektronenconcentratie overal in de bulk van het 2DEG gelijk is. In dat geval lopen de stroken parallel aan de randen van het 2DEG, zie figuur 2.9. In de praktijk blijkt het moeilijk te zijn om het 2DEG homogeen te krijgen. Als de elektronenconcentratie onder de front gate te veel varieert, levert dit een onbruikbaar signaal op van de magnetocapaciteit. Dit was een van de grootste experimentele problemen van dit afstudeerwerk. Het verdient aanbeveling om te proberen een techniek te ontwikkelen waarbij het 2DEG niet meer inhomogeen kan worden.

Bovendien moet de elektronenconcentratie zo groot mogelijk gemaakt worden. Hierdoor kan bij hogere magneetvelden de breedte van de stroken bepaald worden.

---

## Appendices

### §A.1 Literatuur

- <sup>1</sup>K. von Klitzing, G. Dorda en M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- <sup>2</sup>D.B. Chklovskii, B.I. Shklovskii, en L.I. Glazman, *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992).
- <sup>3</sup>K. Oto, S. Takaoka, H. Kurimoto, K. Murase, *Proceeding of SEMI MAG-94*.
- <sup>4</sup>S. Takaoka, K. Oto, H. Kurimoto, en K. Murase, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3080 (1994).
- <sup>5</sup>R.J.F. van Haren, R.T.H. Maessen, F.A.P. Blom, en J.H. Wolter, *Phys. Rev. B* **48**, 17897 (1993).
- <sup>6</sup>R.J.F. van Haren, F.A.P. Blom, J.H. Wolter, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1198 (1995).
- <sup>7</sup>R.J.F. van Haren, *Imaging of edge channels in the quantum Hall regime*, proefschrift. Letru, Helmond (1995).
- <sup>8</sup>L. Landau, *Z. Phys.* **64**, 629 (1930).
- <sup>9</sup>K. Ploog, *III-V Semiconductors* (Crystal growth, Properties and Applications), Springer Verlag, Berlijn, Heidelberg, New York, 1980, Vol. 3, p. 73.
- <sup>10</sup>*Physics of low-dimensional semiconductor structures*, ed. by P.B. Butcher, N.H. March en M.P. Tosi. London, Plenum, 1992.
- <sup>11</sup>Collegediktaat Technische Universiteit Eindhoven, F.A.P. Blom, behorend bij het college *Elektrische Transportverschijnselen in Halfgeleiders*.
- <sup>12</sup>*Solid state physics*, 2nd edition, ed. by J.R. Hooke en H.E. Hall. Chichester, Wiley, 1991.
- <sup>13</sup>C.J.W. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 216 (1990).
- <sup>14</sup>A.M. Chang, *Solid State Commun.* **74**, 871 (1990).
- <sup>15</sup>M.R. Geller en G. Vignale, *Phys. Rev. B* **50**, 11 714 (1994).
- <sup>16</sup>M. Büttiker, *Phys. Rev. B* **38**, 9375 (1988).
- <sup>17</sup>U. Klaß, W. Dietsche, K. von Klitzing en K. Ploog, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 651 (1993).
- <sup>18</sup>E.H. Hall, *Am. J. Math.* **2**, 287 (1879).
- <sup>19</sup>K. Lier en R.R. Gerhardts, *Phys. Rev. B* **50**, 7757 (1994).
- <sup>20</sup>R.K. Goodall, R.J. Higgins en J.P. Harrang, *Phys. Rev. B* **31**, 6597 (1985).
- <sup>21</sup>*Handbook of Chemistry and Physics*, editor in chief D.R. Lide, 72nd edition 1991-1992, CRC press, Boca Raton.

## §A.2 Afleiding van de capaciteit in het resistive plate model.

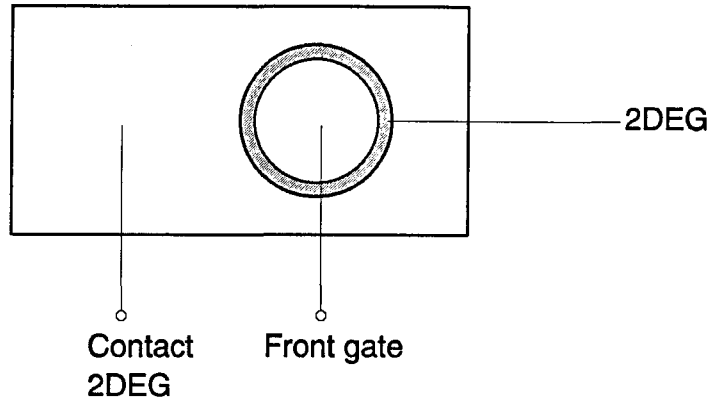


FIG. A1 Geometrie van de opstelling. Het 2DEG is grijs en cirkelvormig. De front gate ligt eroverheen. Het contact aan het 2DEG verbindt het 2DEG over de hele omtrek.

De afleiding van de impedantie van het resistive plate model is eenvoudiger als we de front gate aan aarde leggen in plaats van het 2DEG. De uitkomst verandert hierdoor niet. We zullen een cirkelvormige front gate met straal  $K$ , zie figuur A1, kiezen zodat cilindercoördinaten  $(r, \phi, z)$  gebruikt kunnen worden. Het 2DEG ligt op  $z=0$  en de front gate ligt op  $z=d_f$ . De elektrostatiche potentiaal in het 2DEG is een functie van zowel de tijd  $t$  als de plaats  $r$ . Vanwege de rotatiesymmetrie kan de potentiaal niet van  $\phi$  afhangen. Het volstaat dus om de potentiaal van het 2DEG te beschrijven met  $V(r, t)$ . Het verband tussen de oppervlaktelading  $\rho(r, t)$  in het 2DEG en  $V(r, t)$  wordt gegeven door de formule voor een vlakke condensator. Het is handig om de capaciteit per oppervlakte-eenheid in te voeren volgens

$$C_f = \frac{C_{max}}{\pi K^2}. \quad (\text{A1})$$

Hierdoor kan het verband tussen de plaatsafhankelijke potentiaal en de plaatsafhankelijke oppervlaktelading  $\rho(r, t)$  worden geschreven als

$$V(r, t) = \frac{\rho(r, t)}{C_f}. \quad (\text{A2})$$

Ladingsbehoud toepassen geeft een tweede vergelijking voor de oppervlaktelading in het 2DEG zodat deze uit de vergelijkingen gewerkt kan worden.

Dit geeft de vergelijking

$$\nabla J(r,t) = -\frac{d\rho(r,t)}{dt}. \quad (\text{A3})$$

waarmee de oppervlaktelading eruit gewerkt kan worden hetgeen oplevert

$$\frac{dV(r,t)}{dt} = -\frac{1}{C_f} \cdot \frac{dJ(r,t)}{dr}. \quad (\text{A4})$$

Om de stroomdichtheid  $J(r,t)$  uit de vergelijking te werken, is een derde vergelijking nodig. Deze kan gevonden worden in de wet van Ohm in de vorm

$$J(r,t) = \vec{\sigma} \cdot E(r,t) = -\vec{\sigma} \cdot \nabla V(r,t). \quad (\text{A5})$$

met

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

Dit kan vereenvoudigd worden tot

$$J(r,t) = -\sigma_{xx} \cdot \frac{dV(r,t)}{dr}. \quad (\text{A7})$$

Hieruit wordt door differentiatie naar  $r$  de afgeleide van de stroomdichtheid bepaald die gesubstitueerd kan worden in de wet van behoud van lading. Dit geeft dan de vergelijking

$$\sigma_{xx} \cdot \frac{d^2V(r,t)}{dr^2} = C_f \cdot \frac{dV(r,t)}{dt}. \quad (\text{A8})$$

De excitatie van het systeem gebeurt met hoekfrequentie  $\omega$ . Daarom moet de responsie ook deze hoekfrequentie hebben. Het nemen van de afgeleide naar de tijd komt dus overeen met vermenigvuldigen met  $j\omega$ . Hierdoor wordt overgegaan op complexe amplitudes. In het volgende zullen complexe amplitudes worden

aangegeven met een apostrof. Bovenstaande vergelijking kan dan worden herschreven naar

$$\frac{d^2V'(r)}{dr^2} - \gamma^2 V'(r) = 0 \quad (\text{A9})$$

met

$$\gamma^2 = \frac{j\omega C_f}{\sigma_{xx}} \quad (\text{A10})$$

De oplossing van deze vergelijking is van de vorm

$$V'(r) = A \cdot \cosh(\gamma r) + B \cdot \sinh(\gamma r). \quad (\text{A11})$$

Er blijven twee constanten  $A$  en  $B$  over die uit de randvoorwaarden bepaald moeten worden. De randvoorwaarden zijn dat de spanning aan de rand van de front gate gelijk en in fase moet zijn met de opgelegde spanning ( $V'(r=K) = V_0$ ) en dat de spanning in  $r=0$  niet van  $r$  mag afhangen ( $dV'/dr|_{r=0} = 0$ ). Dit geeft dan onmiddellijk dat  $B=0$  en

$$V'(K) = V_0 \cdot \frac{\cosh(\gamma K)}{\cosh(\gamma K)}. \quad (\text{A12})$$

De totale stroom kan berekend worden uit

$$I' = -2\pi K \cdot J'(K) = 2\pi K \cdot \sigma_{xx} \frac{dV'}{dr} \Big|_{r=K} = 2\pi \sigma_{xx} \gamma K A \sinh(\gamma K). \quad (\text{A13})$$

De admittantie van het totale systeem kan dan worden berekend als het quotiënt van  $V'(K)$  en  $I'$ . Dit geeft

$$\frac{I'}{V'(K)} = 2\pi \sigma_{xx} \cdot \gamma K \cdot \tanh(\gamma K). \quad (\text{A14})$$

Dit kan zonder apostrofs worden herschreven als

$$\frac{I}{V} = j\omega C_{tot} \cdot \frac{\tanh(\gamma K)}{\gamma K}. \quad (\text{A15})$$

Daarmee is de formule voor de capaciteit afgeleid.