

MASTER

Decoherentie in een neutron interferentie experiment : een onderzoek met behulp van positieve operator waardige maten

Roth, A.C.

Award date:
1995

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

**DECOHERENTIE IN EEN
NEUTRON
INTERFERENTIE EXPERIMENT**

Een onderzoek met behulp van
Positieve Operator Waardige Maten

Afstudeerwerk van Bram Roth in de periode augustus 1994/juni 1995, onder begeleiding van dr. W.M. de Muynck.

Samenvatting

In neutronen interferentie experimenten is vooral een effect genaamd *decoherentie* onderwerp van onderzoek. Deze decoherentie, een verzamelnaam voor het zwakker worden respectievelijk geheel verdwijnen van kruistermen, leidt tot een vervaging van de interferentie. In de hoofdstukken 2 en 3 wordt een mogelijk mechanisme achter decoherentie behandeld: fluctuaties in de voor het experiment gebruikte partiële absorber (zie Figuur 1.1). In Hoofdstuk 2 gebeurt dit m.b.v. een zeer concreet model voor de fluctuaties, in Hoofdstuk 3 wordt gebruik gemaakt van een optische potentiaal. Een tweede mechanisme voor decoherentie wordt in Hoofdstuk 4 meegenomen, namelijk de beïnvloeding (bijvoorbeeld door impulsoverdracht) door het neutron van de absorber. Tenslotte worden in dit hoofdstuk de consequenties voor het experiment van *asymmetrische preparatie* besproken. Telkens wordt gebruik gemaakt van het formalisme van de Positieve Operator Waardige Maten (POWM's, zie volgende pagina).

In Hoofdstuk 5 tenslotte, komt in abstracto een aantal aspecten van de quantummechanische meting aan de orde. De quantummechanische meting wordt beschreven als een *interactie* tussen het object (voorbeeld: neutron) en het meetapparaat (neutron interferometer). Met name zijn we geïnteresseerd in het verband tussen de determinatieve en preparatieve aspecten van de meting. Ook wordt gekeken naar het verband tussen de interactie tussen object en meetapparaat enerzijds, en de observabelen die gemeten worden anderzijds.

PWM's, POWM's en de theorie van niet-ideale metingen. In het volgende zal een korte behandeling worden gegeven van de theorie van gegeneraliseerde observabelen en van niet-ideale metingen. We zijn daarbij verre van volledig. Voor een uitgebreidere versie zie men bijvoorbeeld Ref[1].

In de gebruikelijke Dirac-Von Neumann formulering van de quantummechanica worden observabelen geassocieerd met Hermitische operatoren op een Hilbertruimte. Toestanden zijn vectoren in (of dichtheidsoperatoren op) deze Hilbertruimte. Iedere Hermitische operator A heeft een spectrale representatie in termen van projectie-operatoren. In de voor dit afstudeerwerk belangrijke gevallen zal sprake zijn van een aftelbaar (discreet) spectrum. In deze gevallen luidt de spectrale representatie eenvoudig:

$$A = \sum_n a_n P_n \quad (0.1)$$

Hierin zijn a_n de eigenwaarden van A , en P_n zijn ééndimensionale projectoren op de eigenruimten van A . (In het geval van ontaarding zijn er indices n en m , $n \neq m$, zodat $a_n = a_m$.) De set $\{P_n\}$ van projecties vormt een zogenaamde Projectie Waardige Maat (PWM), die op tamelijk triviale manier voldoet aan de eisen die men aan het maatbegrip stelt (zie verderop). De fysica van observabele A zit niet zozeer in de eigenwaarden a_n als wel in de door A gedefinieerde PWM $\{P_n\}$: Door bijvoorbeeld andere eenheden in te voeren zullen de eigenwaarden a_n veranderen, terwijl de PWM $\{P_n\}$ onveranderd blijft. Dit is een reden om het begrip "observabele" te generaliseren en niet A maar de door A gedefinieerde PWM $\{P_n\}$ als observabele te zien. Er zijn echter goede redenen om een nog verdere generalisatie van het begrip "observabele" toe te laten. Een observabele is dan een Positieve Operator Waardige Maat (POWM), die we in ons eenvoudige geval als volgt definiëren:

Een POWM is een set operatoren $\{M_n\}$ die voldoen aan:

- De operatoren zijn positief:

$$M_n \geq O \quad (0.2)$$

- Ze sommeren tot de éénheidsoperator:

$$\sum_n M_n = I \quad (0.3)$$

- De kans op uitkomst "k", p_k , is de verwachtingswaarde $\langle M_k \rangle$ van M_k :

$$p_k = \langle M_k \rangle = \text{Tr } \rho M_k \quad (0.4)$$

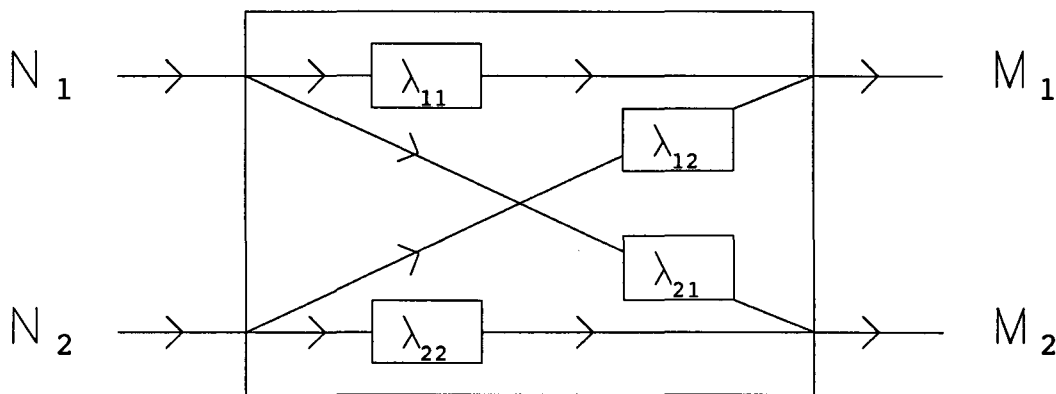
waarin ρ de dichtheidsoperator is die de toestand van het systeem beschrijft.

Aan een vierde eigenschap van de maat, t.w. additiviteit, is dankzij 0.4 en de regels der kansrekening triviaal voldaan.

Een meting van een POWM $\{M_k\}$ is een *niet-ideale meting* van een POWM $\{N_l\}$ als er een matrix (λ_{kl}) is zodat:

$$M_k = \sum_l \lambda_{kl} N_l \quad \lambda_{kl} \geq 0 \quad \sum_k \lambda_{kl} = 1 \quad (0.5)$$

Zo'n matrix (λ_{kl}) is een *stochastische matrix* en wordt ook *niet-idealiteitsmatrix* genoemd. Om het begrip niet-ideale meting aanschouwelijk te maken nemen we het voorbeeld $\{M_k\} = \{M_1, M_2\}$ en $\{N_l\} = \{N_1, N_2\}$. We hebben dan $M_1 = \lambda_{11} N_1 + \lambda_{12} N_2$



Figuur 0.1: $\{M_1, M_2\}$ is een niet-ideale, uitgesmeerde versie van $\{N_1, N_2\}$.

en $M_2 = \lambda_{21}N_1 + \lambda_{22}N_2$. In Figuur 0.1 ziet men dat de kansverdeling die $\{M_k\}$ produceert een uitgesmeerde versie is van de kansverdeling die afkomstig is van $\{N_l\}$. Daarbij zijn de matrixelementen λ_{kl} te interpreteren als conditionele kansen. Zo is λ_{21} de conditionele kans dat een meting van $\{M_k\}$ de meetuitkomst "2" geeft, gegeven dat een meting van $\{N_l\}$ het resultaat "1" zou geven. We zien dat de elementen λ_{12} en λ_{21} aanleiding geven tot "verkeerde" uitkomsten. Zo is in te zien dat de meetresultaten des te meer worden uitgesmeerd naarmate de niet-idealiteitsmatrix meer afwijkt van de eenheidsmatrix, die dus het speciale geval van de ideale meting beschrijft.

Er bestaan niet-idealiteitsmaten die de niet-idealiteit van de meting uitdrukken als een afwijking van de niet-idealiteitsmatrix van de eenheidsmatrix. Als voorbeeld noemen we hier de niet-idealiteitsmaat ϵ die geschikt is voor vierkante stochastische matrices:

$$\epsilon(\lambda) = 1 - |\det(\lambda)| \quad (0.6)$$

Er geldt hier $0 \leq \epsilon \leq 1$ waarbij het geval $\epsilon = 0$ correspondeert met een ideale meting en $\epsilon = 1$ met een oninformatieve meting.

Als de niet-idealiteitsmatrix inverteerbaar is, dan kunnen we de POWM $\{N_l\}$ ook vinden in termen van $\{M_k\}$, aldus:

$$N_l = \sum_k (\lambda^{-1})_{lk} M_k \quad (0.7)$$

In dit geval spreken we van een *inverteerbare niet-ideale meting* (Ref[2]).

Een bivariate POWM $\{R_{mn}\}$ beschrijft een *gezamenlijke niet-ideale meting* van twee POWM's $\{M_k\}$ en $\{N_l\}$ als de marginales $\{\sum_n R_{mn}\}$ en $\{\sum_m R_{mn}\}$ niet-ideale metingen beschrijven van $\{M_k\}$ en $\{N_l\}$ respectievelijk, i.e. als er twee stochastische matrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) bestaan zodat:

$$\sum_n R_{mn} = \sum_k \lambda_{mk} M_k \quad (0.8)$$

$$\sum_m R_{mn} = \sum_l \mu_{nl} N_l \quad (0.9)$$

Deze definitie van gezamenlijke, niet-ideale metingen stelt ons in staat een complementariteitsprincipe te formuleren dat los staat van de welbekende Heisenberg onzekerheidsrelaties: Indien we twee incompatibele observabelen gezamenlijk niet-ideaal meten kunnen de niet-idealiteitsmatrices niet beide de eenheidsmatrix benaderen. Wilen we de meting van een observabele beter maken, dan zal de meting van een daarmee incompatibele observabele zeker slechter worden.

De bivariate POWM $\{R_{mn}\}$ heet *triviale verfijning* van de POWM $\{M_n\}$ als er een stochastische matrix (λ_{mn}) is zo dat:

$$R_{mn} = \lambda_{mn} M_n \quad (0.10)$$

Omgekeerd heet $\{M_n\}$ dan een *triviale vergroving* van $\{R_{mn}\}$. Dankzij de eigenschappen van een stochastische matrix (zie 0.5) geldt nog:

$$\sum_m R_{mn} = \sum_m \lambda_{mn} M_n = M_n \quad (0.11)$$

Hoofdstuk 1

Introductie.

Een eenvoudig voorbeeld van een gezamenlijke niet-ideale meting van twee observabelen is het volgende interferentie-experiment met neutronen (zie Figuur 1.1). In dit experiment wordt (worden) een (twee) neutronenbundel(s) door een beamsplitter in tweeën gesplitst. De ene bundel wordt t.o.v. de andere in fase verschoven met een bedrag χ . Deze bundel wordt ook gedeeltelijk geabsorbeerd door een stochastische absorber met doorlaatkans a . Vervolgens worden beide bundels met elkaar tot interferentie gebracht. In de detectoren is dan een interferentiepatroon te meten door χ te variëren.

Dit experiment (zie Ref[3]) is te interpreteren als een gezamenlijke, niet-ideale meting van de twee incompatibele observabelen "pad" en "interferentie". Hier is "pad" de observabele die correspondeert met de weg die het neutron "kiest" na de eerste beamsplitter: de rechter of de linker bundel. "Interferentie" is de observabele die we associëren met het ideale interferentie-experiment: de detector die het neutron "kiest" na de laatste beamsplitter (als $a = 1$): D_A of D_B .

Het experiment is als volgt te beschrijven in termen van POWM's. Als we de polarisatie van de neutronen buiten beschouwing laten (en nog zo één en ander meer!), wordt de toestand van de invallende neutronen geheel beschreven door de tweedimensionale Hilbertruimte die wordt opgespannen door de orthogonale toestanden $|L\rangle$ en $|R\rangle$ die respectievelijk de linker- en rechter bundel beschrijven. We nemen aan (Ref[3]) dat iedere reflectie een faseverschuiving van $\frac{1}{2}\pi$ introduceert. De werking van de absorber stellen we ons voor het ogenblik eenvoudig voor als (zie weer Ref[3]):

$$|R\rangle \rightarrow \sqrt{a}|R\rangle + \sqrt{1-a}|Z\rangle \quad (1.1)$$

Hierin stelt $|Z\rangle$ de toestand van een geabsorbeerd neutron voor. We veronderstellen $|Z\rangle$ en $|L\rangle$ respectievelijk $|R\rangle$ orthogonaal, i.e. $\langle Z|L\rangle = \langle Z|R\rangle = 0$. In de volgende hoofdstukken zal de neutron-absorber interactie, die in 1.1 een sterk geïdealiseerde vorm heeft, preciezer worden bekeken.

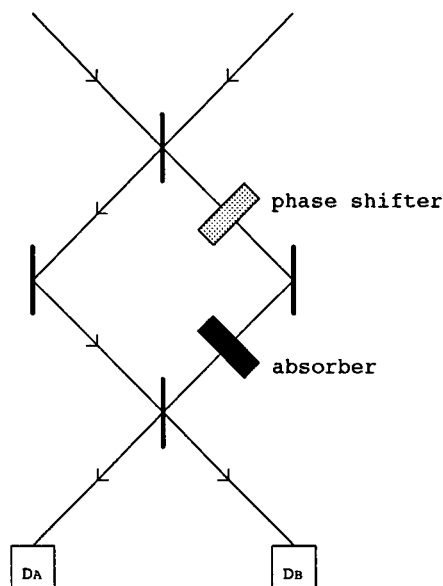
De ingaande toestand ψ_{in} van de neutronen laat zich algemeen representeren als:

$$|\psi_{in}\rangle = \alpha|L\rangle + \beta|R\rangle \quad (1.2)$$

Schrijven we tenslotte het effect van een beamsplitter als (zie Ref[3]):

$$|R\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|R\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|L\rangle \quad (1.3)$$

$$|L\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|L\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|R\rangle \quad (1.4)$$



Figuur 1.1: Het neutron interferentie experiment in de neutron interferometer.

met een factor i voor reflectie, dan wordt de werking van de hele interferometer:

$$\begin{aligned}
 \alpha|L\rangle + \beta|R\rangle &\rightarrow \frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}(i|L\rangle + |R\rangle) + \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}(|L\rangle + i|R\rangle) \\
 &\rightarrow \frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}(i|L\rangle + e^{ix}|R\rangle) + \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}(|L\rangle + ie^{ix}|R\rangle) \\
 &\rightarrow \frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}(-|L\rangle + ie^{ix}|R\rangle) + \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}(i|L\rangle - e^{ix}|R\rangle) \\
 &\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2}(-\alpha + i\beta)|L\rangle + \frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix}[\sqrt{a}|R\rangle + \sqrt{1-a}|Z\rangle] \\
 &\rightarrow \frac{1}{2}i\{\alpha[-1 + \sqrt{a}e^{ix}] + i\beta[1 + \sqrt{a}e^{ix}]\}|L\rangle + \frac{1}{2}i\{i\alpha[1 + \sqrt{a}e^{ix}] + \\
 &\quad + \beta[1 - \sqrt{a}e^{ix}]\}|R\rangle + \frac{1}{2}i\sqrt{2(1-a)}(\alpha + i\beta)e^{ix}|Z\rangle = |\psi_{out}\rangle
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Hierin stelt $|\psi_{out}\rangle$ de uitgaande neutrontoestand voor. Laten p_A en p_B de detectiekansen van het neutron zijn in resp. detector D_A en D_B , en zij p_Z de kans dat het neutron niet wordt gedetecteerd. We beschrijven het experiment met de POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ en moeten dan identificeren, voor willekeurige $\underline{\rho}_{in}$:

$$p_A = \text{Tr} \underline{\rho}_{in} \underline{M}_A = |\langle L|\psi_{out}\rangle|^2 \tag{1.6}$$

$$p_B = \text{Tr} \underline{\rho}_{in} \underline{M}_B = |\langle R|\psi_{out}\rangle|^2 \tag{1.7}$$

$$p_Z = \text{Tr} \underline{\rho}_{in} \underline{M}_Z = |\langle Z|\psi_{out}\rangle|^2 \tag{1.8}$$

Voor de duidelijkheid merken we op dat we hier de matrixrepresentatie gebruiken voor operatoren op de tweedimensionale Hilbertruimte van ingaande neutrontoestanden. We

hebben voor $|\psi_{in}\rangle$ de kolomvectorrepresentatie

$$\psi_{in} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

zodat we voor $\rho_{in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$ de matrixrepresentatie $\underline{\rho}_{in}$ vinden:

$$\underline{\rho}_{in} = \psi_{in}\psi_{in}^\dagger = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Onze POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ wordt door bovenstaande vergelijkingen bepaald als:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a - 2\sqrt{a} \cos \chi & -i(1 - a) + 2\sqrt{a} \sin \chi \\ i(1 - a) + 2\sqrt{a} \sin \chi & 1 + a + 2\sqrt{a} \cos \chi \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a + 2\sqrt{a} \cos \chi & -i(1 - a) - 2\sqrt{a} \sin \chi \\ i(1 - a) - 2\sqrt{a} \sin \chi & 1 + a - 2\sqrt{a} \cos \chi \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\underline{M}_Z = \frac{1}{2}(1 - a) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Voor $a = 0$ reduceert de POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ tot $\{\frac{1}{2}\underline{P}_+, \frac{1}{2}\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ met

$$\underline{P}_+ := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\underline{P}_- := \underline{I} - \underline{P}_+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

De PWM $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ kan als pad-observeerbare worden geïnterpreteerd (zie ook Ref[3], Ref[4]). Voor $a = 1$ reduceert $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ tot $\{\underline{P}_A, \underline{P}_B, \underline{Q}\}$ met

$$\underline{P}_A := \begin{bmatrix} \sin^2 \frac{1}{2}\chi & \frac{1}{2} \sin \chi \\ \frac{1}{2} \sin \chi & \cos^2 \frac{1}{2}\chi \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\underline{P}_B := \underline{I} - \underline{P}_A = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{1}{2}\chi & -\frac{1}{2} \sin \chi \\ -\frac{1}{2} \sin \chi & \sin^2 \frac{1}{2}\chi \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

De PWM $\{\underline{P}_A, \underline{P}_B\}$ kan worden geïnterpreteerd als interferentie-observeerbare (zie andermaal Ref[3], Ref[4]). Met deze PWM's:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a\underline{P}_- + \sqrt{a}(\underline{P}_A - \underline{P}_B)] \quad (1.18)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a\underline{P}_- - \sqrt{a}(\underline{P}_A - \underline{P}_B)] \quad (1.19)$$

$$\underline{M}_Z = (1 - a)\underline{P}_- \quad (1.20)$$

De POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ laat zich herschikken in de bivariate triviale verfijning:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A & \underline{M}_B \\ \frac{1}{2}\underline{M}_Z & \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Het resultaat van de marginals is:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \underline{M}_B \\ \underline{M}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_+ \\ \underline{P}_- \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \\ \underline{M}_B + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{a} & 1 - \sqrt{a} \\ 1 - \sqrt{a} & 1 + \sqrt{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_A \\ \underline{P}_B \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Hieruit is duidelijk dat deze meting kan worden geïnterpreteerd als een gezamenlijke niet-ideale meting van interferentie-observabele $\{\underline{P}_A, \underline{P}_B\}$ en pad-observabele $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ (zie ook Ref[3]). Laat (λ_{mk}) respectievelijk (μ_{nl}) de niet-idealiteitsmatrix zijn voor de pad-meting respectievelijk de interferentie-meting:

$$(\lambda_{mk}) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$(\mu_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{a} & 1 - \sqrt{a} \\ 1 - \sqrt{a} & 1 + \sqrt{a} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Het is nu interessant voor deze meting de niet-idealiteitsmaten $\epsilon_{(\lambda)}$ en $\epsilon_{(\mu)}$ (zie 0.6) te berekenen voor de niet-idealiteitsmatrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) . We vinden:

$$\epsilon_{(\lambda)} = a \quad (1.26)$$

$$\epsilon_{(\mu)} = 1 - \sqrt{a} \quad (1.27)$$

We zien dat $\epsilon_{(\lambda)}$ en $\epsilon_{(\mu)}$ voor geen enkele waarde van a beide naar 0 kunnen gaan. Dit is een gevolg van de incompatibiliteit van de interferentie-observabele $\{\underline{P}_A, \underline{P}_B\}$ en de pad-observabele $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$. De niet-idealiteitsmatrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) zijn echter voor $0 < a < 1$ wel inverteerbaar, zodat we voor $0 < a < 1$ van een inverteerbare gezamenlijke niet-ideale meting van interferentie-observabele $\{\underline{P}_A, \underline{P}_B\}$ en pad-observabele $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ kunnen spreken.

Hoofdstuk 2

Enige consequenties van decoherentie voor het neutronen interferentie experiment in de interferometer.

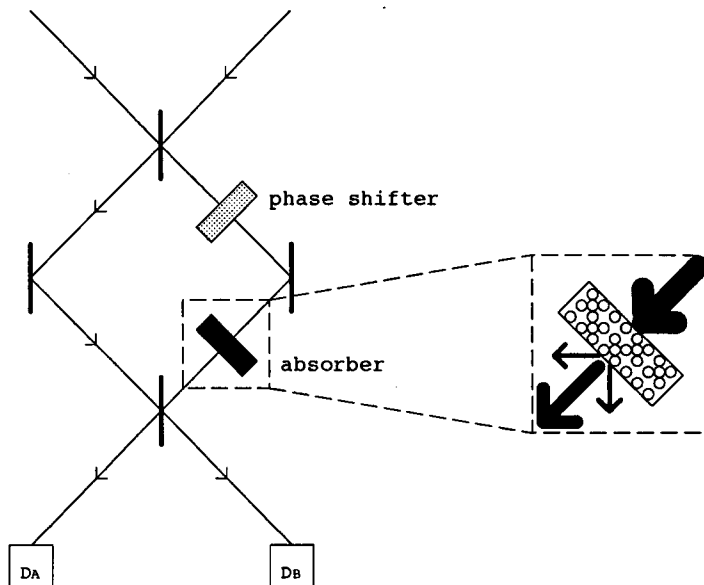
In het voorgaande is de situatie behandeld waarin de absorber een vaste doorlaatkans a heeft. In Ref[5] komt de situatie aan de orde waarin de doorlaatkans a fluctueert. Ook in dat geval is een interpretatie mogelijk als niet-ideale meting van "pad" en "interferentie". Echter, in Ref[6] laat men zien dat de absorber ook een random faseverschuiving introduceert, waardoor de coherentie gedeeltelijk verloren gaat en het interferentiepatroon minder duidelijk zichtbaar wordt. Wij willen, steunend op de resultaten van Ref[6], het experiment formuleren in termen van POWM's en wel zodanig dat het zich weer laat interpreteren als gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie". Dit zal opnieuw mogelijk blijken. De pad-meting wordt niet beïnvloed door de fluctuaties, maar de interferentie-meting blijkt slechter te worden dan bij de niet-fluctuerende absorber. Door de random faseverschuiving wordt de interferentie-meting zelfs slechter nog dan in Ref[5], waar alleen fluctuaties in doorlaatkans ter sprake kwamen.

2.1 Korte samenvatting van Ref[6].

We zullen ons eerst concentreren op de interactie van de neutronen met de absorber. Deze interactie maakt zowel absorptie als verstrooiing mogelijk (zie Figuur 2.1).

In het volgende vindt men een beknopte opsomming uit Ref[6] van de voor ons doel relevante resultaten. Omdat verstrooiing ook verlies van bundelneutronen veroorzaakt, verdisconteren we deze in de absorptie. We nemen aan dat ieder individueel neutron (neutron "j") zijn eigen, vaste transmissiecoëfficiënt $T^{(j)}$ "ziet"¹. We zullen middeling over een groot aantal neutronen aangeven met \overline{T} , zodat we bijvoorbeeld met \overline{T} de gemiddelde transmissiecoëfficiënt bedoelen. Zij N het totaal aantal in het experiment

¹Deze aanname deugt eigenlijk niet, omdat tijdens de passage van het neutron de absorber fluctueert.



Figuur 2.1: De interactie met de absorber. Door zowel absorptie als verstrooiing verdwijnen neutronen uit de bundel.

gebruikte neutronen. Dan wordt dus \bar{T} gegeven door:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T^{(j)} \quad (2.1)$$

We definiëren a , de experimenteel waargenomen doorlaatkans als:

$$a := \bar{a} = \overline{|T|^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |T^{(j)}|^2 \quad (2.2)$$

We zien eenvoudig in dat $|\bar{T}|^2 \leq \overline{|T|^2}$:

$$\overline{|T - \bar{T}|^2} = \overline{|T|^2} - |\bar{T}|^2 \geq 0 \quad (2.3)$$

Daarom kunnen we schrijven $|\bar{T}|^2 = \overline{|T|^2}(1 - \epsilon) = a(1 - \epsilon)$ waarin we de decoherentie parameter ϵ definiëren als:

$$\epsilon := 1 - \frac{|\bar{T}|^2}{\overline{|T|^2}} \quad (2.4)$$

Er geldt $0 \leq \epsilon \leq 1$ waarbij het geval $\epsilon = 0$ correspondeert met volkomen coherentie en $\epsilon = 1$ met totaal verlies van coherentie, zodat de interferentie verdwijnt.

De absorber werkt door absorptie en verstrooiing van de neutronen aan absorberende scatterers (bijvoorbeeld Gd-atomen, zie Ref[6]). Als een neutron een *vast* aantal van n van zulke scatterers "ziet", geldt de standaard Goldberger formule voor de transmissiecoëfficiënt T_n :

$$T_n = e^{-\frac{1}{2}n(1+i\alpha)} \quad \text{met } \alpha = 2\lambda b_R/\sigma_a \quad (2.5)$$

waarin b_R =reëel deel van de verstrooiingslengte van de elastische neutron-scatterer botsing; σ_a =werkzame doorsnede voor neutron absorptie; λ =de Broglie golflengte neutron. Later in dit hoofdstuk zal een grootte-orde schatting van α van belang blijken (zie 2.60 en 2.69). In Ref[7] vinden we voor λ respectievelijk b_R de grootte-orden 0.1

$nm=10^{-10}m$ en $1\text{ fm}=10^{-15}m$, en voor σ_a uit Ref[8] de groote-orde $1000\text{ b}=10^{-25}m^2$. Dit betekent dus dat α in de buurt van 1 kan liggen.

De doorlaatkans a_n die bij 2.5 hoort is nu:

$$a_n = |T_n|^2 = e^{-n} \quad (2.6)$$

Echter, in werkelijkheid zal er sprake zijn van fluctuaties: Het aantal scatterers n dat de neutronen zien, zal fluctueren. We geven middeling over absorber microtoestanden aan met $\langle \dots \rangle$. Het op deze wijze verkregen gemiddeld aantal scatterers wordt dus aangegeven als $\langle n \rangle$.

In het vervolg van dit hoofdstuk zullen we ons beperken tot Gaussische fluctuaties waarvoor geldt:

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = g \langle n \rangle \quad (2.7)$$

waarin g een parameter is die de fluctuaties karakteriseert. Er geldt $0 \leq g \leq 1$ waarbij $g = 0$ correspondeert met het ontbreken van fluctuaties, en $g = 1$ met Poisson fluctuaties. Er wordt verondersteld dat het aantal scatterers waarmee ieder individueel neutron wisselwerkt, van neutron tot neutron zal verschillen. Dit kan zelfs gebeuren gedurende de passage van de absorber. Om dit effect in rekening te brengen delen we het ensemble neutronen op in deelensembles, waar bij ieder deelensemble het neutron wisselwerkt met een vast aantal scatterers, zodat de transmissiecoëfficiënt T_n (2.5) bij ieder deelensemble constant is. De uitkomsten van het neutron interferentie experiment worden nu verkregen door alle mogelijke geschiedenissen van de neutron-absorber interactie mee te nemen. Wij zullen aannemen dat dit kan door te middelen over een groot aantal neutronen $\langle \dots \rangle$, met voor ieder neutron een vast aantal scatterers. Dit komt neer op een middeling over alle deelensembles, volgend op een middeling binnen elk deelensemble.

Een tweede zeer belangrijke aanname is de *ergodiciteits-aanname*:

$$\langle \dots \rangle = \langle \dots \rangle \quad (2.8)$$

ofwel: Middeling over deelensembles neutronen = middeling over absorber microtoestanden. Deze aanname stelt ons in staat de middeling over bovengenoemde deelensembles eenvoudig uit te voeren. In de Appendix wordt de geldigheid van de volgende formule (zijnde de Gauss-reductieformule) bewezen, geldig voor Gauss-vormige kansverdelingen:

$$\langle e^{\xi n} \rangle = e^{(\xi + \frac{1}{2}g\xi^2)\langle n \rangle} \quad (2.9)$$

Deze formule geldt voor ieder complex getal ξ . We vinden m.b.v. deze formule en de ergodiciteitsaanname:

$$a = \bar{a} = \langle a_n \rangle = \langle e^{-n} \rangle = e^{-(1 - \frac{1}{2}g)\langle n \rangle} =: b e^{\frac{1}{2}g\langle n \rangle} \quad (2.10)$$

waarin is gedefinieerd:

$$b := e^{-\langle n \rangle} \quad (2.11)$$

We zien dat $a = b$ in het geval dat er geen fluctuaties zijn ($g = 0$), zodat we b mogen beschouwen als de doorlaatkans bij het ontbreken van fluctuaties.

We kunnen meer met formule 2.11. Uit de Goldberger formule 2.5 blijkt dat bij fluctuerende n niet alleen de doorlaatkans $a_n = |T_n|^2$ fluctueert, maar dat de absorber ook een random faseverschuiving $-\frac{1}{2}n\alpha$ introduceert. M.b.v. de ergodiciteits-aanname vinden we:

$$\bar{T} = \langle T_n \rangle = e^{-[\frac{1}{2}(1+i\alpha) - \frac{1}{8}g(1+i\alpha)^2]\langle n \rangle} =: B e^{\frac{1}{8}g\langle n \rangle(1+i\alpha)^2} \quad (2.12)$$

waarin is gedefinieerd

$$B := e^{-\frac{1}{2}\langle n \rangle(1+i\alpha)} \quad (2.13)$$

zodat o.a. $|B|^2 = b$. Verderop hebben we ook nodig:

$$\sqrt{a} = \overline{|T|} = \langle |T_n| \rangle = \langle e^{-\frac{1}{2}n} \rangle = e^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}g\right)\langle n \rangle} = \sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g\langle n \rangle} \quad (2.14)$$

Merk op dat hieruit volgt, met 2.10:

$$\sqrt{a} = \sqrt{a} e^{-\frac{1}{8}g\langle n \rangle} \leq \sqrt{a} \quad (2.15)$$

in overeenstemming met het in Ref[5] gevondene. Voor de decoherentie-parameter (2.4) vinden we nog de uitdrukking:

$$\epsilon = 1 - e^{-\frac{1}{4}g\langle n \rangle(1+\alpha^2)} \quad (2.16)$$

De fluctuerende absorber in termen van POWM's. Bekijk eerst het geval van de absorber met een vast, niet fluctuerend aantal scatterers n . Laat dit geval beschreven worden door een POWM $\{\underline{M}_A^{(n)}, \underline{M}_B^{(n)}, \underline{M}_Z^{(n)}\}$. De kansen $p_A^{(n)}$, $p_B^{(n)}$ en $p_Z^{(n)}$ op detectie in detectoren D_A of D_B , respectievelijk op absorptie van een neutron, worden dan gegeven door:

$$p_A^{(n)} = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_A^{(n)} \quad (2.17)$$

$$p_B^{(n)} = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_B^{(n)} \quad (2.18)$$

$$p_Z^{(n)} = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_Z^{(n)} \quad (2.19)$$

waarin $\underline{\rho}_{in}$, de ingaande neutrontoestand, wordt gegeven door 1.10. In werkelijkheid fluctueert het aantal scatterers n . Dit betekent dat de experimenteel waargenomen kansen p_A , p_B en p_Z uit $p_A^{(n)}$, $p_B^{(n)}$ en $p_Z^{(n)}$ kunnen worden verkregen door een middeling $\langle \dots \rangle$ over absorber microtoestanden (middeling over n) die bij geldigheid van de ergodiciteitsaannname 2.8 neerkomt op ensemble-middeling:

$$p_A = \langle p_A^{(n)} \rangle \quad (2.20)$$

$$p_B = \langle p_B^{(n)} \rangle \quad (2.21)$$

$$p_Z = \langle p_Z^{(n)} \rangle \quad (2.22)$$

We beschrijven het experiment met de fluctuerende absorber met de POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ en kunnen dus schrijven:

$$p_A = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_A = \langle \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_A^{(n)} \rangle = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \langle \underline{M}_A^{(n)} \rangle \quad (2.23)$$

$$p_B = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_B = \langle \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_B^{(n)} \rangle = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \langle \underline{M}_B^{(n)} \rangle \quad (2.24)$$

$$p_Z = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_Z = \langle \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_Z^{(n)} \rangle = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \langle \underline{M}_Z^{(n)} \rangle \quad (2.25)$$

Dit betekent dat (bij geldigheid van ergodiciteitsaannname 2.8) de POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ niets anders is dan een *mengsel* (=een convexe combinatie, zie Ref[1]) van POWM's $\{\underline{M}_A^{(n)}, \underline{M}_B^{(n)}, \underline{M}_Z^{(n)}\}$:

$$\underline{M}_A = \langle \underline{M}_A^{(n)} \rangle \quad (2.26)$$

$$\underline{M}_B = \langle \underline{M}_B^{(n)} \rangle \quad (2.27)$$

$$\underline{M}_Z = \langle \underline{M}_Z^{(n)} \rangle \quad (2.28)$$

Bij vaste n (niet-fluctuerende absorber) is de faseverschuiving die de absorber introduceert, te verdisconteren in χ . We kunnen dus voor het geval van de niet-fluctuerende absorber de POWM $\{\underline{M}_A^{(n)}, \underline{M}_B^{(n)}, \underline{M}_Z^{(n)}\}$ schrijven als:

$$\underline{M}_A^{(n)} = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a_n \underline{P}_- + \sqrt{a_n}(\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n))] \quad (2.29)$$

$$\underline{M}_B^{(n)} = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a_n \underline{P}_- - \sqrt{a_n}(\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n))] \quad (2.30)$$

$$\underline{M}_Z^{(n)} = (1 - a_n)\underline{P}_- \quad (2.31)$$

In deze uitdrukkingen treedt de PWM $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ op als pad-observabele, en $\{\underline{P}_A(\chi_n), \underline{P}_B(\chi_n)\}$ (bij vaste n) als interferentie-observabele (vergelijk dit met 1.18 t/m 1.20). Merk op dat we in $\{\underline{P}_A(\chi_n), \underline{P}_B(\chi_n)\}$ expliciet de afhankelijkheid van de interferentie-observabele van χ_n hebben aangegeven. Dit was in 1.16 en 1.17 niet nodig omdat χ_n daar niet fluctueerde; in dit geval is deze afhankelijkheid echter essentieel. We vinden door substitutie van 2.29 t/m 2.31 in 2.26 t/m 2.28:

$$\underline{M}_A = \langle \underline{M}_A^{(n)} \rangle = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + \langle a_n \rangle \underline{P}_- + \langle \sqrt{a_n}(\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n)) \rangle] \quad (2.32)$$

$$\underline{M}_B = \langle \underline{M}_B^{(n)} \rangle = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + \langle a_n \rangle \underline{P}_- - \langle \sqrt{a_n}(\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n)) \rangle] \quad (2.33)$$

$$\underline{M}_Z = \langle \underline{M}_Z^{(n)} \rangle = (1 - \langle a_n \rangle)\underline{P}_- \quad (2.34)$$

Eerder hebben we al de identificatie $a = \langle a_n \rangle$ gemaakt. We moeten nog evalueren:

$$\langle \sqrt{a_n}(\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n)) \rangle$$

Voor $\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n)$ kunnen we schrijven (zie 1.16 en 1.17):

$$\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n) = \begin{bmatrix} -\cos \chi_n & \sin \chi_n \\ \sin \chi_n & \cos \chi_n \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

zodat

$$\langle \sqrt{a_n}(\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n)) \rangle = \begin{bmatrix} -\langle \sqrt{a_n} \cos \chi_n \rangle & \langle \sqrt{a_n} \sin \chi_n \rangle \\ \langle \sqrt{a_n} \sin \chi_n \rangle & \langle \sqrt{a_n} \cos \chi_n \rangle \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Blijkens de formule $T_n = e^{-\frac{1}{2}n(1+i\alpha)}$ (zie 2.5) introduceert de niet-fluctuerende absorber bij vaste n een faseverschuiving $-\frac{1}{2}n\alpha$ bovenop de faseverschuiving χ , veroorzaakt door de phase shifter (zie Figuur 2.1). Een eventueel "vast", niet fluctuerend deel van deze faseverschuiving kunnen we natuurlijk verdisconteren door herdefinitie van χ (zie Ref[3]). We kunnen dus schrijven:

$$\chi_n = \chi - \frac{1}{2}(n - \langle n \rangle)\alpha \quad (2.37)$$

zodat $\langle \chi_n \rangle = \chi$. Als we schrijven $\cos \chi_n = \frac{1}{2}(e^{i\chi_n} + e^{-i\chi_n})$, $\sin \chi_n = \frac{1}{2i}(e^{i\chi_n} - e^{-i\chi_n})$ en $\sqrt{a_n} = |T_n| = e^{-\frac{1}{2}n}$, dan zijn $\langle \sqrt{a_n} \cos \chi_n \rangle$ en $\langle \sqrt{a_n} \sin \chi_n \rangle$ eenvoudig:

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{a_n} \cos \chi_n \rangle &= \frac{1}{2}(\langle \sqrt{a_n} e^{i(\chi - \frac{1}{2}(n - \langle n \rangle)\alpha)} \rangle + \langle \sqrt{a_n} e^{-i(\chi - \frac{1}{2}(n - \langle n \rangle)\alpha)} \rangle) = \\ &= \frac{1}{2}(e^{i(\chi + \frac{1}{2}\langle n \rangle\alpha)} \langle T_n \rangle + e^{-i(\chi + \frac{1}{2}\langle n \rangle\alpha)} \langle T_n^* \rangle) \end{aligned} \quad (2.38)$$

En:

$$\begin{aligned}\langle \sqrt{a_n} \sin \chi_n \rangle &= \frac{1}{2i} (\langle \sqrt{a_n} e^{i(\chi - \frac{1}{2}(n-(n))\alpha)} \rangle - \langle \sqrt{a_n} e^{-i(\chi - \frac{1}{2}(n-(n))\alpha)} \rangle) = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{i(\chi + \frac{1}{2}(n)\alpha)} \langle T_n \rangle - e^{-i(\chi + \frac{1}{2}(n)\alpha)} \langle T_n^* \rangle)\end{aligned}\quad (2.39)$$

In bovenstaande uitdrukkingen komen we termen tegen als $e^{\frac{i}{2}(n)\alpha} \langle T_n \rangle$. Hiervoor vinden we met de eerder vermelde formule 2.9:

$$\begin{aligned}e^{\frac{i}{2}(n)\alpha} \langle T_n \rangle &= e^{\frac{i}{2}(n)\alpha} \langle e^{-\frac{1}{2}n(1+i\alpha)} \rangle \\ &= e^{\frac{i}{2}(n)\alpha} e^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{8}g)(n)} e^{-\frac{1}{8}g(n)\alpha^2} e^{-\frac{i}{2}(1-\frac{1}{2}g)(n)\alpha} = \sqrt{a} e^{-\frac{1}{8}g(n)\alpha^2} e^{\frac{i}{4}g(n)\alpha}\end{aligned}\quad (2.40)$$

We definiëren:

$$\beta := e^{-\frac{1}{8}g(n)\alpha^2} \quad (0 \leq \beta \leq 1) \quad (2.41)$$

$$\chi' := \chi + \frac{1}{4}g(n)\alpha \quad (2.42)$$

Merk op dat we bij afwezigheid van fluctuaties ($g = 0$) krijgen $\chi' = \chi$. Uiteraard geldt nog dat $e^{-\frac{i}{2}(n)\alpha} \langle T_n^* \rangle = (e^{\frac{i}{2}(n)\alpha} \langle T_n \rangle)^*$ zodat we kunnen schrijven:

$$\langle \sqrt{a_n} \cos \chi_n \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{a} \beta (e^{i\chi'} + e^{-i\chi'}) = \sqrt{a} \beta \cos \chi' \quad (2.43)$$

en

$$\langle \sqrt{a_n} \sin \chi_n \rangle = \sqrt{a} \beta \sin \chi' \quad (2.44)$$

We zien met 2.16 dat $\sqrt{a} \beta = \sqrt{a(1-\epsilon)}$:

$$\sqrt{a} \beta = \sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g(n)} e^{-\frac{1}{8}g(n)\alpha^2} = \sqrt{b} e^{\frac{1}{4}g(n)} e^{-\frac{1}{8}g(n)(1+\alpha^2)} = \sqrt{a(1-\epsilon)} \quad (2.45)$$

Met deze definities vinden we dus een uitdrukking voor $\langle \sqrt{a_n} (\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n)) \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \sqrt{a_n} (\underline{P}_A(\chi_n) - \underline{P}_B(\chi_n)) \rangle &= \sqrt{a(1-\epsilon)} \begin{bmatrix} -\cos \chi' & \sin \chi' \\ \sin \chi' & \cos \chi' \end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{a(1-\epsilon)} (\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))\end{aligned}\quad (2.46)$$

We zien dat er ondanks de random faseverschuiving toch éénduidig een interferentie-observabele $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ kan worden gedefinieerd. Dit is in het algemeen een andere interferentie-observabele dan die welke in het niet-fluctuerende geval optreedt ($\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$), omdat er meestal zal gelden $\chi' \neq \chi$. Er zijn slechts twee situaties waarin we dezelfde interferentie-observabele meten. Dit is zo (a) bij afwezigheid van fluctuaties ($g = 0$) of (b) in het geval dat er geen random faseverschuiving optreedt ($\alpha = 0$).

De POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ laat zich aldus in de pad-observabele $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ en interferentie-observabele $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ uitdrukken:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{2} [\underline{P}_+ + a\underline{P}_- + \sqrt{a(1-\epsilon)} (\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (2.47)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{2} [\underline{P}_+ + a\underline{P}_- - \sqrt{a(1-\epsilon)} (\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (2.48)$$

$$\underline{M}_Z = (1-a)\underline{P}_- \quad (2.49)$$

Dit laat weer een aanpak toe als in Hoofdstuk 1. Herschik namelijk $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ in de bivariante triviale verfining:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A & \underline{M}_B \\ \frac{1}{2}\underline{M}_Z & \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Dan is het resultaat van de marginalen:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \underline{M}_B \\ \underline{M}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_+ \\ \underline{P}_- \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \\ \underline{M}_B + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \\ 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_A(\chi') \\ \underline{P}_B(\chi') \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Hieruit is duidelijk dat deze meting weer kan worden geïnterpreteerd als gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie", waarbij we een interferentie-observabele meten die enigszins in fase verschoven is ten opzichte van de oorspronkelijke interferentie-observabele. Omdat deze verschuiving zonder meer in χ kan worden verdisconteerd, is dit onderscheid eigenlijk tamelijk triviaal. De niet-idealiteit van de interferentie-meting blijkt echter wel te worden beïnvloed, zoals we aan de niet-idealiteitsmatrices $(\bar{\lambda}_{mk})$ en $(\bar{\mu}_{nl})$ voor respectievelijk de pad- en de interferentie-meting kunnen zien:

$$(\bar{\lambda}_{mk}) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$(\bar{\mu}_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \\ 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

We zien dat de pad-meting door de fluctuaties in de absorber niet wordt beïnvloed. Voor de interferentie-meting hebben we de niet-idealiteitsmaat $\epsilon_{(\bar{\mu})}$ waarvoor we vinden (met 0.6):

$$\epsilon_{(\bar{\mu})} = 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \geq 1 - \sqrt{a} \geq 1 - \sqrt{a} \quad (2.55)$$

In deze twee ongelijkheden herkennen we in $1 - \sqrt{a}$ de niet-idealiteitsmaat die optreedt in Ref[5], waar alleen fluctuaties in doorlaatkans worden beschouwd. Het verlies van coherentie door de random faseverschuiving in de absorber veroorzaakt dus nog een extra verslechtering van de interferentie-meting. De laatste ongelijkheid, die we al in Ref[5] tegenkomen, bevat de term $1 - \sqrt{a}$. Dit is de niet-idealiteitsmaat voor de interferentie-meting zoals we die tegenkomen als er in het geheel geen fluctuaties zijn. De conclusie is dus dat, de aanpak volgend van Ref[6], decoherentie de pad-meting niet beïnvloedt, maar dat de interferentie-meting slechter wordt.

Een andere manier van vergelijken. In het voorgaande hebben we de fluctuerende absorber vergeleken met een (andere) niet-fluctuerende absorber met *dezelfde* doorlaatkans. We kunnen natuurlijk ook de volgende weg bewandelen. Gegeven een niet-fluctuerende absorber met doorlaatkans b . Hoe verandert de meting als we de fluctuaties "aanzetten"? Om te beginnen verandert de doorlaatkans dan volgens 2.10

zodat we nu *dezelfde* absorber vergelijken met *verschillende* doorlaatkansen. We kunnen nu m.b.v 2.10 en 2.45 de niet-idealiteitsmatrices $(\bar{\lambda}_{mk})$ en $(\bar{\mu}_{nl})$ voor respectievelijk de pad- en interferentie-meting in b en de andere parameters uitdrukken:

$$(\bar{\lambda}_{mk}) = \begin{bmatrix} 1 & b e^{\frac{1}{2}g(n)} \\ 0 & 1 - b e^{\frac{1}{2}g(n)} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$(\bar{\mu}_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} & 1 - \sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} \\ 1 - \sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} & 1 + \sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Voor de pad-meting vinden we de niet-idealiteitsmaat

$$\epsilon_{(\bar{\lambda})} = b e^{\frac{1}{2}g(n)} \geq b \quad (2.58)$$

die we nu moeten vergelijken met $\epsilon_{(\lambda)} = b$ bij afwezigheid van fluctuaties. We zien dat de pad-meting door de fluctuaties slechter wordt. Dit kan men eenvoudig terugvoeren op het feit dat de fluctuaties de doorlaatkans vergroten. Voor de interferentie-meting vinden we de niet-idealiteitsmaat

$$\epsilon_{(\bar{\mu})} = 1 - \sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} \quad (2.59)$$

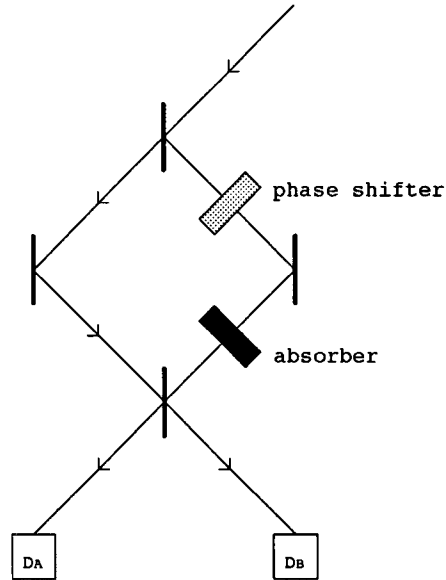
die we nu moeten vergelijken met $\epsilon_{(\mu)} = 1 - \sqrt{b}$ bij afwezigheid van fluctuaties. We zien dat de kwaliteit van de meting slechter wordt dan en slechts dan wanneer:

$$e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} < 1 \quad (2.60)$$

In het algemeen zijn hier twee mogelijkheden: De interferentie-meting kan zowel beter als slechter worden. Dit heeft te maken met het feit dat de fluctuaties in de absorber twee effecten op de interferentie-meting teweeg brengen. De doorlaatkans wordt groter (zie 2.10) en dit heeft natuurlijk een positief effect op de interferentie. Dit effect zien we terug in de factor $e^{\frac{1}{8}g(n)} \geq 1$ die in het linkerlid van bovenstaande vergelijking optreedt. Aan de andere kant veroorzaken de fluctuaties ook een random faseverschuiving, waardoor de coherentie gedeeltelijk verloren gaat. En dat betekent weer een negatief effect op de interferentie-meting, welk effect optreedt in de factor $e^{-\frac{1}{8}g(n)\alpha^2} \leq 1$. Of de interferentie-meting beter dan wel slechter wordt, wordt dus bepaald door de vraag welk van deze twee effecten (grotere doorlaatkans en decoherentie) het "sterkst" is. Omdat α in de praktijk in de buurt van 1 kan liggen, heeft dit dus ook experimentele consequenties. In het speciale geval $\alpha^2 = 1$ zijn, blijktens 2.59, beide effecten precies even sterk. De kwaliteit van de meting blijft onveranderd. Merk echter op dat er dan ondanks dat toch een verschil is met het niet-fluctuerende geval: We meten in het algemeen bij fluctuaties een andere interferentie-observabele $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$. Want dan zal volgens 2.42 gelden $\chi' \neq \chi$

De visibility als maat voor de kwaliteit van de interferentie-meting. Vaak wordt als maat voor de kwaliteit van de interferentie-meting in de interferometer niet de niet-idealiteitsmaat van 0.6 gebruikt, maar een grootte die men *visibility* noemt. Men kijkt dan het neutron interferentie experiment met $\alpha = 0$ en $\beta = 1$, zodat er in feite slechts één invallende bundel is (zie Figuur 2.2). De visibility V_A van het interferentiepatroon gemeten door detector D_A , wordt dan gedefinieerd als:

$$V_A := \frac{p_A(max) - p_A(min)}{p_A(max) + p_A(min)} \quad (2.61)$$



Figuur 2.2: De opzet van het neutron interferentie experiment zoals die wordt gebruikt ter definitie van de visibility. In dit geval geldt $\alpha = 0$ en $\beta = 1$.

Hierin stellen $p_A(max)$ en $p_A(min)$ de maximaal haalbare, respectievelijk de minimaal haalbare detectiewaarschijnlijkheid bij detector D_A voor, welke men kan krijgen door de faseverschuiving χ te variëren. Op dezelfde manier kan men een visibility V_B definiëren een maat voor de kwaliteit van het interferentiepatroon bij detector D_B :

$$V_B := \frac{p_B(max) - p_B(min)}{p_B(max) + p_B(min)} \quad (2.62)$$

In Figuur 2.3 is de intensiteit van het interferentiepatroon bij detector D_A , die evenredig is met de detectiekans p_A , uitgezet als functie van faseverschuiving χ en decoherentieparameter ϵ . Duidelijk is te zien dat het interferentiepatroon zwakker wordt naarmate ϵ toeneemt.

Wij vinden voor V_A zowel als V_B :

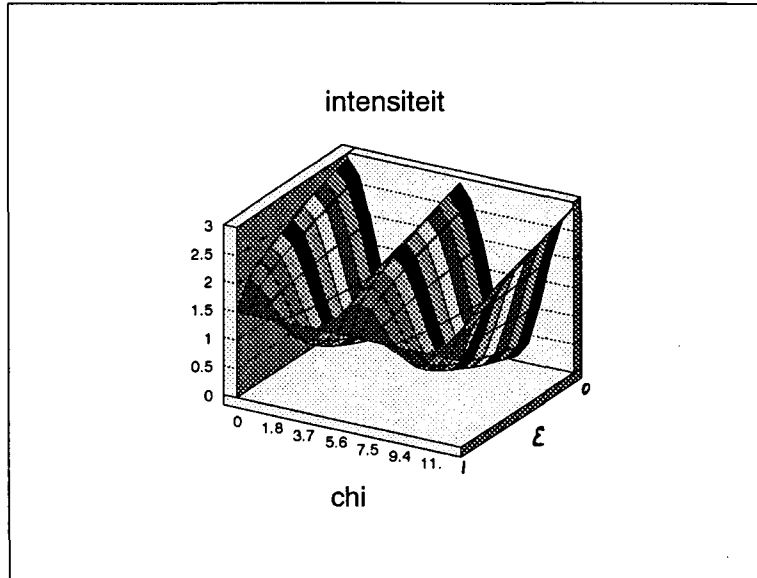
$$V_A = V_B = \frac{2\sqrt{a(1-\epsilon)}}{1+a} \quad (2.63)$$

waarin a en ϵ de eerder gedefinieerde doorlaatkans en decoherentie-parameter zijn (zie 2.10 en 2.4). In Figuur 2.4 staat deze visibility uit tegen de doorlaatkans a en de decoherentie-parameter ϵ .

Natuurlijk zijn er ook hier twee mogelijkheden om het geval met fluctuaties te vergelijken met het geval zonder fluctuaties. De eerste manier, waarbij we twee verschillende absorbers met gelijke doorlaatkans vergelijken, geeft een duidelijke uitspraak:

$$V_A = \frac{2\sqrt{a(1-\epsilon)}}{1+a} \leq \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \quad (2.64)$$

In het rechterlid van 2.64 zien we de visibility optreden in het geval dat er geen fluctuaties zijn ($\epsilon = 0$). De conclusie moet dus zijn dat de visibility kleiner wordt als er fluctuaties zijn. Deze conclusie stemt overeen met die welke we eerder op grond van het gedrag van de niet-idealiteitsmaat $\epsilon(\mu)$ trokken.



Figuur 2.3: Verticaal staat (in willekeurige eenheden) de intensiteit van het interferentiepatroon uit tegen de faseverschuiving χ en langs de schuine as de decoherentieparameter ϵ .

De tweede manier van vergelijken houdt in dat we twee gevallen voor dezelfde absorber met elkaar vergelijken: het fluctuerende en het niet-fluctuerende. Daartoe is het nodig bovenstaande visibility V_A uit te drukken in b (de doorlaatkans in het niet-fluctuerende geval), en de andere parameters. Het resultaat daarvan is:

$$V_A = \frac{2\sqrt{b} e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)}}{1 + b e^{\frac{1}{2}g(n)}} \quad (2.65)$$

Als er geen fluctuaties ($g = 0$) zijn, krijgen we een visibility $V_A(g = 0)$ waarvoor geldt:

$$V_A(g = 0) = \frac{2\sqrt{b}}{1 + b} \quad (2.66)$$

Bij het "aanzetten" van fluctuaties wordt de visibility kleiner als geldt:

$$V_A(g = 0) > V_A \quad (2.67)$$

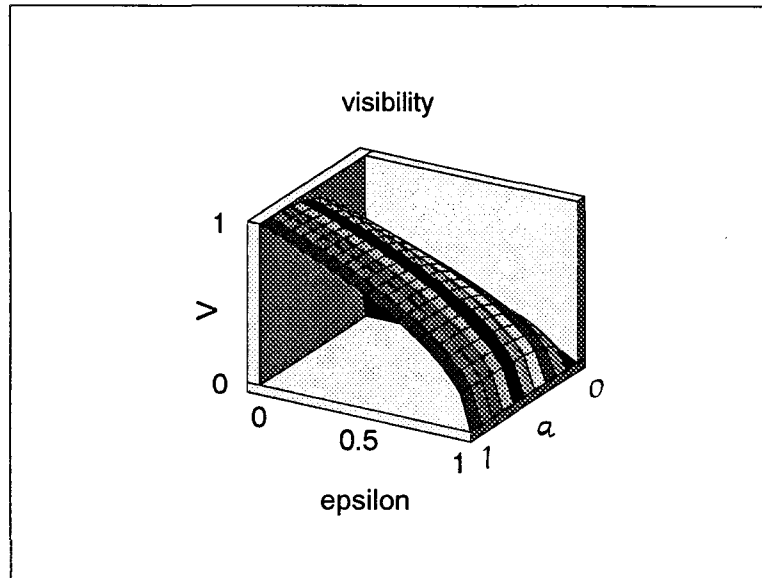
En dit is dan en slechts dan het geval wanneer:

$$e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} < \frac{1 + b e^{\frac{1}{2}g(n)}}{1 + b} \quad (2.68)$$

Deze eis wijkt iets af van 2.60, waar we de beide situaties met elkaar vergeleken door gebruik te maken van de niet-idealiteitsmaat van 2.59. Er zijn omstandigheden waaronder de ene maat voor de kwaliteit van de interferentie een andere uitspraak oplevert dan de andere. Als bijvoorbeeld mocht gelden:

$$1 < e^{\frac{1}{8}g(n)(1-\alpha^2)} < \frac{1 + b e^{\frac{1}{2}g(n)}}{1 + b} \quad (2.69)$$

dan zien we met 2.60 dat de aanpak die uitgaat van de niet-idealiteitsmaat van 2.59, suggereert dat de meting beter wordt, terwijl de meting bij het beschouwen van de



Figuur 2.4: Verticaal de visibility van 2.63 tegen horizontaal de decoherentie-parameter ϵ en langs de schuine as de doorlaatkans a .

visibility slechter wordt. Als bij de praktische uitvoering α in de buurt van 1 ligt, kan dit zich werkelijk voordoen. Maar het verschil in conclusies is niet zo alarmerend als het lijkt. Ten eerste doet het zich onder speciale condities voor. Ten tweede gaat het hier toch om verschillende metingen. Bij de aanpak met gegeneraliseerde observabelen (POWM's) meten we een PWM $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ op een niet-ideale manier, terwijl we bij het beschouwen van de visibility een interferentiepatroon meten met maxima en minima. De aanpak met POWM's laat verder toe dat we de niet-idealiteitsmatrix 2.54 inverteren, zodat we (mits deze matrix bekend is) de ideale meting van $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ hieruit kunnen destilleren: We kunnen corrigeren voor de niet-idealiteit. Bij het meten van het interferentiepatroon echter, kunnen we de door de fluctuerende absorber veroorzaakte verslechtering niet corrigeren. Dus zelfs als de niet-idealiteitsmaat 2.59 van de interferentie-meting duidt op een verslechtering, dan is deze verslechtering nog zeer betrekkelijk als het gaat om de informatie die door de meting wordt geleverd.

Besluit. De in dit hoofdstuk gevolgde aanpak blijkt geen andere conclusies op te leveren dan Ref[5] en Ref[9]. De vraag is echter in hoeverre de hier gekozen methode gerechtvaardigd is. De beperkingen ervan zijn natuurlijk evident. In de eerste plaats zijn er sterke aannamen nodig en in de tweede plaats werken we met een model waarin we slechts fluctuaties in scatterer-aantal toelaten.

In Hoofdstuk 3 zullen we daarom een algemenere behandeling geven van de fluctuaties, d.m.v. een optisch model van de neutron-absorber interactie.

Hoofdstuk 3

De fluctuerende absorber in het optische model: een fenomenologische aanpak.

Inleiding en probleemstelling. We laten een vlakke golf (toestand $|p\rangle$ met welbepaalde impuls p) invallen op een absorber (zie Figuur 3.1). De absorber reduceert de amplitude van de golf. Deze reductie hangt samen met de absorptie en verstrooiing van neutronen aan de absorber. Dit laat zich fenomenologisch beschrijven m.b.v. een negatief imaginaire optische potentiaal (zie Ref[10]). We stellen ons echter voor dat bovenop deze (vaste) absorptie-potentiaal nog een kleine fluctuatie bestaat. Deze fluctuatie kan een bijdrage leveren aan het verlies van neutronen uit de bundel, maar kan ook bewerkstelligen dat de impuls van de doorgelaten neutronen verandert. Hierdoor zal de uitgaande golf niet meer een vlakke golf zijn met welbepaalde p , maar een of andere superpositie van vlakke golven. In Figuur 3.1 is getracht beide effecten aanschouwelijk te maken.

In dit hoofdstuk zullen we vragen naar de mathematische gedaante van de uitgaande golf, en dit resultaat gebruiken om ons neutron interferentie experiment (Figuur 1.1) te beschrijven in termen van POWM's.

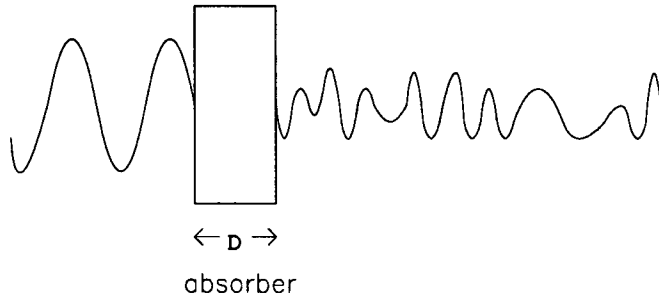
Het ongestoord probleem. Voor de absorptie die plaatstvindt in een absorber zijn er in principe twee mechanismen. Ten eerste worden neutronen uit de bundel verstrooid en van richting veranderd, zodat ze voor detectie verloren gaan. Ten tweede worden ze door atoomkernen geabsorbeerd. We kunnen het totale verlies van neutronen uit de bundel als absorptie modelleren door een negatief-imaginaire optische potentiaal die we op zeker tijdstip t_0 "aanzetten" en op tijdstip $t_0 + \tau_p$ weer "afzetten". Het tijdstip t_0 is het moment van invallen, τ_p is de interactie-tijd die in geval van een invallende vlakke golf $|p\rangle$ eenvoudig wordt gegeven door:

$$\tau_p = \frac{D}{p/m} \quad (3.1)$$

waarin D de dikte van de absorber is (zie Figuur 3.1), en m de neutron-massa voorstelt. De ongestoorde optische potentiaal heeft de gedaante:

$$V(t) = -iW_p = \text{constant} \quad \text{voor } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_p \quad (3.2)$$

We voorzien de constante W_p van een index p omdat absorptie werkzame doorsneden van p afhangen (zie bijvoorbeeld Ref[8]). We behandelen het probleem geheel



Figuur 3.1: Een vlakke golf valt in op de absorber met dikte D . De absorptie komt tot uitdrukking in een reductie van de amplitude. De vervorming wordt veroorzaakt door fluctuaties in de absorber.

ééndimensionaal. Fysisch is echter ook verstrooiing mogelijk: een verandering van de impuls-richting. We weten dat een ééndimensionale potentiaal deze verstrooiing niet kan beschrijven. Als we nu aannemen dat de verstrooide neutronen niet kunnen worden gedetecteerd mogen we deze als "geabsorbeerd" beschouwen. En absorptie laat zich wél fenomenologisch beschrijven m.b.v. de boven geponeerde optische potentiaal, zoals straks zal blijken. Laat bovenindex (0) staan voor "ongestoord". Als we werken in eenheden waarin $\hbar = 1$ dan geldt in het Schrödingerbeeld:

$$i \frac{d}{dt} |\psi^{(0)}(t)\rangle = H^{(0)} |\psi^{(0)}\rangle \quad (3.3)$$

Met

$$H^{(0)} = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} - iW_p & \text{voor } t_0 \leq t \leq \tau_p + t_0 \\ \frac{p^2}{2m} & \text{elders} \end{cases} \quad (3.4)$$

We merken op dat $H^{(0)}$ *niet* Hermitisch is. We stellen:

$$|\psi^{(0)}(t)\rangle = U^{(0)}(t, t_0) |\psi^{(0)}(t_0)\rangle \quad (3.5)$$

waarin $|\psi^{(0)}(t_0)\rangle = |p\rangle$, de invallende golf. Voor operator $U^{(0)}(t, t_0)$ vinden we de vergelijking:

$$i \frac{d}{dt} U^{(0)} = H^{(0)} U^{(0)}(t, t_0) \quad (3.6)$$

met als beginvoorwaarde $U^{(0)}(t_0, t_0) = I$, de eenheidsoperator. Omdat $H^{(0)}$ voor $t_0 \leq t \leq \tau_p + t_0$ niet van t afhangt kan dit worden geïntegreerd tot:

$$U^{(0)}(t, t_0) = e^{-iH^{(0)}(t-t_0)} \quad (t_0 \leq t \leq \tau_p + t_0) \quad (3.7)$$

We stellen vast dat $U^{(0)}(t, t_0)$ geen unitaire operator is, omdat $H^{(0)}$ niet Hermitisch is. Schrijf nu nog voor de eenvoud:

$$T := \frac{p^2}{2m} \quad (3.8)$$

We nemen aan dat W_p slechts van p afhangt en niet van de plaatscoördinaat x van het neutron. In deze aanname volgen we de literatuur (Ref[10]), waarin de ruimtelijke begrenzing van de absorber in rekening wordt gebracht door de interactie gedurende een begrensd tijdsinterval te "laten werken". Als de absorber veel grotere ruimtelijke

dimensies heeft dan het neutron, is het dan toegestaan de interactie plaatsafhankelijk te veronderstellen. Als W_p slechts van p afhangt commuteert dit dus met T :

$$[W_p, T]_- = 0 \quad (3.9)$$

En dit betekent dat we $U^{(0)}(t, t_0)$ kunnen schrijven als:

$$U^{(0)}(t, t_0) = e^{-i(T-iW_p)(t-t_0)} = e^{-W_p(t-t_0)} e^{-iT(t-t_0)} \quad (t_0 \leq t \leq \tau_p + t_0) \quad (3.10)$$

De oplossing $|\psi^{(0)}(t)\rangle$ voor het ongestoorde probleem is:

$$\begin{aligned} |\psi^{(0)}(t)\rangle &= U^{(0)}(t, t_0) |\psi^{(0)}(t_0)\rangle = U^{(0)}(t, t_0) |p\rangle \\ &= e^{-W_p(t-t_0)} e^{-i\omega_p(t-t_0)} |p\rangle \quad \text{voor } t_0 \leq t \leq \tau_p + t_0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

waarin is gesteld:

$$\omega_p := \frac{p^2}{2m} \quad (3.12)$$

Het gestoord probleem. We nemen aan dat er voor $t_0 \leq t \leq \tau_p + t_0$ een kleine fluctuatie $V^{(1)}(t)$ is bovenop de ongestoorde Hamiltoniaan $H^{(0)}$:

$$H(t) = H^{(0)} + V^{(1)}(t) \quad (3.13)$$

De behandeling van de fluctuaties is geheel ééndimensionaal. De bijdrage van de fluctuaties tot verstrooiing aan de absorber (= "absorptie", zie 3.2) wordt verdisconteerd door een eventueel negatief imaginair deel. De ééndimensionale behandeling van het probleem houdt in dat bij doorgelaten neutronen alleen de grootte van de impuls kan veranderen, niet de richting (zie ook de opmerking bij de behandeling van het ongestoorde probleem).

We stappen over op het *interactie-beeld* door te definiëren:

$$|\psi_I(t)\rangle := [U^{(0)}(t, t_0)]^{-1} |\psi(t)\rangle \quad (3.14)$$

met $U^{(0)}(t, t_0)$ als boven en $|\psi(t)\rangle$ de oplossing van:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (3.15)$$

We merken op dat voor $t = t_0$ geldt:

$$|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \quad (3.16)$$

We vinden voor $|\psi_I(t)\rangle$ de vergelijking (zie Ref[11]):

$$i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = [U^{(0)}(t, t_0)]^{-1} V^{(1)}(t) U^{(0)}(t, t_0) |\psi_I(t)\rangle \quad (3.17)$$

met als formele oplossing:

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t [U^{(0)}(t', t_0)]^{-1} V^{(1)}(t') U^{(0)}(t', t_0) |\psi_I(t')\rangle dt' \quad (3.18)$$

We zijn nu geïnteresseerd in $|\psi_I(\tau_p + t_0)\rangle$, de "uitgaande golf" waarvoor we als benadering eerste-orde storingsrekening zullen gebruiken. Voor de eerste-orde uitgaande golf $|\psi_I^{(1)}(\tau_p + t_0)\rangle$ geldt dan:

$$\begin{aligned} |\psi_I^{(1)}(\tau_p + t_0)\rangle &= |\psi_I^{(1)}(t_0)\rangle + \frac{1}{i} \int_{t_0}^{\tau_p + t_0} [U^{(0)}(t', t_0)]^{-1} V^{(1)}(t') U^{(0)}(t', t_0) |\psi_I(t_0)\rangle dt' \\ &= |\psi^{(1)}(t_0)\rangle + \frac{1}{i} \int_{t_0}^{\tau_p + t_0} [U^{(0)}(t', t_0)]^{-1} V^{(1)}(t') U^{(0)}(t', t_0) |\psi(t_0)\rangle dt' \end{aligned} \quad (3.19)$$

zodat we voor de eerste-orde uitgaande golf $|\psi^{(1)}(\tau_p + t_0)\rangle$ vinden (in het Schrödinger-beeld):

$$\begin{aligned} |\psi^{(1)}(\tau_p + t_0)\rangle &= U^{(0)}(\tau_p + t_0, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle = U^{(0)}(\tau_p + t_0, t_0) |\psi(t_0)\rangle + \\ &+ \frac{1}{i} U^{(0)}(\tau_p + t_0, t_0) \int_{t_0}^{\tau_p + t_0} [U^{(0)}(t', t_0)]^{-1} V^{(1)}(t') U^{(0)}(t', t_0) |\psi(t_0)\rangle dt' \end{aligned} \quad (3.20)$$

Omdat $|\psi(t_0)\rangle = |p\rangle$ is het handig te werken in p -representatie. Er geldt

$$U^{(0)}(t', t_0) |p\rangle = e^{-W_p(t'-t_0)} e^{-i\omega_p(t'-t_0)} |p\rangle \quad (3.21)$$

en dus ook

$$[U^{(0)}(t', t_0)]^{-1} |p'\rangle = e^{W_{p'}(t'-t_0)} e^{i\omega_{p'}(t'-t_0)} |p'\rangle \quad (3.22)$$

met ω_p en $\omega_{p'}$ volgens 3.12. We vinden zodoende:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{\tau_p + t_0} [U^{(0)}(t', t_0)]^{-1} V^{(1)}(t') U^{(0)}(t', t_0) |\psi_I(t_0)\rangle dt' = \\ &= \int_{t_0}^{\tau_p + t_0} [U^{(0)}(t', t_0)]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dp' |p'\rangle \langle p' | V^{(1)}(t') U^{(0)}(t', t_0) |\psi_I(t_0)\rangle dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{t_0}^{\tau_p + t_0} dt' e^{-(W_p - W_{p'})(t'-t_0)} e^{-i(\omega_p - \omega_{p'})(t'-t_0)} V_{p'p}^{(1)}(t') |p'\rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

waarin is gedefinieerd:

$$V_{p'p}^{(1)}(t') := \langle p' | V^{(1)}(t') | p \rangle \quad (3.24)$$

We voeren ter afkorting in:

$$\begin{aligned} G(p', p, t_0) &:= \frac{1}{i} e^{(W_p - W_{p'})\tau_p} e^{i(\omega_p - \omega_{p'})\tau_p} \times \\ &\times \int_{t_0}^{\tau_p + t_0} dt' e^{-(W_p - W_{p'})(t'-t_0)} e^{-i(\omega_p - \omega_{p'})(t'-t_0)} V_{p'p}^{(1)}(t') \end{aligned} \quad (3.25)$$

waarmee de uitgaande golf $|\psi^{(1)}(\tau_p + t_0)\rangle$ wordt:

$$|\psi^{(1)}\rangle = e^{-W_p\tau_p} e^{-i\omega_p\tau_p} \left[|p\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) |p'\rangle \right] =: \sqrt{b} e^{-i\chi_p} |\phi\rangle \quad (3.26)$$

Hierin zijn ondertussen gedefinieerd:

$$b := e^{-2W_p \tau_p} \quad (3.27)$$

$$\chi_p := \omega_p \tau_p \quad (3.28)$$

$$|\phi\rangle := |p\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) |p'\rangle \quad (3.29)$$

Bij het ongestoorde probleem (zie 3.11) zagen we dat overgangen $|p\rangle \rightarrow |p'\rangle$ met $p' \neq p$ niet mogelijk waren. Blijkens formule 3.26 echter staat de fluctuatie $V^{(1)}(t')$ dergelijke overgangen wel toe. We formuleren nu nog een belangrijke aanname: p -overgangen $|p\rangle \rightarrow |p'\rangle$ met "grote" $|p - p'|$ zijn zeer onwaarschijnlijk, d.w.z. de fluctuaties zijn *laagfrequent*. Dit betekent dat we $V_{p'p}^{(1)}(t')$ sterk gepiekt veronderstellen rondom $p' = p$. (In het extreme geval dat de storing diagonaal is in de p -representatie zijn overgangen in eerste-orde storingsrekening zelfs geheel uitgesloten.)

Wij zullen in het vervolg een tijdmiddeling over t_0 gebruiken, een middeling over de tijdstippen van invallen van de verschillende neutronen. We nemen aan dat dit tijdgemiddelde van de storing (fluctuaties) 0 is:

$$\overline{V^{(1)}(t' + t_0)} := \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} dt_0 V^{(1)}(t' + t_0) = 0 \quad (3.30)$$

voor voldoende grote T_a ("a" = "averaging"). We merken op dat hieruit volgt:

$$\overline{V_{p'p}^{(1)}(t' + t_0)} = \langle p' | \overline{V^{(1)}(t' + t_0)} | p \rangle = 0 \quad (3.31)$$

waaruit, door over te gaan op een andere integratievariabele, volgt:

$$\begin{aligned} \overline{G(p', p, t_0)} &= \frac{1}{i} e^{(W_p - W_{p'}) \tau_p} e^{i(\omega_p - \omega_{p'}) \tau_p} \times \\ &\times \int_0^{\tau_p} dt' e^{-(W_p - W_{p'}) t'} e^{-i(\omega_p - \omega_{p'}) t'} \overline{V_{p'p}^{(1)}(t' + t_0)} = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

De doorlaatkans a van de absorber. Hoe moeten we hieruit de experimenteel waargenomen doorlaatkans destilleren? Het ligt voor de hand deze te identificeren met de gemiddelde ratio van uitgaande en ingaande deeltjesflux. Voor het berekenen van deze fluxen moeten we overstappen op de plaatsrepresentatie, omdat in deze representatie een formule voorhanden is (zie Ref[12]). Zij $x = 0$ de positie van de absorber. Omdat $|\psi(t = t_0)\rangle = |p\rangle$ geldt in plaatsrepresentatie:

$$\psi(x, t = t_0) = e^{ipx} \quad (3.33)$$

met een geschikte normerings- en faseconventie (en met $\hbar = 1$). Voor de ingaande deeltjesflux J_{in} vinden we:

$$J_{in} = \frac{1}{2im} \left[\psi^*(x, t_0) \frac{\partial \psi(x, t_0)}{\partial x} - \psi(x, t_0) \frac{\partial \psi^*(x, t_0)}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} = \frac{p}{m} \quad (3.34)$$

waarin m = massa neutronen. Voor het berekenen van de uitgaande deeltjesflux hebben we de plaatsrepresentatie van de uitgaande $|p'\rangle$ -toestanden nodig. We moeten dan natuurlijk dezelfde normering kiezen als voor de invallende golf $|p\rangle$, omdat we straks

de ratio van uitgaande en ingaande deeltjesflux zullen definiëren als doorlaatkans a . We kiezen dus voor $|p'\rangle$ de plaatsrepresentatie $\phi_{p'}(x)$ met:

$$\phi_{p'}(x, t = t_0 + \tau_p) = e^{ip'x} \quad (3.35)$$

We vinden zo voor $|\psi^{(1)}(x, t = t_0 + \tau_p)\rangle$ in plaatsrepresentatie:

$$\psi^{(1)}(x, t = t_0 + \tau_p) = \sqrt{b} e^{-ix_p} \left[e^{ipx} + \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) e^{ip'x} \right] \quad (3.36)$$

We benaderen de uitgaande deeltjesflux J_{uit} door:

$$J_{uit} = \frac{1}{2im} \left[\psi^{(1)*}(x, t_0 + \tau_p) \frac{\partial \psi^{(1)}(x, t_0 + \tau_p)}{\partial x} - \psi^{(1)}(x, t_0 + \tau_p) \frac{\partial \psi^{(1)*}(x, t_0 + \tau_p)}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} \quad (3.37)$$

Voor de exacte berekening van J_{uit} zouden we de exacte uitgaande golf $\psi(x, t_0 + \tau_p)$ moeten nemen die zou volgen uit 3.15. Wij zullen hiervoor in het vervolg echter de eerste-orde benadering $\psi(x, t_0 + \tau_p) = \psi^{(1)}(x, t_0 + \tau_p)$ gebruiken. J_{uit} fluctueert met het tijdstip t_0 van invallen. We zijn geïnteresseerd in het tijdgemiddelde \bar{J}_{uit} van J_{uit} dat analoog 3.30 is gedefinieerd als:

$$\bar{J}_{uit} := \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} dt_0 J_{uit}(t_0) \quad (3.38)$$

voor voldoende grote T_a . Schrijven we $\psi^{(1)}(x, t = t_0 + \tau_p)$ als

$$\psi^{(1)}(x, t = t_0 + \tau_p) =: \sqrt{b} [\psi_1(x, t = t_0 + \tau_p) + \psi_2(x, t = t_0 + \tau_p)] \quad (3.39)$$

met

$$\psi_1(x, t = t_0 + \tau_p) := e^{i(px - x_p)} \quad (3.40)$$

(het "vaste" deel van $\sqrt{b} \psi^{(1)}(x, t = t_0 + \tau_p)$), dat niet met t_0 fluctueert. En met

$$\psi_2(x, t = t_0 + \tau_p) := e^{-ix_p} \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) e^{ip'x} \quad (3.41)$$

(het "fluctuerende" deel van $\sqrt{b} \psi^{(1)}(x, t = t_0 + \tau_p)$). We hebben voor het tijdgemiddelde $\bar{\psi}_2$ van ψ_2 respectievelijk $\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial x}$ van $\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$:

$$\bar{\psi}_2 = e^{-ix_p} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \overline{G(p', p, t_0)} e^{ip'x} = 0 \quad (3.42)$$

en

$$\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial x} = e^{-ix_p} \int_{-\infty}^{\infty} dp' ip' \overline{G(p', p, t_0)} e^{ip'x} = 0 \quad (3.43)$$

Voeren we nu in de notaties:

$$J_{11} := \frac{1}{2im} \left[\psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \psi_1 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} = \frac{p}{m} \quad (3.44)$$

$$J_{12} := \frac{1}{2im} \left[\psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} \quad (3.45)$$

$$J_{21} := \frac{1}{2im} \left[\psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} \quad (3.46)$$

$$J_{22} := \frac{1}{2im} \left[\psi_2^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} \quad (3.47)$$

Merk op dat we hier voor de eenvoud de x - en t_0 -afhankelijkheden niet expliciet hebben aangegeven. Met deze definities kunnen we eenvoudig schrijven:

$$J_{uit} = b(J_{11} + J_{12} + J_{21} + J_{22}) \quad (3.48)$$

Omdat ψ_1 niet fluctueert, zal gelden:

$$\bar{J}_{12} = \frac{1}{2im} \left[\psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = \frac{1}{2im} \left[\psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \bar{\psi}_2 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.49)$$

Volgens een zelfde argument vinden we $\bar{J}_{21} = 0$. Waarmee dus

$$\bar{J}_{uit} = b \left(\frac{p}{m} + \bar{J}_{22} \right) \quad (3.50)$$

We kunnen nu de ratio $\frac{\bar{J}_{uit}}{J_{in}}$ identificeren met de experimenteel waargenomen doorlaatkans a :

$$a := \frac{\bar{J}_{uit}}{J_{in}} = b \left(1 + \frac{\bar{J}_{22}}{J_{in}} \right) = b \left(1 + \frac{\bar{J}_{22}}{p/m} \right) \quad (3.51)$$

We zien als volgt in dat de fluctuaties ertoe leiden dat, onder de gemaakte aannamen (o.a. die van de geldigheid van eerste-orde storingsrekening), de experimenteel waargenomen doorlaatkans *groter* is dan wanneer fluctuaties ontbreken. Als fluctuaties ontbreken geeft bovenstaande formule $a = b$, zodat b is te beschouwen als de doorlaatkans van de absorber bij het ontbreken van fluctuaties. Als er wel fluctuaties zijn, kunnen we inzien dat $\bar{J}_{22} \geq 0$:

$$\begin{aligned} J_{22} &= \frac{1}{2im} \left[\psi_2^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{-\infty}^{\infty} dp'' p'' [G^*(p', p, t_0) G(p'', p, t_0) + G(p', p, t_0) G^*(p'', p, t_0)] \end{aligned} \quad (3.52)$$

We nemen aan dat $G(p', p, t_0)$ een functie is die sterk gepiekt is rondom $p' = p$. De bijdragen tot de dubbelintegraal voor $p' \approx p$ en $p'' \approx p$ zijn dus dominant. Deze bijdragen zijn positief, want voor $p' \approx p$ en $p'' \approx p$ geldt:

$$p'' [G^*(p', p, t_0) G(p'', p, t_0) + G(p', p, t_0) G^*(p'', p, t_0)] \approx p |G(p, p, t_0)|^2 \geq 0 \quad (3.53)$$

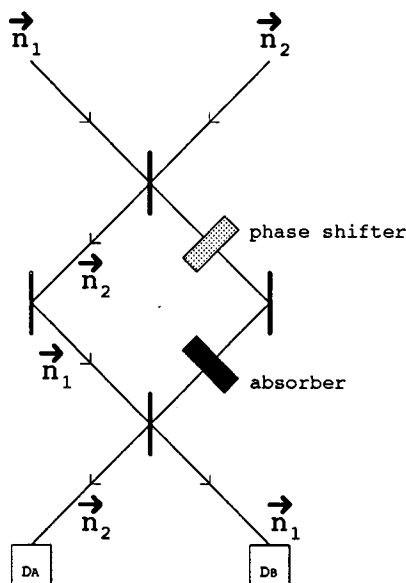
We zien dat de bijdrage tot de gemiddelde uitgaande flux, afkomstig van het fluctuerende deel $\sqrt{b} \psi_2(x, t = t_0 + \tau_p)$ van de golf functie, niet 0 is ofschoon $\sqrt{b} \psi_2(x, t = t_0 + \tau_p)$ zelf wèl gemiddeld 0 is.

Schrijf nu $\frac{\bar{J}_{22}}{p/m} =: \zeta$. dan geldt $\zeta \geq 0$ en:

$$a = b(1 + \zeta) \geq b \quad (3.54)$$

Ofschoon dus $a \geq b$ zal toch moeten gelden $a \leq 1$. We zien als volgt in dat de condities waaronder storingsrekening geoorloofd is, daarvoor inderdaad garant staan. De bijdrage $b\zeta$ tot a is een bijdrage die afkomstig is van de fluctuaties, en is dus een maat voor de grootte van de fluctuaties. De nulde-orde absorptie geeft een *absorptiekans* $1-b$, zodat $1-b$ een maat is voor de nulde-orde absorptie. Opdat storingsrekening geoorloofd is, moeten de fluctuaties (zie 3.13) veel kleiner zijn dan de nulde-orde absorptie:

$$b\zeta \ll 1 - b \Leftrightarrow a = b(1 + \zeta) \ll 1 \quad (3.55)$$



Figuur 3.2: In deze figuur staat aangegeven hoe we de bundels onderscheiden naar richting m.b.v. de richtingvectoren \vec{n}_1 en \vec{n}_2 .

Berekening van de deeltjesflux ter plaatse van de detectoren. We gaan nu de resultaten van de vorige paragraaf gebruiken om het neutron interferentie experiment van paragraaf?? te analyseren. We zullen opnieuw proberen dit experiment te formuleren in termen van POWM's en te interpreteren als gezamenlijke niet-ideale meting van de observabelen "pad" en "interferentie". Omdat de vlakke invallende golven $|p\rangle$ die we in deze aanpak gebruiken niet genormeerd zijn, zullen we moeten werken met deeltjesfluxen, waarbij de deeltjesflux evenredig is met de gemeten deeltjesflux. De verhouding van door een detector gemeten deeltjesflux en de totale op de interferometer invallende deeltjesflux, kunnen we dan identificeren met de detectiekans in betreffende detector. Omdat de in de voorgaande hoofdstukken gebruikte notatie $|R\rangle$ en $|L\rangle$ voor rechter- en linkerbundel respectievelijk aanleiding kan geven tot verwarring, zullen we in dit hoofdstuk een andere notatie gebruiken. We zullen de bundels van elkaar onderscheiden naar *richting*, aangegeven met de richtingvectoren \vec{n}_1 en \vec{n}_2 waarvoor geldt $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$. In Figuur 3.2 staat aangegeven welke richting we met \vec{n}_1 en welke met \vec{n}_2 aanduiden.

De beide bundels worden verondersteld vlakke golven $|\vec{p}\rangle$ te zijn (toestanden met welbepaalde impuls \vec{p}) met $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$. Ze laten zich dan gemakkelijk representeren als $|p \vec{n}_1\rangle$ respectievelijk $|p \vec{n}_2\rangle$. De uit de absorber komende golf $|\psi^{(1)}\rangle$ wordt in deze notatie:

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sqrt{b} e^{-i\chi_p} \left[|p \vec{n}_2\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) |p' \vec{n}_2\rangle \right] \quad (3.56)$$

De op dit moment gebruikte absorbers veroorzaken geen incoherente verstrooiing $p \rightarrow p'$ met $p' \neq p$ (zie Ref[13], Ref[6]). We willen echter de mogelijkheid hiervan wel meenemen. Een vlakke golf $|p' \vec{n}_2\rangle$ (met $p' \neq p$) uit de bijdrage $\int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) |p' \vec{n}_2\rangle$ tot de uitgaande golf, voldoet niet exact aan de Bragg conditie voor Bragg-reflectie en -transmissie in de laatste beamsplitter (zie Ref[7]), zodat er geen exact symmetrische Bragg-reflectie en -transmissie zijn. Er is volgens Ref[13] sprake van een van p' afhankelijke reflectiekans $r(p')$ en dus een transmissiekans $1 - r(p')$. In het POWM-formalisme laat echter ook een asymmetrische opsplitsing een zinvolle interpretatie toe. Het effect van de laatste beamsplitter op een invallende golf $|p' \vec{n}_2\rangle$ wordt, met een factor i voor

reflectie:

$$|p'\bar{n}_2\rangle \rightarrow \sqrt{1-r(p')}|p'\bar{n}_2\rangle + i\sqrt{r(p')}|p'\bar{n}_1\rangle \quad (3.57)$$

Het effect op een superpositie $\int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0)|p'\bar{n}_2\rangle$ is dan eenvoudig:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0)|p'\bar{n}_2\rangle &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0)\sqrt{1-r(p')}|p'\bar{n}_2\rangle + \\ &+ i \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0)\sqrt{r(p')}|p'\bar{n}_1\rangle \end{aligned} \quad (3.58)$$

Er wordt wel symmetrie verondersteld voor de op de interferometer invallende golven $|p\bar{n}_1\rangle$ en $|p\bar{n}_2\rangle$ (zie 3.67) en dus kan worden aangenomen dat er perfect symmetrische Bragg-reflectie en transmissie zal zijn voor $p' = p$, i.e. $r(p) = \frac{1}{2}$. Voeren we nu in:

$$G_1(p', p, t_0) := G(p', p, t_0)\sqrt{r(p')} \quad (3.59)$$

$$G_2(p', p, t_0) := G(p', p, t_0)\sqrt{1-r(p')} \quad (3.60)$$

dan geldt voor $G_1(p', p, t_0)$ en $G_2(p', p, t_0)$ natuurlijk dat hun tijdgemiddelden 0 zijn:

$$\overline{G_1(p', p, t_0)} = \overline{G(p', p, t_0)}\sqrt{r(p')} = 0 \quad (3.61)$$

$$\overline{G_2(p', p, t_0)} = \overline{G(p', p, t_0)}\sqrt{1-r(p')} = 0 \quad (3.62)$$

Ter afkorting voeren we verder nog in:

$$|\phi_2\rangle := |p\bar{n}_2\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0)|p'\bar{n}_2\rangle \quad (3.63)$$

zodat we met $\sqrt{b}e^{-ix_p}|\phi_2\rangle$ de golf kunnen aanduiden die uit de absorber komt. We vatten het effect van de laatste beamsplitter samen als:

$$|\phi_2\rangle \rightarrow i|\phi'_1\rangle + |\phi'_2\rangle \quad (3.64)$$

met

$$|\phi'_1\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2}|p\bar{n}_1\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dp' G_1(p', p, t_0)|p'\bar{n}_1\rangle \quad (3.65)$$

$$|\phi'_2\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2}|p\bar{n}_2\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dp' G_2(p', p, t_0)|p'\bar{n}_2\rangle \quad (3.66)$$

(We hebben hierbij voor $|p\bar{n}_1\rangle$ en $|p\bar{n}_2\rangle$ perfect symmetrische Bragg-reflectie verondersteld, zie boven.)

Als in de voorgaande hoofdstukken zal een willekeurige ingaande toestand van de neutronen bij invallen op de interferometer worden gerepresenteerd als een lineaire combinatie van de twee bundels:

$$|\psi_{in}\rangle = \alpha|p\bar{n}_1\rangle + \beta|p\bar{n}_2\rangle \quad (3.67)$$

Ofschoon $|\psi_{in}\rangle$ niet genormeerd is kunnen we de ingaande toestand nu toch met een dichtheidsmatrix analoog 1.10 beschrijven, mits we eisen dat $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$:

$$\rho_{in} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

We kunnen nu de uitgaande toestand $|\psi_{out}\rangle$ van de neutronen berekenen. We zullen daarbij de dispersie van de golfpakketten ($\int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) |p' \vec{n}_2\rangle$ e.d.) verwaarlozen

$$\begin{aligned}
\alpha |p \vec{n}_1\rangle + \beta |p \vec{n}_2\rangle &\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2} (\alpha + i\beta) |p \vec{n}_1\rangle + \frac{1}{2} \sqrt{2} (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_2\rangle \\
&\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix} |p \vec{n}_1\rangle + \frac{1}{2} \sqrt{2} (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_2\rangle \\
&\rightarrow \frac{1}{2} i \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix} |p \vec{n}_2\rangle + \frac{1}{2} i \sqrt{2} (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_1\rangle \\
&\rightarrow \frac{1}{2} i \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} |\phi_2\rangle + \frac{1}{2} i \sqrt{2} (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_1\rangle + (\dots) |\psi_Z\rangle \\
&\rightarrow \frac{1}{2} i (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_1\rangle - \frac{1}{2} \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} |\phi'_1\rangle - \frac{1}{2} (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_2\rangle + \\
&\quad + \frac{1}{2} i \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} |\phi'_2\rangle + (\dots) |\psi_Z\rangle = |\psi_{out}\rangle
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Hierin is ψ_Z een toestand waarin de niet-detecteerbare neutronen (absorptie) worden ondergebracht. Er is gedefinieerd:

$$\chi' := \chi - \chi_p \tag{3.70}$$

We willen nu de deeltjesfluxen j_A en j_B berekenen voor detector D_A respectievelijk D_B . Uit de uitdrukking voor $|\psi_{out}\rangle$ en uit Figuur 3.2 zien we dat we voor de golf $|\psi_B\rangle$ die bij detector D_B "aankomt" (deze heeft immers richting \vec{n}_1), kunnen schrijven:

$$\begin{aligned}
|\psi_B\rangle &= \frac{1}{2} i (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_1\rangle - \frac{1}{2} \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} |\phi'_1\rangle = \\
&= \left[\frac{1}{2} i (i\alpha + \beta) - \frac{1}{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} \right] |p \vec{n}_1\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} \int_{-\infty}^{\infty} dp' G_1(p', p, t_0) |p' \vec{n}_1\rangle
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Merk op dat we in deze uitdrukking voor de eenvoud de afhankelijkheid van t_0 , het tijdstip van invallen op de absorber, niet expliciet hebben aangegeven. Op dezelfde manier vinden we voor $|\psi_A\rangle$, de golf die bij detector D_A "aankomt":

$$\begin{aligned}
|\psi_A\rangle &= -\frac{1}{2} i (i\alpha + \beta) |p \vec{n}_2\rangle + \frac{1}{2} i \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} |\phi'_2\rangle = \\
&= \left[-\frac{1}{2} (i\alpha + \beta) + \frac{1}{2} i (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} \right] |p \vec{n}_2\rangle + \\
&\quad + \frac{1}{2} i \sqrt{2} (\alpha + i\beta) e^{ix'} \sqrt{b} \int_{-\infty}^{\infty} dp' G_2(p', p, t_0) |p' \vec{n}_2\rangle
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Ook hier hebben we de afhankelijkheid van t_0 niet expliciet aangegeven. We zien dat $|\psi_A\rangle$ en $|\psi_B\rangle$ ieder een fluctuerend en een niet-fluctuerend deel bevatten. We definiëren nu even ter afkorting:

$$\gamma_B := \frac{1}{2}i(i\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)e^{ix'}\sqrt{b} \quad (3.73)$$

$$\gamma_A := -\frac{1}{2}(i\alpha + \beta) + \frac{1}{2}i(\alpha + i\beta)e^{ix'}\sqrt{b} \quad (3.74)$$

$$\delta_B := -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix'}\sqrt{b} \quad (3.75)$$

$$\delta_A := \frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix'}\sqrt{b} \quad (3.76)$$

Schrijf nu voor de fluctuerende bijdrage tot $|\psi_B\rangle$:

$$|\psi_{B2}\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dp' G_1(p', p, t_0) |p' \vec{n}_1\rangle \quad (3.77)$$

en voor het niet-fluctuerende deel van $|\psi_B\rangle$:

$$|\psi_{B1}\rangle := |p \vec{n}_1\rangle \quad (3.78)$$

Dan stellen onze definities ons in staat eenvoudig voor $|\psi_B\rangle$ te schrijven:

$$|\psi_B\rangle = \gamma_B |\psi_{B1}\rangle + \delta_B |\psi_{B2}\rangle \quad (3.79)$$

Kiezen we nu een x -as parallel aan de bundel die invalt in D_B . Zij $x = 0$ de positie van detector D_B . Met een handige normering en faseconventie vinden we dan voor de plaatsrepresentatie $\psi_{B1}(x)$ van $|\psi_{B1}\rangle$:

$$\psi_{B1}(x) = e^{ipx} \quad (3.80)$$

En voor de plaatsrepresentatie $\psi_{B2}(x)$ van $|\psi_{B2}\rangle$:

$$\psi_{B2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp' G_1(p', p, t_0) e^{ip'x} \quad (3.81)$$

We merken op dat de tijdgemiddelden (gemiddelden over t_0) $\bar{\psi}_{B2}$ en $\frac{\partial \bar{\psi}_{B2}}{\partial x}$ van respectievelijk ψ_{B2} en $\frac{\partial \psi_{B2}}{\partial x}$, 0 zijn:

$$\bar{\psi}_{B2} = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \overline{G_1(p', p, t_0)} e^{ip'x} = 0 \quad (3.82)$$

en

$$\frac{\partial \bar{\psi}_{B2}}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} dp' ip' \overline{G_1(p', p, t_0)} e^{ip'x} = 0 \quad (3.83)$$

We vinden

$$\begin{aligned} j_B &= \frac{1}{2im} \left[\psi_B^*(x, t_0 + \tau_p) \frac{\partial \psi_B(x, t_0 + \tau_p)}{\partial x} - \psi_B(x, t_0 + \tau_p) \frac{\partial \psi_B^*(x, t_0 + \tau_p)}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} = \\ &=: |\gamma_B|^2 j_{B11} + \gamma_B^* \delta_B j_{B12} + \gamma_B \delta_B^* j_{B21} + |\delta_B|^2 j_{B22} \end{aligned} \quad (3.84)$$

waarin zijn gedefinieerd:

$$j_{B11} := \frac{1}{2im} \left[\psi_{B1}^* \frac{\partial \psi_{B1}}{\partial x} - \psi_{B1} \frac{\partial \psi_{B1}^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} = \frac{p}{m} \quad (3.85)$$

$$j_{B12} := \frac{1}{2im} \left[\psi_{B1}^* \frac{\partial \psi_{B2}}{\partial x} - \psi_{B2} \frac{\partial \psi_{B1}^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} \quad (3.86)$$

$$j_{B21} := \frac{1}{2im} \left[\psi_{B2}^* \frac{\partial \psi_{B1}}{\partial x} - \psi_{B1} \frac{\partial \psi_{B2}^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} \quad (3.87)$$

$$j_{B22} := \frac{1}{2im} \left[\psi_{B2}^* \frac{\partial \psi_{B2}}{\partial x} - \psi_{B2} \frac{\partial \psi_{B2}^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} \quad (3.88)$$

Omdat ψ_{B1} niet fluctueert met t_0 vinden we voor het tijdgemiddelde \bar{j}_{B12} van j_{B12} :

$$\bar{j}_{B12} = \frac{1}{2im} \left[\overline{\psi_{B1}^* \frac{\partial \psi_{B2}}{\partial x}} - \overline{\psi_{B2} \frac{\partial \psi_{B1}^*}{\partial x}} \right] \Bigg|_{x=0} = 0 \quad (3.89)$$

Om dezelfde reden geldt $\bar{j}_{B21} = 0$. j_{B22} laat zich uitwerken als

$$\begin{aligned} j_{B22} &= \frac{1}{2im} \left[\psi_{B2}^* \frac{\partial \psi_{B2}}{\partial x} - \psi_{B2} \frac{\partial \psi_{B2}^*}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=0} = \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{-\infty}^{\infty} dp'' p' [G_1^*(p', p, t_0) G_1(p'', p, t_0) + G_1(p', p, t_0) G_1^*(p'', p, t_0)] \end{aligned} \quad (3.90)$$

Omdat $G_1(p', p, t_0) = \sqrt{r(p')} G(p', p, t_0)$ is G_1 , net als G , een functie die sterk gepiekt is rondom $p' = p$. De opmerkingen die eerder werden gemaakt over J_{22} zijn dus ook hier van toepassing (zie 3.54). Dit betekent dat j_{B22} i.h.a. positief is en dat daarmee ook $\bar{j}_{B22} \geq 0$. Dezelfde beschouwingen gaan natuurlijk op voor de deeltjesflux bij detector D_A . We noemen daar j_{A11} het deel van de deeltjesflux afkomstig van het niet-fluctuerende deel $|\psi_{A1}\rangle$ van $|\psi_A\rangle$; j_{A22} is het deel, afkomstig van de fluctuerende bijdrage $|\psi_{A22}\rangle$. Ook hier geldt weer dat de gemengde bijdragen uitmiddelen tot 0: $\bar{j}_{A12} = \bar{j}_{A21} = 0$. En er geldt dat $\bar{j}_{A22} \geq 0$. Om het experiment te beschrijven in termen van POWM's moeten we de flux van gedetecteerde deeltjes normeren door deze te delen door de totale flux van deeltjes die op de interferometer invallen. Deze ingaande deeltjesflux is:

$$j_{in} = |\alpha|^2 \frac{p}{m} + |\beta|^2 \frac{p}{m} = \frac{p}{m} \quad (3.91)$$

We nemen hierbij aan dat de beide bundels $|p \vec{n}_1\rangle$ en $|p \vec{n}_2\rangle$ elkaar bij het invallen niet overlappen, zodat de flux additief is. We voeren nu in:

$$\zeta_A := \frac{\bar{j}_{A22}}{j_{in}} \quad (3.92)$$

$$\zeta_B := \frac{\bar{j}_{B22}}{j_{in}} \quad (3.93)$$

Hierin kunnen we ζ_A interpreteren als de bijdrage tot de genormeerde deeltjesflux bij detector D_A , afkomstig van de fluctuaties in de absorber. ζ_B heeft een analoge

interpretatie. Deze grootheden stellen ons in staat eenvoudig te schrijven:

$$\frac{\bar{J}_A}{j_{in}} = |\gamma_A|^2 + |\delta_A|^2 \zeta_A \quad (3.94)$$

$$\frac{\bar{J}_B}{j_{in}} = |\gamma_B|^2 + |\delta_B|^2 \zeta_B \quad (3.95)$$

waarin γ_A , γ_B , δ_A en δ_B gegeven worden door 3.73, 3.74, 3.75 en 3.76 respectievelijk. Eerder hebben we een grootheid ζ (zie 3.54) ingevoerd die was te interpreteren als de bijdrage tot de genormeerde flux van deeltjes, afkomstig van de fluctuaties. In de laatste beamsplitter (zie Figuur 3.2) worden geen neutronen geabsorbeerd, hetgeen betekent dat de gemiddelde genormeerde deeltjesflux naar de beamsplitter toe, gelijk moet zijn aan de gemiddelde genormeerde deeltjesflux van de beamsplitter af. Bij de discussie over de experimenteel waargenomen doorlaatkans a vonden we dat $a = b(1 + \zeta)$. Nu is a de verhouding van deeltjesflux de absorber in/deeltjesflux de absorber uit. Na reflectie en voor invallen op de absorber worden de neutronen beschreven door een toestand (zie Figuur 3.2 en de derde regel van boven in berekening 3.69):

$$\frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix}|p\vec{n}_2\rangle + \frac{1}{2}i\sqrt{2}(i\alpha + \beta)|p\vec{n}_1\rangle \quad (3.96)$$

De term $\frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix}|p\vec{n}_2\rangle$ slaat op de golf die op de absorber invalt, zodat de genormeerde deeltjesflux die de absorber ingaat gelijk is aan $\frac{1}{2}|\alpha + i\beta|^2$. De uitgaande gemiddelde genormeerde deeltjesflux is dan gelijk aan $\frac{1}{2}|\alpha + i\beta|^2 \times a = \frac{1}{2}|\alpha + i\beta|^2 b(1 + \zeta)$. De term $\frac{1}{2}i\sqrt{2}(i\alpha + \beta)|p\vec{n}_1\rangle$ slaat op de andere bundel en geeft een genormeerde deeltjesflux van $\frac{1}{2}|i\alpha + \beta|^2$. De totale gemiddelde genormeerde deeltjesflux naar de beamsplitter toe komt dan op $\frac{1}{2}|\alpha + i\beta|^2 b(1 + \zeta) + \frac{1}{2}|i\alpha + \beta|^2$. Het is deze totale flux die we gelijk moeten stellen aan $\frac{\bar{J}_A}{j_{in}} + \frac{\bar{J}_B}{j_{in}}$, de totale gemiddelde genormeerde deeltjesflux die de detectoren "binnengaat":

$$\frac{1}{2}|\alpha + i\beta|^2 b(1 + \zeta) + \frac{1}{2}|i\alpha + \beta|^2 = \frac{\bar{J}_A}{j_{in}} + \frac{\bar{J}_B}{j_{in}} = |\gamma_A|^2 + |\delta_A|^2 \zeta_A + |\gamma_B|^2 + |\delta_B|^2 \zeta_B \quad (3.97)$$

Vullen we hierin de definities 3.73 t/m 3.76 van γ_A , γ_B , δ_A en δ_B in dan vinden we dat aan deze gelijkheid voor willekeurige α en β is voldaan dan en slechts dan wanneer:

$$\zeta_A + \zeta_B = \zeta \quad (3.98)$$

We zullen nu de genormeerde gemiddelde deeltjesfluxen $\frac{\bar{J}_A}{j_{in}}$ en $\frac{\bar{J}_B}{j_{in}}$ indentificeren met de detectiekansen p_A en p_B respectievelijk:

$$p_A = \frac{\bar{J}_A}{j_{in}} = |\gamma_A|^2 + |\delta_A|^2 \zeta_A \quad (3.99)$$

$$p_B = \frac{\bar{J}_B}{j_{in}} = |\gamma_B|^2 + |\delta_B|^2 \zeta_B \quad (3.100)$$

Er is ook een kans p_Z dat het neutron niet wordt gedetecteerd. Er geldt natuurlijk

$$p_Z = 1 - p_A - p_B \quad (3.101)$$

Geheel in analogie met de voorgaande hoofdstukken kunnen we nu een POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ invoeren zodat

$$p_A = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_A \quad (3.102)$$

$$p_B = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_B \quad (3.103)$$

$$p_Z = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_Z \quad (3.104)$$

waarin de dichtheidsmatrix $\underline{\rho}_{in}$ gegeven wordt door 3.68. Onze POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ krijgt de gedaante:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + b - 2\sqrt{b} \cos \chi' + 2b\zeta_A & -i(1 - b) + 2\sqrt{b} \sin \chi' + 2ib\zeta_A \\ i(1 - b) + 2\sqrt{b} \sin \chi' - 2ib\zeta_A & 1 + b + 2\sqrt{b} \cos \chi' + 2b\zeta_A \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + b + 2\sqrt{b} \cos \chi' + 2b\zeta_B & -i(1 - b) - 2\sqrt{b} \sin \chi' + 2ib\zeta_B \\ i(1 - b) - 2\sqrt{b} \sin \chi' - 2ib\zeta_B & 1 + b - 2\sqrt{b} \cos \chi' + 2b\zeta_B \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

$$\underline{M}_Z = \frac{1}{2}(1 - a) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Hierin is gebruik gemaakt van $\zeta_A + \zeta_B = \zeta$ (3.98) en van $b(1 + \zeta) = a$ (3.54). Wij kunnen nu de POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ uitdrukken in de twee PWM's $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ (de "pad"-observabele, zie 1.14 en 1.15) en $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ (de "interferentie"-observabele, zie ook 1.16 en 1.17):

$$\underline{M}_A = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + (b + 2b\zeta_A)\underline{P}_- + \sqrt{b}(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (3.108)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + (b + 2b\zeta_B)\underline{P}_- - \sqrt{b}(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (3.109)$$

$$\underline{M}_Z = (1 - a)\underline{P}_- \quad (3.110)$$

Wij vragen ons nu af: Zijn \underline{M}_A , \underline{M}_B en \underline{M}_Z nog wel positieve operatoren? Deze vraag is van belang omdat fluxen niet noodzakelijk positief zijn, zie bijvoorbeeld Ref[14]. Hun positiviteit is echter gemakkelijk in te zien:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + b\underline{P}_- + \sqrt{b}(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] + b\zeta_A\underline{P}_- \geq \underline{Q} \quad (3.111)$$

We herkennen in $\frac{1}{2}[\underline{P}_+ + b\underline{P}_- + \sqrt{b}(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))]$ een operator van een vorm die we eerder (zie 1.18) tegenkwamen als positieve operator. Omdat $b\zeta_A \geq 0$ staat hier dus een som van positieve operatoren, zodat $\underline{M}_A \geq \underline{Q}$. Een zelfde argument geldt voor \underline{M}_B . Voor \underline{M}_Z ligt het nog eenvoudiger. Omdat a een kans is geldt $1 - a \geq 0$, zodat ook \underline{M}_Z positief is.

De POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ laat zich niet zo eenvoudig als voorheen herschikken in een bivariante triviale verfijning $\{\underline{R}_{mn}\}$ die is te interpreteren als gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie". Het is echter wel mogelijk zo'n $\{\underline{R}_{mn}\}$ te vinden. We definiëren (mits $1 - a \neq 0$, maar daaraan is vanzelf voldaan als er absorptie is):

$$\underline{M}_{11} := \underline{M}_A - \frac{1}{2}b \frac{\zeta_A - \zeta_B}{1 - a} \underline{M}_Z = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a\underline{P}_- + \sqrt{b}(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (3.112)$$

$$\underline{M}_{12} := \underline{M}_B + \frac{1}{2}b \frac{\zeta_A - \zeta_B}{1 - a} \underline{M}_Z = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a\underline{P}_- - \sqrt{b}(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (3.113)$$

Nu hebben we in

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{11} & \underline{M}_{12} \\ \frac{1}{2}\underline{M}_Z & \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

een bivariate POWM die geschikt is. De positiviteit van \underline{M}_{11} en \underline{M}_{12} volgt uit een zelfde argument als waarmee we eerder (zie 3.111) de positiviteit van \underline{M}_A en \underline{M}_B konden inzien. We vinden voor de marginalen:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{11} + \underline{M}_{12} \\ \underline{M}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_+ \\ \underline{P}_- \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{11} + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \\ \underline{M}_{12} + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{b} & 1 - \sqrt{b} \\ 1 - \sqrt{b} & 1 + \sqrt{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_A(\chi') \\ \underline{P}_B(\chi') \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

En voor de niet-idealiteitsmatrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) voor respectievelijk de pad- en de interferentiemeting vinden we:

$$(\lambda_{mk}) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$(\mu_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{b} & 1 - \sqrt{b} \\ 1 - \sqrt{b} & 1 + \sqrt{b} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Omdat $a = b(1 + \zeta)$ waarin a de experimenteel waargenomen doorlaatkans van de absorber is (zie 3.54) kunnen we schrijven $b = a(1 - \epsilon)$ waarmee we een soort decoherentieparameter ϵ analoog 2.16 hebben gedefinieerd:

$$\epsilon := \frac{\zeta}{1 + \zeta} \quad (3.119)$$

Voor de niet-idealiteitsmatrix (μ_{nl}) die de interferentie-meting beschrijft krijgen we dan:

$$(\mu_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \\ 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Voor de niet-idealiteitsmaat $\epsilon_{(\mu)}$ vinden we:

$$\epsilon_{(\mu)} = 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \geq 1 - \sqrt{a} \quad (3.121)$$

Als er geen fluctuaties zijn geldt $\zeta = 0$ zodat dan ook $\epsilon = 0$. We kunnen dus het rechterlid $1 - \sqrt{a}$ opvatten als de niet-idealiteitsmaat bij afwezigheid van fluctuaties, zodat we kunnen vaststellen dat de interferentie-meting slechter wordt door de fluctuaties in de absorber. Voor de niet-idealiteitsmaat $\epsilon_{(\lambda)}$ die de niet-idealiteit geeft van de pad-meting, vinden we:

$$\epsilon_{(\lambda)} = a \quad (3.122)$$

De conclusie moet dus zijn dat de pad-meting door de fluctuaties niet wordt beïnvloed.

Als we de niet-idealiteitsmatrices van 3.119 en 3.122 vergelijken met 2.53 en 2.54, dan zien we de overeenstemming met de resultaten van Hoofdstuk 2. Het optische model brengt dus geen wezenlijke veranderingen mee.

We stellen vast dat de niet-idealiteitsmatrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) in het algemeen inverteerbaar zijn. De niet-idealiteitsmatrix (μ_{nl}) voor de interferentie-meting is inverteerbaar als $\sqrt{a(1 - \epsilon)} \neq 0$ dus als $a \neq 0$ en $\epsilon \neq 1$. Dus alleen in het extreme geval van

perfecte absorptie ($a = 0$) of extreme decoherentie ($\epsilon = 1$) is (μ_{nl}) niet inverteerbaar. De niet-idealiteitsmatrix (λ_{mk}) is inverteerbaar als $a \neq 1$. Alleen in het extreme geval $a = 1$ is er geen inverteerbaarheid.

Een en ander betekent dat we de ideale kansverdelingen eenvoudig door inverteren van 3.115 en 3.116 kunnen verkrijgen. Er hoeft dus niet noodzakelijk sprake te zijn van informatieverlies door de fluctuaties. In deze zin veroorzaken de fluctuaties (mits ze bekend zijn) dus geen informatieverlies.

Een andere manier van vergelijken. Net als in Hoofdstuk 2 kunnen we hier een andere manier van vergelijken hanteren. In plaats van *verschillende* absorbers met *gelijke* doorlaatkans te vergelijken, kunnen we ook kijken naar *dezelfde* absorber in het niet-fluctuerende respectievelijk fluctuerende geval. Omdat $\epsilon_{(\mu)} = 1 - \sqrt{b}$ stellen we vast dat bij het "aanzetten" van fluctuaties de kwaliteit van de interferentie-meting niet verandert. In uitdrukking 3.121 voor $\epsilon_{(\mu)}$ zien we onder het wortelteken twee factoren staan, namelijk a en $1 - \epsilon$, waarbij ϵ de decoherentie-parameter is. Bij het "aanzetten" van de fluctuaties gebeuren er twee dingen. In de eerste plaats wordt volgens 3.54 de doorlaatkans groter met een factor $1 + \zeta$. Dit heeft een positieve invloed op de interferentie. In de tweede plaats komen er vlakke golven met impuls $p' \neq p$ in de bundel. Daardoor krijgen we decoherentie en verlies van interferentie. Beide effecten heffen elkaar hier kennelijk op, zodat er netto geen effect is op de interferentie-meting. Merk op dat dit in strijd is met de conclusie van Hoofdstuk 2, waar we in het algemeen twee mogelijkheden hadden: De interferentie-meting kon hetzij beter, hetzij slechter worden. Het feit dat de fluctuaties de meting bij deze manier van vergelijken niet beïnvloeden, hangt samen met de aanname 3.30 dat de fluctuaties gemiddeld nul zijn. Deze aanname leidt ertoe dat de bijdrage $\int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) |p' \vec{n}_2\rangle$ tot de golf in de rechter bundel, vóór de laatste beamsplitter, in het geheel niet zal interfereren met de andere bundel. Deze interferentie zit namelijk in bijdragen als \vec{J}_{B12} en \vec{J}_{A21} , die nul zijn door het uitmiddelen van de fluctuaties (zie 3.89). Het is daardoor begrijpelijk dat de interferentie-meting bij het "aanzetten" van de fluctuaties niet wordt beïnvloed. In Hoofdstuk 2 hadden we een situatie waarbij de fluctuaties in het aantal verstrooiers n uitmiddelden tot nul, maar waarbij de fluctuaties in zowel de doorlaatkans a als de wortel daaruit, \sqrt{a} , niet uitmiddelden. Op dit verschil tussen Hoofdstuk 2 en 3 zullen we niet verder ingaan.

Voor de pad-meting vinden we $\epsilon_{(\lambda)} = b(1 + \zeta) \geq b$, zodat de fluctuaties de pad-meting in negatieve zin beïnvloeden. Dit is eenvoudig terug te voeren op het groter worden van de doorlaatkans, waarbij we tevens kunnen vaststellen dat de hier te trekken conclusie niet afwijkt van die in Hoofdstuk 2.

De visibility als maat voor de kwaliteit van de interferentie-meting. In het vorige hoofdstuk hebben we als maat voor de kwaliteit van het interferentiepatroon bij beide detectoren, een grootte visibility ingevoerd. Wij kunnen het experiment ook hier opzetten zoals in Figuur 2.2, en een visibility berekenen volgens definities 2.61 en 2.62 uit Hoofdstuk 2. De visibility is nu bij beide detectoren verschillend. We krijgen voor de visibilities V_A en V_B bij respectievelijk detector D_A en D_B :

$$V_A = \frac{2\sqrt{b}}{1 + b(1 + 2\zeta_A)} = \frac{2\sqrt{a(1 - \epsilon)}}{1 + a(1 - \epsilon)(1 + 2\zeta_A)} \quad (3.123)$$

$$V_B = \frac{2\sqrt{b}}{1 + b(1 + 2\zeta_B)} = \frac{2\sqrt{a(1 - \epsilon)}}{1 + a(1 - \epsilon)(1 + 2\zeta_B)} \quad (3.124)$$

Het feit dat we hier twee verschillende visibiliteiten V_A en V_B vinden, hangt samen met de niet-symmetrische opsplitsing 3.57 van de uit de absorber komende golfpakketten $\int_{-\infty}^{\infty} dp' G(p', p, t_0) |p' \vec{n}_2\rangle$: Zouden we de opsplitsing symmetrisch kiezen, dus $r(p') = \frac{1}{2}$ voor alle p' , dan zou weer gelden $V_A = V_B$ omdat dan $\zeta_A = \zeta_B = \frac{1}{2}\zeta$. Dit zullen we echter niet doen om het betoog algemeen te houden. Omdat zowel $\zeta_A \geq 0$ als $\zeta_B \geq 0$ vinden we met 3.98:

$$0 \leq \zeta_A \leq \zeta = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \quad (3.125)$$

Dezelfde ongelijkheid geldt voor ζ_B . Hiermee vinden we voor V_A (en V_B) de ongelijkheid:

$$\frac{2\sqrt{a(1 - \epsilon)}}{1 + a(1 + \epsilon)} \leq V_A \leq \frac{2\sqrt{a(1 - \epsilon)}}{1 + a(1 - \epsilon)} \quad (3.126)$$

In respectievelijk de Figuren 3.3 en 3.4 zijn de hier opredende ondergrens $\frac{2\sqrt{a(1 - \epsilon)}}{1 + a(1 + \epsilon)}$ en bovengrens $\frac{2\sqrt{a(1 - \epsilon)}}{1 + a(1 - \epsilon)}$ uitgezet als functie van doorlaatkans a en decoherentie-parameter ϵ .

We zien als volgt in dat 3.126 een verslechtering impliceert ten opzichte van het niet-fluctuerende geval ($\zeta = \epsilon = 0$). De functie $V_A(x)$ met

$$V_A(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \quad (3.127)$$

is voor $0 < x < 1$ een stijgende functie van haar argument, want haar afgeleide $V'_A(x)$ is positief op $0 < x < 1$:

$$V'_A(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{x}(1 + x)^2} > 0 \quad \text{voor } 0 < x < 1 \quad (3.128)$$

Omdat $a(1 - \epsilon) \leq a$ zal dus zeker gelden:

$$\frac{2\sqrt{a(1 - \epsilon)}}{1 + a(1 - \epsilon)} \leq \frac{2\sqrt{a}}{1 + a} \quad (3.129)$$

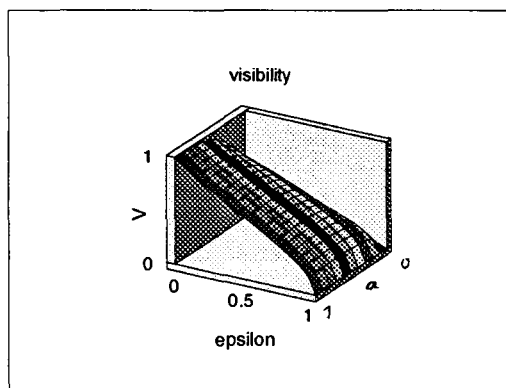
waarmee we inzien dat:

$$V_A \leq \frac{2\sqrt{a}}{1 + a} \quad (3.130)$$

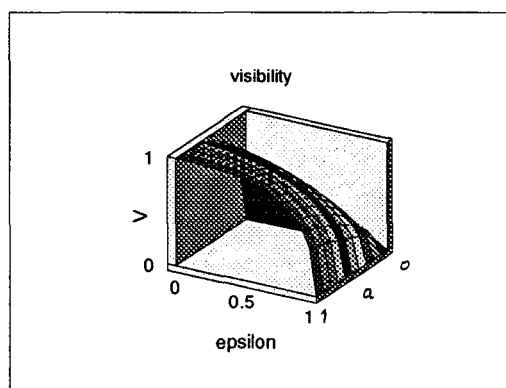
In het rechterlid van deze ongelijkheid zien we de visibility die optreedt in het niet-fluctuerende geval $\epsilon = 0$. De conclusie is dus dat de fluctuaties de visibility in negatieve zin beïnvloeden. Deze conclusie is in overeenstemming met die welke we reeds eerder op grond van de niet-idealiteitsmaat 3.121 trokken.

We kunnen nu natuurlijk ook de tweede manier van vergelijken toepassen, waarbij we in het fluctuerende en niet-fluctuerende geval met verschillende doorlaatkanssen werken bij dezelfde absorber. We hebben in 3.123 en 3.124 al uitdrukkingen van V_A en V_B in b , de doorlaatkans in het niet-fluctuerende geval. Deze uitdrukkingen suggereren een reductie van de visibility:

$$V_A = \frac{2\sqrt{b}}{1 + b(1 + 2\zeta_A)} \leq \frac{2\sqrt{b}}{1 + b} \quad (3.131)$$



Figuur 3.3: De ondergrens van 3.126 voor de visibility, als functie van a en ϵ .



Figuur 3.4: De bovengrens van 3.126 voor de visibility, als functie van a en ϵ .

In het rechterlid van deze ongelijkheid zien we een term $\frac{2\sqrt{b}}{1+b}$ staan. Dit is de visibility bij volkomen afwezigheid van fluctuaties ($\zeta_A = \zeta_B = \zeta = 0$). Het gebruik van de visibility als maat voor de interferentie leidt dus bij deze manier van vergelijken tot een verslechtering. Deze verslechtering trad niet op bij het gebruik van de niet-idealiteitsmaat 3.121 (tweede manier van vergelijken). Daar bleek immers dat er fluctuaties geen invloed op de interferentie hadden. Dit heeft te maken met de *schaal* waarop we kijken. Bij het gebruik van niet-idealiteitsmaat 3.121 is alleen de amplitude $\sim \sqrt{a(1-\epsilon)}$ van de detectiekans van belang, terwijl we voor de visibility de amplitude vergelijken met de bias $\sim 1+a$. De amplitude verandert niet, maar de bias in 3.131 wordt groter bij het "aanzetten" van de fluctuaties. Overigens is dit niet het enige verschil tussen de aanpak m.b.v. POWM's en die welke uitgaat van de visibility. Er is bij de aanpak met POWM's bijvoorbeeld sprake van inverteerbaarheid, die ons in staat stelt de ideale meting uit de niet-ideale te destilleren.

Besluit. In dit hoofdstuk is gepoogd de fluctuerende absorber heel algemeen te behandelen m.b.v. de optische potentiaal. Daarbij ontkwamen we niet aan een aantal aannamen over de fluctuaties, zoals bijvoorbeeld dat deze klein moeten zijn t.o.v. de nulde-orde absorptie. Maar er zijn nog meer beperkingen verbonden aan de behandeling met een optische potentiaal. In Hoofdstuk 4 zullen we proberen een formulering te vinden die deze beperkingen niet heeft.

Hoofdstuk 4

Golfpakketten in de interferometer en hun wisselwerking met de absorber.

4.1 Inleiding.

In het voorgaande hebben we de interactie van de neutronen met de absorber behandeld m.b.v. een potentiaal. Deze potentiaal werd eerst als "vast" beschouwd, later werden fluctuaties in rekening gebracht. Het werken met een potentiaal als modellering van de interactie houdt echter een belangrijke beperking in: Er wordt verondersteld dat de neutronen geen invloed hebben op de absorber. We verdonkeremanen het feit dat er een complete wisselwerking bestaat tussen neutron en absorber: Niet alleen beïnvloedt de absorber het neutron, maar het neutron heeft ook effect op de absorber. Een beschrijving met een potentiaal geeft altijd een tijdontwikkeling van de neutronen van zuivere toestand naar zuivere toestand. We zullen echter zien dat het meenemen van de complete wisselwerking, ertoe leidt dat we de neutronen, na de interactie met de absorber, moeten beschrijven met een dichtheidsoperator i.p.v. een zuivere toestand.

4.2 De dynamica van de interactie met de absorber.

We zullen nu proberen een beschrijving te geven van de dynamica van de neutron-absorber interactie. We introduceren een Hilbertruimte \mathcal{H}_a van absorber toestanden $|a\rangle$ en een Hilbertruimte \mathcal{H}_n van neutrontoestanden. \mathcal{H}_n zal, analoog Ref[3], uiteenvallen in drie orthogonale deelruimten \mathcal{H}_L , \mathcal{H}_R en \mathcal{H}_Z die corresponderen met respectievelijk de linkerbundel, de rechterbundel en met niet-detecteerbare (geabsorbeerde of anderszins verloren gegane) neutronen (zie Figuur 1.1):

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_Z \quad (4.1)$$

De Hilbertruimte \mathcal{H} zal toestanden van het gecombineerd systeem van neutron en absorber bevatten:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_a \quad (4.2)$$

De bundels, die voorheen werden aangegeven met $|L\rangle$ en $|R\rangle$, worden verondersteld golfpakketten te zijn. We zouden deze golfpakketten kunnen schrijven als een superpositie van vlakke golven (oneigenlijke impuls-eigentoestanden met Dirac-normering).

Om de notatie te vereenvoudigen noemen we deze driedimensionale impuls simpel k . De variabele k zal dus in het vervolg de rol spelen van impuls: k is een meerdimensionale continue variabele. We kunnen nu veronderstellen dat er in \mathcal{H}_L , \mathcal{H}_R en \mathcal{H}_Z "volledige" stelsels zullen zijn van oneigenlijke k -eigentoestanden met Dirac-normering. We geven deze toestanden (denk aan vlakke golven) aan met $|L_k\rangle$, $|R_k\rangle$ en $|Z_k\rangle$ respectievelijk. Merk op dat we slechts de ruimtelijke positie van deze vlakke golven aanduiden: Een toestand $|L_k\rangle$ kan, afhankelijk van k , verschillende richtingen hebben. De eis van Dirac-normering luidt nu:

$$\langle L_{k'} | L_k \rangle = \delta(k' - k) \quad (4.3)$$

De "volledige sets" van Dirac-genormeerde vlakke golven in \mathcal{H}_L , \mathcal{H}_R en \mathcal{H}_Z geven we aan met $\{|L_k\rangle\}$, $\{|R_k\rangle\}$ en $\{|Z_k\rangle\}$. De beide bundels $|L\rangle \in \mathcal{H}_L$ en $|R\rangle \in \mathcal{H}_R$ die we op de interferometer laten invallen, laten zich dan schrijven als:

$$|L\rangle = \int dk \lambda(k) |L_k\rangle \quad (4.4)$$

$$|R\rangle = \int dk \mu(k) |R_k\rangle \quad (4.5)$$

Normering van $|L\rangle$ en $|R\rangle$ impliceert:

$$\langle L | L \rangle = \langle R | R \rangle = \int dk |\lambda(k)|^2 = \int dk |\mu(k)|^2 = 1 \quad (4.6)$$

Bij het uitvoeren van het experiment zullen we, zoals voorheen, een lineaire combinatie

$$|\psi_{in}\rangle = \alpha |L\rangle + \beta |R\rangle \quad (4.7)$$

van $|L\rangle$ en $|R\rangle$ gebruiken. Als we $\lambda(k)$ en $\mu(k)$ vast nemen dan valt de verzameling van alle mogelijke $|\psi_{in}\rangle$, samen met het lineair opspansel van $|L\rangle$ en $|R\rangle$. Dit lineair opspansel vormt een tweedimensionale Hilbertruimte \mathcal{H}_{in} van ingaande neutrontoestanden. Wij kunnen operatoren op \mathcal{H}_{in} natuurlijk weer representeren als 2×2 matrices, hetgeen een grote vereenvoudiging betekent. Zo laat zich de dichtheidsmatrix ρ_{in} van de ingaande neutronen weer eenvoudig schrijven als (zie 1.10):

$$\rho_{in} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

De straks te vinden POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ zal óók bestaan uit operatoren die zijn te representeren als 2×2 matrices. Dit stelt ons in staat de eenvoudige aanpak van de voorgaande hoofdstukken te volgen.

Een belangrijke aanname is, dat de golfpakketten door de beamsplitters slechts "gesplitst" worden en niet verstrooid, d.w.z. de beamsplitter vervormt het golfpakket niet. Neem bijvoorbeeld de interactie van een neutron in toestand $|L\rangle$ (een mogelijke begintoestand) met de eerste beamsplitter (zie Figuur 1.1). De vlakke-golf bijdragen $|L_k\rangle$ zullen volgens onze aanname perfect in tweeën gesplitst worden, waarbij reflectie een extra factor i introduceert (zie Ref[3]).

$$|L_k\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|L_k\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|R_k\rangle \quad (4.9)$$

We noteren de gereflecteerde (en dus van richting veranderde) golf dus ook met $|L_k\rangle$, omdat deze zich aan de linkerkant bevindt van de interferometer. De doorgelaten golf echter, hoewel niet van richting veranderd, krijgt de notatie $|R_k\rangle$ omdat deze zich ter

rechterzijde bevindt. Door superpositie vinden we dan dat het effect van de eerste beamsplitter op $|L\rangle$ is:

$$\begin{aligned} |L\rangle &= \int dk \lambda(k) |L_k\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2} \int dk \lambda(k) |L_k\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2} \int dk \lambda(k) |R_k\rangle \\ &=: \frac{1}{2}i\sqrt{2}|L\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|R'\rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

waarin de afkorting $|R'\rangle$ is geïntroduceerd:

$$|R'\rangle := \int dk \lambda(k) |R_k\rangle \quad (4.11)$$

welke afkorting straks (zie 4.148) weer terugkomt.

Wat de absorber betreft, voeren we de volgende notaties in. Met $|a_g\rangle$ zullen we de "grondtoestand" van de absorber aanduiden, i.e. de toestand van de absorber vóór de interactie met de neutronen. We voeren in de Hilbertruimte \mathcal{H}_a van absorber microtoestanden een set $\{|b_l\rangle\}$ in met l een continue, eventueel meerdimensionale parameter (denk weer aan impuls). Er zij weer Dirac-normering:

$$\langle b_{l'} | b_l \rangle = \delta(l' - l) \quad (4.12)$$

Voor $|a_g\rangle$ kunnen we dan bijvoorbeeld schrijven:

$$|a_g\rangle = \int dl \alpha_g(l) |b_l\rangle \quad (4.13)$$

We veronderstellen $|a_g\rangle$ genormeerd:

$$\langle a_g | a_g \rangle = \int dl |\alpha_g(l)|^2 = 1 \quad (4.14)$$

De neutron-absorber interactie en de doorlaatkans a van de absorber. Bekijken we nu de neutron-absorber interactie (zie Figuur 2.1). Laat de neutronen beschreven worden door een toestand $|R\rangle$ volgens 4.5, en laat de absorber beschreven worden door toestand $|a_g\rangle$. Dan is het systeem van neutronen en absorber vóór de interactie in een toestand $|\Xi_{in}\rangle \in \mathcal{H}$:

$$|\Xi_{in}\rangle = |R\rangle |a_g\rangle \quad (4.15)$$

Na de interactie zullen er neutronen in detecteerbare toestanden $\in \mathcal{H}_R$ zitten, maar geabsorbeerde neutronen zullen in een niet-detecteerbare toestand $\in \mathcal{H}_Z$ terechtkomen. De toestand na de interactie van gecombineerd systeem van neutronen en absorber laat zich aldus schrijven als een superpositie van toestanden $|R_k\rangle |b_l\rangle$ en $|Z_k\rangle |b_l\rangle$:

$$|R\rangle |a_g\rangle \rightarrow |\Xi_{out}\rangle = \int dk \int dl [\gamma_r(k, l) |R_k\rangle |b_l\rangle + \gamma_z(k, l) |Z_k\rangle |b_l\rangle] \quad (4.16)$$

We definiëren:

$$\int dl \gamma_r(k, l) |b_l\rangle =: c_r(k) |a_{rk}\rangle \quad (4.17)$$

$$\int dl \gamma_z(k, l) |b_l\rangle =: c_z(k) |a_{zk}\rangle \quad (4.18)$$

waarbij $c_r(k)$ en $c_z(k)$ worden toegevoegd voor de normering: Er gelde

$$\langle a_{rk} | a_{rk} \rangle = \langle a_{zk} | a_{zk} \rangle = 1 \quad (4.19)$$

Deze normering impliceert nu samen met 4.17 en 4.18:

$$|c_r(k)|^2 = \int dl |\gamma_r(k, l)|^2 \quad (4.20)$$

$$|c_z(k)|^2 = \int dl |\gamma_z(k, l)|^2 \quad (4.21)$$

Merk op dat $|a_{rk}\rangle$ en $|a_{zk}\rangle$, hoezeer de notatie dit ook suggereert, *geen* volledige ortho-norme sets à la Dirac vormen, want in het algemeen geldt:

$$c_r^*(k') c_r(k) \langle a_{rk'} | a_{rk} \rangle = \int dl \gamma_r^*(k', l) \gamma_r(k, l) \neq 0 \quad \text{voor } k' \neq k \quad (4.22)$$

En evenzo $c_z^*(k) c_z(k) \langle a_{zk'} | a_{zk} \rangle \neq 0$ voor $k' \neq k$. Bovenstaande definities stellen ons in staat voor 4.16 verkort te schrijven:

$$|R\rangle |a_g\rangle \rightarrow \int dk [c_r(k) |R_k\rangle |a_{rk}\rangle + c_z(k) |Z_k\rangle |a_{zk}\rangle] \quad (4.23)$$

Opdat de toestand van het gecombineerd systeem na de interactie op 1 genormeerd blijft, moet gelden:

$$\int dk [|c_r(k)|^2 + |c_z(k)|^2] = 1 \quad (4.24)$$

De doorlaatkans a van de absorber vinden we als de kans dat het neutron, oorspronkelijk in de rechter bundel, door de interactie met de absorber zodanig verstrooid wordt dat het in een detecteerbare toestand $|R_k\rangle$ met willekeurige k terechtkomt. De toestanden die links en rechts optreden in 4.23 zijn elementen van de tensorproduct Hilbertruimte $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_a$. Het gecombineerd systeem van neutronen en absorber bevindt zich na de interactie in een toestand die we verkort zullen aanduiden met $|\Xi_{out}\rangle$:

$$|\Xi_{out}\rangle := \int dk [c_r(k) |R_k\rangle |a_{rk}\rangle + c_z(k) |Z_k\rangle |a_{zk}\rangle] \quad (4.25)$$

Het is bekend (reductie-stelling, zie Ref[15]) dat de neutronen na de interactie met de absorber worden beschreven door een dichtheidsoperator ρ_f die gevonden wordt als het partiële spoor (definitie Ref[1]) van $|\Xi_{out}\rangle \langle \Xi_{out}|$ over \mathcal{H}_a :

$$\rho_f = \text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Xi_{out}\rangle \langle \Xi_{out}| \quad (4.26)$$

Dit laat zich uitwerken als:

$$\begin{aligned} \rho_f &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_a} \left\{ \int dk \int dk' [c_r^*(k) c_r(k') |R_{k'}\rangle \langle R_k| \otimes |a_{rk'}\rangle \langle a_{rk}| + \right. \\ &\quad + c_r^*(k) c_z(k') |Z_{k'}\rangle \langle R_k| \otimes |a_{zk'}\rangle \langle a_{rk}| + c_r(k) c_z^*(k') |R_k\rangle \langle Z_{k'}| \otimes |a_{rk}\rangle \langle a_{zk'}| + \\ &\quad \left. + c_z^*(k) c_z(k') |Z_{k'}\rangle \langle Z_k| \otimes |a_{zk'}\rangle \langle a_{zk}|] \right\} = \\ &= \int dk \int dk' [c_r^*(k) c_r(k') \langle a_{rk} | a_{rk'} \rangle |R_{k'}\rangle \langle R_k| + c_r^*(k) c_z(k') \langle a_{rk} | a_{zk'} \rangle |Z_{k'}\rangle \langle R_k| + \\ &\quad + c_r(k) c_z^*(k') \langle a_{zk'} | a_{zk} \rangle |R_k\rangle \langle Z_{k'}| + c_z^*(k) c_z(k') \langle a_{zk} | a_{zk'} \rangle |Z_{k'}\rangle \langle Z_k|] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Laten nu P_R en P_Z de projecties zijn op respectievelijk \mathcal{H}_R en \mathcal{H}_Z . Wellicht ten overvloede: \mathcal{H}_Z bevat de toestanden van de niet-detecteerbare ("geabsorbeerde") neutronen en \mathcal{H}_R bevat de toestanden van doorgelaten en detecteerbare neutronen.

$$P_R = \int dk |R_k\rangle\langle R_k| \quad (4.28)$$

$$P_Z = \int dk |Z_k\rangle\langle Z_k| \quad (4.29)$$

We vinden de kans a voor een neutron om zich na de interactie nog in de rechter bundel te bevinden als de verwachtingswaarde van P_R in de uitgaande toestand ρ_f (zie Ref[1]):

$$\text{Tr } \rho_f P_R =: a \quad (4.30)$$

Het is deze kans die we moeten identificeren als doorlaatkans a :

$$a = \int dk |c_r(k)|^2 \langle a_{rk} | a_{rk} \rangle = \int dk |c_r(k)|^2 = \int dk \int dl |\gamma_r(k, l)|^2 \quad (4.31)$$

Deze a zal in principe nog van $\lambda(k)$ afhangen: We nemen de mogelijkheid mee dat verschillende golfpakketten een verschillende doorlaatkans ondervinden. Dit zal in paragraaf 4.4, waar het geval wordt bekeken van verschillende invallende golven ($\lambda(k) \neq \mu(k)$), belangrijke consequenties hebben. Het is triviaal te verifiëren dat $0 \leq a \leq 1$

Een niet onbelangrijke opmerking is nog dat een neutron in de linker bundel niet wisselwerkt met de absorber. De tijdontwikkeling van een toestand $|L\rangle|a_g\rangle$ is daarom eenvoudig:

$$|L\rangle|a_g\rangle \rightarrow |L\rangle|a_g\rangle \quad (4.32)$$

4.3 Twee identieke bundels.

We zullen in eerste instantie aannemen dat de beide bundels $|L\rangle$ en $|R\rangle$ identiek zijn op hun ruimtelijke positie en richting na. Dit betekent dat we in 4.4 en 4.5 de keuze maken:

$$\mu(k) = \lambda(k) \quad \text{voor alle } k \quad (4.33)$$

De keuze $\mu(k) = \lambda(k)$ heeft onder andere belangrijke vereenvoudigingen tot gevolg in verband met de interactie met de beamsplitters. We vinden namelijk met definitie 4.11 van $|R'\rangle$:

$$|R'\rangle = \int dk \lambda(k) |R_k\rangle = \int dk \mu(k) |R_k\rangle = |R\rangle \quad (4.34)$$

Dit betekent dat de in 4.10 genoemde interactie van een neutron in de linker bundel met een beamsplitter, beschreven door $|L\rangle$, de eenvoudige gedaante krijgt:

$$|L\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|L\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|R\rangle \quad (4.35)$$

De interactie van een neutron in de rechter bundel met een beamsplitter, wordt analoog:

$$|R\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|R\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|L\rangle \quad (4.36)$$

De evaluatie van de uitgaande toestand en van de detectiekansen. De in het voorgaande gemaakte aannamen met betrekking tot de interactie van de neutronen met de beamsplitters en met de absorber, stellen ons nu in staat de uitgaande toestand $|\psi_{out}\rangle$ van het gecombineerd systeem van neutronen en absorber te berekenen. Het resultaat daarvan vindt men hieronder.

$$\begin{aligned}
\alpha|L\rangle|a_g\rangle + \beta|R\rangle|a_g\rangle &\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2}(i\alpha + \beta)|L\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\alpha + i\beta)|R\rangle|a_g\rangle \\
&\rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}(i\alpha + \beta)|L\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix}|R\rangle|a_g\rangle \\
&\rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}(i\alpha + \beta)|L\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix} \times \\
&\quad \times \left[\int dk c_r(k)|R_k\rangle|a_{rk}\rangle + \int dk c_z(k)|Z_k\rangle|a_{zk}\rangle \right] \\
&\rightarrow -\frac{1}{2}(i\alpha + \beta)|L\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i(i\alpha + \beta)|R\rangle|a_g\rangle + \\
&\quad -\frac{1}{2}(\alpha + i\beta)e^{ix} \int dk c_r(k)|R_k\rangle|a_{rk}\rangle + \\
&\quad +\frac{1}{2}i(\alpha + i\beta)e^{ix} \int dk c_r(k)|L_k\rangle|a_{rk}\rangle + \\
&\quad +\frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix} \int dk c_z(k)|Z_k\rangle|a_{zk}\rangle = |\psi_{out}\rangle
\end{aligned} \tag{4.37}$$

We voeren de volgende afkortingen in:

$$|\Lambda_g\rangle := |L\rangle|a_g\rangle \tag{4.38}$$

$$|P_g\rangle := |R\rangle|a_g\rangle \tag{4.39}$$

$$|\Lambda\rangle := \int dk c_r(k)|L_k\rangle|a_{rk}\rangle \tag{4.40}$$

$$|P\rangle := \int dk c_r(k)|R_k\rangle|a_{rk}\rangle \tag{4.41}$$

$$|\zeta\rangle := \int dk c_z(k)|Z_k\rangle|a_{zk}\rangle \tag{4.42}$$

Deze afkortingen maken de volgende korte schrijfwijze mogelijk voor $|\psi_{out}\rangle$:

$$\begin{aligned}
|\psi_{out}\rangle &= -\frac{1}{2}(i\alpha + \beta)|\Lambda_g\rangle + \frac{1}{2}i(i\alpha + \beta)|P_g\rangle + \\
&\quad +\frac{1}{2}i(\alpha + i\beta)e^{ix}|\Lambda\rangle - \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)e^{ix}|P\rangle + \\
&\quad +\frac{1}{2}i\sqrt{2}(\alpha + i\beta)e^{ix}|\zeta\rangle
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Het gecombineerd systeem van neutronen en absorber wordt na de interactie beschreven door een dichtheidsoperator ρ_{out} waarvoor geldt:

$$\rho_{out} = |\psi_{out}\rangle\langle\psi_{out}| \tag{4.44}$$

Aangezien $|\psi_{out}\rangle$ vijf termen bevat, telt ρ_{out} $5 \times 5 = 25$ bijdragen.

$$\begin{aligned}
\rho_{out} = & \frac{1}{4}(|\alpha|^2 - i\alpha^*\beta + i\alpha\beta^* + |\beta|^2)[|\Lambda_g\rangle\langle\Lambda_g| + i|\Lambda_g\rangle\langle P_g| + \\
& -i|P_g\rangle\langle\Lambda_g| + |P_g\rangle\langle P_g|] + \\
& + \frac{1}{4}i(|\alpha|^2 - i\alpha^*\beta - i\alpha\beta^* - |\beta|^2)e^{-ix}[|\Lambda_g\rangle\langle P| + i|\Lambda_g\rangle\langle\Lambda| + i\sqrt{2}|\Lambda_g\rangle\langle\zeta| + \\
& -i|P_g\rangle\langle P| + |P_g\rangle\langle\Lambda| + \sqrt{2}|P_g\rangle\langle\zeta|] + \\
& - \frac{1}{4}i(|\alpha|^2 + i\alpha^*\beta + i\alpha\beta^* - |\beta|^2)e^{ix}[|P\rangle\langle\Lambda_g| - i|\Lambda\rangle\langle\Lambda_g| - i\sqrt{2}|\zeta\rangle\langle\Lambda_g| + \\
& + i|P\rangle\langle P_g| + |\Lambda\rangle\langle P_g| + \sqrt{2}|\zeta\rangle\langle P_g|] + \\
& + \frac{1}{4}(|\alpha|^2 + i\alpha^*\beta - i\alpha\beta^* + |\beta|^2)[|P\rangle\langle P| + i|P\rangle\langle\Lambda| + i\sqrt{2}|P\rangle\langle\zeta| + \\
& -i|\Lambda\rangle\langle P| + |\Lambda\rangle\langle\Lambda| + \sqrt{2}|\Lambda\rangle\langle\zeta| + \\
& -i\sqrt{2}|\zeta\rangle\langle P| + \sqrt{2}|\zeta\rangle\langle\Lambda| + 2|\zeta\rangle\langle\zeta|]
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Hoe moeten we hieruit de detectiekansen p_A , p_B en de absorptiekans p_Z halen? Het is welbekend (reductie-stelling, zie opnieuw Ref[15]) dat de dichtheidsoperator $\rho_{n,out}$ die de neutronen na de interactie beschrijft, uit ρ_{out} volgt door het partiële spoor te nemen over de absorber-Hilbertruimte \mathcal{H}_a :

$$\rho_{n,out} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_a}\rho_{out} \tag{4.46}$$

Om hieruit de kansen p_A , p_B en p_Z te berekenen moeten we het volgende doen. Zij P_L de projectieoperator op deelruimte \mathcal{H}_L van \mathcal{H}_n :

$$P_L = \int dk |L_k\rangle\langle L_k| \tag{4.47}$$

De kans p_A is de kans dat het neutron zich na de interactie met de absorber en de laatste beamsplitter, in de linker bundel bevindt (zie Figuur 1.1). De kans p_A op detectie door D_A kan worden geschreven als de verwachtingswaarde $\langle P_L \rangle$ van P_L in de uitgaande toestand $\rho_{n,out}$ (zie weer Ref[15]):

$$p_A = \langle P_L \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_n}\rho_{n,out}P_L = \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a}\rho_{out}]P_L \right\} \tag{4.48}$$

Voor de twee andere kansen p_B en p_Z kunnen we analoog redeneren. Laten P_R en P_Z de projecties zijn op respectievelijk \mathcal{H}_R en \mathcal{H}_Z (zie definities 4.28 en 4.29). Dan worden p_B en p_Z gegeven door de verwachtingswaarden van respectievelijk P_R en P_Z in de uitgaande toestand $\rho_{n,out}$:

$$p_B = \langle P_R \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_n}\rho_{n,out}P_R = \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a}\rho_{out}]P_R \right\} \tag{4.49}$$

$$p_Z = \langle P_Z \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_n}\rho_{n,out}P_Z = \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a}\rho_{out}]P_Z \right\} \tag{4.50}$$

Bij het nemen van de partiële sporen $\text{Tr}_{\mathcal{H}_a}$ en $\text{Tr}_{\mathcal{H}_n}$ worden we geholpen door observaties op grond waarvan een aantal termen 0 zal zijn. Bekijk bijvoorbeeld eens de bijdrage tot $\rho_{n,out}$ van de vorm

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_a}|\Lambda_g\rangle\langle P|$$

die zich laat uitwerken als

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_a}|\Lambda_g\rangle\langle P| = \text{Tr}_{\mathcal{H}_a} \left[\int dk c_r^*(k)|L\rangle\langle R_k| \otimes |a_g\rangle\langle a_{rk}| \right] = \int dk c_r^*(k)\langle a_{rk}|a_g\rangle|L\rangle\langle R_k| \tag{4.51}$$

De bijdrage tot bijvoorbeeld $\langle P_L \rangle$ afkomstig van $\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda_g\rangle \langle P|$ is dan 0, want:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda_g\rangle \langle P|] P_L \right\} &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ \text{Tr}_{\mathcal{H}_a} \left[\int dk c_r^*(k) |L\rangle \langle R_k| \otimes |a_g\rangle \langle a_{rk}| \right] P_L \right\} = \\
 &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ \int dk c_r^*(k) \langle a_{rk} | a_g \rangle |L\rangle \langle R_k| P_L \right\} = \\
 &= \int dk c_r^*(k) \langle a_{rk} | a_g \rangle \langle R_k | P_L | L \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Dit argument gaat ook op voor $\langle P_R \rangle$ en $\langle P_Z \rangle$. $\rho_{n,out}$ bevat meer "gemengde" bijdragen (zoals $\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda_g\rangle \langle P|$, $\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\zeta\rangle \langle P_g|$) die "afkomstig zijn van" twee orthogonale deelruimten \mathcal{H}_L , \mathcal{H}_R of \mathcal{H}_Z . Bovenstaande observatie toepassend, zien we dat dit soort bijdragen 0 oplevert bij het berekenen van de kansen p_A , p_B en p_Z . Maar $\rho_{n,out}$ bevat ook een aantal "niet-gemengde" bijdragen (zoals $\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda_g\rangle \langle \Lambda|$, $\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\zeta\rangle \langle \zeta|$, $\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |P\rangle \langle P|$) die uitkomsten $\neq 0$ kunnen opleveren bij de berekening van p_A , p_B en p_Z . Deze bijdragen vindt men hieronder opgesomd.

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda_g\rangle \langle \Lambda_g|] P_L \right\} &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ \text{Tr}_{\mathcal{H}_a} [|L\rangle \langle L| \otimes |a_g\rangle \langle a_g|] P_L \right\} = \\
 &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ |L\rangle \langle L| P_L \right\} = \\
 &= \langle L | P_L | L \rangle = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |P_g\rangle \langle P_g|] P_R \right\} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda_g\rangle \langle \Lambda|] P_L \right\} &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ \text{Tr}_{\mathcal{H}_a} \left[\int dk c_r^*(k) |L\rangle \langle L_k| \otimes |a_g\rangle \langle a_{rk}| \right] P_L \right\} = \\
 &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ \int dk c_r^*(k) \langle a_{rk} | a_g \rangle |L\rangle \langle L_k| P_L \right\} = \\
 &= \int dk c_r^*(k) \langle a_{rk} | a_g \rangle \langle L_k | P_L | L \rangle = \\
 &= \int dk c_r^*(k) \lambda(k) \langle a_{rk} | a_g \rangle =: \gamma e^{-i\varphi}
 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda\rangle \langle \Lambda_g|] P_L \right\} = \gamma e^{i\varphi}$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |P_g\rangle \langle P|] P_R \right\} = \gamma e^{-i\varphi}$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |P\rangle \langle P_g|] P_R \right\} = \gamma e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Lambda\rangle \langle \Lambda|] P_L \right\} &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ \text{Tr}_{\mathcal{H}_a} \left[\int dk \int dk' c_r^*(k) c_r(k') |L_{k'}\rangle \langle L_k| \otimes |a_{rk'}\rangle \langle a_{rk}| \right] \right\} \\
 &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ \int dk \int dk' c_r^*(k) c_r(k') \langle a_{rk} | a_{rk'} \rangle |L_{k'}\rangle \langle L_k| P_L \right\} = \\
 &= \int dk \int dk' c_r^*(k) c_r(k') \langle a_{rk} | a_{rk'} \rangle \langle L_k | P_L | L_{k'} \rangle = \\
 &= \int dk |c_r(k)|^2 = a
 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \left\{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |P\rangle \langle P|] P_R \right\} = a$$

En tenslotte

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\zeta\rangle\langle\zeta|] P_Z \} = \int dk |c_z(k)|^2 = 1 - a$$

Hierboven zijn impliciet de volgende grootheden ingevoerd. γ is de modulus van $\int dk \lambda^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle$:

$$\gamma := \left| \int dk \lambda^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle \right| \geq 0 \quad (4.53)$$

Door de Cauchy-Schwartz ongelijkheid een aantal malen toe te passen zien we eenvoudig in dat $\gamma \leq \sqrt{a}$:

$$\begin{aligned} \gamma &= \left| \int dk \lambda^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle \right| \leq \\ &\leq \left[\int dk |\lambda(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int dk |c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\int dk |c_r(k)|^2 |\langle a_g | a_{rk} \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[\int dk |c_r(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \end{aligned} \quad (4.54)$$

waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit de (Cauchy-Schwartz) ongelijkheid $|\langle a_g | a_{rk} \rangle| \leq 1$. Omdat natuurlijk ook $\gamma \geq 0$, stelt deze ongelijkheid ons in staat opnieuw een soort decoherentie parameter in te voeren, door te schrijven $\gamma = \sqrt{a(1 - \epsilon)}$:

$$\epsilon := 1 - \frac{\gamma^2}{a} \quad (4.55)$$

φ is het argument van $\int dk \lambda^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle$:

$$\varphi := \arg \left[\int dk \lambda^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle \right] \quad (4.56)$$

En a tenslotte, is al eerder gedefinieerd (zie 4.31). De laatste gelijkheid (zie deze pagina bovenaan) volgt uit de normeringseis $\int dk [|c_r(k)|^2 + |c_z(k)|^2] = 1$ (zie 4.24). Als afkorting zullen we tevens nog gebruiken:

$$\chi' := \chi + \varphi \quad (4.57)$$

Met deze definities laten zich de kansen p_A , p_B en p_Z schrijven als:

$$p_A = \frac{1}{4}(1 + a - 2\gamma \cos \chi') |\alpha|^2 + \frac{1}{4}(-i + ia + 2\gamma \sin \chi') \alpha^* \beta + \frac{1}{4}(i - ia + 2\gamma \sin \chi') \alpha \beta^* + \frac{1}{4}(1 + a + 2\gamma \cos \chi') |\beta|^2 \quad (4.58)$$

$$p_B = \frac{1}{4}(1 + a + 2\gamma \cos \chi') |\alpha|^2 + \frac{1}{4}(-i + ia - 2\gamma \sin \chi') \alpha^* \beta + \frac{1}{4}(i - ia - 2\gamma \sin \chi') \alpha \beta^* + \frac{1}{4}(1 + a - 2\gamma \cos \chi') |\beta|^2 \quad (4.59)$$

$$p_Z = \frac{1}{2}(1 - a)(|\alpha|^2 + i\alpha^* \beta - i\alpha \beta^* + |\beta|^2) \quad (4.60)$$

We moeten nu, als voorheen, de volgende identificaties maken:

$$p_A = \text{Tr} \rho_{in} M_A \quad (4.61)$$

$$p_B = \text{Tr} \rho_{in} M_B \quad (4.62)$$

$$p_Z = \text{Tr} \rho_{in} M_Z \quad (4.63)$$

Bovenstaande vergelijkingen leggen een POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ vast waarvoor geldt:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a - 2\gamma \cos \chi' & -i(1 - a) + 2\gamma \sin \chi' \\ i(1 - a) + 2\gamma \sin \chi' & 1 + a + 2\gamma \cos \chi' \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a + 2\gamma \cos \chi' & -i(1 - a) - 2\gamma \sin \chi' \\ i(1 - a) - 2\gamma \sin \chi' & 1 + a - 2\gamma \cos \chi' \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$\underline{M}_Z = \frac{1}{2}(1 - a) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Wij kunnen nu weer een pad-observabele $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ invoeren, als eerder (zie 1.14 en 1.15). Tevens is er weer een interferentie-observabele, $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$, waarvoor geldt (zie 1.16 en 1.17):

$$\underline{P}_A(\chi') = \begin{bmatrix} \sin^2 \frac{1}{2}\chi' & \frac{1}{2} \sin \chi' \\ \frac{1}{2} \sin \chi' & \cos^2 \frac{1}{2}\chi' \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\underline{P}_B(\chi') = \underline{I} - \underline{P}_A(\chi') = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{1}{2}\chi' & -\frac{1}{2} \sin \chi' \\ -\frac{1}{2} \sin \chi' & \sin^2 \frac{1}{2}\chi' \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Opnieuw laten zich \underline{M}_A , \underline{M}_B en \underline{M}_Z eenvoudig in de PWM's $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ en $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ uitdrukken:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a\underline{P}_- + \gamma(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (4.69)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{2}[\underline{P}_+ + a\underline{P}_- - \gamma(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (4.70)$$

$$\underline{M}_Z = (1 - a)\underline{P}_- \quad (4.71)$$

zodat andermaal de bivariate triviale verfijning

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A & \underline{M}_B \\ \frac{1}{2}\underline{M}_Z & \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

ons in staat stelt het experiment te interpreteren als gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie". We vinden namelijk voor de marginalen:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \underline{M}_B \\ \underline{M}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_+ \\ \underline{P}_- \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \\ \underline{M}_B + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \gamma & 1 - \gamma \\ 1 - \gamma & 1 + \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_A(\chi') \\ \underline{P}_B(\chi') \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

We vinden de niet-idealiteitsmatrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) voor respectievelijk de pad- en de interferentie-meting:

$$(\lambda_{mk}) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$(\mu_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \gamma & 1 - \gamma \\ 1 - \gamma & 1 + \gamma \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Met definitie 4.55 voor decoherentie parameter ϵ kunnen we voor (μ_{nl}) nog schrijven:

$$(\mu_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \\ 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} & 1 + \sqrt{a(1 - \epsilon)} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

En de niet-idealiteitsmaten $\epsilon_{(\lambda)}$ en $\epsilon_{(\mu)}$ worden:

$$\epsilon_{(\lambda)} = a \quad (4.78)$$

$$\epsilon_{(\mu)} = 1 - \gamma = 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \quad (4.79)$$

Weer zien we dat de kwaliteit van de pad-meting dezelfde blijft. En opnieuw is de conclusie dat de interferentie-meting slechter wordt:

$$\epsilon_{(\mu)} = 1 - \gamma = 1 - \sqrt{a(1 - \epsilon)} \geq 1 - \sqrt{a} \quad (4.80)$$

In het rechterlid van ongelijkheid 4.80 zien we $1 - \sqrt{a}$. Dit was de niet-idealiteit van de meting in de aanpak van Hoofdstuk 1. We zien dus dat de interferentie-meting in het algemeen slechter wordt door de interactie neutronen-absorber volledig mee te nemen. Slechts onder speciale condities zal de kwaliteit van de interferentie-meting niet slechter worden. Dit doet zich voor wanneer $\gamma = \sqrt{a}$. De condities waaronder $\gamma = \sqrt{a}$ kan worden kunnen we als volgt vinden. Als *niet* geldt dat er een constante K is zodat voor bijna alle k^1 :

$$\lambda(k) = K c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle \quad (4.81)$$

dan zijn $\lambda(k)$ en $c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle$ onafhankelijke vectoren in de vectorruimte van kwadratisch integreerbare functies van k en dan geldt de Cauchy-Schwartz ongelijkheid 4.54 strikt:

$$\gamma < \sqrt{a} \quad (4.82)$$

Als $\gamma = \sqrt{a}$ volgt dus uit het ongerijmde dat zo'n K wèl bestaat (afhankelijkheid). Normering houdt dan in:

$$\int dk |\lambda(k)|^2 = |K|^2 \int dk |c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle|^2 = 1 \quad (4.83)$$

We redeneren in dezelfde trant verder. Deze normeringseis stelt ons in staat voor γ te schrijven:

$$\begin{aligned} \gamma &= \left| \int dk \lambda^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle \right| = |K| \int dk |c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle|^2 = \\ &= \left[\int dk |c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Mocht nu strikt gelden $|\langle a_g | a_{rk} \rangle| < 1$ (op een verzameling k 's met maat ongelijk 0), dan zou dit impliceren:

$$\gamma = \left[\int dk |c_r(k)|^2 |\langle a_g | a_{rk} \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \left[\int dk |c_r(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad (4.85)$$

in strijd met de aanname $\gamma = \sqrt{a}$. We moeten dus concluderen dat $|\langle a_g | a_{rk} \rangle| = 1$ voor bijna alle k . Dit betekent dan dat $|a_g\rangle$ en $|a_{rk}\rangle$ voor alle k (op een nulverzameling na) slechts een fasefactor $e^{i\xi(k)}$ schelen, waarbij $\xi(k)$ eventueel afhankelijk is van k :

$$|a_g\rangle = e^{i\xi(k)} |a_{rk}\rangle \quad \text{voor bijna alle } k \quad (4.86)$$

¹Dat wil zeggen: voor alle k "op een nulverzameling na". Een nulverzameling is een verzameling met Lebesgue maat nul.

Met normeringseisen 4.14 en 4.19 vinden we nu dat:

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow K = \frac{e^{i\tau}}{\sqrt{a}} \quad (\tau \text{ reëel}) \quad (4.87)$$

zodat met 4.81 volgt:

$$c_\tau(k) = \frac{\lambda(k)}{K \langle a_g | a_{\tau k} \rangle} = \sqrt{a} e^{i\xi(k) - i\tau} \lambda(k) \quad \text{voor bijna alle } k \quad (4.88)$$

Voorwaarden 4.86 en 4.88 zijn nu de noodzakelijke voorwaarden waaronder $\gamma = \sqrt{a}$ wordt. Het is eenvoudig na te gaan dat deze voorwaarden tevens voldoende zijn.

De conditie $\gamma = \sqrt{a}$, waaronder bij vaste a de interferentie optimaal is, heeft de volgende fysische implicaties voor de interactie tussen neutronen en absorber. We keren even terug naar de redenering die ons tot definitie 4.31 van doorlaatkans a voerde. We laten dus weer in gedachten een golfpakket $|R\rangle$ invallen op de absorber. De bijdrage $\int dk c_\tau(k) |R_k\rangle |a_{\tau k}\rangle$ aan $|\Xi_{out}\rangle$ (definitie 4.25) slaat op de doorgelaten neutronen. Voor deze bijdrage vinden we:

$$\int dk c_\tau(k) |R_k\rangle |a_{\tau k}\rangle = \int dk \sqrt{a} e^{i\xi(k) - i\tau} e^{-i\xi(k)} \lambda(k) |R_k\rangle |a_g\rangle = \sqrt{a} e^{-i\tau} |R\rangle |a_g\rangle \quad (4.89)$$

Dit suggereert de volgende interpretatie. Om te beginnen zal de absorber zich, gegeven dat de neutronen worden doorgelaten, na de interactie nog in zijn grondtoestand $|a_g\rangle$ bevinden. Ten tweede zal het golfpakket $|R\rangle$ *onvervormd* worden doorgelaten. Deze interpretatie is als volgt te verdedigen. Bij definitie 4.31 van doorlaatkans a hebben we ons geconcentreerd op de neutronen door in 4.26 het partiële spoor te nemen over de absorber Hilbertruimte \mathcal{H}_a . We kunnen natuurlijk ook kijken naar het hele systeem van neutronen en absorber na de interactie. Voor de absorber zijn er twee mogelijkheden: Ofwel hij wordt na de interactie aangetroffen in grondtoestand $|a_g\rangle$, ofwel in een andere (aangeslagen) toestand. Zij $Q_g = |a_g\rangle \langle a_g|$ de projectie op absorber grondtoestand $|a_g\rangle$. Zij a_- de kans dat het neutron wordt doorgelaten, *en* dat de absorber zich na de interactie in de grondtoestand $|a_g\rangle$ bevindt. En zij tenslotte a_+ de kans dat het neutron wordt doorgelaten, *en* dat de absorber zich na de interactie in een aangeslagen toestand, *niet* in de grondtoestand bevindt. Er geldt dan natuurlijk

$$a = a_+ + a_- \quad (4.90)$$

Dit is een correlatie-meting: de correlatie tussen doorlaten van neutronen en al dan niet in een aangeslagen toestand terechtkomen. Het is welbekend (Ref[15], p. 67) dat de kansen a_- en a_+ te schrijven zijn als de verwachtingswaarden van respectievelijk $P_R \otimes Q_g$ en $P_R \otimes (I - Q_g)$ in de uitgaande toestand $|\Xi_{out}\rangle$ van het gecombineerd systeem van neutronen en absorber:

$$a_- = \langle \Xi_{out} | P_R \otimes Q_g | \Xi_{out} \rangle \quad (4.91)$$

$$a_+ = \langle \Xi_{out} | P_R \otimes (I - Q_g) | \Xi_{out} \rangle \quad (4.92)$$

Met uitdrukking 4.25 voor $|\Xi_{out}\rangle$ vinden we voor a_- en a_+ :

$$a_- = \int dk |c_\tau(k)|^2 |\langle a_g | a_{\tau k} \rangle|^2 \quad (4.93)$$

$$a_+ = \int dk |c_\tau(k)|^2 (1 - |\langle a_g | a_{\tau k} \rangle|^2) \quad (4.94)$$

Als $\gamma = \sqrt{a}$ zal dus, met noodzakelijke voorwaarde 4.86, gelden:

$$a_- = \int dk |c_r(k)|^2 = a \quad (4.95)$$

$$a_+ = 0 \quad (4.96)$$

Dit houdt in dat, gegeven dat een neutron wordt doorgelaten, de absorber inderdaad in zijn grondtoestand blijft, en dat de absorber dus *geen* pad-informatie over *doorgelaten* neutronen levert. Dit klopt mooi met het principe van complementariteit van "pad" en "interferentie": Als aan de absorber door verandering van toestand is te "zien" dat een neutron is gepasseerd en de absorber daarmee pad-informatie over het doorgelaten neutron geeft, dan is de interferentie zeker slechter dan wanneer de absorber geen pad-informatie levert.

De redenering die boven werd toegepast op de absorber, geldt op analoge manier voor de neutronen. Zo is in te zien dat de doorgelaten neutronen volgens 4.89 worden beschreven door golfpakket $|R\rangle$, zodat van een transmissie van onvervormde golfpakketten $|R\rangle$ sprake is.

In het algemeen zal niet aan beide eisen zijn voldaan, zodat we kunnen concluderen dat het geheel meenemen van de interactie tussen neutronen en absorber, ertoe leidt dat de kwaliteit van de interferentie-meting slechter wordt, terwijl de pad-meting niet wordt beïnvloed.

We merken op dat onze resultaten en conclusies niet afwijken van die welke we in de Hoofdstukken 1 en 2 vonden. In het geval we twee identiek samengestelde bundels gebruiken, is het dus niet nodig de hele interactie van neutronen en absorber mee te nemen, en kunnen we volstaan met de eenvoudiger aanpak van Hoofdstuk 1 en 2.

We zullen nu twee extreme gevallen beschouwen. Deze zijn analoog aan het geval $a = 0$ respectievelijk $a = 1$ die we in Hoofdstuk 1 tegenkwamen als respectievelijk ideale pad- en ideale interferentie-meting.

De absorber absorbeert alle binnenvallende neutronen: $a = 0$. In het geval $a = 0$ wordt geen enkel neutron door de absorber doorgelaten. Uit definitie 4.31 volgt dat in dit geval zal moeten gelden:

$$c_r(k) = 0 \quad \text{voor bijna alle } k \quad (4.97)$$

Dit betekent met definitie 4.53 dat:

$$\gamma = 0 \quad (4.98)$$

We krijgen de volgende niet-idealiteitsmatrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) voor respectievelijk de pad- en de interferentie-meting:

$$(\lambda_{mk}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

$$(\mu_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

We zien dat we in dit geval een *ideale* pad-meting hebben en een *oninformatieve* interferentie-meting, zoals te verwachten was.

De absorber laat alle binnenvallende neutronen door: $a = 1$. Uit definitie 4.31 en normeringsconditie 4.24 volgt dat nu zal moeten gelden:

$$c_z(k) = 0 \quad \text{voor bijna alle } k \quad (4.101)$$

Voor γ volgt nu geen eenvoudige uitspraak, zoals die eerder wel mogelijk was. We krijgen de volgende niet-idealiteitsmatrices (λ_{mk}) en (μ_{nl}) voor respectievelijk de pad- en de interferentie-meting:

$$(\lambda_{mk}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

$$(\mu_{nl}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \gamma & 1 - \gamma \\ 1 - \gamma & 1 + \gamma \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

We zien dat we hier, zoals verwacht, inderdaad een *oninformatieve* pad-meting krijgen. Echter, de interferentie-meting is in het algemeen *geen ideale* meting. De ongelijkheid 4.54 geldt hier namelijk nog steeds:

$$\gamma \leq a = 1 \quad (4.104)$$

zodat $\epsilon_{(\lambda)} \geq 0$. Is niet aan de beide voorwaarden 4.86 en 4.88 voldaan dan zal $\gamma < \sqrt{a} = 1$ hetgeen betekent dat we, zelfs als alle neutronen door de absorber worden doorgelaten, toch niet kunnen spreken van een ideale pad-meting. Eerder (zie de interpretatie van 4.89) is al uiteengezet dat dit fysisch samenhangt met de door de absorber geleverde pad-informatie en met de vervorming van de golfpakketten.

Geeft het experiment meer informatie door ook de eindtoestand van de absorber waar te nemen? In het voorgaande hebben we ons geconcentreerd op de beïnvloeding door de absorber van het neutron. Omgekeerd beïnvloedt het neutron de absorber echter ook, welke beïnvloeding onder andere verantwoordelijk is voor het verschijnsel decoherentie. Deze beïnvloeding kan ons in principe pad-informatie verschaffen. De vraag is nu, of het hele experiment meer informatie geeft door ook de eindtoestand van de absorber waar te nemen.

Voor een analyse van het experiment hebben we de boven gedefinieerde kansen a_+ en a_- nodig (zie definities 4.92 en 4.91). Op analoge wijze voeren we de kansen b_- en b_+ in: b_- zij de kans dat het neutron geabsorbeerd wordt, *en* dat de absorber in zijn grondtoestand blijft. En b_+ zij de kans op absorptie in coïncidentie met het aangeslagen worden van de absorber:

$$b_- = \langle \Xi_{out} | P_Z \otimes Q_g | \Xi_{out} \rangle \quad (4.105)$$

$$b_+ = \langle \Xi_{out} | P_Z \otimes (I - Q_g) | \Xi_{out} \rangle \quad (4.106)$$

waarin $|\Xi_{out}\rangle$ weer gegeven wordt door 4.25 en $Q_g = |a_g\rangle\langle a_g|$ opnieuw de projectie is op absorber grondtoestand $|a_g\rangle$. We vinden voor b_- en b_+ :

$$b_- = \int dk |c_z(k)|^2 |\langle a_g | a_{zk} \rangle|^2 \quad (4.107)$$

$$b_+ = \int dk |c_z(k)|^2 (1 - |\langle a_g | a_{zk} \rangle|^2) \quad (4.108)$$

Uiteraard is $b_+ + b_-$ gelijk aan de totale absorptiekans $1 - a$:

$$b_+ + b_- = \int dk |c_z(k)|^2 = 1 - a \quad (4.109)$$

Het experiment heeft nu $3 \times 2 = 6$ mogelijke uitkomsten i.p.v. 3, omdat we voor de absorber de bovengenoemde 2 mogelijkheden hebben.

Laten p_{A+} , p_{B+} de kansen zijn op detectie in D_A of D_B respectievelijk, en dat de absorber in een aangeslagen toestand terechtkomt na de interactie. p_{Z+} zij de kans op absorptie in coïncidentie met het aangeslagen worden van de absorber. p_{A-} , p_{B-} en p_{Z-} hebben dezelfde betekenissen, maar dan voor de situatie dat de absorber in de grondtoestand blijft. Deze zes kansen kunnen we schrijven als verwachtingswaarden van zes positieve operatoren in de begintoestand ρ_{in} (zie 4.8):

$$p_{A+} = \text{Tr } \rho_{in} \underline{M}_{A+} \quad (4.110)$$

$$p_{B+} = \text{Tr } \rho_{in} \underline{M}_{B+} \quad (4.111)$$

$$p_{Z+} = \text{Tr } \rho_{in} \underline{M}_{Z+} \quad (4.112)$$

$$p_{A-} = \text{Tr } \rho_{in} \underline{M}_{A-} \quad (4.113)$$

$$p_{B-} = \text{Tr } \rho_{in} \underline{M}_{B-} \quad (4.114)$$

$$p_{Z-} = \text{Tr } \rho_{in} \underline{M}_{Z-} \quad (4.115)$$

De zes hierdoor gedefinieerde operatoren vormen een POWM

$$\{\underline{M}_{A+}, \underline{M}_{B+}, \underline{M}_{Z+}, \underline{M}_{A-}, \underline{M}_{B-}, \underline{M}_{Z-}\}$$

waarvoor we zonder verder de berekening te demonstreren het resultaat geven:

$$\underline{M}_{A+} = \frac{1}{4}a_+ \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

$$\underline{M}_{B+} = \frac{1}{4}a_+ \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

$$\underline{M}_{Z+} = \frac{1}{2}b_+ \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

$$\underline{M}_{A-} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a_- - 2\gamma \cos \chi' & -i(1 - a_-) + 2\gamma \sin \chi' \\ i(1 - a_-) + 2\gamma \sin \chi' & 1 + a_- + 2\gamma \cos \chi' \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

$$\underline{M}_{B-} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a_- + 2\gamma \cos \chi' & -i(1 - a_-) - 2\gamma \sin \chi' \\ i(1 - a_-) - 2\gamma \sin \chi' & 1 + a_- - 2\gamma \cos \chi' \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

$$\underline{M}_{Z-} = \frac{1}{2}b_- \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Hierin worden γ en χ' weer gegeven in 4.53 respectievelijk 4.57. De oorspronkelijke POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ is een vergroving hiervan. Als we namelijk de eindtoestand van de absorber negeren moeten we alle kansen sommeren over de beide, elkaar uitsluitende absorber uitkomsten "+" (aangeslagen na de interactie) en "-" (in grondtoestand na de interactie). Dit betekent voor de oorspronkelijke POWM dat $\underline{M}_A = \underline{M}_{A+} + \underline{M}_{A-}$, $\underline{M}_B = \underline{M}_{B+} + \underline{M}_{B-}$ en $\underline{M}_Z = \underline{M}_{Z+} + \underline{M}_{Z-}$.

De operatoren laten zich aldus in de pad-observabele $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ (zie 1.14 en 1.15) en de interferentie-observabele $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ (zie 4.67 en 4.68) uitdrukken:

$$\underline{M}_{A+} = \frac{1}{2}a_+ \underline{P}_- \quad (4.122)$$

$$\underline{M}_{B+} = \frac{1}{2}a_+ \underline{P}_- \quad (4.123)$$

$$\underline{M}_{Z+} = b_+ \underline{P}_- \quad (4.124)$$

$$\underline{M}_{A-} = \frac{1}{2} [\underline{P}_+ + a_- \underline{P}_- + \gamma(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (4.125)$$

$$\underline{M}_{B-} = \frac{1}{2} [\underline{P}_+ + a_- \underline{P}_- - \gamma(\underline{P}_A(\chi') - \underline{P}_B(\chi'))] \quad (4.126)$$

$$\underline{M}_{Z-} = b_- \underline{P}_- \quad (4.127)$$

We merken op dat \underline{M}_{A+} , \underline{M}_{B+} , \underline{M}_{Z+} geen bijdragen bevatten van de interferentie-observabele $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$. Dit betekent dat doorgelaten neutronen, gegeven dat de absorber na de interactie zeker niet zal worden aangetroffen in zijn grondtoestand $|a_g\rangle$, geen bijdrage tot de interferentie leveren. Zouden we nu de meetopstelling zó willen veranderen dat we het pad van het neutron met zekerheid kunnen bepalen *zonder alle neutronen te absorberen*, dan zal de kans a_- (dat we de absorber na het doorlaten van een neutron aantreffen in de grondtoestand), gelijk 0 moeten zijn. Uit definitie 4.91 en Cauchy-Schwartz ongelijkheid 4.54 volgt dan dat zeker ook $\gamma = 0$, zodat in dat geval de interferentie-bijdragen tot onze POWM totaal verdwijnen. Dit stemt weer prachtig overeen met het principe van complementariteit van "pad" en "interferentie", zoals dat door de Kopenhaagse school wordt aangehangen.

We merken tenslotte op dat de hierboven geïdentificeerde POWM, omdat zij slechts operatoren uit de PWM's $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ en $\{\underline{P}_A(\chi'), \underline{P}_B(\chi')\}$ bevat, geen *extra* informatie over "pad" en "interferentie" levert in vergelijking met de vergroving $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ die geen onderscheid maakt tussen verschillende absorber eindtoestanden. De pad-informatie die de absorber levert, zit al besloten in de detectiewaarschijnelijkheden voor de neutronen.

De visibility als maat voor de kwaliteit van de interferentie-meting. Wij kunnen nu ook de in Hoofdstuk 2, formule 2.61 gedefinieerde visibility berekenen en kijken of die een andere indruk geeft van de kwaliteit van de interferentie. De visibilities V_A en V_B zijn nu weer gelijk: De verschillen die we in Hoofdstuk 3 vonden (zie 3.123 en 3.124) hangen samen met het feit dat we ons in dat hoofdstuk niet hebben beperkt tot een volkomen symmetrische opsplitsing van de uit de absorber komende golven. Dit doen we hier, als gevolg van aanname 4.9, wel. We vinden voor de visibility V_A :

$$V_A = \frac{2\gamma}{1+a} = \frac{2\sqrt{a(1-\epsilon)}}{1+a} \quad (4.128)$$

Op grond hiervan vinden we dat

$$V_A \leq \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \quad (4.129)$$

waarin we $\frac{2\sqrt{a}}{1+a}$ herkennen als de visibility in het geval de interactie met de absorber niet geheel werd meegenomen, en er ook geen sprake was van fluctuaties (zie bijvoorbeeld 2.64). Er is dus ook wat de visibility betreft altijd sprake van een verslechtering van de interferentie-meting.

Een analytische uitdrukking voor ϵ . Er is een eenvoudige situatie waarin het mogelijk is een analytische uitdrukking te vinden voor de decoherentie-parameter ϵ . Bekijken we eens de bijzondere situatie dat neutron en absorber zich vóór de interactie beide in een toestand met welbepaalde impuls bevinden, zodat de begintoestand $|\Xi_{in}\rangle$ van 4.15 is te schrijven als:

$$|\Xi_{in}\rangle = |R_k\rangle |b_l\rangle \quad (4.130)$$

Ter vereenvoudiging van de berekeningen zullen we onze impulsen k en l even ééndimensionaal veronderstellen, zodat de in het voorgaande optredende k - en l -integraties reduceren tot enkelvoudige integraties met één integratievariabele. We veronderstellen de interactie nu zodanig dat er impulsbehoud is. Zij krijgt dan de gedaante:

$$|\Xi_{in}\rangle \rightarrow |\Xi_{out}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk' [\beta_r(k')|R_{k+k'}\rangle|b_{l-k'}\rangle + \beta_z(k')|Z_{k+k'}\rangle|b_{l-k'}\rangle] \quad (4.131)$$

$|\Xi_{in}\rangle$ is echter volgens 4.5, 4.13 en 4.15 uit vlakke golven opgebouwd:

$$|\Xi_{in}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \lambda(k)\alpha_g(l)|R_k\rangle|b_l\rangle \quad (4.132)$$

De tijdontwikkeling krijgt dan door superpositie de vorm:

$$\begin{aligned} |\Xi_{in}\rangle \rightarrow |\Xi_{out}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \lambda(k)\alpha_g(l)[\beta_r(k')|R_{k+k'}\rangle|b_{l-k'}\rangle + \\ &\quad + \beta_z(k')|Z_{k+k'}\rangle|b_{l-k'}\rangle] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \lambda(k-k')\alpha_g(l+k')[\beta_r(k')|R_k\rangle|b_l\rangle + \\ &\quad + \beta_z(k')|Z_k\rangle|b_l\rangle] \end{aligned} \quad (4.133)$$

Vergelijking met 4.16 leert dan dat $\gamma_r(k, l)$ en $\gamma_z(k, l)$ gegeven worden door:

$$\gamma_r(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \lambda(k-k')\alpha_g(l+k')\beta_r(k') \quad (4.134)$$

$$\gamma_z(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \lambda(k-k')\alpha_g(l+k')\beta_z(k') \quad (4.135)$$

De doorlaatkans a laat zich nu met 4.31 eenvoudig uitdrukken in $\beta_r(k')$:

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl |\gamma_r(k, l)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \left| \int_{-\infty}^{\infty} dk' \lambda(k-k')\alpha_g(l+k')\beta_r(k') \right|^2 \quad (4.136)$$

M.b.v. 4.17, 4.13, 4.53 en 4.56 laat zich $\gamma e^{i\varphi}$ uitdrukken in $\gamma_r(k, l)$:

$$\gamma e^{i\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \lambda^*(k)c_r(k)\langle a_g|a_{rk}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \lambda^*(k)\alpha_g^*(l)\gamma_r(k, l) \quad (4.137)$$

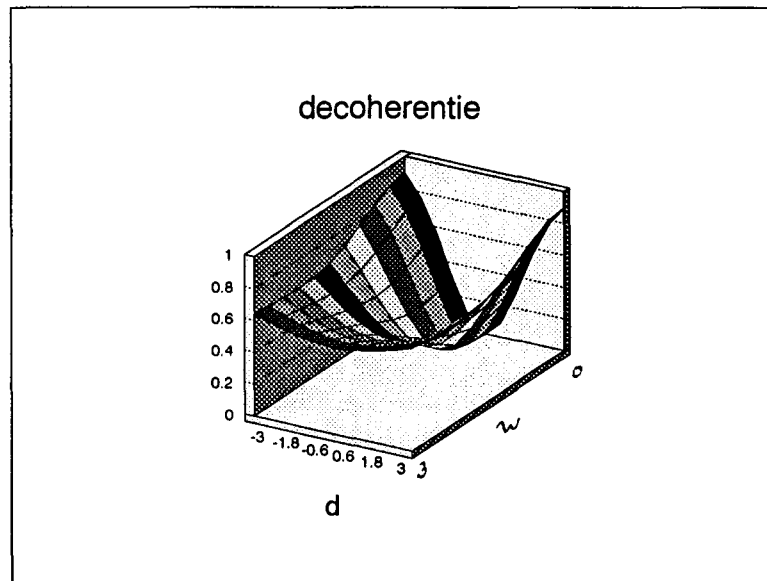
waarmee we de volgende uitdrukking vinden voor $\gamma e^{i\varphi}$:

$$\gamma e^{i\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \lambda^*(k)\alpha_g^*(l)\lambda(k-k')\alpha(l+k')\beta_r(k') \quad (4.138)$$

Nemen we nu voor $\lambda(k)$, $\alpha_g(l)$ en $\beta_r(k)$ Gauss-profielen. Om $\lambda(k)$ en $\alpha_g(l)$ te laten voldoen aan de normeringseisen 4.6 en 4.14, schrijven we die als:

$$\lambda(k) = \left(\frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-(k-k_0)^2/4t^2} \quad (4.139)$$

$$\alpha_g(l) = \left(\frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-(l-l_0)^2/4u^2} \quad (4.140)$$



Figuur 4.1: De decoherentie parameter als functie van de dimensieloze spectrale verschuiving d (4.143) en de dimensieloze spectrale verbreding w (4.144).

Voor $\beta_r(k')$ schrijven we:

$$\beta_r(k') = C e^{-(k'-m_0)^2/4v^2} \quad (4.141)$$

waarin C zo wordt gekozen dat is voldaan aan 4.136. Als C complex is brengt dit, blijkens 4.141 en 4.133, een vaste faseverschuiving mee van de hele golf functie van uitgaande neutronen en absorber. Uit berekening 4.37 blijkt dat zo'n faseverschuiving altijd in de faseverschuiving χ kan worden verdisconteerd, zodat we ons kunnen beperken tot positief reële C . We kunnen nu m_0 interpreteren als spectrale verschuiving (namelijk de impuls-overdracht van de absorber op het neutron), en v als een spectrale verbreding. De profielen $\lambda(k)$, $\alpha_g(l)$ en $\beta_r(k')$ kunnen nu worden ingevuld in 4.136 en 4.137. M.b.v. 4.136 wordt C aangepast, waarna γ volgt uit 4.137. ϵ kan dan met definitie 4.55 worden gevonden. De details van de berekening van ϵ vindt men in de Appendix. We volstaan hier met de vermelding van het resultaat:

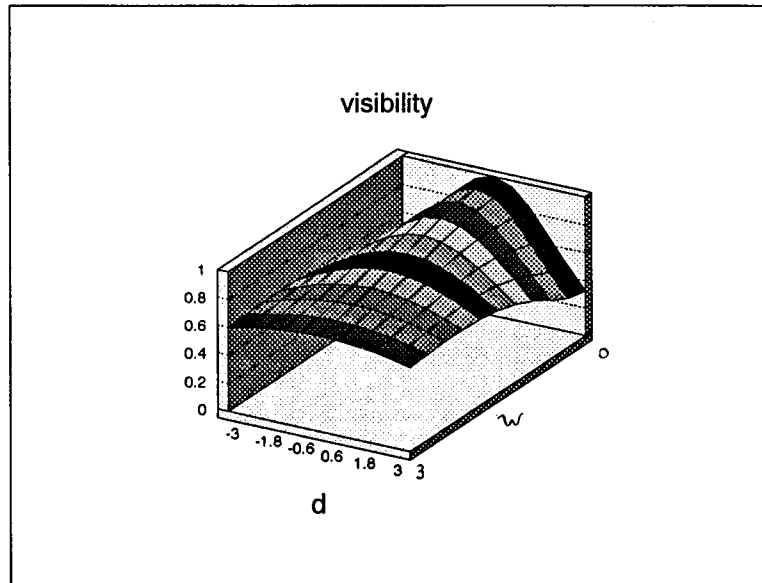
$$\epsilon = 1 - \frac{2tu[(t^2 + u^2)v^2 + t^2u^2]^{\frac{1}{2}}}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2u^2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(t^2 + u^2)m_0^2}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2u^2}\right] \quad (4.142)$$

We merken op dat ϵ niet afhankelijk is van k_0 of l_0 .

Er is in Pascal programmatuur geschreven waarmee ϵ numeriek gevonden kan worden voor willekeurige waarden van de parameters t , u , v en m_0 . Het gedrag van ϵ als functie van de parameters is in Figuur 4.1 aanschouwelijk gemaakt. Dit is als volgt gedaan. Ter vereenvoudiging van uitdrukking 4.142 introduceren we de volgende dimensieloze grootheden d en w die evenredig zijn met respectievelijk de spectrale verschuiving m_0 en de spectrale verbreding v :

$$d := \frac{(t^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}}{tu} m_0 \quad (4.143)$$

$$w := \frac{(t^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}}{tu} v \quad (4.144)$$



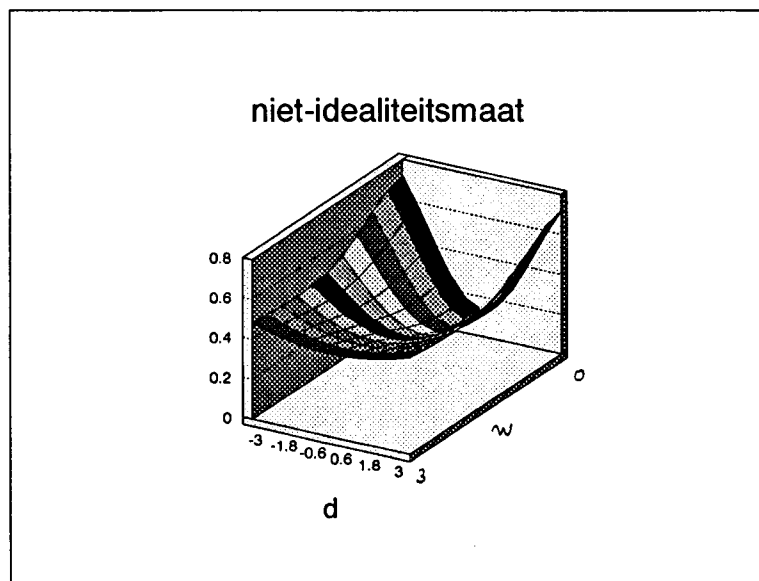
Figuur 4.2: De visibility, *in relatieve eenheden*, als functie van de dimensionloze spectrale verschuiving d (4.143) en de dimensionloze spectrale verbreding w (4.144).

Daarmee wordt 4.142:

$$\epsilon = 1 - \frac{2(1 + w^2)^{\frac{1}{2}}}{2 + w^2} \exp \left[\frac{-\frac{1}{2}d^2}{2 + w^2} \right] \quad (4.145)$$

De analytische uitdrukking 4.142 laat met 4.128 de berekening van de visibility V_A toe. Zij is net als ϵ eenvoudig uit te drukken in de dimensionloze grootheden d en w . In Figuur 4.2 vindt men het resultaat hiervan.

Met formule 4.79 is de niet-idealiteitsmaat $\epsilon_{(\mu)}$ uit te drukken in d en w . In Figuur 4.3 vindt men het resultaat voor het geval $a = \frac{3}{4}$.



Figuur 4.3: De niet-idealiteitsmaat $\epsilon_{(\mu)}$ (4.79) voor het geval $a = \frac{3}{4}$ als functie van de dimensionloze spectrale verschuiving d en de dimensionloze spectrale verbreding w .

4.4 Twee verschillende bundels.

We zullen in het vervolg het geval bespreken waarbij de linker en rechter invallende bundel onderling niet alleen verschillen wat ruimtelijke positie en richting betreft, maar waarbij ze tevens verschillend zijn samengesteld uit vlakke golven. We doen dit door te kiezen:

$$\lambda(k) \neq \mu(k) \quad (4.146)$$

op een verzameling k -waarden met maat > 0 . $|L\rangle$ en $|R\rangle$ worden gedefinieerd als voorheen (zie 4.4 en 4.5). In verband met de werking van de beamsplitters (zie eerder) is het nu ook handig in te voeren:

$$|L'\rangle := \int dk \mu(k) |L_k\rangle \quad (4.147)$$

$$|R'\rangle := \int dk \lambda(k) |R_k\rangle \quad (4.148)$$

De interactie van de neutronen met de beamsplitters kan dankzij deze afkortingen als volgt kort worden weergegeven. De interactie van neutronen in de linker bundel, beschreven door toestand $|L\rangle$, verloopt aldus:

$$\begin{aligned} |L\rangle &= \int dk \lambda(k) |L_k\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2} \int dk \lambda(k) |L_k\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2} \int dk \lambda(k) |R_k\rangle \\ &= \frac{1}{2}i\sqrt{2}|L\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|R'\rangle \end{aligned} \quad (4.149)$$

Analoog kunnen we inzien hoe de interactie bij $|L'\rangle$, $|R\rangle$ en $|R'\rangle$ verloopt:

$$|L'\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|L'\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|R\rangle \quad (4.150)$$

$$|R\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|R\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|L'\rangle \quad (4.151)$$

$$|R'\rangle \rightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{2}|R'\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}|L\rangle \quad (4.152)$$

De interactie met de absorber. De doorlaatkans? Hoe ziet de interactie van de neutronen met de absorber eruit? Als eerder beschouwen we een neutron in de rechter bundel dat wisselwerkt met de absorber. In paragraaf 4.2 van dit hoofdstuk hebben we ons deze interactie voorgesteld als in 4.23, waarin $|Z_k\rangle$ stond voor niet-detecteerbare (=geabsorbeerde) neutronen. Voor wat betreft het golfpakket $|R\rangle$ zullen we deze notatie handhaven. Nu hebben we echter ook golfpakketten $|R'\rangle$ in de rechter bundel. Wij zullen in het algemeen moeten veronderstellen dat het resultaat na interactie dan ook anders zal zijn. De interactie laat zich schrijven als:

$$|R'\rangle|a_g\rangle \rightarrow \int dk \int dl [\gamma'_r(k, l) |R_k\rangle |b_l\rangle + \gamma'_z(k, l) |Z_k\rangle |b_l\rangle] \quad (4.153)$$

Analoog 4.17 en 4.18 definiëren we:

$$\int dl \gamma'_r(k, l) |b_l\rangle =: c'_r(k) |a'_{rk}\rangle \quad (4.154)$$

$$\int dl \gamma'_z(k, l) |b_l\rangle =: c'_z(k) |a'_{zk}\rangle \quad (4.155)$$

waarin $c'_r(k)$ en $c'_z(k)$ worden toegevoegd voor normering. De toestanden $|a'_{rk}\rangle$ en $|a'_{zk}\rangle$ vormen *geen* volledige set Dirac-genormeerde toestanden, evenmin als $|a_{rk}\rangle$ en $|a_{zk}\rangle$ dat zijn (zie opmerking bij 4.22). De interactie van neutronen, beschreven door een toestand $|R'\rangle$ kan nu kort worden weergegeven als:

$$|R'\rangle|a_g\rangle \rightarrow \int dk [c'_r(k)|R_k\rangle|a'_{rk}\rangle + c'_z(k)|Z_k\rangle|a'_{zk}\rangle] \quad (4.156)$$

Opdat er normbehoud is voor de toestand van het gecombineerd systeem, moet gelden (zie eerdere opmerking 4.24):

$$\int dk [|c_r(k)|^2 + |c_z(k)|^2] = \int dk [|c'_r(k)|^2 + |c'_z(k)|^2] = 1 \quad (4.157)$$

Dit is een gevolg van de veronderstelde unitariteit van de tijdontwikkeling van de toestand van neutronen en absorber. Een ander gevolg van deze unitariteit is het invariant zijn van inproducten. Het inproduct van twee toestanden ná de interactie is gelijk aan het inproduct vóór de interactie:

$$\begin{aligned} \langle R|R'\rangle\langle a_g|a_g\rangle = \langle R|R'\rangle &= \int dk \mu^*(k)\lambda(k) = \int dk [c_r^*(k)c'_r(k)\langle a_{rk}|a'_{rk}\rangle + \\ &+ c_z^*(k)c'_z(k)\langle a_{zk}|a'_{zk}\rangle] \quad (4.158) \end{aligned}$$

We zullen deze identiteit straks (zie 4.183) gebruiken. In paragraaf 4.2 is de opmerking gemaakt dat de daar ingevoerde doorlaatkans a afhankelijk kan zijn van het invallende golfpakket. De consequentie hiervan is, dat wij nu niet zo maar een vaste doorlaatkans kunnen definiëren, wat we voorheen wel konden. Laat namelijk eens een lineaire combinatie $\alpha_1|R\rangle + \alpha_2|R'\rangle$ invallen op de absorber, zodat de toestand $|\Xi_{in}\rangle$ van neutronen en absorber vóór de interactie de gedaante heeft:

$$|\Xi_{in}\rangle = \alpha_1|R\rangle|a_g\rangle + \alpha_2|R'\rangle|a_g\rangle \quad (4.159)$$

waarbij $|\Xi_{in}\rangle$ genormeerd zij:

$$\langle \Xi_{in}|\Xi_{in}\rangle = \int dk |\alpha_1\mu(k) + \alpha_2\lambda(k)|^2 = 1 \quad (4.160)$$

De tijdontwikkeling ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned} \alpha_1|R\rangle|a_g\rangle + \alpha_2|R'\rangle|a_g\rangle &\rightarrow \int dk [\alpha_1[c_r(k)|R_k\rangle|a_{rk}\rangle + c_z(k)|Z_k\rangle|a_{zk}\rangle] + \\ &+ \alpha_2[c'_r(k)|R_k\rangle|a'_{rk}\rangle + c'_z(k)|Z_k\rangle|a'_{zk}\rangle] =: |\Xi_{out}\rangle \quad (4.161) \end{aligned}$$

Ná de interactie worden de neutronen en de absorber beschreven door een toestand $|\Xi_{out}\rangle$ volgens 4.161. Zij p de doorlaatkans, de kans om zich na de interactie in de detecteerbare rechter bundel te bevinden:

$$\begin{aligned} p &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_n} \{ [\text{Tr}_{\mathcal{H}_a} |\Xi_{out}\rangle\langle \Xi_{out}|] P_R \} = \\ &= \int dk [|\alpha_1|^2 |c_r(k)|^2 + \alpha_1\alpha_2^* c_r(k)c_r^*(k)\langle a'_{rk}|a_{rk}\rangle + \\ &+ \alpha_1^*\alpha_2 c_r^*(k)c_r(k)\langle a_{rk}|a'_{rk}\rangle + |\alpha_2|^2 |c'_r(k)|^2] \quad (4.162) \end{aligned}$$

We stellen vast dat deze kans in het algemeen afhangt van de keuzes voor α_1 en α_2 die we in overeenstemming met 4.160 kunnen maken, zodat we geen vaste doorlaatkans kunnen definiëren. Dit hangt samen met het feit dat de beide in het experiment gebruikte golfpakketten $|R\rangle$ en $|R'\rangle$, ieder een andere doorlaatkans ondervinden. Deze doorlaatkansen, respectievelijk genoemd a en a' , kunnen we wel definiëren zoals we dat in paragraaf 4.2 hebben gedaan. Voor de berekening van a beschouwen we dan een neutrontoestand $|R\rangle$ in de rechter bundel, en berekenen de kans dat het neutron zich na de interactie met de absorber nog in de detecteerbare rechter bundel bevindt. Voor de duidelijkheid vermelden we op deze plaats nog eens het resultaat (zie ook formule 4.31):

$$a = \int dk |c_r(k)|^2 \quad (4.163)$$

Voor de kans a' vinden we geheel analoog:

$$a' = \int dk |c'_r(k)|^2 \quad (4.164)$$

Deze definities zullen we straks (zie bijvoorbeeld 4.63 t/m 4.65) weer nodig hebben.

De evaluatie van de uitgaande toestand en van de detectiekansen. Met alle eerder genoemde notaties en definities laat zich de uitgaande toestand van het systeem van neutronen en absorber aldus systematisch berekenen:

$$\begin{aligned} \alpha|L\rangle|a_g\rangle + \beta|R\rangle|a_g\rangle &\rightarrow \frac{1}{2}i\alpha\sqrt{2}|L\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i\beta\sqrt{2}|R\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}|R'\rangle + \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}|L'\rangle \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}|L\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i\alpha\sqrt{2}e^{ix}|R'\rangle|a_g\rangle + \\ &\quad -\frac{1}{2}\beta\sqrt{2}e^{ix}|R\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i\beta\sqrt{2}|L'\rangle|a_g\rangle \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}|L\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i\beta\sqrt{2}|L'\rangle|a_g\rangle + \\ &\quad +\frac{1}{2}i\alpha\sqrt{2}e^{ix} \left[\int dk c'_r(k)|R_k\rangle|a'_{rk}\rangle + \int dk c'_z(k)|Z_k\rangle|a'_{zk}\rangle \right] + \\ &\quad -\frac{1}{2}\beta\sqrt{2}e^{ix} \left[\int dk c_r(k)|R_k\rangle|a_{rk}\rangle + \int dk c_z(k)|Z_k\rangle|a_{zk}\rangle \right] \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}i\alpha|L\rangle|a_g\rangle - \frac{1}{2}\alpha|R'\rangle|a_g\rangle + \frac{1}{2}i\beta|R\rangle|a_g\rangle - \frac{1}{2}\beta|L'\rangle|a_g\rangle + \\ &\quad -\frac{1}{2}\alpha e^{ix} \int dk c'_r(k)|R_k\rangle|a'_{rk}\rangle + \frac{1}{2}i\alpha e^{ix} \int dk c'_r(k)|L_k\rangle|a'_{rk}\rangle + \\ &\quad -\frac{1}{2}i\beta e^{ix} \int dk c_r(k)|R_k\rangle|a_{rk}\rangle + \frac{1}{2}\beta e^{ix} \int dk c_r(k)|L_k\rangle|a_{rk}\rangle + \\ &\quad +\frac{1}{2}i\alpha\sqrt{2}e^{ix} \int dk c'_z(k)|Z_k\rangle|a'_{zk}\rangle - \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}e^{ix} \int dk c_z(k)|Z_k\rangle|a_{zk}\rangle \\ &= |\psi_{out}\rangle \end{aligned} \quad (4.165)$$

We voeren de volgende afkortingen in:

$$|\Lambda_g\rangle := |L\rangle|a_g\rangle \quad (4.166)$$

$$|\Lambda'_g\rangle := |L'\rangle|a_g\rangle \quad (4.167)$$

$$|P_g\rangle := |R\rangle|a_g\rangle \quad (4.168)$$

$$|P'_g\rangle := |R'\rangle|a_g\rangle \quad (4.169)$$

$$|\Lambda\rangle := \int dk c_r(k) |L_k\rangle |a_{rk}\rangle \quad (4.170)$$

$$|\Lambda'\rangle := \int dk c'_r(k) |L_k\rangle |a'_{rk}\rangle \quad (4.171)$$

$$|P\rangle := \int dk c_r(k) |R_k\rangle |a_{rk}\rangle \quad (4.172)$$

$$|P'\rangle := \int dk c'_r(k) |R_k\rangle |a'_{rk}\rangle \quad (4.173)$$

$$|\zeta\rangle := \int dk c_z(k) |Z_k\rangle |a_{zk}\rangle \quad (4.174)$$

$$|\zeta'\rangle := \int dk c'_z(k) |Z_k\rangle |a'_{zk}\rangle \quad (4.175)$$

De afkortingen zonder accentjes vindt men al in paragraaf 4.3. Ze zijn voor de volledigheid weer toegevoegd. Deze afkortingen stellen ons in staat voor $|\psi_{out}\rangle$ kort te schrijven:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle = & -\frac{1}{2}i\alpha|\Lambda_g\rangle - \frac{1}{2}\beta|\Lambda'_g\rangle - \frac{1}{2}\alpha|P'_g\rangle + \frac{1}{2}i\beta|P_g\rangle + \frac{1}{2}i\alpha e^{ix}|\Lambda'\rangle - \frac{1}{2}\beta e^{ix}|\Lambda\rangle + \\ & -\frac{1}{2}\alpha e^{ix}|P'\rangle - \frac{1}{2}i\beta e^{ix}|P\rangle + \frac{1}{2}i\alpha\sqrt{2}e^{ix}|\zeta'\rangle - \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}e^{ix}|\zeta\rangle \end{aligned} \quad (4.176)$$

Het gecombineerd systeem van neutronen en absorber wordt na de interactie beschreven door een dichtheidsoperator ρ_{out} waarvoor geldt $\rho_{out} = |\psi_{out}\rangle\langle\psi_{out}|$. Aangezien $|\psi_{out}\rangle$ 10 termen bevat, heeft ρ_{out} er $10 \times 10 = 100$. Het is natuurlijk zinloos ρ_{out} op deze plaats in zijn geheel uit te schrijven. De meeste bijdragen tot ρ_{out} blijken weer nul op te leveren bij het berekenen van de kansen p_A , p_B en p_Z . Deze kansen worden, net als in paragraaf 4.3, gevonden als de verwachtingswaarden van respectievelijk de projecties P_L , P_R en P_Z (formules 4.47, 4.28 en 4.29 van paragraaf 4.3).

De berekening van de kansen wordt hier niet in extenso gedemonstreerd, omdat deze nogal ingewikkeld is terwijl er daarbij geen wezenlijke moeilijkheden rijzen. Om de resultaten te vereenvoudigen voeren wij, buiten a en a' , de volgende definities in:

$$\sigma e^{i\theta} := \int dk \mu^*(k) \lambda(k) \quad (4.177)$$

$$\gamma e^{i\varphi} := \int dk \lambda^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle \quad (4.178)$$

$$\gamma' e^{i\varphi'} := \int dk \lambda^*(k) c'_r(k) \langle a_g | a'_{rk} \rangle \quad (4.179)$$

$$\delta e^{i\tau} := \int dk \mu^*(k) c_r(k) \langle a_g | a_{rk} \rangle \quad (4.180)$$

$$\delta' e^{i\tau'} := \int dk \mu^*(k) c'_r(k) \langle a_g | a'_{rk} \rangle \quad (4.181)$$

$$\zeta e^{i\eta} := \int dk c_r^*(k) c'_r(k) \langle a_{rk} | a'_{rk} \rangle \quad (4.182)$$

Definitie 4.178 van grootheid $\gamma e^{i\varphi}$ vinden we ook al in paragraaf 4.3 van dit hoofdstuk (zie 4.53 en 4.56). Zij is hier voor de duidelijkheid nogmaals vermeld. Op grond van de eerder gevonden identiteit 4.158 kunnen we nu nog schrijven:

$$\begin{aligned} \int dk c_z^*(k) c'_z(k) \langle a_{zk} | a'_{zk} \rangle &= \int dk \mu^*(k) \lambda(k) - \int dk c_r^*(k) c'_r(k) \langle a_{rk} | a'_{rk} \rangle = \\ &= \sigma e^{i\theta} - \zeta e^{i\eta} \end{aligned} \quad (4.183)$$

Precies zoals we in paragraaf 4.3 de ongelijkheid 4.54 hebben gevonden, vinden we hier de volgende ongelijkheden:

$$0 \leq \gamma \leq \sqrt{a} \quad (4.184)$$

$$0 \leq \delta \leq \sqrt{a} \quad (4.185)$$

$$0 \leq \gamma' \leq \sqrt{a'} \quad (4.186)$$

$$0 \leq \delta' \leq \sqrt{a'} \quad (4.187)$$

Met de hierboven ingevoerde definities laten zich de kansen p_A , p_B en p_Z schrijven als:

$$\begin{aligned} p_A = & \frac{1}{4}(1 + a' - e^{-i\chi}\gamma'e^{-i\varphi'} - e^{i\chi}\gamma'e^{i\varphi'})|\alpha|^2 + \\ & + \frac{1}{4}(-i\sigma e^{-i\theta} + i\zeta e^{-i\eta} + ie^{-i\chi}\delta'e^{-i\tau'} - ie^{i\chi}\gamma e^{i\varphi})\alpha^*\beta + \\ & + \frac{1}{4}(i\sigma e^{i\theta} - i\zeta e^{i\eta} - ie^{i\chi}\delta'e^{i\tau'} + ie^{-i\chi}\gamma e^{-i\varphi})\alpha\beta^* + \\ & + \frac{1}{4}(1 + a + e^{-i\chi}\delta e^{-i\tau} + e^{i\chi}\delta e^{i\tau})|\beta|^2 \end{aligned} \quad (4.188)$$

$$\begin{aligned} p_B = & \frac{1}{4}(1 + a' + e^{-i\chi}\gamma'e^{-i\varphi'} + e^{i\chi}\gamma'e^{i\varphi'})|\alpha|^2 + \\ & + \frac{1}{4}(-i\sigma e^{-i\theta} + i\zeta e^{-i\eta} - ie^{-i\chi}\delta'e^{-i\tau'} + ie^{i\chi}\gamma e^{i\varphi})\alpha^*\beta + \\ & + \frac{1}{4}(i\sigma e^{i\theta} - i\zeta e^{i\eta} + ie^{i\chi}\delta'e^{i\tau'} - ie^{-i\chi}\gamma e^{-i\varphi})\alpha\beta^* + \\ & + \frac{1}{4}(1 + a - e^{-i\chi}\delta e^{-i\tau} - e^{i\chi}\delta e^{i\tau})|\beta|^2 \end{aligned} \quad (4.189)$$

$$\begin{aligned} p_Z = & \frac{1}{2}(1 - a')|\alpha|^2 + \frac{1}{2}i(\sigma e^{-i\theta} - \zeta e^{-i\eta})\alpha^*\beta + \\ & - \frac{1}{2}i(\sigma e^{i\theta} - \zeta e^{i\eta})\alpha\beta^* + \frac{1}{2}(1 - a)|\beta|^2 \end{aligned} \quad (4.190)$$

We merken op dat

$$p_A + p_B + p_Z = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4.191)$$

zoals ook moet. Het ligt voor de hand de uitdrukkingen verder te vereenvoudigen m.b.v. de volgende definities:

$$\nu := \varphi + \chi \quad (4.192)$$

$$\nu' := \varphi' + \chi \quad (4.193)$$

$$\kappa := \tau + \chi \quad (4.194)$$

$$\kappa' := \tau' + \chi \quad (4.195)$$

We moeten nu, als voorheen, de volgende identificaties maken:

$$p_A = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_A \quad (4.196)$$

$$p_B = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_B \quad (4.197)$$

$$p_Z = \text{Tr } \underline{\rho}_{in} \underline{M}_Z \quad (4.198)$$

met $\underline{\rho}_{in}$ de 2×2 matrix gegeven door 4.8. Bovenstaande vergelijkingen leggen dan een POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ vast waarvoor geldt:

$$\underline{M}_A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a' - 2\gamma' \cos \nu' & -i\sigma e^{-i\theta} + i\delta' e^{-i\kappa'} - i\gamma e^{i\nu} + i\zeta e^{-i\eta} \\ i\sigma e^{i\theta} - i\delta' e^{i\kappa'} + i\gamma e^{-i\nu} - i\zeta e^{i\eta} & 1 + a + 2\delta \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (4.199)$$

$$\underline{M}_B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + a' + 2\gamma' \cos \nu' & -i\sigma e^{-i\theta} - i\delta' e^{-i\kappa'} + i\gamma e^{i\nu} + i\zeta e^{-i\eta} \\ i\sigma e^{i\theta} + i\delta' e^{i\kappa'} - i\gamma e^{-i\nu} - i\zeta e^{i\eta} & 1 + a - 2\delta \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

$$\underline{M}_Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - a' & i\sigma e^{-i\theta} - i\zeta e^{-i\eta} \\ -i\sigma e^{i\theta} + i\zeta e^{i\eta} & 1 - a \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

De vraag is nu, of het experiment nog is te interpreteren als gezamenlijke niet-ideale meting van twee als "pad" en "interferentie" identificeerbare observabelen. Het ligt voor de hand om daartoe eerst te bekijken waartoe de POWM reduceert in de twee extreme gevallen van perfecte absorptie en perfecte transmissie.

Alle neutronen worden geabsorbeerd: $a = a' = 0$. In het geval dat alle neutronen door de absorber worden geabsorbeerd, zal moeten gelden:

$$a = a' = 0 \quad (4.202)$$

We zien met 4.163 en 4.164 dat dit betekent dat

$$c_r(k) = c'_r(k) = 0 \quad \text{voor bijna alle } k \quad (4.203)$$

waarmee tevens geldt:

$$\delta = \delta' = \gamma = \gamma' = \zeta = 0 \quad (4.204)$$

Onze POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ reduceert nu tot $\{\frac{1}{2}\tilde{\underline{P}}_+, \frac{1}{2}\tilde{\underline{P}}_+, \tilde{\underline{P}}_-\}$ met:

$$\tilde{\underline{P}}_+ := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i\sigma e^{-i\theta} \\ i\sigma e^{i\theta} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

$$\tilde{\underline{P}}_- := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i\sigma e^{-i\theta} \\ -i\sigma e^{i\theta} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.206)$$

Nu representeert $\{\tilde{\underline{P}}_+, \tilde{\underline{P}}_-\}$ de best haalbare pad-meting, omdat alle in D_A of D_B gedetecteerde neutronen de linker bundel hebben "gekozen" na de eerste beamsplitter. Anders dan voorheen is $\{\tilde{\underline{P}}_+, \tilde{\underline{P}}_-\}$ in het algemeen echter geen PWM maar een POWM, die bovendien van σ en θ afhangt. We gaan namelijk gemakkelijk na dat geldt:

$$\tilde{\underline{P}}_+ + \tilde{\underline{P}}_- = \underline{I} \quad (4.207)$$

$$\tilde{\underline{P}}_+^2 = \tilde{\underline{P}}_+ - \frac{1}{4}(1 - \sigma^2)\underline{I} \quad (4.208)$$

waarin \underline{I} de eenheidsoperator is. Aangezien een projectie noodzakelijk idempotent is, kan $\{\tilde{\underline{P}}_+, \tilde{\underline{P}}_-\}$ dus slechts een PWM zijn als $\sigma^2 = 1$. Het feit dat de best haalbare pad-meting in dit geval wordt gerepresenteerd door een POWM in plaats van een PWM, is als volgt te begrijpen. σ (zie definitie 4.177) is een maat voor de interferentie tussen de beide invallende bundels $|L\rangle$ en $|R\rangle$. In het geval $\sigma = 0$ is er geen interferentie mogelijk tussen bijdragen $|R\rangle$ en $|R'\rangle$ in de rechter bundel, omdat dan $|R\rangle \perp |R'\rangle$:

$$\sigma e^{i\theta} = \int dk \mu^*(k)\lambda(k) = \langle R|R'\rangle = 0 \quad (4.209)$$

Hetzelfde geldt voor de bijdragen $|L\rangle$ en $|L'\rangle$ in de linker bundel. We krijgen als $\sigma = 0$ inderdaad een resultaat voor $\tilde{\underline{P}}_+$ dat hiermee in overeenstemming is:

$$\tilde{\underline{P}}_+ = \frac{1}{2}\underline{I} \quad (4.210)$$

Want voor de kans p_+ om na de eerste beamsplitter de linker bundel te kiezen, vinden we:

$$p_+ = \text{Tr} \underline{\rho}_{in} \tilde{\underline{P}}_+ = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{2} \quad (4.211)$$

Dit is precies wat je klassiek zou verwachten: beide bundels worden exact in tweeën gesplitst, zodat precies de helft van de neutronen de linker bundel "kiest" na de eerste beamsplitter, en de andere helft de rechter bundel. Er is dan ook voor $\sigma = 0$ geen sprake van interferentie, zodat de typisch quantummechanische effecten die deze teweeg kan brengen, niet optreden. Het andere uiterste is het geval $\sigma = 1$. Zoals we dat bij de discussie van het geval $\gamma = \sqrt{a}$ in paragraaf 4.3 hebben gedaan, kunnen we nu een argument gebruiken dat stoelt op de strikte Cauchy-Schwartz ongelijkheid. Dit levert dan de conclusie dat $\lambda(k) = e^{i\xi}\mu(k)$ voor bijna alle k , waarin ξ onafhankelijk is van k . Ingevuld in de definities zien we dan dat $|L\rangle$ en $|R\rangle$, afgezien van hun ruimtelijke posities en richingen, en afgezien van een oninteressante fasefactor $e^{i\xi}$, dezelfde spectrale samenstelling hebben. Hier hebben we dus het verhaal van paragraaf 4.3 terug, waarin we de bundels inderdaad op dezelfde manier spectraal samenstelden. En waarin de best haalbare pad-meting inderdaad werd beschreven door een PWM: $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ (zie 1.15 en 1.16).

We zien nu uit het bovenstaande dat de situatie waarin de pad-meting een PWM is, zeer uitzonderlijk is: De beide bundels (golfpakketten) $|L\rangle$ en $|R\rangle$ moeten op identieke wijze uit vlakke golven $|L_k\rangle$ respectievelijk $|R_k\rangle$ zijn opgebouwd.

Het ligt nu voor de hand om $\{\underline{P}_+, \underline{P}_-\}$ te identificeren als "pad-observabele". Omdat deze POWM bestaat uit twee operatoren, kunnen we haar (door diagonalisatie) in principe schrijven als een niet-ideale meting van een PWM (Ref[2]). Deze PWM blijkt echter nog van θ afhankelijk, zodat ons dit verder niet zinvol leek.

Alle neutronen doorgelaten: $a = a' = 1$. In het geval dat alle neutronen worden doorgelaten zal moeten gelden:

$$a = a' = 1 \quad (4.212)$$

We moeten dan kiezen (zie definities 4.163 en 4.164 en normeringseisen 4.157):

$$c_z(k) = c'_z(k) = 0 \quad \text{voor bijna alle } k \quad (4.213)$$

Met 4.183 zien we dat dit impliceert:

$$\sigma e^{i\theta} = \zeta e^{i\eta} \quad (4.214)$$

De POWM $\{\underline{M}_A, \underline{M}_B, \underline{M}_Z\}$ reduceert nu tot $\{\underline{\tilde{Q}}_A, \underline{\tilde{Q}}_B, \underline{O}\}$ met

$$\underline{\tilde{Q}}_A := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 - 2\gamma' \cos \nu' & i\delta' e^{-i\kappa'} - i\gamma e^{i\nu} \\ -i\delta' e^{i\kappa'} + i\gamma e^{-i\nu} & 2 + 2\delta \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

$$\underline{\tilde{Q}}_B := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 + 2\gamma' \cos \nu' & -i\delta' e^{-i\kappa'} + i\gamma e^{i\nu} \\ i\delta' e^{i\kappa'} - i\gamma e^{-i\nu} & 2 - 2\delta \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (4.216)$$

We kunnen weer gemakkelijk nagaan dat $\{\underline{\tilde{Q}}_A, \underline{\tilde{Q}}_B\}$ een POWM is, die weer van een aantal parameters afhankelijk is. Het best mogelijke interferentie-experiment wordt dus niet beschreven door een PWM. Wij zullen de POWM $\{\underline{\tilde{Q}}_A, \underline{\tilde{Q}}_B\}$ identificeren als "interferentie-observabele". Deze POWM kan ook weer (door diagonalisatie) geschreven worden als niet-ideale meting van een PWM. Doch de aldus gevonden PWM blijkt van de parameters af te hangen, zodat ons dit niet zinvol leek.

Door bovenstaande identificaties te maken, zijn de nieuwe pad- en interferentie-observabelen nu dus POWM's i.p.v. PWM's. Omdat PWM's in het formalisme echter

geen voorkeursrol spelen, is dit op zich geen bezwaar, temeer daar de door diagonalisatie gevonden PWM's ook behept zijn met parameterafhankelijkheid. Wij zullen ons dan ook in de volgende subparagraaf concentreren op de vraag of het experiment nog is te interpreteren als gezamenlijke niet-ideale meting van *deze* twee observabelen.

Is de meting een gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie"? Wij zoeken nu een bivariate POWM waarvan de marginales niet-ideale metingen zijn van de gevonden pad-observabele $\{\tilde{P}_+, \tilde{P}_-\}$ en de interferentie-observabele $\{\tilde{Q}_A, \tilde{Q}_B\}$. Deze POWM $\{\underline{R}_{mn}\}$ met

$$\underline{R}_{mn} = \begin{bmatrix} \underline{R}_{11} & \underline{R}_{12} \\ \underline{R}_{21} & \underline{R}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.217)$$

zal dan moeten voldoen aan:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{11} + \underline{R}_{12} \\ \underline{R}_{21} + \underline{R}_{22} \end{bmatrix} = (\lambda_{mk}) \begin{bmatrix} \tilde{P}_+ \\ \tilde{P}_- \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{11} + \underline{R}_{21} \\ \underline{R}_{12} + \underline{R}_{22} \end{bmatrix} = (\mu_{nl}) \begin{bmatrix} \tilde{Q}_A \\ \tilde{Q}_B \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

waarin (λ_{mk}) en (μ_{nl}) niet-idealiteitsmatrices zijn voor respectievelijk de pad-meting en de interferentie-meting. Het ligt voor de hand weer de volgende bivariate maat te proberen:

$$\underline{R}_{mn} = \begin{bmatrix} \underline{M}_A & \underline{M}_B \\ \frac{1}{2}\underline{M}_Z & \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

Inderdaad levert één marginaal een niet-ideale (zelfs ideale) "interferentie"-meting op, waarbij we natuurlijk $\{\tilde{Q}_A, \tilde{Q}_B\}$ moeten zien als "interferentie"-observabele:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \\ \underline{M}_B + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_A \\ \tilde{Q}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_A \\ \tilde{Q}_B \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

De andere marginaal echter, is *geen* niet-ideale "pad"-meting², waarbij we natuurlijk $\{\tilde{P}_+, \tilde{P}_-\}$ als "pad"-observabele beschouwen. Dan zou namelijk \underline{M}_Z te schrijven moeten zijn als een reële lineaire combinatie $s\tilde{P}_+ + t\tilde{P}_-$ (zelfs met $0 \leq s \leq 1$ en $0 \leq t \leq 1$):

$$s\tilde{P}_+ + t\tilde{P}_- = \underline{M}_Z \quad (4.222)$$

Vullen we hierin de gelijkheden 4.205, 4.206 en 4.201 in dan zien we dat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}s \begin{bmatrix} 1 & -i\sigma e^{-i\theta} \\ i\sigma e^{i\theta} & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t \begin{bmatrix} 1 & i\sigma e^{i\theta} \\ -i\sigma e^{-i\theta} & 1 \end{bmatrix} &= \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - a' & i\sigma e^{-i\theta} - i\zeta e^{-i\eta} \\ -i\sigma e^{-i\theta} + i\zeta e^{i\eta} & 1 - a \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.223)$$

Dit impliceert onder andere dat:

$$s + t = 1 - a' \quad (4.224)$$

$$s + t = 1 - a \quad (4.225)$$

²Ook niet als we $\{\tilde{P}_+, \tilde{P}_-\}$ diagonaliseren.

Het is duidelijk dat dit stelsel strijdig is, tenzij $a = a'$. We kunnen ons afvragen of misschien een andere bivariante maat geschikt is als gezamenlijke niet-ideale meting van onze twee observabelen "pad" en "interferentie". Om dit te onderzoeken proberen we het volgende. Wij zoeken naar reële³ lineaire combinaties van \underline{M}_A , \underline{M}_B en \underline{M}_Z die een niet-ideale meting van pad-observabele $\{\tilde{P}_+, \tilde{P}_-\}$ representeren. Er zou dan een niet-triviale set reële getallen p' , q' , r' , s' en t' moeten bestaan zo dat:

$$p'\underline{M}_A + q'\underline{M}_B + r'\underline{M}_Z = s'\tilde{P}_+ + t'\tilde{P}_- \quad (4.226)$$

Omdat $\underline{M}_B = \underline{I} - \underline{M}_A - \underline{M}_Z$ en $\tilde{P}_- = \underline{I} - \tilde{P}_+$ kunnen we onze vraag aldus formuleren. Zijn er niet-triviale reële getallen p , q , r en s zo dat geldt:

$$p\underline{M}_A + q\underline{M}_Z + r\tilde{P}_+ + s\underline{I} = \underline{O} \quad (4.227)$$

Dit laat zich uitschrijven als:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}p \begin{bmatrix} 1 + a' - 2\gamma' \cos \nu' & -i\sigma e^{-i\theta} + i\delta' e^{-i\kappa'} - i\gamma e^{i\nu} + i\zeta e^{-i\eta} \\ i\sigma e^{i\theta} - i\delta' e^{i\kappa'} + i\gamma e^{-i\nu} - i\zeta e^{i\eta} & 1 + a + 2\delta \cos \kappa \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2}q \begin{bmatrix} 1 - a' & i\sigma e^{-i\theta} - i\zeta e^{-i\eta} \\ -i\sigma e^{i\theta} + i\zeta e^{i\eta} & 1 - a \end{bmatrix} + \frac{1}{2}r \begin{bmatrix} 1 & -i\sigma e^{-i\theta} \\ i\sigma e^{i\theta} & 1 \end{bmatrix} + \\ + s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.228)$$

Dit levert een stelsel van twee reële en één complexe vergelijking op. De twee reële vergelijkingen luiden:

$$\frac{1}{4}(1 + a' - 2\gamma' \cos \nu')p + \frac{1}{2}(1 - a')q + \frac{1}{2}r + s = 0 \quad (4.229)$$

$$\frac{1}{4}(1 + a + 2\delta \cos \kappa)p + \frac{1}{2}(1 - a)q + \frac{1}{2}r + s = 0 \quad (4.230)$$

En de complexe vergelijking luidt:

$$\frac{1}{4}(-i\sigma e^{-i\theta} + i\delta' e^{-i\kappa'} - i\gamma e^{i\nu} + i\zeta e^{-i\eta})p + \frac{1}{2}(i\sigma e^{-i\theta} - i\zeta e^{-i\eta})q - \frac{1}{2}i\sigma e^{-i\theta}r = 0 \quad (4.231)$$

Door vergelijking 4.231 uit te schrijven in haar reële en imaginaire deel, vinden we vier homogene reële vergelijkingen in de onbekenden p , q , r en s . Deze vier vergelijkingen hebben dan en slechts dan een niet-triviale oplossing als de determinant op de coëfficiënten 0 is. Deze determinant, noem haar D , is gegeven door:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}(1 + a' - 2\gamma' \cos \nu') & \frac{1}{2}(1 - a') & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4}(-\sigma \sin \theta + \delta' \sin \kappa' + \gamma \sin \nu + \zeta \sin \eta) & \frac{1}{2}(\sigma \sin \theta - \zeta \sin \eta) & -\frac{1}{2}\sigma \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{4}(-\sigma \cos \theta + \delta' \cos \kappa' - \gamma \cos \nu + \zeta \cos \eta) & \frac{1}{2}(\sigma \cos \theta - \zeta \cos \eta) & -\frac{1}{2}\sigma \cos \theta & 0 \\ \frac{1}{4}(1 + a + 2\delta \cos \kappa) & \frac{1}{2}(1 - a) & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \quad (4.232)$$

³Reëel om de hermiticiteit van de bivariante maat te waarborgen.

D laat zich aldus uitwerken:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} \frac{1}{4}(a' - 2\gamma' \cos \nu') & -\frac{1}{2}a' & 0 & 1 \\ \frac{1}{4}(\delta' \sin \kappa' + \gamma \sin \nu + \zeta \sin \eta) & -\frac{1}{2}\zeta \sin \eta & -\frac{1}{2}\sigma \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{4}(\delta' \cos \kappa' - \gamma \cos \nu + \zeta \cos \eta) & -\frac{1}{2}\zeta \cos \eta & -\frac{1}{2}\sigma \cos \theta & 0 \\ \frac{1}{4}(a + 2\delta \cos \kappa) & -\frac{1}{2}a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(-\gamma' \cos \nu' - \delta \cos \kappa) & \frac{1}{2}(a - a') & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}(\delta' \sin \kappa' + \gamma \sin \nu) & -\frac{1}{2}\zeta \sin \eta & -\frac{1}{2}\sigma \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{4}(\delta' \cos \kappa' - \gamma \cos \nu) & -\frac{1}{2}\zeta \cos \eta & -\frac{1}{2}\sigma \cos \theta & 0 \\ \frac{1}{2}\delta \cos \kappa & -\frac{1}{2}a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(-\gamma' \cos \nu' - \delta \cos \kappa) & \frac{1}{2}(a - a') & 0 \\ \frac{1}{4}(\delta' \sin \kappa' + \gamma \sin \nu) & -\frac{1}{2}\zeta \sin \eta & -\frac{1}{2}\sigma \sin \theta \\ \frac{1}{4}(\delta' \cos \kappa' - \gamma \cos \nu) & -\frac{1}{2}\zeta \cos \eta & -\frac{1}{2}\sigma \cos \theta \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{8}\sigma \left[\zeta(\gamma' \cos \nu' + \delta \cos \kappa) \sin(\theta - \eta) - \frac{1}{2}(a - a')[\delta' \sin(\theta - \kappa') - \gamma \sin(\theta - \nu)] \right]
\end{aligned} \tag{4.233}$$

We zien dat D in het algemeen ongelijk 0 is, zodat we slechts de triviale oplossing $p = q = r = s = 0$ vinden.

We concluderen uit dit alles dat er op de hierboven geschetste manier *geen geschikte* bivariante maat te construeren is, zodanig dat haar marginalen te interpreteren zijn als niet-ideale metingen van de boven gedefinieerde "pad"- en "interferentie"-observabele.

Het is verder eenvoudig in te zien dat deze conclusie ook geldig blijft als we de POWM's van de pad- en interferentie-meting schrijven als niet-ideale metingen van PWM's: Op de boven geschetste manier is de meting ook geen gezamenlijke niet-ideale meting van de twee aldus te vormen PWM's.

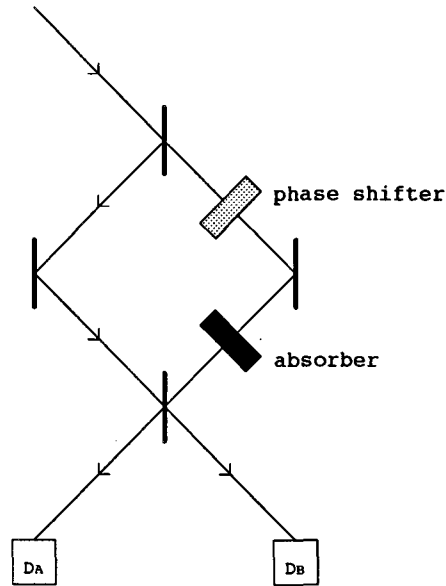
Een interessante vraag is nu, waarom de meting in paragraaf 4.3 van dit hoofdstuk nog wel was te interpreteren als een niet-ideale pad-meting. In ieder geval zal de determinant D die boven werd ingevoerd 0 moeten zijn. Dit zullen we controleren. De behandeling die in deze paragraaf gegeven is, moet reduceren tot het geval van paragraaf 4.3 als we kiezen:

$$\lambda(k) = \mu(k) \quad \text{voor alle } k \tag{4.234}$$

We hebben in deze paragraaf steeds een onderscheid moeten maken tussen grootheden en toestanden die van een accentje (') zijn voorzien, en die zonder accentje. Dit onderscheid vervalst onder de in paragraaf 4.3 vigerende conditie 4.234. Uit 4.177 zien we dan dat $\sigma = 1$ en $\theta = 0$, want $\int dk |\lambda(k)|^2 = 1$. Verder zien we uit 4.163 en 4.164 dat $a = a'$ en uit 4.182 concluderen we dat $\zeta = a$ en $\eta = 0$. We zien dus in dat onder deze condities $a - a' = 0$ en $\sin(\theta - \eta) = 0$, zodat inderdaad $D = 0$ onder de condities van paragraaf 4.3.

Er is nog een situatie waarin $D = 0$ zal moeten zijn, namelijk het geval $a = a' = 0$ dat ons tot de identificatie van de pad-observabele $\{\tilde{P}_+, \tilde{P}_-\}$ bracht. We hebben daarbij onder andere vastgesteld dat $\delta = \delta' = \gamma = \gamma' = \zeta = 0$. Gesubstitueerd in de uitdrukking 4.233 voor D zien we dat inderdaad weer $D = 0$.

De visibility als maat voor de interferentie. We kunnen nu, als maat voor de kwaliteit van de interferentie, de visibility uitrekenen van de interferentiepatronen



Figuur 4.4: Deze opzet van het experiment laat ook een definitie van visibility toe, net als in Figuur 2.2.

bij de detectoren D_A en D_B . Als we daartoe eerst het experiment met $\alpha = 0$ en $\beta = 1$ bekijken, zoals we dat steeds in de vorige hoofdstukken hebben gedaan, dan vinden we voor zowel V_A als V_B :

$$V_A = V_B = \frac{2\delta}{1+a} \quad (4.235)$$

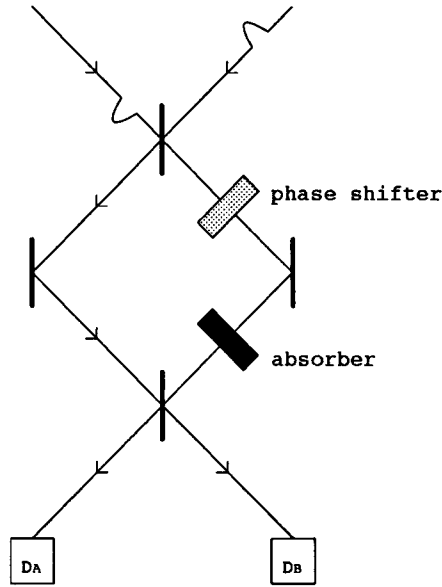
Maar als we het experiment zo inrichten dat $\alpha = 1$ en $\beta = 0$ (zie Figuur 4.4), dan vinden we:

$$V_A = V_B = \frac{2\gamma'}{1+a'} \quad (4.236)$$

Het is niet moeilijk te begrijpen waarom in het eerste geval slechts niet-geaccentueerde grootheden in de visibility verschijnen en in het tweede geval uitsluitend geaccentueerde. Als $\alpha = 0$ en $\beta = 1$ dan komt $|L\rangle$ helemaal niet in de begintoestand $|\psi_{in}\rangle$ (zie 4.7) voor. De begintoestand is dan eenvoudig $|\psi_{in}\rangle = |R\rangle$. De interactie met de eerste beamsplitter heeft de gedaante 4.151, zodat de absorber slechts wisselwerkt met golfpakketten $|R\rangle$ en niet met $|R'\rangle$. Dit heeft tot gevolg dat de geaccentueerde toestanden $|a'_{rk}\rangle$ en $|a'_{zk}\rangle$, alsmede de ontwikkelingscoëfficiënten $c'_r(k)$ en $c'_z(k)$, uit de berekening van de detectiekansen verdwijnen. Aan de definities 4.179 en 4.181 zien we dat dan ook geen van de geaccentueerde grootheden γ' , φ' , δ' of τ' voorkomt in de uitdrukking voor de detectiekansen, zodat de visibility deze grootheden ook niet zal bevatten. In het geval $\alpha = 1$ en $\beta = 0$ kunnen we analogo redeneren.

Het verschil tussen beide gevonden visibilities hangt ten nauwste samen met het feit dat we hebben aangenomen dat het resultaat van de wisselwerking van de absorber met verschillende golfpakketten $|R\rangle$ en $|R'\rangle$, verschillend is.

Op grond van de ongelijkheden 4.185 en 4.186 zien we in dat de best haalbare visibility in het algemeen niet zal kunnen worden bereikt. Immers, in het eerste geval zal moeten gelden $\delta = \sqrt{a}$ en, redenerend als in paragraaf 4.3 van dit hoofdstuk, levert dit een eis als 4.89, waaraan in het algemeen niet zal zijn voldaan. Om dezelfde reden is de eis die we in het tweede geval zouden moeten stellen, $\gamma' = \sqrt{a'}$, i.h.a. evenmin een haalbare eis.



Figuur 4.5: Links en rechts vallen golfpakketten in die, behalve in richting, identiek zijn op slechts een ruimtelijke verschuiving s na.

De invallende golfpakketten in ruimtelijke zin verschoven t.o.v. elkaar; een analytische berekening van de relevante grootheden. De behandeling van het experiment m.b.v. identieke invallende bundels bleek (zie 4.142), onder zeer speciale condities, analytisch uitvoerbaar. Ook in het geval van verschillende invallende bundels is er een situatie waarin zo'n analytische berekening mogelijk is. Net als in paragraaf 4.3 beperken we ons tot het ééndimensionale geval waarbij de k - en l -integraties enkelvoudige integraties zijn. We bekijken de situatie waarin het golfpakket $|R\rangle$ een afstand s is verschoven t.o.v. het golfpakket $|L\rangle$. Hiermee kunnen we modelleren dat golfpakket $|R\rangle$ iets later (of vroeger, afhankelijk van het teken van s) invalt dan golfpakket $|L\rangle$. Zie Figuur 4.5. Dankzij de ééndimensionale formulering kunnen we $|R_k\rangle$ en $|L_k\rangle$ opvatten als vlakke golven $\sim e^{ikx}$, en laat zich de verschuiving dus schrijven als:

$$\mu(k) = e^{iks} \lambda(k) \quad (4.237)$$

Op fysische gronden laat zich een eenvoudig verband inzien tussen $\gamma'_r(k, l)$ en $\gamma_r(k, l)$, de ontwikkelingscoëfficiënten die mede de interactie met de absorber bepalen. Hierbij treedt de ontwikkelingscoëfficiënt $\gamma'_r(k, l)$ op bij de interactie 4.153 van een golfpakket $|R'\rangle$ en de absorber, $\gamma_r(k, l)$ bij de interactie van $|R\rangle$ en de absorber. Op de ruimtelijke verschuiving s na zijn $|R'\rangle$ en $|R\rangle$ identiek. Dit betekent dat de toestand van het gecombineerd systeem van neutronen en absorber na de interactie, ook slechts een verschuiving s van de neutronen mag verschillen (zie figuur 4.6).

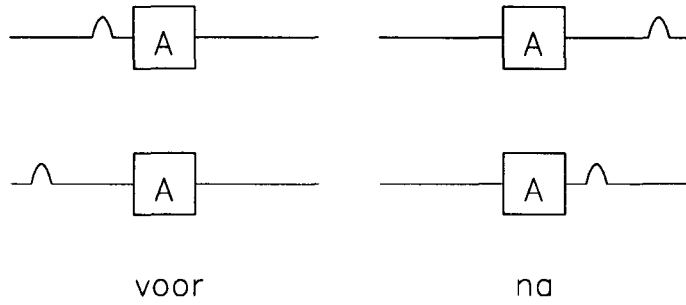
Op fysische gronden kunnen we dus het volgende, eenvoudige verband poneren:

$$\gamma_r(k, l) = e^{iks} \gamma'_r(k, l) \quad (4.238)$$

Dit betekent meteen al dat $a = a'$:

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl |\gamma_r(k, l)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl |\gamma'_r(k, l)|^2 = a' \quad (4.239)$$

hetgeen klopt met onze fysische intuïtie die zegt dat een ruimtelijke verschuiving van de golfpakketten geen invloed mag hebben op de doorlaatkans.



Figuur 4.6: Een ruimtelijke verschuiving van het golfpakket vóór de interactie kan slechts aanleiding geven tot dezelfde verschuiving erna (A=absorber).

Gelijkheid 4.239 impliceert tevens een eenvoudig verband tussen $c'_r(k)|a'_{rk}\rangle$ en $c_r(k)|a_{rk}\rangle$, die in resp. 4.154 en 4.17 zijn gedefinieerd:

$$c_r(k)|a_{rk}\rangle = e^{iks} c'_r(k)|a'_{rk}\rangle \quad (4.240)$$

Wij substitueren nu 4.237 en 4.240 in de set definities op pagina 71, en vinden:

$$\sigma e^{i\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iks} |\lambda(k)|^2 \quad (4.241)$$

$$\gamma e^{i\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iks} \lambda^*(k) c'_r(k) \langle a_g | a'_{rk} \rangle \quad (4.242)$$

$$\gamma' e^{i\varphi'} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \lambda^*(k) c'_r(k) \langle a_g | a'_{rk} \rangle \quad (4.243)$$

$$\delta e^{i\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \lambda^*(k) c'_r(k) \langle a_g | a'_{rk} \rangle \quad (4.244)$$

$$\delta' e^{i\tau'} = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iks} \lambda^*(k) c'_r(k) \langle a_g | a'_{rk} \rangle \quad (4.245)$$

$$\zeta e^{i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iks} |c'_r(k)|^2 \quad (4.246)$$

We kunnen zo al vaststellen dat

$$\gamma' e^{i\varphi'} = \delta e^{i\tau} \quad (4.247)$$

Dit betekent dat de beide visibiliteiten die in 4.235 en 4.236 werden gedefinieerd, aan elkaar gelijk zijn. Dit moet natuurlijk ook, aangezien de visibiliteiten zijn gedefinieerd voor de fysische situaties waarbij met slechts één bundel ($|R\rangle$ of $|L\rangle$) wordt gewerkt. Een ruimtelijke verschuiving van de golfpakketten t.o.v. elkaar, heeft dan geen invloed, omdat deze verschuiving slechts invloed heeft op het tijdstip van invallen op de interferometer, terwijl anderszins de beide experimenten volkomen gelijkwaardig zijn.

We zullen nu dezelfde speciale keuze maken voor de golfpakketten en voor de interactie als we dat eerder in paragraaf 4.3 deden. Het profiel $\lambda(k)$ zal worden gegeven door 4.139, de interactie (wat de doorgelaten neutronen betreft) door $\beta_r(k)$ (zie 4.141). In vergelijkingen 4.134 en 4.135 moeten we nu $\gamma_r(k, l)$ en $\gamma_z(k, l)$ van een accentje voorzien, omdat we uitgingen van een golfpakket (in de rechter bundel) met spectraal profiel $\lambda(k)$ dat wisselwerkt met de absorber. In de beschrijving met verschillende invallende bundels hebben we dit golfpakket $|R'\rangle$ genoemd (zie definitie 4.148). Vergelijkingen 4.134 en 4.135 worden dus:

$$\gamma'_r(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \lambda(k - k') \alpha_g(l + k') \beta_r(k') \quad (4.248)$$

$$\gamma'_z(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \lambda(k - k') \alpha_g(l + k') \beta_z(k') \quad (4.249)$$

Wij kunnen nu 4.248 en 4.249 substitueren in de gelijkheden 4.241 t/m 4.246, waarmee we deze grootheden in principe kunnen berekenen. De berekening van de relevante grootheden is echter nogal gecompliceerd en omslachtig. Voor de volledigheid is zij opgenomen in de Appendix. Uit het reël zijn van de gekozen profielen volgen wel de eenvoudige relaties:

$$\varphi' = \tau = 0 \quad (4.250)$$

$$\gamma e^{i\varphi} = \delta' e^{-i\tau'} \quad (4.251)$$

Hieronder vindt men de resultaten van de berekeningen opgesomd:

$$\gamma' = \delta = \sqrt{a} \left[\frac{2tu [(t^2 + u^2)v^2 + t^2u^2]^{\frac{1}{2}}}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2u^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{4} \frac{(t^2 + u^2)m_0^2}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2u^2} \right] \quad (4.252)$$

$$\sigma = \exp \left[-\frac{1}{2} t^2 s^2 \right] \quad (4.253)$$

$$\gamma = \delta' = \exp \left[\frac{-t^2 \left[\left(\frac{1}{2} t^2 + u^2 \right) v^2 + t^2 u^2 \right] s^2}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2u^2} \right] \gamma' \quad (4.254)$$

$$\zeta = a \exp \left[\frac{- \left[t^2 u^2 v^2 + \frac{1}{2} v^2 (t^2 + v^2) (t^2 + u^2) + t^4 u^2 \right] s^2}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2u^2} \right] \quad (4.255)$$

$$\theta = -sk_0 \quad (4.256)$$

$$\eta = -s(k_0 + m_0) \quad (4.257)$$

$$\varphi = -\tau' = s \left[k_0 + \frac{m_0 t^2 u^2}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2u^2} \right] \quad (4.258)$$

De bovenstaande uitdrukkingen spreken niet erg aan vanwege hun complexiteit. We kunnen echter wel een belangrijke conclusie trekken m.b.t. de meting. De determinant D (zie 4.233) kan voor dit speciale geval als volgt worden vereenvoudigd. We vinden met 4.241 t/m 4.246:

$$\nu = \varphi + \chi \quad (4.259)$$

$$\nu' = \varphi' + \chi = \chi \quad (4.260)$$

$$\kappa = \tau + \chi = \chi \quad (4.261)$$

$$\kappa' = \tau' + \chi = -\varphi + \chi \quad (4.262)$$

Met 4.256 en 4.257 vinden we nog:

$$\theta - \eta = sm_0 \quad (4.263)$$

Omdat verder $\delta = \gamma'$ en $a = a'$ laat zich uitdrukking 4.233 voor D als volgt vereenvoudigen:

$$D = \frac{1}{4} \sigma \zeta \gamma' \cos \chi \sin(sm_0) \neq 0 \quad \text{i.h.a.} \quad (4.264)$$

Wij stellen vast dat de in deze paragraaf gebezigde methode ons zelfs in dit eenvoudige geval, waarin de invallende bundels slechts een ruimtelijke verschuiving verschillen, i.h.a. niet in staat stelt de meting te interpreteren als gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie".

Wat meet de bivariante maat 4.220 wèl? We hebben dus vastgesteld dat de bivariante maat 4.220 niet geschikt is als gezamenlijke niet-ideale meting van de boven geïdentificeerde pad- en interferentie-observabele. Zij representeert echter wel een gezamenlijke niet-ideale meting van twee andere incompatibele observabelen. Deze kunnen gevonden worden door de marginalen van de bivariante maat te diagonaliseren:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \underline{M}_B \\ \underline{M}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 - \lambda_1 & 1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} =: (\lambda_{mk}) \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} \quad (4.265)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_A + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \\ \underline{M}_B + \frac{1}{2}\underline{M}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ 1 - \mu_1 & 1 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_1 \\ \underline{Q}_2 \end{bmatrix} =: (\mu_{nl}) \begin{bmatrix} \underline{Q}_1 \\ \underline{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.266)$$

Met de afkorting $W := \sqrt{\frac{1}{4}(a - a')^2 + |\sigma e^{-i\theta} - \zeta e^{-i\eta}|^2}$ krijgt de PWM $\{\underline{P}_1, \underline{P}_2\}$ de gedaante:

$$\underline{P}_1 = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(a - a') + \frac{1}{2}W & \frac{1}{2}(-i\sigma e^{-i\theta} + i\zeta e^{-i\eta}) \\ \frac{1}{2}(i\sigma e^{i\theta} - i\zeta e^{i\eta}) & \frac{1}{4}(a - a') + \frac{1}{2}W \end{bmatrix} \quad (4.267)$$

$$\underline{P}_2 = \underline{I} - \underline{P}_1 \quad (4.268)$$

En de elementen van de in 4.265 optredende niet-idealiteitsmatrix (λ_{mk}) zijn te vinden overeenkomstig:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(2 + a + a') \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(a - a')^2 + |\sigma e^{-i\theta} - \zeta e^{-i\eta}|^2} \quad (4.269)$$

Dit geeft een maat $\epsilon_{(\lambda)}$ voor de niet-idealiteit van de meting van $\{\underline{P}_1, \underline{P}_2\}$:

$$\epsilon_{(\lambda)} = 1 - |\lambda_1 - \lambda_2| = 1 - \sqrt{\frac{1}{4}(a - a')^2 + |\sigma e^{-i\theta} - \zeta e^{-i\eta}|^2} \quad (4.270)$$

Met de afkorting $V := \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma' \cos \nu' + \delta \cos \kappa)^2 + |\delta' e^{-i\kappa'} - \gamma e^{i\nu}|^2}$ vinden we voor de PWM $\{\underline{Q}_1, \underline{Q}_2\}$ de gedaante:

$$\underline{Q}_1 = \frac{1}{V} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(\gamma' \cos \nu' + \delta \cos \kappa) + \frac{1}{2}V & \frac{1}{4}(i\delta' e^{-i\kappa'} - i\gamma e^{i\nu}) \\ \frac{1}{4}(-i\delta' e^{i\kappa'} + i\gamma e^{-i\nu}) & \frac{1}{4}(\gamma' \cos \nu' + \delta \cos \kappa) + \frac{1}{2}V \end{bmatrix} \quad (4.271)$$

$$\underline{Q}_2 = \underline{I} - \underline{Q}_1 \quad (4.272)$$

De elementen van de niet-idealiteitsmatrix (μ_{nl}) van 4.266 kunnen worden gegeven als:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4}(2 - \gamma' \cos \nu' + \delta \cos \kappa) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(\gamma' \cos \nu' + \delta \cos \kappa)^2 + |\delta' e^{-i\kappa'} - \gamma e^{i\nu}|^2} \quad (4.273)$$

En dit levert een niet-idealiteitsmaat $\epsilon_{(\mu)}$ voor de meting van $\{\underline{Q}_1, \underline{Q}_2\}$:

$$\epsilon_{(\mu)} = 1 - |\mu_1 - \mu_2| = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma' \cos \nu' + \delta \cos \kappa)^2 + |\delta' e^{-i\kappa'} - \gamma e^{i\nu}|^2} \quad (4.274)$$

We stellen vast dat de meting is te interpreteren als een gezamenlijke niet-ideale meting van de boven gedefinieerde incompatibele observabelen $\{\underline{P}_1, \underline{P}_2\}$ en $\{\underline{Q}_1, \underline{Q}_2\}$. Uit de formules 4.267, 4.268, 4.271 en 4.272 blijkt dat deze observabelen van de parameters afhangen. Dit betekent dat er bij iedere combinatie van de parameters andere observabelen $\{\underline{P}_1, \underline{P}_2\}$ en $\{\underline{Q}_1, \underline{Q}_2\}$ niet-ideaal gemeten worden. Een fysische interpretatie van $\{\underline{P}_1, \underline{P}_2\}$ en $\{\underline{Q}_1, \underline{Q}_2\}$ is er vooralsnog niet.

Conclusies. Als we bij de uitvoering van het experiment twee (op hun richting en ruimtelijke positie na) identieke bundels gebruiken, is een interpretatie mogelijk als gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie". De resultaten blijken nauwelijks af te wijken van die van de vorige hoofdstukken. Er is weer sprake van decoherentie, maar met één verschil: Er is, naast vervorming van doorgelaten golfpakketten, een tweede mechanisme achter decoherentie, namelijk de pad-informatie die de absorber kan leveren als hij bij passage van het neutron in een "aangeslagen" toestand terechtkomt. Deze pad-informatie blijkt echter niet bruikbaar bij de interpretatie van het experiment, omdat zij in wezen al zit besloten in de detectie waarschijnlijkheden voor de neutronen.

Wanneer we twee verschillende bundels nemen, dan blijken de best haalbare "pad"- en "interferentie"-meting niet meer beschreven te worden door PWM's maar door POWM's. Op de in dit verslag gebezigde manier blijkt een interpretatie van het experiment als gezamenlijke niet-ideale meting van "pad" en "interferentie" niet mogelijk. Oorzaak hiervan is misschien de gebruikte tweedimensionale formulering, waarbij we de spectrale profielen $\lambda(k)$ en $\mu(k)$ als *vast* beschouwen, terwijl ze in werkelijkheid *willekeurig* zijn. Als we deze willekeur bij de formulering van het experiment gebruiken, wordt de POWM die het experiment beschrijft onafhankelijk van $\lambda(k)$ en $\mu(k)$. Dit maakt dan echter wel een *oneindig-dimensionale* formulering noodzakelijk, waarbij geen eenvoudige matrixrepresentatie van operatoren meer mogelijk is.

Hoofdstuk 5

Enige aspecten van de quantummechanische meting.

5.1 Inleiding.

In dit hoofdstuk zullen we enige aspecten behandelen van de quantummechanische meting (afgekort: QM-meting). De QM-meting is altijd een wisselwerking tussen het object waaraan men meet en een of ander meetapparaat. De vraag is nu, hoe we de wisselwerking moeten kiezen opdat we een meting hebben van een bepaalde, gegeven, observabele (het *determinatieve* aspect van de QM-meting). Klassiek is dit vaak niet zo'n probleem: Een temperatuur meet je met een thermometer en een lengte met een meetlat. In de QM ligt dit soort keuzen niet zo voor de hand.

Een ander aspect van de meting is het zogenaamde *preparatieve* aspect: Hoe is de tijdevolutie van het object systeem als gevolg van de wisselwerking met het meetapparaat?

In dit hoofdstuk proberen we de samenhang tussen beide aspecten van de QM-meting te onderzoeken. Dit doen we m.b.v. de zogenaamde Krausrepresentatie.

5.2 Een eenvoudig model voor de ideale meting van observabele A .

Als eerste voorbeeld zullen we kijken naar een ideale meting van een gegeven observabele A . Laat A een Hermitische operator zijn op een N -dimensionale (object-) Hilbertruimte $\mathcal{H}_N^{(o)}$, met een volledig stelsel eigenvectoren $\{|\alpha_k\rangle\}$ en met de spectrale representatie:

$$A = \sum_k a_k |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| \quad (5.1)$$

waarin a_k de eigenwaarden zijn van A . Zij $\mathcal{H}_N^{(a)}$ de Hilbertruimte van toestanden van het meetapparaat. Om de beschouwingen eenvoudig te houden zullen we deze eveneens N -dimensionaal veronderstellen. Meetapparaten zijn echter macroscopische objecten, dus een beschrijving m.b.v. een eindig-dimensionale Hilbertruimte is slechts een zeer eenvoudig model van de werkelijke situatie. Laten de toestanden $|\theta_k\rangle \in \mathcal{H}_N^{(a)}$ ($k = 1 \cdots N$) genormeerde toestanden zijn die corresponderen met N macroscopisch waarneembare en onderscheidbare "wijzerposities" k . We veronderstellen dat een ensemble meetapparaten, beschreven door een toestand $|\theta_k\rangle$, bij uitlezen de

scherpe waarde k oplevert. $|\theta_k\rangle$ is dan een eigentoestand bij eigenwaarde k van wat we "wijzerpositie-observabele" zouden kunnen noemen. De consequentie van de aanname van een scherpe uitgelezen waarde k bij een apparaat-toestand $|\theta_k\rangle$ is dan dat de set $\{|\theta_k\rangle\}$ een orthogonaal stelsel vormt:

$$\langle\theta_k|\theta_{k'}\rangle = \delta_{kk'} \quad (5.2)$$

De toestanden $|\psi\rangle$ die het gecombineerd systeem van object en meetapparaat beschrijven, zijn element van de $N \times N$ -dimensionale tensorproduct Hilbertruimte \mathcal{H} :

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_N^{(o)} \otimes \mathcal{H}_N^{(a)} \quad (5.3)$$

Vóór de interactie bevinden zich het object systeem en het meetapparaat beide in een zuivere toestand. De object toestand $|\psi_i^{(o)}\rangle$ vóór de meting laat zich ontwikkelen naar het volledig stelsel eigentoestanden $\{|\alpha_k\rangle\}$ van A :

$$|\psi_i^{(o)}\rangle = \sum_k c_k |\alpha_k\rangle \quad (5.4)$$

En de toestand $|\psi_i^{(a)}\rangle$ van het meetapparaat vóór de meting is een toestand met een of andere scherpe wijzerpositie $l = m_0$:

$$|\psi_i^{(a)}\rangle = |\theta_{m_0}\rangle \quad (5.5)$$

Soms wordt er een onderscheid gemaakt tussen $|\theta_{m_0}\rangle$ en de andere toestanden $|\theta_l\rangle$. De "wijzerpositie" $l = m_0$ wordt dan exclusief voor de begintoestand gereserveerd en kan niet optreden na de meting. Wij zullen dit onderscheid niet hanteren: Hier is $l = m_0$ gewoon één van de mogelijke wijzerposities, zowel voor als na de interactie met het object. De toestanden van het gecombineerd systeem van object en meetapparaat zijn elementen in de tensorproduct Hilbertruimte $\mathcal{H}_N^{(o)} \otimes \mathcal{H}_N^{(a)}$. Voor de begintoestand $|\psi_i\rangle$ van het gecombineerd systeem kunnen wij schrijven:

$$|\psi_i\rangle = |\psi_i^{(o)}\rangle |\psi_i^{(a)}\rangle = \sum_k c_k |\alpha_k\rangle |\theta_{m_0}\rangle \quad (5.6)$$

Na de wisselwerking zal het gecombineerd systeem van object en meetapparaat worden beschreven door een toestand $|\psi_f\rangle$. We kunnen spreken van een ideale meting van observabele A als voor $|\psi_f\rangle$ geldt:

$$|\psi_f\rangle = \sum_k c_k |\varphi_k\rangle |\theta_k\rangle \quad (5.7)$$

waarbij de toestanden $|\varphi_k\rangle$ wel genormeerd maar niet noodzakelijk orthogonaal zijn:

$$\langle\varphi_k|\varphi_k\rangle = 1 \quad \text{voor alle } k = 1 \dots N \quad (5.8)$$

$$\langle\varphi_k|\varphi_{k'}\rangle \neq \delta_{kk'} \quad \text{i.h.a.} \quad (5.9)$$

De dichtheidsoperator ρ_f die het gecombineerd systeem van object en meetapparaat na de meting beschrijft, wordt natuurlijk gegeven door:

$$\rho_f = |\psi_f\rangle \langle\psi_f| \quad (5.10)$$

De meting is nu inderdaad een ideale meting van A , want de kans p_k op meetuitkomst "k" is dan exact gelijk aan de theoretische quantummechanische kans $|c_k|^2$

op meetresultaat a_k bij meting van observabele A . Immers, het meetapparaat wordt na de interactie beschreven door een dichtheidsoperator $\rho_f^{(a)}$ die volgens het reductie-theorema te vinden is als het partiële spoor over $\mathcal{H}_N^{(o)}$ van ρ_f :

$$\rho_f^{(a)} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(o)}} \rho_f = \text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(o)}} |\psi_f\rangle\langle\psi_f| \quad (5.11)$$

De kans op meetuitkomst "k" is nu de verwachtingswaarde van de projectie $|\theta_k\rangle\langle\theta_k|$ die projecteert op een toestand $|\theta_k\rangle$, behorend bij een scherpe waarde k :

$$\begin{aligned} p_k &= \text{Tr} \rho_f^{(a)} |\theta_k\rangle\langle\theta_k| = \\ &= \text{Tr} \left\{ \left[\text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(o)}} \sum_{k',k''} c_{k'} c_{k''}^* |\varphi_{k'}\rangle\langle\varphi_{k''}| \otimes |\theta_{k'}\rangle\langle\theta_{k''}| \right] |\theta_k\rangle\langle\theta_k| \right\} = \\ &= \text{Tr} \left\{ \sum_{k',k''} c_{k'} c_{k''}^* \langle\varphi_{k''}|\varphi_{k'}\rangle \langle\theta_{k''}|\theta_k\rangle |\theta_{k'}\rangle\langle\theta_k| \right\} = \\ &= \text{Tr} \left\{ \sum_{k'} c_{k'} c_k^* \langle\varphi_k|\varphi_{k'}\rangle |\theta_{k'}\rangle\langle\theta_k| \right\} = \\ &= \sum_{k'} c_{k'} c_k^* \langle\varphi_k|\varphi_{k'}\rangle \langle\theta_k|\theta_{k'}\rangle = |c_k|^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

In termen als $\text{Tr} \rho_f^{(a)} |\theta_k\rangle\langle\theta_k|$ hebben we geen index $\mathcal{H}_N^{(a)}$ toegevoegd omdat hier evident geen partieel maar een gewoon spoor over $\mathcal{H}_N^{(a)}$ wordt bedoeld.

De meting als preparatie. We kunnen de meting nu ook zien als *preparatie*: Na de meting wordt het object beschreven door een dichtheidsoperator $\rho_f^{(o)}$ waarvoor we vinden:

$$\begin{aligned} \rho_f^{(o)} &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(a)}} \rho_f = \text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(a)}} |\psi_f\rangle\langle\psi_f| = \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(a)}} \left\{ \sum_{k,k'} c_k c_{k'}^* |\varphi_k\rangle\langle\varphi_{k'}| \otimes |\theta_k\rangle\langle\theta_{k'}| \right\} = \\ &= \sum_k |c_k|^2 |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \end{aligned} \quad (5.13)$$

De object toestand vóór de meting kan worden beschreven met een dichtheidsoperator $\rho_i^{(o)}$ waarvoor geldt:

$$\rho_i^{(o)} = \sum_{k,k'} c_k c_{k'}^* |\alpha_k\rangle\langle\alpha_{k'}| \quad (5.14)$$

Volgens Kraus (Ref[15], p.42) bestaat de volgende representatie van de afbeelding $\rho_i^{(o)} \rightarrow \rho_f^{(o)}$, die in de terminologie van Kraus een "niet-selectieve operatie" (Ref[15]) wordt genoemd: Er is een eindige (of hooguit aftelbare) set operatoren $\{T_l\}$ zodanig dat

$$\rho_f^{(o)} = \sum_l T_l \rho_i^{(o)} T_l^\dagger \quad (5.15)$$

waarbij tevens

$$\sum_l T_l^\dagger T_l = I \quad (\text{de eenheidsoperator}) \quad (5.16)$$

Dat de operatoren $T_l^\dagger T_l$ sommeren tot I , is een gevolg van het feit dat $\rho_i^{(o)} \rightarrow \rho_f^{(o)}$ een "niet-selectieve operatie" is. Door substitutie van 5.13 en 5.14 in de Krausrepresentatie 5.15 vinden we dat voor alle mogelijke keuzen c_k moet gelden:

$$\sum_k |c_k|^2 |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \sum_{k,k'} \delta_{kk'} c_k c_{k'}^* |\varphi_k\rangle\langle\varphi_{k'}| = \sum_l \sum_{k,k'} c_k c_{k'}^* T_l |\alpha_k\rangle\langle\alpha_{k'}| T_l^\dagger \quad (5.17)$$

Schrijf nu

$$T_l |\alpha_k\rangle =: |\beta_{lk}\rangle \quad (5.18)$$

Dan betekent dit voor $k = k'$:

$$\sum_l |\beta_{lk}\rangle\langle\beta_{lk}| = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \quad (5.19)$$

In het linkerlid van deze gelijkheid zien we een som van positieve operatoren (namelijk op normering van $|\beta_{lk}\rangle$ na projecties). Dit betekent dat noodzakelijk geldt:

$$|\beta_{lk}\rangle\langle\beta_{lk}| \leq |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \quad \text{voor alle } l \quad (5.20)$$

Nu is $|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ een ééndimensionale projectie, want $|\varphi_k\rangle$ is genormeerd. In Ref[1] vinden we een hier toepasbare stelling over ordening van een positieve operator en een ééndimensionale projectie. Met deze stelling vinden we dat er een reëel getal a_{lk} is met $0 \leq a_{lk} \leq 1$ zodanig dat

$$|\beta_{lk}\rangle\langle\beta_{lk}| = a_{lk} |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \quad (5.21)$$

En dit betekent dat

$$|\beta_{lk}\rangle = d_{lk} |\varphi_k\rangle \quad (5.22)$$

waarbij $|d_{lk}|^2 = a_{lk}$. Voor $k \neq k'$ impliceert 5.17 de gelijkheid:

$$\sum_l |\beta_{lk}\rangle\langle\beta_{lk'}| = \delta_{kk'} |\varphi_k\rangle\langle\varphi_{k'}| \quad (5.23)$$

en met 5.22 wordt dit:

$$\sum_l |\beta_{lk}\rangle\langle\beta_{lk'}| = \sum_l d_{lk} d_{lk'}^* |\varphi_k\rangle\langle\varphi_{k'}| = \delta_{kk'} |\varphi_k\rangle\langle\varphi_{k'}| \quad (5.24)$$

zodat noodzakelijk geldt:

$$\sum_l d_{lk} d_{lk'}^* = \delta_{kk'} \quad (5.25)$$

We zullen nu proberen op twee vragen een antwoord te geven. Ten eerste vragen we ons af *hoe veel* operatoren T_l we nodig hebben in de Krausrepresentatie 5.15, ten tweede *welke*. Wat het aantal operatoren T_l betreft, hebben we de volgende

Bewering 1 *Als de dimensie van de object Hilbertruimte $\mathcal{H}_N^{(o)}$ N is, is het aantal termen $T_l \rho_i^{(o)} T_l^\dagger$ in de Krausrepresentatie minstens N .*

Het bewijs van deze bewering is eenvoudig. We interpreteren d_{lk} in vergelijking 5.25 bij vaste k als een vector in een complexe vectorruimte. De dimensie van deze vectorruimte is gelijk aan het aantal elementen d_{lk} , i.e. het aantal termen in de Krausrepresentatie 5.15. Nemen we aan dat het aantal termen in de Krausrepresentatie eindig is, dan is de vectorruimte eindig dimensionaal. Wij interpreteren het linkerlid van 5.25 als een inproduct in onze vectorruimte. Hier staat dan een aantal vectoren orthogonaal. Dit aantal is gelijk aan het aantal mogelijke k -waarden, zijnde de dimensie N van de object-Hilbertruimte $\mathcal{H}_N^{(o)}$. Het aantal orthogonale vectoren in een vectorruimte kan de dimensie ervan niet overschrijden, zodat zal gelden:

$$\begin{aligned} \text{aantal orthogonale vectoren} &= \dim(\mathcal{H}_N^{(o)}) = N \leq \\ &\leq \text{aantal termen in de Krausrepresentatie} \end{aligned} \quad (5.26)$$

We gaan nu in op de vraag welke set operatoren $\{T_l\}$ men moet nemen in de Krausrepresentatie. We hebben gesteld $|\beta_{lk}\rangle = T_l|\alpha_k\rangle$ en later gevonden $|\beta_{lk}\rangle = d_{lk}|\varphi_k\rangle$, zodat we kunnen schrijven:

$$T_l|\alpha_k\rangle = d_{lk}|\varphi_k\rangle \quad (5.27)$$

Een keuze voor de coëfficiënten d_{lk} legt T_l dan volledig vast:

$$T_l = \sum_k d_{lk}|\varphi_k\rangle\langle\alpha_k| \quad (5.28)$$

De set operatoren $\{T_l\}$ en de set getallen $\{d_{lk}\}$ worden nu geheel door elkaar bepaald. We gaan gemakkelijk na dat 5.25 niet alleen noodzakelijk maar ook voldoende is opdat de Krausrepresentatie 5.15 geldig is, hetgeen betekent dat alle keuzevrijheid in de getallen d_{lk} zit: Alle sets complexe getallen $\{d_{lk}\}$ die voldoen aan 5.25, zijn geoorloofd.

Een voor de hand liggende keuze is de volgende. Neem N termen in de Krausrepresentatie en kies:

$$d_{lk} = \delta_{lk} \quad (5.29)$$

Dan heeft T_l de vorm:

$$T_l = \sum_k \delta_{lk}|\varphi_k\rangle\langle\alpha_k| = |\varphi_l\rangle\langle\alpha_l| \quad (5.30)$$

Een andere keuze is ook gemakkelijk te vinden. Aangezien het linkerlid van 5.25 een inproduct is, kunnen we, gegeven een geschikte set $\{d_{lk}\}$, een willekeurige unitaire transformatie uitvoeren. Laat T_l gegeven zijn door 5.28. Definieer een andere set $\{\tilde{d}_{lk}\}$ door

$$\tilde{d}_{lk} = \sum_{l'} U_{ll'} d_{l'k} \quad (5.31)$$

met $U_{ll'}$ een willekeurige unitaire matrix. De set $\{\tilde{d}_{lk}\}$ definieert nu een set operatoren $\{\tilde{T}_l\}$ waarvoor geldt:

$$\tilde{T}_l = \sum_k \tilde{d}_{lk}|\varphi_k\rangle\langle\alpha_k| = \sum_{l'} \sum_k U_{ll'} d_{l'k}|\varphi_k\rangle\langle\alpha_k| = \sum_{l'} U_{ll'} T_{l'} \quad (5.32)$$

Er is nu inderdaad voldaan aan $\sum_l \tilde{T}_l \rho_i^{(o)} \tilde{T}_l^\dagger = \sum_l T_l \rho_i^{(o)} T_l^\dagger$ voor willekeurige $\rho_i^{(o)}$, zodat $\sum_l \tilde{T}_l \rho_i^{(o)} \tilde{T}_l^\dagger$ een geschikte Krausrepresentatie is als $\sum_l T_l \rho_i^{(o)} T_l^\dagger$ dat is:

$$\sum_l \tilde{T}_l \rho_i^{(o)} \tilde{T}_l^\dagger = \sum_l \sum_{l''} U_{ll'} U_{l''l}^* T_{l'} \rho_i^{(o)} T_{l''}^\dagger = \sum_{l''} \delta_{ll''} T_{l'} \rho_i^{(o)} T_{l''}^\dagger = \sum_l T_l \rho_i^{(o)} T_l^\dagger \quad (5.33)$$

Hierin is gebruik gemaakt van de unitariteit van $U_{l'}$:

$$\sum_l U_{l'} U_{l''}^* = \delta_{l'l''} \quad (5.34)$$

Aan een grondige analyse van de fysische betekenis van de hier geconstateerde keuzevrijheid zijn we tijdens dit afstudeeronderzoek helaas niet meer toegekomen.

Een bijzondere keuze voor T_l . De bijzondere keuze voor T_l die in 5.30 werd gemaakt, kan ook op de volgende manier naar voren komen. De afbeelding $\rho_i^{(o)} \rightarrow |c_k|^2 |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$, in de terminologie van Kraus een "selectieve operatie", voldoet óók aan de voorwaarden voor het bestaan van een Krausrepresentatie (Ref[15], p.42). Er is dus een representatie van $|c_k|^2 |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ in termen van $\rho_i^{(o)}$:

$$|c_k|^2 |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \sum_l \bar{T}_{lk} \rho_i^{(o)} T_{lk}^\dagger \quad (5.35)$$

waarbij

$$\sum_l \bar{T}_{lk}^\dagger T_{lk} = |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| \quad (5.36)$$

Omdat het hier gaat om een "selectieve operatie" (Ref[15]) waarbij we alleen de microsystemen selecteren die meetresultaat "k" geven, sommeert $\bar{T}_{lk}^\dagger T_{lk}$, in tegenstelling tot $T_l^\dagger T_l$ uit 5.16, niet tot de eenheidsoperator maar tot $|\alpha_k\rangle\langle\alpha_k|$. Door identiteit 5.36 uit te schrijven voor willekeurige c_k vinden we de gelijkheid:

$$\sum_l \bar{T}_{lk} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_{k''}| T_{lk}^\dagger = \delta_{k'k} \delta_{k''k} |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \quad (5.37)$$

Voor $k' = k'' \neq k$ staat hier:

$$\sum_l \bar{T}_{lk} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_{k'}| T_{lk}^\dagger = O \quad (\text{de nuloperator}) \quad (5.38)$$

Schrijven we nu

$$|\beta_{lkk'}\rangle := \bar{T}_{lk} |\alpha_{k'}\rangle \quad (5.39)$$

dan kunnen we opnieuw stelling over ordening (Ref[1]) gebruiken (zie ook 5.22) en vaststellen dat

$$\bar{T}_{lk} |\alpha_{k'}\rangle = 0 \quad \text{voor } k \neq k' \quad (5.40)$$

Voor $k' = k'' = k$ impliceert 5.37 met definitie 5.39:

$$\sum_l |\beta_{lkk}\rangle\langle\beta_{lkk}| = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \quad (5.41)$$

Andermaal m.b.v. stelling over ordening (Ref[1]) vinden we dan:

$$|\beta_{lkk}\rangle = \bar{T}_{lk} |\alpha_k\rangle = d_{lk} |\varphi_k\rangle \quad (5.42)$$

Samen met 5.40 betekent dit dat we kunnen schrijven:

$$\bar{T}_{lk} = f_{lk} |\varphi_k\rangle\langle\alpha_k| \quad (5.43)$$

Er volgt dan met 5.37 nog dat

$$\sum_l |f_{lk}|^2 = 1 \quad (5.44)$$

We zien dat de operatoren \bar{T}_{lk} voor verschillende l -waarden slechts een constante factor schelen. Uit de Krausrepresentatie 5.35 volgt met 5.44 dat het meenemen van verschillende l -waarden zinloos is:

$$\sum_l \bar{T}_{lk} \rho_i^{(o)} \bar{T}_{lk}^\dagger = \sum_l |f_{lk}|^2 |\varphi_k\rangle \langle \alpha_k | \rho_i^{(o)} | \alpha_k\rangle \langle \varphi_k| = |\varphi_k\rangle \langle \alpha_k | \rho_i^{(o)} | \alpha_k\rangle \langle \varphi_k| =: \bar{T}_k \rho_i^{(o)} \bar{T}_k^\dagger \quad (5.45)$$

waarin

$$\bar{T}_k = |\varphi_k\rangle \langle \alpha_k| \quad (5.46)$$

Fysisch correspondeert dit met het uiteenrafelen van deelensembles in deelensembles van deelensembles, waartussen de meting geen onderscheid kan maken. We beperken ons daarom in het vervolg tot één term in de Krausrepresentatie 5.45.

Eerder vonden we, voor de speciale keuze $d_{lk} = \delta_{lk}$, een set $\{T_l\}$ met T_l gegeven door 5.30. Als we daarin l vervangen door k , hebben we precies \bar{T}_k terug.

We merken op dat de Krausrepresentatie 5.45 voor de "selectieve operatie" $\rho_i^{(o)} \rightarrow |c_k|^2 |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$ (op triviale vrijheden na) vastligt.

Omdat $\rho_f^{(o)}$ gegeven wordt door 5.13, kunnen we hem schrijven als:

$$\rho_f^{(o)} = \sum_k |c_k|^2 |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| = \sum_k \bar{T}_k \rho_i^{(o)} \bar{T}_k^\dagger \quad (5.47)$$

De eerder gemaakte speciale keuze 5.29 correspondeert dus met het uiteenleggen van het ensemble in deelensembles. Deze deelensembles zijn product van *conditionele preparatie*: Zij bestaan alle uit microsystemen die horen bij een bepaald meetresultaat "k", worden geprepareerd met waarschijnlijkheid $|c_k|^2$ en beschreven door dichtheidsoperator $|\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$.

5.3 De niet-ideale meting van een observabele.

We zullen in het volgende proberen een voldoende voorwaarde te formuleren opdat een meting een niet-ideale meting is van een gegeven observabele. Zij weer $\mathcal{H}_N^{(o)}$ de object-Hilbertruimte met dimensie N en met volledig orthonorm stelsel $\{|\alpha_k\rangle\}$ ($k = 1 \dots N$) van eigentoestanden $|\alpha_k\rangle$ van de te meten observabele A . Laat $\mathcal{H}_M^{(a)}$ de M -dimensionale Hilbertruimte zijn van meetapparaat-toestanden met daarin een volledig orthonorm stelsel $\{|\theta_l\rangle\}$ ($l = 1 \dots M$), behorend bij scherpe "wijzerposities" l . Merk op dat niet noodzakelijk $M = N$: Zowel $M \leq N$ als $M \geq N$ zijn mogelijkheden. De begintoestand van het object zal weer worden gegeven door 5.4, die van het meetapparaat door 5.5. De begintoestand $|\psi_i\rangle$ van het gecombineerd systeem van object en meetapparaat wordt dan gegeven door 5.6. De eindtoestand $|\psi_f\rangle$ laat zich ontwikkelen naar het volledig orthonorme stelsel $\{|\alpha_k\rangle|\theta_l\rangle\}$ in $\mathcal{H}_N^{(o)} \otimes \mathcal{H}_M^{(a)}$:

$$|\psi_f\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} |\alpha_k\rangle |\theta_l\rangle \quad (5.48)$$

Het gecombineerd systeem van object en meetapparaat na de meting, wordt beschreven door een dichtheidsoperator ρ_f waarvoor net als in 5.10 geldt $\rho_f = |\psi_f\rangle \langle \psi_f|$. We veronderstellen de tijdontwikkeling van de toestand van het gecombineerd systeem unitair:

$$|\psi_f\rangle = U|\psi_i\rangle \quad (5.49)$$

waarin U een unitaire operator is. Dit betekent dat we voor c_{kl} kunnen schrijven:

$$c_{kl} = \sum_{k'} S_{kl,k'm_0} c_{k'} \quad (5.50)$$

waarin S een unitaire $NM \times NM$ matrix is. De unitariteit van S houdt in:

$$(S^\dagger S)_{ij,i'j'} = \sum_{k,l} (S^\dagger)_{ij,kl} S_{kl,i'j'} = \sum_{k,l} S_{kl,ij}^* S_{kl,i'j'} = \delta_{ij,i'j'} = \delta_{ii'} \delta_{jj'} \quad (5.51)$$

$$(SS^\dagger)_{ij,i'j'} = \sum_{k,l} S_{ij,kl} (S^\dagger)_{kl,i'j'} = \sum_{k,l} S_{ij,kl} S_{i'j',kl}^* = \delta_{i'j',ij} = \delta_{ii'} \delta_{jj'} \quad (5.52)$$

Na de interactie met het object wordt het meetapparaat beschreven door een dichtheidsoperator $\rho_f^{(a)}$ die we kunnen vinden als het partiële spoor over $\mathcal{H}_N^{(o)}$ van ρ_f :

$$\rho_f^{(a)} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(o)}} \rho_f = \text{Tr}_{\mathcal{H}_N^{(o)}} |\psi_f\rangle\langle\psi_f| = \sum_k \sum_{l,l'} c_{kl}^* c_{k'l'} |\theta_l\rangle\langle\theta_l| \quad (5.53)$$

De kans p_l op "wijzerpositie l " is nu de verwachtingswaarde van de projectie

$$P_l = |\theta_l\rangle\langle\theta_l| \quad (5.54)$$

die projecteert op een toestand $|\theta_l\rangle$, behorend bij een scherpe waarde l :

$$p_l = \text{Tr} \rho_f^{(a)} P_l = \sum_k |c_{kl}|^2 \quad (5.55)$$

Deze kans willen we schrijven als de verwachtingswaarde in de object begintoestand $\rho_i^{(o)}$ van een positieve operator M_l :

$$\langle\psi_i^{(o)}|M_l|\psi_i^{(o)}\rangle = \sum_{k,k'} c_k^* c_{k'} \langle\alpha_k|M_l|\alpha_{k'}\rangle = \sum_k |c_{kl}|^2 \quad (5.56)$$

Door nu c_{kl} in S en c_k uit te drukken vinden we:

$$\sum_k \sum_{k',k''} c_{k'}^* c_{k''} S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} = \sum_{k',k''} c_{k'}^* c_{k''} \langle\alpha_{k'}|M_l|\alpha_{k''}\rangle \quad (5.57)$$

Deze vergelijking moet gelden voor *willekeurige* c_k , omdat object begintoestand $\rho_i^{(o)}$ willekeurig is. Dit betekent dat alle matricelementen van M_l , en daarmee M_l , vastliggen.

We vinden

$$\langle\alpha_{k'}|M_l|\alpha_{k''}\rangle = \sum_k S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} \quad (5.58)$$

en

$$M_l = \sum_k \sum_{k',k''} S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_{k''}| \quad (5.59)$$

We gaan gemakkelijk na dat $\{M_l\}$ een POWM is. Positiviteit volgt uit de identiteit 5.56. Ook sommeren de operatoren tot de eenheidsoperator:

$$\begin{aligned} \sum_l M_l &= \sum_l \sum_k \sum_{k',k''} S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_{k''}| = \sum_{k',k''} \sum_{k,l} S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_{k''}| = \\ &= \sum_{k',k''} \delta_{k',k''} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_{k''}| = \sum_{k'} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_{k'}| = I \end{aligned} \quad (5.60)$$

We *eisen* nu dat de POWM $\{M_l\}$ een niet-ideale meting representeert van de PWM $\{|\alpha_k\rangle\langle\alpha_k|\}$ die (bij ideale meting van A) de kansen $|c_k|^2$ genereert op eigenwaarden a_k van observabele A :

$$\text{Tr } \rho_i^{(o)} |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| = |c_k|^2 \quad (5.61)$$

Bij definitie betekent dit dat er een niet-idealiteitsmatrix (λ_{lj}) is, zo dat:

$$M_l = \sum_j \lambda_{lj} |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| \quad (5.62)$$

Ingevuld in uitdrukking 5.59 voor M_l levert dit een voldoende voorwaarde opdat de meting is te interpreteren als niet-ideale meting van observabele A :

$$\sum_k S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} = \lambda_{lk'} \delta_{k'k''} \quad (5.63)$$

Nu is de matrix S te interpreteren als matrixrepresentatie van de unitaire tijdontwikkeling U in een basis $\{|\alpha_k\rangle|\theta_l\rangle\}$ van eigentoestanden van observabele A en de "wijzerpositie-observabele" die we beschrijven met de PWM $\{|\theta_l\rangle\langle\theta_l|\}$. De eis dat de meting, gerepresenteerd door $\{M_l\}$, een niet-ideale meting is van A , legt een soort orthogonaliteitseis op aan S . We zullen straks een representatie vinden voor S (zie 5.106) waaruit blijkt dat A geen bewegingsconstante hoeft te zijn om toch van een niet-ideale meting van A te kunnen spreken.

De ideale meting als bijzonder geval van de niet-ideale. Keren we nu terug naar het geval van de ideale meting, die we in het vorige deel van dit hoofdstuk zijn tegengekomen. In het geval van de ideale meting zou de niet-idealiteitsmatrix (λ_{lk}) een eenheidsmatrix moeten zijn (of een permutatie daarvan, zie Ref[1]). Dit zal inderdaad blijken het geval te zijn. Bij de ideale meting hadden we de volgende situatie. Om te beginnen zijn daar de dimensies N en M van respectievelijk de object Hilbertruimte en de apparaat Hilbertruimte gelijk verondersteld, i.e. $N = M$. Verder heeft de tijdontwikkeling U daar een bijzondere gedaante. Als de begintoestand van het systeem van object en meetapparaat gegeven is door 5.6, wordt de eindtoestand $|\psi_f\rangle$ na de meting gegeven door 5.7. We ontwikkelen $|\varphi_k\rangle$ naar het volledig stelsel $|\alpha_k\rangle$, aldus:

$$|\varphi_k\rangle = \sum_l \langle\alpha_l|\varphi_k\rangle |\alpha_l\rangle \quad (5.64)$$

Op grond van de normering van $|\varphi_k\rangle$ geldt dan natuurlijk:

$$\langle\varphi_k|\varphi_k\rangle = \sum_l |\langle\alpha_l|\varphi_k\rangle|^2 = 1 \quad (5.65)$$

$|\psi_f\rangle$ is te schrijven als:

$$|\psi_f\rangle = \sum_{k,l} c_k \langle\alpha_l|\varphi_k\rangle |\alpha_l\rangle |\theta_k\rangle = \sum_{k,l} c_l \langle\alpha_k|\varphi_l\rangle |\alpha_k\rangle |\theta_l\rangle \quad (5.66)$$

Een vergelijking met 5.48 leert dan dat de rol van c_{kl} hier gespeeld wordt door $c_l \langle\alpha_k|\varphi_l\rangle$, zodat:

$$c_{kl} = \sum_{k'} S_{kl,k'm_0} c_{k'} = c_l \langle\alpha_k|\varphi_l\rangle = \sum_{k'} \delta_{lk'} c_{k'} \langle\alpha_k|\varphi_l\rangle \quad (5.67)$$

Dit geldt weer voor willekeurige $c_{k'}$, zodat:

$$S_{kl,k'm_0} = \delta_{lk'} \langle\alpha_k|\varphi_l\rangle \quad (5.68)$$

Waarmee we vinden:

$$\sum_k S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} = \sum_k \delta_{lk'} \delta_{lk''} |\langle \alpha_k | \varphi_l \rangle|^2 = \delta_{lk'} \delta_{lk''} \quad (5.69)$$

op grond van normeringsconditie 5.65. S voldoet dus aan 5.63 met een niet-idealiteitsmatrix (λ_{lk}) waarvoor geldt:

$$\lambda_{lk'} \delta_{k'k''} = \delta_{lk'} \delta_{lk''} \quad (5.70)$$

zodat we vinden (kies $k' = k'' = k$):

$$\lambda_{lk} = \delta_{lk} \quad (5.71)$$

(λ_{lk}) is dus de eenheidsmatrix, een niet-idealiteitsmatrix behorend bij de ideale meting.

De niet-ideale meting als preparatie; Krausrepresentatie. Ook de niet-ideale meting kan worden gezien als preparatie. Zo'n preparatie $\rho_i^{(o)} \rightarrow \rho_f^{(o)}$, een "niet-selectieve operatie", voldoet aan de eisen die Kraus stelt voor het bestaan (zie Ref[15], p. 42) van een Krausrepresentatie. We kunnen dus schrijven:

$$\rho_f^{(o)} = \sum_m B_m \rho_i^{(o)} B_m^\dagger \quad (5.72)$$

We werken hier in de sommatie met loper m i.p.v. l . De reden hiervoor is, dat we loper l voor een andere sommatie nodig hebben (zie o.a. 5.73). We vinden voor $\rho_f^{(o)}$:

$$\rho_f^{(o)} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_M^{(a)}} \rho_f = \text{Tr}_{\mathcal{H}_M^{(a)}} |\psi_f\rangle\langle\psi_f| = \sum_l \sum_{k_1, k_2} \sum_{k, k'} c_{k_1}^* c_{k_2} S_{kl, k_1 m_0}^* S_{k'l, k_2 m_0} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_k| \quad (5.73)$$

$\rho_i^{(o)}$ vinden we als $|\psi_i^{(o)}\rangle\langle\psi_i^{(o)}|$:

$$\rho_i^{(o)} = |\psi_i^{(o)}\rangle\langle\psi_i^{(o)}| = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1}^* c_{k_2} |\alpha_{k_2}\rangle\langle\alpha_{k_1}| \quad (5.74)$$

We kunnen 5.73 en 5.74 invullen in 5.72, en eisen dat deze gelijkheid geldig is voor willekeurige c_k . Dit levert dan de vergelijking:

$$\sum_m B_m |\alpha_{k_2}\rangle\langle\alpha_{k_1}| B_m^\dagger = \sum_l \sum_{k, k'} S_{kl, k_1 m_0}^* S_{k'l, k_2 m_0} |\alpha_{k'}\rangle\langle\alpha_k| \quad (5.75)$$

Door nu af te korten

$$B_m |\alpha_{k_1}\rangle =: |\beta_{mk_1}\rangle \quad (5.76)$$

$$\sum_k S_{kl, k_1 m_0} |\alpha_k\rangle =: |\gamma_{lk_1}\rangle \quad (5.77)$$

kunnen we 5.75 schrijven als:

$$\sum_m |\beta_{mk_2}\rangle\langle\beta_{mk_1}| = \sum_l |\gamma_{lk_2}\rangle\langle\gamma_{lk_1}| \quad (5.78)$$

In deze vergelijking treden voor $k_1 = k_2$, op normering na, links en rechts sommen van ééndimensionale projecties op. Voorheen hadden we in het rechterlid van deze operatorvergelijkingen steeds slechts één term (zie 5.19 en 5.41). Dit stelde ons in

staat de ordenings-stelling, Ref[1] te gebruiken. Dit kan hier niet, zodat we langs deze weg niet dwingend tot een Krausrepresentatie kunnen komen.

Een mogelijke keuze is: Neem even veel termen $B_m \rho_i^{(o)} B_m^\dagger$ in de Krausrepresentatie als de dimensie M van de apparaat-Hilbertruimte $\mathcal{H}_M^{(a)}$ bedraagt (=aantal verschillende l -waarden in 5.73), en kies:

$$|\beta_{mk_1}\rangle = |\gamma_{mk_1}\rangle \quad (5.79)$$

Deze keuze voldoet aan de eis 5.78, zodat we hiermee in principe een Krausrepresentatie hebben. We kunnen laten zien dat de in 5.79 gemaakte keuze hoort bij de volgende, zeer bepaalde fysische interpretatie van 5.73. We delen het ensemble microsystemen na de meting op in deelensembles die alle horen bij een bepaald meetresultaat " l ". De kans p_l op dit meetresultaat wordt gegeven door 5.55. Het deelensemble behorend bij meetresultaat " l " zal worden beschreven door dichtheidsoperator $\rho_{fl}^{(o)}$. Met projectie P_l volgens 5.54 zal (zie Ref[1]) $p_l \rho_{fl}^{(o)}$ gegeven worden door:

$$p_l \rho_{fl}^{(o)} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_M^{(a)}} \rho_f P_l = \text{Tr}_{\mathcal{H}_M^{(a)}} |\psi_f\rangle \langle \psi_f | \theta_l \rangle \langle \theta_l | = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1}^* c_{k_2} \sum_{k, k'} S_{kl, k_1 m_0}^* S_{k'l, k_2 m_0} |\alpha_{k'}\rangle \langle \alpha_k| \quad (5.80)$$

Dan is $\rho_f^{(o)}$ te schrijven als (zie weer Ref[1]):

$$\rho_f^{(o)} = \sum_l p_l \rho_{fl}^{(o)} \quad (5.81)$$

Deze opdeling wijst ons de weg naar een Krausrepresentatie. De afbeelding $\rho_i^{(o)} \rightarrow p_l \rho_{fl}^{(o)}$, volgens Ref[15] een "selectieve operatie", voldoet namelijk weer aan de criteria voor het bestaan van een Krausrepresentatie :

$$p_l \rho_{fl}^{(o)} = \sum_m B_{ml} \rho_i^{(o)} B_{ml}^\dagger \quad (5.82)$$

Vullen we deze Krausrepresentatie in in 5.80, met c_k willekeurig, en substitueren we 5.14 voor $\rho_i^{(o)}$ dan is het resultaat:

$$\sum_{k_1, k_2} c_{k_1}^* c_{k_2} \sum_m B_{ml} |\alpha_{k_2}\rangle \langle \alpha_{k_1} | B_{ml}^\dagger = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1}^* c_{k_2} \sum_{k, k'} S_{kl, k_1 m_0}^* S_{k'l, k_2 m_0} |\alpha_{k'}\rangle \langle \alpha_k| \quad (5.83)$$

zodat we vinden:

$$\sum_m B_{ml} |\alpha_{k_2}\rangle \langle \alpha_{k_1} | B_{ml}^\dagger = \sum_{k, k'} S_{kl, k_1 m_0}^* S_{k'l, k_2 m_0} |\alpha_{k'}\rangle \langle \alpha_k| = |\gamma_{lk_2}\rangle \langle \gamma_{lk_1}| \quad (5.84)$$

met $|\gamma_{lk_1}\rangle$ en $|\gamma_{lk_2}\rangle$ volgens 5.77. Kies nu even $k_1 = k_2$. In het rechterlid staat dan (op normering na) een ééndimensionale projectie, hetgeen ons weer in staat stelt de ordenings-stelling van Ref[1] te gebruiken. Er moet nu gelden:

$$B_{ml} |\alpha_{k_1}\rangle = b_{mlk_1} |\gamma_{lk_1}\rangle = b_{mlk_1} \sum_k S_{kl, k_1 m_0} |\alpha_k\rangle \quad (5.85)$$

Vullen we 5.85 weer in in de oorspronkelijke gelijkheid 5.84, dan vinden we:

$$\sum_m \sum_{k, k'} b_{mlk_1}^* b_{mlk_2} S_{kl, k_1 m_0}^* S_{k'l, k_2 m_0} |\alpha_{k'}\rangle \langle \alpha_k| = \sum_{k, k'} S_{kl, k_1 m_0}^* S_{k'l, k_2 m_0} |\alpha_{k'}\rangle \langle \alpha_k| \quad (5.86)$$

zodat zal gelden:

$$S_{kl,k_1m_0}^* S_{k'l,k_2m_0} \sum_m b_{mlk_1}^* b_{mlk_2} = S_{kl,k_1m_0}^* S_{k'l,k_2m_0} \quad (5.87)$$

Neem k_1 en k_2 (en natuurlijk l) even vast. Stel dat er bij vaste k_1 en k_2 geen k en k' zijn zodanig dat $S_{kl,k_1m_0}^* S_{k'l,k_2m_0} \neq 0$. Dan zien we dat $\sum_m b_{mlk_1}^* b_{mlk_2}$ voor deze waarden van k_1 en k_2 onbepaald is. Maar dan komt $\sum_m \sum_{k,k'} b_{mlk_1}^* b_{mlk_2} S_{kl,k_1m_0}^* S_{k'l,k_2m_0} |\alpha_{k'}\rangle \langle \alpha_k|$ dus helemaal niet voor in de Krausrepresentatie 5.82, zodat deze waarden van k_1 en k_2 hierin geen rol spelen. Deze onbepaaldheid van $\sum_m b_{mlk_1}^* b_{mlk_2}$ is dus triviaal. Beperken we ons dus tot die waarden van k_1 en k_2 waarvoor er k en k' bestaan zodat $S_{kl,k_1m_0}^* S_{k'l,k_2m_0} \neq 0$. Voor die k_1 en k_2 geldt dan:

$$\sum_m b_{mlk_1}^* b_{mlk_2} = 1 \quad (5.88)$$

Door te kiezen $k_1 = k_2$ vinden we

$$\sum_m |b_{mlk_1}|^2 = \sum_m |b_{mlk_2}|^2 = 1 \quad (5.89)$$

Op grond van de strikte Cauchy-Schwartz, toegepast op 5.88 met de normering 5.89, stellen we vast dat b_{mlk_1} en b_{mlk_2} afhankelijke vectoren zijn:

$$b_{mlk_2} = K b_{mlk_1} \quad (5.90)$$

Dit levert, gesubstitueerd in 5.88 en met normering 5.89,

$$K \sum_m |b_{mlk_1}|^2 = K = 1 \quad (5.91)$$

zodat b_{mlk_1} onafhankelijk is van k_1 . We kunnen dus in het vervolg de k_1 -afhankelijkheid weglaten: $b_{mlk_1} =: b_{ml}$. We vinden zo met 5.85 voor B_{ml} :

$$B_{ml} = b_{ml} \sum_{k,k'} S_{kl,k'm_0} |\alpha_k\rangle \langle \alpha_{k'}| =: b_{ml} B_l \quad (5.92)$$

waarin is gedefinieerd:

$$B_l = \sum_{k,k'} S_{kl,k'm_0} |\alpha_k\rangle \langle \alpha_{k'}| \quad (5.93)$$

Hieruit zien we dat de B_{ml} voor verschillende m evenredig zijn, zodat we ons in principe kunnen beperken tot één term in de Krausrepresentatie 5.82:

$$p_l \rho_{fl}^{(o)} = \sum_m B_{ml} \rho_i^{(o)} B_{ml}^\dagger = \sum_m |b_{ml}|^2 B_l \rho_i^{(o)} B_l^\dagger = B_l \rho_i^{(o)} B_l^\dagger \quad (5.94)$$

De fysische betekenis van de mogelijkheid meer termen mee te nemen in de Krausrepresentatie, is - net als in 5.45 bij de ideale meting - het uiteenrafelen van deelensembles in deelensembles van deelensembles waartussen de meting geen onderscheid kan maken.

De keuze die in 5.93 voor B_l werd gemaakt, is geheel in overeenstemming met 5.79. De fysische betekenis van de keuze in 5.79 is dus evident de bovengenoemde opdeling in deelensembles behorend bij bepaalde meetresultaten "l".

Tenslotte vinden we met 5.80 een Krausrepresentatie voor de afbeelding $\rho_i^{(o)} \rightarrow \rho_f^{(o)}$:

$$\rho_f^{(o)} = \sum_l p_l \rho_{fl}^{(o)} = \sum_l B_l \rho_i^{(o)} B_l^\dagger \quad (5.95)$$

We merken op dat we bij de afleiding van bovengenoemde Krausrepresentaties 5.94 en 5.95 nergens gebruik hebben gemaakt van 5.63, de voorwaarde waaronder de meting een niet-ideale meting is van A . Dit betekent dat deze beide Krausrepresentaties algemene geldigheid bezitten. Verder merken we nog op dat de Krausrepresentatie 5.94 (op triviale vrijheden na) helemaal vastligt met matrix S . Daardoor lijkt er in de Krausrepresentatie 5.95 misschien minder keuzevrijheid te zijn dan er bij de ideale meting was. Het is echter goed om op te merken dat deze Krausrepresentatie is ontstaan uit een zeer speciale manier (5.81) om $\rho_f^{(o)}$ te schrijven als een convexe combinatie van dichtheidsoperatoren. We hebben bijvoorbeeld ook hier de mogelijkheid een transformatie als 5.32 met een unitaire matrix $U_{ll'}$ uit te voeren. Net als in het geval van de ideale meting hebben we geen grondige analyse van de fysische betekenis hiervan kunnen maken.

De vrijheid in de keuze van de interactie. De eis 5.63 die we aan de matrix S stellen opdat de meting een niet-ideale meting is van observabele A , laat een zekere vrijheid toe in de keuze van S . Welke vrijheid is dat?

In het nu volgende betoog beschouwen we l steeds als *vast*. Bij vaste l laat het linkerlid van 5.63 zich lezen als een product $T_l^\dagger T_l$ van $N \times N$ matrices T_l . Definieer namelijk T_l door

$$(T_l)_{k,k'} = S_{kl,k'm_0} \quad (5.96)$$

dan wordt 5.63:

$$(T_l^\dagger T_l)_{k',k''} = \lambda_{lk'} \delta_{k'k''} \quad (5.97)$$

oftewel

$$T_l^\dagger T_l = \begin{bmatrix} \lambda_{l1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{l2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{lN} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

Volgens de polaire decompositie stelling (Ref[16]) kan T_l geschreven worden als:

$$T_l = U_l \sqrt{T_l^\dagger T_l} = U_l \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_{l1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_{l2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_{lN}} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

waarin U_l een zogenaamde *partiële* isometrie is (definitie Ref[16]). Vullen we de representatie 5.99 in in de uitdrukking $T_l^\dagger T_l$:

$$T_l^\dagger T_l = \sqrt{T_l^\dagger T_l} U_l^\dagger U_l \sqrt{T_l^\dagger T_l} \quad (5.100)$$

Korten we even af

$$V_l := U_l^\dagger U_l \quad (5.101)$$

dan is 5.99, met 5.100 en 5.101, uit te schrijven tot

$$\begin{bmatrix} \lambda_{l1} (V_l)_{11} & \sqrt{\lambda_{l1} \lambda_{l2}} (V_l)_{12} & \cdots & \sqrt{\lambda_{l1} \lambda_{lN}} (V_l)_{1N} \\ \sqrt{\lambda_{l2} \lambda_{l1}} (V_l)_{21} & \lambda_{l2} (V_l)_{22} & \cdots & \sqrt{\lambda_{l2} \lambda_{lN}} (V_l)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_{lN} \lambda_{l1}} (V_l)_{N1} & \sqrt{\lambda_{lN} \lambda_{l2}} (V_l)_{N2} & \cdots & \lambda_{lN} (V_l)_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{l1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{l2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{lN} \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

Hiermee vinden we:

$$\sqrt{\lambda_{lk}\lambda_{lk'}} (V_l)_{kk'} = \sqrt{\lambda_{lk}\lambda_{lk'}} \sum_m (U_l)_{mk}^* (U_l)_{mk'} = \lambda_{lk} \delta_{kk'} \quad (5.103)$$

Definieer nu een verzameling J_l door

$$k \in J_l \Leftrightarrow \lambda_{lk} \neq 0 \quad (5.104)$$

dan geldt voor $k, k' \in J_l$:

$$\sum_m (U_l)_{mk}^* (U_l)_{mk'} = \delta_{kk'} \quad (5.105)$$

zodat de kolomvectoren $(U_l)_{mk}$ (k vast, m index van het vectorelement) van U_l , voor $k \in J_l$ orthonormaal zijn. Voor de kolomvectoren $(U_l)_{mk}$ met $k \notin J_l$ volgt geen uitspraak, deze zijn kennelijk willekeurig.

Met 5.96 en 5.99 volgt een algemene representatie voor de matrix S :

$$S_{kl,k'm_0} = (U_l)_{k,k'} \sqrt{\lambda_{lk'}} \quad (5.106)$$

Voor $k' \notin J_l$ geldt $\lambda_{lk'} = 0$ zodat dan zeker $S_{kl,k'm_0} = 0$, ongeacht de keuze voor kolomvector $(U_l)_{k,k'}$ van U_l . Deze willekeur hebben we boven al vastgesteld. Zij blijkt dus triviaal te zijn: We kunnen 5.105 zonder verlies van algemeenheid voor *alle* k en k' laten gelden. Dit betekent dat we U_l , zonder verlies van algemeenheid, *unitair* kunnen kiezen.

Samengevat luidt de conclusie dat voor de matrix S die de interactie beschrijft tussen object en meetapparaat, een representatie 5.106 bestaat waarin U_l een willekeurige unitaire matrix is en $(\lambda_{lk'})$ een stochastische matrix. Dit is een voldoende voorwaarde opdat de meting een niet-ideale meting is van observabele A (zie 5.1).

Een ruimere formulering voor niet-ideale metingen. In dit hoofdstuk hebben we in eerste instantie geëist dat de POWM $\{M_l\}$ (zie 5.59) een niet-ideale meting representeerde van observabele A (zie 5.1). Er zijn echter ook situaties waarin de POWM $\{M_l\}$ weliswaar zelf geen niet-ideale meting is van A , maar waarin wij een POWM $\{N_n\}$ kunnen vormen uit lineaire combinaties van M_l . De nieuw gevormde POWM $\{N_n\}$ is dan wel een niet-ideale meting van A . De marginalen van de bivariate maat 1.21 zijn voorbeelden hiervan. Wij kunnen dus de eis dat de meting een niet-ideale meting is van observabele A , aldus verruimen. Vorm een POWM $\{N_n\}$ uit lineaire combinaties van M_l :

$$N_n = \sum_l \mu_{nl} M_l \quad (5.107)$$

Opdat $\{N_n\}$ een POWM is, is het *niet noodzakelijk* (maar wel voldoende) dat (μ_{kl}) een stochastische matrix is. Nu moet $\{N_n\}$ een niet-ideale meting zijn van A , i.e. 5.62 gelde nu voor $\{N_n\}$:

$$N_n = \sum_j \lambda_{nj} |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j| \quad (5.108)$$

Deze eis substitueren we, met 5.107, in 5.59 en vinden zo de volgende aan de interactie S op te leggen eis:

$$\sum_{l,k} \mu_{nl} S_{kl,k'm_0}^* S_{kl,k''m_0} = \lambda_{nk'} \delta_{k'k''} \quad (5.109)$$

Deze eis legt een beperking op aan de interactie S . Het is niet verder onderzocht of een representatie analoog 5.106 voor S te vinden is.

Conclusies. Als we van de verzameling microsystemen die na de meting overblijven alleen het deelensemble beschouwen van microsystemen die een gegeven meetresultaat ("k" of "l") hebben opgeleverd, dan noemen we dit "conditionele preparatie" of in Kraus' terminologie een "selectieve operatie". Voor deze selectieve operatie bestaat zowel bij de ideale als bij de niet-ideale meting een Krausrepresentatie die (op triviale vrijheden na) helemaal vastligt. Als we de Krausrepresentaties voor alle mogelijke selectieve operaties die er bij een bepaalde meting zijn optellen (zie 5.47 en 5.95), verkrijgen we een Krausrepresentatie voor "niet-selectieve operatie". In deze laatste Krausrepresentatie bestaat onder andere keuzevrijheid via een unitaire transformatie (zie 5.32). Er moet nog een analyse gemaakt worden van de fysische betekenis hiervan.

Als we de strenge voorwaarde 5.63 hanteren waaronder de meting een niet-ideale meting is van observabele A , bestaat er een representatie 5.106 voor de matrix S die de interactie beschrijft tussen object en meetapparaat. We stellen vast dat S niet diagonaal hoeft te zijn in k en k' , de indices betrekking hebbend op de object-Hilbertruimte. Dit betekent dat de observabele A , in welke basis van eigentoestanden $|\alpha_k\rangle$ we werken, niet noodzakelijk commuteert met de tijdontwikkeling U van het gecombineerd systeem van object en meetapparaat, en dat A dus *geen bewegingsconstante* behoeft te zijn om toch van een niet-ideale meting van A te kunnen spreken.

Bijlage A

Het bewijs van de (Gauss-reductie)formule. Wij zullen hier een kort bewijs geven van de Gauss-reductieformule 2.7. De kansverdeling over n zij een Gaussvormige. Wij schrijven dan voor $\langle e^{\xi n} \rangle$:

$$\langle e^{\xi n} \rangle = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{-(n-\mu)^2/2\sigma^2} e^{\xi n}. \quad (\text{A.1})$$

Hierin zijn μ en σ het gemiddelde respectievelijk de standaarddeviatie in n :

$$\mu = \langle n \rangle \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle \quad (\text{A.3})$$

In overeenstemming met 2.7 kunnen we schrijven:

$$\sigma^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = g \langle n \rangle = g\mu \quad (\text{A.4})$$

In bijvoorbeeld Ref[17] vinden we de volgende formule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Ax^2+Bx} = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}} e^{B^2/4A} \quad (\text{A.5})$$

waarin $A > 0$ is en B een willekeurig complex getal. Hiermee vinden we voor $\langle e^{\xi n} \rangle$ eenvoudig:

$$\begin{aligned} \langle e^{\xi n} \rangle &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{-(n-\mu)^2/2\sigma^2} e^{\xi n} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\mu^2/2\sigma^2} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{-n^2/2\sigma^2 + (\mu/\sigma^2 + \xi)n} = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\mu^2/2\sigma^2} \left(\frac{\pi}{1/2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(\mu/\sigma^2 + \xi)^2} = e^{-\mu^2/2\sigma^2 + \mu^2/2\sigma^2 + \mu\xi + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} = \\ &= e^{\mu\xi + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} = e^{(\xi + \frac{1}{2}g\xi^2)\langle n \rangle} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Hiermee is het in 2.9 gestelde bewezen.

De analytische berekening van de relevante grootheden. In paragraaf 4.4 hebben wij in 4.252 t/m 4.258 een aantal analytische resultaten opgesomd. Wij zullen hier demonstreren hoe wij tot deze resultaten kunnen komen. Door vervolgens $s = 0$ te stellen reduceert de situatie tot die in paragraaf 4.3, waarmee we dan de decoherentie-parameter 4.142 kunnen vinden.

We zullen herhaaldelijk gebruik maken van formule A.5 bij de berekeningen. We starten met de berekening van $\zeta e^{i\eta}$. Met 4.154 en 4.248 schrijven we:

$$|c'_r(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dl |\gamma'_r(k, l)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk'' \lambda^*(k - k') \lambda(k - k'') \alpha_g^*(l + k') \times \\ \times \alpha_g(l + k'') \beta_r^*(k') \beta_r(k'') \quad (\text{A.7})$$

Met behulp hiervan laat zich $\zeta e^{i\eta}$ schrijven als:

$$\zeta e^{i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk'' e^{-iks} \lambda^*(k - k') \lambda(k - k'') \alpha_g^*(l + k') \alpha_g(l + k'') \times \\ \times \beta_r^*(k') \beta_r(k'') \quad (\text{A.8})$$

We nemen aan dat de volgorde van integratie mag worden verwisseld. Dit stelt ons dan in staat de berekening in een aantal stappen uit te voeren. Als eerste stap berekenen we

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iks} \lambda^*(k - k') \lambda(k - k'') = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iks} e^{-(k-k'-k_0)^2/4t^2} \times \\ \times e^{-(k-k''-k_0)^2/4t^2} = \frac{e^{-i(k_0+k')s}}{t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iks} e^{-k^2/4t^2} e^{-(k+k'-k'')^2/4t^2} = \\ = \frac{e^{-i(k_0+k')s} e^{-(k'-k'')^2/4t^2}}{t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[-k^2/2t^2 - (k' - k'')k/2t^2 - isk \right]$$

Voor de berekening van de laatste integraal substitueren we de uitdrukkingen $A = 1/2t^2$ en $B = -(k' - k'')/2t^2 - is$ in A.5, en vinden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iks} \lambda^*(k - k') \lambda(k - k'') = e^{-ik_0s - \frac{1}{2}t^2s^2} e^{-(k'-k'')^2/8t^2 - \frac{1}{2}i(k'+k'')s} \quad (\text{A.9})$$

Door $k' = k'' = 0$ te stellen vinden we hieruit meteen al 4.253 en 4.256. Op geheel analoge wijze vinden we:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl \alpha_g^*(l + k') \alpha_g(l + k'') = e^{-(k'-k'')^2/8u^2} \quad (\text{A.10})$$

Voor $\beta_r(k')$ substitueren we uitdrukking 4.141 (C positief reëel), en vinden:

$$\zeta e^{i\eta} = C^2 e^{-ik_0s - \frac{1}{2}t^2s^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk'' e^{-(k'-k'')^2/8t^2} e^{-(k'-k'')^2/8u^2} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2}i(k'+k'')s} e^{-(k'-m_0)^2/4v^2} e^{-(k''-m_0)^2/4v^2} = \\ = C^2 e^{-i(k_0+m_0)s - \frac{1}{2}t^2s^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dk'' e^{-(k'-k'')^2/8t^2} e^{-(k'-k'')^2/8u^2} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2}i(k'+k'')s} e^{-k'^2/4v^2} e^{-k''^2/4v^2} = \\ = C^2 e^{-i(k_0+m_0)s - \frac{1}{2}t^2s^2} \left(\frac{\pi}{\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{8u^2} + \frac{1}{4v^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\frac{1}{4}s^2}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right] \times \\ \int_{-\infty}^{\infty} dk' \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right) \left(\frac{k'^2}{4v^2} - \frac{1}{2}ik's \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2C^2 e^{-i(k_0+m_0)s - \frac{1}{2}t^2 s^2} \left(\frac{\pi}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\frac{1}{4}s^2}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right] \times \\
&\times \left(\frac{4v^2 \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \pi}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{4}v^2 s^2 \left(\frac{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right) \right] = \\
&= \frac{4\pi v C^2 e^{-i(k_0+m_0)s}}{\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[\frac{-\frac{1}{2}s^2 \left[1 + \frac{1}{2}(t^2 + v^2) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right) + \frac{t^2}{v^2} \right]}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right]
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Als we de uitdrukking voor a en a' (4.239) en die voor $\zeta e^{i\eta}$ (4.246), met elkaar vergelijken dan zien we dat we a kunnen vinden door in het resultaat A.11 voor $\zeta e^{i\eta}$ de waarde $s = 0$ te substitueren, zodat we vinden:

$$a = a' = \frac{4\pi v C^2}{\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{A.12}$$

waarmee $\zeta e^{i\eta}$ zich in a laat uitdrukken als:

$$\zeta e^{i\eta} = a e^{-i(k_0+m_0)s} \exp \left[\frac{- \left[t^2 u^2 v^2 + \frac{1}{2} v^2 (t^2 + v^2) (t^2 + u^2) + t^4 u^2 \right] s^2}{(t^2 + u^2) v^2 + 2t^2 u^2} \right] \tag{A.13}$$

Hierin hebben we meteen de breuk in de exponentiële functie vereenvoudigd door teller en noemer met $2t^2 u^2 v^2$ te vermenigvuldigen. Het bovenstaande complexe resultaat A.13 impliceert 4.255 en 4.257.

Voor $\gamma e^{i\varphi}$ schrijven we

$$\begin{aligned}
\gamma e^{i\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iks} \lambda^*(k) c'_r(k) \langle a_g | a'_{rk} \rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dl' e^{iks} \lambda^*(k) \alpha_g^*(l) \gamma'_r(k, l') \langle b_l | b_{l'} \rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{iks} \lambda^*(k) \lambda(k - k') \alpha_g^*(l) \alpha_g(l + k') \beta_r(k')
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Opnieuw zullen we de volgorde van integreren verwisselen. Naar analogie met A.9 vinden we:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iks} \lambda^*(k) \lambda(k - k') = e^{isk_0 - \frac{1}{2}t^2 s^2} e^{-k'^2/8t^2 + \frac{1}{2}isk'} \tag{A.15}$$

Tevens zullen we weer A.5 gebruiken, met als resultaat:

$$\begin{aligned}
\gamma e^{i\varphi} &= C e^{isk_0 - \frac{1}{2}t^2 s^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-k'^2/8t^2 + \frac{1}{2}isk'} e^{-k'^2/8u^2} e^{-(k' - m_0)^2/4v^2} = \\
&= C e^{isk_0 - \frac{1}{2}t^2 s^2 - \frac{m_0^2}{4v^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \exp \left[- \left(\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{8u^2} + \frac{1}{4v^2} \right) k'^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2}is + \frac{m_0}{2v^2} \right) k' \right] = \\
&= C e^{isk_0 - \frac{1}{2}t^2 s^2 - \frac{m_0^2}{4v^2}} \left(\frac{\pi}{\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{8u^2} + \frac{1}{4v^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\frac{1}{4}s^2 + \frac{m_0^2}{4v^4} + \frac{ism_0}{2v^2}}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right]
\end{aligned}$$

M.b.v. A.12 is dit aldus in a uit te drukken:

$$\begin{aligned} \gamma e^{i\varphi} = \sqrt{a} & \left[\frac{(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2})^{\frac{1}{2}}}{v(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2})} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[isk_0 + \frac{\frac{ism_0}{2v^2}}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{-\frac{1}{2}t^2 s^2 (\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2})}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right] \exp \left[\frac{-\frac{m_0^2}{8v^2} (\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2})}{\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{v^2}} \right] \end{aligned}$$

(A.17)

Wij kunnen hiermee γ' en δ vinden door de waarde $s = 0$ te substitueren (zie 4.242 t/m 4.245). Met enige vereenvoudigingen wordt dit 4.252. $\gamma e^{i\varphi}$ laat zich dus als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} \gamma e^{i\varphi} = \exp \left[is \left(k_0 + \frac{t^2 u^2 m_0}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2 u^2} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{-t^2 \left[(\frac{1}{2}t^2 + u^2)v^2 + t^2 u^2 \right] s^2}{(t^2 + u^2)v^2 + 2t^2 u^2} \right] \gamma' \end{aligned}$$

(A.18)

waaruit onmiddellijk de uitdrukkingen 4.254 4.258 volgen.

Voor het vinden van de in 4.142 genoemde decoherentie-parameter ϵ moeten we $s = 0$ stellen in uitdrukking A.17 voor γ . De decoherentie-parameter vinden we dan eenvoudig met definitie 4.55.

De maatschappelijke relevantie van dit werk. Dit afstudeeronderzoek poogt een steentje bij te dragen aan een beter begrip van de quantummechanische meting. Dit begrip is op het ogenblik nog verre van volmaakt. Zo kunnen experimentatoren zich bij het bouwen van meetopstellingen nog altijd enkel laten leiden door hun ervaring. Niet zelden moeten daarbij semi-klassieke argumenten van stal om te laten zien wat men met een bepaalde meetopstelling meet. Zonder verder iets af te willen doen aan de kwaliteiten van experimentatoren, merken we op dat dit een onbevredigende situatie is. Nu zal een goed begrip van de quantummechanische meting fysici misschien in staat stellen om

- bindende voorschriften te formuleren voor het bouwen van meetopstellingen om quantummechanische observabelen te meten.
- beter hard te maken waarom een meetopstelling geschikt is voor de meting van een bepaalde quantummechanische observabele.
- bestaande metingen beter te interpreteren (denk aan het gebruik van het POWM-formalisme).
- nieuwe meetmethoden te ontwikkelen.

Dit betekent dat het in de toekomst wellicht mogelijk zal zijn de ontwerpfase en de bouw van meetapparatuur wezenlijk te *bekorten*, en daarmee geld te besparen. Er zal immers minder "trial and error" aan te pas hoeven komen, zodat men minder voorlopige versies van een opstelling hoeft te bouwen voordat men een definitieve heeft. Verder zal de quantummechanische meting in de toekomst wellicht meer informatie opleveren, zodat men meer met zijn opstelling bereiken kan. Een goede theorie van de quantummechanische meting opent tevens de weg naar nieuwe experimentele methoden, hetgeen voor de experimentele fysica (en voor de industrie) in Nederland van belang kan zijn.

Een ander belangrijk aspect is meer fundamenteel van aard. Er zijn pogingen ondernomen de quantummechanica op het quantummechanische meetproces toe te passen, terwijl de quantummechanica zich - net als de klassieke mechanica - vanouds beperkt tot de fysische objecten zelf en het meetproces idealiseert. De quantummechanische beschrijving van de meting houdt dus een wezenlijke uitbreiding in van de theorie. Deze uitbreiding is goed voor de theoretische Natuurkunde in Nederland (en voor haar internationale reputatie), terwijl ook hier spin-off naar experimentele vakgebieden en de industrie natuurlijk niet uitgesloten is.

Nog een ander - niet te onderschatten - aspect voor mij persoonlijk is, dat ik op dit onderwerp kan afstuderen en daarmee mijn kansen op de arbeidsmarkt vergroten kan. Niet alleen ikzelf, ook de samenleving profiteert hiervan. In de eerste plaats omdat iedereen die werkt belastingen en premies betaalt. In de tweede plaats omdat een bevredigend, werkzaam bestaan, precies zoals mijn afstudeerwerk dat heeft gedaan, zal bijdragen tot mijn levensgeluk. En persoonlijk levensgeluk is de meest waardevolle dienst die het individu de samenleving waarin het leeft, kan bewijzen.

Bibliografie

- [1] W.M. de Muynck, *Grondslagen van de Quantummechanica*. Syllabus bij gelijknamig college (niet gepubliceerd).
- [2] Hans Martens, *The Uncertainty Principle*. Proefschrift TUE (1991).
- [3] W. de Muynck en H. Martens, *Phys. Rev. A*, vol.42, **9**, 5079 (1990).
- [4] Frank Aelen, *Niet-ideale, gelijktijdige meting van incompatibele observabelen in neutronen interferentie experimenten*. Stageverslag TUE, vakgroep Theoretische Natuurkunde (niet gepubliceerd).
- [5] W.M. de Muynck and H. Martens, *Physics Letters A*, **158**, 183 (1991).
- [6] Mikio Namiki, Saverio Pascazio and Helmut Rauch, *Physics Letters A*, **173**, 87 (1993).
- [7] U. Bonse and H. Rauch, *Neutron Interferometry*, Clarendon Press, Oxford (1979).
- [8] Kenneth S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons (1987).
- [9] Willem M. de Muynck, *Physics Letters A*, **182**, 201 (1993).
- [10] Varley F. Sears, *Neutron Optics, An Introduction to the Theory of Neutron Optical Phenomena and their Applications*. Oxford University Press (1989).
- [11] Arno Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*, Second Edition. Springer Verlag (1986).
- [12] Stephen Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons (1974).
- [13] J. Summhammer, H. Rauch en D. Tuppinger, *Phys. Rev. A*, vol.36, **9**, 4447 (1987).
- [14] A. von Peij, *Gelijktijdige niet-ideale meting van pad en interferentie in het tweespleten experiment*. Afstudeerverslag TUE, vakgroep Theoretische Natuurkunde (niet gepubliceerd).
- [15] Karl Kraus, *States, Effects and Operations*. Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin. Springer Verlag (1983).
- [16] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical Physics*, Academic Press (1972).
- [17] I.S. Gradshteyn/I.M. Ryzhik. Alan Jeffrey, Editor, *Table of Integrals, Series and Products*. Fifth Edition (1994).