

MASTER

Bepaling van de orde van lineaire discrete en continue processen

van den Enden, A.W.M.

Award date:
1973

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK
TECHNISCHE HOGESCHOOL
EINDHOVEN
Groep Meten en Regelen

BEPALING VAN DE ORDE VAN
LINEAIRE DISCRETE EN
CONTINUE PROCESSEN.
door A.W.M. v.d. Enden.

Rapport van het afstudeerwerk,
Uitgevoerd van februari 1972 t/m januari 1973,
In opdracht van Prof. Dr. Ir. P. Eykhoff,
Onder leiding van Ir. A.J.W. v.d. Boom.

Samenvatting:

Bij het schatten van parameters is het noodzakelijk om de orde van het proces a-priori te kennen. Deze kennis ontbreekt meestal; daarom is het belangrijk om de orde van het te onderzoeken proces te schatten.

Van de Sommen (1971) heeft diverse orde-test methoden ontwikkeld, die toegepast kunnen worden bij een lineair-tijddiscreet proces. Dit verslag geeft een aantal resultaten van tests aan het z.g. Åström proces.

Tevens is in dit verslag beschreven, hoe deze orde tests toegepast kunnen worden op een lineair-continu proces, en geeft het schatting-resultaten aan enkele continue processen.

Summary:

When estimating the parameters of an unknown process, it is necessary to know a-priori its order. In many situations this information is lacking; therefore it is important to estimate the order.

For a linear-time discret process, Van de Sommen (1971) has developed several methods. This report gives results of test of order on the Åström process.

Furthermore it describes how these tests can be used on a linear-time continuous process, and some results on such processes are given.

<u>Inhoud:</u>	Pag.
<u>Samenvatting.</u>	1
1. <u>Inleiding</u>	3
2. <u>Bepalen van de orde van een lineair discreet proces.</u>	4
2.1. The determination of the order of process- and noise dynamics.	4
2.2. Resultaten van orde tests met Gaussische storing.	15
3. <u>Schatten m.b.v. de kleinste kwadratenmethode aan een lineair continu proces.</u>	24
3.1. Schatten van de parameters van een continu proces.	24
3.2. Schatten van de orde van een continu proces.	29
4. <u>Resultaten van ordetests aan enkele lineaire continue processen, i.c. Aorta simulaties.</u>	31
4.1. Schattingen aan de uitgangsadmittantie	31
4.2. Schattingen aan de dwarstak.	34
4.3. Schattingen aan de langstak.	37
4.4. Schattingen aan een derde orde proces.	42
4.5. Schattingen aan een vijfde orde proces.	45
4.6. Schattingen aan de uitgangsadmittantie van een fysisch model van de aorta.	55
5. <u>Conclusies.</u>	60
<u>Literatuur.</u>	61
<u>Gebruikte symbolen.</u>	62

1. Inleiding.

In de vakgroep Meet- en Regeltechniek van de Technische Hogeschool Eindhoven, wordt o.a. gewerkt aan het onderwerp: Parameterschatting toegepast op de menselijke bloedsomloop. Daartoe is in het verleden reeds veel gedaan aan het schatten van de parameters en de orde van een lineair-tijddiscreet proces (lit 1,2), dat beschreven kan worden door onderstaande differentie vergelijkingen:

$$\begin{cases} Y_k = \sum_{i=0}^p b_i U_{k-i} - \sum_{i=1}^q a_i Y_{k-i} + e_k, \\ e_k = \sum_{i=1}^s c_i \xi_{k-i} - \sum_{i=1}^r d_i e_{k-i} + \xi_k, \end{cases}$$

waarin: U_k is het ingangssignaal,
 Y_k is het gestoord uitgangssignaal,
 e_k is de "equation-error",
 ξ_k is witte ruis, ongecorreleerd met U_k .

In het eerste gedeelte van dit verslag, worden een aantal orde test methoden beschreven en getoetst aan een gesimuleerd discreet proces. In het tweede gedeelte van dit verslag, wordt de theorie, die in het voorgaande beschreven is, zodanig aangepast, dat nu ook de parameters en de orde van een lineair continu proces geschat kunnen worden. Een lineair continu proces kan beschreven worden door de volgende differentiaalvergelijking:

$$Y(t) = b_0 u(t) + \sum_{i=1}^p b_i U^{(i)}(t) - \sum_{i=1}^q a_i Y^{(i)}(t) + e(t),$$

waarin: $U(t)$ is het ingangssignaal,
 $Y(t)$ is het gestoord uitgangssignaal,
 $e(t)$ is de " equation-error".

Bij het schatten aan een lineair continu proces wordt gebruik gemaakt van een z.g. afgeleiden genererend filter (lit. 3).

2. Bepalen van de orde van een lineair discreet proces.

Het eerste deel van dit verslag bestaat uit een overdruk van het artikel "The determination of the order of process- and noise dynamics".

Hierin worden resultaten van orde tests aan het z.g. Åström proces gegeven. Het Åström proces is een lineair tijddiscreet proces, dat beschreven wordt door de volgende differentievergelijking:

$$Y_k = U_{k-1} + 0,5 U_{k-2} + 1,5 Y_{k-1} - 0,7 Y_{k-2} + e_k. \quad (2.1)$$

Voor de "equation error" e kozen we:

$$e_k = \xi_k + 0,3 \xi_{k-1} + 0,5 e_{k-1},$$

waarin ξ_k samples van witte ruis, ongecorreleerd met U_k .

Dit proces is dus een tweede orde proces, met een eerste orde ruisfilter. In het vervolg is U_k witte ruis, met een rechthoekige amplitudeverdeling tussen de amplituden -1 en $+1$. Hierna zal gesproken worden over de z.g. F-test. Deze F-test is afgeleid voor het geval dat ξ_k stoornis is met Gaussische amplitudeverdeling. In paragraaf 2.2 is ξ_k daarom witte stoornis met een Gaussische amplitudeverdeling, met een gemiddelde waarde 0 en een ruisvermogen $\lambda/3$. Ter vergelijking is in paragraaf 2.1 ξ_k witte stoornis met een rechthoekige amplitudeverdeling tussen $-\lambda$ en $+\lambda$; de gemiddelde waarde van de stoornis is dan 0 en het ruisvermogen is ook $\lambda/3$. De orde tests zijn uitgevoerd voor $\lambda=0,25$; 1 ; 4 ; dit komt overeen met signaal ruis verhoudingen σ_x^2/σ_n^2 van $+8,3$ dB; $-3,7$ dB en $-15,7$ dB respectievelijk.

2.1. The determination of the order of process- and noise dynamics.

THE DETERMINATION OF THE ORDER OF PROCESS- AND NOISE DYNAMICS

A.J.W. van den Boom and A.W.M. van den Enden

University of Technology, E.E. Department

Eindhoven, the Netherlands

In most papers on parameter estimation schemes the order of the process under study is assumed to be known a-priori. In many practical situations, however, this information is lacking. Consequently simple methods for the determination of the order are necessary.

In this paper a description is given of five tests based on respectively: 1) the behaviour of the error function, 2) whiteness of the residuals (correlation function), 3) statistical independency of loss functions, 4) the behaviour of the determinant, and 5) the pole-zero cancellation effect.

Some of these methods are known (pole-zero cancellation, test of whiteness, F-test), the others are rearranged in such a way that a better discrimination of the order is obtained. The method based on the behaviour of the error function is extended in such a way that the order of both process- and noise dynamics are estimated separately.

An extensive set of simulations of the Åström-process is presented in order to elucidate the comparison of the different methods. It turns out that an acceptable determination of the order is possible even with a signal-to-noise ratio at the process output of -15dB.

CONTENTS

1. Introduction.
2. Outline of the problem.
3. Description of the example.
4. Description of the tests.
5. Comparison of the tests.
6. Conclusion.

1. INTRODUCTION

Although today's literature on parameter estimation schemes is huge, relatively little attention has been paid towards the problems of the determination of the order. Usually, the order is assumed to be known beforehand.

Woodside (1970) suggested three very interesting tests of order, based on the product moment matrix of the measurables. His methods are attractive because no estimations of the parameters have to be performed as a phase in the determination of the order. He is making use, however, of a priori information concerning the covariance matrix of the noise and consequently does not meet the problem of determining the order of the noise. Åström (1968) describes a statistical test (F-test) which is, theoretically, applicable for Gaussian measurables.

This test has been used by Gustavsson (1969) for constructing models of process- and noise dynamics. However, the noise was modelled as a pure moving-average series and the order of process- and noise dynamics were taken equal. Recently, Chow (1972) proposed a method for the determination of the orders of the moving-average and autoregressive parts separately of a mixed autoregressive moving-average series with noisy observations.

In this paper we will summarize and compare different methods suitable for the determination of the orders of process and, if applicable, noise dynamics. This work is partially based on an introductory study by Van der Sommen (1971)

2. OUTLINE OF THE PROBLEM

Consider a linear time invariant discrete process:

$$(1 + \sum_{i=1}^q a_i z^{-i}) y_k = (b_0 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}) u_k + e_k \quad (1)$$

where u_k and y_k are the input- and disturbed output signals respectively.

Define the equation error e_k as a linear filtering of a zero mean white noise ξ_k :

$$e_k = \frac{1 + \sum_{i=1}^s c_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^s d_i z^{-i}} \xi_k \quad (2)$$

which is a mixed autoregressive moving-average type of description.

Combine (1) and (2):

$$y_k = \frac{b_0 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^q a_i z^{-i}} u_k + \frac{1 + \sum_{i=1}^s c_i z^{-i}}{(1 + \sum_{i=1}^s d_i z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^q a_i z^{-i})} \xi_k \quad (3)$$

Define:

$$x_k = \frac{b_0 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^q a_i z^{-i}} u_k \quad (4)$$

and:

$$n_k = \frac{1 + \sum_{i=1}^s c_i z^{-i}}{(1 + \sum_{i=1}^s d_i z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^q a_i z^{-i})} \xi_k \quad (5)$$

Now x_k and n_k can be interpreted as the undisturbed output signal of the process and the corrupting output noise respectively.

As no knowledge is available of the quantities q and s we have to estimate these orders from the noisy observations y_k and the input signal u_k . Note that no detailed a priori knowledge of the statistical properties of the noise is assumed to be available. The need for the determination of s is motivated by the fact that for obtaining consistent estimates by the generalized least squares method, proper modelling of the noise is essential; cf. Talmon and Van den Boom (1973).

Before describing the different tests, it is useful to give explicitly the notation used in the following sections.

Starting from (1) and (2) we define:

$$\underline{y}^T = [y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_{q+N}] \quad (6)$$

$$\underline{b}^T = [b_0, \dots, b_q, -a_1, \dots, -a_q] \triangleq [\underline{b}^T, -\underline{a}^T] \quad (7)$$

$$\Omega(u, y) = [U|Y] = \begin{bmatrix} u_{q+1} & \dots & u_1 & y_q & \dots & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{u}_{q+N} & \dots & \dot{u}_N & y_{q+N-1} & \dots & \dot{y}_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\underline{e}^T = [e_{q+1}, \dots, e_{q+N}] \quad (9)$$

where N is the number of samples. Rewriting (1) in matrix-notation:

$$\underline{y} = \Omega(u, y)\underline{b}' + \underline{e} \quad (10)$$

A least squares estimate $\underline{\beta}'$ of \underline{b}' is:

$$\underline{\beta}' = [\Omega^{*T}\Omega^*]^{-1}\Omega^{*T}\underline{y} \quad (11)$$

where $\beta^{T\Delta}(\underline{\beta}^T, -\underline{\alpha}^T)$ has dimension $2\hat{q}+1$; $\Omega^*(u, y)$ is a $N \times (2\hat{q}+1)$ matrix and \hat{q} is the model order. Now $\underline{\beta}'$ is only consistent if \underline{e} is white. Analogous to (10) we can rewrite (2) in matrix vector notation:

$$\underline{e} = E\underline{c} - E\underline{d} + \underline{\xi} \quad (12)$$

with:

$$E = \begin{bmatrix} e_{\cdot q} & \dots & e_{\cdot q-s+1} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{q+N-1} & \dots & e_{q-s+N} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{\cdot q} & \dots & \xi_{\cdot q-s+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{q+N-1} & \dots & \xi_{q-s+N} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\underline{\xi}^T = [\xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+N}] \quad (15)$$

$$\underline{d}^T = [d_1, \dots, d_s] \quad (16)$$

$$\underline{c}^T = [c_1, \dots, c_s] \quad (17)$$

Where s represents the unknown order of the noise filter. Combining (10) and (12) yields:

$$\underline{y} = \Omega(u, y, \xi, e)\underline{b}' + \underline{\xi} \quad (18)$$

with:

$$\Omega(u, y, \xi, e) = [U|Y|\underline{\xi}|E] \quad (19)$$

$$\underline{b}'^T = [\underline{b}^T, -\underline{a}^T, \underline{c}^T, -\underline{d}^T] \quad (20)$$

A least squares estimate $\underline{\beta}'$ of \underline{b}' is: (21)

$$\underline{\beta}' = [\Omega^{*T}(u, y, \hat{\xi}, \hat{e})\Omega^*(u, y, \hat{\xi}, \hat{e})]^{-1}\Omega^{*T}(u, y, \hat{\xi}, \hat{e})\underline{y}$$

with:

$$\Omega^*(u, y, \hat{\xi}, \hat{e}) = [U^*|Y^*|\hat{\Xi}^*|\hat{E}^*] \quad (22)$$

$$\underline{\beta}'^T = [\underline{\beta}^T, -\underline{\alpha}^T, \underline{y}^T, -\underline{\delta}^T] \quad (23)$$

where U^* and Y^* are $N \times (\hat{q}+1)$ and $N \times \hat{q}$ matrices respectively containing the measurables; $\hat{\Xi}^*$ and \hat{E}^* are both $N \times \hat{s}$ matrices with \hat{s} being the order of the noise model.

As \underline{e} and $\underline{\xi}$ are not available, we have to estimate them by making use of old estimates of process- and noise parameters yielding \hat{e} and $\hat{\xi}$ and consequently \hat{E}^* and $\hat{\Xi}^*$ cf. Talmon and Van den Boom (1973).

3. DESCRIPTION OF THE EXAMPLE

In the following section results will be given of order tests applied on the following combination of discrete process- and noise dynamics:

$$\text{process: } y_k^{-1} 5y_{k-1} + 0.7y_{k-2} = u_{k-1} + 0.5u_{k-2} + e_k \quad (24)$$

$$\text{noise: } e_k - 0.5e_{k-1} = \xi_k + 0.3\xi_{k-1} \quad (25)$$

The process used is the same as proposed by Åström (1968), while the noise filter used is the same as proposed by Talmon and Van den Boom (1973).

The signals u_k and ξ_k are white noise sequences with a rectangular distribution between $(-1, +1)$ and $(-\lambda, +\lambda)$ respectively.

The input signal u_k and the disturbed output signal y_k are available for estimation (500 samples).

The signal-to-noise ratios of the undisturbed signal x_k and the additive noise n_k are for:

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{4} & \quad S/N = 8,3 \text{ dB} \\ \lambda = 1 & \quad S/N = -3,7 \text{ dB} \\ \lambda = 4 & \quad S/N = -15,7 \text{ dB} \end{aligned}$$

The parameter estimation method used is the aforementioned extended matrix method.

4. DESCRIPTION OF THE TESTS

4.1. The behaviour of the error function.

Let us study the behaviour of the error function $V_1 = \frac{1}{N} \hat{e}^T \hat{e}$ as it is related to the order of the estimates.

$$\hat{e} = \underline{y} - \Omega(u, y)\underline{\beta}' = \Omega(u, y)\underline{b}' - \Omega^*(u, y)\underline{\beta}' + \underline{e} \triangleq \underline{m} + \underline{e} \quad (26)$$

$$V_1 = \frac{1}{N} \hat{e}^T \hat{e} = \quad (27)$$

$$= \frac{1}{N} (\underline{m}^T \underline{m} + 2\underline{b}'^T \Omega^T(u, y)\underline{e} - 2\underline{\beta}'^T \Omega^{*T}(u, y)\underline{e} + \underline{e}^T \underline{e})$$

In order to gain insight, assume that \underline{e} is white noise and take the probability limit of V_1 using (8):

$$\begin{aligned} \text{plim}_{N \rightarrow \infty} [V_1] &= \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{m}^T \underline{m} \right] + 2 \underline{b}'^T \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \begin{bmatrix} \underline{U}^T \\ \underline{X}^T + \mathcal{M}^T \end{bmatrix} \underline{e} \right] - \\ &- 2 \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\underline{\beta}'^T \right] \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \begin{bmatrix} \underline{U}^{*T} \\ \underline{X}^{*T} + \mathcal{M}^{*T} \end{bmatrix} \underline{e} \right] + \\ &+ \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{e}^T \underline{e} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

where \mathcal{M}^* is a $N \times \hat{q}$ matrix containing the disturbing noise cf. equation (5). Now, as \underline{e} is independent of \underline{u} and \underline{x} , and \underline{e} is independent of the rows of \mathcal{M}^* due to its white character, we find:

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} [V_1] = \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{m}^T \underline{m} \right] + \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{e}^T \underline{e} \right] \quad (29)$$

Let us consider the first term of the right-hand part of (29). Therefore we take into account the asymptotic properties of the estimate $\underline{\beta}'$, cf. equation (11):

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} [\beta_i] = \begin{cases} \neq b_i & \text{if } \hat{q} < q \text{ due to the truncation effect.} \\ = b_i & \text{if } \hat{q} = q \\ = b_i & \text{if } i \leq q \\ = 0 & \text{if } i > q \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} [\alpha_i] = \begin{cases} \neq a_i & \text{if } \hat{q} < q \text{ due to truncation} \\ = a_i & \text{if } \hat{q} = q \\ = a_i & \text{if } i \leq q \\ = 0 & \text{if } i > q \end{cases} \quad (31)$$

This leads to:

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{m}^T \underline{m} \right] = \begin{cases} > 0 & \text{for } \hat{q} < q \\ = 0 & \text{for } \hat{q} \geq q \end{cases} \quad (32)$$

Consequently, the behaviour of the error function V_1 is significantly changing in the neighbourhood of q , cf. figure 1 curve a.

In practical situations we are dealing with data sequences of finite length, with a non white equation error \underline{e} and with estimates of \underline{e} , so the behaviour of V_1 will be less pronounced and more noisy both depending on the signal to noise ratio and the colouring of \underline{e} , cf. figure 1 curve b.

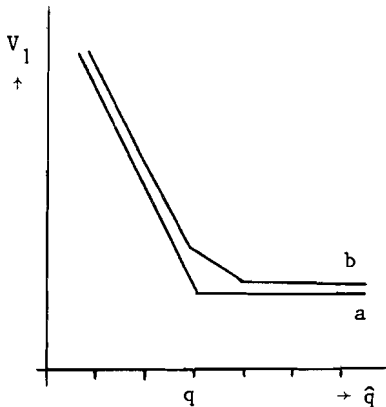


figure 1.

For the determination of the order of the noise dynamics s we can use similar reasonings. Therefore let us consider first the following undisturbed autoregressive moving-average process cf. equation (12)

$$\underline{e} = \underline{\Xi} \underline{c} - \underline{E} \underline{d} + \underline{\xi} \quad (33)$$

The residual can be defined as:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\xi}} &\triangleq \underline{e} + \underline{E}^* \underline{\delta} - \underline{\Xi}^* \underline{\gamma} = - \underline{E} \underline{d} + \underline{\Xi} \underline{c} + \underline{E}^* \underline{\delta} - \underline{\Xi}^* \underline{\gamma} + \underline{\xi} \\ &\triangleq \underline{r} + \underline{\xi} \end{aligned} \quad (34)$$

where \underline{E}^* and $\underline{\Xi}^*$ are $N \times \hat{s}$ matrices and $\underline{\delta}$ and $\underline{\gamma}$ are vectors of dimensions \hat{s} , \hat{s} being the order of the model.

$$\text{Define } V_2 = \frac{1}{N} \tilde{\underline{\xi}}^T \tilde{\underline{\xi}} \quad (35)$$

Now:

$$\begin{aligned} \text{plim}_{N \rightarrow \infty} [V_2] &= \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{r}^T \underline{r} + 2 \underline{r}^T \underline{\xi} + \underline{\xi}^T \underline{\xi} \right] = \\ &= \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{r}^T \underline{r} \right] + \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{\xi}^T \underline{\xi} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

because \underline{r} and $\underline{\xi}$ are uncorrelated due to the white character of $\underline{\xi}$.

As:

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} [\gamma_i] = \begin{cases} \neq c_i & \text{if } \hat{s} < s \\ = c_i & \text{if } \hat{s} = s \\ = c_i & \text{if } i \leq s \\ = 0 & \text{if } i > s \end{cases} \quad (37)$$

and:

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} [\delta_i] = \begin{cases} \neq d_i & \text{if } \hat{s} < s \\ = d_i & \text{if } \hat{s} = s \\ = d_i & \text{if } i \leq s \\ = 0 & \text{if } i > s \end{cases} \quad (38)$$

we find that:

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{r}^T \underline{r} \right] = \begin{cases} > 0 & \text{for } \hat{s} < s \\ = 0 & \text{for } \hat{s} \geq s \end{cases} \quad (39)$$

Similar to V_1 , the behaviour of V_2 is qualitatively changing in the neighbourhood of the correct order of the model. In practical situations, we only have approximated values of the signals \underline{e} and $\underline{\xi}$, leading to a less ideal behaviour of V_2 comparable to curve b of figure 1.

By observing the qualitative character of V_1 and V_2 simultaneously we are able to determine the orders of process- and noise dynamics separately. In figure 2 the quantity $\log V_1(\hat{q})$ shows a change in behaviour for $\hat{q}=2$, for different noise filter orders ($\hat{s}=0,1,2$).

In figure 3 the quantity $\log V_2(\hat{s})$ with $\hat{q}=2$ leads to $\hat{s}=1$. Also, by observing V_1 and V_2 we are able to distinguish the correct orders of process- and noise dynamics separately. It is obvious that V_2 is also a function of \hat{q} . This gives the possibility to use V_2 as an indicator for the order of the process itself. In figure 4 it can be seen that $\hat{q}=2$ looks a very reasonable estimate for the given λ .

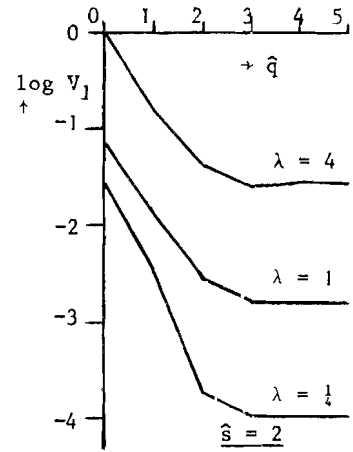
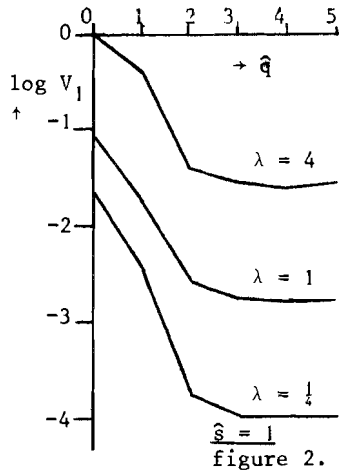
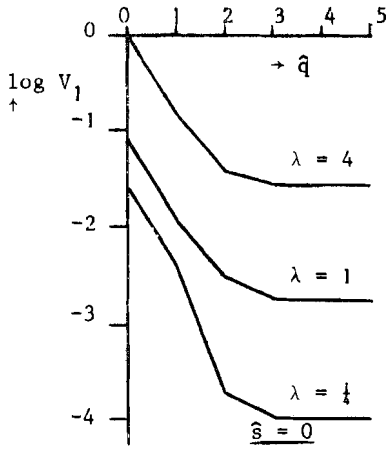


figure 2.

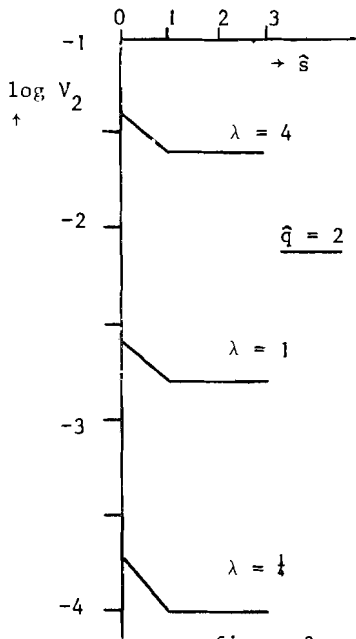


figure 3.

4.2. Whiteness of residuals.

This method is based on the fact that by proper modelling of process- and noise dynamics $\hat{\xi}$ can be seen as an acceptable estimate of the white noise $\underline{\xi}$. Therefore, testing $\hat{\xi}$ for its statistical properties gives us an indication of the quality of the modelling.

If we compute

$$\tilde{\Psi}_{\hat{\xi}\hat{\xi}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\xi}_{i+i\tau} \hat{\xi}_i$$

we can test if this can be accepted as the autocorrelation function of a white noise sequence, taking into account the limited number of samples used in the computation. Analogous to Laning and Battin (1956) it can be shown that the variance in the correlation function $\tilde{\Psi}(\tau)$ of a gaussian white signal on basis of calculation with only N samples is:

$$\text{var}\{\tilde{\Psi}(\tau)\} = \frac{\Psi^2(0)}{N} \quad \tau \neq 0 \quad (40)$$

If we define a normed correlation function:

$$\tilde{R}(\tau) \triangleq \frac{\tilde{\Psi}(\tau)}{\tilde{\Psi}(0)} \quad (41)$$

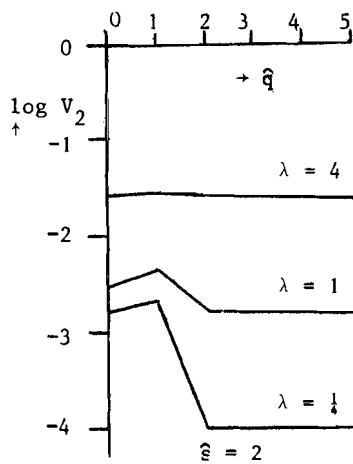
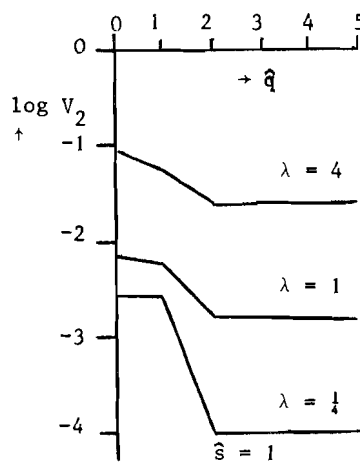
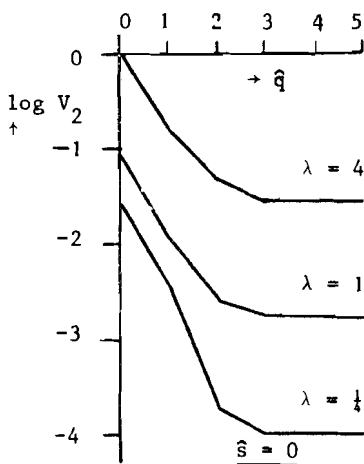


figure 4

THE DETERMINATION OF THE ORDER OF PROCESS- AND NOISE DYNAMICS

then: $\text{var}(\tilde{R}(\tau)) \approx \frac{1}{N}$ (42)

In figure 5a $R_{\xi\xi}(\tau)$ is plotted for $\hat{s}=1$ and $\hat{q}=0,1,2$ respectively ($\lambda=\frac{1}{4}$). If we calculate the variance $\hat{\sigma}_{\xi\xi}^2(R_{\xi\xi})$ using $R_{\xi\xi}(\tau) \tau = 1, \dots, 9$ we can check if this $\hat{\sigma}_{\xi\xi}^2$ is below the theoretical limit of (42). In figure 5b $\log \hat{\sigma}_{\xi\xi}^2(R_{\xi\xi})$ is plotted for different orders of the noise model. It is obvious that $\hat{q}=3$ is the selected process order for $\hat{s}=0$, which can be explained if we rewrite equations (24) and (25):

$$(1-1.5z^{-1}+0.7z^{-2})y_k = (z^{-1}+0.5z^{-2})u_k + \frac{1}{1-0.8z^{-1}+0.24z^{-2}+\dots}\xi_k$$

(43)

It looks reasonable that $1-0.8z^{-1}$ is a good approximation of:

$$1-0.8z^{-1} + 0.24z^{-2} - 0.072z^{-3}$$

leading to:

$$(1-1.5z^{-1} + 0.7z^{-2})(1-0.8z^{-1})y_k = (z^{-1} + 0.5z^{-2})(1-0.8z^{-1})u_k + \xi_k$$

For $\hat{s}=1$ the method selects $\hat{q}=2$ which is correct. For $\hat{s}=2$ order 0 is accepted by the method. The whiteness of residuals test is not able to distinguish between process- and noise dynamics.

It is the authors' opinion that this method is very suited to be used as a check on the method based on minimization of the loss function. The two tests can be considered as each other's complement as the loss function test takes into account the autocorrelation function of the residuals with zero delay while the whiteness test considers delays unequal to zero.

4.3. The F-Test.

Aström (1968) describes a test based on the statistical independency of the quantities $V_2(\hat{q}_2)$ and $V_2(\hat{q}_1) - V_2(\hat{q}_2)$, where $V_2(\hat{q}_1)$ and $V_2(\hat{q}_2)$ are loss functions based on models with order \hat{q}_1 and \hat{q}_2 respectively and normal residuals. If $\hat{q}_2 > \hat{q}_1$, then $V_2(\hat{q}_2)$ and $V_2(\hat{q}_1) - V_2(\hat{q}_2)$ are independent random variables with χ^2 distributions and $N - (2\hat{q}_2 + 1)$ and $2(\hat{q}_2 - \hat{q}_1)$ degrees of freedom respectively. The test quantity:

$$t = \frac{V_2(\hat{q}_1) - V_2(\hat{q}_2)}{V_2(\hat{q}_2)} \cdot \frac{N - (2\hat{q}_2 + 1)}{2(\hat{q}_2 - \hat{q}_1)} \quad (44)$$

has an $F(N-2\hat{q}_2-1, 2\hat{q}_2-2\hat{q}_1)$ distribution. For a risk level of 5% and $N > 100$ we test for $t < 3$. In table 1 results are given for $\lambda = \frac{1}{4}$, with $N = 200$ (samples 301-500). Note that we still are dealing with uniformly distributed random variables.

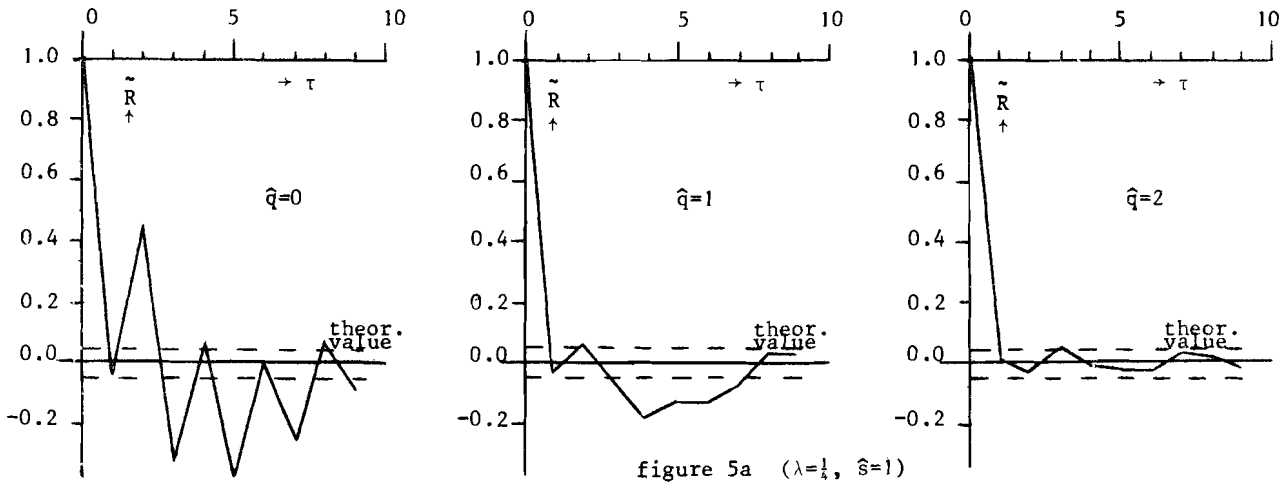


figure 5a ($\lambda=\frac{1}{4}, \hat{s}=1$)

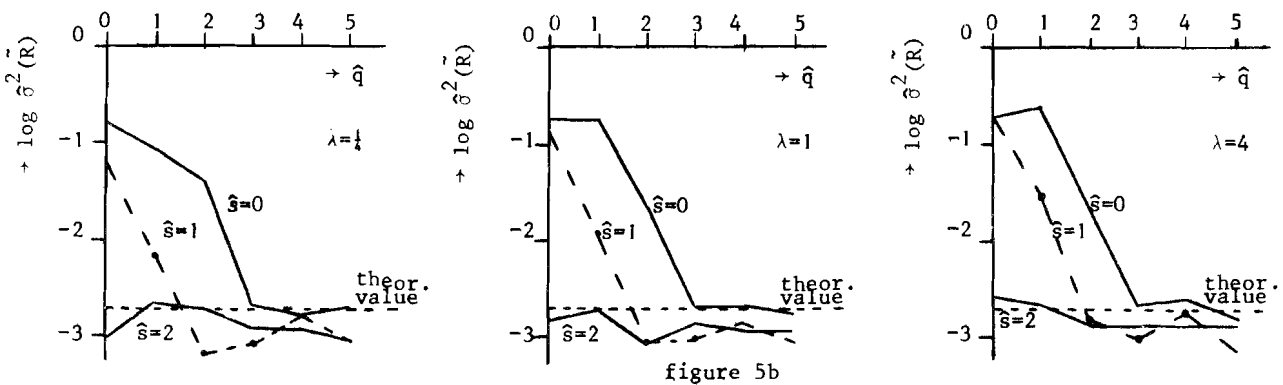


figure 5b

In practice we found no difference in results when testing with normal distributed noise. For $\hat{s}=0$ we choose a third order process, although the increase in order from 4 to 5 gives some improvement. For $\hat{s}=1$ we select $\hat{q}=2$ although the same problem arises at the increase of model order from 3 to 4. For $\hat{s}=2$ we have problems in selecting process order 2. Here also order 3 and 5 give some improvement. As a general impression the authors can state that, compared with the other tests, the F-test yields less impressing results.

It should be well realized that a slight decrease of the errorfunction is qualified by the F-test as a significant improvement. If $V_2(\hat{q}_2)=0.96 V_2(\hat{q}_1)$ then $t \approx 4$, which is significant!

An effect that may be important is the fact that we are generating our residuals during the iterative estimation scheme, resulting in residuals with poorer quality in the beginning of the procedure.

\hat{s}	\hat{q}_1	\hat{q}_2	1	2	3	4	5
0	0		610	6955	8088	6004	4963
	1		-	1859	1653	1091	846
	2		-	-	73.4	36.3	26.4
	3		-	-	-	0.00	2.09
	4		-	-	-	-	4.17
1	0		11.9	1352	883	687	544
	1		-	2402	1176	814	604
	2		-	-	-0.97	1.77	1.17
	3		-	-	-	4.55	2.25
	4		-	-	-	-	0.00
2	0		-26.2	718	506	375	320
	1		-	1988	1049	692	553
	2		-	-	6.09	3.02	4.45
	3		-	-	-	0.00	3.47
	4		-	-	-	-	6.94

Table 1 ($\lambda = \frac{1}{2}$)

4.4. The behaviour of the determinant.

This method is based on the fact that the rank of the $N \times (2\hat{q}+1)$ matrix $\Omega^*(u,x)$ is min. $(2q+1, 2\hat{q}+1)$, cf. Lee (1964) p. 97. Consequently, testing the $(2\hat{q}+1, 2\hat{q}+1)$ square matrix $\frac{1}{N} \Omega^{*T}(u,x) \Omega^*(u,x)$ for singularity gives the desired order. In noisy cases only $\Omega^*(u,y)$ is available so $\frac{1}{N} \Omega^{*T}(u,y) \Omega^*(u,y)$ has to be tested for near singularity. This test can be performed without executing the estimation algorithm. Of course $\frac{1}{N} \Omega^{*T}(u,y) \Omega^*(u,y)$ has only near singularity properties if the signal to noise ratio is not too small.

Now in equation (45) the ranks of Q_{11}^* and Q_{22}^* give the desired information of the order of process- and noise dynamics respectively. It is obvious that the rank of Q_{22}^* can not be determined without estimating the process- and noise parameters, as these are necessary for the generation of \hat{e} and $\hat{\xi}$.

Consequently we are forced to combine this type of test with the parameter estimation procedure.

$$\frac{1}{N} \Omega^{*T}(u,y,\hat{\xi},\hat{e}) \Omega^*(u,y,\hat{\xi},\hat{e}) = \tag{45}$$

$$= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} U^{*T}U^* & U^{*T}Y^* & U^{*T}\hat{\xi}^* & U^{*T}\hat{e}^* \\ Y^{*T}U^* & Y^{*T}Y^* & Y^{*T}\hat{\xi}^* & Y^{*T}\hat{e}^* \\ \hat{\xi}^{*T}U^* & \hat{\xi}^{*T}Y^* & \hat{\xi}^{*T}\hat{\xi}^* & \hat{\xi}^{*T}\hat{e}^* \\ \hat{e}^{*T}U^* & \hat{e}^{*T}Y^* & \hat{e}^{*T}\hat{\xi}^* & \hat{e}^{*T}\hat{e}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* \\ Q_{21}^* & Q_{22}^* \end{bmatrix}$$

As during the estimation

$$\left[\frac{1}{N} \Omega^{*T}(u,y,\hat{\xi},\hat{e}) \Omega^*(u,y,\hat{\xi},\hat{e}) \right]^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* \\ C_{21}^* & C_{22}^* \end{bmatrix} \tag{46}$$

is available, it is worthwhile to investigate if the matrices C_{ij}^* are useful for order determination. As $Q_{21}^* = Q_{12}^*$ we find:

$$C_{11}^* = [Q_{11}^* - Q_{12}^* Q_{22}^{*-1} Q_{12}^{*T}]^{-1} \tag{47}$$

$$C_{22}^* = [Q_{22}^* - Q_{12}^{*T} Q_{11}^{*-1} Q_{12}^*]^{-1} \tag{48}$$

Already we assumed that the input signal u is independent of the disturbing noise ξ , so for large N we find:

$$Q_{12}^* \approx \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y^{*T}\hat{\xi}^* & Y^{*T}\hat{e}^* \end{bmatrix} \tag{49}$$

Thus:

$$C_{11}^* \approx [Q_{11}^* - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}]^{-1} \tag{50}$$

$$Q_{11}^* \approx C_{11}^{*-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \tag{51}$$

where M is a submatrix which is only important when the signal-to-noise ratio is small. This will be indicated later in this section. If we neglect M for good signal-to-noise ratios, then C_{11}^* can be used as an indicator for the order of the process. Now, if Q_{11}^* is near singular, it has some eigenvalues which are small compared to the others. As the eigenvalues of C_{11}^* are approximately the inverses of the eigenvalues of Q_{11}^* , C_{11}^* also has eigenvalues which are strongly different in magnitude. This also indicates near singularity, which also occurs if $\hat{q} > q$.

Now define the relative determinant of C_{11}^* :

$$\text{rel.det.} C_{11}^* = \frac{\det C_{11}^*}{\text{maximum content of } C_{11}^*} \tag{52}$$

The use of the relative determinant is important because the determinant itself is a function of the amplitude of the signals:

$$\det Q = f(\text{amplitude}^{2(2\hat{q}+1)}) \tag{53}$$

In fig. 6 the behaviour of $\text{rel.det.} C_{11}^*$ is shown for $\hat{s}=0,1,2$ leading to $\hat{q}=2$ for $\lambda=\frac{1}{2}, 1$ and an doubtful determination $\hat{q}=2$ for $\lambda=4$. In practice, we found that the relative determinant of C_{22}^* is an useful indicator for the order of the noise, cf. fig. 7.

THE DETERMINATION OF THE ORDER OF PROCESS- AND NOISE DYNAMICS

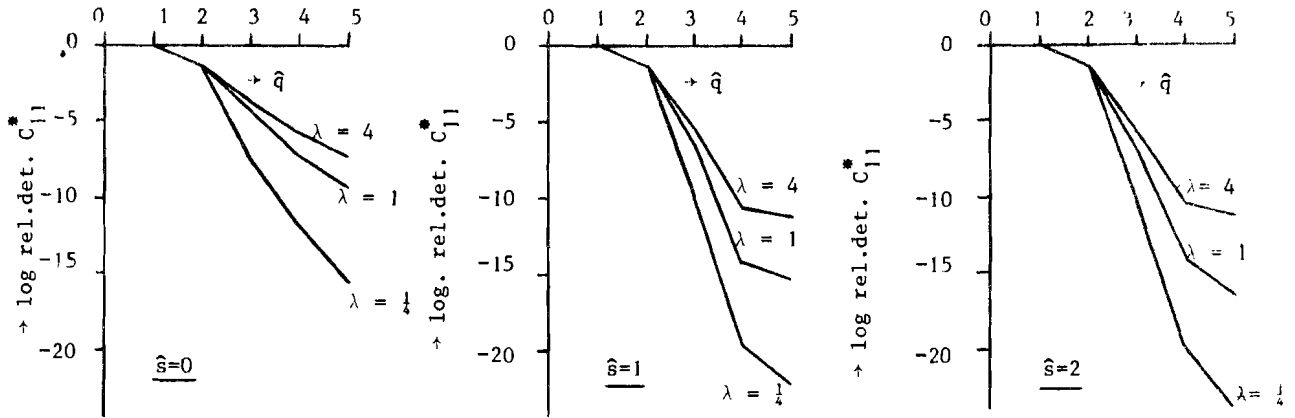


figure 6.

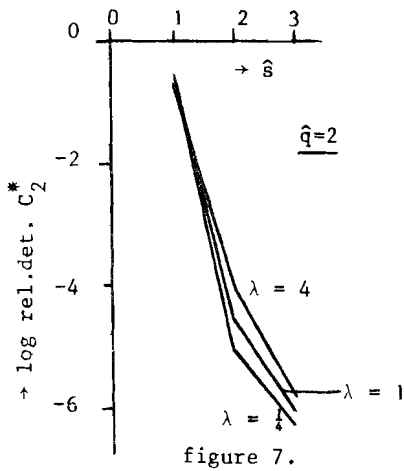


figure 7.

As $\det Q_{11}^*$ is small if $\hat{q} > q$ the quantity $\det C_{11}^*$ will be large. However as the maximum content of C_{11}^* is increasing more rapidly than $\det C_{11}^*$ the relative determinant of C_{11}^* will decrease for $\hat{q} > q$. The amount of increase of $\det C_{11}^*$ can be defined by:

$$\Delta C_{11}^* = \frac{\det C_{11}^* (\text{order } i)}{\det C_{11}^* (\text{order } i-1)} \quad (54)$$

Now by observing where a remarkable increase occurs the order of the process can be found, cf. figure 8. In this figure an increase of C_{11}^* can be observed for $\hat{q}=3$. The increase is dependent on the signal to noise ratio and is limited by the matrix M which has been neglected cf. equation (51). If the signal to noise ratio is larger ($\lambda = 1/64$) this increase is more apparent cf. fig. 8

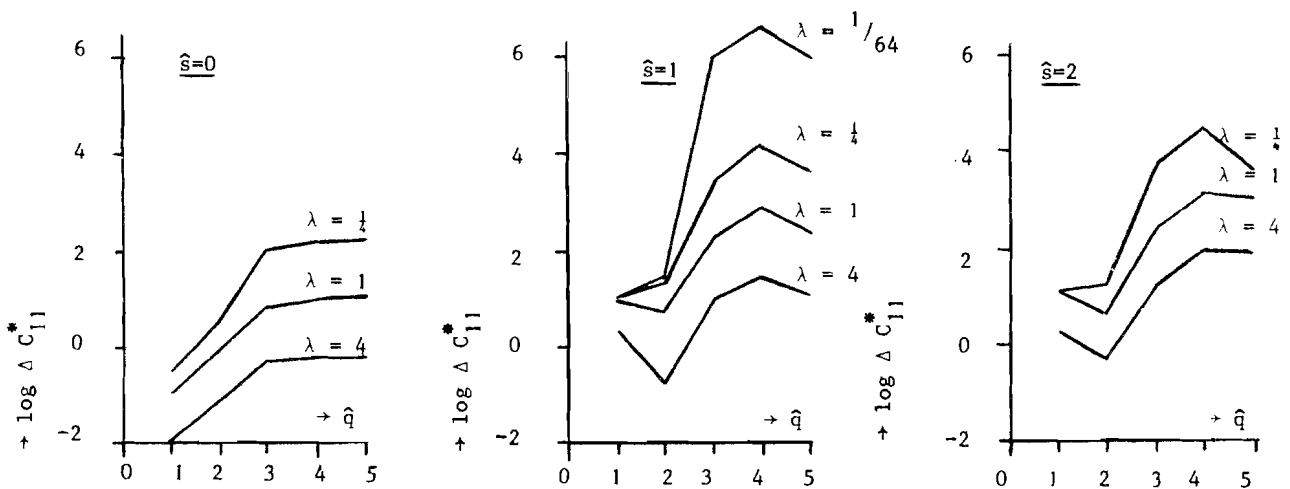


figure 8.

4.5. The pole-zero cancellation effect.

Let us choose a pure autoregressive type of modelling of the additive noise, cf. equation (2)

$$e_k = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} d'_i z^{-i}} \xi_k \quad (55)$$

Dependent on the values of d'_i we can approximate this infinite development by a finite sum:

$$e_k = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{s'} d'_i z^{-i}} \xi_k \quad (56)$$

Combining (56) with (1):

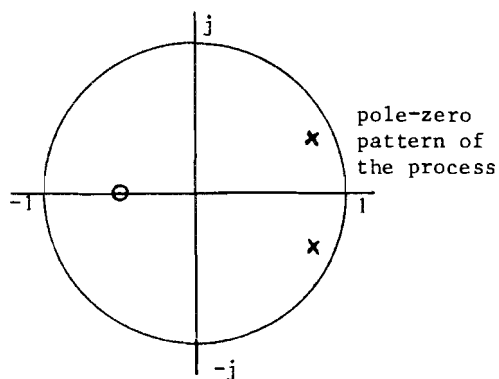


figure 9

$$\begin{aligned} (1 + \sum_{i=1}^q a'_i z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^{s'} d'_i z^{-i})y_k &= \\ &= (b_0 + \sum_{i=1}^q b'_i z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^{s'} d'_i z^{-i})u_k + \xi_k \end{aligned} \quad (57)$$

which can be written as:

$$(1 + \sum_{i=1}^{q+s'} a'_i z^{-i})y_k = (b_0 + \sum_{i=1}^{q+s'} b'_i z^{-i})u_k + \xi_k \quad (58)$$

By estimating the a' and b' parameters and comparing the poles and zero's we will notice poles and zero's cancelling each other if $\hat{q} > q$. This phenomena has been indicated by Gustavsson (1968). In figure 9 the true pole-zero pattern of the process is given in the unit circle of the z -plane. In figure 10 the pole-zero cancellation effect is shown for $\lambda = \frac{1}{4}$. It is clear that the pole-zero pattern of the process is built up for $\hat{q}=1$ and $\hat{q}=2$, and remains hardly unchanged for $\hat{q} \geq 2$. Moreover, for $\hat{q} \geq 3$, cancelling pole-zero combinations are added. It is obvious that the process-order can be determined as $\hat{q}=2$. If the signal-to-noise ratio is small (e.g. $\lambda=4$) the cancellation effect will be less pronounced, cf. figure 11. Furthermore, the bias in the estimated poles and zero's of the process will be more important. It will be clear that this method is suited for order determination of the process only.

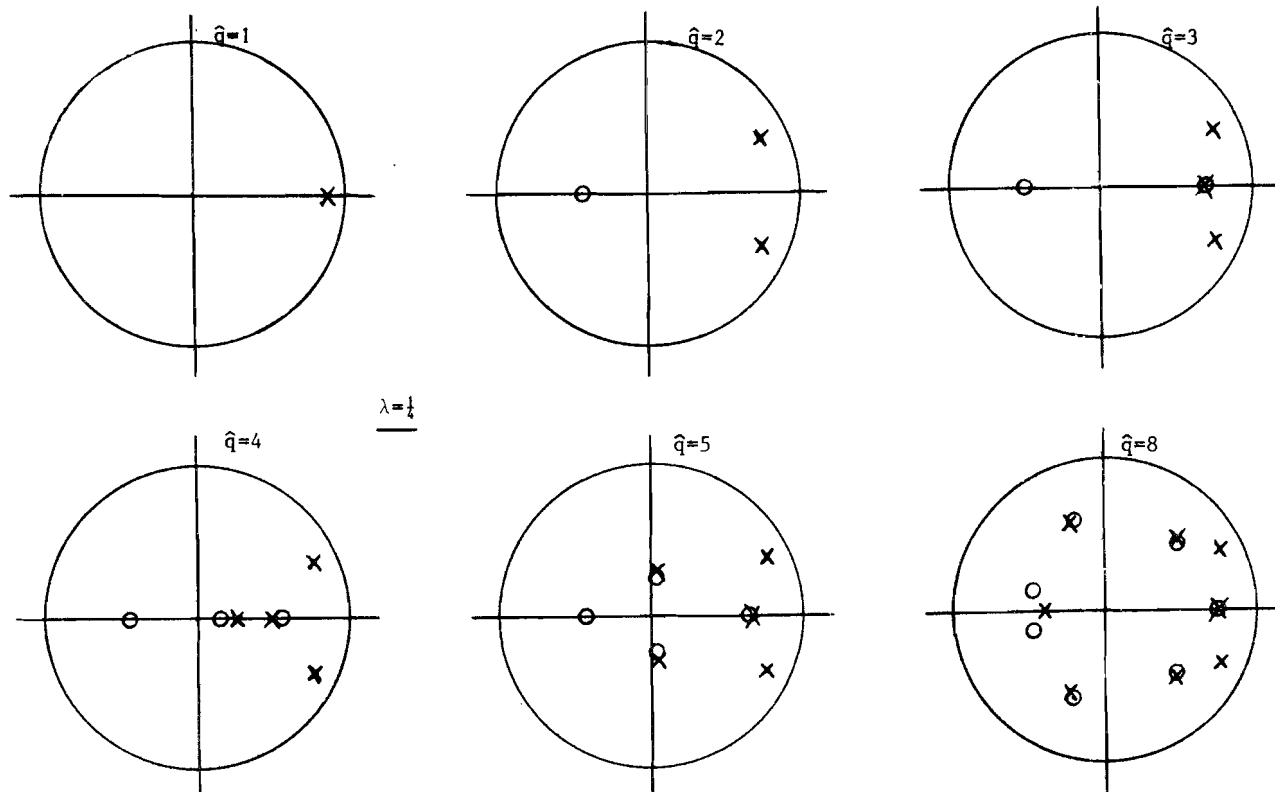


figure 10

THE DETERMINATION OF THE ORDER OF PROCESS- AND NOISE DYNAMICS

The noise is modelled as a pure autoregressive series which has the principal drawback of requiring more parameters for a complete description. As during the order determination by means of the other methods, estimates of the parameters of the process become available for different \hat{q} and $\hat{s}=0$, it is rather simple to implement this method as an additional check on the results of the other methods.

5. COMPARISON OF THE TESTS

In table 2 the main results of the seven tests described in the previous section are grouped together. It is important to note that these figures have been obtained from a single set of input-output data in order to facilitate a useful comparison. The tests can be divided into three groups:

Group I:

Tests for the determination of the order of process and noise dynamics separately:

Ia V_1 with V_2

Ib V_2

Ic C_{11} with C_{22}

Group II:

Tests for the determination of the order of process dynamics only:

II - pole zero cancellation.

Group III:

Tests for the determination of an acceptable combination of process- and noise order.

IIIa residuals

IIIb F-test

It is obvious that the tests of group I are preferable if the orders of process- and noise dynamics have to be determined separately. The tests of group II and III are useful as an extra verification of the results of the tests of group I. It is the authors' experience that order determination should be performed using the different tests in parallel. In most practical situations this will very well be possible as the quantities necessary for the different tests become available during the estimation.

It can also be noticed in table 2 that the quantitative results of the different tests are approximately equal except those of the F-test, which are inferior.

Furthermore, the V_1, V_2 combination gives somewhat better results.

The main conclusion to be stated is that an acceptable test of order of process- and noise dynamics separately could be achieved even for a signal to noise ratio at the process output of -15.7dB ($\lambda=4$)!

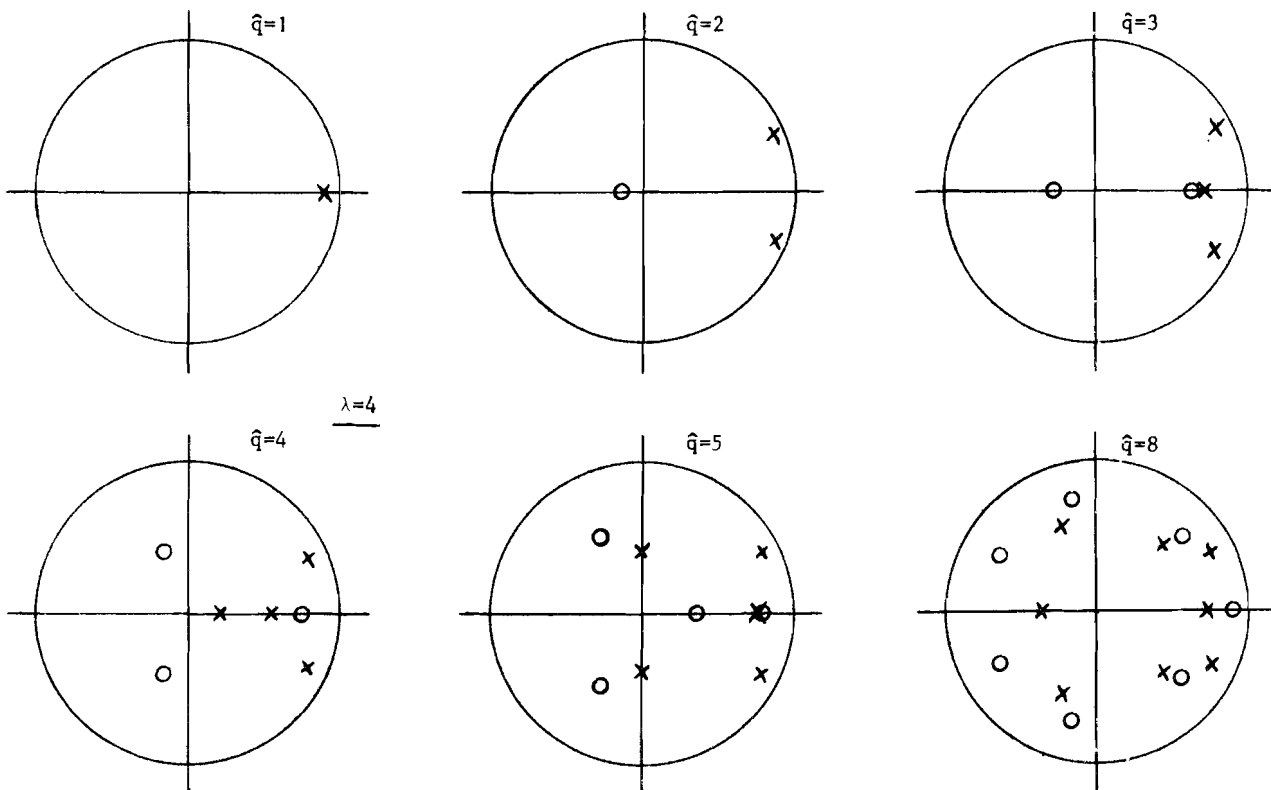


figure 11

test	$\lambda = \frac{1}{2}$		$\lambda = 1$		$\lambda = 4$		group
	\hat{q}	\hat{s}	\hat{q}	\hat{s}	\hat{q}	\hat{s}	
V_1	$\begin{matrix} \hat{s}=0 \\ \hat{s}=1 \\ \hat{s}=2 \end{matrix} \rightarrow \hat{q}=2$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \\ \hat{s}=1 \\ \hat{s}=2 \end{matrix} \rightarrow \hat{q}=2$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \\ \hat{s}=1 \\ \hat{s}=2 \end{matrix} \rightarrow \hat{q}=2$		Ia
V_2		$\hat{q}=2 \rightarrow \hat{s}=1$		$\hat{q}=2 \rightarrow \hat{s}=1$		$\hat{q}=2 \rightarrow \hat{s}=1$	
V_2	$\begin{matrix} \hat{s}=0 \\ \hat{s}=1 \\ \hat{s}=2 \end{matrix} \rightarrow \hat{q}=2$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=? \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=? \end{matrix}$		Ib
relative determinant C_{11}	$\begin{matrix} \hat{s}=0 \\ \hat{s}=1 \\ \hat{s}=2 \end{matrix} \rightarrow \hat{q}=2$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=? \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=2 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=? \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2(?) \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=2(?) \end{matrix}$		
relative determinant C_{22}		$\hat{q}=2 \rightarrow \hat{s}=1$		$\hat{q}=2 \rightarrow \hat{s}=1$		$\hat{q}=2 \rightarrow \hat{s}=1$	Ic
pole-zero cancellation	$\hat{q}=2$		$\hat{q}=2$		$\hat{q}=2$		
residuals	$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=3 \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=3 \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=3 \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2 \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=0(?) \end{matrix}$		IIIa
F-test	$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=3(5) \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2(4) \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=2(3)(5) \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=3(5) \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2(4) \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=2(3)(5) \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{s}=0 \rightarrow \hat{q}=3(5) \\ \hat{s}=1 \rightarrow \hat{q}=2(4) \\ \hat{s}=2 \rightarrow \hat{q}=2(3)(5) \end{matrix}$		IIIb

Table 2

6. CONCLUSION

In this paper different tests for the determination of the order in connection with identification problems are compared. Simulations of the Åström process show the different properties of the tests described.

Two types of tests, the behaviour of the error function and the behaviour of the determinants are shown to be suitable for determining the order of process- and noise dynamics separately. These tests are compared in qualitative and quantitative behaviour with other tests e.g. the F-test, the test of whiteness of the residuals and the pole-zero cancellation effect.

Simulated results show that an acceptable test of order of process- and noise dynamics separately is possible even at a signal-to-noise ratio of -15.7dB.

LITERATURE

K.J. Åström (1968). Lectures on the Identification Problem - The Least Squares Method. Report 6806, Lund Institute of Technology, Sweden.

J.C. Chow (1972). On Estimating the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations. IEEE, AC-17, p. 707

I. Gustavsson (1969). Maximum Likelihood Identification of the Ågesta Reactor and Comparison with the Results of Spectral Analysis. Report 6903, Lund Institute of Technology, Sweden.

J.H. Laning and R.H. Battin (1956). Random Processes in Automatic Control. McGraw-Hill, New York.

R.C.K. Lee (1964). Optimal Estimation, Identification, and Control. Research Monograph no. 28, MIT Press, Cambridge, Mass.

F.L.M. van der Sommen (1971). The Determination of the Order of Linear Systems (in Dutch) M.Sc. report, E.E. Dept., University of Technology, Eindhoven, the Netherlands

J.L. Talmon and A.J.W. van den Boom (1973). On the Estimation of the Transfer Function Parameters of Process- and Noise Dynamics using a Single-Stage Estimator, Preprints Third IFAC Symposium on Identification, The Hague.

C.M. Woodside (1970). Estimation of the Order of Linear Systems. Preprints Second IFAC Symposium on Identification, Prague.

2.2. Resultaten van orde tests met Gaussische stoornis.

In paragraaf 2.1 was ξ_k witte stoornis met een rechthoekige amplitudeverdeling; nu is ξ_k witte stoornis met een Gaussische amplitudeverdeling.

2.2.1. Gedrag van de kostenfuncties V1 en V2.

In figuur 2.2.1 en 2.2.2 zijn de kostenfuncties V1 en V2 uitgezet tegen de orde van het proces \hat{q} bij verschillende orden van het ruisfilter \hat{s} . Alle grafieken wijzen op een tweede orde proces. In figuur 2.2.3 is voor $\hat{q}=2$ de kostenfunctie V2 uitgezet tegen \hat{s} . Deze grafiek wijst duidelijk op een eerste orde ruisfilter.

2.2.2. De autocorrelatiefunctie van $\hat{\xi}$.

In figuur 2.2.4 is uitgezet: $\log \hat{\sigma}^2$ als functie van \hat{q} , bij $\hat{s}=0$; 1 en 2. Men ziet hierin:

- als $\hat{s}=0$; dan is $\hat{q} \geq 4$,
- als $\hat{s}=1$; dan is $\hat{q}=2$,
- als $\hat{s}=2$; dan is \hat{q} afhankelijk van de ruisamplitude λ ;
 $\lambda=0,25$ geeft $\hat{q}=1$,
 $\lambda=1,00$ geeft $\hat{q}=0$ of 1,
 $\lambda=4,00$ geeft $\hat{q}=2$ (niet erg overtuigend).

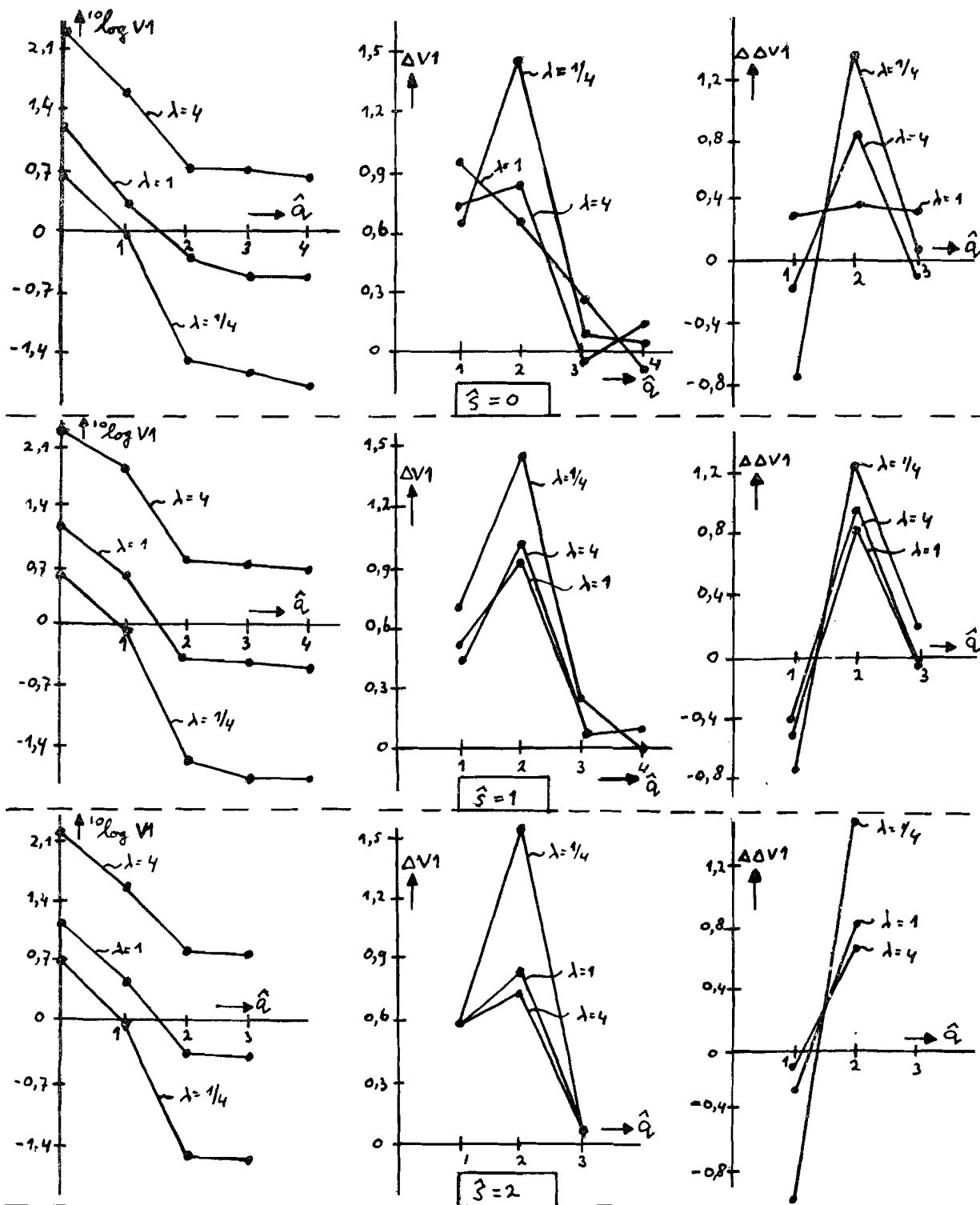
Ook hier blijkt, dat bij deze methode de orde van het ruisfilter bekend moet zijn, of op een andere manier geschat moet worden.

2.2.3. F-test.

Tabel 2.2.1 geeft de resultaten van de F-test met de kostenfunctie V2. Indien β als grenswaarde genomen wordt, dan ziet men, als:

- $\hat{s}=0$; dan is $\hat{q} \geq 4$,
- $\hat{s}=1$; dan is $\hat{q}=3$ (met een weinig significante overgang van $\hat{q}=2$ naar $\hat{q}=3$),
- $\hat{s}=2$; dan is $\hat{q}=2$.

Ook hier blijkt, dat de F-test slechts een indicatie geeft over de orde van een proces.

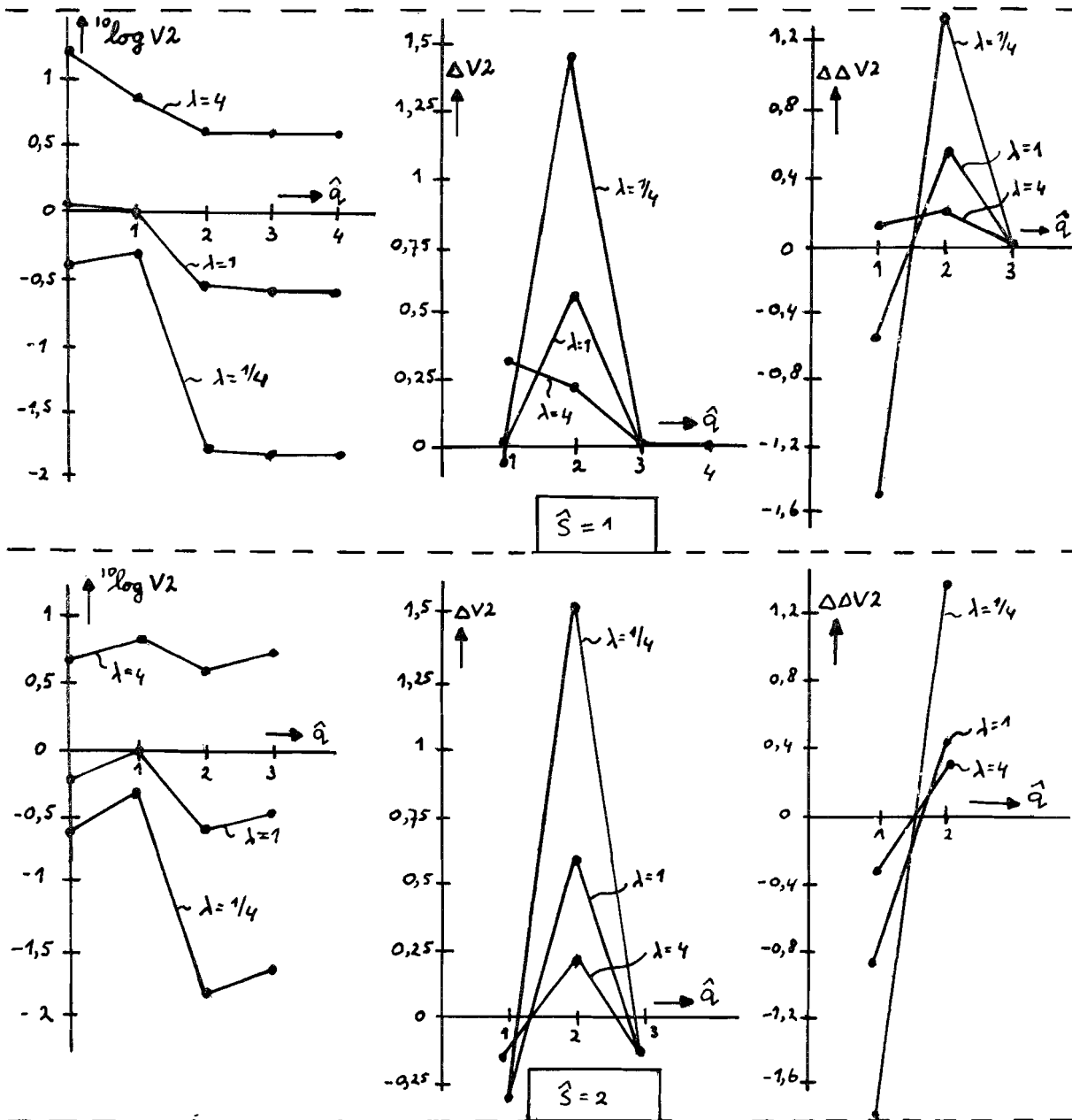


Gedrag van de kostenfunctie $10 \log V_1$

FIGUUR 2.2.1.

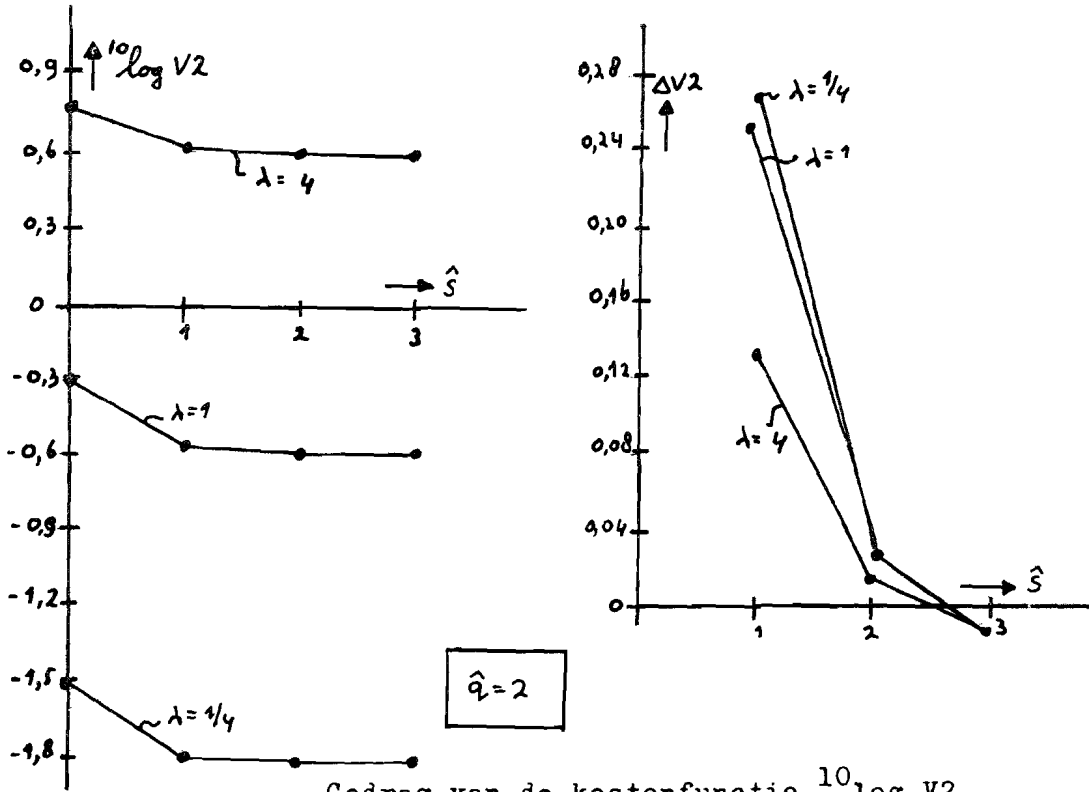
$$\hat{S} = 0$$

V1=V2: zie Figuur 2.2.1.



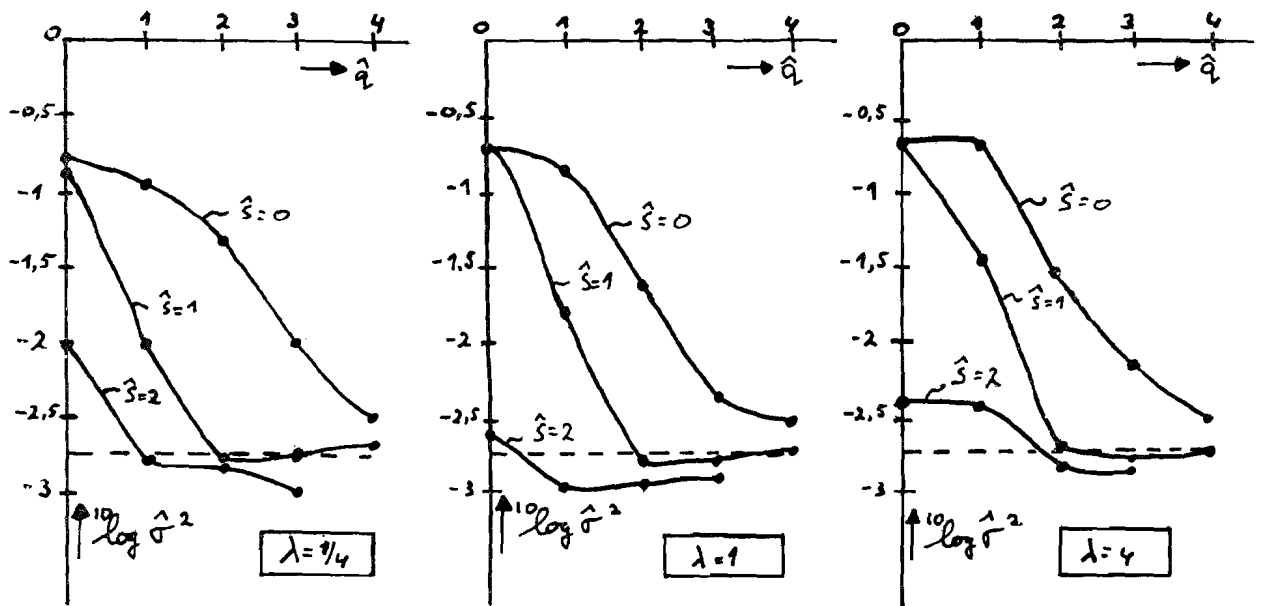
Gedrag van de kostenfunctie $10 \log V_2$.

FIGUUR 2.2.2.



Gedrag van de kostenfunctie $10 \log V_2$.

FIGUUR 2.2.3.



Autocorrelatiemethode

FIGUUR 2.2.4.

		$\lambda=1/4$				$\lambda=1$				$\lambda=4$			
\hat{s}	\hat{q}_1	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$	$\hat{q}_2=4$	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$	$\hat{q}_2=4$	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$	$\hat{q}_2=4$
0	0	351	6527	5396	5830	765	1794	2133	1214	402	1728	1086	1159
	1	----	2793	1742	1684	----	324	324	157	----	604	283	280
	2	----	----	24,3	39,2	----	----	75,8	17,9	----	----	-4,5	17,2
	3	----	----	----	43,5	----	----	----	-22	----	----	----	40,8
1	0	-15	1186	839	623	9,01	156	111	81,1	118	137	96,4	70,6
	1	----	2807	1489	983	----	278	149	96,4	----	71,9	39,6	25,5
	2	----	----	6,75	3,34	----	----	5,72	2,16	----	----	4,63	1,75
	3	----	----	----	0	----	----	----	-1,3	----	----	----	-1,0
2	0	-50	753	350	----	-49	48,1	14,2	----	-30	8,07	-4,9	----
	1	----	3114	1101	----	----	285	89,2	----	----	65,2	10,3	----
	2	----	----	-27	----	----	----	-27	----	----	----	-26	----

TABEL 2.2.1. de F-test met de kostenfunctie $\forall 2$.

2.2.4. Determinantenmethode.

Figuur 2.2.5 geeft: $^{10}\log |\text{rel det } C11|$ als functie van \hat{q} voor $\hat{s}=0;1$ en 2. Alle grafieken (vooral voor $\hat{s}=1$ en 2) wijzen op een tweede orde proces.

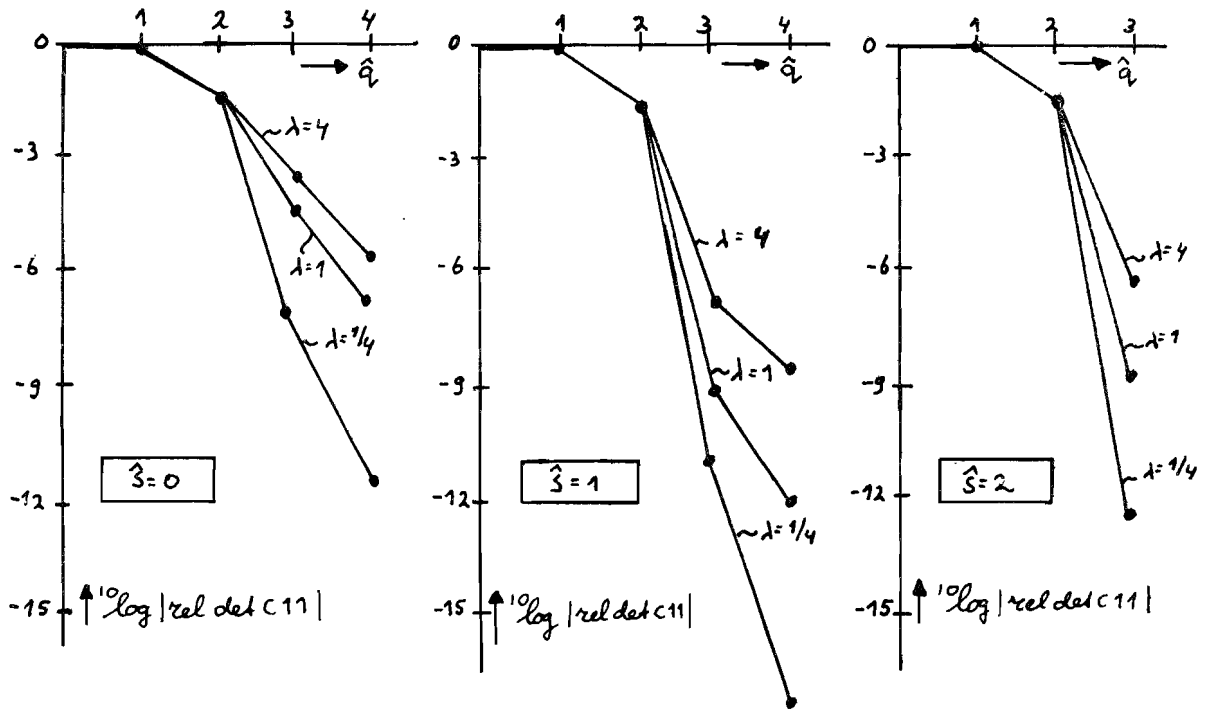
In figuur 2.2.6 is uitgezet: $^{10}\log |\text{rel det } C22|$ als functie van \hat{s} voor $\hat{q}=2$. Deze grafiek wijst op eerste orde ruisfilter.

2.2.5. Polen en nulpuntenmethode.

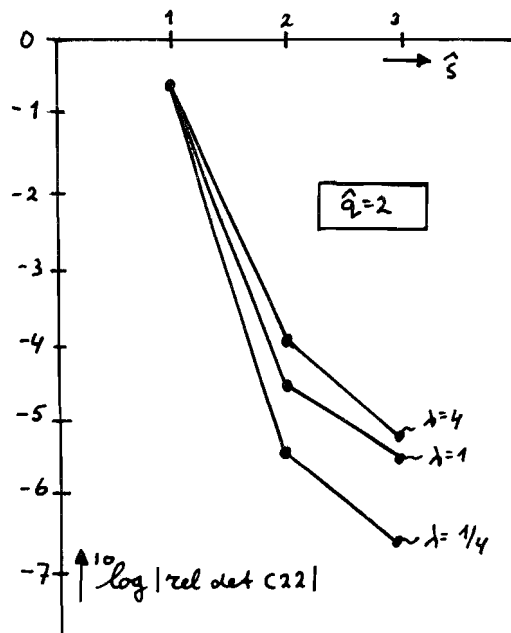
Figuur 2.2.7 geeft de geschatte polen en nulpunten voor $\lambda=1/4$. Men ziet hierbij voor $\hat{q}=3$ en 4 één resp. twee samenvallende polen en nulpunten, terwijl de resterende polen en nulpunten vrijwel op hun plaats blijven. Dit wijst dus op een eerste orde proces.

Figuur 2.2.8 geldt voor $\lambda=1$. Ook hier ziet men voor $\hat{q}=3$ en 4 samenvallende polen en nulpunten.

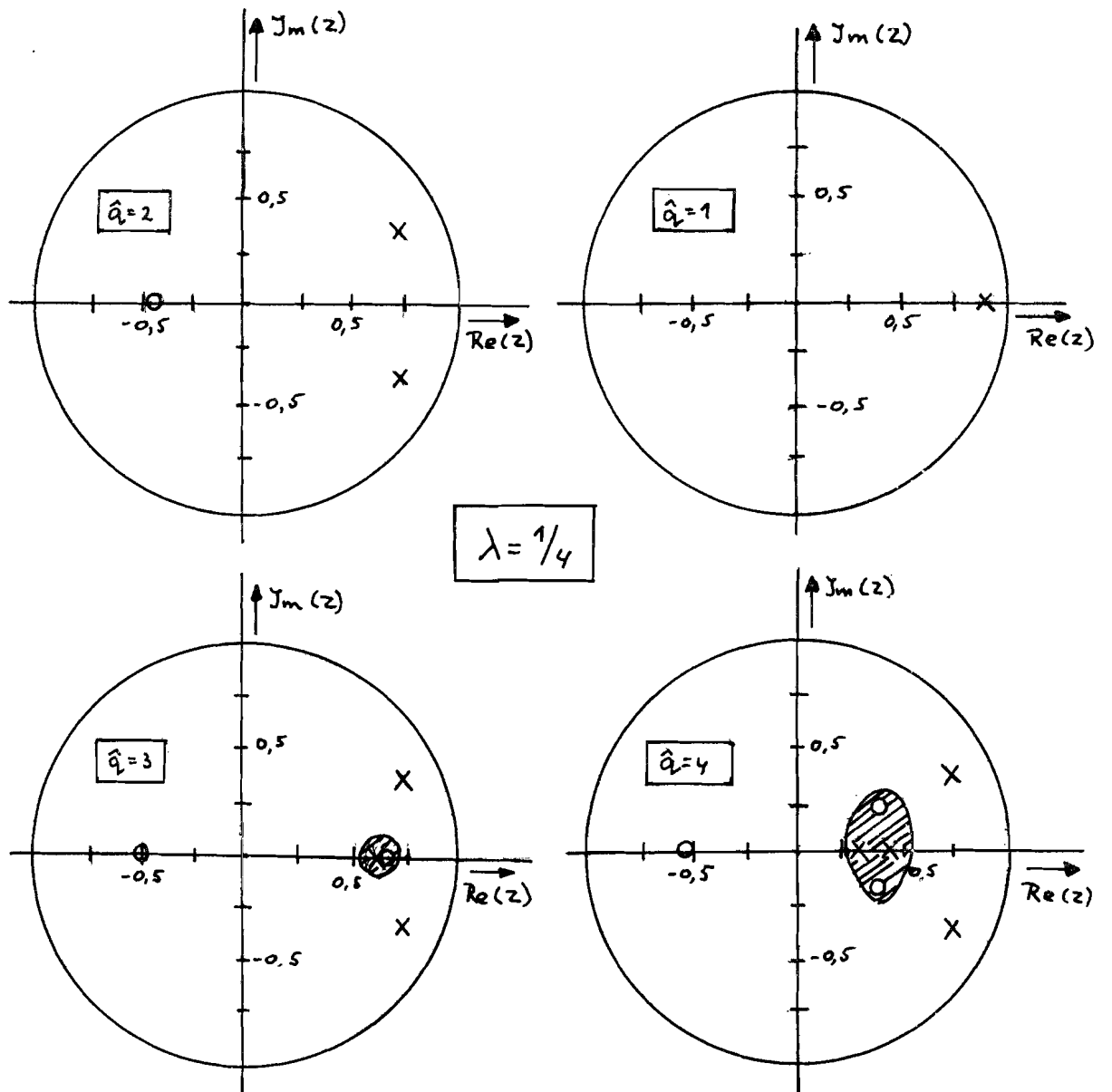
Figuur 2.2.9 geldt voor $\lambda=4$. Hier vallen de polen en nulpunten minder goed samen dan bij figuur 2.2.7 en 2.2.8.



FIGUUR 2.2.5 Determinantenmethode.

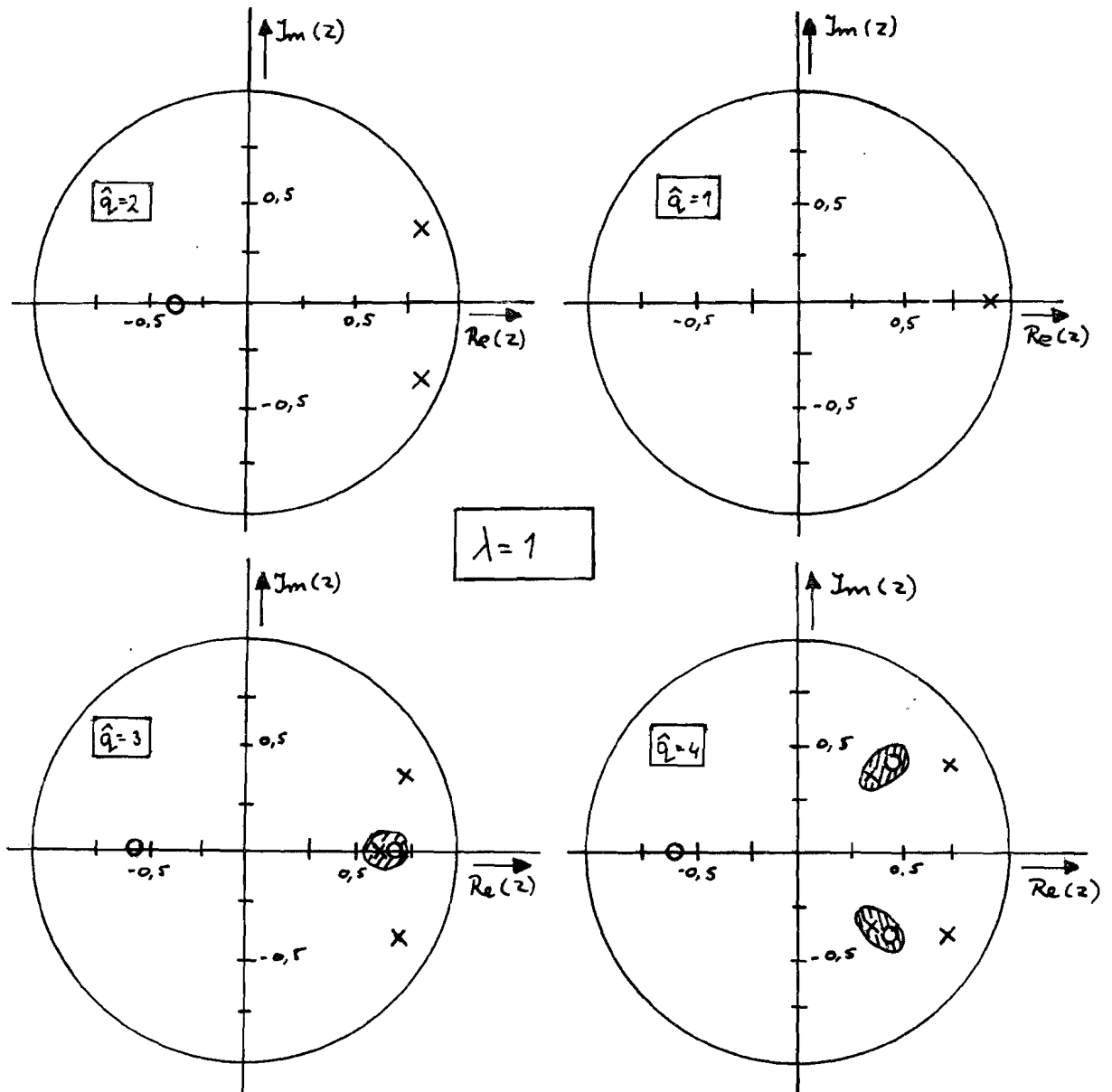


FIGUUR 2.2.6 Determinantenmethode.



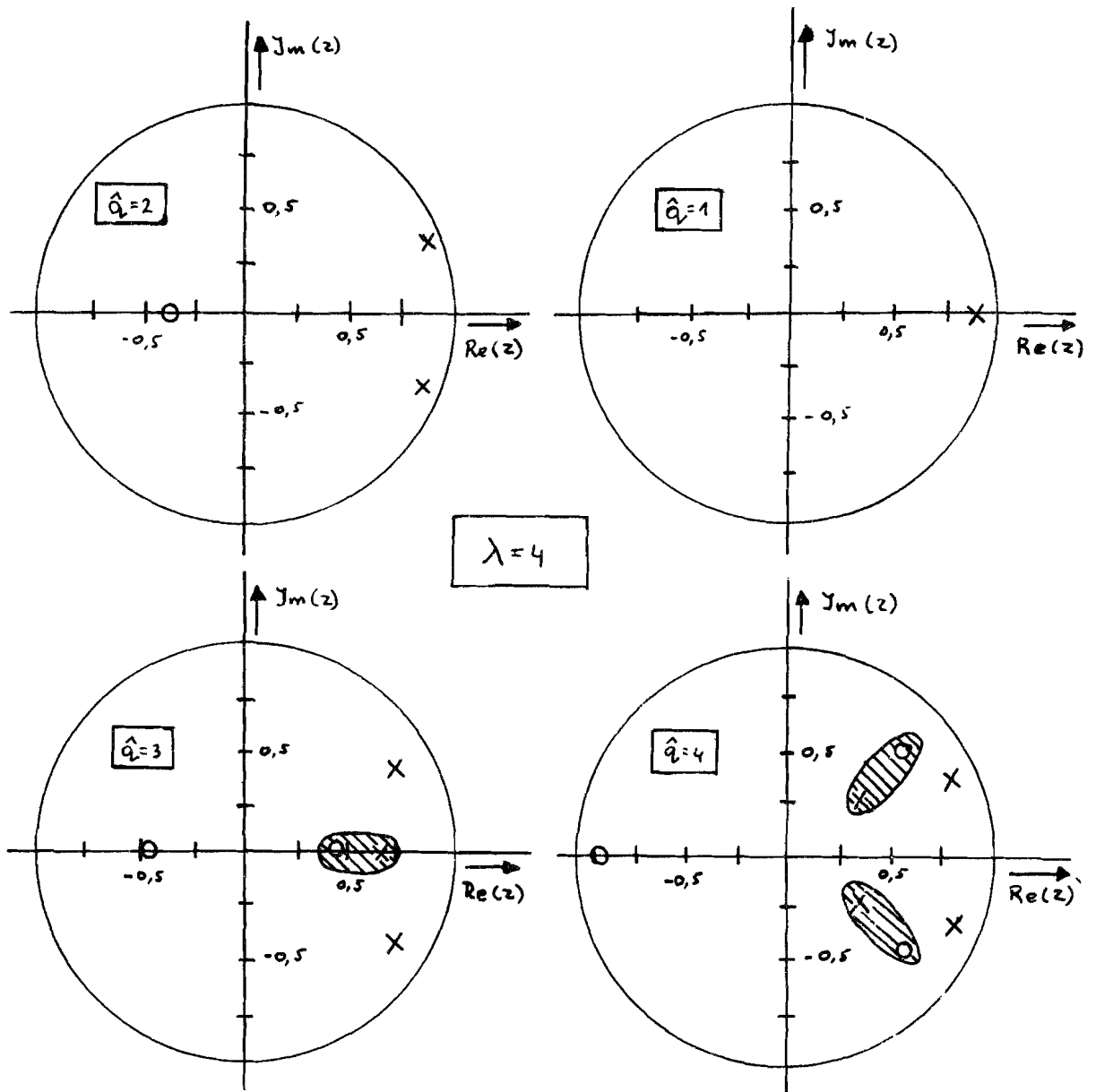
Polen en nulpunten methode voor $\lambda=1/4$.

FIGUUR 2.2.7.



Polen en nulpunten methode voor $\lambda=1$

FIGUUR 2.2.8.



Polen en nulpuntenmethode voor $\lambda = 4$.

FIGUUR 2.2.9.

3. Schattingen m.b.v. de kleinste kwadratenmethode aan een lineair continu proces.

In hoofdstuk 2 is een theorie beschreven voor het schatten van zowel de parameters als van de orde van een lineair tijddiscreet proces. In dit hoofdstuk zal de theorie aangepast worden, zodat de parameters en de orde van een lineair continu proces geschat kunnen worden.

3.1. Schatten van de parameters van een continu proces.

In het voorgaande is een lineair tijddiscreet proces beschouwd, waarvan het uitgangssignaal door ruis verstoord is. Dit proces kan beschreven worden door de volgende differentie vergelijking:

$$Y_k = b_0 U_k + b_1 U_{k-1} + \dots + b_p U_{k-p} - a_1 Y_{k-1} - \dots - a_q Y_{k-q} + e_k; \quad (3.1)$$

waarin: Y is het gestoord uitgangssignaal,
 U is het ingangssignaal,
 e is de "equation error".

Een lineair continu proces kan beschreven worden door een differentiaalvergelijking van de volgende gedaante:

$$X(t) = b_0 U(t) + b_1 U^{(1)}(t) + \dots + b_p U^{(p)}(t) - a_1 X^{(1)}(t) - \dots - a_q X^{(q)}(t); \quad (3.2.a)$$

Indien het uitgangssignaal gestoord is, dan wordt (3.2.a):

$$Y(t) = b_0 U(t) + b_1 U^{(1)}(t) + \dots + b_p U^{(p)}(t) - a_1 Y^{(1)}(t) - \dots - a_q Y^{(q)}(t) + e(t). \quad (3.2.b)$$

Zijn op N discrete momenten de signalen Y en U en hun afgeleiden bekend, dan kan men schrijven:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_k & = & b_0 U_k & + \dots + b_p U_k^{(p)} & - a_1 Y_k^{(1)} & - \dots - a_q Y_k^{(q)} & + e_k \\ Y_{k+1} & = & b_0 U_{k+1} & + \dots + b_p U_{k+1}^{(p)} & - a_1 Y_{k+1}^{(1)} & - \dots - a_q Y_{k+1}^{(q)} & + e_{k+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{k+N-1} & = & b_0 U_{k+N-1} & + \dots + b_p U_{k+N-1}^{(p)} & - a_1 Y_{k+N-1}^{(1)} & - \dots - a_q Y_{k+N-1}^{(q)} & + e_{k+N-1} \end{array} \quad (3.3)$$

Vergelijking (3.3) kan in matrix notatie geschreven worden als:

$$\underline{Y} = \underline{\Omega} \underline{b} + \underline{e}; \quad (3.4.a)$$

waarin: $\underline{Y}^T = (Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_{k+N-1})$,
 $\underline{b}^T = (b_0, b_1, \dots, b_p, -a_1, \dots, -a_q)$,

$$\underline{e}^T = (e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+N-1}),$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} U_k & U_k^{(1)} & \dots & U_k^{(p)} & Y_k^{(1)} & \dots & Y_k^{(q)} \\ U_{k+1} & U_{k+1}^{(1)} & \dots & U_{k+1}^{(p)} & Y_{k+1}^{(1)} & \dots & Y_{k+1}^{(q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{k+N-1} & U_{k+N-1}^{(1)} & \dots & U_{k+N-1}^{(p)} & Y_{k+N-1}^{(1)} & \dots & Y_{k+N-1}^{(q)} \end{pmatrix}.$$

De met vergelijking (3.4.a) corresponderende matrix vergelijking voor een lineair tijddiscreet proces is:

$$\underline{Y} = \Omega \underline{b} + \underline{e}, \quad (3.4.b)$$

$$\text{waarin: } \underline{Y}^T = (Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_{k+N-1}),$$

$$\underline{b}^T = (b_0, b_1, \dots, b_p, -a_1, \dots, -a_q),$$

$$\underline{e}^T = (e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+N-1}),$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} U_k & \dots & U_{k-p} & Y_{k-1} & \dots & Y_{k-q} \\ U_{k+1} & \dots & U_{k-p+1} & Y_k & \dots & Y_{k-q+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{k+N-1} & \dots & U_{k-p+N-1} & Y_{k+N-2} & \dots & Y_{k-q+N-1} \end{pmatrix}.$$

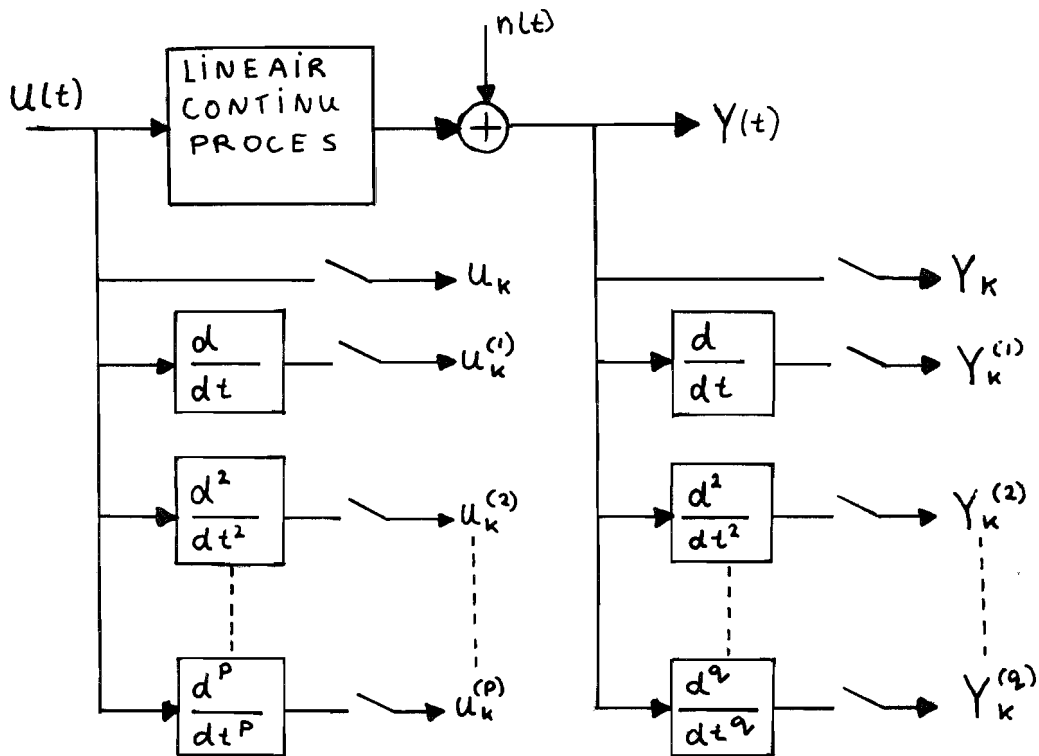
Vergelijkt men vergelijking (3.4.a) met (3.4.b), dan ziet men dat de matrix vergekijsking identiek is. Het enige verschil is de matrix Ω . Bij vergelijking (3.4.a) bevat de $(i+1)^e$ rij van matrix Ω het ingangssignaal en zijn afgeleiden en de afgeleiden van het uitgangssignaal op het tijdsmoment $(t_0 + (k+1)\tau)$. Bij vergelijking (3.4.b) bevat de $(i+1)^e$ rij de waarde van het ingangssignaal op de momenten $k+i, k+i-1, \dots, k+i-p$ en van het uitgangssignaal op de momenten $k+i-1, k+i-2, \dots, k+i-q$. Opgemerkt kan nog worden, dat de vector \underline{b} bij een continu proces de parameters van de differentiaalvergelijking en bij een discreet proces de parameters van de differentievergelijking bevat.

Indien van een onbekend continu proces op N discrete momenten de signalen Y en U en hun afgeleiden bekend zijn, dan kan men een schatting maken van de parameter vector \underline{b} ; dit levert de vector $\underline{\beta}$ op. Volgens de theorie van de kleinste kwadratenschatting is:

$$\underline{\beta} = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T \underline{Y}. \quad (3.5)$$

Het diagram van figuur 3.1 geeft een mogelijkheid om U en Y en hun afgeleiden te bepalen, waarna m.b.v. de kleinste kwadratenschatting

(formule 3.5) de parameters geschat kunnen worden. Het nadeel van deze methode is, dat de signalen U en Y gedifferentieerd moeten worden, hetgeen in een praktische situatie erg moeilijk is.



FIGUUR 3.1

Hierna zal een methode besproken worden, waarbij het differentieren vermeden wordt. Daartoe schrijven we vergelijking (3.2.a) in het s-domein:

$$X(s) = b_0 U(s) + b_1 s U(s) + \dots + b_p s^p U(s) - a_1 s X(s) - \dots - a_q s^q X(s)$$

Vermenigvuldig de vorige vergelijking links en rechts met $H(s)$:

$$H(s)X(s) = b_0 H(s)U(s) + \dots + b_p s^p H(s)U(s) - a_1 s H(s)X(s) - \dots - a_q s^q H(s)X(s)$$

Substitutie van $H(s)X(s) = [X(s)]$ en $H(s)U(s) = [U(s)]$ geeft:

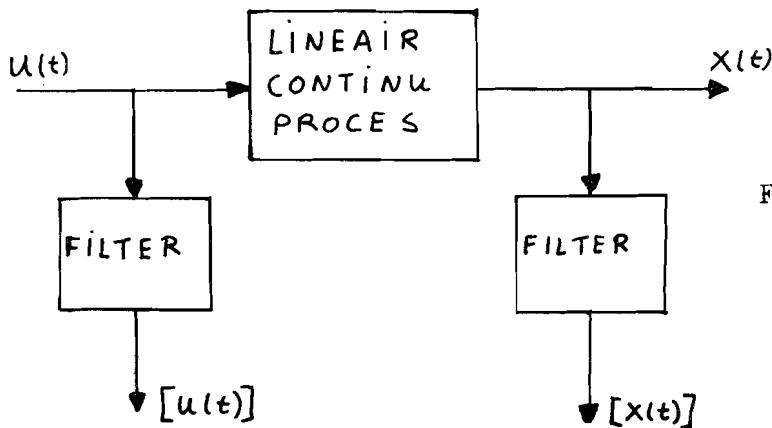
$$[X(s)] = b_0 [U(s)] + \dots + b_p s^p [U(s)] - a_1 s [X(s)] - \dots - a_q s^q [X(s)].$$

Transformeer terug naar het tijdsdomein:

$$[X(t)] = b_0 [U(t)] + \dots + b_p [U(t)]^{(p)} - a_1 [X(t)]^{(1)} - \dots - a_q [X(t)]^{(q)} \quad (3.6)$$

met: $[X(t)] = \mathcal{L}^{-1}\{[X(s)]\}$ en $[U(t)] = \mathcal{L}^{-1}\{[U(s)]\}$.

Men ziet, dat het verband tussen $X(t)$ en $U(t)$ en tussen $[X(t)]$ en $[U(t)]$ identiek is; mits $[X(t)]$ en $[U(t)]$ uit $X(t)$ en $U(t)$ verkregen wordt door lineaire filtering met twee identieke filters (zie figuur 3.2).



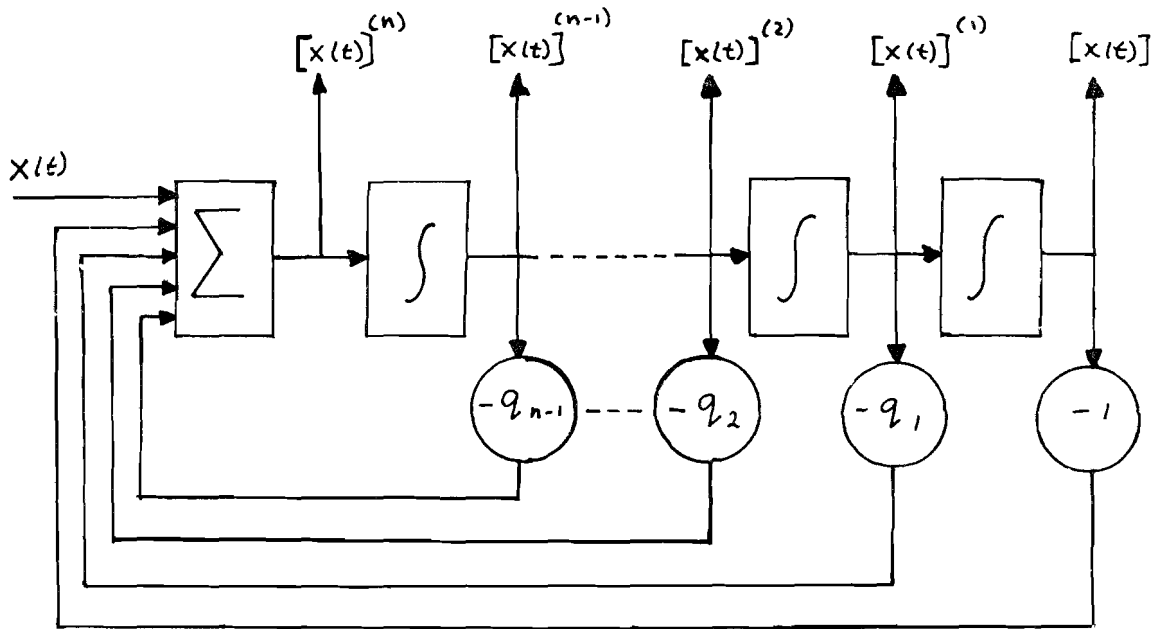
FIGUUR 3.2.

Men kan het filter zodanig construeren, dat de afgeleiden van $[X(t)]$ en $[U(t)]$ zeer eenvoudig (zonder differentieren) verkregen kunnen worden.

In dit verslag zal één methode beknopt beschreven worden. Voor een uitgebreidere beschrijving van deze en andere methodes zie Vlek (lit.3). Bij de te bespreken methode wordt een z.g. afgeleiden genererend filter gebruikt (zie figuur 3.3). Dit filter bestaat uit n in serie geschakelde integratoren, waarvan de uitgangen teruggekoppeld worden naar een gemeenschappelijke ingang. Het verband tussen $[X(t)]$ en $X(t)$ is:

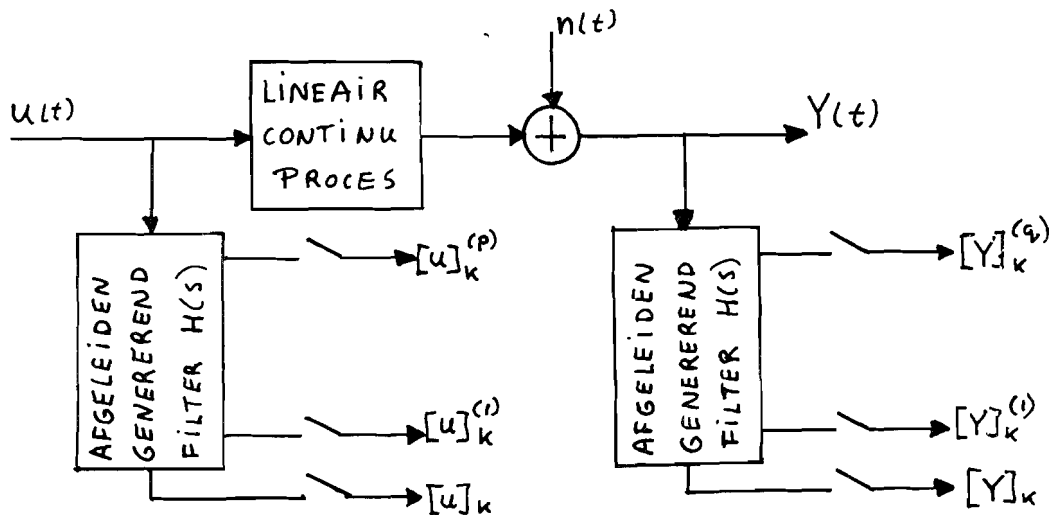
$$[X(t)] = X(t) - q_1 [X(t)]^{(1)} - \dots - q_{n-1} [X(t)]^{(n-1)} - [X(t)]^{(n)}. \quad (3.7)$$

Door het kiezen van de constanten q_1, q_2, \dots, q_{n-1} kan de overdrachtsfunctie van het filter gekozen worden.



FIGUUR 3.3. Afgeleiden genererend filter

Het afgeleiden genererend filter levert dus niet alleen het gefilterde signaal $[X(t)]$, maar tevens de 1^e t/m n^e afgeleide van $[X(t)]$.



FIGUUR 3.4.

Figuur 3.4 geeft aan, hoe de schatting uitgevoerd wordt. Van de uitgangen van twee afgeleiden genererende filters worden samples genomen.

Deze samples worden ingevuld in de matrix Ω (vgl. 3.5), waarna de geschatte parameter vector $\hat{\beta}$ berekend kan worden.

Uit de theorie van de kleinste kwadraten schatting is bekend, dat bij een gegeneraliseerd model, dat alleen de parameters van het proces en niet van het ruisfilter schat, de stoornis $n(t)$ in het algemeen een bias in de schatting van de parameters veroorzaakt. Bij de schatting wordt aangenomen, dat de amplitude van de stoornis zo klein is, dat deze bias te verwaarlozen is.

3.2. Schatten van de orde van een continu proces.

De schattings formule (3.5) geldt zowel voor een continu als voor een discreet proces, zodat in principe alle orde test methoden van hoofdstuk 2 gebruikt kunnen worden. De gebruikte schattingsmethode schat alleen de parameters van het proces en niet van het ruisfilter. Daarom kan alleen een schatting van e (dit is \hat{e}) en niet van ξ (dit is $\hat{\xi}$) berekend worden. Dit betekent dat twee orde test methoden niet gebruikt kunnen worden, te weten:

- 1) gedrag van de kostenfunctie $V_2 = \sum_i \hat{\xi}_i^2$,
- 2) gedrag van de autocorrelatiefunctie van $\hat{\xi}$.

Er blijven dan vier methoden over:

- 1) gedrag van de kostenfunctie $V_1 = \sum_i \hat{e}_i^2$,
- 2) F-test,
- 3) determinantenmethode,
- 4) polen en nulpunten methode.

De determinanten methode gaat uit van de gedachte, dat als de orde van het model te groot is, de matrix Ω slecht geconditioneerd wordt. Daartoe bepaalt men de relatieve determinant van de matrix P . Voor een tijddiscreet proces geldt:

$$P^{-1} = \Omega^{-1} \Omega = \begin{pmatrix} \sum_i u_i u_i, & \dots, & \sum_i u_i u_{i-p}, & \sum_i u_i Y_{i-1}, & \dots, & \sum_i u_i Y_{i-q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_i u_{i-p} u_i, & \dots, & \sum_i u_{i-p} u_{i-p}, & \sum_i u_{i-p} Y_{i-1}, & \dots, & \sum_i u_{i-p} Y_{i-q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_i Y_{i-1} u_i, & \dots, & \sum_i Y_{i-1} u_{i-p}, & \sum_i Y_{i-1} Y_{i-1}, & \dots, & \sum_i Y_{i-1} Y_{i-q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_i Y_{i-q} u_i, & \dots, & \sum_i Y_{i-q} u_{i-p}, & \sum_i Y_{i-q} Y_{i-1}, & \dots, & \sum_i Y_{i-q} Y_{i-q} \end{pmatrix},$$

met $k \leq i \leq k+N-1$.

Hierbij heeft de amplitude van iedere term U eenzelfde waarschijnlijkheidsverdeling; hetzelfde geldt voor Y. Voor een continu proces geldt:

$$P^{-1} = \Omega^T \Omega = \begin{pmatrix} \sum_i [u]_i [u]_i & \dots & \sum_i [u]_i [u]_i^{(p)} & \dots & \sum_i [u]_i [Y]_i^{(q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i [u]_i^{(p)} [u]_i & \dots & \sum_i [u]_i^{(p)} [u]_i^{(p)} & \dots & \sum_i [u]_i^{(p)} [Y]_i^{(q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i [Y]_i [u]_i & \dots & \sum_i [Y]_i [u]_i^{(p)} & \dots & \sum_i [Y]_i [Y]_i^{(q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i [Y]_i^{(q)} [u]_i & \dots & \sum_i [Y]_i^{(q)} [u]_i^{(p)} & \dots & \sum_i [Y]_i^{(q)} [Y]_i^{(q)} \end{pmatrix},$$

met $k \leq i \leq k+N-1$.

Hier heeft de amplitude van ieder signaal $[U]_i^{(L)}$ voor iedere L een andere waarschijnlijkheidsverdeling. Bij de bestudeerde processen is de top tot top amplitude van de derde afgeleide van de signalen een factor 10^3 à 10^4 groter dan de top tot top amplitude van de signalen zelf. Hierdoor is de gedachte ontstaan, dat de signalen zodanig genormeerd dienen te worden, dat de top tot top amplituden van de afgeleiden van [U] gelijk gemaakt worden aan de top tot top amplitude van [U]; idem [Y]. Daartoe wordt in het digitale programma de top tot top amplituden van de signalen berekend, waarna de signalen zodanig genormeerd worden, dat aan de hiervoor genoemde eis voldaan wordt. De nu berekende parameters zijn genormeerd; doordat de normeringsfactoren bekend zijn kunnen de werkelijke parameters bepaald worden.

Zoals hiervoor beschreven is bestaat de matrix $\Omega^T \Omega$ uit vier delen:

$$P^{-1} = \Omega^T \Omega = \begin{pmatrix} Q_{11} & | & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & | & Q_{22} \end{pmatrix}.$$

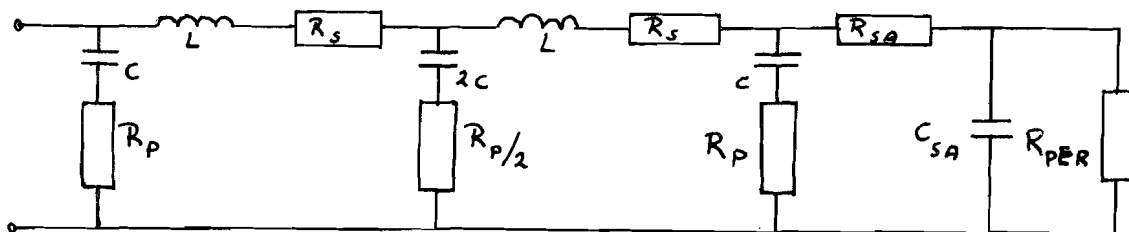
Het schattingsprogramma berekent echter de matrix P; ook deze matrix bestaat uit vier deelen met dezelfde dimensies als de matrix P^{-1} .

$$P = (\Omega^T \Omega)^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & | & C_{12} \\ \hline C_{21} & | & C_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Resultaten van orde tests aan enkele lineaire continue processen, i.o.c. aorta simulaties.

In figuur 4.1 is een elektrisch analogon van een aorta gegeven; zo- als dit geïnstrumenteerd is op een Hitachi analoge rekenmachine type 505. Voor verschillende delen van dit netwerk is de theorie van hoofdstuk 3 getoetst. Voor ieder deelproces is de orde met en zonder amplitude normering geschat (zie paragraaf 3.2). De hierna volgende grafieken en tabellen worden aangeduid met:

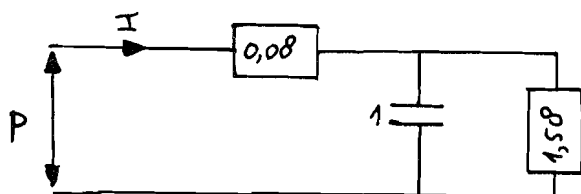
- a: als de signalen wel genormeerd worden,
- b: als de signalen niet genormeerd worden.



L	=	5,48 · 10 ⁻³	mmHg ml ⁻¹ s ² ,
C	=	7,34 · 10 ⁻²	ml mmHg ⁻¹ ,
C _{sa}	=	1,00 · 10 ⁰	ml mmHg ⁻¹ ,
R _s	=	3,34 · 10 ⁻³	mmHg ml ⁻¹ s,
R _p	=	2,74 · 10 ⁻²	mmHg ml ⁻¹ s,
R _{sa}	=	8,00 · 10 ⁻²	mmHg ml ⁻¹ s,
R _{per}	=	1,58 · 10 ⁰	mmHg ml ⁻¹ s.

FIGUUR 4.1 Elektrisch analogon van een aorta.

4.1. Schattingen aan de uitgangsadmittantie.



de uitgangsadmittantie
FIGUUR 4.2

De uitgangsadmittantie (gegeven in figuur 4.2) is een eerste orde proces met als overdrachtsfunctie:

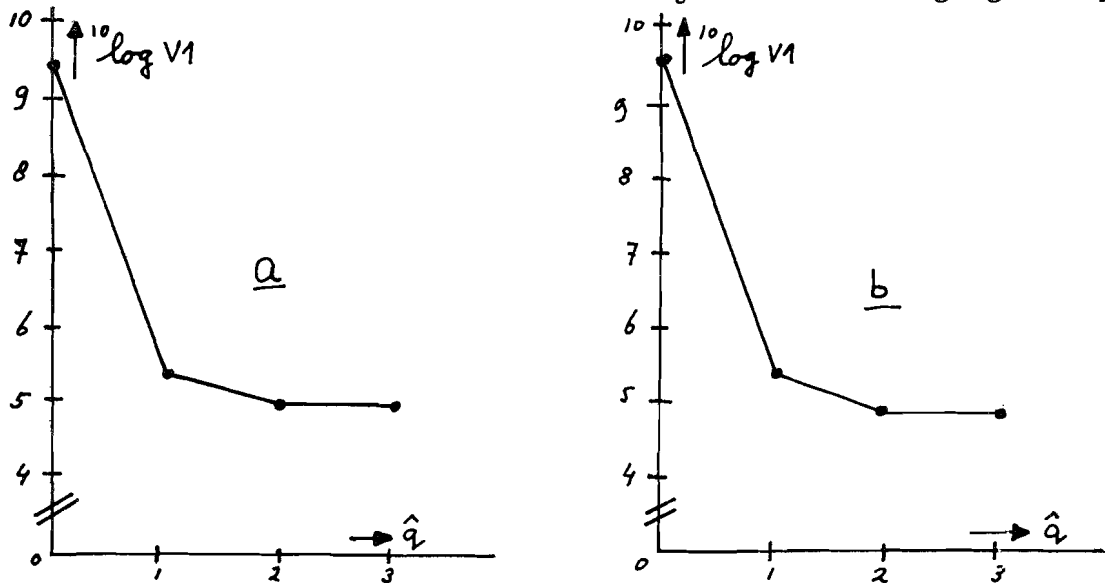
$$H_I(s) = \frac{I(s)}{P(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s},$$

hierin zijn: $b_0=0,6024$ en: $a_0=1$
 $b_1=0,9518$ $a_1=0,07614$.

Dit proces heeft één pool: $p_1=-13,13$ rad/sec,
 en één nulpunt: $z_1=-0,633$ rad/sec.

4.1.1. Gedrag van de kostenfunctie.

In figuur 4.3 is de kostenfunctie uitgezet tegen de orde van het model (\hat{q}). Beide grafieken (zowel met als zonder amplitude normering) wijzen op een eerste orde proces, immers er is een duidelijke afname van de kostenfunctie bij verhoging van \hat{q} van 0 naar 1 en een veel kleinere afname van de kostenfunctie bij verdere verhoging van \hat{q} .



FIGUUR 4.3 Gedrag van de kostenfunctie voor H1.

4.1.2. F-test.

Tabel 4.1 geeft de resultaten van de F-test met de kostenfunctie V1.

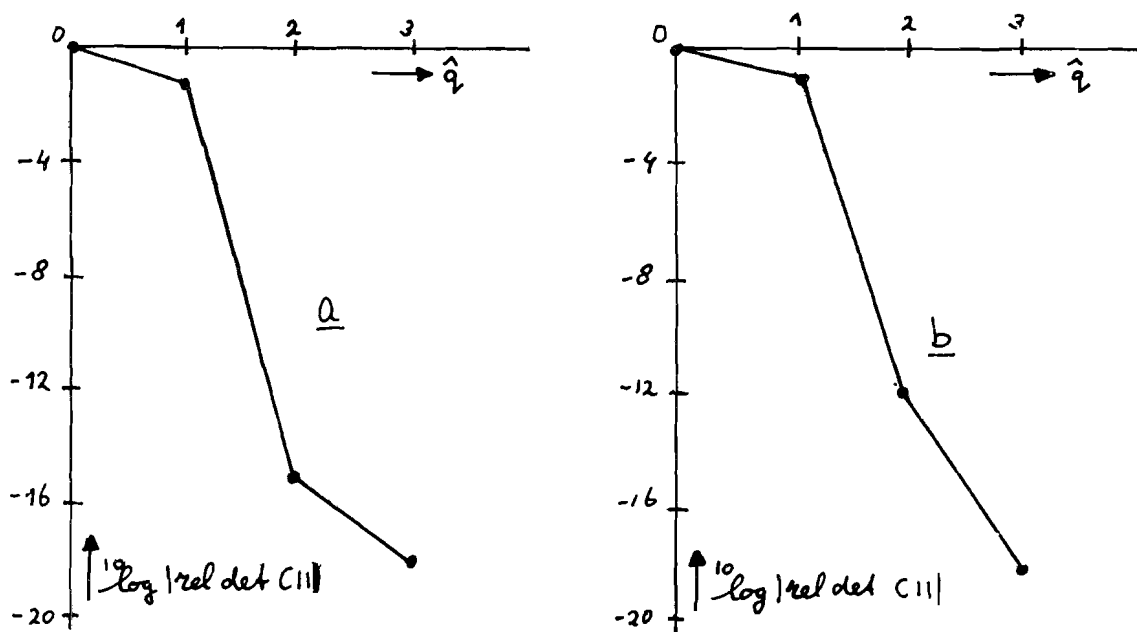
\hat{q}_1	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$
0	$315 \cdot 10^3$	$491 \cdot 10^3$	$320 \cdot 10^3$	$315 \cdot 10^3$	$603 \cdot 10^3$	$337 \cdot 10^3$
1	-----	51,8	25,6	-----	69,0	27,5
2	-----	-----	0,51	-----	-----	-2,74
	a			b		

TABEL 4.1 F-test voor H1.

Indien 3 als grenswaarde aangenomen wordt, wijzen de tabellen op een tweede orde proces. De testgrootte is bij verhoging van orde 0 naar orde 1 ongeveer 6000 resp. 4600 maal groter, dan bij verhoging van orde 1 naar orde 2. Ook hier geeft de F-test slechts een indicatie over de werkelijke orde van het proces.

4.1.3. Determinantenmethode.

In figuur 4.4 is uitgezet: $^{10}\log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{q} . Ook hier wijzen beide grafieken duidelijk op een eerste orde proces. In figuur 4.4.a treedt de sprong voorbij $\hat{q}=1$ duidelijker op dan in figuur 4.4.b, hetgeen betekent, dat de determinanten methode in dit geval beter werkt als de signalen genormeerd worden (dit blijkt steeds het geval te zijn).



FIGUUR 4.4 Determinanten methode voor H1.

4.1.4. Polen en nulpunten methode.

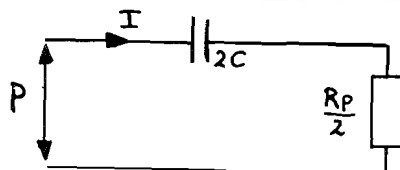
Tabel 4.2 geeft de geschatte polen en nulpunten voor modellen van de orde 1, 2 en 3; tevens geeft deze tabel de werkelijke polen en nulpunten van het proces.

	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)		pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)
echt	-13,1	-0,63		-13,1	-0,63
orde=1	-13,2	-0,65		-13,2	-0,65
orde=2	-13,1 (+24,5)	-0,64 (+25,1)		-13,1 (+24,6)	-0,64 (+25,3)
orde=3	-13,2 (+22,4+34,3j) (+22,4-34,3j)	-0,64 (+20,5+33,9j) (+20,5-33,9j)		-13,2 (+18,2+33,3j) (+18,2-33,3j)	-0,64 (+16,9+32,9j) (+16,9-32,9j)
	a			b	

TABEL 4.2 Polen en nulpunten methode voor H1.

Hierin is te zien, dat onafhankelijk van de orde van het model de pool en het nulpunt van het proces vrij goed geschat worden. Bij orde twee en drie ontstaan één resp. twee extra polen en nulpunten, die praktisch samenvallen. Uit bovenstaande volgt, dat de uitgangsadmittantie inderdaad als een eerste orde proces geschat wordt.

4.2. Schattingen aan de dwarstak



De dwarstak
FIGUUR 4.5

De dwarstak (gegeven in figuur 4.5) is een eerste orde proces, met als overdrachtsfunctie:

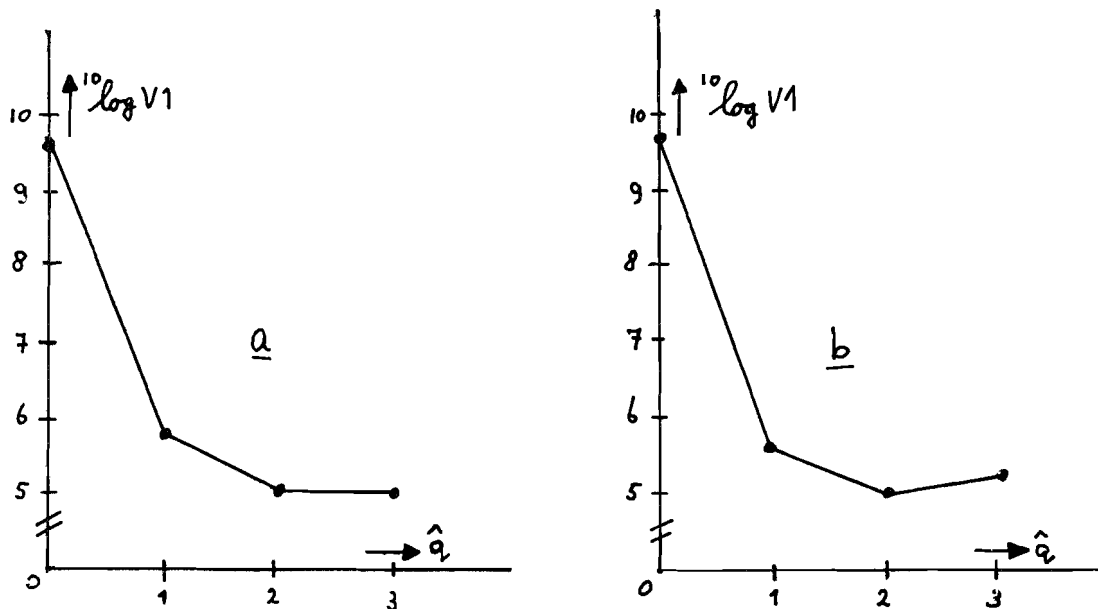
$$H1C(s) = \frac{I(s)}{P(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} \quad \text{met: } b_0 = 0, \quad \text{en: } a_0 = 1,$$

$$b_1 = 0,1468, \quad a_1 = 0,2011 \cdot 10^{-2}$$

Dit proces heeft één pool: $p_1 = -497,3$ rad/sec,
en één nulpunt: $z_1 = 0$ rad/sec.

4.2.1. Gedrag van de kostenfunctie.

Het gedrag van de kostenfunctie is weergegeven in figuur 4.6. Beide grafieken wijzen op een eerste orde proces.



FIGUUR 4.6 Gedrag van de kostenfunctie voor HLC.

4.2.2. F-test.

Tabel 4.3 geeft de resultaten van de F-test met de kostenfunctie V1.

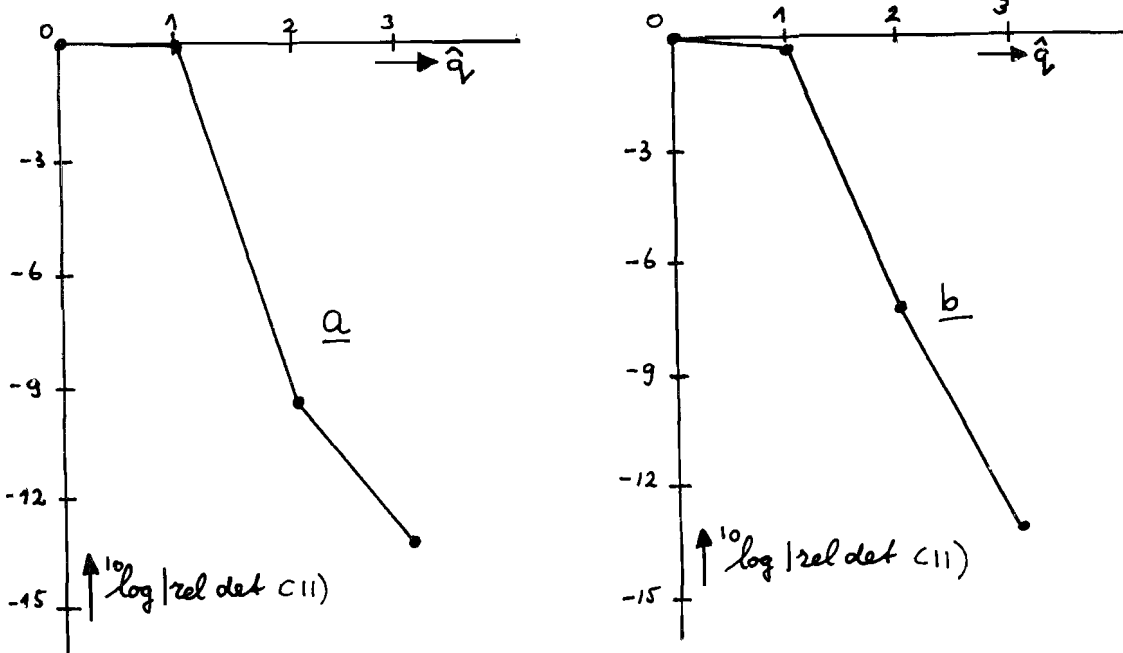
\hat{q}_1	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$
0	$217 \cdot 10^3$	$589 \cdot 10^3$	$312 \cdot 10^3$	$217 \cdot 10^3$	$586 \cdot 10^3$	$258 \cdot 10^3$
1	-----	107	40,7	-----	106	31,7
2	-----	-----	-3,72	-----	-----	-6,8
	a			b		

TABEL 4.3 F-test voor HLC.

Beide tabellen wijzen op een tweede orde proces. De testgrootte is bij verhoging van de orde 0 naar orde 1 ongeveer 2000 maal groter dan bij verhoging van orde 1 naar orde 2.

4.2.3. Determinanten methode.

Figuur 4.7 geeft: $^{10}\log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{q} . Het proces blijkt duidelijk een eerste orde proces. Ook hier treedt de sprong in grafiek a duidelijker op dan in grafiek b.



FIGUUR 4.7 Determinanten methode voor H1C.

4.2.4 Polen en nulpunten methode.

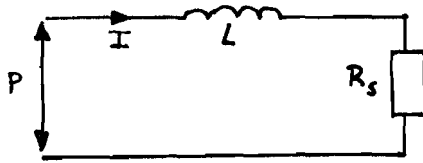
Tabel 4.4 geeft de geschatte polen en nulpunten voor modellen van de orde 1,2 en 3.

	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)
echt	-497,3	0	-497,3	0
orde=1	-308,2	+0,02	-308,2	+0,02
orde=2	+234,0	+0,02	+239,8	+0,02
	(+133,5	+65,6j)	(+130,9	+65,4j)
orde=3	-398,4	+0,02	-412,6	+0,02
	(+22,4+54,1j	+29,8+57,9j)	(+14,2+44,0j	+17,0+45,6j)
	(+22,4-54,1j	+29,8-57,9j)	(+14,2-44,0j	+17,0-45,6j)
	a		b	

TABEL 4.4 Polen en nulpunten methode voor H1C.

Hier ziet men weer één resp. twee samenvallende polen en nulpunten bij modellen van de tweede resp. derde orde. Het proces H1C blijkt dus een eerste orde proces te zijn.

4.3. Schattingen aan de langstak.



De langstak.

FIGUUR 4.8

De langstak (gegeven in figuur 4.8) is een eerste orde proces, met als overdrachtsfunctie:

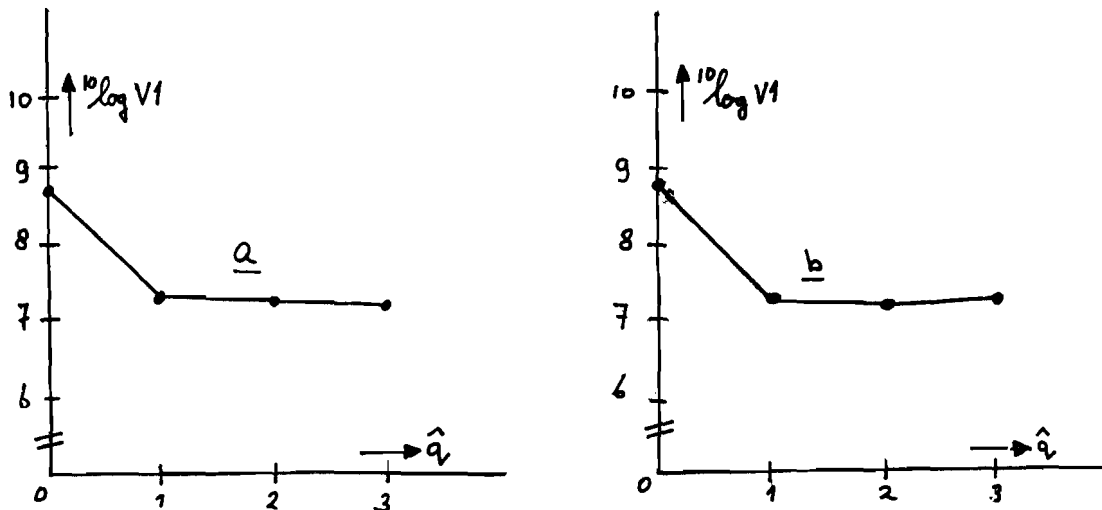
$$H_{LB}(s) = \frac{I(s)}{P(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s}, \quad \text{met } b_0 = 299,4 \quad \text{en: } a_0 = 1$$

$$b_1 = 0 \quad a_1 = 1,641$$

Dit proces heeft één pool: $p_1 = -0,61$ rad/sec,
 en één nulpunt: $z_1 = \infty$ rad/sec.

4.3.1. Gedrag van de kostenfunctie.

Het gedrag van de kostenfunctie is getekend in figuur 4.9. Beide grafieken wijzen op een eerste orde proces.



FIGUUR 4.9 Gedrag van de kostenfunctie voor HLB.

4.3.2. F-test.

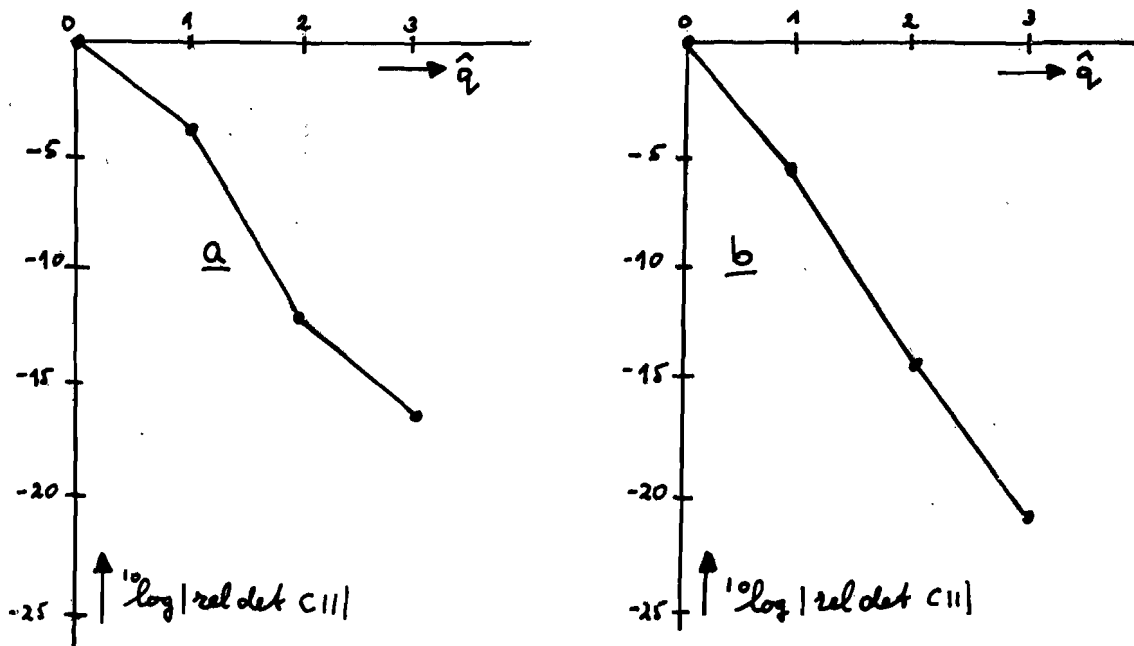
Tabel 4.5 geeft de resultaten van de F-test met de kostenfunctie V1. Indien 3 als grenswaarde genomen wordt, wijst tabel a op een proces, waarvan de orde drie of meer is. Tabel b wijst op een tweede orde proces.

\hat{q}_1	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$
0	678	393	316	678	386	199
1	----	4,64	5,58	----	4,18	-0,43
2	----	----	5,59	----	----	-4,11
	a			b		

TABEL 4.5 F-test voor H1B.

4.3.3 Determinanten methode.

Figuur 4.10 geeft: $^{10}\log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{q} . Voor beide grafieken (vooral voor figuur 4.10.b) is het onmogelijk om de orde van het proces te schatten.



FIGUUR 4.10 Determinanten methode voor H1B.

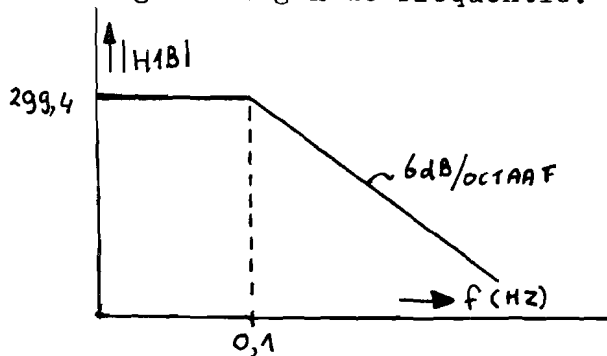
4.3.4. Polen en nulpunten methode.

Tabel 4.6 geeft de geschatte polen en nulpunten voor modellen van de orde 1,2 en 3. Deze methode wijst weer op een eerste orde proces.

	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)
echt	-0,61	∞	-0,61	∞
orde=1	-0,64	-5544	-0,64	-5545
orde=2	-0,64	-561	-0,64	-536
	(+48,0)	(+44,3)	(+51,2)	(+46,8)
orde=3	-0,64	-71,6+109j	-0,63	+1143
	-224	-71,6-109j	(+25,1+84j)	(+27,5+96j)
	(+69,1)	(+53,6)	(+25,1-84j)	(+27,5-96j)
	a		b	

TABEL 4.6 Polen en nulpunten methode voor HLB.

In figuur 4.11 is de modulus van de overdrachtsfunctie van de langstak uitgezet tegen de frequentie. De afsnijfrequentie ligt bij 0,1 Hz.

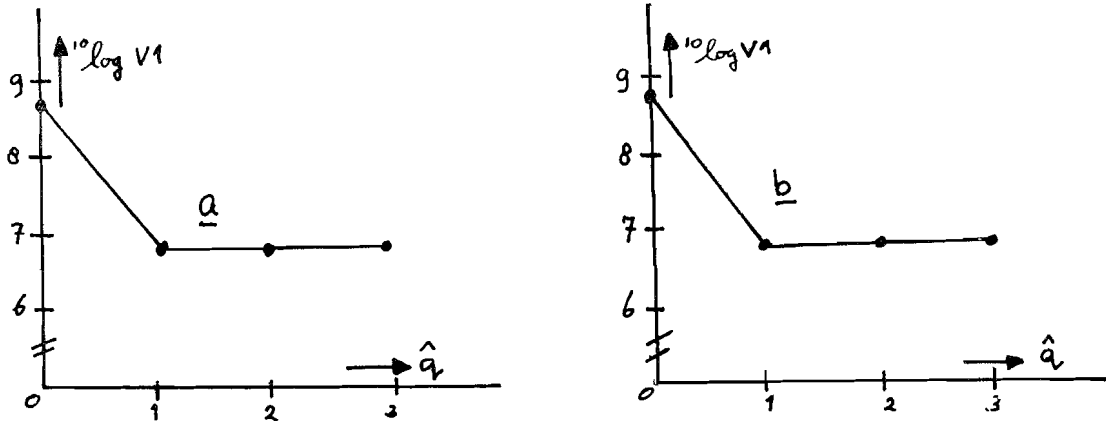


De overdrachtsfunctie van HLB.
FIGUUR 4.11

De laagste frequentie, die voorkomt in het ingangssignaal is 1 Hz. Het is duidelijk, dat dit signaal niet erg geschikt is om de parameters van HLB te schatten. Daarom zijn de schattingen nogmaals uitgevoerd met een ingangssignaal, dat qua frequentie inhoud 5 maal verlaagd is; de resultaten staan beschreven in paragraaf 4.3.5 t/m 4.3.8.

4.3.5 Gedrag van de kostenfunctie.

In figuur 4.12 is het gedrag van de kostenfunctie uitgezet tegen de orde van het model. Vergelijking van figuur 4.12 met 4.9 toont een grotere afname van de kosten functie bij verhoging van \hat{q} van 0 naar 1.



FIGUUR 4.12 Gedrag van de kostenfunctie voor HLB.

4.3.6 F-test

Tabel 4.7 geeft de resultaten van de F-test met de kostenfunctie V1.

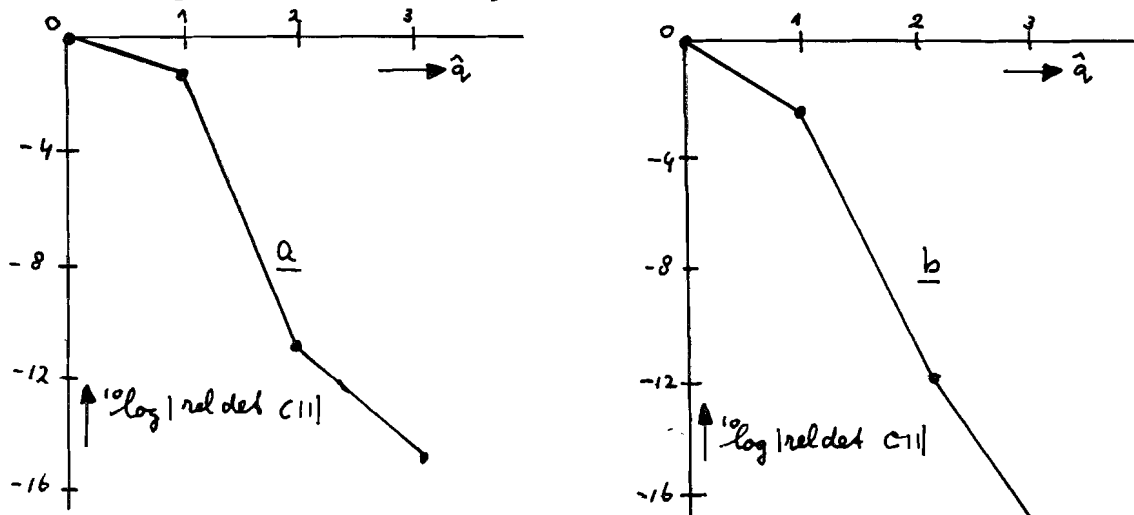
\hat{q}_1	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$	$\hat{q}_2=1$	$\hat{q}_2=2$	$\hat{q}_2=3$
0	2546	795	478	2546	795	501
1	-----	-7,94	-4,19	-----	-7,93	-3,87
2	-----	-----	-1,21	-----	-----	-0,25
	a			b		

TABEL 4.7 F-test voor HLB.

De F-test wijst nu wel op een eerste orde proces.

4.3.7. Determinanten methode.

Figuur 4.13 geeft: $^{10}\log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{q} . Beide grafieken wijzen op een eerste orde proces.



FIGUUR 4.13 Determinanten methode voor HLB.

4.3.8. Polen en nulpunten methode.

Tabel 4.8 geeft de geschatte polen en nulpunten.

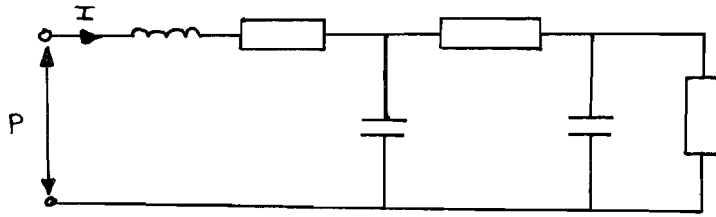
	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)
echt	-0,61	∞	-0,61	∞
orde=1	-0,74	+405	-0,74	+405
orde=2	-0,68	+6144	-0,68	+6207
	$(-7,16)$	$(-7,22)$	$(-7,17)$	$(-7,24)$
orde=3	-0,70	+888	-0,70	+1392
	$(-2,16+6,83j)$	$(-2,13+6,82j)$	$(-2,42+7,17j)$	$(-2,39+7,17j)$
	$(-2,16-6,83j)$	$(-2,13-6,82j)$	$(-2,42-7,17j)$	$(-2,39-7,17j)$
	a		b	

TABEL 4.8 Polen en nulpunten methode voor H1B.

Ook hier één resp. twee samenvallen polen en nulpunten, dus H1B blijkt een eerste orde proces.

vooral voor de determinanten methode geeft de verlaging van de frequentie inhoud een duidelijke verbetering.

4.4. Schattingen aan een derde proces.



FIGUUR 4.14 Het derde orde proces H2.

In figuur 4.14 is een gedeelte van het netwerk van figuur 4.1 getekend. Dit netwerk is een derde orde proces met als overdrachtsfunctie:

$$H_2(s) = \frac{I(s)}{P(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}$$

$$\begin{aligned} \text{met } b_0 &= 0,6013, & \text{en } a_1 &= 0,8473 \cdot 10^{-1}, \\ b_1 &= 0,9513, & a_2 &= 0,5793 \cdot 10^{-2}, \\ b_2 &= 0,1911 \cdot 10^{-2}, & a_3 &= 0,4105 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

De orde van de tellerpolynoom van $H_2(s)$ is twee (d.w.z. $p=2$) en de orde van de noemerpolynoom is drie (d.w.z. $q=3$). Men kan proberen p en q afzonderlijk te schatten; dit geeft \hat{p} en \hat{q} .

De overdrachtsfunctie heeft drie polen: $p_1 = -126,3$ rad/sec,

$$p_{2,3} = -7,41 \pm 11,8j \text{ rad/sec};$$

en drie nulpunten: $z_1 = -0,633$ rad/sec,

$$z_2 = -497,2 \text{ rad/sec},$$

$$z_3 = \infty \text{ rad/sec}.$$

Het is tot nu toe niet gelukt, om met een vijfde orde afgeleiden genererend filter erg goede schattingen van de parameters te verkrijgen. Men moet daarom voorzichtig zijn bij het bekijken van de hierna volgende resultaten.

4.4.1. Gedrag van de kostenfunctie.

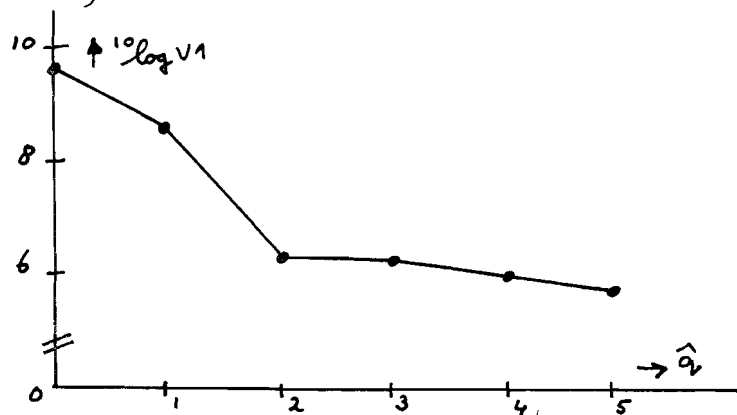
Tabel 4.9 geeft het gedrag van de kostenfunctie voor $H_2(s)$ als functie van \hat{p} en \hat{q} ; de berekeningen zijn uitgevoerd met genormeerde ingangssignalen.

\hat{q}	$10_{\log V_1}$					
	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$
5	8,27	6,37	6,27	5,86	5,77	5,77
4	8,26	6,38	6,28	5,88	5,87	5,87
3	9,27	6,48	6,37	6,34	6,28	6,23
2	9,25	6,92	6,43	6,34	6,34	6,35
1	9,76	8,69	8,31	7,36	7,36	7,03
0	9,70	9,34	8,62	7,50	7,37	7,04

TABEL 4.9 Gedrag van de kostenfunctie voor H_2 .

Het is practisch onmogelijk om eenduidig \hat{p} en \hat{q} te bepalen. Een mogelijkheid is: $\hat{p}=1$ en $\hat{q}=2$.

Figuur 4.15 geeft het gedrag van de kostenfunctie indien $\hat{p}=\hat{q}$. Deze grafiek wijst duidelijk op een tweede orde proces. Dit is wel aannemelijk, immers a_3 is ongeveer een factor 100 kleiner dan a_2 .



FIGUUR 4.15 Gedrag van de kostenfunctie voor H_2 .

4.4.2. Determinantenmethode.

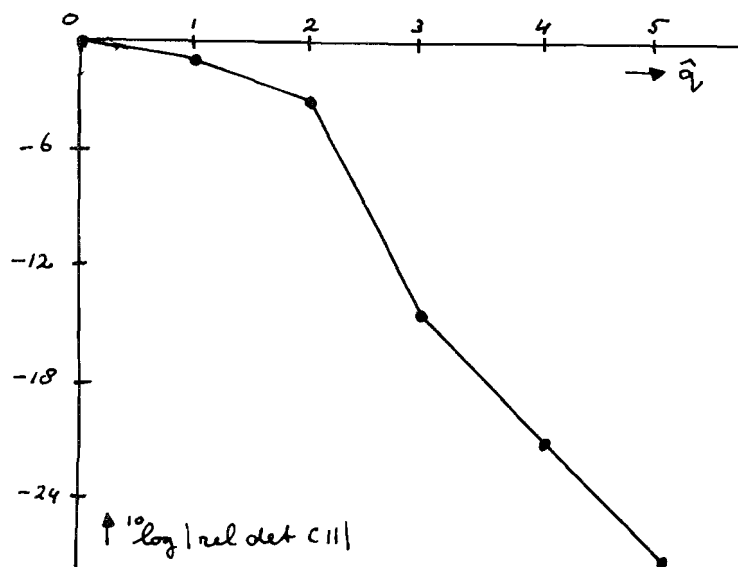
Tabel 4.10 geeft: $10_{\log} |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{p} en \hat{q} .

$^{10}\log \text{rel det } C_{11} $						
\hat{q}	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$
5	-3,64	-7,56	-17,94	-22,02	-25,59	-26,95
4	-1,51	-6,76	-14,44	-20,06	-20,83	-22,17
3	-0,67	-2,12	-13,12	-14,39	-17,29	-20,71
2	-0,007	-1,99	-3,38	-10,37	-10,88	-16,23
1	-0,005	-0,88	-1,76	-2,41	-6,48	-8,95
0	0	-0,002	-0,16	-0,92	-1,69	-4,15

TABEL 4.10 Determinantenmethode voor H2.

Ook hier zijn \hat{p} en \hat{q} niet eenduidig te bepalen. Mogelijke combinaties van \hat{p} en \hat{q} zijn: $\hat{p}=0$; dan is $\hat{q} \geq 5$,
 $\hat{p}=1$; dan is $\hat{q} = 3$,
 $\hat{p}=2$; dan is $\hat{q} = 2$,
 $\hat{p}=3$; dan is $\hat{q} = 1$,
 $\hat{p} \geq 4$; dan is $\hat{q} = 0$.

Indien $\hat{p}=\hat{q}$ geeft figuur 4.16: $^{10}\log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{q} . Deze grafiek wijst op een tweede orde proces.



FIGUUR 4.16 Determinantenmethode voor H2.

4.4.3. Polem en nulpunten methode.

Tabel 4.11 geeft de geschatte polen en nulpunten van H2, indien $\hat{p}=\hat{q}=1$ t/m 5.

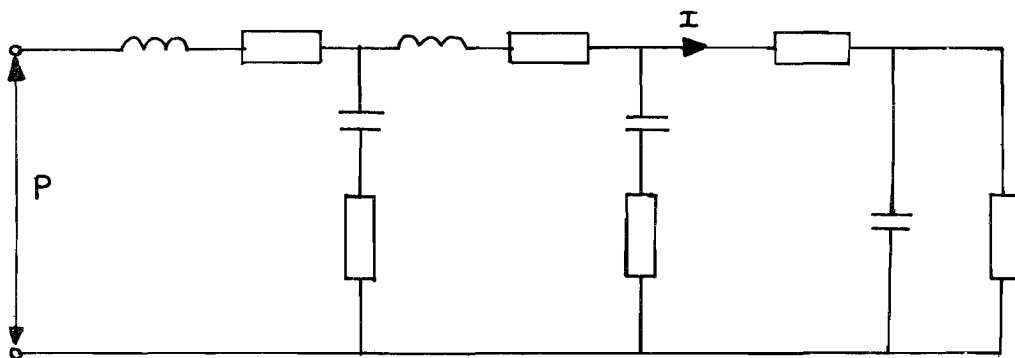
	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)
echt	-126,3	-0,633
	-7,41+11,8j	-497,2
$\hat{q}=1$	-10,6	-0,51
$\hat{q}=2$	-5,32+10,6j	-0,69
		-76,3
$\hat{q}=3$	-5,35+9,62j	-0,73
		-15,8
	(-78,7)	(+57,6)
$\hat{q}=4$	-9,18+11,9j	-0,62
		+583
	(-2,20+9,48j)	(-2,67+9,17j)
$\hat{q}=5$	-8,00+11,0j	-0,63
		+560
	(-2,10+10,1j)	(-2,37+9,90j)
	(-22,3)	(-22,3)

TABEL 4.11 Polen en nulpunten methode voor H2.

Indien $\hat{q}=4$ resp. 5 ontstaan twee resp. drie **practisch samenvallende** polen en nulpunten. De resterende polen en nulpunten zijn nagenoeg gelijk aan de **echte polen** en nulpunten.

Als $\hat{q}=2$ is er één veraf gelegen (en dus weinig dominante) pool en nulpunt. Het totale polen en nulpunten beeld wijst dus op een tweede orde proces.

4.5. Schattingen aan een vijfde orde proces.



FIGUUR 4.17 Het vijfde orde proces.

Het is onmogelijk om eenduidig \hat{p} en \hat{q} te bepalen; mogelijk zijn:

$\hat{p}=2$; dan is $\hat{q}=2$,

$\hat{p}=1$; dan is $\hat{q}=3$.

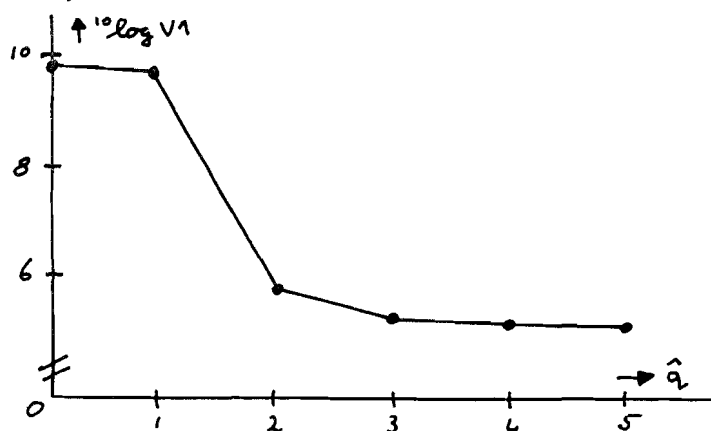
Figuur 4.18 geeft het gedrag van V_2 als $\hat{p}=\hat{q}$. Deze grafiek wijst duidelijk op een tweede orde proces. Dit is niet zo verwonderlijk, immers:

b_3 is een factor 10^3 kleiner dan b_2 ,

a_3 is een factor 170 kleiner dan a_2 ,

a_4 is een factor $2,6 \cdot 10^3$ kleiner dan a_2 ,

a_5 is een factor $3,8 \cdot 10^5$ kleiner dan a_2 .



FIGUUR 4.18 Gedrag van de kostenfunctie voor H3.

4.5.2. Determinanten methode.

Tabel 4.13 geeft: $10 \log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{p} en \hat{q} .

		$10 \log \text{rel det } C_{11} $					
\hat{q}	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$	
5	-3,52	-7,67	-28,66	-28,89	-30,25	-30,96	
4	-1,44	-7,03	-15,53	-22,13	-25,85	-27,58	
3	-0,65	-1,86	-13,53	-15,27	-23,04	-25,58	
2	-0,004	-1,54	-2,53	-7,20	-8,69	-17,56	
1	-0,001	-1,26	-1,39	-1,83	-4,87	-6,22	
0	0	-0,001	-0,16	-0,79	-1,77	-3,78	

TABEL 4.13 Determinanten methode voor H3.

De schattingen van \hat{p} en \hat{q} zijn niet eenduidig te bepalen. Mogelijke combinaties van \hat{p} en \hat{q} zijn: $\hat{p}=0$; dan is $\hat{q} \geq 5$,

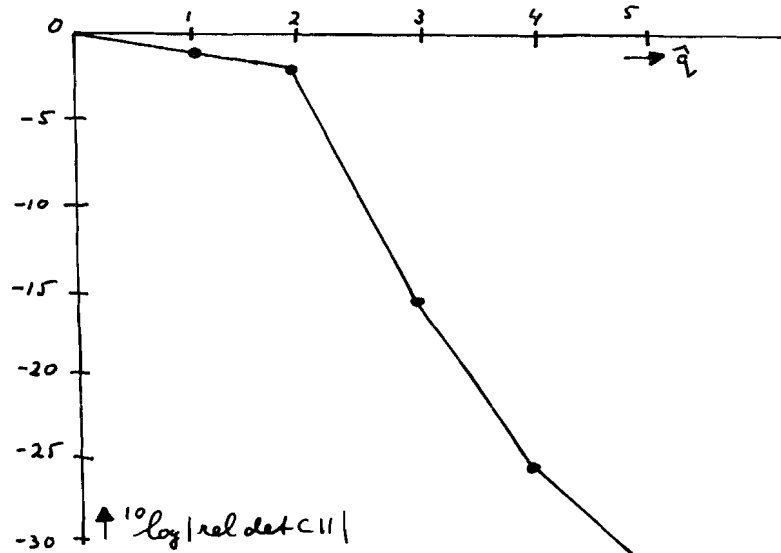
$\hat{p}=1$; dan is $\hat{q}=3$,

$\hat{p}=2$; dan is $\hat{q}=2$,

$\hat{p}=3$; dan is $\hat{q}=1$,

$\hat{p} \geq 4$; dan is $\hat{q}=0$.

Indien $\hat{p}=\hat{q}$ geeft figuur 4.19: $^{10}\log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{q} . Deze grafiek wijst op een tweede orde proces.



FIGUUR 4.19 Determinantenmethode voor H3.

4.5.3. Polen en nulpunten methode.

Tabel 4.14 geeft de geschatte polen en nulpunten voor H3, indien $\hat{p}=\hat{q}=1$ t/m 5.

Uit deze tabel zou men kunnen concluderen: $\hat{p}=\hat{q} \geq 4$; immers bij

$\hat{p}=\hat{q}=5$ ontstaat één praktisch samenvallende pool en nulpunt.

Het is voor dit proces zeker interessant om de maximale waarde van \hat{p} en \hat{q} groter te nemen dan vijf.

	Pool (rad/sec)	Nulpunt (rad/sec)
echt	-127	-0,63
	-6,25±50,9j	-490
	-3,69±8,80j	-500
		Σ
q̂=1	-9,55	-0,51
q̂=2	-3,59±8,40j	-0,58
		+120
q̂=3	-3,29±8,07j -57,9	-0,63
		+37,1
		-21,6
q̂=4	-4,68±38,7j -3,35±8,16j	-0,62
		+94,8±99,7j
		-70,0
q̂=5	-3,33±8,14j -3,77±39,5j	-0,62
		-0,62
		-36,4
		-36,4
	(+130	+86,5)

TABEL 4.14 Polen en nulpunten methode voor H3.

Teneinde een indruk te krijgen over de invloed van de stoornis $e(t)$ op het schatten van de orde van $H3$, is de overdrachtsfunctie van dit proces naar het z -domein getransformeerd en daarna geïnstrumenteerd op een digitale computer. Met behulp van dit discrete proces zijn de orde tests voor verschillende signaal-ruisverhoudingen uitgevoerd. De equation-error e_k is hierbij wit verondersteld. Transformatie van $H3(s)$ naar het z -domein levert een proces waarvoor geldt: $p=4, q=5$. De overdrachtsfunctie is:

$$H3(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5}}$$

met: $b_0=0,$ en: $a_1=-3,83,$
 $b_1=1,$ $a_2=+5,95,$
 $b_2=-0,218,$ $a_3=-4,58,$
 $b_3=-0,773,$ $a_4=+1,70,$
 $b_4=-0,024,$ $a_5=-0,23.$

Dit proces heeft vijf polen: $p_1=0,274$ rad/sec,

$p_{2,3}=0,96 \pm 0,17j$ rad/sec,

$p_{4,5}=0,82 \pm 0,46j$ rad/sec,

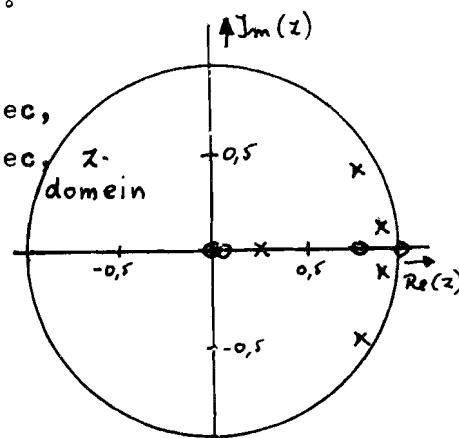
en vijf nulpunten: $z_1=1,01$ rad/sec,

$z_2=0,758$ rad/sec,

$z_3=0,033$ rad/sec,

$z_4=0$ rad/sec,

$z_5= \infty$ rad/sec.



Het ingangssignaal u_k is witte ruis met een rechthoekige amplitudeverdeling tussen de amplituden -1 en $+1$. De equation-error e_k is witte ruis met een rechthoekige amplitudeverdeling tussen $-\lambda$ en $+\lambda$. De schattingen zijn uitgevoerd voor $\lambda=0; 0,1$ en $0,5$.

4.5.4. Gedrag van de kostenfunctie.

Tabel 4.15 geeft de kostenfunctie V_1 voor $H_3(z)$.

\hat{q}	$10 \log V_1$					
	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$
5	3,88	1,62	0,49	-2,00	-4,54	-4,54
4	3,91	1,95	0,49	0,42	-0,20	-1,27
3	4,70	2,33	1,30	0,83	0,80	0,80
2	6,29	3,49	3,35	3,15	2,94	2,75
1	6,13	5,80	5,81	5,81	5,83	5,85
0	6,92	6,44	6,46	6,46	6,47	6,46

TABEL 4.15.a Gedrag van de kostenfunctie voor $H_3(z)$ bij $\lambda=0$.

$10_{\log V1}$						
\hat{q}	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$
5	3,47	1,76	1,71	0,42	0,40	0,42
4	3,52	2,11	1,89	1,19	0,43	0,47
3	5,08	2,37	1,95	1,96	1,85	1,71
2	5,75	4,30	4,32	4,34	4,36	4,37
1	5,85	5,83	5,83	5,84	5,86	5,88
0	6,59	6,50	6,51	6,52	6,52	6,52

TABEL 4.15.b Gedrag van de kostenfunctie voor $H3(z)$ bij $\lambda=0,1$.

$10_{\log V1}$						
\hat{q}	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$
5	3,54	2,10	2,10	1,77	1,78	1,80
4	3,74	2,23	2,16	1,85	1,79	1,82
3	5,69	2,72	2,47	2,47	2,47	2,48
2	5,70	5,20	5,21	5,23	5,24	5,25
1	5,98	5,99	6,00	6,00	6,01	6,03
0	8,33	7,21	7,21	7,21	7,22	7,22

TABEL 4.15.c Gedrag van de kostenfunctie voor $H3(z)$ bij $\lambda=0,5$.

Indien $\lambda=0$ volgt uit tabel 4.15.a $\hat{p}=4$ en $\hat{q} \geq 5$.

Indien $\lambda=0,1$ is \hat{p} en \hat{q} niet eenduidig te bepalen. Mogelijk is:

$\hat{p}=4$; dan is $\hat{q}=4$,

$\hat{p}=3$; dan is $\hat{q} \geq 5$.

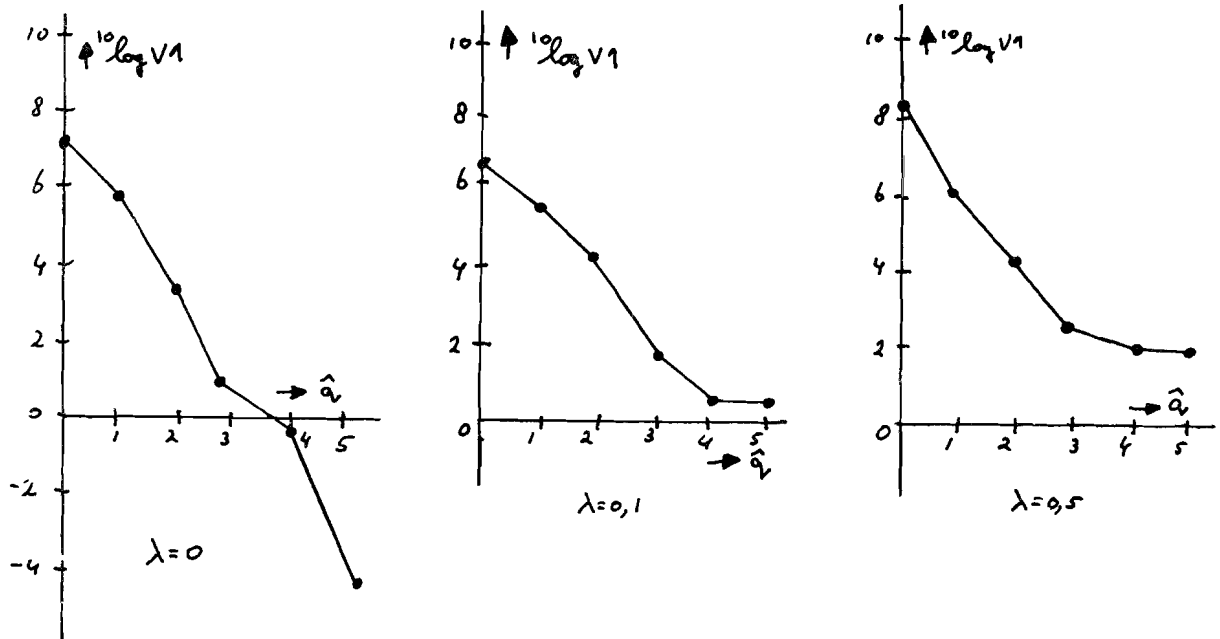
Indien $\lambda=0,5$ is $\hat{p}=1$ en $\hat{q}=3$ een mogelijke schatting.

Indien $\hat{p}=\hat{q}$, geeft figuur 4,20 het gedrag van de kostenfunctie.

Uit figuur 4.20 volgt: $\lambda=0$; dan is $\hat{q} \geq 5$,

$\lambda=0,1$; dan is $\hat{q}=4$,

$\lambda=0,5$; dan is $\hat{q}=3$.



FIGUUR 4.20 Gedrag van de kostenfunctie voor $H_3(z)$.

4.5.5. Determinanten methode.

Tabel 4.16 geeft: $10 \log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{p} en \hat{q} .

		$10 \log \text{rel det } C_{11} $					
\hat{q}	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$	
5	-11,5	-13,8	-17,1	-26,0	-27,4	-31,9	
4	-7,36	-10,8	-12,4	-18,6	-23,3	-23,2	
3	-2,59	-6,78	-7,53	-8,95	-10,3	-11,7	
2	-1,71	-2,43	-2,69	-2,73	-2,99	-3,19	
1	-1,43	-1,51	-1,54	-1,55	-1,66	-1,87	
0	0	-0,01	-0,03	-0,05	-0,06	-0,09	

TABEL 4.16.a Determinantenmethode voor $H_3(z)$ bij $\lambda=0$.

		$10 \log \text{rel det } C_{11} $					
\hat{q}	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$	
5	-12,5	-14,7	-17,3	-18,6	-23,0	-28,9	
4	-6,22	-11,7	-13,4	-17,0	-17,0	-17,8	
3	-3,27	-6,23	-6,29	-6,42	-6,59	-6,69	
2	-1,49	-2,19	-2,40	-2,57	-2,97	-3,20	
1	-1,24	-1,25	-1,36	-1,46	-1,51	-1,76	
0	0	-0,01	-0,03	-0,05	-0,06	-0,09	

TABEL 4.16.b Determinanten methode voor $H_3(z)$ bij $\lambda=0,1$.

\hat{q}	$^{10}\log \text{rel det } C_{11} $					
	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$	$\hat{p}=4$	$\hat{p}=5$
5	-13,6	-15,9	-18,2	-18,9	-21,4	-22,1
4	-6,00	-12,7	-14,2	-16,1	-16,2	-16,2
3	-4,51	-5,98	-6,12	-6,14	-6,20	-6,51
2	-2,83	-3,15	-3,38	-3,76	-4,10	-4,27
1	-1,33	-1,81	-2,08	-2,19	-2,23	-2,25
0	0	-0,01	-0,03	-0,05	-0,06	-0,09

TABEL 4.16.c Determinantenmethode voor $H_3(z)$ bij $\lambda=0,5$.

Uit deze tabellen zijn \hat{p} en \hat{q} niet eenduidig te bepalen. Mogelijk is:

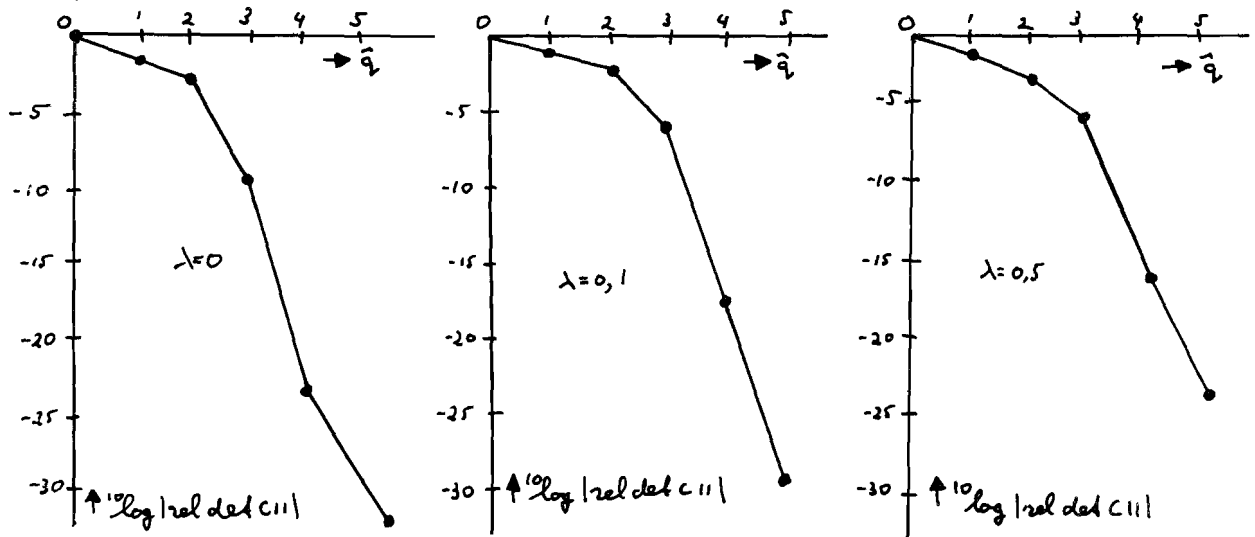
$$\lambda = 0 \text{ en } 0,1: \hat{q}=3 \text{ en } \hat{p}=0,$$

$$\hat{q}=2 \text{ en } \hat{p} \geq 5.$$

$$\lambda=0,5: \hat{q}=4 \text{ en } \hat{p}=0,$$

$$\hat{q}=3 \text{ en } \hat{p} \geq 5.$$

Indien $\hat{p}=\hat{q}$ geeft figuur 4.21: $^{10}\log |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{q} .



FIGUUR 4.21 Determinanten methode voor $H_3(z)$.

Indien $\lambda=0$ is mogelijk: $\hat{q}=2$ of 3 .

Indien $\lambda=0,1$ en $0,5$ wijst de determinanten methode op een derde orde proces.

4.5.6. Polen en nulpunten methode.

Tabel 4.17 geeft de geschatte polen en nulpunten van $H_3(z)$.

	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)
echt	+0,27	0	+0,27	0	+0,27	0
	+0,82±0,46j	+0,03	+0,82±0,46j	+0,03	+0,82±0,46j	+0,03
	+0,96±0,17j	+0,76	+0,96±0,17j	+0,76	+0,96±0,17j	+0,76
	.	+1,0	.	+1,0	.	+1,0
		∞		∞		∞
q̂=1	+0,89	-0,88	+0,91	-0,90	+0,98	-1,68
q̂=2	+0,88±0,47j	-1,93	+0,90±0,44j	-0,94	+0,97±0,22j	-0,59
		-21,8		+0,95		+0,19
q̂=3	+0,80	-77	+0,996	-20,4	+1,004	-6,54
	+0,88±0,47j	-0,59	+0,88±0,47j	-0,92	+0,88±0,46j	-0,86
		-0,46		+0,02		-0,13
q̂=4	+0,88±0,47j	-500	+0,88±0,47j	-0,31	+0,88±0,47j	-0,28
	+0,99±0,12j	-0,31	+0,89	-0,68	+0,91	-0,66
		-0,70		+100		+18,2
		+0,87	(+0,99)	(+1,06)	(+0,99)	(+1,07)
q̂=5	+0,88±0,47j	-0,76	+0,88±0,47j	-0,74	+0,88±0,47j	-0,69
	+0,30	-0,04	+0,25	-0,14	+0,22	-0,21
	+0,76	0	+0,83	-0,09	+0,85	+0,15
		∞		+100		+18,5
	(+1,00)	(+1,01)	(+0,998)	(+1,03)	(+0,998)	(+1,01)
	λ=0		λ=0,1		λ=0,5	

TABEL 4.17 Polen en nulpunten methode voor $H_3(z)$.

In tabel 4.17 ziet men:

$\lambda=0$; één samenvallende pool en nulpunt bij $\hat{q}=5$; dus mogelijk is: $\hat{q}=4$.

$\lambda=0,1$ en $0,5$; één samenvallende pool en nulpunt bij $\hat{q}=4$ en 5 ; dus mogelijk is: $\hat{q}=3$ of 4 .

Uit de voorgaande resultaten volgt:

- gedrag van de kostenfunctie: indien $\lambda=0$ wordt de juiste orde geschat, indien $\lambda \neq 0$ wordt de geschatte orde kleiner dan de werkelijke orde.

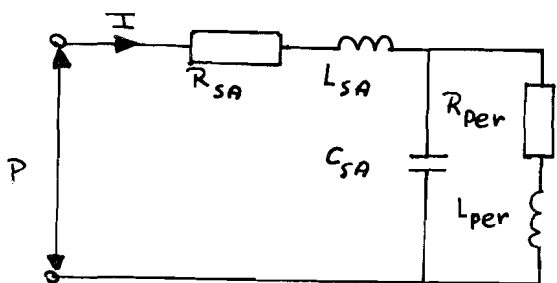
2) polen en nulpunten methode, en determinanten methode:

deze methodes geven problemen bij het schatten van de orde. De oorzaak hiervan kan zijn, dat het proces bijna instabiel is (vier polen dicht bij de rand van de eenheidscircl).

4.6 Schattingen aan de uitgangsadmittantie van een fysisch model van de aorta.

Door Leliveld (lit. 4) is een fysisch model van de aorta gerealiseerd. Dit model bestaat uit een circulatie systeem met een kunstmatige aorta (slang) en een afsluit admittantie.

Het ideale elektrische analogon van deze afsluit admittantie (figuur 4.2) bestaat uit twee weerstanden en een condensator. De waarde van de condensator in figuur 4.2 is 1 ml mmHg^{-1} ; bij het fysisch model van de aorta is de condensatorwaarde ongeveer $0,71 \text{ ml mmHg}^{-1}$. Het blijkt verder, dat beide weerstanden een niet te verwaarlozen serie zelfinductie hebben. Het totale elektrische analogon van de afsluit admittantie is nu gegeven in figuur 4.22.



$$\begin{aligned}
 R_{sa} &= 8,00 \cdot 10^{-2} \text{ mmHg ml}^{-1} \text{ s,} \\
 R_{per} &= 1,58 \cdot 10^0 \text{ mmHg ml}^{-1} \text{ s,} \\
 C_{sa} &= 0,71 \cdot 10^0 \text{ ml mmHg}^{-1}, \\
 L_{sa} &\approx 2,16 \cdot 10^{-2} \text{ mmHg ml}^{-1} \text{ s}^2, \\
 L_{per} &\approx 6,22 \cdot 10^{-2} \text{ mmHg ml}^{-1} \text{ s}^2.
 \end{aligned}$$

FIGUUR 4.22 Uitgangsadmittantie van de "slang".

Over de nauwkeurigheid van de zelfinducties L_{sa} en L_{per} is nog niet veel bekend. De opgegeven waarden zijn afkomstig van Leliveld; en zijn berekend aan de hand van de gemeten lengte, breedte en hoogte van de weerstanden.

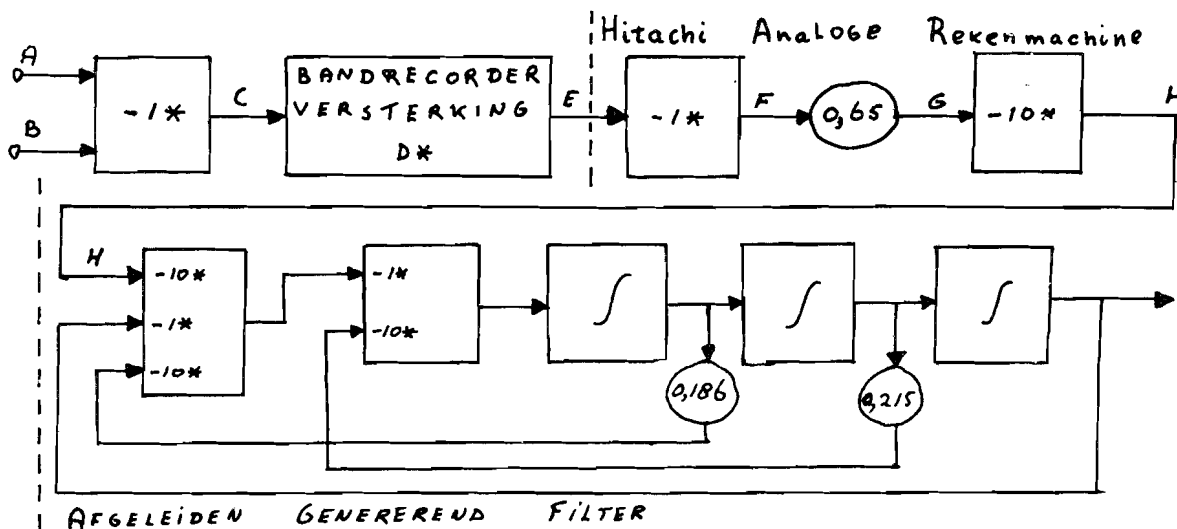
De overdrachtsfunctie van de in figuur 4.22 gegeven uitgangs admittantie blijkt dan te zijn:

$$H1(s) = \frac{I(s)}{P(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3},$$

met: $b_0=0,60$, en: $a_1=0,11$,
 $b_1=0,67$, $a_2=0,017$,
 $b_2=0,026$, $a_3=5,8 \cdot 10^{-4}$.

Dit proces heeft drie polen: $p_1=-24,4$ rad/sec,
 $p_{2,3}=-2,41 \pm 8,1j$ rad/sec,
 en drie nulpunten: $z_1=-24,8$ rad/sec,
 $z_2=-0,95$ rad/sec,
 $z_3 = \infty$ rad/sec.

De druk en de flow van de uitgangs admittantie worden opgenomen op een analog-7 bandrecorder, waarna deze signalen toegevoerd worden aan de analoge rekenmachine (afgeleiden genererende filters). Teneinde de bandrecorder zo ver mogelijk te kunnen uitsturen, is de gelijkstroomcomponent van de druk en de flow geelimineerd. Figuur 4.23 geeft de verwerking van de signalen. Uit deze figuur volgt, dat bij de druk 500 volt opgeteld en van de flow 91 volt afgetrokken moet worden.



FIGUUR 4.23

	DRUK	FLOW
A	-P	I
B	+3,85 volt	-0,28 volt
C	P-3,85	0,28-I
D	2x	5x
E	2P-7,7	1,4-5I
F	7,7-2P	5I-1,4
G	5-1,3P	3,3I-0,91
H	13P-50	9,1-33I
I	500-130 [P]	330 [I] -91

Tot nu toe is nog geen rekening gehouden met de gevoeligheid van de druk en flow opnemers. Daartoe wordt allereerst gemeten: de gemiddelde flow en de gemiddelde druk. De verhouding van deze twee grootheden is de b_0 van het overdrachts systeem; en blijkt 0,6 te zijn. In het digitale programma worden de flow en druk gemiddeld, en de b_0 wordt daarna bepaald. De flow en zijn afgeleiden worden daarna met een zodanige constante vermenigvuldigd, dat b_0 gelijk wordt aan 0,6. Tot nu toe zijn alleen opnamen gemaakt m.b.v. een derde orde afgeleiden genererend filter (de maximale orde van het model wordt dan drie). Het is zeker interessant om ook opnamen te maken met een vijfde orde filter.

4.6.1. Schattingen van de parameters.

Tabel 4.18 geeft de schattingen van de parameters bij verschillende orden van het model. Tevens geeft deze tabel de afwijkingen van de geschatte parameters t.o.v. de berekende parameters.

	Berekende waarde	Geschatte parameters							
		$\hat{p}=1; \hat{q}=1$		$\hat{p}=2; \hat{q}=2$		$\hat{p}=2; \hat{q}=3$		$\hat{p}=3; \hat{q}=3$	
b_0	+0,60	+0,61	goed	+0,60	goed	+0,60	goed	+0,60	goed
b_1	+0,67	+0,31	2,2x	+0,93	+39%	+0,94	+40%	+1,00	+48%
b_2	+0,026	-----	-----	+0,0027	9,6x	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	teken	$+1,1 \cdot 10^{-3}$	24x
b_3	0	-----	-----	-----	-----	-----	-----	$+1,4 \cdot 10^{-3}$	-----
a_1	+0,11	+0,08	-27%	+0,25	2,3x	+0,25	2,3x	+0,27	2,5x
a_2	+0,017	-----	-----	+0,012	-29%	+0,011	-35%	+0,011	-35%
a_3	$+5,8 \cdot 10^{-4}$	-----	-----	-----	-----	$-4,1 \cdot 10^{-5}$	teken	$+1,4 \cdot 10^{-5}$	41x

TABEL 4.18 Geschatte parameters van de uitgangsadmittantie van de slang.

4.6.2. Gedrag van de kostenfunctie.

Het gedrag van de kostenfunctie $^{10} \log V_1$ is gegeven in tabel 4.19. Tot aan $\hat{p}=\hat{q}=3$ vertoont de kostenfunctie geen significante daling, dus waarschijnlijk is de orde van de uitgangs admittantie groter dan 3.

\hat{q}	$10_{\log} V_1$			
	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$
3	+10,32	+9,24	+9,24	+10,36
2	+10,31	+9,26	+9,24	+10,13
1	+10,53	+10,49	+10,18	+12,97
0	+10,52	+10,53	+10,42	+10,37

TABEL 4.19 Gedrag van de kostenfunctie voor de uitgangsadmittantie van de slang.

4.6.3. Determinanten methode.

Tabel 4.20 geeft: $10_{\log} |\text{rel det } C_{11}|$ als functie van \hat{p} en \hat{q} . De matrix C_{11} wordt niet duidelijk slecht geconditioneerd; dus de orde van de uitgangsadmittantie is waarschijnlijk groter of gelijk drie.

\hat{q}	$10_{\log} \text{rel det } C_{11} $			
	$\hat{p}=0$	$\hat{p}=1$	$\hat{p}=2$	$\hat{p}=3$
3	-0,39	-2,98	-6,40	-7,32
2	-0,02	-2,97	-3,37	-4,03
1	-0,0002	-1,71	-2,37	-3,07
0	0	-0,0002	-0,18	-0,62

TABEL 4.20 Determinanten methode voor de uitgangsadmittantie van de slang.

4.6.4. Polen en nulpunten methode.

Tabel 4.21 geeft de geschatte polen en nulpunten van de uitgangsadmittantie. Tot en met de derde orde blijken geen samenvallende polen en nulpunten op te treden; de orde van de uitgangsadmittantie is dus ≥ 3 .

	pool (rad/sec)	nulpunt (rad/sec)
berekend	-24,4 -2,41+8,10j	-0,95 -24,8 ∞
q=1	-12,1	-1,97
q=2	-15,1 -5,39	-3,40 -0,64
q=3	-817 -18,7 -4,72	-3,60+85,1j -0,60

TABEL 4.21 Polen en nulpunten methode voor de uitgangs admittantie van de slang.

5. Conclusies.

De conclusies m.b.t. het schatten van de orde van een lineair discreet proces zijn reeds gegeven aan het eind van paragraaf 2.1. Opgemerkt kan nog worden, dat de resultaten met Gausische en met rechthoekige stoornis niet principieel verschillen.

Het is tot nu toe onmogelijk gebleken om de orde van de tellerpolynoom en de orde van de noemerpolynoom van de overdrachtsfunctie van een lineair continu proces afzonderlijk te schatten.

Voor een eerste orde proces (paragraaf 4.1 t/m 4.3) blijken alle orde tests goed te werken. Normeren van de signalen (zodanig dat de top tot top amplituden van de afgeleiden van $[U]$ gelijk zijn aan de top tot top amplitude van $[U]$; idem $[Y]$) blijkt duidelijk een gunstige invloed te hebben op de werking van de determinanten methode.

Het schatten aan het gegeven derde en vijfde orde proces (paragraaf 4.4 en 4.5) blijkt problemen te geven. De reden hiervan is waarschijnlijk: 1) het optreden van ruis in het analoge model,

2) het erg klein zijn van de hogere orde parameters.

De eerste schattingen van de parameters van de uitgangs admittantie van de "slang" zijn niet erg nauwkeurig; echter de orde van grootte van de parameters blijkt voor de 0^e en de 1^e orde parameters goed te zijn.

De berekeningen zijn uitgevoerd op een IBM 360/30 digitale rekenmachine. Het blijkt noodzakelijk om bij deze machine met een dubbele woordlengte te rekenen.

Literatuur.

1) Talmon, J.L.

Approximated Gauss-Markov estimators and related schemes.

T.H. Report 71 - E - 17, 1971.

Technische Hogeschool Eindhoven.

2) Sommen, F.L.M. v.d.

De bepaling van de orde van lineaire systemen.

Technische Hogeschool Eindhoven 1971.

3) Vlek, T.H.A.M.

Identification of linear continuous systems, using transform and convolution methods.

Technische Hogeschool Eindhoven 1973.

4) Leliveld, W.H.

The design of a mock circulation system

T.H. Report 72 - E - ,1972.

Technische Hogeschool Eindhoven.

Aanvullende literatuur:

5) Woodside, C.M.

Estimation of the order of linear systems.

IFAC symposium, june 1970, Praag (paper 1.7).

6) Åstrom, K.J.

Lectures on the identification problem, the least squares method.

Lund institute of technology, division of automatic control.

Report 6808 Sept. 1968.

7) Gustavsson, I.

Parametric identification of time series.

Lund institute of technology, division of automatic control.

Report 6803 April 1968.

Gebruikte symbolen.

U	ingangssignaal,
X	ongestoord uitgangssignaal,
n	additief stoorsignaal,
Y	gestoord uitgangssignaal: $Y=X+n$,
e	"equation error",
ξ	witte ruis, waaruit door lineaire filtering n is ontstaan,
\hat{e}	geschatte waarde van e ,
$\hat{\xi}$	geschatte waarde van ξ ,
T	sample tijd,
$U(t)$	continu ingangssignaal,
$U(t)^{(i)}$	i^e afgeleide van $U(t)$,
$[U(t)]$	signaal, ontstaan door lineaire filtering van $U(t)$,
$[U(t)]^{(i)}$	i^e afgeleide van $[U(t)]$,
U_k	discreet ingangssignaal: $U_k = U(t_0 + kT)$,
$U_k^{(i)}$	sample van het continue signaal $U(t)^{(i)}$: $U_k^{(i)} = U^{(i)}(t_0 + kT)$,
$[U]_k$	sample van het continue signaal $[U(t)]$: $[U]_k = [U(t_0 + kT)]$,
$[U]_k^{(i)}$	sample van het continue signaal $[U(t)]^{(i)}$: $[U]_k^{(i)} = [U^{(i)}(t_0 + kT)]^{(i)}$,
$U_k^{(i)}$	vector, opgebouwd volgens: $(U_k^{(i)}, U_{k+1}^{(i)}, \dots, U_{k+N-1}^{(i)})$,
A, B, C, D, G	polynomen in z^{-1} : $A(z^{-1}) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_q z^{-q}$,
Ω	matrix, waarin de waarnemingen zijn ondergebracht,
P	een vierkante matrix: $P = (\Omega^T \Omega)^{-1}$,
p	orde van het voorwaartse deel van het proces,
q	orde van het achterwaartse deel van het proces,
\hat{p}	geschatte waarde van p ,
\hat{q}	geschatte waarde van q .