

## MASTER

### Tweedimensionale kanaalstromingen achter een vernauwing : numerieke en experimentele analyse

van de Vosse, F.N.

*Award date:*  
1983

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

INTERAFDELINGSPROJECT "ATHEROSCLEROSE".

TWEEDIMENSIONALE KANAALSTROMINGEN ACHTER EEN VERNAUWING.

- numerieke en experimentele analyse -

F.N.van de Vosse

dec. 1982

Onder supervisie van: prof.dr.ir.J.D.Janssen  
prof.dr.ir.G.Vossers

Onder begeleiding van: dr.ir.A.A.van Steenhoven  
dr.ir.A.A.H.J.Sauren  
dr.ir.M.E.H.van Dongen

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

## Samenvatting.

In het kader van het interafdelingsproject "Atherosclerose", waar onderzoek wordt gedaan naar stromingsverschijnselen bij een geringe stenose in de halsslagader, is in dit afstudeerwerk onderzoek gedaan naar oplosmethoden voor de tweedimensionale stationaire Navier-Stokes-vergelijking met behulp van de eindige elementen methode. Hierbij is uitgegaan van het elementen methode pakket AFEP ontwikkeld in Delft (T.H.). Er worden drie oplosmethoden behandeld die aan de hand van stromingen over een stapvormige verwijding in een tweedimensionaal stromingskanaal worden vergeleken. Ter verificatie van de numerieke oplossingen zijn m.b.v. een laser-Doppler-anemometer experimenten aan zo'n zelfde kanaal gedaan. De numerieke en experimentele resultaten zijn vergeleken met literatuurgegevens en vertonen redelijke overeenkomsten. Het interessegebied lag hierbij bij Reynoldsgetallen, gebaseerd op de diameter van het kanaal en de gemiddelde snelheid, tussen 500 en 1000.

Samengevat kan geconcludeerd worden dat de eindige elementen methode voorspellingen voor stromingen achter een verwijding redelijk zijn, maar dat vooral de mathematische achtergronden nog nader onderzoek behoeven.

Inhoudsopgave:

Samenvatting

Inhoudsopgave

1. Inleiding	1
1.1. Doelstelling	1
1.2. Aanpak	1
2. De eindige elementenmethode algemeen	2
2.1. Inleiding	2
2.2. Minimalisatie en integraalformulering van partiële differentiaalvergelijkingen en hun discretisatie.	4
2.2.1. Minimalisatieformulering	4
2.2.2. Discretisatie van het minimaliseringsprobleem.	7
2.2.3. Integraalformulering	13
2.3. Structuur van de matrixvergelijking en enige oplossmethoden.	15
3. Oplossen van de Navier-Stokes-vergelijking m.b.v. de eindige elementen methode.	19
3.1. Inleiding	19
3.2. De stationaire Navier-Stokes-vergelijking in verschillende formuleringen	19
3.3. Discretisatie van de snelheid-druk-formulering van de stationaire Navier-Stokes-vergelijking.	23
3.3.1. Inleiding	23
3.3.2. De directe methode	24
3.3.3. De boetefunctiemethode.	32
3.3.4. De methode met divergentievrije elementen	34
3.4. Numerieke resultaten.	37
3.4.1. Vergelijking van de drie methoden.	37
3.4.2. Invloed van de meshverdeling .	39
3.4.3. De invloed van her Reynoldsgetal.	40
3.4.4. Invloed van de stapgrootte	41
3.5. Conclusies en discussie	43
3.5.1. De oplossmethoden.	43
3.5.2. De numerieke resultaten	45

4. Experimentele verificatie.	46
4.1. Inleiding.	46
4.2. Oriëntatie.	46
4.3. Opstelling en meetmethodiek voor het bepalen van snelheidsprofielen in een tweedimensionaal kanaal met stapvormige verwijding.	47
4.3.1. De opstelling.	47
4.3.2. De meetmethodiek	49
4.4.3. Foutenanalyse	52
4.4. Meetresultaten en vergelijking met berekeningen.	54
4.4.1. Contrôle van de tweedimensionaliteit van de stroming.	54
4.4.2. Snelheidspatronen achter de verwijding voor verschillende Reynoldsgetallen.	55
4.4.3. Onderzoek naar instationaire effecten zoals wervelafschudding en instabiliteiten.	59
4.5. Conclusies en discussie.	61
4.5.1. Conclusies.	61
4.5.2. Beschouwing van de meetnauwkeurigheid	61
4.5.3. Beschouwing van de resultaten	63
5. Voortgang van onderzoek.	68
5.1. Numeriek-theoretisch.	68
5.2. Experimenteel	69
Appendix	
Literatuur	

## 1. Inleiding.

### 1.1. Doelstelling.

Het afstudeerwerk heeft plaatsgevonden in het kader van het interafdelingsproject "Atherosclerose". Binnen dit project wordt onderzoek verricht naar stromingsverschijnselen die optreden bij een geringe vernauwing van een bloedvat. De aandacht is hierbij hoofdzakelijk gericht op de halsslagader. Zowel uit experimenteel als uit numeriek onderzoek worden voorspellingen gedaan omtrent voornoemde verschijnselen. Dit afstudeerwerk moet vooral gezien worden in het kader van het numeriek onderzoek.

Doel van het afstudeerwerk is onderzoek te doen naar verschillende oplosmethoden van de Navier-Stokes-vergelijking m.b.v. de eindige elementen methode en het operationeel maken van AFEP (een eindige elementen methode pakket ontwikkeld in Delft, waarmee o.a. benaderingsoplossingen van de stationaire tweedimensionale Navier-Stokes-vergelijking kunnen worden bepaald). De kwaliteit van de benaderingsoplossingen worden getoetst aan de hand van experimenten met een laser-Doppler-anemometer.

### 1.2. Aanpak.

Om meer inzicht te krijgen in de werking van de eindige elementen methode is literatuuronderzoek verricht naar de mathematische achtergronden van deze methode, toegespitst op oplossingen van stromingsproblemen (H2). Dit literatuuronderzoek is voortgezet maar dan gericht op de Navier-Stokes-vergelijking. In H3 worden hiervan drie oplosmethoden behandeld die alle drie standaard in AFEP aanwezig zijn, en worden de drie methoden vergeleken aan de hand van berekeningen aan tweedimensionale kanaalstromingen met een stapvormige verwijding.

In H4 worden experimenten beschreven, waarin met behulp van een laser-Doppler-anemometer, snelheidsprofielen in zo'n kanaal worden bepaald. De experimentele snelheidsbepalingen worden vergeleken met numeriek bepaalde oplossingen. Zowel de experimenten als de berekeningen zijn uitgevoerd voor Reynoldsgetallen van 500 tot 1000.

Dit verslag eindigt met een schets van de voortgang van het onderzoek (H5).

2. De eindige elementenmethode algemeen.

2.1. Inleiding.

Ter inleiding van de beschrijving van oplosmethoden van de Navier-Stokes-vergelijking met behulp van de eindige elementenmethode wordt de partiële differentiaalvergelijking van de gedaante  $\vec{L}u = \vec{f}$  beschouwd, waarin L een lineaire differentiaaloperator van de 2<sup>e</sup> orde is,  $\vec{u}$  de op te lossen vector-grootheid en  $\vec{f}$  een gegeven vectorveld. Beperking tot lineaire 2<sup>e</sup> orde differentiaaloperatoren betekent dat moet gelden:

$$\alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 u_{xy} + \alpha_3 u_{yy} + \alpha_4 u_x + \alpha_5 u_y + \alpha_6 u = f_1$$

$$\beta_1 v_{xx} + \beta_2 v_{xy} + \beta_3 v_{yy} + \beta_4 v_x + \beta_5 v_y + \beta_6 v = f_2$$

met:  $\alpha_1$  t/m  $\alpha_6$  en  $\beta_1$  t/m  $\beta_6$  functies van x en y,

$$(u, v)^T = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y = \vec{u}, \quad (f_1, f_2)^T = f_1 \vec{e}_x + f_2 \vec{e}_y = \vec{f}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{etc.}$$

De differentiaalvergelijking wordt hier gedefinieerd op het tweedimensionale gebied  $\Omega$  met rand  $\partial\Omega$ , eventueel verdeeld in stukken  $\partial\Omega_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), waar verschillende soorten randvoorwaarden gelden (zie fig.2.1.). De naar buiten gerichtte normaal op  $\partial\Omega$  wordt  $\vec{n}$  genoemd.

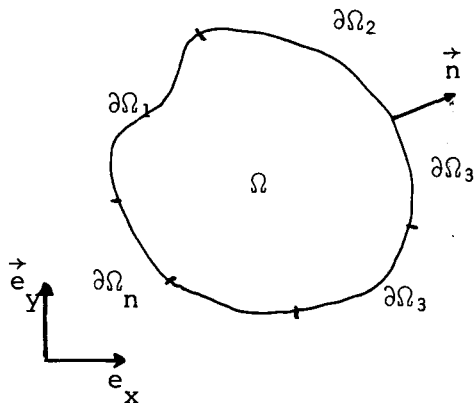


Fig.2.1 : Het gebied  $\Omega$

Teneinde tot een elementenformulering te komen, zal van de gegeven differentiaalvergelijking het bijbehorend minimaliseringsprobleem worden afgeleid (§2.2.1) dat vervolgens kan worden gediscretiseerd (§2.2.2). Deze strategie is echter ~~alleen~~ mogelijk voor differentiaalvergelijkingen met homogene randvoorwaarden waarvan de differentiaaloperator aan speciale eisen voldoet. Voor differentiaalvergelijkingen die niet aan die eisen voldoen, zal dan ook een andere strategie worden toegepast en zal van de differentiaalvergelijking een bijbehorende integraalformulering worden afgeleid, die met de methode van Galerkin kan worden gediscretiseerd (§2.2.3). In principe kan deze strategie altijd worden toegepast, maar toch zal in sommige gevallen de voorkeur uitgaan naar het equivalent minimaliseringsprobleem, omdat deze het mogelijk maakt nevenvoorwaarden d.m.v. een boetefunctie aan het probleem op te leggen (§3.3).

In beide strategieën zal aandacht moeten worden besteed aan de formulering van de randvoorwaarden na overgang op minimalisatie- resp. integraalformulering.

Na de discretisatie zal de minimalisatie- resp. integraalformulering overgaan in een matrixvergelijking van de vorm  $S\bar{a}=\bar{f}$  waarvan in §2.4 de structuur en enige oplosmethoden zullen worden behandeld.

Dit hoofdstuk zal zowel t.a.v. de elementenmethode als t.a.v. de oplosmethoden voor matrixvergelijkingen slechts de grote lijn aangeven, toepassingen zullen zich dan ook beperken tot de uitwerking van de Poissonvergelijking in twee dimensies. In H<sub>3</sub> zal dan de Navier-Stokes-vergelijking aan de orde komen.

Voor meer gedetailleerde informatie over de wiskundige achtergronden van de eindige elementenmethode wordt verwezen naar (v.Kan en Segal;1979). Meer informatie over numerieke technieken is te vinden in (Veltkamp en Geurts; 1980).



2.2. Minimalisatie en integraalformulering van partiële differentiaalvergelijkingen en hun discretisatie.

2.2.1. Minimalisatieformulering.

Veel in de fysica voorkomende problemen kunnen direct worden geschreven als minimaliseringsprobleem met bijbehorende randvoorwaarden (bijv. minimale potentiële energie). Deze kan dan direct worden gediscretiseerd op de wijze die in §2.2.2. zal worden beschreven. Tevens is het mogelijk om minimaliseringsproblemen via variatierekening terug te brengen tot partiële differentiaalvergelijkingen; de zgn. Euler-Lagrange-vergelijkingen (Brekelmans;1981). In de hier te beschouwen gevallen is echter de partiële differentiaalvergelijking gegeven en zal, om tot discretisatie over te kunnen gaan, de omgekeerde weg moeten worden bewandeld.

Uitgaande van het in §2.1 gedefinieerde gebied  $\Omega$  en het volgende minimaliseringsprobleem:

$$\min_u \left[ \int_{\Omega} F(\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}_x, \vec{u}_y) d\sigma + \int_{\partial\Omega} G(\vec{x}, \vec{u}) ds \right] \quad (2.1)$$

met randvoorwaarden

$$Ru = \vec{g} \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega$$

hierin geldt:

G en F: functies gedefinieerd op  $\partial\Omega$  resp  $\Omega$  met  $0^e$  resp  $1^e$  orde afgeleiden in u en v

R :  $1^e$ -orde differentiaaloperator gedefinieerd op  $\Omega$

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$$

Dan worden de Euler-Lagrange vergelijkingen:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0 \quad \text{voor } \vec{x} \in \Omega$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} = 0 \quad \text{voor } \vec{x} \in \Omega$$

met randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y &= 0 && \text{voor } \vec{x} \in \Omega \\ \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} n_y &= 0 && \text{voor } \vec{x} \in \Omega \\ \vec{R}u &= \vec{g} && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

De randvoorwaarden die direct uit het minimaliseringsprobleem volgen, heten natuurlijke randvoorwaarden. Indien de expliciet opgelegde randvoorwaarden  $\vec{R}\vec{u} = \vec{g}$  niet met deze randvoorwaarden overeenkomen (eventueel voor een deel van de rand) dan heten deze essentiële randvoorwaarden en vervangen ze de natuurlijke randvoorwaarden voor die rand. Als nu de omgekeerde weg wordt bewandeld en vanuit de differentiaalvergelijking het minimaliseringsprobleem wordt afgeleid, betekent het voorafgaande, dat randvoorwaarden, opgelegd aan de differentiaalvergelijking, die overeenkomen met de natuurlijke randvoorwaarden niet meer in rekening hoeven worden gebracht. Essentiële randvoorwaarden daarentegen moeten ook expliciet aan het minimaliseringsprobleem worden opgelegd. Met behulp van het bovenstaande volgt dat de Poissonvergelijking:

$$-\nabla^2 \vec{u} = \vec{f}$$

met de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} u &= g_1(\vec{x}), \quad \frac{\partial v}{\partial n} = h_2(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h_1(\vec{x}), \quad v = g_2(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2 \\ \gamma \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} &= \vec{k}(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

met  $\gamma$  een constante en  $g_1, g_2, h_1, h_2$  en  $\vec{k}$  bekende functies van  $\vec{x}$ , is af te leiden uit:

$$\min_{u,v} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{f} \right\} d\sigma - \int_{\partial\Omega_1} h_2 v ds - \int_{\partial\Omega_2} h_1 u ds + \int_{\partial\Omega_3} \left( \frac{1}{2} \gamma |\vec{u}|^2 - \vec{k} \cdot \vec{u} \right) ds \right] \quad (2.4)$$

met randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} u &= g_1(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \\ v &= g_2(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

Hierin is:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = (\nabla u \cdot \vec{n}, \nabla v \cdot \vec{n})^T \quad (\text{normaalafgeleide van } \vec{u})$$

$g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), h_1(\vec{x}), h_2(\vec{x})$  en  $k(\vec{x})$  bekende functies van  $\vec{x}$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^2 \vec{u} = (\nabla^2 u, \nabla^2 v)^T$$

$$|\nabla \vec{u}|^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

(zie appendix 1)

De randvoorwaarden  $u=g_1(\vec{x})$  en  $v=g_2(\vec{x})$  worden Dirichlet randvoorwaarden genoemd en zijn essentieel. De randvoorwaarden  $\frac{\partial u}{\partial n}=h_1(\vec{x})$  en  $\frac{\partial v}{\partial n}=h_2(\vec{x})$  zijn Neumann randvoorwaarden en komen net als de Robin randvoorwaarden  $\gamma u(x) + \frac{\partial u}{\partial n} = k(\vec{x})$  als randintegralen voor in het minimaliseringsprobleem.

In het voorgaande is een minimaliseringsprobleem geponeerd (vgl.2.4) en geverifieerd dat deze hoort bij de differentiaalvergelijking (vgl.2.3). Het direct afleiden van een minimaliseringsprobleem uit de differentiaalvergelijking is niet altijd mogelijk en alleen eenvoudig als de differentiaalvergelijking voldoet aan de volgend eisen:

- 1) L is lineair
- 2) L is zelfgeadjungeerd, i.e.  $\int_{\Omega} \vec{v} \cdot L \vec{u} d\sigma = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot L \vec{v} d\sigma, \forall \vec{v}, \vec{u} \in \Omega$
- 3) L is positief, i.e.  $\int_{\Omega} \vec{u} \cdot L \vec{u} d\sigma \leq 0, \forall \vec{u} \in \Omega$
- 4) De randvoorwaarden zijn homogene Dirichlet of Neumann randvoorwaarden.

Voor de differentiaalvergelijking  $L\vec{u}=\vec{f}$  kan dan worden bewezen (van Kan en Segal;1979) dat de bijbehorende te minimaliseren functionaal gegeven wordt door:

$$J[\vec{u}] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \vec{u} \cdot L \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{f} \right\} d\sigma \quad (2.5)$$

Het op deze manier afgeleide minimaliseringsprobleem kan zoals hierna zal worden besproken eenvoudig worden gediscretiseerd. Voor veel differentiaalvergelijkingen is deze strategie echter niet te gebruiken omdat er geen bijbehorend minimaliseringsprobleem bestaat of vanwege inhomogene randvoorwaarden, en zal door vermenigvuldiging met testfuncties een integraalformulering worden afgeleid (§2.3).

### 2.2.2. Discretisatie van het minimaliseringsprobleem.

#### De methode van Ritz

In §2.2.1 is aangegeven hoe een partiële differentiaalvergelijking onder bepaalde voorwaarden kan worden geschreven als equivalent minimaliseringsprobleem. Dit resulteerde voor 2<sup>e</sup>-orde differentiaalvergelijkingen in een minimaliseringsprobleem van de vorm:

$$\min_{\vec{u}} \left[ \int_{\Omega} F(\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}_x, \vec{u}_y) d\sigma + \int_{\partial\Omega} G(\vec{x}, \vec{u}) ds \right] \quad (2.6)$$

$$\text{met b.v.: } \begin{aligned} u(\vec{x}) &= g_1(\vec{x}) & \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \\ v(\vec{x}) &= g_2(\vec{x}) & \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

De discretisatie vindt nu plaats door de functie  $\vec{u}(\vec{x})$  te benaderen door de functie  $\vec{u}_b(\vec{x}) = u_b(\vec{x})\vec{e}_x + v_b(\vec{x})\vec{e}_y$ . Hiertoe worden  $u_b(\vec{x})$  en  $v_b(\vec{x})$  geschreven als lineaire combinaties van n basisfuncties  $\phi_{1i}(\vec{x})$  resp.  $\phi_{2i}(\vec{x})$  volgens:

$$\begin{aligned} u_b(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n \{a_i \phi_{1i}(\vec{x})\} + u_o(\vec{x}) \\ v_b(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n \{b_i \phi_{2i}(\vec{x})\} + v_o(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

waarin  $a_i$  en  $b_i$  nog te bepalen constante coëfficiënten zijn en:

$$\begin{aligned} u_o(\vec{x}) &= g_1(\vec{x}) & \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1, & \quad u_o(\vec{x}) = 0 \text{ elders} \\ v_o(\vec{x}) &= g_2(\vec{x}) & \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2, & \quad v_o(\vec{x}) = 0 \text{ elders.} \end{aligned}$$

Om te voldoen aan de Dirichlet randvoorwaarden moeten de basisfuncties  $\phi_{1i}(\vec{x})$  en  $\phi_{2i}(\vec{x})$  voldoen aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden voor  $u_b$  resp.  $v_b$  d.w.z.  $\phi_{1i}(\vec{x})=0$  voor  $\vec{x} \in \partial\Omega_1$  en  $\phi_{2i}(\vec{x})=0$  voor  $\vec{x} \in \partial\Omega_2$ . Tevens

worden de basisfuncties zodanig gekozen dat ze minstens één maal differentieerbaar zijn. Substitutie van vgl. (2.7) in vgl. (2.6) levert dan het minimaliseringsprobleem:

$$\min_{\vec{u}_b} \left[ \int_{\Omega} F(\vec{x}, \vec{u}_b, \vec{u}_{bx}, \vec{u}_{by}) d\sigma + \int_{\partial\Omega} G(\vec{x}, \vec{u}_b) ds \right] \quad (2.8)$$

De basisfuncties  $\phi_{1i}(\vec{x})$  en  $\phi_{2i}(\vec{x})$  zijn bekende functies en het is dus mogelijk de differentiaties en integraties uit vgl. (2.8) uit te voeren zodat vgl. (2.8) overgaat in:

$$\min_{a_i, b_i} J[a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n] \quad (2.9)$$

De functionaal J is dan minimaal als geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_i} &= 0 && \text{voor } i=1, \dots, n \\ \frac{\partial J}{\partial b_i} &= 0 && \text{voor } i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.10)$$

Op deze wijze is een stelsel van 2n vergelijkingen met 2n onbekenden ( $a_i, b_i; i=1, \dots, n$ ) verkregen, dat in principe kan worden opgelost. Bij geschikte keuze van de basisfuncties  $\phi_{1i}(\vec{x})$  en  $\phi_{2i}(\vec{x})$  en bij toenemende n, zal  $\vec{u}_b(\vec{x})$  dan naar  $\vec{u}(\vec{x})$  convergeren. De hierboven beschreven procedure staat bekend als de methode van Ritz.

In appendix 2 wordt de methode van Ritz toegepast op het minimaliseringsprobleem (2.4), deze gaat dan over in de matrixvergelijking:

$$\begin{bmatrix} S^u & 0 \\ 0 & S^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^u \\ \underline{f}^v \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

met:

$$\begin{aligned} S_{ki}^u &= \int_{\Omega} (\nabla\phi_{1k} \cdot \nabla\phi_{1i}) d\sigma + \int_{\partial\Omega_3} (\gamma\phi_{1k}\phi_{1i}) ds && k, i=1, \dots, n \\ S_{ki}^v &= \int_{\Omega} (\nabla\phi_{2k} \cdot \nabla\phi_{2i}) d\sigma + \int_{\partial\Omega_3} (\gamma\phi_{2k}\phi_{2i}) ds && k, i=1, \dots, n \\ f_k^u &= \int_{\Omega} (f_1\phi_{1k}) d\sigma + \int_{\partial\Omega_2} (h_1\phi_{1k}) ds + \int_{\partial\Omega_3} (k_1\phi_{1k}) ds && k=1, \dots, n \\ f_k^v &= \int_{\Omega} (f_2\phi_{2k}) d\sigma + \int_{\partial\Omega_1} (h_2\phi_{2k}) ds + \int_{\partial\Omega_3} (k_2\phi_{2k}) ds && k=1, \dots, n \end{aligned}$$

ofwel:  $S\underline{\alpha} = \underline{f}$  (2.12)

met:  $\underline{\alpha}^T = [\underline{a}, \underline{b}]$ ,  $\underline{f}^T = [\underline{f}^u, \underline{f}^v]$  en  $S = \begin{bmatrix} S^u & 0 \\ 0 & S^v \end{bmatrix}$

Hoewel deze methode in principe altijd moet werken zijn er toch enkele nadelen aan verbonden. Ten eerste is het in het algemeen moeilijk goede basisfuncties te kiezen, die bovendien voldoen aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden en ten tweede is het op te lossen stelsel  $S\alpha = \underline{f}$  vaak slecht geconditioneerd en levert in het algemeen een volle matrix S. In §2.4 wordt verder ingegaan op de structuur van deze matrixvergelijking. De hier beschreven nadelen van de methode van Ritz worden ondervangen bij de eindige elementen methode, waarbij de basisfuncties  $\phi_{1i}(x)$  en  $\phi_{2i}(x)$  op een speciale manier worden gekozen.

De eindige elementen methode

Er wordt weer uitgegaan van het minimaliseringsprobleem (2.6). Het gebied  $\Omega$  wordt nu opgedeeld in een aantal (m) interne elementen  $e_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) bijvoorbeeld driehoeken, en een aantal (p) lijnelementen  $l_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) gedefinieerd op  $\partial\Omega$  (zie fig.2.2)

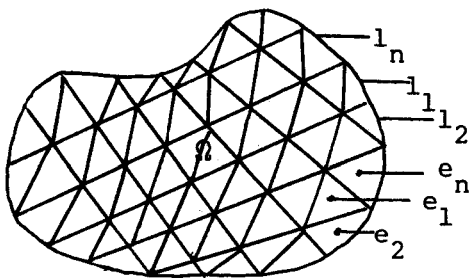


Fig.2.2 : het gebied  $\Omega$  verdeeld in elementen.

Aan de elementen worden de volgende eisen opgelegd:

- 1) 2 interne elementen hebben hoogstens 1 zijde gemeen (geen overlapping).
  - 2 lijnelementen hebben hoogstens 1 punt gemeen.
  - 2) Het gebied  $\Omega$  wordt geheel opgespannen door de interne elementen  $e_j$  ( $j=1, \dots, m$ ).
- De rand  $\partial\Omega$  wordt geheel opgespannen door de lijnelementen  $l_j$  ( $j=1, \dots, p$ ).

Vervolgens wordt in elk element een aantal basispunten  $\vec{x}_i$  gekozen (zie fig.2.3).

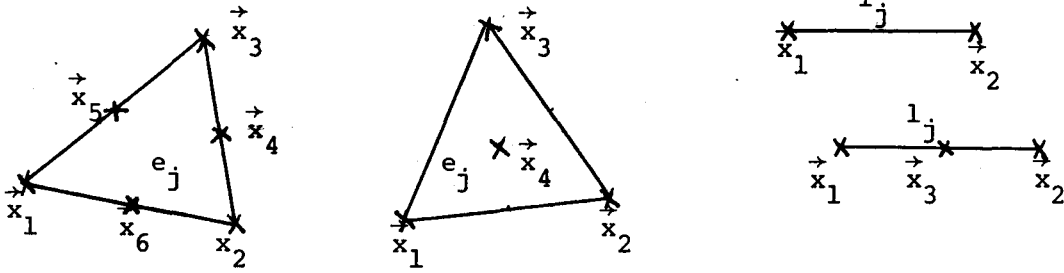


Fig.2.3 : Enkele voorbeelden van keuze van basispunten  $\vec{x}_i$ .

De keuze van de basispunten geschiedt hier zodanig dat gemeenschappelijke zijden ook gemeenschappelijke basispunten hebben. Stel dat er zo in totaal  $n$  basispunten in  $\Omega$  worden genomen, dan worden vervolgens  $n$  basisfuncties  $\phi_{1i}(\vec{x})$  en  $n$  basisfuncties  $\phi_{2i}(\vec{x})$  ( $i=1, \dots, n$ ) gedefinieerd die aan de volgende voorwaarden voldoen:

- 1)  $\phi_{1i}(\vec{x})$  en  $\phi_{2i}(\vec{x})$  hebben een voorgeschreven gedrag per element (bv lineair of kwadratisch per element).
- 2)  $\phi_{1i}(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$  en  $\phi_{2i}(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  = Kronecker-delta).
- 3)  $\phi_{1i}(\vec{x})$  en  $\phi_{2i}(\vec{x})$  continu in  $\Omega$ .

Vrijwel analoog aan vgl. (2.7) wordt  $\vec{u}(\vec{x})$  benaderd door:

$$\begin{aligned}
 u_b(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n a_i \phi_{1i}(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \notin \partial\Omega_1 \\
 v_b(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n b_i \phi_{2i}(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \notin \partial\Omega_2 \\
 u_b(\vec{x}) &= g_1(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \\
 v_b(\vec{x}) &= g_2(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Het verschil met vgl. (2.7) is dat er nu voor de randen  $\partial\Omega_1$  en  $\partial\Omega_2$ , waar voor  $u$  resp.  $v$  Dirichletrandvoorwaarden gelden, een uitzondering wordt gemaakt. Dit lijkt omslachtig maar later zal blijken dat de Dirichlet randvoorwaarden zeer eenvoudig kunnen worden verwerkt. Het zal dan tevens blijken dat dit in feite toch neerkomt op het voldoen aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden van  $\phi_{1i}$  en  $\phi_{2i}$ . Voorlopig kunnen de Dirichlet randvoorwaarden worden genegeerd. Voordeel hiervan is dat de basisfuncties niet bij voorbaat hoeven te voldoen aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden. Tevens is het nu mogelijk voor de basisfuncties  $\phi_{1i}(\vec{x})$  en  $\phi_{2i}(\vec{x})$  dezelfde functie  $\phi_i(\vec{x})$  te nemen. Vgl. (2.13) kan dan geschreven worden als:

$$\begin{aligned} u_b(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(\vec{x}) \\ v_b(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n b_i \phi_i(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aangezien hier  $\phi_i(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$  geldt nu:

$$\begin{aligned} a_i &= u(\vec{x}_i) := u_i \\ b_i &= v(\vec{x}_i) := v_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

Het minimaliseringsprobleem gaat over in:

$$\min_{u_b} \left[ \int_{\Omega} F(\vec{x}, \vec{u}_b, \vec{u}_{bx}, \vec{u}_{by}) d\sigma + \int_{\partial\Omega} G(\vec{x}, \vec{u}) ds \right] \quad (2.16)$$

waarin de differentiaties en integraties weer kunnen worden uitgevoerd zodat vgl.(2.16) overgaat in:

$$\min_{u_i, v_i} J[u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (2.17)$$

De functioneel J is weer minimaal als geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_i} &= 0 && \text{voor } i=1, \dots, n \\ \frac{\partial J}{\partial v_i} &= 0 && \text{voor } i=1, \dots, n \end{aligned}$$

Net als bij de methode van Ritz zijn weer 2n vergelijkingen met 2n onbekenden verkregen. Toegepast op het minimaliseringsprobleem (2.4) levert bovenstaande differentie analoog aan vgl.(2.11) en (2.12):

$$\begin{bmatrix} S^u & 0 \\ 0 & S^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^u \\ \underline{f}^v \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{met : } S_{ki}^u = S_{ki}^v = \int_{\Omega} (\nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_i) d\sigma + \int_{\partial\Omega_3} \gamma \phi_k \phi_i ds \quad k, i=1, \dots, n$$

$$f_k^u = \int_{\Omega} f_1 \phi_k d\sigma + \int_{\partial\Omega_2} h_1 \phi_k ds + \int_{\partial\Omega_3} k_1 \phi_k ds \quad k=1, \dots, n$$

$$f_k^v = \int_{\Omega} f_2 \phi_k d\sigma + \int_{\partial\Omega_1} h_2 \phi_k ds + \int_{\partial\Omega_3} k_2 \phi_k ds \quad k=1, \dots, n$$

$$\underline{u}^T = [u_1, \dots, u_n] \quad , \quad \underline{v}^T = [v_1, \dots, v_n]$$



Ofwel:

$$S\tilde{u} = \underline{f} \quad (2.19)$$

met :  $\tilde{u}^T = [\underline{u}, \underline{v}]$  ,  $\underline{f}^T = [\underline{f}^u, \underline{f}^v]$  en  $S = \begin{bmatrix} S^u & 0 \\ 0 & S^v \end{bmatrix}$

Verrekening van de Dirichlet randvoorwaarden kan nu als volgt gebeuren: vervang voor elke  $\vec{x}_j$  waar Dirichlet randvoorwaarden gelden voor u de j-de kolom in  $S^u$  door nullen en zet in die kolom op de hoofddiagonaal een 1. Analoog moet voor elke  $\vec{x}_j$  waar Dirichlet randvoorwaarden gelden voor v de j-de kolom in  $S^v$  worden vervangen. Vervang eveneens in het rechter lid van de matrixvergelijking voor de betreffende punten  $\vec{x}_j$  de j-de component door  $g_1(\vec{x}_j)$  resp.  $g_2(\vec{x}_j)$ . Gevolg is dat voor punten  $\vec{x}_j$  met Dirichlet randvoorwaarden in de matrixvergelijking een vergelijking  $u_b(\vec{x}_j) = g_1(\vec{x}_j)$  resp.  $v_b(\vec{x}_j) = g_2(\vec{x}_j)$  wordt opgenomen. Het vervangen van de j-de kolom in S door nullen (behalve op de hoofddiagonaal) betekent niets anders dan dat daar  $\phi_i(\vec{x})$  nul wordt gemaakt en dus achteraf toch voldoet aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden.

De eindige elementenmethode heeft de volgende voordelen ten opzichte van de methode van Ritz:

- 1) De basisfuncties komen zeer eenvoudig tot stand en hoeven niet bij voorbaat te voldoen aan de Dirichlet randvoorwaarden omdat deze pas achteraf worden verwerkt.
- 2) De matrix S in de matrixvergelijking  $S\tilde{u} = \underline{f}$  is eenvoudiger te berekenen als die in de vergelijking  $S\underline{\alpha} = \underline{f}$  bij de methode van Ritz, het is immers mogelijk de integralen over  $\Omega$  en  $\partial\Omega$  op te splitsen in integralen over de elementen volgens:

$$\begin{aligned} S_{ki}^u &= \int_{\Omega} (\nabla\phi_k \cdot \nabla\phi_i) d\sigma + \int_{\partial\Omega_3} \gamma\phi_k\phi_i ds \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{e_j} (\nabla\phi_k \cdot \nabla\phi_i) d\sigma + \sum_{j=1}^p \int_{l_j} \gamma\phi_k\phi_i ds \\ &:= \sum_{j=1}^n S_{ki}^{e_j} + \sum_{j=1}^p S_{ki}^{l_j} \end{aligned} \quad (2.20)$$

De integralen kunnen dus element na element worden berekend en leveren i.h.a. nul op tenzij zowel  $\vec{x}_i$  als  $\vec{x}_k$  in het element liggen (immers  $\phi_i(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$ ). Voor deze integraties kan een algemeen algoritme worden opgesteld, waarna de bijdrage

van het element aan de integraal in de matrix  $S$  kan worden toegevoegd. In de praktijk wordt dus van elk element de elementmatrix  $S^j$  bepaald volgens vgl.(2.20) en wordt de matrix  $S$  samengesteld uit alle elementmatrices.

3) De functiewaarden  $u_b(\vec{x}_j)$  hoeven niet meer zoals bij de methode van Ritz te worden berekend uit vgl.(2.7) maar volgen direct als oplossing van de matrixvergelijking.

### 2.2.3 Integraalformulering.

In de vorige paragrafen is een matrixvergelijking  $S\vec{u}=\vec{f}$  afgeleid uit de differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned}
 L\vec{u} &= \vec{f} && \text{voor } \vec{x} \in \Omega \\
 u(\vec{x}) &= g_1(\vec{x}) \text{ en } \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial n} = h_2(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \\
 v(\vec{x}) &= g_2(\vec{x}) \text{ en } \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} = h_1(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2 \\
 \gamma u(\vec{x}) + \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} &= \vec{k}(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_3
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Hierbij werd gebruik gemaakt van het aan de differentiaalvergelijking equivalent minimaliseringsprobleem. In §2.2.1 is al aangegeven dat deze strategie niet altijd mogelijk is. Dezelfde matrixvergelijking is ook af te leiden als wordt overgegaan op een integraalformulering van het probleem. Hiertoe wordt vermenigvuldigd met testfuncties  $\vec{w}(\vec{x})$  en vervolgens geïntegreerd over  $\Omega$ . De differentiaalvergelijking met randvoorwaarden gaat dan over in:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \vec{w}(\vec{x}) \cdot \{L\vec{u}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x})\} d\sigma &= 0 && \text{voor } \vec{x} \in \Omega \\
 u(\vec{x}) &= g_1(\vec{x}) \text{ en } \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial n} = h_2(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \\
 \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} &= h_1(\vec{x}) \text{ en } v(\vec{x}) = g_2(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2 \\
 \gamma u(\vec{x}) + \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} &= \vec{k}(\vec{x}) && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_3
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Aangetoond kan worden (Velte;1976) dat, als voor een bepaalde  $\vec{u}(\vec{x})$  en voor alle mogelijke integreerbare  $\vec{w}(\vec{x})$  voldaan wordt aan vgl.(2.22),  $\vec{u}(\vec{x})$  de exacte oplossing is van de differentiaalvergelijking.

De functie  $\vec{u}(\vec{x})$  kan nu na verdeling van  $\Omega$  in elementen en na definitie

van basispunten  $\vec{x}_j$  weer benaderd worden door:

$$\sum_{i=1}^n \vec{u}_i \phi_i(\vec{x}) \quad (2.23)$$

Dan volgt voor vgl. (2.22):

$$\int_{\Omega} [\vec{w}(\vec{x}) \cdot \{L(\sum_{i=1}^n \vec{u}_i \phi_i(\vec{x})) - \vec{f}(\vec{x})\}] d\sigma = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{x})}{\partial n} = h_2(\vec{x}) \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1$$

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x})}{\partial n} = h_1(\vec{x}) \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2$$

$$\gamma \vec{u}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{x})}{\partial n} = \vec{k}(\vec{x}) \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_3$$

De Dirichlet randvoorwaarden worden weer achteraf verwerkt.

Als nu in plaats van de aanvankelijke eis dat vgl. (2.24) moet gelden voor alle toegestane functies  $\vec{w}(\vec{x})$  wordt geëist dat vgl. (2.24) moet gelden voor n functies  $\vec{w}_k(\vec{x})$  ( $k=1, \dots, n$ ) dan ontstaan 2n vergelijkingen met 2n onbekenden te weten:

$$\int_{\Omega} [\vec{w}_{1k}(\vec{x}) L(\sum_{i=1}^n u_i \phi_i(\vec{x}))] d\sigma = \int_{\Omega} f_1(\vec{x}) w_{1k}(\vec{x}) d\sigma \quad k=1, \dots, n$$

$$\int_{\Omega} [\vec{w}_{2k}(\vec{x}) L(\sum_{i=1}^n v_i \phi_i(\vec{x}))] d\sigma = \int_{\Omega} f_2(\vec{x}) w_{2k}(\vec{x}) d\sigma \quad k=1, \dots, n$$

+ randvoorwaarden (2.25)

met:  $(w_{1k}, w_{2k})^T = \vec{w}_k(\vec{x})$

Hierin is gesteld dat beide termen van het inproduct in vgl. (2.24) nul moeten opleveren. Dit is geoorloofd omdat vgl. (2.24) voor alle  $\vec{w}$  moet gelden, dus ook voor  $\vec{w}=(1,0)$  resp.  $\vec{w}=(0,1)$ .

De 2n verschillende testfuncties  $w_{1k}$  en  $w_{2k}$  kunnen op verschillende manieren worden gekozen en tot verschillende oplosmethoden leiden. Bij de methode van Galerkin worden de functies  $w_{1k}(\vec{x})$  en  $w_{2k}(\vec{x})$  gelijkgekozen aan de basisfuncties  $\phi_k(\vec{x})$  van vergelijking (2.23) en gaat vgl. (2.25) over in:

$$\sum_{i=1}^n u_i \int_{\Omega} \phi_k(\vec{x}) L\phi_i(\vec{x}) d\sigma = \int_{\Omega} f_1(\vec{x}) \phi_k(\vec{x}) d\sigma \quad k=1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_{\Omega} \phi_k(\vec{x}) L\phi_i(\vec{x}) d\sigma = \int_{\Omega} f_2(\vec{x}) \phi_k(\vec{x}) d\sigma \quad k=1, \dots, n \quad (2.26)$$

+ randvoorwaarden

Na partieel integreren kunnen i.h.a. de randvoorwaarden (zie vgl.2.24) in de integraalvergelijking worden gesubstitueerd en ontstaat weer een matrixvergelijking van de vorm  $\underline{S}\underline{\tilde{u}} = \underline{f}$ . Deze kan in principe worden opgelost. Als voor de differentiaaloperator de Laplaceoperator wordt genomen, wordt de zelfde matrix-vergelijking verkregen als bij de discretisatie via het minimaliseringsprobleem (zie appendix 3). De Dirichlet randvoorwaarden worden zoals in §2.2.2 is beschreven weer achteraf verwerkt.

#### 2.4. Structuur van de matrixvergelijking en enige oplosmethoden.

In de vorige paragrafen zijn op verschillende wijzen stelsels vergelijkingen afgeleid die voor de Poissonvergelijking (vgl.2.3) in de volgende matrixvergelijking overgaan:

$$\begin{bmatrix} S^a & 0 \\ 0 & S^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^a \\ \underline{f}^b \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

met:

$$S_{ki}^a = \int_{\Omega} (\nabla\phi_k \cdot \nabla\phi_i) d\sigma + \int_{\partial\Omega_3} \gamma\phi_k\phi_i ds = S_{ki}^b$$

$$f_k^a = \int_{\Omega} f_1\phi_k d\sigma + \int_{\partial\Omega_2} h_1\phi_k ds + \int_{\partial\Omega_3} k_1\phi_k ds$$

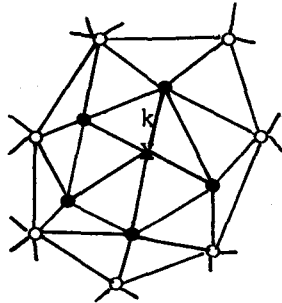
$$f_k^b = \int_{\Omega} f_2\phi_k d\sigma + \int_{\partial\Omega_1} h_2\phi_k ds + \int_{\partial\Omega_3} k_2\phi_k ds$$

waarin  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  kolommatrices zijn van de op te lossen coëfficiënten  $a_i$  en  $b_i$  bij de methode van Ritz of  $u_i$  en  $v_i$  bij de eindige elementen methode. De structuur van de matrix en mogelijke oplosmethoden kunnen worden beschouwd aan de hand van de eerste n vergelijkingen:

$$S_{\underline{a}}^a = \underline{f}^a \quad (2.28)$$

Bij gebruik van de methode van Ritz moeten basisfuncties  $\phi_i(\vec{x})$  worden gekozen, zodanig dat deze voldoen aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden voor  $u(x)$ . Dit is al een probleem op zich, maar aangenomen dat er dergelijke basisfuncties  $\phi_i(\vec{x})$  kunnen worden gevonden, dan zullen in het algemeen alle matrixelementen  $S_{ki}^a$  ongelijk aan nul zijn. De matrix S is dan een volle matrix, waardoor oplossen vooral voor grote waarden voor n veel geheugenruimte en rekentijd vraagt.

Bij gebruik van de eindige elementen methode is het veel eenvoudiger om goede basisfuncties te kiezen omdat de Dirichlet randvoorwaarden pas achteraf worden verrekend. Verder is de structuur van de matrix  $S^a$  hier veel gunstiger omdat de matrixelementen  $S_{ki}^a$  alleen maar ongelijk aan nul zijn als  $i$  en  $k$  basispuntnummers zijn van basispunten die in een en hetzelfde element zijn gelegen (zie fig.2.4).



- punten  $i$  die in combinatie met  $k$  een bijdrage leveren aan  $S_{ki}^a$ .
- punten  $i$  die in combinatie met  $k$  géén bijdrage leveren aan  $S_{ki}^a$ .

Fig.2.4. :Punten die wel en punten die geen bijdrage leveren tot het matrixelement  $S_{ki}^a$ .

De matrix  $S^a$  bestaat dan hoofdzakelijk uit nullen en zal bij gunstige nummering van de basispunten een bandstructuur hebben met een bandbreedte die wordt bepaald door het grootste basispuntnummerverschil in één element (zie fig.2.5).

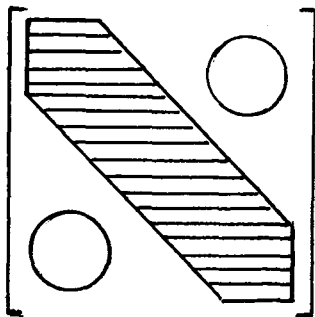


Fig.2.5. :Bandstructuur van  $S^a$  bij de eindige elementenmethode.

Matrices met dergelijke structuur vragen minder geheugenruimte omdat alleen de band hoeft te worden opgeslagen. Tevens vraagt het oplossen van de vergelijking minder rekentijd omdat gebruik kan worden gemaakt van speciale oplostechneken waarvan er verderop enkele zullen worden genoemd.

Een ander voordeel dat de eindige elementen methode biedt ten opzichte van de methode van Ritz is, dat de integraties in vgl.(2.27) kunnen

worden gezien als som van integraties over de elementen, waarbij alleen die elementen meedoen die de basispunten i en k bevatten. Omdat de basisfuncties  $\phi_i(\vec{x})$  eenvoudige (lineaire of kwadratische) functies zijn, kunnen simpele numerieke integratieprocedures worden toegepast (trapregel, regel van Simpson). Uit het bovenstaande volgt dat de eindige elementen methode te verkiezen is boven de methode van Ritz.

Oplosmethoden.

In principe kan elke matrixvergelijking worden opgelost m.b.v. de regel van Cramer. Deze leidt echter tot een zeer groot aantal berekeningen (Veltkamp en Geurts;1980). Een duidelijke winst in rekentijd kan worden bereikt als de matrix in triangulaire vorm wordt gebracht en de vergelijking dus de volgende structuur heeft:

$$\begin{bmatrix}
 S_{11}^a & S_{12}^a & \dots & S_{1,n-1}^a & S_{1n}^a \\
 & S_{22}^a & \dots & S_{2,n-1}^a & S_{2n}^a \\
 & & \dots & S_{n-1,n-1}^a & S_{n-1,n}^a \\
 & & & & S_{nn}^a
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 a_{n-1} \\
 a_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_1 \\
 f_2 \\
 \vdots \\
 f_{n-1} \\
 f_n
 \end{bmatrix}$$

Nu kan eerst de laatste vergelijking worden opgelost ( $a_n = f_n / S_{nn}^a$ ), vervolgens kan de matrix opnieuw op triangulaire vorm worden gebracht en  $a_{n-1}$  worden berekend, etc. . Voorwaarde is dat bij elke triangulaire matrix geen van de diagonaalelementen (pivots) nul is.

Een matrix kan op triangulaire vorm worden gebracht met behulp van de eliminatiemethode van Gauss die enkel berust op vegen. In principe komt dit neer op bepalen van de matrices L en U zodat geldt:

$$S^a = LU \quad \text{met } L = \begin{bmatrix}
 L_{11} & & & & \\
 L_{21} & L_{22} & & & \\
 \vdots & \vdots & \ddots & & \\
 L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} & 
 \end{bmatrix}
 \text{ en } U = \begin{bmatrix}
 U_{11} & U_{12} & \dots & \dots & U_{1n} \\
 & U_{22} & \dots & \dots & U_{2n} \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & U_{nn}
 \end{bmatrix}$$

de zgn. LU-decompositie van  $S^a$ . De vergelijking  $S^a \underline{a} = \underline{f}$  is dan equivalent

16

met de vergelijkingen  $L\underline{c}=\underline{f}$  en  $U\underline{a}=\underline{c}$ . Deze kunnen beide direct worden opgelost omdat L en U triangulair zijn. L en U kunnen uit  $S^a$  worden bepaald m.b.v. het algoritme van Crout (Veltkamp en Geurts;1980). Voorwaarde is weer dat geen van de 'pivots' nul is. Is dit niet het geval, dan kan door rijverwisseling een nieuwe matrixvergelijking worden verkregen, waarmee weer verder kan worden gegaan in het Crout-algoritme. Dergelijke verwisselingstechnieken worden partial pivoting genoemd en vragen relatief veel rekentijd. Er zal dus moeten worden gestreefd naar matrixvergelijkingen waarbij partial pivoting niet nodig is. Vergelijkingen met een speciale structuur kunnen nog sneller worden opgelost, door van die structuur gebruik te maken. Voor symmetrische matrices geldt bijvoorbeeld  $U=DL^T$ , waarin D een diagonaalmatrix is, en dus  $S=LDL^T$  (LDL<sup>T</sup>-decompositie). Als nu bovendien  $S^a$  positief definitief is, d.w.z.  $\underline{x}^T S^a \underline{x} > 0, \forall \underline{x} \in \Omega$ , dan zijn alle diagonaalcomponenten van D positief zodat er een  $\tilde{D}$  bestaat zodanig dat  $D=\tilde{D}^2$  en dus  $S^a=L\tilde{D}^2L^T:=\tilde{L}\tilde{L}^T$ .  $\tilde{L}$  is rechtstreeks te berekenen uit  $S^a$  met het algoritme van Cholesky en geeft een winst in rekentijd t.o.v. LU-decompositie bij niet symmetrische matrices van een factor 2. Een meer gedetailleerd overzicht van de verschillende oplosmethoden wordt o.a. gegeven in het dictaat Numerieke Methode (Veltkamp en Geurts;1980).

### 3. Oplossen van de Navier-Stokes-vergelijking m.b.v. de eindige elementen methode.

#### 3.1. Inleiding.

In deze paragraaf zullen verschillende benaderingsoplossingen van de stationaire Navier-Stokes-vergelijking worden behandeld. Zij berusten allen op de eindige elementenmethode, waarvan in het vorige hoofdstuk een korte beschrijving is gegeven. In §3.2 zal eerst iets nader worden ingegaan op de Navier-Stokes-vergelijking. Er zullen drie formuleringen naar voren komen te weten: de snelheid-druk ( $\vec{u}, p$ )-formulering, de stroomfunctie-wervelsterkte ( $\Psi, \omega$ )-formulering en de stroomfunctie ( $\Psi$ )-formulering.

De snelheid-druk-formulering zal blijken de meeste voordelen te bieden voor de hier gestelde en de in de toekomst te stellen problemen, en zal dan ook in §3.3 nader worden uitgewerkt. Daar zullen drie oplosmethoden worden gegeven nl. : de directe methode, de boetefunctiemethode en de methode met divergentievrije elementen. Voor deze oplosmethoden worden de elementmatrixvergelijkingen behandeld voor het zgn. Crouzeix-Raviart element; een element waar de basisfuncties voor de snelheid  $2^e$ -graads polynomen met 1  $3^e$ -graads term zijn en waar de basisfuncties voor de druk lineair zijn. Bij de behandeling van de 3 oplosmethoden wordt uitgegaan van literatuur waarnaar in de AFEP-manual wordt verwezen. Hierin is de beschrijving van de oplosmethoden niet overal even duidelijk en/of mathematisch gegrond. Deze kanttekening kan dan ook bij dit hoofdstuk gemaakt worden. Hoofddoel is echter om aan te geven hoe de methoden werken en welke problemen zich voordoen. In §3.4 worden de drie methoden vergeleken aan de hand van numerieke resultaten voor stromingen achter een gemodelleerde stenose. §3.5 geeft tenslotte een korte discussie.

#### 3.2. De stationaire Navier-Stokes-vergelijking in verschillende formuleringen.

De stationaire Navier-Stokes-vergelijking is af te leiden uit de behoudswetten voor massa en impuls en de viscositeitswet van Newton (constitutieve vergelijking) (Smulders en Schram;1978). De stationaire Navier-Stokes-vergelijking wordt dan samen met de continuïteitsverge-



lijking gegeven door:

$$\begin{cases} -\eta \nabla^2 \vec{u} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \rho \vec{f} \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

met:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \text{snelheidsvector} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y = (u, v)^T && \text{ms}^{-1} \\ p &= \text{druk} && \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-1} \\ \vec{f} &= \text{uitwendige kracht per massa eenheid} = (f_1, f_2)^T && \text{ms}^{-2} \\ & \text{bijv. de zwaartekracht} \\ \eta &= \text{dynamische viscositeit} && \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-1} \\ \rho &= \text{dichtheid} && \text{kgm}^{-3} \end{aligned}$$

Vergelijking (3.1) is in dimensieloze vorm te schrijven door introductie van de karakteristieke grootheden  $U$  (karakteristieke snelheid)  $L$  (karakteristieke lengte) en het Reynoldsgetal  $Re$  volgens:  $\vec{x}' = \vec{x}/L$ ,  $\vec{u}' = \vec{u}/U$ ,  $p' = p/\rho U^2$ ,  $\vec{f}' = \vec{f}/(U^2/L)$  en  $Re = UL/\nu$  met  $\nu = \eta/\rho =$  kinematische viscositeit ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ). Vergelijking (3.1) gaat dan na weglaten van de accenten over in:

$$\begin{cases} -\frac{1}{Re} \nabla'^2 \vec{u}' + (\vec{u}' \cdot \nabla') \vec{u}' + \nabla p' = \vec{f}' \\ \text{div } \vec{u}' = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Dit is de snelheid-druk-formulering: een stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden ( $u, v, p$ ). Bepierking tot twee dimensies geeft de mogelijkheid tot invoeren van een stroomfunctie  $\Psi$  volgens:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u \quad (3.3)$$

zodat

$$0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = -\text{div } \vec{u}$$

Er is nu dus automatisch voldaan aan de continuïteitsvergelijking.

Wordt verder de werversterkte  $\omega$  gedefinieerd als:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \nabla^2 \Psi \quad (3.4)$$

dan gaat vgl.(3.2) na differentiatie van de x-component naar y en differentiatie van diens y-component naar x en van elkaar aftrekken van deze vergelijkingen over in:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \omega = \nabla^2 \Psi \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de continuïteitsvergelijking en aangenomen dat u,v en p continu zijn. Het stelsel van 3 vergelijkingen vgl. (3.2) is nu vervangen door een stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden  $(\omega, \Psi)$  ; de stroomfunctie-wervelsterkte-formulering.

Substitutie van de 2<sup>e</sup> vergelijking van vgl.(3.5) in de 1<sup>e</sup> geeft dan nog de stroomfunctie-formulering (1 vergelijking met 1 onbekende):

$$-\frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Psi) = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad (3.6)$$

Er zijn nu 3 formuleringen afgeleid, die elk met zijn eigen voor- en nadelen gebruikt kunnen worden voor het bepalen van benaderingsoplossingen met behulp van de eindige elementen methode. Voor de  $(\vec{u}, p)$ -formulering wordt hiervoor verwezen naar (Taylor en Hood;1973, Hughes en Levy;1978 en Hutton;1980) voor de  $(\omega, \Psi)$ -formulering naar (Baker;1978, Cheng;1972 en Taylor en Hood;1973) en voor de  $\Psi$ -formulering naar (Olson;1975).

Bij een keuze uit deze 3 formuleringen zal ten eerste moeten worden nagegaan of de bij het op te lossen probleem behorende randvoorwaarden kunnen worden geformuleerd met behulp van de desbetreffende variabele(n). Ten tweede moet worden nagegaan tot welke matrixvergelijking de formulering overgaat na discretisatie.

De randvoorwaarden zijn in het algemeen gegeven in de snelheid en de druk, zodat verwerking hiervan in de  $(\vec{u}, p)$ -formulering het eenvoudigst is. Bij de  $(\omega, \Psi)$  en de  $(\Psi)$ -formulering moeten de randvoorwaarden worden geformuleerd in termen van  $\omega$  en  $\Psi$  resp.  $\Psi$ . Voor randen waar u en v gegeven zijn (vaste wanden en instroming) is dit vrij eenvoudig m.b.v. vgl.(3.3) en vgl.(3.4) maar voor randen waar dit niet het geval is, is dit moeilijker. In  $\mathbb{R}^3$  zijn de  $(\omega, \Psi)$ - en de  $(\Psi)$ -formulering onbruikbaar. Ten aanzien van de matrixvergelijking die volgt na dis-

cretisatie kan het volgende gezegd worden. De  $(\vec{u}, p)$ -formulering geeft een matrix die niet zo'n gunstige structuur heeft omdat in de eerste 2 vergelijkingen van vgl.(3.2) de druk wel en in de 3<sup>e</sup> vergelijking de druk niet voorkomt. In §3.3.1 zal worden afgeleid dat de matrix-vergelijking dan de volgende structuur heeft:

$$\begin{bmatrix} S^{uu} + N^{uu} & N^{uv} & S^{up} \\ N^{vu} & S^{vv} + N^{vv} & S^{pv} \\ S^{pu} & S^{pv} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^u \\ \underline{f}^v \\ 0 \end{bmatrix}$$

met  $\underline{u}^T = [u_1, \dots, u_n]$ ,  $\underline{v}^T = [v_1, \dots, v_n]$  en  $\underline{p}^T = [p_1, \dots, p_m]$ .

Er bevinden zich nullen op de hoofddiagonaal, waardoor partial-pivoting nodig is, hetgeen veel rekentijd vraagt. Bij de  $(\omega, \Psi)$ - en de  $(\Psi)$ -formulering wordt dit nadeel ondervangen omdat de continuïteitsvergelijking wordt geëlimineerd.

Nadeel van de  $(\Psi)$ -formulering is dat de vergelijking van de 4<sup>e</sup> orde is (zie vgl.3.6) en dus hogere eisen stelt aan de in te voeren basisfuncties t.a.v. differentieerbaarheid. Dit leidt dan ook tot elementen met veel basispunten en ingewikkelde basisfuncties (zie Olson;1975). Een nadeel dat geldt voor zowel de  $(\omega, \Psi)$ -formulering als de  $(\Psi)$ -formulering is, dat de snelheden moeten worden berekend door differentiatie van  $\Psi$  (zie vgl.3.3), hetgeen een extra onnauwkeurigheid met zich meebrengt. Voor de druk moet zelfs nogmaals gedifferentieerd worden (zie vgl.3.2)

Hoewel de  $(\vec{u}, p)$ -formulering een minder gunstige matrix met zich meebrengt, zal toch voor deze formulering worden gekozen. Dit omdat het toch mogelijk blijkt de druk te elimineren (zie §3.2) en zodoende dit nadeel te ondervangen. Tevens is het mogelijk met deze formulering een generalisatie naar  $\mathbb{R}^3$  te maken.

Voor een meer gedetailleerdere vergelijking van de drie formuleringen wordt verwezen naar (Segal<sup>1</sup>;1981) en (Taylor en Hood;1973).

In de volgende paragrafen zal de  $(\vec{u}, p)$ -formulering worden uitgewerkt voor tweedimensionale gebieden  $\Omega$  bestaande uit vaste wanden, een instroomopening met gegeven snelheid en een uitstroomopening (zie fig. 3.1).

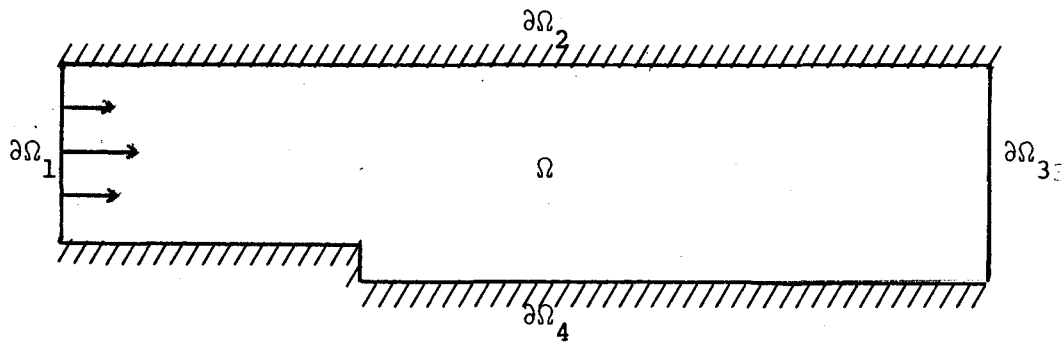


Fig.3.1. : Het te beschouwen gebied.

De uitstroomopening  $\partial\Omega_3$  wordt zo gekozen dat daar de stroming volledig ontwikkeld is. Het op te lossen probleem wordt dan gegeven door de vergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \vec{0} \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{array} \right. \quad \text{voor } \vec{x} \in \Omega$$

$$\vec{u} = \vec{g} \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_{1,2,4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \wedge v = 0 \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_3 \quad (3.7)$$

Hierbij is de zwaartekracht verwaarloosd. De druk is dan op een constante na bepaald en zal ergens moeten worden voorgeschreven (Segal<sup>1</sup>;1981). Het zal blijken dat het handig is om bij de uitstroomopening  $p=0$  te kiezen (zie §3.3.1).

### 3.3. Discretisatie van de snelheid-druk-formulering van de stationaire Navier-Stokes-vergelijking.

#### 3.3.1. Inleiding.

In deze paragraaf zullen 3 methoden worden behandeld waarmee de  $(\vec{u}, p)$ -formulering van de stationaire Navier-Stokes-vergelijking m.b.v. de eindige elementen methode kan worden gediscrètiseerd. Bij elk van deze 3 methoden wordt eerst uitgegaan van de Stokes-vergelijking (geen convectieve term). Het, niet lineaire, convectieve deel wordt daarna gediscrètiseerd waarna de volledige Navier-Stokes-vergelijking op iteratieve wijze wordt opgelost.

Bij de directe methode wordt uitgegaan van een integraalformulering

van de Stokes-vergelijking die op de methode aangegeven in H2 kan worden gediscretiseerd. Bij de boetefunctie-methode wordt de Stokes-vergelijking gediscretiseerd na overgang op een equivalent minimaliseringsprobleem in de divergentievrije ruimte dat als minimaliseringsprobleem onder nevenvoorwaarden kan worden beschouwd en na introductie van een boetefunctie kan worden behandeld als een gewoon minimaliseringsprobleem. Bij de derde methode wordt gebruikgemaakt van divergentievrije elementen, waarin de benaderingsfuncties per definitie divergentievrij worden gekozen; daarbij wordt dan ook exact aan de continuïteitsvergelijking voldaan.

De vergelijkingen die volgen voor deze 3 methoden worden uitgewerkt voor het Crouzeix-Raviart element, een element met 1 basispunt voor de druk en 7 voor de snelheden (zie fig.3.2).

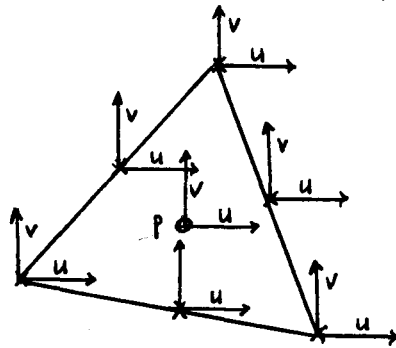


Fig.3.2. : Het Crouzeix-Raviart element.

3.3.2. De directe methode.

3.3.2.1. Het Stokesgedeelte.

Er wordt uitgegaan van de Stokes-vergelijking en de continuïteitsvergelijking:

$$\begin{cases} -\frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \nabla p = 0 \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases}$$

met randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{g} && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_{1,2,4} \\ v &= 0 \wedge \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \wedge p = 0 && \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Analoog aan vgl.(2.22) kan een integraalformulering worden afgeleid

door invoering van testfuncties  $\vec{w}(\vec{x})$  en  $r(\vec{x})$  voor de Stokes- resp. continuïteitsvergelijking. Na vermenigvuldiging van vgl.(3.8) met  $\vec{w}$  en  $r$  en integratie over  $\Omega$  volgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \{ \vec{w} \cdot (-\frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}) + \vec{w} \cdot \nabla p \} d\sigma = 0 \\ \int_{\Omega} r \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

ofwel met  $\vec{w}^T = (w, w)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \{ w(-\frac{1}{Re} \nabla^2 u) + w \frac{\partial p}{\partial x} \} d\sigma = 0 \\ \int_{\Omega} \{ w(-\frac{1}{Re} \nabla^2 v) + w \frac{\partial p}{\partial y} \} d\sigma = 0 \\ \int_{\Omega} r \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

met :  $\vec{u} = \vec{g}$  voor  $\vec{x} \in \partial\Omega_{1,2,4}$   
 $v = 0 \wedge \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \wedge p = 0$  voor  $\vec{x} \in \partial\Omega_3$

De snelheid  $\vec{u} = (u, v)^T$  en de druk  $p$  worden nu weer benaderd m.b.v. basisfuncties  $\phi_i(\vec{x})$  en  $\psi_i(\vec{x})$  volgens:

$$\begin{aligned} u_b &= \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(\vec{x}) \\ v_b &= \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(\vec{x}) \\ p_b &= \sum_{i=1}^m p_i \psi_i(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Opgemerkt dient te worden dat voor de continuïteitsvergelijking een andere testfunctie wordt genomen dan voor de Stokes-vergelijking en dat voor de druk  $p$  andere basisfuncties worden gekozen dan voor de snelheid. Dit hangt samen met het feit dat de basisfuncties voor de druk polynomen moeten zijn van een graad lager dan die voor de snelheid. Verderop zal dit worden toegelicht.

Partieel integreren van vgl.(3.10) levert dan de Galerkinvergelijkingen (zie appendix 4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u_b d\sigma - \int_{\Omega} p_b \frac{\partial w}{\partial x} d\sigma = 0 \\ \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v_b d\sigma - \int_{\Omega} p_b \frac{\partial w}{\partial y} d\sigma = 0 \\ \int_{\Omega} r \operatorname{div} \vec{u}_b d\sigma = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Substitutie van vgl. (3.11) en bij keuze van n testfuncties  $w_k(\vec{x})$  en m testfuncties  $r_k(\vec{x})$  volgens

$$\begin{aligned} w_k(\vec{x}) &= \phi_k(\vec{x}) & k=1, \dots, n \\ r_k(\vec{x}) &= \psi_k(\vec{x}) & k=1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.13)$$

geeft dan de matrixvergelijking (zie appendix 4):

$$S^d \underline{\hat{u}} = \underline{0}$$

met:

$$S^d = \begin{bmatrix} S^{uu} & 0 & S^{up} \\ 0 & S^{vv} & S^{vp} \\ S^{pu} & S^{pv} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\hat{u}}^T = [u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, p_1, \dots, p_n],$$

$$S_{ik}^{uu} = S_{ik}^{vv} = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k d\sigma \quad n \times n\text{-matrix}$$

$$S_{ik}^{up} = S_{ki}^{pu} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \psi_k d\sigma \quad n \times m\text{-matrix}$$

$$S_{ik}^{vp} = S_{ki}^{pv} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \psi_k d\sigma \quad n \times m\text{-matrix} \quad (3.14)$$

### 3.3.2.2. De convectieve term.

De convectieve term  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  zal na discretisatie leiden tot een matrix  $N(\underline{\hat{u}})$  met  $\underline{\hat{u}} = [\underline{u}, \underline{v}]$  zodat voor de complete Navier-Stokes-vergelijking geldt:

$$[S^d + N(\underline{\hat{u}})] \underline{\hat{u}} = \underline{0}$$

een niet-lineaire matrixvergelijking. Deze kan worden opgelost m.b.v. een iteratieve methode. De Newton-Raphson-methode blijkt de beste resultaten te leveren (Gartling, Nickell en Tanner; 1977). Hiertoe wordt geschreven:

$$\vec{u}^I = \vec{u}^{I-1} + \partial \vec{u} \quad (3.15)$$

waarbij  $\vec{u}^I$  de oplossing na I iteraties en  $\vec{u}^{I-1}$  de oplossing na I-1 iteraties voorstelt. Voor de convectieve term  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  geldt dan na invullen van vgl. (3.15) en verwaarlozing van  $(\partial \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ :

$$(\vec{u}^I \cdot \nabla) \vec{u}^I = (\vec{u}^I \cdot \nabla) \vec{u}^{I-1} + (\vec{u}^{I-1} \cdot \nabla) \vec{u}^I - (\vec{u}^{I-1} \cdot \nabla) \vec{u}^{I-1} \quad (3.16)$$

Toepassing van de methode van Galerkin met dezelfde testfuncties en dezelfde basisfuncties als bij de Stokes-vergelijking geeft dan (zie appendix 5) de matrixvergelijking:

$$[S^d + N(\vec{u}^{I-1})] \hat{u}^I = \underline{f}(\vec{u}^{I-1})$$

met:

$$N = \begin{bmatrix} N^{uu} & N^{uv} & 0 \\ N^{vu} & N^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{f}^u \\ \underline{f}^v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{ik}^{uu} = \int_{\Omega} \left( \phi_k \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + u_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right) \phi_i d\sigma$$

$$N_{ik}^{vv} = \int_{\Omega} \left( \phi_k \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} + u_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right) \phi_i d\sigma$$

$$N_{ik}^{uv} = \int_{\Omega} \left( \phi_k \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} \right) \phi_i d\sigma$$

$$N_{ik}^{vu} = \int_{\Omega} \left( \phi_k \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} \right) \phi_i d\sigma$$

$$\underline{f}_k^u = \int_{\Omega} \left( u_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} \right) \phi_k d\sigma$$

$$\underline{f}_k^v = \int_{\Omega} \left( u_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} \right) \phi_k d\sigma$$

$j, k=1, \dots, n$

$$u_b^I = \sum_{i=1}^n u_i^I \phi_i \quad \text{en} \quad v_b^I = \sum_{i=1}^n v_i^I \phi_i \quad (3.18)$$

### 3.3.2.3. De totale matrixvergelijking.

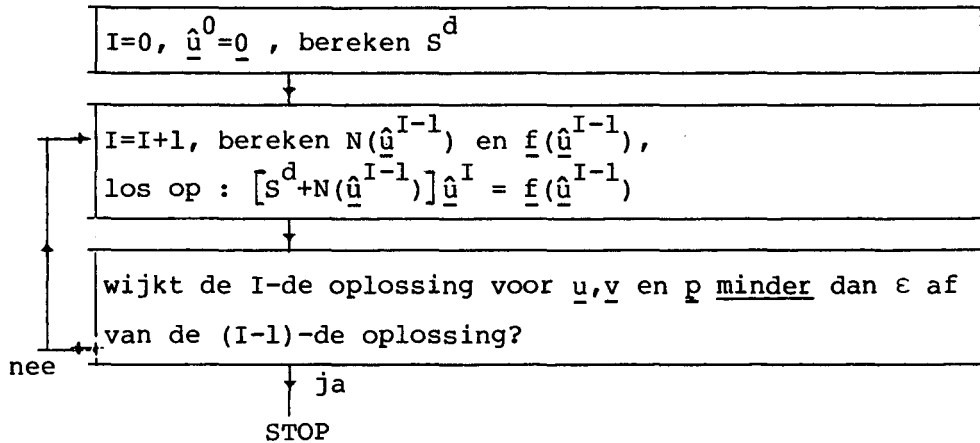
De Navier-Stokes-vergelijking in matrixvorm wordt nu gegeven door:

$$(S^d + N) \hat{u}^I = \underline{f} \quad (3.19)$$

waarbij  $S^d$ ,  $N$  en  $\underline{f}$  gedefinieerd zijn zoals in vgl. (3.13) en vgl. (3.18)



en waarbij  $\hat{u}^I = [u_1^I, \dots, u_n^I, v_1^I, \dots, v_n^I, p_1^I, \dots, p_m^I]^T$ . De matrix  $S^d + N$  is niet meer symmetrisch zodat nu Cholesky niet kan worden toegepast. De Dirichlet randvoorwaarden worden hier weer ingebracht door voor de basispunten  $j$ , waarvoor een Dirichlet randvoorwaarde geldt, in de matrix  $S^d + N$  de  $j$ -de kolom te vervangen door nullen en een 1 op de hoofd-diagonaal en in de kolommatrix  $f$  de  $j$ -de component te vervangen door de bekende waarde  $u, v$  of  $p$  in het punt  $\vec{x}_j$ . De iteratieve oplosmethode verloopt nu als volgt:



In (Gartling, Nickell en Tanner; 1977) is de beschrijving gegeven van de convergentie van dit proces.

### 3.3.2.4. Mogelijke basisfuncties en elementen.

Tot dusver is nog niet aangegeven welke keuze wordt gedaan ten aanzien van de basisfuncties  $\phi_i(\vec{x})$  en  $\psi_i(\vec{x})$ . Ten eerste moet worden opgemerkt dat de druk benaderd moet worden met een polynoom waarvan de graad minstens één lager is dan die van de polynomen waarmee de snelheden worden benaderd (Segal, 1979). Dit is nodig omdat de druk niet voorkomt in de continuïteitsvergelijking. De continuïteitsvergelijking wordt namelijk gerepresenteerd door (zie vgl. 3.11 en 3.12):

$$\int_{\Omega} \psi_k \operatorname{div} \vec{u}_b \, dx = 0 \quad k=1, \dots, m \quad (3.20)$$

De druk wordt in minstens een punt voorgeschreven zodat er maximaal  $m-1$  vergelijkingen zijn voor de snelheid alleen al via de continuïteitsvergelijking. Deze  $m-1$  vergelijkingen mogen de snelheid nog

niet volledig vastleggen, m.a.w. het aantal parameters voor de snelheid ( $2n$ ) moet groter zijn dan  $m-1$ . Dit is te bereiken door voor de druk minder basispunten te kiezen en dus de basisfuncties minstens een orde lager te nemen. In Segal(1979) wordt een overzicht gegeven van verschillende elementen die mogelijk zijn. Hier zal alleen het daar besproken Crouzeix-Raviart element worden beschouwd omdat deze later ook gebruikt zal worden bij de boetefunctie-methode en de divergentievrije elementen en omdat deze standaard is ingebouwd in AFEP.

Het Crouzeix-Raviart element is een driehoekig element met 7 basispunten zoals gegeven in fig.3.3.

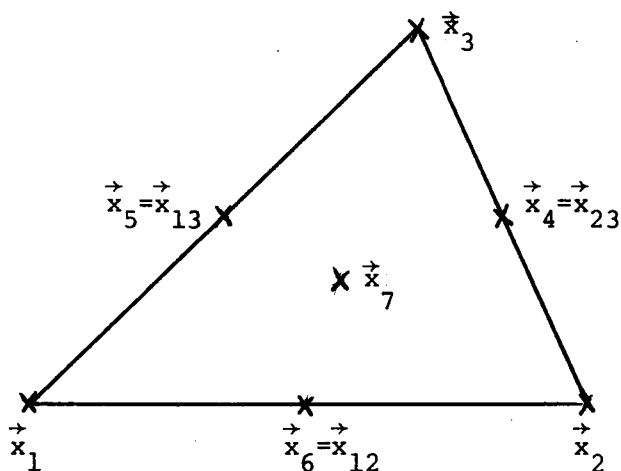


Fig.3.3. : Het Crouzeix-Raviart element.

De punten  $\vec{x}_1$  t/m  $\vec{x}_7$  zijn de basispunten met lokale basispuntnummers. De basispunten  $\vec{x}_4$ ,  $\vec{x}_5$  en  $\vec{x}_6$  zullen wanneer dat uitkomt ook wel met  $\vec{x}_{23}$ ,  $\vec{x}_{13}$  resp.  $\vec{x}_{12}$  worden aangegeven.

De snelheden  $u$  en  $v$  worden gegeven in de punten  $\vec{x}_1$  t/m  $\vec{x}_7$ . De basisfuncties voor de snelheid zijn dus  $2^e$ -graads polynomen met 1 extra  $3^e$ -graads term. In appendix 6 wordt afgeleid dat de basisfuncties voor de snelheid dan worden gegeven door:

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= \lambda_i (2\lambda_i - 1) - 3\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & i=1,2,3 \\
 \phi_{ij} &= 4\lambda_i \lambda_j - 12\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 1 \leq i, j \leq 3 \\
 \phi_7 &= 27\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

waarbij  $\lambda_i(\vec{x})$  de zgn. barycentrische coördinaten zijn gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \lambda_i(\vec{x}) &= \text{lineair per element } i=1,2,3 \\ \lambda_i(\vec{x}_j) &= \delta_{ij} \quad i,j=1,2,3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Uit (3.21) volgt dat de benadering kwadratisch is op de randen van het element en binnen de randen van het element uitgebreid is met een 3<sup>e</sup>-graads term.

Voor de druk wordt een speciale benadering genomen die in eerste instantie niet bruikbaar is als benadering in de eindige elementenmethode, nl. :

$$p_b(\vec{x}) = p(\vec{x}_7) + (x-x_7) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\vec{x}_7} + (y-y_7) \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\vec{x}_7} \tag{3.23}$$

De druk is dan lineair benaderd maar niet geschreven in de vorm

$$p_b(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m p_i \psi_i$$

In appendix 7 wordt afgeleid dat, bij de hier gekozen benaderingsfuncties voor de snelheid en de druk, de parameters  $u_7$  en  $v_7$  en de parameters  $\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\vec{x}_7}$  en  $\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\vec{x}_7}$  kunnen worden geëlimineerd. De benaderingsfuncties voor de druk en voor de snelheid zien er uiteindelijk dan uit als:

$$p_b(\vec{x}) = l \cdot p(\vec{x}_7) \quad , \quad u_b(\vec{x}) = \sum_{i=1}^6 u_i \phi_i \quad \text{en} \quad v_b(\vec{x}) = \sum_{i=1}^6 v_i \phi_i \tag{3.24}$$

Deze benaderingsfuncties voldoen wel weer aan de in H2 gestelde eisen. De druk is dan lineair benaderd maar heeft als enige parameter  $p(\vec{x}_7)$ . Dit betekent dat de druk discontinu over de elementen is (de druk in een buur-element hoeft op de gemeenschappelijke rand niet dezelfde waarde aan te nemen).

Door de eliminatie van  $u_7, v_7, \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\vec{x}_7}$  en  $\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\vec{x}_7}$  is de elementmatrix van een (17x17)-matrix teruggebracht tot een (13x13)-matrix (2 snelheids en 2 drukparameters zijn vervallen) die als volgt wordt gegeven:

$$e_{iS}^d = \begin{bmatrix} e_{iS}^{uu} + e_{iN}^{uu} & e_{iN}^{uv} & e_{iS}^{up} \\ e_{iN}^{vu} & e_{iS}^{vv} + e_{iN}^{vv} & e_{iS}^{vp} \\ e_{iS}^{pu} & e_{iS}^{pv} & 0 \end{bmatrix}$$

met:

$$\begin{aligned}
e_{S_{ik}}^{i uu} &= e_{S_{ik}}^{i vv} = \frac{1}{\text{Re}} \int_{e_i} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k d\sigma && i, k=1, \dots, 6 \\
e_{S_{ik}}^{i up} &= e_{S_{ki}}^{i pu} = - \int_{e_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\sigma && i=1, \dots, 6 \quad k=1 \\
e_{S_{ik}}^{i vp} &= e_{S_{ki}}^{i pv} = - \int_{e_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\sigma && i=1, \dots, 6 \quad k=1 \\
e_{N_{ik}}^{i uu} &= \int_{e_i} (\phi_k \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + u_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial y}) \phi_i d\sigma && i, k=1, \dots, 6 \\
e_{N_{ik}}^{i vv} &= \int_{e_i} (\phi_k \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} + u_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \phi_k}{\partial y}) \phi_i d\sigma && i, k=1, \dots, 6 \\
e_{N_{ik}}^{i uv} &= \int_{e_i} (\phi_k \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} - \phi_i) d\sigma && i, k=1, \dots, 6 \\
e_{N_{ik}}^{i vu} &= \int_{e_i} (\phi_k \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} - \phi_i) d\sigma && i, k=1, \dots, 6 \quad (3.25)
\end{aligned}$$

De elementkolommatrix wordt gegeven door:

$$e_{\underline{f}^T}^i = [e_{\underline{f}^u}^i, e_{\underline{f}^v}^i, 0]$$

met:

$$\begin{aligned}
e_{\underline{f}^u}^i &= \int_{e_i} (u_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y}) \phi_k d\sigma && k=1, \dots, 6 \\
e_{\underline{f}^v}^i &= \int_{e_i} (u_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y}) \phi_k d\sigma && k=1, \dots, 6 \quad (3.26)
\end{aligned}$$

(zie hiervoor vgl. 3.14 en 3.18)

Substitutie van vgl.(3.21) levert integraties over  $\lambda_i$  die eenvoudig zijn uit te voeren via de stelling (v.Kan en Segal;1979):

$$\int_{e_i} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \lambda_3^{m_3} d\sigma = \frac{m_1! m_2! m_3!}{(\sum m_i + 2)!} |\Delta| \quad (3.27)$$

met  $|\Delta| = 2 \times$ oppervlak van de driehoek

ofwel via numerieke integratieregels zoals (Segal ;1981):

$$\int_{e_i} f(\vec{x}) d\sigma = \frac{|\Delta|}{120} \{ 3 \sum_{i=1}^3 f(\vec{x}_i) + 8 \sum_{i=4}^6 f(\vec{x}_i) + 27 f(\vec{x}_7) \} \quad (3.28)$$

Na berekening van de elementmatrices en de elementkolommatrices kan de totale matrixvergelijking worden opgesteld. Deze bevat nullen op de hoofddiagonaal (zie vgl. 3.14 en 3.18) waardoor partial-pivoting nodig is bij het oplossen van de vergelijking. In de volgende twee paragrafen worden methodes behandeld waarbij dit probleem wordt omzeild.

### 3.3.3. De boetefunctiemethode.

Omdat de druk niet voorkomt in de continuïteitsvergelijking, leidde de directe methode tot een matrix met nullen op de hoofddiagonaal, waardoor partial-pivoting nodig is. Bij de boetefunctiemethode wordt dit probleem omzeild. Er zal worden uitgegaan van de gedachtegang gegeven in (Segal<sup>1</sup>;1981) hoewel deze niet overal even duidelijk is. De Stokesvergelijking wordt beschouwd in de divergentievrije ruimte  $D = \{\vec{u} \mid \text{div } \vec{u} = 0\}$ . In deze ruimte blijkt het mogelijk te zijn een equivalent minimaliseringsprobleem te formuleren. Deze kan na introductie van een boetefunctie die divergentievrijheid aan het probleem oplegt worden opgelost. Er wordt uitgegaan van de Stokesvergelijking gegeven in vgl.(3.8). Inwendig vermenigvuldigen met testfuncties  $\vec{w}$  en integreren over het gebied  $\Omega$  geeft :

$$\begin{cases} -\int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} \vec{w} \cdot \nabla^2 \vec{u} d\sigma + \int_{\Omega} \vec{w} \cdot \nabla p d\sigma = 0 & \forall \vec{w} \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Partieel integreren geeft dan:

$$\begin{cases} \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} d\sigma - \int_{\Omega} p \text{div } \vec{w} d\sigma = 0 & \forall \vec{w} \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

met  $\nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} \neq \nabla u \cdot \nabla w + \nabla v \cdot \nabla w$  (in tegenstelling tot de tensorrekening)

De randintegralen zijn weer analoog aan vgl.(3.11) en vervallen vanwege de randvoorwaarden.

Als nu geldt dat  $\vec{u}, \vec{w} \in D$ , dan gaat (3.30) over in:

$$\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \vec{u}_d \cdot \nabla \vec{w}_d d\sigma = 0 \quad \begin{matrix} \vec{u}_d \in D \\ \vec{w}_d \in D \end{matrix} \quad (3.31)$$

Dit is de integraalformulering met testfuncties  $\vec{w}$  van de Laplacever-

gelijking, maar dan in de ruimte van divergentievrije vectorfuncties (zie §2.2.3 en m.n. appendix 3). Vgl.(3.31) is dus equivalent met:

$$-\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u}_d = 0 \quad \vec{u}_d \in D \quad (3.32)$$

Voor de Laplacevergelijking bestaat een equivalent minimaliseringsprobleem (zie H2) gegeven door:

$$\min_{\vec{u}_d \in D} \int_{\Omega} \frac{1}{2\text{Re}} |\nabla \vec{u}_d|^2 d\sigma \quad (3.33)$$

Dit is een minimaliseringsprobleem onder nevenvoorwaarden en kan worden opgelost na introductie van een boetefunctie (Cuvelier, Praagman en Segal;1979). Vergelijking (3.33) gaat dan over in:

$$\min_{\vec{u}_p} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} |\nabla \vec{u}_p|^2 + \frac{\tau}{2} (\text{div } \vec{u}_p)^2 \right\} d\sigma \quad (3.34)$$

waarin  $\frac{\tau}{2} (\text{div } u)^2$  de boetefunctie is en  $\tau$  een constante. Het is nu mogelijk te bewijzen (Temam;1977, p 147-150) dat de oplossing  $\vec{u}_p$  van vgl.(3.34) convergeert naar de oplossing  $\vec{u}$  van de Stokesvergelijking mits  $\tau \rightarrow \infty$ . Tevens geldt dan (Temam;1977):

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (-\tau \text{div } \vec{u}_p) = p \quad (3.35)$$

(zie ook appendix 8).

Het minimaliseringsprobleem (3.34) kan gediscrètiseerd worden op de in §2.2.2 aangegeven wijze.

Bij het bepalen van de matrixvergelijking is het handig om uit te gaan van de resultaten verkregen bij de directe methode. Hiervoor is afgeleid dat de Stokesvergelijking aanleiding gaf tot de matrixvergelijking:

$$S^d \hat{\underline{u}} = \underline{0}$$

met  $\hat{\underline{u}}^T = [\underline{u}, \underline{v}, p]$  en  $S^d$  gegeven in vgl.(3.14).

Na introductie van  $\tilde{\underline{u}}^T = [\underline{u}, \underline{v}]$  is dit ook te schrijven als:

$$\begin{cases} S^P \tilde{\underline{u}} - L^T p = \underline{0} \\ L \tilde{\underline{u}} = \underline{0} \end{cases} \quad (3.36)$$

met:  $S^P = \begin{bmatrix} S^{uu} & 0 \\ 0 & S^{vv} \end{bmatrix}$   $2n \times 2n$  symm. matrix

$L = \begin{bmatrix} S^{pu} & S^{pv} \end{bmatrix}$   $2n \times m$  matrix

In (Segal<sup>1</sup>,1981) wordt gegeven dat toepassen van de boetefunctie-methode dan geeft:

$$(S^P + \tau L^T L) \tilde{u} = 0 \tag{3.37}$$

waarin  $S^P + \tau L^T L$  een positief definitie matrix is. Door de ont koppeling van de druk en de snelheid komen er nu geen nullen meer voor op de hoofddiagonaal en is partial pivoting niet meer nodig. Tevens is het aantal vergelijkingen gereduceerd tot  $2n$  (immers  $\tilde{u}^T = [u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n]$ ). Wel moet de druk achteraf worden berekend uit :

$$p = -\tau L \tilde{u} \tag{3.38}$$

De oplossing van de Navier-Stokes-vergelijking wordt weer op iteratieve wijze bepaald zoals bij de directe methode. Er is geen bewijs bekend dat deze handswijze veroorloofd, maar de resultaten zijn bevredigend tot Reynoldsgetallen  $\leq 1000$  (Segal<sup>1</sup>,1981). De matrixvergelijking wordt dan:

$$[S^P + N(\tilde{u}^{I-1}) + L^T L] \tilde{u}^I = \underline{f}(\tilde{u}^{I-1}) \tag{3.39}$$

met  $N$  en  $\underline{f}$  gedefinieerd zoals in vgl.(3.18) met dit verschil dat nu  $\underline{f}^T = [\underline{f}^u, \underline{f}^v]$ . Op dezelfde wijze als bij de directe methode kan (3.39) weer toegepast worden op het Crouzeix-Raviart element.

### 3.3.4. De methode met divergentievrije elementen.

De methode met divergentievrije elementen is gebaseerd op de directe methode. Er wordt dan ook uitgegaan van de Galerkinvergelijking:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{Re} (\nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w}) - p \operatorname{div} \vec{w} \right\} d\sigma = 0$$

$$\int_{\Omega} r \operatorname{div} \vec{u} \, d\sigma = 0 \tag{3.40}$$

Algemeen zijn vectoren te schrijven als som van een divergentievrije

vector  $\vec{u}_d$  en een rotatievrije vector  $\vec{u}_r$  (Batchelor;1967) volgens:

$$\vec{u} = \vec{u}_d + \vec{u}_r \quad \begin{matrix} \vec{u}_d \in D, & D = \{\vec{u} \mid \text{div } \vec{u} = 0\} \\ \vec{u}_r \in I, & I = \{\vec{u} \mid \text{rot } \vec{u} = 0\} \end{matrix} \quad (3.41)$$

De galerkinvergelijking (3.40) is dan op te splitsen in:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w}) \right\} d\sigma = 0 \quad \text{met } \vec{u}, \vec{w} \in D \quad (3.42)$$

en

$$\int_{\Omega} p \text{div } \vec{w} \, d\sigma = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w}) \right\} d\sigma \quad \text{met } \vec{w} \in I \text{ en } \vec{u} \text{ oplossing van vgl. (3.42)} \quad (3.43)$$

De druk kan achteraf bepaald worden uit vgl. (3.43).

Om voor oplossen van vgl. (3.42) te voldoen aan  $\vec{u}, \vec{w} \in D$  wordt de stroomfunctie  $\Psi$  geïntroduceerd volgens:

$$\vec{u}^T = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (3.44)$$

In appendix 9 wordt aangetoond dat dan bij Crouzeix-Raviart elementen, waarin al de snelheden in het zwaartepunt en twee drukparameters zijn geëlimineerd (zie §3.3.2.4), tevens de druk in het zwaartepunt en de normaalcomponenten van de snelheid in de middens van de zijden kunnen worden geëlimineerd. Na deze eliminaties ontstaan divergentievrije elementen met divergentievrije basisfuncties (Griffiths,1979). (zie ook fig 3.3)

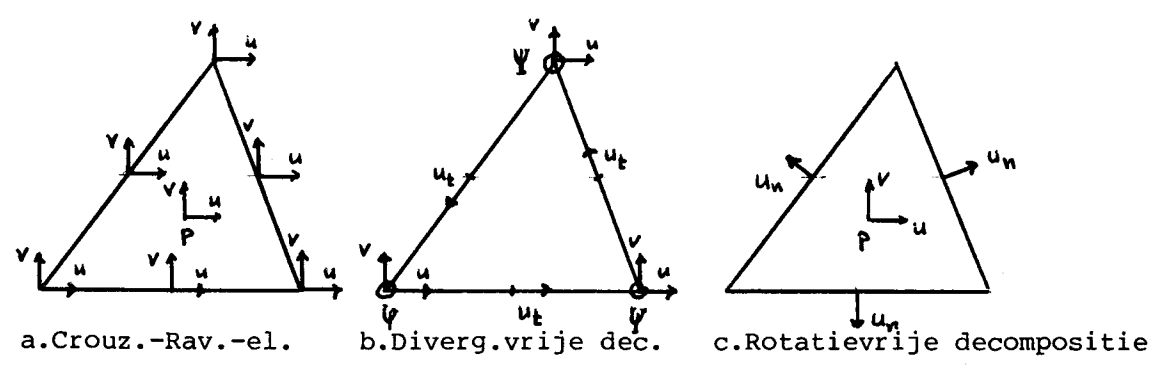


Fig. 3.3 : Decompositie van het Crouzeix-Raviart element (naar Griffiths,1979).

De divergentievrije decompositie van het Crouzeix-Raviart-element



heeft dan 6 basispunten; in de 3 hoekpunten wordt de snelheid en de stroomfunctie als onbekende genomen, en in de middens van de zijden de tangentiële snelheid  $u_t$ .

De gevolgde procedure kan in matrixnotatie eenvoudig worden opgeschreven. Uitgaande van de directe methode (§3.3.2) geldt (zie vgl.3.36):

$$\begin{cases} S^P \tilde{\underline{u}} - L^T \underline{p} = \underline{0} \\ L \tilde{\underline{u}} = \underline{0} \end{cases} \quad \text{met } \underline{u}^T = [\underline{u}, \underline{v}] \quad (3.45)$$

De invoering van de stroomfunctie  $\Psi$  als variabele en de eliminatie van de normaalcomponenten van de snelheden in de middens van de zijden en de druk (m.a.w. overgang op de divergentievrije decompositie van het element, zie fig.3.3b) kan in matrixvorm worden geschreven als (zie appendix 9) :

$$\tilde{\underline{u}} = R \tilde{\underline{u}}_d \quad (3.46)$$

Zowel de basisfuncties als de benaderingsfuncties zijn dan divergentievrij (Griffiths;1979). Vergelijking (3.42) in matrixvorm wordt dan:

$$S^P R \tilde{\underline{u}}_d = \underline{0} \quad (3.47)$$

Vgl.(3.42) is immers niets anders dan de Laplacevergelijking in de divergentievrije ruimte. Links-vermenigvuldiging met  $R^T$  geeft tenslotte:

$$R^T S^P R \tilde{\underline{u}}_d = \underline{0} \quad (3.48)$$

Dit stelsel is zeer eenvoudig op te lossen want de matrix  $R^T S^P R$  is positief definitief (Griffiths,1979). Wel moet de druk nog achteraf berekend worden uit:

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{w} \, d\sigma = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} \right\} d\sigma \quad (3.49)$$

met  $\vec{w} \in I$  ,  $I = \{ \vec{u} \mid \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \}$

Als basisfuncties worden die basisfuncties gebruikt die geëlimineerd zijn; deze basisfuncties zijn immers rotatievrij (zie fig.3.3). Voor

meer informatie over de vorm van de transformatiematrix R en de wijze waarop de druk wordt berekend wordt verwezen naar (Assenberg;1982 en Griffiths;1979).

De oplossing van de Navier-Stokes-vergelijking volgt weer uit het iteratieproces gegeven in §3.3.2.3 met:

$$R^T [S + N(\tilde{u}_d^{I-1})] R \tilde{u}_d^I = R^T \underline{f}(\tilde{u}_d^{I-1}) \quad (3.50)$$

De invoering van de divergentievrije elementen geeft een grote besparing van rekentijd en geheugenruimte t.o.v. de directe methode maar heeft als nadeel dat toepassing in drie dimensies niet mogelijk is, tenzij op een andere wijze divergentievrije basisfuncties kunnen worden afgeleid. Tevens is het niet mogelijk om problemen op te lossen met twee gescheiden uitstroomopeningen, omdat dan niet in alle hoekpunten een eenduidige stroomfunctie kan worden afgeleid (zie appendix 9).

### 3.4. Numerieke resultaten.

#### 3.4.1. Vergelijking van de drie methoden.

In §3.3. zijn drie oplosmethoden voor de Navier-Stokes-vergelijking besproken. Deze zijn alle drie standaard in AFEP ingebouwd (Segal ; 1981). Ter vergelijking van deze drie methoden, is voor een tweedimensionaal kanaal met een diameter  $D=4\text{cm}$  en een stapvormige verwijding  $h=1\text{cm}$  de stroming met de verschillende methoden doorgerekend voor  $Re_D=800$  ( $Re_D = \bar{u}D/\nu$ ,  $\bar{u}$ =gemiddelde snelheid,  $\nu$ =kinematische viscositeit). Het inlaatprofiel is parabolisch genomen. De uitstroomopening is op  $x=60\text{cm}$  genomen zodat verwacht mag worden dat daar de stroming volledig ontwikkeld is. Samengevat zijn de volgende randvoorwaarden aan het probleem opgelegd:

$$\begin{array}{ll} x=-2, 1 \leq y \leq 5 & : \quad u = -6\bar{u} \left[ \frac{(y-h)^2}{D^2} - \frac{(y-h)}{D} \right], \quad v=0 \\ -2 \leq x \leq 60, y=5 & : \quad u=0, \quad v=0 \\ x=60, 0 \leq y \leq 5 & : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v=0 \\ 0 \leq x \leq 60, y=0 & : \quad u=0, \quad v=0 \\ -2 \leq x \leq 0, y=1 & : \quad u=0, \quad v=0 \end{array}$$

In fig.3.4 is de gebruikte meshverdeling en het berekende snelheidsveld gegeven. Voor de duidelijkheid zijn in het vectorveld de profielen ingetekend. Het berekende snelheidsveld was voor al de drie methoden identiek. Duidelijk is achter de stap het gebied van recirculatie te zien.

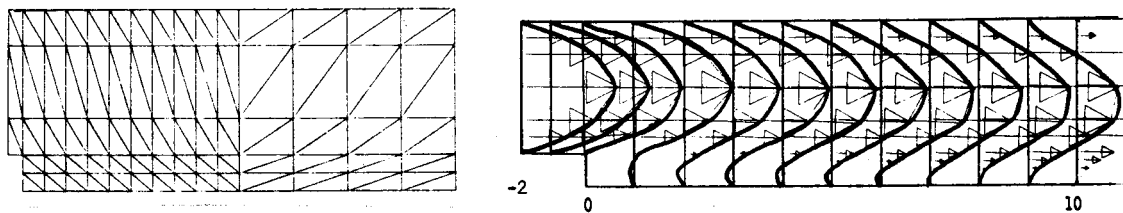


Fig.3.4. : Mesh en snelheidsveld voor  $Re_D=800$ .

Tabel 3.1. geeft de zuivere rekentijd in minuten en het aantal benodigde iteraties. Voor de rekentijd is de tijd genomen die nodig was voor het oplossen van het hele probleem. (computer:PRIME 550).

Tabel 3.1. : CPT en aantal iteratieslagen voor de verschillende methoden.

Re <sub>D</sub> =800, Mesh B, h=1. ,D=4.		
methode	CPT (min)	iteraties
directe	238.43	6
boetefunctie	6.22	6
divergentievrije	6.48	6

Opgemerkt dient te worden dat bij de boetefunctiemethode en bij de divergentievrije elementen de druk niet is berekend. Dit neemt niet weg dat de rekentijd voor deze methoden beduidend kleiner is. Dit komt omdat geen partial-pivoting nodig is en omdat het aantal onbekenden bij deze twee methoden minder is. De hierna volgende berekeningen zijn allen met de boetefunctiemethode uitgevoerd.

### 3.4.2. Invloed van de meshverdeling.

De berekening uit §3.4.1 ( $Re_D=800$ ,  $D=4$ ,  $h=1$ .) is uitgevoerd voor drie verschillende meshverdelingen (zie fig.3.5.) m.b.v. de boetefunctiemethode. Fig.3.6 geeft de resultaten voor de verschillende meshverdelingen.

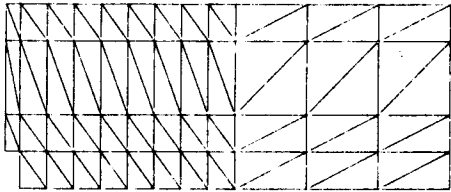
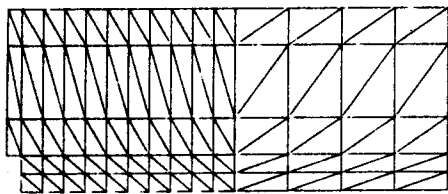
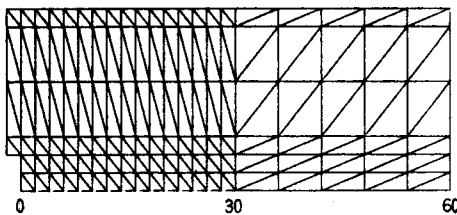


Fig.3.5. : De drie verschillende meshverdelingen.

Mesh A: 88 elementen, 22 achter de stap.



Mesh B: 140 elementen, 56 achter de stap



Mesh C: 240 elementen, 80 achter de stap.

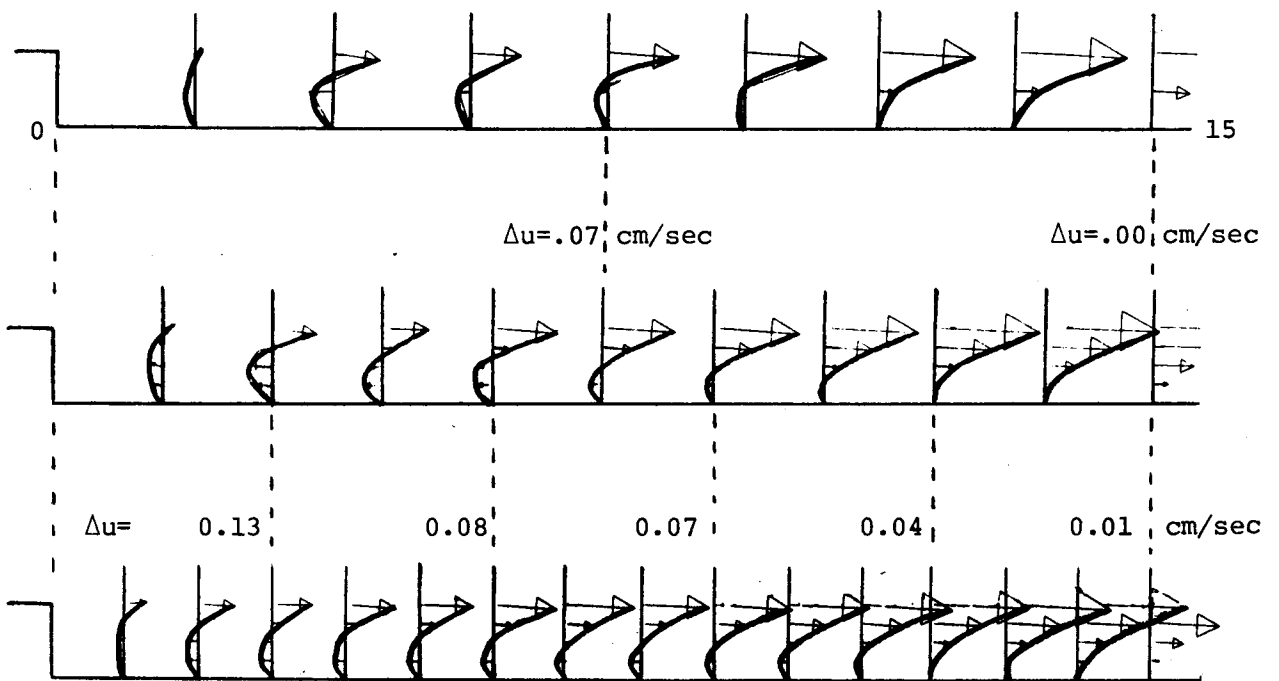


Fig.3.6. : Berekend snelheidsveld in het recirculatiegebied voor  $Re_D=800$ , voor de verschillende meshverdelingen. De  $\Delta u$ 's geven de grootste verschillen in snelheid tussen overeenkomende profielen.

Uit fig.3.6 is te zien dat de resultaten in het recirculatiegebied voor de verschillende meshverdelingen redelijk overeenkomen maar dat met name voor het gebied vlak achter de stap onderlinge verschillen optreden. Om kwalitatief meer te kunnen zeggen over de invloed van de meshverdeling zal studie verricht moeten worden naar de convergentie van de methode. Dit heeft hier niet plaatsgevonden. Tabel 4.2. geeft een overzicht van het aantal iteraties en het grootste verschil  $\Delta u_{\max}$  in de snelheid van overeenkomende profielen, vergeleken met de profielen van mesh B.

Tabel 4.2. : De invloed van de meshverdeling.

Re <sub>D</sub> =800, boetefunctie, h=1., D=4.			
meshverdeling	rekeningtijd	iteraties	u <sub>max</sub> cm/s
A	4.00	6	0.07
B	6.22	6	—
C	12.31	6	0.13

3.4.3. De invloed van het Reynoldsgetal.

Met de boetefunctiemethode is voor Re<sub>D</sub>=600,800 en 1000 de stroming achter de stap berekend gebruikmakend van mesh C uit §3.4.2. De resultaten zijn weergegeven in fig.3.7.

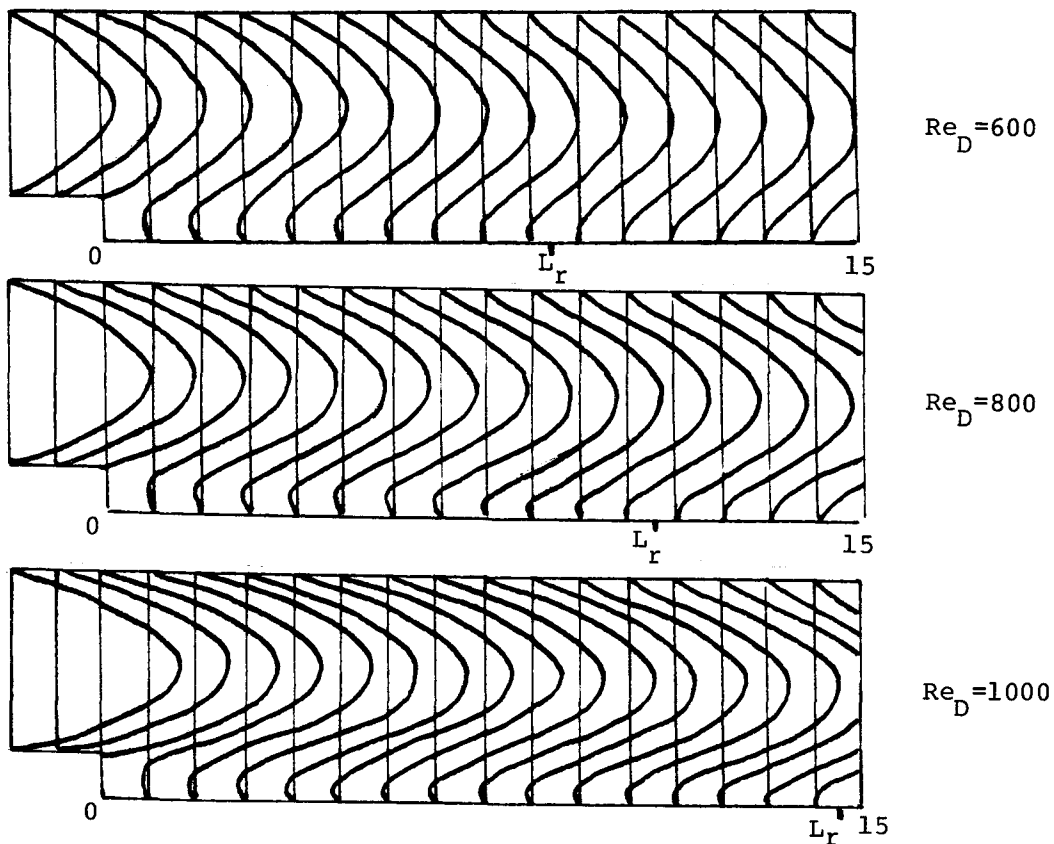


Fig.3.7. : berekende snelheidsprofielen voor Re<sub>D</sub>=600,800 en 1000

In fig.3.7 zijn tevens de lengtes van de recirculatiegebieden  $L_r$  aangegeven. Deze zijn bepaald uit de getallenuitvoer van de berekeningen en gedefinieerd als het midden van de hoogste x-waarde waar nog terugstroming optreedt en de laagste x-waarde waar géén terugstroming meer optreedt. In tabel 4.3 is voor de verschillende Reynoldsgetallen de rekentijd, het aantal iteraties en de lengte van het recirculatiegebied gegeven.

Tabel 4.3. : Invloed van het Reynoldsgetal.

boetefunctie, mesh C, h=1. ,D=4.				
Reynoldsgetal				
$Re_D$	$Re_h$	rekentijd	iteraties	$L_r$
600	150	12.31	6	9.5
800	200	12.31	6	11.5
1000	250	15.42	8	14.5

$Re_D = \bar{u}D/\nu$  ,  $Re_h = \bar{u}h/\nu$

In fig.3.8 is de lengte van het recirculatiegebied uitgezet tegen het Reynoldsgetal  $Re_h$ .

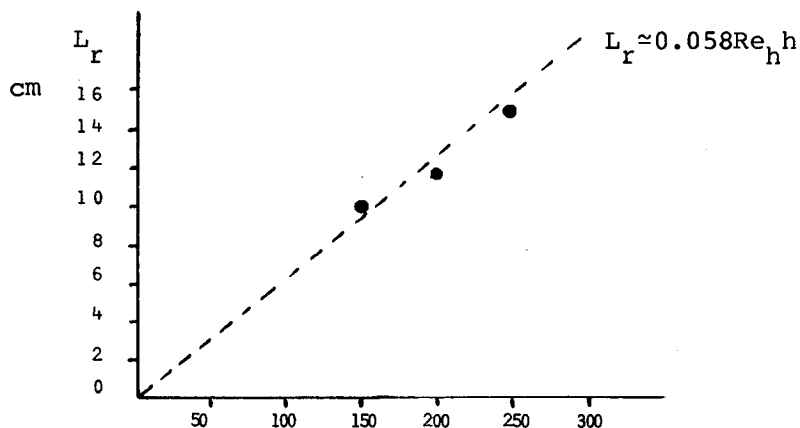


Fig.3.8. :Lengte van het recirculatiegebied als functie van  $Re_h$ .

#### 3.4.4. Invloed van de stapgrootte.

De invloed van de stapgrootte is onderzocht voor  $Re_h=200$ . De berekeningen zijn uitgevoerd voor  $h=0.5$ ,  $h=1.$  en  $h=1.5$ . Hier is  $Re_h$  en niet  $Re_D$  constant gehouden vanwege de relatie  $L_r = f(Re_h, \frac{D}{h})$  (zie §4.5.2). De

invloed van de verhouding  $D/h$  is dan eenvoudig te onderzoeken. In fig.3.9 zijn de snelheidsprofielen voor de verschillende stapgroottes gegeven.

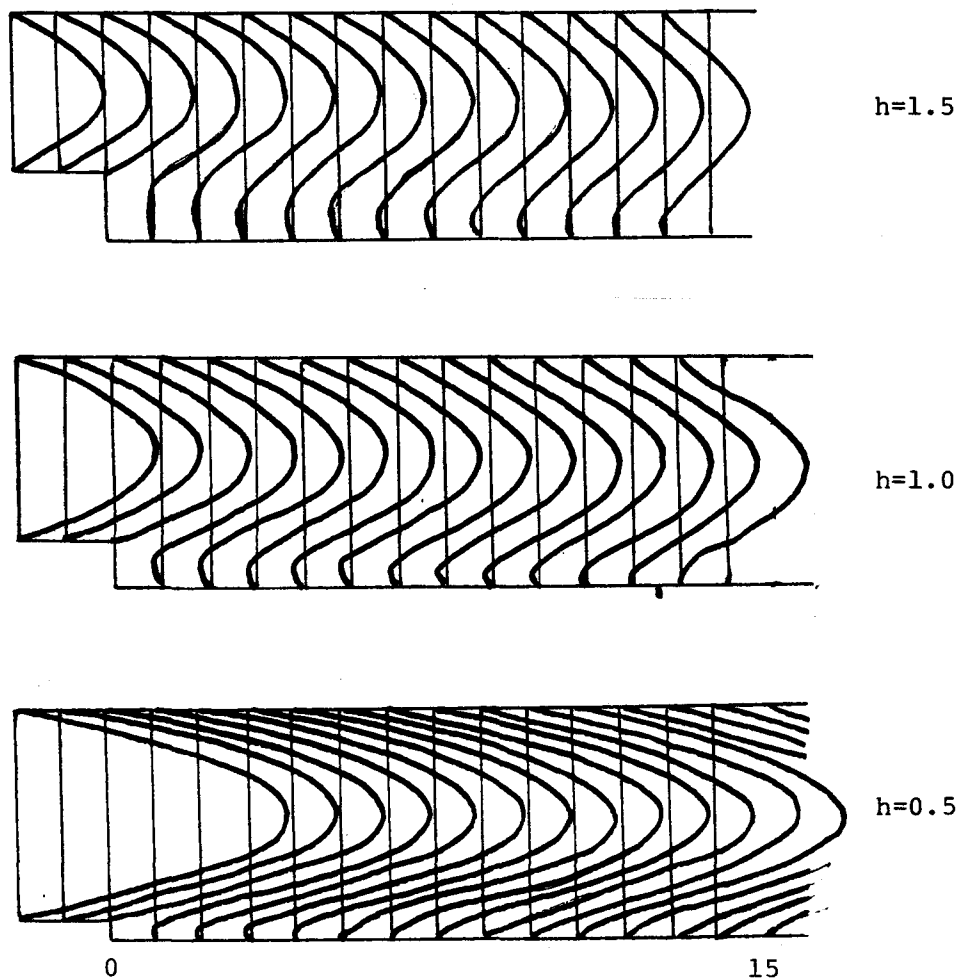


Fig.3.9. : Berekende snelheidsprofielen voor  $h=1.5, 1.0$  en  $0.5$  met  $Re_h=200$ .

Uit de getallenuitvoer is op dezelfde wijze als in §3.4.3 de lengte van het recirculatiegebied bepaald. In fig.3.10 wordt  $L_r$  gegeven als functie van de verhouding  $D/h$ .

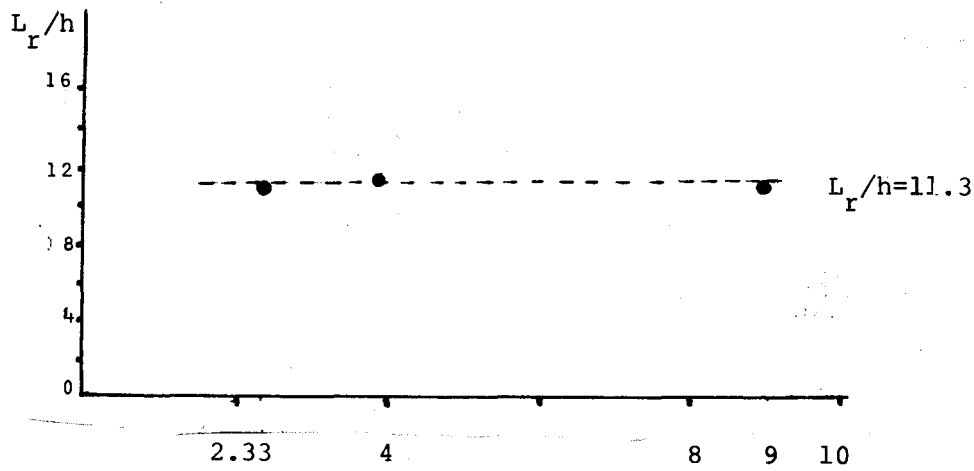


Fig.3.10. : De dimensiloze grootheid  $L_r/h$  als functie van  $D/h$ .

Tabel 4.4 geeft weer een overzicht van de rekentijd, het aantal iteraties en de lengte van het recirculatiegebied.

Tabel 4.4. : De invloed van de stapgrootte.

Re <sub>h</sub> = 200, boetefunctie				
stapgrootte	rekentijd	iteraties	L <sub>r</sub>	L <sub>r</sub> /h
1.5	27.07	8	16.5	11.0
1.0	12.31	6	11.5	11.5
0.5	15.59	8	5.5	11.0

### 3.5. Conclusies en discussie.

#### 3.5.1. De oplosmethoden.

Bij de behandeling van de verschillende oplosmethoden is uitgegaan van de gedachtegang van Segal<sup>1</sup>(1981). Metname voor de boetefunctiemethode en de divergentievrije elementen zijn niet alle genomen stappen even duidelijk en zou verder literatuuronderzoek op zijn plaats zijn. Onduidelijkheid bestaat er vooral ten aanzien van de volgende twee punten :

- 1) In hoeverre zijn de bij de boetefunctiemethode gedane aannamen fysisch en mathematisch toelaatbaar?
- 2) In hoeverre zijn de basisfuncties bij de divergentievrije elementen inderdaad divergentievrij resp. rotatievrij.

Voor de boetefunctiemethode kan een alternatieve afleiding worden ge-



geven door als hypothese te stellen:

$$p = -\tau \operatorname{div} \vec{u} \quad \text{voor } \tau \rightarrow \infty \quad (3.51)$$

Dit kan zolang aan de randvoorwaarden voor de snelheid en de druk voldaan blijft. Voor de druk geldt als enige randvoorwaarde:  $p=0$  bij de uitstroomopening. De hypothese is voor dit geval dus toelaatbaar. Substitutie van vgl.(3.51) in de Galerkinvergelijkingen (3.30) geeft:

$$\frac{1}{\operatorname{Re}} \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} d\sigma + \tau \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{w} d\sigma = 0 \quad (3.52)$$

Substitutie in verg.(3.52) van:

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i \quad \text{en } \vec{w}^T = (\phi_k, 0) \text{ resp. } (0, \phi_k)$$

levert dan de matrixvergelijking:

$$[S + \tau L^T L] \vec{u} = 0 \quad (3.53)$$

Een fysische motivatie voor de keuze van relatie (3.51) is niet te geven, maar uit Temem(1977) volgt dat de oplossing van de matrixvergelijking (3.53) dan convergeert naar de oplossing van de Stokes-vergelijking voor  $\tau \rightarrow \infty$ . Dit behoeft evenwel nog nadere studie.

Voor de divergentievrije elementen is het onduidelijk hoe de divergentievrije resp. rotatievrije basisfuncties er precies uitzien. Het is dan ook nog niet mogelijk te controleren of ze inderdaad divergentie- resp. rotatievrij zijn. Ook hier is nader onderzoek gewenst. Wel kan worden geconcludeerd dat de boetefunctiemethode voor de toekomst de meeste voordelen biedt, omdat deze methode in tegenstelling tot de methode met divergentievrije elementen, in principe naar  $\mathbb{R}^3$  kan worden uitgebreid.

### 3.5.2. De numerieke resultaten.

De belangrijkste conclusies zijn:

-Het blijkt dat bij niet al te grote staphoogtes  $h$  het iteratieproces (zie §3.3.2.3) convergeert voor  $Re_D$  tot minstens 1000.

-De boetefunctiemethode en de 'divergentievrije' methode zijn veel efficiënter dan de directe methode.

-Het snelheidspatruon is voor al de drie methoden identiek en voorspelt een recirculatiegebied achter de stap.

-De lengte van het recirculatiegebied hangt af van het Reynoldsgetal en de staphoogte.

-De verhouding  $L_r/h$  is vrijwel onafhankelijk van  $D/h$ .

Op de vergelijking van de gevonden oplossingen met experimenten uit de literatuur en met eigen experimenten wordt in H4 teruggekomen.

#### 4. Experimentele verificatie.

##### 4.1. Inleiding.

Ten behoeve van de experimentele verificatie van de numerieke oplossing van de stationaire Navier-Stokes-vergelijking is een meetopstelling gebouwd, waarmee het mogelijk is, gebruikmakend van een laser-doppler-anemometer (LDA), snelheidsprofielen te meten voor en achter een stapvormige verwijding.

Vanuit literatuurgegevens heeft eerst een oriëntatie t.a.v. de te verwachten verschijnselen, zoals recirculatie en tijdsafhankelijke fenomenen en de daarmee samenhangende karakteristieke dimensies, plaatsgevonden (§4.2). Op basis van deze oriëntatie en van de voorhanden zijnde LDA is een experimentele opstelling ontworpen. In §4.3 wordt iets nader ingegaan op deze meetopstelling en op de meetmethodieken die zijn toegepast. In §4.4 wordt een overzicht gegeven van de meetresultaten en een vergelijking gemaakt met numerieke resultaten. Tenslotte volgt in §4.5 een discussie.

##### 4.2. Oriëntatie.

Teneinde ervoor te zorgen dat de resultaten van het onderzoek enigermate toepasbaar zijn op de situatie in de halsslagader, zal de aandacht zich moeten richten op stromingen met een met de halsslagader overeenkomend Reynoldsgetal. Bovendien gaat, in het kader van het interafdelingsproject, de interesse uit naar stromingen achter een kleine (<30% van het oppervlak) vernauwing in zo'n halsslagader. Bharadvaj (1982) leidt voor de hoofdtak van de halsslagader een gemiddeld Reynoldsgetal af van 380 en vanwege het pulserende karakter van de stroming een maximaal Reynoldsgetal van 1200. Het Reynoldsgetal is hier gebaseerd op de diameter  $D$  van de buis en de gemiddelde snelheid  $\bar{u}$  ( $Re = \bar{u}D/\nu$ ). Bij deze Reynoldsgetallen zal door grenslaagloslating bij de stap recirculatie optreden achter de stap. Denham en Patrick (1974) verrichtten metingen in een tweedimensionaal kanaal met diameter  $D$  ( $=3.0\text{cm}$ ) en een stapvormige verwijding met stapgrootte  $h$  ( $=1.5\text{cm}$ ) ( $D/h=2.$ ). Uit metingen van snelheidsprofielen achter de stap, m.b.v. een LDA, vonden zij voor  $50 < Re_h < 250$  ( $Re_h = \bar{u}h/\nu$ ) de volgende relatie tussen het Reynoldsgetal en de lengte van het recircu-

latie gebied  $L_r$  :  $L_r \approx 0.04 Re_h$  . Ongeveer dezelfde relatie is gevonden door Goldstein e.a. (1970) voor laminaire luchtstromingen met  $D/h > 15$ . Hutton (1980) heeft numeriek (eindige elementen methode) dezelfde relatie tussen de lengte van het recirculatiegebied en het Reynoldsgetal gevonden als Denham en Patrick.

Voor toenemende Reynoldsgetallen kunnen in de stroming instabiliteiten ontstaan of kan wervelafschudding optreden (Schlichting, 1955 hfst.16 resp. hfst.2). In Goldstein e.a. (1970) zijn criteria gegeven voor het Reynoldsgetal  $Re_h$  waarvoor de stroming instabiel wordt. Het kritische Reynoldsgetal blijkt een functie te zijn van de verplaatsingsdikte  $\delta^*$  (gedefinieerd als  $\delta^* = \int_0^{\delta} (1 - u/u_m) dy$  ,  $\delta$ =grenslaagdikte,  $u$ =snelheid en  $u_m$ =maximale snelheid). Grofweg komen deze criteria neer op:  $\tilde{Re}_h \leq 520$  én  $\delta/h \geq 0.4$  dan laminair ( $\tilde{Re}_h = u_m h / \nu$  ). Over eventuele wervelafschudding is weinig te zeggen.

Bij de hier verrichte metingen is uitgegaan van een situatie met  $Re_D \approx 1000$ ,  $D/h=4$  en dus  $Re_h \approx 250$ . Voor de diameter  $D$  is 4cm gekozen, als medium is water gebruikt ( $\nu=10^{-6} m^2/s$ ) en de gemiddelde snelheid bedraagt ongeveer  $\bar{u}=2.5 cm/sec$ . Voor een volledig ontwikkelde en dus parabolisch profiel geldt dan  $u_m = (3/2)\bar{u} = 3.75 cm/sec$ ,  $\tilde{Re}_h = 375$  en  $\delta^* = D/6$ . Bij de experimenten wordt dan het volgende verwacht:

- a) Voor de lengte van het recirculatiegebied geldt  $L_r \approx 0,04 Re_h \approx 10 cm$ .
- b) Voor het instabiel gedrag geldt:  $\delta^*/h = D/6h = 0.667 > 0.4$   
 $\tilde{Re}_h = 375 < 520$  dus stabiel.

Op basis van deze grootheden is de meetopstelling en meetprocedure ontwikkeld zoals beschreven in de volgende paragraaf.

#### 4.3. Opstelling en meetmethodiek voor het bepalen van snelheidsprofielen in een tweedimensionaal kanaal met stapvormige verwijding.

##### 4.3.1. De opstelling.

De ontwerpcriteria voor de gebouwde opstelling worden opgelegd door de meetmethode (LDA), de gestelde tweedimensionaliteit, het laminair zijn van de stroming, het gewenste Reynoldsgetal en de gewenste stapgrootte.

De LDA die voorhanden is (Neven;1982) beschikt over een horizontale traversie van het meetgebied, zodat gekozen is voor een kanaal waarin de stap verticaal is aangebracht. De gekozen breedte van het ka-

naal ( $D$ ) is 40mm vóór en 50mm ( $D+h$ ) achter de stap. Omdat de stroming zoveel mogelijk tweedimensionaal moet zijn is voor de hoogte ( $H$ ) van het kanaal 120mm genomen. De stap zelf bevindt zich op 60cm achter de instroming. Dit is bij  $Re_D=1000$  op ca.  $1/3$  van de inlaatlengte  $L_e$  vanwege de relatie  $L_e=0.04Re_D$  (Schlichting;1955). In verticale richting bevindt zich de stap dan op  $1/9$  van de inlaatlengte zodat verondersteld mag worden dat in die richting het snelheidsprofiel nog vrij vlak is (zie fig.4.1).

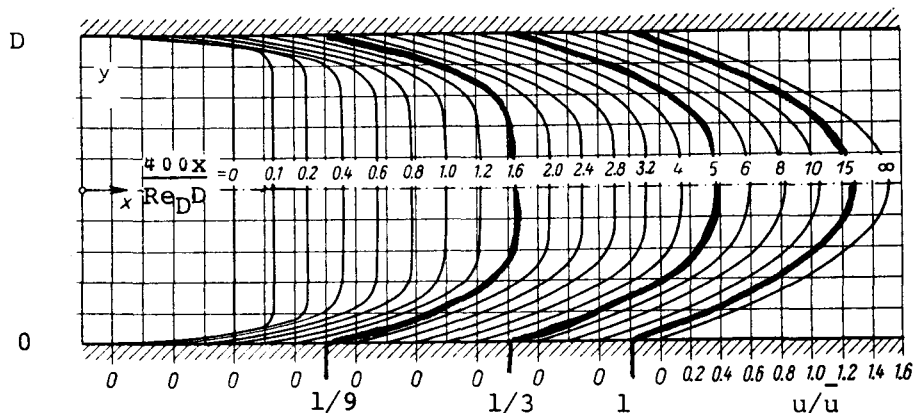


Fig.4.1. : Ontwikkeling v.h. stromingsprofiel tussen twee vlakke platen als functie van de afstand tot de inlaat uit (Schlichting;1955).

De uitstroomopening bevindt zich op 60cm vanaf de stap, deze afstand is dus veel groter dan de te verwachte recirculatiezone (zie fig.4.2).

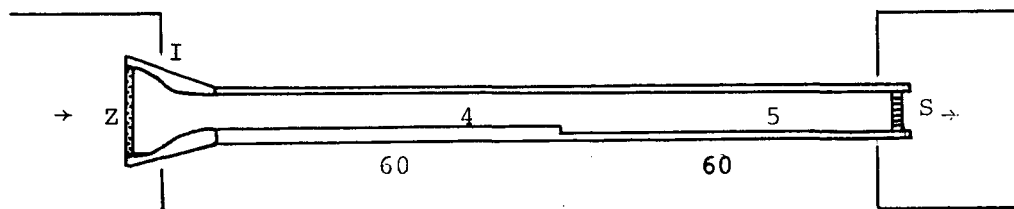


Fig.4.2. : De gebouwde opstelling.

Om een 'nette' instroming te verkrijgen is aan het begin van het kanaal een instroomstuk I met zeef Z geconstrueerd volgens het ontwerp van (Vaessen en van Duppen;1976). Het eind van het kanaal is voorzien van een schuifje met openingen t.b.v. de snelheidsregeling (zie fig. 4.2).

#### 4.3.2. De meetmethodiek.

##### Het optisch gedeelte

De metingen zijn verricht met de LDA ontwikkeld door Neven (1982). Deze is gebaseerd op de referentiebundelmethode en bestaat uit de volgende componenten (zie fig.4.3):

- a) Een 5mW He-Ne laser (Spectra-Physics 120s) met een golflengte  $\lambda = 632.8 \cdot 10^{-9} \text{ m}$  ( $\nu_0 \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ).
- b) lens  $L_1$  ( $f=12\text{cm}$ )
- c) een roterend raster R (TPD-Delft) gestuurd door een motorsturing M (CTD-Eindhoven)
- d) lenzen  $L_2$  ( $f=20\text{cm}$ ) en  $L_3$  ( $f=8\text{cm}$ )
- e) een fotodiode FD (TPD-731)

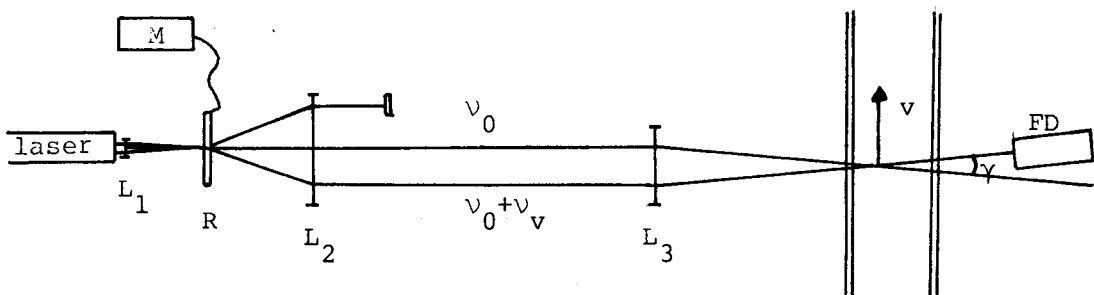


Fig.4.3. : Het optisch gedeelte van de meetopstelling.

Het roterend raster splitst de laserbundel in een  $0^e$ -orde bundel (verlichtingsbundel) met 90% van de oorspronkelijke laserintensiteit en o.a. een  $1^e$ -orde bundel (referentiebundel) met 2% van de oorspronkelijke intensiteit. De verlichtingsbundel behoudt zijn oorspronkelijke frequentie  $\nu_0$  ( $\approx 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ). De referentiebundel ondervindt onder invloed van het roterend raster een verschuiving  $\nu_v$  (voorverschuiving) van ca. 820kHz, zodat zijn frequentie  $\nu_0 + \nu_v$  bedraagt (zie Ne-

ven;1982). Een deeltje dat met snelheid  $v$  loodrecht op de optische as van het systeem het snijvolume van de bundels passeert, zendt strooilicht uit van de verlichtingsbundel met een frequentie  $\nu = \nu_0 + \nu_d$ . In de richting van de referentiebundel wordt  $\nu_d$  gegeven door:

$$\nu_d = 2 \frac{v}{\lambda} \sin(\gamma/2) \quad (4.1)$$

waarin  $\gamma/2$  de snijhoek van de verlichtingsbundel en de referentiebundel met de optische as is. De fotodiode detecteert het zwevingssignaal van dit strooilicht met de referentiebundel (zie fig.4.3). De zwevingfrequentie wordt dan gegeven door:

$$\nu_{fd} = \nu_v - 2 \frac{v}{\lambda} \sin(\gamma/2) \quad (4.2)$$

welke voor onze configuratie ( $v \approx 3 \text{ cm/sec}$ ) ongeveer  $(820-13) \text{ kHz}$  is. De fotodiode kan frequenties volgen tot ca.  $5 \text{ MHz}$  (TPD;1976). De frequenties die de zweving veroorzaken ( $\nu_0 + \nu_v$  en  $\nu_0 + \nu_d$ ) zijn van de orde van  $5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  en worden dus niet gedetecteerd. De fotodiode levert dan een signaal af van de vorm:

$$V_{fd} = \hat{V}_{fd} \cos\left\{ \left[ \nu_v - 2 \frac{v}{\lambda} \sin(\gamma/2) \right] t + \phi \right\} \quad (4.3)$$

waarin  $\phi$  een arbitraire fasehoek is.

Voor meer gedetailleerde informatie over het optisch gedeelte wordt verwezen naar (Neven;1982).

#### Het signaalverwerkingsgedeelte

Het fotodiodesignaal  $V_{fd}$  wordt met een frequentietracker T (Disa 55N20) omgezet in een signaal  $V_T$  evenredig met de frequentie van het fotodiodesignaal. Vervolgens wordt van dat signaal een constante spanning  $V_S$  afgetrokken en versterkt m.b.v. een verschilversterker A (zie fig.4.4). Tenslotte wordt dit signaal nog gefilterd met een laag-doorlaatfilter

F.

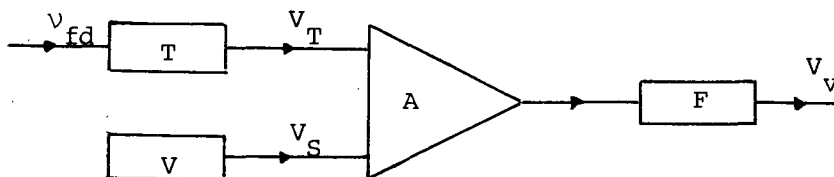


Fig.4.4. :Het signaal-overdrachtsgedeelte.

Het resulterende signaal  $V_v$  wordt vervolgens met een analoog-digitaal-converter gediscrètiseerd in getallen van 1 t/m 255 (bij  $0V < V_v < 10V$ ) en via een microcomputer rechtstreeks op de afdelingscomputer m.b.v. een bestaand computerprogramma (Neven;1982) verwerkt tot snelheid  $u$  volgens:

$$u = S(G - G_0) \quad (4.4)$$

waarin:  $G$  = gediscrètiseerd signaal behorend bij een meting van de snelheid op een bepaalde plaats.

$G_0$  = gediscrètiseerd signaal behorend bij een meting van de voorverschuivingsfrequentie. Deze komt dus overeen met snelheid 0.

$S$  = de schaalfactor die de overgang van frequentie naar snelheid in rekening brengt.

De schaalfactor  $S$  wordt bepaald uit een ijkmeting volgens:

$$S = \frac{\lambda}{2\sin(\gamma/2)} \frac{f_{\text{ver}}}{G_m - G_0} \quad (4.5)$$

waarin  $f_{\text{ver}}$  een opgegeven frequentieverschil tussen een meting van een snelheid  $v_m$  en een meting van de voorverschuivingsfrequentie  $v_v$  is.

$G_m$  en  $G_0$  zijn de bijbehorende getallen na discretisatie.

In praktijk worden van elke meting 30 samples genomen met een sampleduur van de orde grootte van 25  $\mu\text{sec}$ , verdeeld over een meettijd van ca. 25 sec. De schaalfactor  $S$  en de offset  $G_0$  werden bepaald uit ijkmetingen van de voorverschuiving (snelheid 0) en een grote snelheid, waarvan 100 samples zijn genomen over een meettijd van ca. 10 sec.

Per gemeten profiel (15 tot 40 snelheidsmetingen) zijn  $S$  en  $G_0$  slechts 1 maal bepaald. De zo gevonden getallen  $G$ ,  $G_0$  en  $S$  worden dan met het computerprogramma verwerkt tot snelheid  $u$ .

Buiten de metingen van de snelheidsprofielen is voor een aantal metingen het signaal  $V_v$  (zie fig.4.4) gekoppeld aan een Fourier-analyser en is van het stationaire signaal het spectrum bepaald uit 1000 metingen van 20.48 sec. De Fourier-analyser verricht deze metingen overlappend (de totale meettijd bedroeg ca. 1 uur) zodat ze niet geheel onafhankelijk zijn.



#### 4.4.3. Foutenanalyse.

In de vorige paragraaf is afgeleid (vgl.4.4) dat de uiteindelijk gepresenteerde snelheid  $u$  wordt bepaald uit  $u=S(G-G_0)$ . In deze formule zijn de volgende foutenbronnen te onderkennen.

##### 1) Toevallige fouten in het te meten signaal G.

Deze worden veroorzaakt door de spreiding in het Doppler-sigitaal, de rastersturing, tracker en door de discretisatie van het signaal.

-Neven(1982) geeft voor de spreiding in het Doppler-sigitaal  $v_d$  de volgende bronnen:

- a) spreiding in de snijhoek van de bundel t.g.v. de overgang lucht-water, de traversie van het meetgebied en sferische aberraties.
- b) verbreding van de Dopplerfrequentie t.g.v. de eindige verblijftijd van de deeltjes in het meetvolume.
- c) spreiding in de Dopplerfrequentie t.g.v. snelheidsgradiënten in het meetvolume.

Bij de hier verrichte metingen zijn deze onnauwkeurigheden relatief gezien allen van de orde grootte van 1% van de Dopplerfrequentie.

-De foutenbijdrage van de rastersturing en de tracker zijn gelegen in de grootte van de voorverschuivingsfrequentie (820kHz) t.o.v. de Dopplerfrequentie (maximaal ca. 13 kHz). De omwentelingsfrequentie van het raster wordt door de rastersturing binnen 0.2% constant gehouden. De voorverschuivingsfrequentie varieert hierdoor met 1.6kHz terwijl de tracker het signaal analyseert met een vaste onbekende nauwkeurigheid. Het zal duidelijk zijn dat dit tot grote relatieve onnauwkeurigheden in de bepaling van de Dopplerfrequentie leidt.

-Door de discretisatie van het signaal is het getal  $G$  op  $\frac{1}{2}$  nauwkeurig bepaald. Dit geeft een onnauwkeurigheid in de snelheid van  $S \cdot \frac{1}{2} \approx 0.1 \text{ mm/s}$ . De totale toevallige fout in  $G$  kan worden uitgedrukt in de spreiding van de 30 samples van het signaal  $G$ . In het computerprogramma worden voor elk meetpunt de 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde van de 30 samples berekend uit de spreiding in  $S(G-G_0)$ , bij aanname dat  $S$  en  $G_0$  exact zijn. Dit betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde bedraagt voor alle metingen grofweg 0.5-1.5 mm/sec.

##### 2) Toevallige fouten in $G_0$ .

$G_0$  wordt bepaald uit een ijkmeting waarbij het meetgebied is ingesteld op de wand (snelheid 0). De nauwkeurigheid waarmee  $G_0$  wordt

bepaald is groter dan die waarmee  $G$  wordt bepaald, omdat de spreiding in het Dopplersignaal kleiner is. De toevallige fouten in  $G_0$  leiden tot een systematische fout in de snelheid  $u$  (on nauwkeurigheid in het nulniveau). De spreiding van het gemiddelde van de 100 samples die worden genomen van  $G_0$  is uitgedrukt in een snelheid ca. 0.1mm/sec.

### 3) Systematische fout in $G_0$ .

De voorverschuivingsfrequentie  $\nu_v$  kan binnen  $1\frac{1}{2}$  uur (ongeveer het tijdsverschil tussen de ijkmeting en de laatste snelheidsmeting) ca. 1kHz verlopen (zie fig.4.5). Dit wordt veroorzaakt door drift in de rastersturing of drift in de laser. Dit verloop komt neer op een verloop van het nulniveau van de snelheid van 1-2 mm/sec. Met name voor de laatste meetpunten tijdens een meetcyclus is dit van belang.

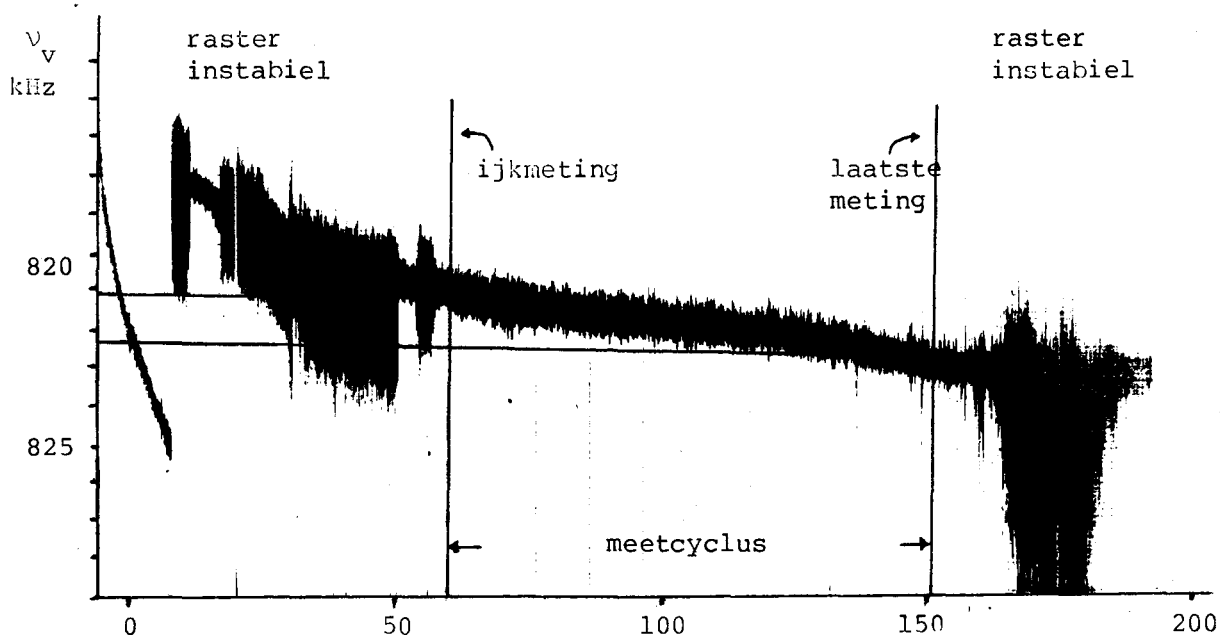


Fig.4.5 : Drift in de voorverschuiving.

### 4) Toevallige fouten in $S$ .

De schaalfactor  $S$  (zie vgl.4.5) wordt bepaald uit een meting van de voorverschuiving ( $\rightarrow G_0$ ) en een hoge snelheid ( $\rightarrow G_m$ ). De on nauwkeurigheid in deze metingen werkt door in  $S$ . Tevens moet ter berekening van  $S$  het bijbehorend frequentieverschil  $f_{ver}$  ( $=f_m - f_0$ ) worden opgegeven. Dit frequentieverschil moet tijdens de ijkmeting worden afgelezen uit het trackersignaal. Door de grote on nauwkeurigheid in dit signaal kan  $f_{ver}$  met een relatieve on nauwkeurigheid van ca. 5% worden bepaald. De snijhoek  $\gamma$  die ook moet worden opgegeven kan on-

geveer op 1% nauwkeurig worden gemeten. De onnauwkeurigheid in S (ca. 6%) leidt tot een systematische fout in de absolute waarde van de snelheid u.

#### 5) Systematische fout in de snelheid aan de wand.

De snelheid vlak bij de wand wordt systematisch overschat (Neven; 1982). Daardoor zijn de metingen binnen ongeveer een halve diameter van het meetgebied van de wand af (ca. 0.3mm) onbetrouwbaar.

Samengevat kan dus worden gesteld dat de gemiddelde snelheden (30 samples) met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van  $\pm(0.5-1.5)$ mm/sec kunnen worden bepaald, dat het nulniveau van de snelheid nauwelijks varieert (ca. 0.1mm/sec) doch dat zij 1 tot 2 mm/sec kan verlopen afhankelijk van het tijdsverschil tussen de snelheidsmeting en de ijkmeting én dat de snelheid in absolute waarde nog een fout van ca. 6% heeft ten gevolge van de onnauwkeurigheid in de schaalfactor S. In de in de volgende paragraaf gepresenteerde snelheidsprofielen is alleen het 95%-betrouwbaarheidsinterval aangegeven.

### 4.4. Meetresultaten en vergelijking met berekeningen.

In deze paragraaf zullen de resultaten worden gegeven van metingen verricht aan het in §4.3 beschreven stromingskanaal.

#### 4.4.1. Contrôle van de tweedimensionaliteit van de stroming.

Ter contrôle van de tweedimensionaliteit van de stroming is op 1cm voor en op 10cm achter de verwijding het snelheidsprofiel in hoogterichting gemeten. Aan de onderkant van het kanaal bevindt zich een lijmrands zodat daar niet vlak bij de wand kon worden gemeten (zie fig.4.6). De lijmrands was ongeveer 5mm dik. Uit fig.4.6 is tevens te zien dat de profielen vrij vlak zijn en dus in eerste benadering mag worden aangenomen dat de stroming tweedimensionaal is. Het verloop van het profiel stemt kwalitatief maar matig overeen met wat verwacht wordt op basis van fig.4.1. Ook valt op dat de snelheid aan de onderzijde hoger is dan de snelheid aan de bovenzijde, hoewel dit enigszins vertekend wordt door afwezigheid van het meetpunt aan de onderwand. Oorzaak van dit snelheidsverschil is het extra hydrostatisch

drukverschil dat bij de uitstroomopening niet voldoende is gecorri-  
geerd met hoogteafhankelijke uitstroomgaatjes in het schuifje t.b.v.  
de snelheidsregeling.

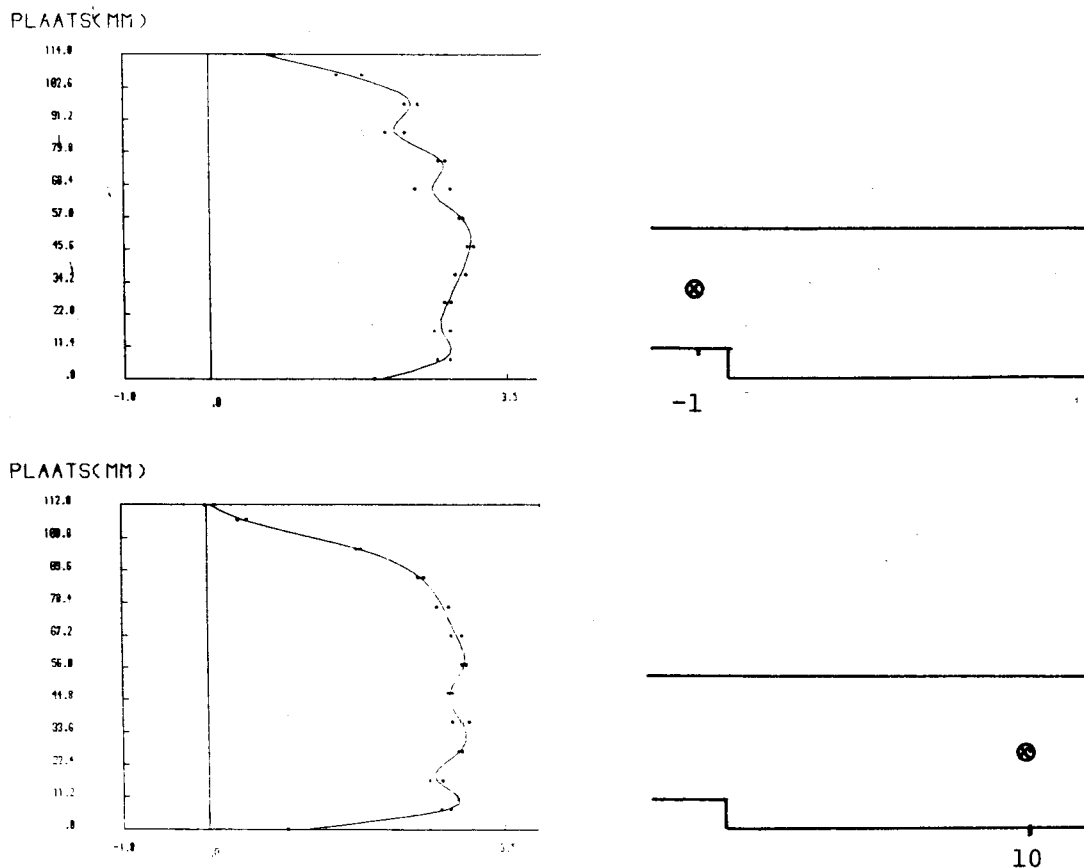


Fig.4.6. :Het snelheidsprofiel in hoogterichting op 1cm voor en  
10cm achter de verwijding.

4.4.2. Snelheidspatronen achter de verwijding voor verschillende Rey-  
noldsgetallen.

In fig.4.7 zijn de snelheidsprofielen gegeven achter de verwijding  
voor  $Re_D \approx 980$ . De dikke stippen geven het numeriek bepaalde profiel  
berekend met de boetefunctiemethode en mesh C uit §3.5. Als instroom-  
waarden voor de berekening zijn de gemeten waarden van het inlaatpro-

fiel ( $x=0$ ) genomen.

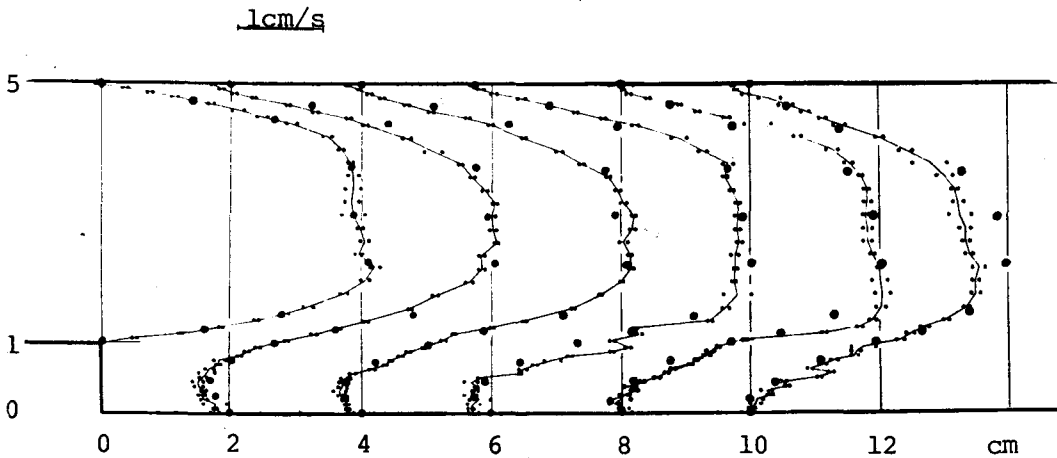


Fig.4.7. : De gemeten en berekende snelheidsprofielen voor  $Re_D \approx 980$ .

In fig.4.8 zijn de snelheidsprofielen in het recirculatiegebied gegeven voor  $Re_D \approx 980$ ,  $Re_D \approx 700$  en  $Re_D \approx 550$ . Tevens zijn daarin de gevonden numerieke oplossingen aangegeven met dikke stippen. Het gemeten inlaatprofiel is daarbij gebruikt als invoer voor de berekeningen én voor de bepaling van het Reynoldsgetal ( $Re_D = \bar{u}d/\nu$ ,  $\bar{u} = \int_0^D u(0,y)dy/D$ ), behalve bij de laatste meting ( $Re_D \approx 550$ ). Hier is door een fout in de meetprocedure geen inlaatprofiel voorhanden. Het Reynoldsgetal bij deze meting is dan ook achteraf geschat op basis van de aangebrachte doorstromingsoppervlakverkleining van de snelheidsregeling. Het inlaatprofiel voor de berekening voor dit Reynoldsgetal is parabolisch genomen op basis van fig.4.1 met  $100 \frac{x}{D} \frac{4}{Re_D} = 11$ . De vergelijking van de meting en de berekening bij  $Re_D = 550$  moet dus met enige voorzichtigheid worden geïnterpreteerd. In de discussie wordt hier nog op teruggekomen. In fig.4.8 is op basis van de profielen ook de experimentele en numerieke seperatiestroomlijn aangegeven. Zij zijn stuksgewijs lineair getekend door de punten waar de snelheid door interpolatie nul

wordt verondersteld. Het laatste punt bij de numerieke seperatiestroomlijnen is weer zoals bij de bepaling van de lengte van het recirculatiegebied in §3.4.3 bepaald uit de getallenuitvoer.

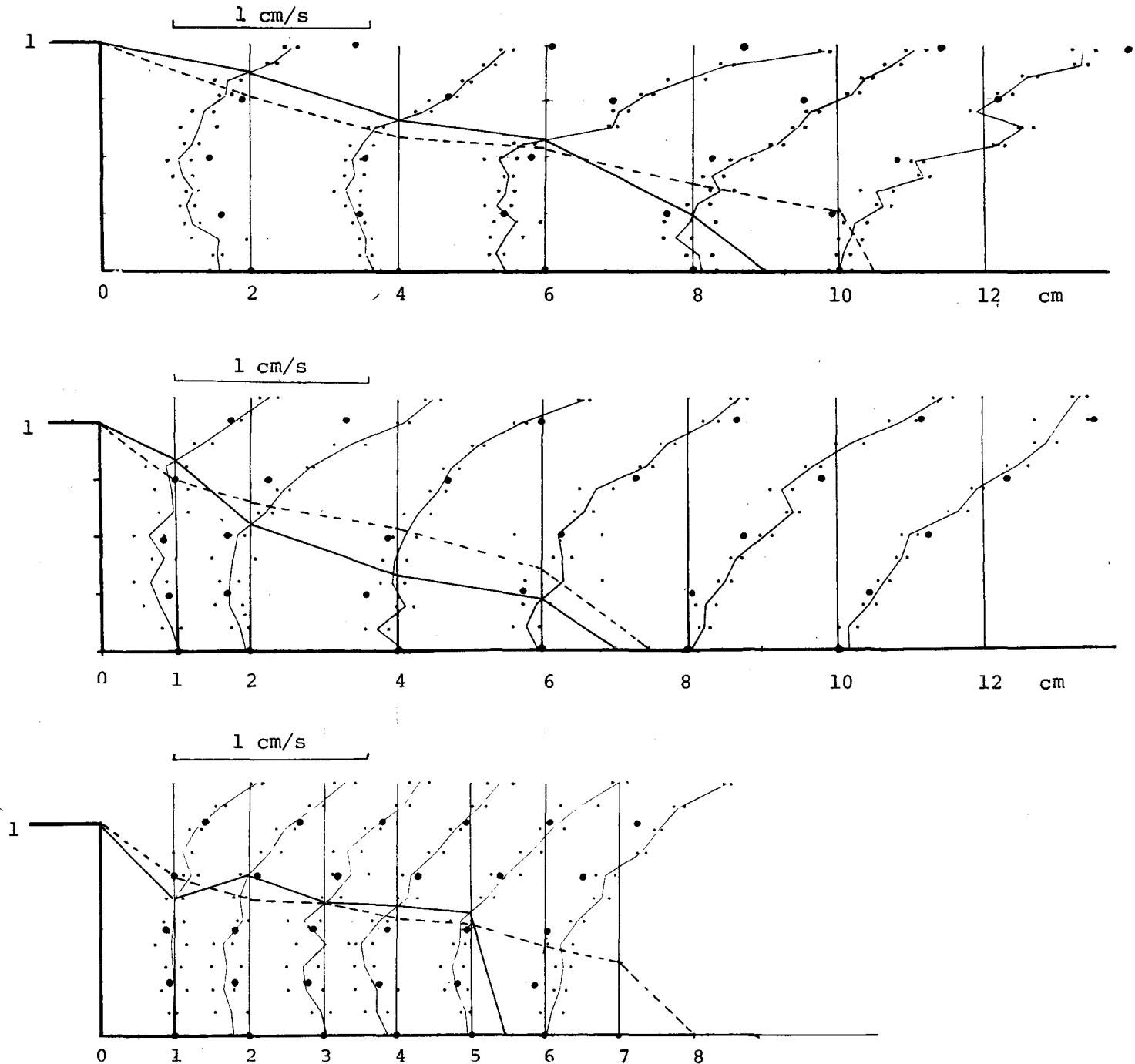


Fig.4.8. : Snelheidsprofielen in het recirculatiegebied en seperatiestroomlijnen voor verschillende Reynoldsgetallen.  
— experimentele waarden, en -- numerieke voorspelling gebaseerd op experimenteel inlaatprofiel (m.u.v.  $Re_D \approx 550$ ).

Uit fig.4.8 blijkt dat de numeriek voorspelde stromingsprofielen meestal ongeveer binnen de aangegeven betrouwbaarheids grenzen van de experimenteel bepaalde profielen liggen en dat voor het grootste deel van het seperatiegebied de numerieke en experimentele seperatiestroomlijnen redelijk overeenkomen.

De experimenteel gevonden en de numeriek voorspelde waarden voor de lengte van het recirculatiegebied zijn gegeven in tabel 4.1. Hieruit blijkt dat behalve bij  $Re_D \approx 550$  dat de numerieke waarden iets boven de experimenteel bepaalde waarden liggen.

Tabel 4.1. : De experimentele en numerieke waarden van de lengte van het recirculatiegebied.

$Re_D$	$Re_h$	$L_r$ experimenteel	$L_r$ numeriek
980	245	$9.0 \pm 0.5$	$10.5 \pm 0.3$
700	175	$7.0 \pm 0.5$	$7.5 \pm 0.3$
550	138	$5.5 \pm 0.5$	$8.0 \pm 0.3$

In fig.4.9 is de visualisatie van de stroming in het recirculatiegebied weergegeven voor het geval dat  $Re_D \approx 980$ . In fig.4.9a is inkt geïnjecteerd aan de wand vlak voor de stap. In fig.4.9b is inkt geïnjecteerd in het recirculatiegebied ( de schaal is hier anders als bij a). De stippellijn geeft de numeriek bepaalde seperatiestroomlijn aan. Ook hier is de overeenkomst tussen theorie en praktijk bevredigend.

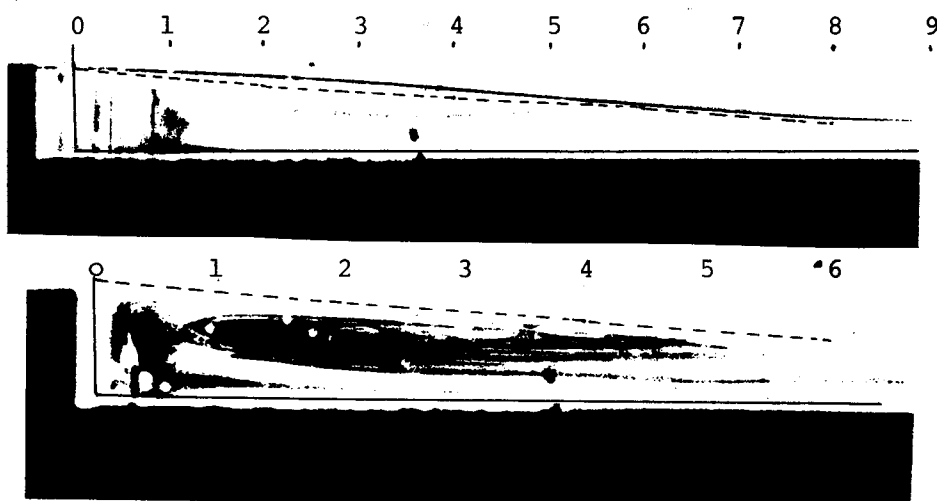


Fig.4.9. : Visualisatie van de stroming in het recirculatiegebied.  
 -- = numeriek bepaalde seperatiestroomlijn.

4.4.3. Onderzoek naar instationaire effecten zoals wervelafschudding en instabiliteiten.

Als wervelafschudding of instabiliteiten optreden, moet dit te zien zijn in variaties in het Dopplersignaal met vaste frequenties. Om dit te onderzoeken is voor verschillende plaatsen in het kanaal bij  $Re_D \approx 980$  een frequentieanalyse gemaakt van het snelheidssignaal  $V_v$  (zie §4.3).

Fig.4.10 geeft het autospectrum van de voorverschuiving (snelheid 0) gemeten op de wand van het kanaal (geen stroming in het kanaal). Het spectrum is gemeten van 0 tot 25Hz.

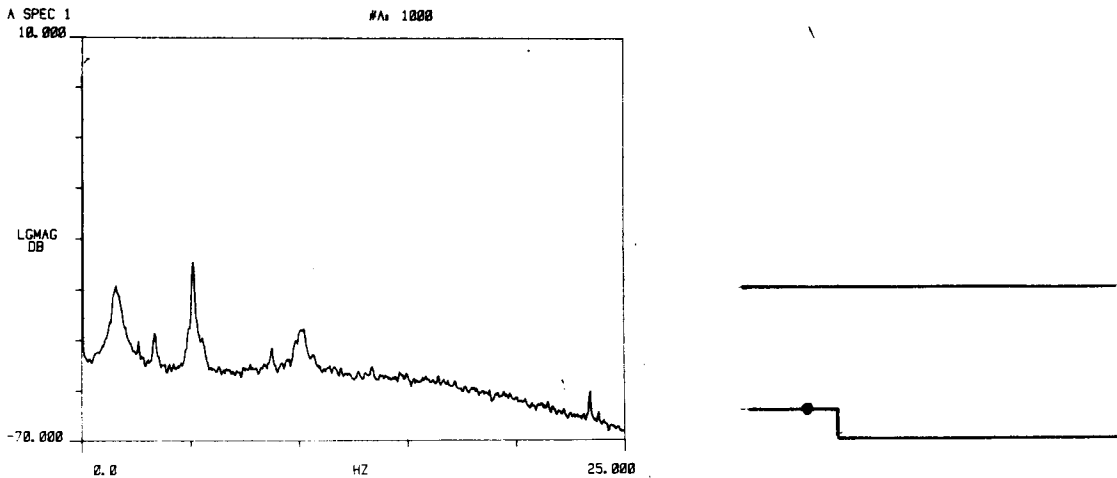


Fig.4.10. : Autospectrum van een meting van de voorverschuiving.

De frequentiepieken die voorkomen zijn : 1.6Hz + 1<sup>e</sup> harmonische, 5.12Hz + 1<sup>e</sup> harmonische en 23.44Hz.

Fig.4.11 geeft het autospectrum voor enkele punten 2cm vóór, 2cm achter en 8cm achter de verwijding.



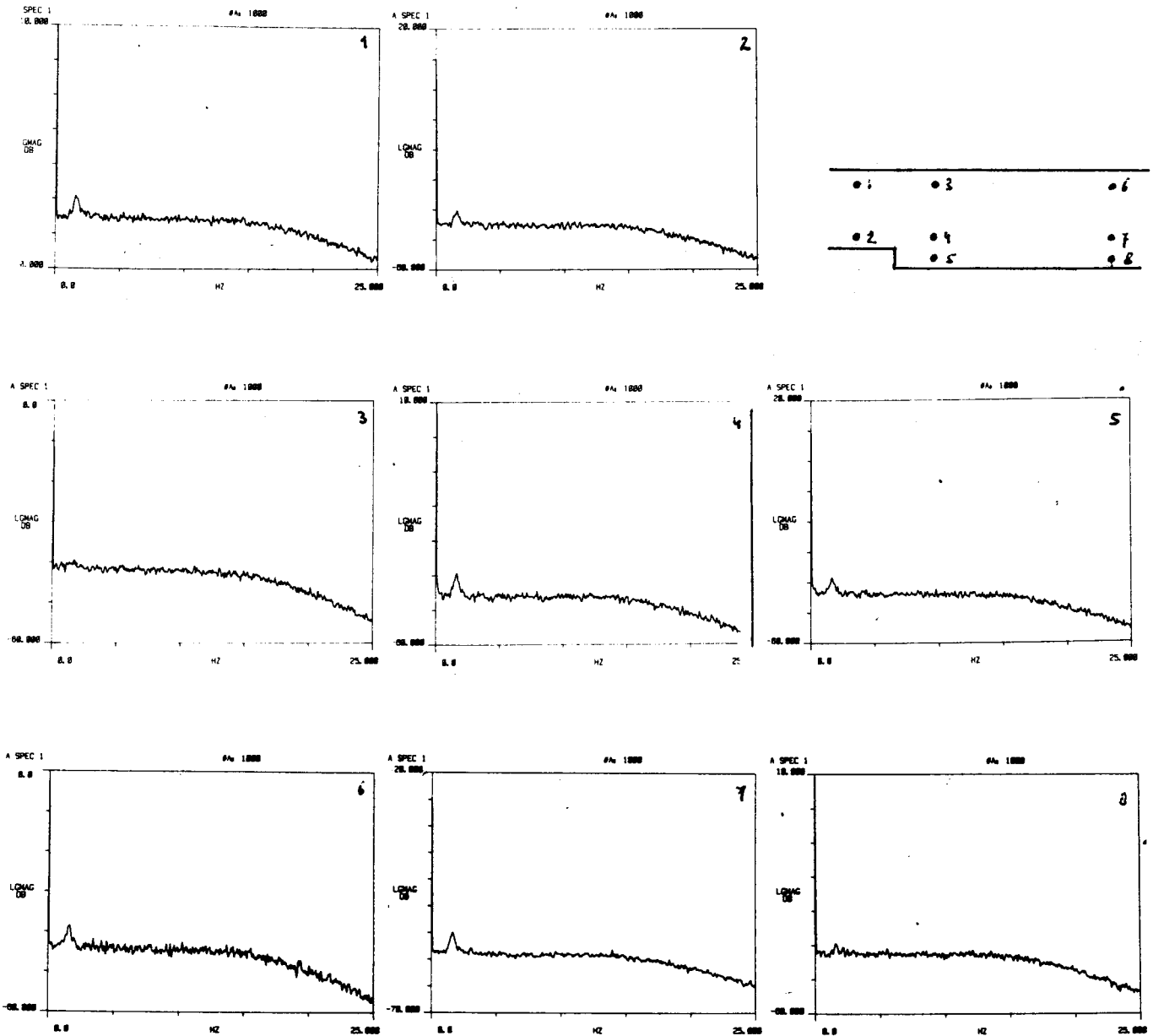


Fig.4.11. : Autospectra voor verschillende punten in het kanaal.

In alle punten is de enige frequentie die voorkomt 1.6Hz. Deze frequentie komt overeen met de regelfrequentie van de rastersturing. Fig.4.12 illustreert dit. De gestippelde lijn geeft het spectrum na verstoring van de omwenteling van het raster.

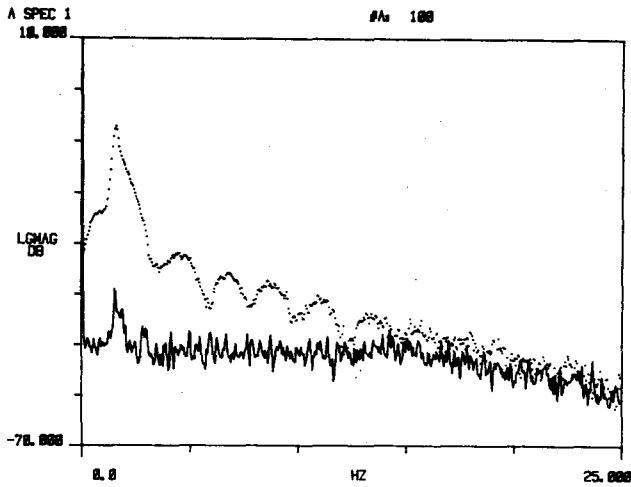


Fig.4.12. : Autospectrum van het snelheidssignaal voor en na verstoring van het raster.

#### 4.5. Conclusies en discussie.

##### 4.5.1. Conclusies.

De belangrijkste conclusies die uit deze experimentele verificatie kunnen worden getrokken zijn:

- 1)De voorspelling van de snelheidsprofielen klopt redelijk.
- 2)De voorspelling van de separatiestroomlijn klopt redelijk, zowel met de snelheidsmetingen als met de visualisatieproeven.
- 3)De lengte van het recirculatiegebied is experimenteel korter dan de numeriek voorspelde lengte.
- 4)De stroming na de stap is stabiel. Ook uit de visualisatieproeven blijkt dat er geen wervelafschudding en geen instabiliteiten optreden.

##### 4.5.2. Beschouwing van de meetnauwkeurigheid.

-De snelheden kunnen over het algemeen, op een schaalfactor met een onnauwkeurigheid van 6% na, met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van 0.5-1.5 mm/sec nauwkeurig worden bepaald, wanneer gemiddeld wordt over 30 meetsamples. De meettijd per meetpunt bedraagt dan zo'n 25 sec. Binnen deze meettijd zal de invloed van de drift in de voorver-schuivingsfrequentie miniem zijn (zie fig.4.5). Het is dan wel van belang dat niet gemeten wordt tijdens een instabiele fase van het raster. Bij de hier verrichte metingen is een ijkmeting gedaan vóór

een serie van 15 tot 40 snelheidsmetingen. Met name voor de laatste metingen van zo'n serie klopt dan de ijkwaarde voor de voorverschuiving niet meer. Dit is ook duidelijk te zien in de snelheidsprofielen voor  $Re_D \approx 980$  (zie fig.4.7), waar de snelheden aan de achterwand (laatste meetpunten) consequent worden onderschat, terwijl juist een overschatting wordt verwacht. In de metingen in het recirculatiegebied zal dit effect een kleinere rol spelen.

-De metingen zouden nauwkeuriger kunnen worden uitgevoerd indien de voorverschuivingsfrequentie lager zou zijn. Het verschil tussen de frequentie behorend bij een bepaalde snelheid en de voorverschuivingsfrequentie is dan groter. De invloed van de onnauwkeurigheid in de snelheidsmeting en in het nulniveau kan dan worden teruggebracht. Een verlaging van de voorverschuivingsfrequentie is te bereiken door een raster te nemen met een grotere afstand tussen de etslijnen. Gevolg is dan echter dat de hoek tussen de 0<sup>e</sup>-orde en de 1<sup>e</sup>-orde bundel met dezelfde factor afneemt als de lijnafstand in het raster is toegenomen (zie fig.4.13).

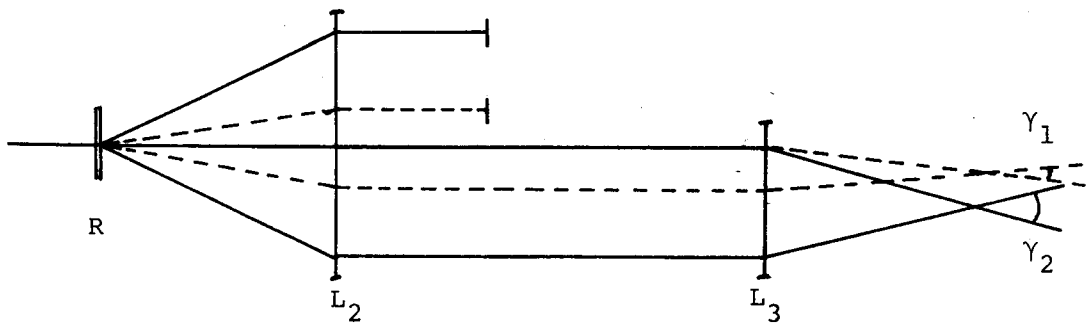


Fig.4.13. :Gevolg van een raster met een groter afstand tussen de etslijnen.

De snijhoek  $\gamma$  wordt dan ook evenveel kleiner. Dit betekent dat de frequentie behorend bij een bepaalde snelheid ongeveer met dezelfde factor afneemt (zie vgl.4.1). Door verlaging van de voorverschuivingsfrequentie is dan geen winst geboekt. Een mogelijkheid om toch dezelfde snijhoek te houden is de 1<sup>e</sup>-orde bundel parallel te verschuiven m.b.v. twee prisma's of twee spiegels (zie fig.4.14)

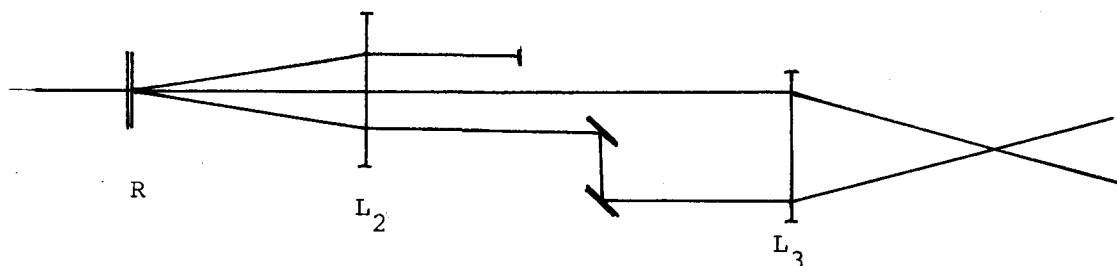


Fig.4.14. : Parallele verschuiving van de 1<sup>e</sup>-orde bundel.

Een poging om met twee spiegeltjes de parallelle verschuiving te bewerkstelligen is mislukt en gaf een zeer slechte signaal-ruisverhouding, waarschijnlijk door slechte uitlijning en onvolkomenheden in de spiegels.

-Een mogelijke foutenbron die niet in §4.4.3 is behandeld is de onnauwkeurigheid van de tracker veroorzaakt door het niveau van het fotodiodesignaal. Wanneer het niveau van het fotodiodesignaal te laag is, is de tracker niet 'in-lock' (zie hiervoor Nuijten;1982) en houdt deze het laatst gemeten signaal vast. Dit geeft een extra onnauwkeurigheid in de uitgangsspanning van de tracker. Het niveau van het Doppler-signaal is afhankelijk van de concentratie van de verstrooide deeltjes. Omdat de meetopstelling geen gesloten systeem is, is het moeilijk deze concentratie constant te houden en komt het voor dat tijdens het meten de versterkingsfactor van de tracker moet worden bijgesteld. Het is gebleken dat dit bijregelen van invloed is op de door de tracker afgegeven uitgangsspanning. Met name bij de eerste metingen die zijn verricht (zie fig.4.6 en fig.4.7,  $Re_D=980$ ) is hiermee onvoldoende rekening gehouden.

#### 4.5.3. Beschouwing van de resultaten.

##### de recirculatiezone

De waarden voor de lengte van het recirculatiegebied zijn in fig.4.15 uitgezet tegen het Reynoldsgetal  $Re_h$ . De berekende waarden liggen hoger als de gemeten waarden maar vertonen dezelfde tendens als gevonden in Denham en Patrick (1974).

Ook Goldstein e.a.(1970) verrichtten metingen aan stroming over een stap en vond voor vrijwel vlakke inlaatprofielen de relatie:

$$L_r = (2.13 + 0.021Re_h) \cdot h \quad (4.6)$$

deze relatie is eveneens in fig.4.15 weergegeven.

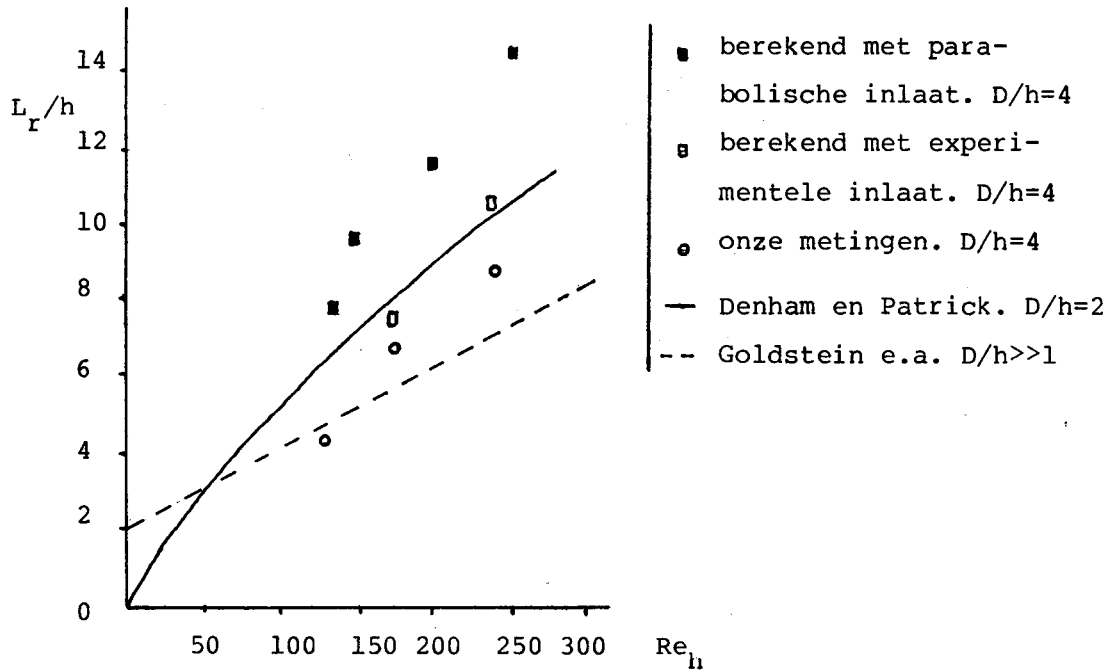


Fig.4.15. : Lengte van het recirculatiegebied als functie van  $Re_h$  vergeleken met berekeningen en literatuur.

Het is niet duidelijk in hoeverre de hier gevonden resultaten vertaald mogen worden naar literatuurgegevens en de situatie in de halsslagader. Dit wordt onder andere sterk bepaald door de daar optredende inlaatprofielen. Ter illustratie hiervan zijn in fig.4.16 de snelheidsprofielen in het recirculatiegebied gegeven voor  $Re_h=138$ , berekend met twee verschillende inlaatprofielen. De eerste (getrokken lijn) is een parabolisch inlaatprofiel zoals ook genomen bij de meting met  $Re_h=138$ . De tweede (gestippelde lijn) is het inlaatprofiel van de meting met  $Re_h=175$ , getransformeerd naar  $Re_h=138$ . De verschillen tonen aan dat voor de berekening de vorm van het inlaatprofiel belangrijk is.

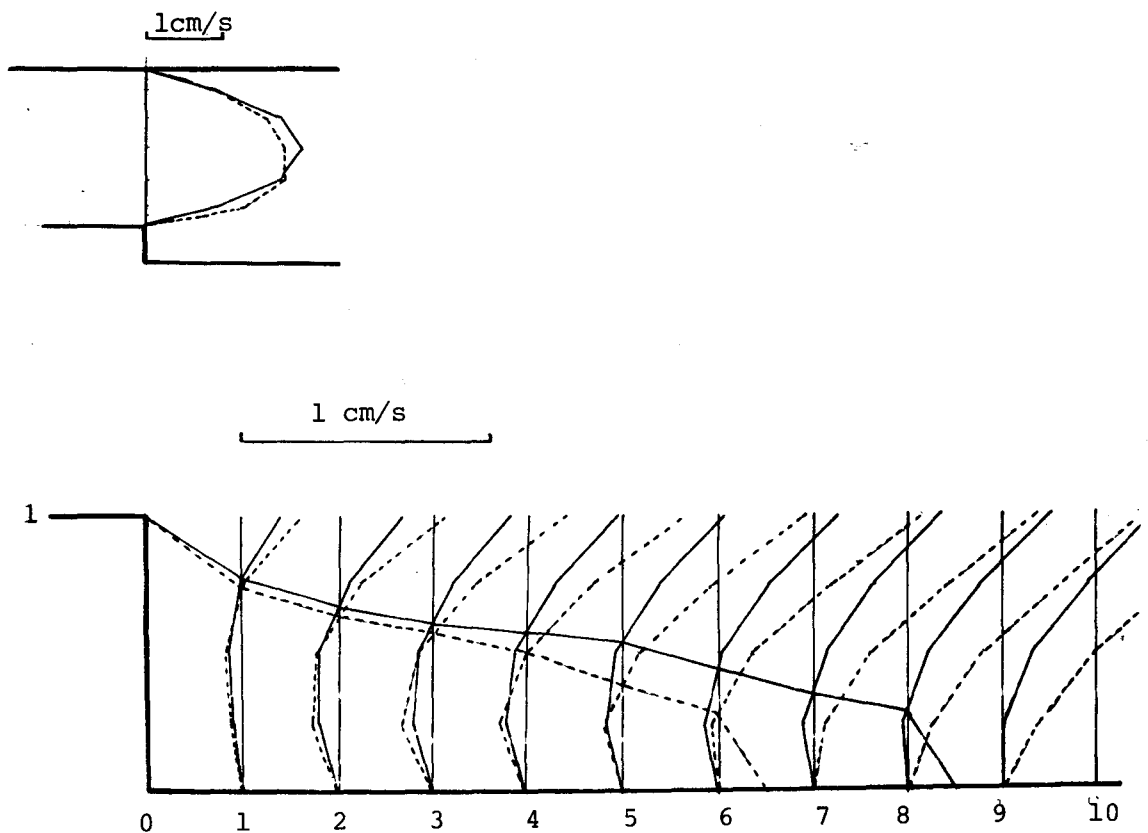


Fig.4.16. : Berekende snelheidsprofielen in het recirculatiegebied voor twee verschillende inlaatprofielen en het zelfde Reynoldsgetal.

Cramer (1958) vindt analytisch vanuit een geïdealiseerd model voor incompressibele stroming over een stap in een vlakke plaat de relatie:

$$\frac{L_r}{h} = \frac{1}{3} Re_h \left[ 1 + 2 \frac{\delta^*}{h} \right] \quad (4.7)$$

Deze relatie zou kunnen verklaren dat bij meer parabolische inlaatprofielen ( $\delta^* >$ ) de lengte van het recirculatiegebied toeneemt (zie fig.4.16). Als relatie (4.7) ook zou gelden voor parabolische inlaatprofielen, gaat deze vanwege  $\delta^* = \frac{1}{6} D$  over in

$$\frac{L_r}{h} = \frac{1}{3} Re_h \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{D}{h} \right] \quad (4.8)$$

Relatie (4.7) geeft dus wel een eventuele verklaring voor afhankelijkheid voor  $L_r$  van de vorm van het profiel ( $\delta^*$ ) maar voorspelt voor parabolische profielen een afhankelijkheid van  $D/h$  die numeriek niet wordt gevonden. Ook Goldstein relateert voor zijn metingen relatie (4.7) en vindt geen vermindering in spreiding in de fit t.o.v. relatie (4.6). Relatie (4.7) kan dus niet verklaren dat  $L_r$  niet van  $D/h$

maar wel van de vorm van het profiel afhangt. Het behoeft nader onderzoek om goede uitspraken te doen over de invloed van de parameters  $\delta^*$  en  $D/h$  op de lengte van het recirculatiegebied.

instationaire effecten

Goldstein e.a. (1970) geven als criteria voor laminaire stroming:  $\tilde{Re}_h < 520$  en  $\delta_h/h > 0.4$ . Dit is in fig.4.19 weergegeven. In deze figuur zijn tevens criteria gevonden door anderen gegeven. Hier zal niet verder op worden ingegaan. Voor de hier verrichte metingen geldt:  $\tilde{Re}_h = \frac{3}{2}Re_h < 245 \cdot \frac{3}{2} < 368$ . Uit het profiel voor  $1/3 \times$  de inlaatlengte is een verplaatsingsdikte  $\delta_h$  te schatten als  $\delta_h \approx D/8$  zodat  $\delta_h/h > D/8h > 5/8$  (zie fig.4.1 en fig.4.18)

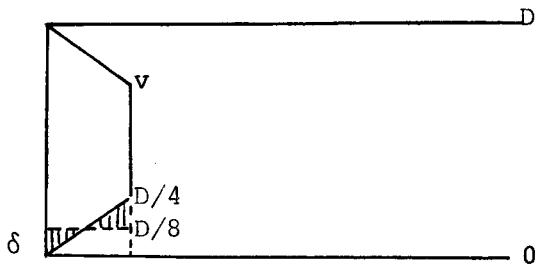


Fig.4.18. : Schatting van  $\delta_h$  voor  $x=L_e/3$  (zie fig.4.1).

De metingen die hier verricht zijn bevinden zich dus in het in fig. 4.19 aangegeven gebied. Volgens de daar gegeven criteria moet de stroming dus laminair zijn, hetgeen in overeenstemming is met de Fourier-analyses en de flowvisualisatie (fig.4.8 en fig.4.9).

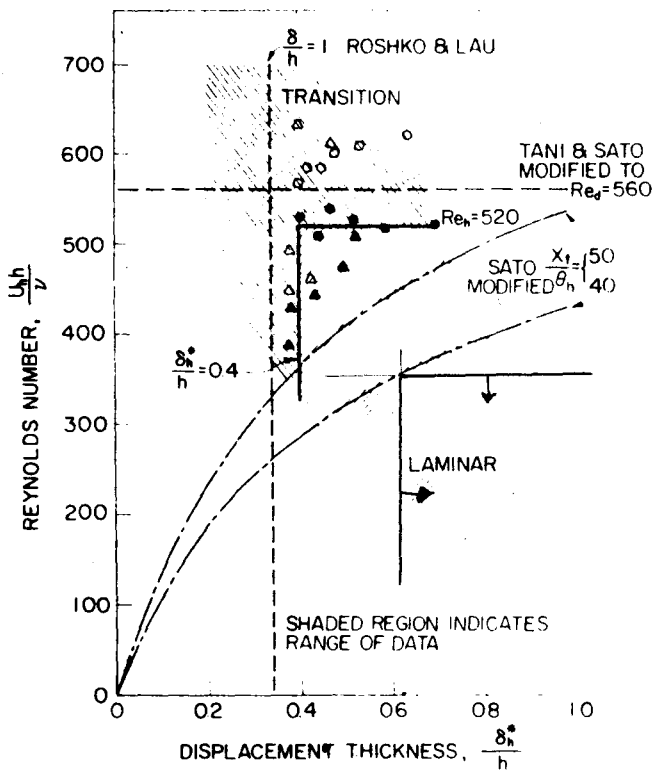


Fig.4.19. : Locatie van de hier verrichte metingen ingetekend in een overzicht uit Goldstein e.a. (1970).

FROM HOT WIRE OBSERVATION    FROM SMOKE OBSERVATION

- 30.5 cm. STARTING LENGTH, ○ 30.5 cm. STARTING LENGTH
- ▲ 4.1 cm. STARTING LENGTH, △ 4.1 cm. STARTING LENGTH

Fig. 5 Reynolds number based on step height versus displacement thickness indicating values at which transition to turbulence occurs at reattachment



5. Voortgang van het onderzoek.

5.1. Numeriek-theoretisch.

Op numeriek-theoretisch gebied is het wenselijk dat de beschreven oplosmethoden meer worden uitgediept en mathematisch exacter worden geformuleerd. Hierbij moet getracht worden formuleringen te vinden die eenvoudig naar  $\mathbb{R}^3$  kunnen worden gegeneraliseerd (tensorrekening). De generalisatie naar  $\mathbb{R}^3$  is van belang voor het "atherosclerose-project" omdat slechts dan voorspellingen over het stromingsgedrag bij vaatvernauwing kunnen worden gedaan. Tevens is het dan noodzakelijk de instationaire Navier-Stokes-vergelijking te beschouwen. De oplosmethoden voor de tweedimensionale stationaire Navier-Stokes-vergelijking kunnen nog verder worden getoetst door vergelijking met theoretische oplossingen en experimenten. Voor stapvormige verwijdingen is het zinvol de invloed van de karakteristieke grootheden  $D/h$ ,  $Re_h$  en  $Re_\delta$  nader te onderzoeken. Tevens is het zinvol naar stromingsverschijnselen vlak vóór een vernauwing te kijken. (zie fig. 5.1)

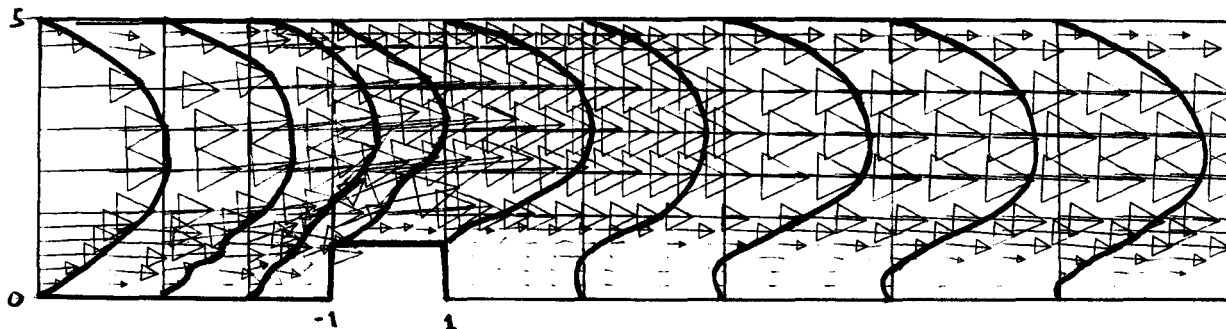


Fig.5.1. : snelheidsveld en enige profielen voor  $Re_D=800$  bij een gemodelleerde stenose.

Berekening en plotten van de stroomfunctie kan een beter beeld geven van de verschijnselen dan de hier "geplotte" snelheidsvelden. Binnenkort zal AFEP worden uitgebreid met een subroutine waarmee dit mogelijk is.

## 5.2. Experimenteel.

Omdat bij de experimenten relatief lage snelheden moeten worden gemeten ( $\approx 1\text{mm/sec}$ ) is het van belang dat bij een lagere voorverschuivingsfrequentie wordt gemeten zodat het verschil tussen de dopplerverschuiving en voorverschuiving groter wordt. Eventueel kan zonder voorverschuiving worden gemeten, maar dan moet de tracker vervangen worden door een andere frequentievolger omdat de tracker slechts frequenties vanaf  $1\text{kHz}$  ( $\approx 4\text{mm/sec}$ ) kan volgen. Wel is dan de richtingsinformatie verloren. Metingen kunnen dan gedaan worden aan verschillende configuraties (andere staphoogtes, stapvormige vernauwingen etc.). Belangrijke parameters bij deze metingen zijn: de verhouding  $D/h$  en de verplaatsingsdikte  $\delta^*$  bij het inlaatprofiel. Hierbij zou de uitstroming dan wel beter regelbaar en gunstiger moeten zijn t.a.v. het hydrostatisch drukverschil, zodat het profiel in hoogterichting "netter" is. (zie fig.4.6)

T.a.v. de deeltjesconcentratie kan gezegd worden dat gepoogd moet worden deze zo constant mogelijk te houden zodat bijregelen van de versterkingsfactor van de tracker niet nodig is. In dit kader is het tevens zinvol de invloed van het signaalniveau van de fotodiode op de volgeigenschappen van de tracker te onderzoeken.

Tenslotte kan de visualisatie van de stroming veel beter gebeuren dan hier is gedaan, bijvoorbeeld met waterstofbellentechniek. Vooral als vergelijking met stroomfunctieplaatjes uit AFEP mogelijk wordt, kan visualisatie veel informatie geven.

APPENDIX.

Appendix 1: afleiding van de Poissonvergelijking uit het minimaliseringsprobleem (2.4).

vgl. 2.1:

$$\min_{u,v} \left[ \int_{\Omega} F(\vec{x}, \vec{u}, \vec{u}_x, \vec{u}_y) d\sigma + \int_{\partial\Omega} G(\vec{x}, \vec{u}) ds \right]$$

vgl. 2.4. geeft:

$$F = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - u_1 f_1 - u_2 f_2$$

$$G_1 = -h_2 v$$

$$G_2 = -h_1 u$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \gamma u^2 + \frac{1}{2} \gamma v^2 - k_1 u - k_2 v$$

Uit:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} = 0$$

volgt:

$$\left. \begin{array}{l} -f_1 - \nabla^2 u = 0 \\ -f_2 - \nabla^2 v = 0 \end{array} \right\} \text{ dus } \underline{-\nabla^2 \vec{u} = \vec{f}} \quad \vec{x} \in \Omega$$

Uit:

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y = 0$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} n_y = 0$$

volgt:

$$-h_2 + \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y = 0 \quad \text{dus } (\nabla v \cdot \vec{n}) = \underline{\frac{\partial v}{\partial n} = h_2} \quad \vec{x} \in \partial\Omega_1$$

$$-h_1 + \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = 0 \quad \text{dus } (\nabla u \cdot \vec{n}) = \underline{\frac{\partial u}{\partial n} = h_1} \quad \vec{x} \in \partial\Omega_3$$

Uit:

$$\frac{\partial G_3}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y = 0$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} n_y = 0$$

volgt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma u - k_1 + \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y &= 0 \\ \gamma v - k_2 + \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ dus } \underline{\gamma \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = \vec{k}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \partial \Omega_3}$$

---

appendix 2: de methode van Ritz toegepast op het minimaliseringsprobleem (2.4).

vgl. 2.4.

$$\begin{cases} \min_{u,v} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{f} \right\} d\sigma - \int_{\partial\Omega_1} h_2 v ds - \int_{\partial\Omega_2} h_1 u ds + \int_{\partial\Omega_3} \left( \frac{1}{2} \gamma |\vec{u}|^2 - \vec{k} \cdot \vec{u} \right) ds \right] \\ u = g_1 \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \\ v = g_2 \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2 \end{cases}$$

geeft:

$$\begin{cases} \min_u \left[ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - u f_1 \right\} d\sigma - \int_{\partial\Omega_2} h_1 u ds + \int_{\partial\Omega_3} \left( \frac{1}{2} \gamma u^2 - k_1 u \right) ds \right] \\ u = g_1 \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{en} \\ \min_v \left[ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v f_2 \right\} d\sigma - \int_{\partial\Omega_1} h_2 v ds + \int_{\partial\Omega_3} \left( \frac{1}{2} \gamma v^2 - k_2 v \right) ds \right] \\ v = g_2 \quad \text{voor } \vec{x} \in \partial\Omega_2 \end{cases}$$

$$\text{immers } \min_{u,v} [a(u) + b(v)] \Leftrightarrow \min_u [a(u)] \wedge \min_v [b(v)]$$

Beschouw alleen het eerste minimaliseringsprobleem, het tweede verloopt analoog.

vgl. 2.7.

$$u_b = \sum_{i=1}^n (a_i \varphi_{1i}) + u_0$$

geeft:

$$\min_{a_k} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial y} \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1i} f_1 \right\} d\sigma + \right. \\ \left. - \int_{\partial\Omega_2} h_1 \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1i} ds + \int_{\partial\Omega_3} \left\{ \frac{1}{2} \gamma \left( \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1i} \right)^2 - k_1 \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1i} \right\} ds \right]$$

immers  $u_0 = 0$  behalve op  $\partial\Omega_1$ .

dan volgt hieruit:

$$\min_{a_k} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \frac{\partial \varphi_{ii}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \frac{\partial \varphi_{ii}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{ii} f_1 \right\} d\sigma - \int_{\Omega_2} h_1 \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{ii} ds + \int_{\Omega_3} \left\{ \frac{1}{2} \gamma \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \varphi_{ii} \varphi_{ij} - k_1 \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{ii} \right\} ds \right]$$

endus:

$$\min_{a_k} \left[ \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_{ii}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ii}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right) d\sigma \right\} - \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} \varphi_{ii} f_1 d\sigma + \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega_2} h_1 \varphi_{ii} ds + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \gamma a_i a_j \int_{\Omega_3} \varphi_{ii} \varphi_{ij} ds - \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega_3} \varphi_{ii} k_1 ds \right]$$

Dit minimaliseringsprobleem is equivalent met de eis:

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0 \quad \forall a_k$$

dus:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial a_k} (a_i a_j) \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_{ii}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ii}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right) d\sigma - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial a_k} \int_{\Omega} \varphi_{ii} f_1 d\sigma + \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial a_k} \int_{\Omega_2} h_1 \varphi_{ii} ds + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial}{\partial a_k} (a_i a_j) \int_{\Omega_3} \varphi_{ii} \varphi_{ij} ds + \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial a_k} \int_{\Omega_3} \varphi_{ii} k_1 ds = 0 \quad \text{voor } k = 1, \dots, n$$

Dit gaat over in

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} (\nabla \varphi_{ii} \cdot \nabla \varphi_{ik}) d\sigma - \int_{\Omega} \varphi_{ik} f_1 d\sigma - \int_{\Omega_2} \varphi_{ik} h_1 ds + \\ + \sum_{i=1}^n \gamma a_i \int_{\Omega_3} \varphi_{ii} \varphi_{ik} ds - \int_{\Omega_3} \varphi_{ik} k_1 ds = 0 \quad \text{voor } k = 1, \dots, n$$

en dus

$$\sum_{i=1}^n \left[ a_i \left\{ \int_{\Omega} (\nabla \varphi_{ii} \cdot \nabla \varphi_{ik}) d\sigma + \int_{\cup \Omega_3} \gamma \varphi_{ii} \varphi_{ik} ds \right\} \right] =$$
$$\int_{\Omega} f_1 \varphi_{ik} ds + \int_{\cup \Omega_2} h_1 \varphi_{ik} ds + \int_{\cup \Omega_3} k_1 \varphi_{ik} ds$$

ofwel:

$$S^u \underline{a} = \underline{f}^u$$

met:

$$S_{ki}^u = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_{ik} \cdot \nabla \varphi_{ii}) d\sigma + \int_{\cup \Omega_3} \gamma \varphi_{ik} \varphi_{ii} ds$$

$$f_k^u = \int_{\Omega} f_1 \varphi_{ik} d\sigma + \int_{\cup \Omega_2} h_1 \varphi_{ik} ds + \int_{\cup \Omega_3} k_1 \varphi_{ik} ds$$

Voor de 2<sup>e</sup> vergelijking volgt analoog:

$$S^v \underline{b} = \underline{f}^v$$

met

$$S_{ki}^v = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_{2k} \cdot \nabla \varphi_{2i}) d\sigma + \int_{\cup \Omega_3} \gamma \varphi_{2k} \varphi_{2i} ds$$

$$f_k^v = \int_{\Omega} f_2 \varphi_{2k} d\sigma + \int_{\cup \Omega_1} h_2 \varphi_{2k} ds + \int_{\cup \Omega_3} k_2 \varphi_{2k} ds$$

---

appendix 3: discretisatie van de Poissonvergelijking via een integraalformulering.

1<sup>e</sup> vergelijking van 2.26:

$$-\sum_{i=1}^n u_i \int_{\Omega} \varphi_k \nabla^2 \varphi_i d\sigma = \int_{\Omega} f_1 \varphi_k d\sigma \quad k=1, \dots, n \quad (A3.1)$$

Partieel integreren in  $\mathbb{R}^2$  (Green)

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\sigma = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\sigma + \int_{\partial\Omega} u v n_i ds \quad i=1, 2$$

toegepast op (A3.1) geeft:

$$\sum_{i=1}^n u_i \left\{ \int_{\Omega} (\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i) d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k ds \right\} = \int_{\Omega} f_1 \varphi_k d\sigma \quad k=1, \dots, n$$

en dus

$$\sum_{i=1}^n u_i \left\{ \int_{\Omega} (\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i) d\sigma - \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k ds - \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k ds - \int_{\partial\Omega_3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k ds \right\} = \int_{\Omega} f_1 \varphi_k d\sigma \quad k=1, \dots, n$$

Gebruikmaken van de randvoorwaarden levert:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_1} u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k ds = 0 \quad , u = \text{Dirichlet r.v.w. op } \partial\Omega_1. \text{ Deze term valt straks weg als de Dirichlet r.v.w. in rekening worden gebracht in de element matrix.}$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_2} u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k ds = \int_{\partial\Omega_2} h_1 \varphi_k ds$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_3} u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k ds = \int_{\partial\Omega_3} \frac{\partial u_b}{\partial n} \varphi_k ds = \int_{\partial\Omega_3} \varphi_k k_1 ds - \int_{\partial\Omega_3} \gamma \varphi_k \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i$$



Dit levert tenslotte het stelsel integraalvergelijkingen:

$$\sum_{i=1}^n u_i \left[ \int_{\Omega} (\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i) d\sigma + \int_{\cup \Omega_3} \gamma \varphi_k \varphi_i ds \right] =$$
$$\int_{\Omega} f_i \varphi_k ds + \int_{\cup \Omega_2} h_i \varphi_k ds + \int_{\cup \Omega_3} k_i \varphi_k ds$$

$k=1, \dots, n$

Deze vergelijking is identiek aan de vergelijking afgeleid in appendix 2. De 2<sup>e</sup> vergelijking van 2.26 kan analoog worden gediscretiseerd.

---

appendix 4: galerkin- en matrixvergelijking bij de directe methode.

Partieel integreren van vgl. (3.10) (Green, zie appendix 3) geeft:

$$\begin{cases} \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, d\sigma - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) w \, ds - \int_{\Omega} p \frac{\partial w}{\partial x} \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} p w n_x \, ds = 0 \\ \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, d\sigma - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) w \, ds - \int_{\Omega} p \frac{\partial w}{\partial y} \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} p w n_y \, ds = 0 \\ \int_{\Omega} -r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \, d\sigma = 0 \end{cases}$$

met:  $\vec{u} = \vec{q}$  voor  $\vec{x} \in \partial\Omega_{1,2,4}$

$$v = 0 \wedge \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \wedge p = 0 \text{ voor } \vec{x} \in \partial\Omega_3 \quad (\text{A4.1})$$

De continuïteitsvergelijking is hier met  $-1$  vermenigvuldigd, hetgeen straks een bepaalde symmetrie in de matrixvergelijking geeft.

In deze vergelijking vallen randintegralen over  $\partial\Omega_{1,2,4}$  weg vanwege Dirichlet randvoorwaarden. Op  $\partial\Omega_3$  geldt  $v = 0$ ,  $p = 0$ ,  $n_x = 1$ ,  $n_y = 0$  en  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . Substitutie hiervan in de randintegralen over  $\partial\Omega_3$  ( $\int_{\partial\Omega} ds = \int_{\partial\Omega_{1,2,4}} ds + \int_{\partial\Omega_3} ds$ ) levert voor alle in vgl. (A4.1) voorkomende randintegralen nul. Na substitutie van de benaderingsfuncties  $u_b$ ,  $v_b$  en  $p_b$  volgens de Galerkinvergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u_b \, d\sigma - \int_{\Omega} p_b \frac{\partial w}{\partial x} \, d\sigma = 0 \\ \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v_b \, d\sigma - \int_{\Omega} p_b \frac{\partial w}{\partial y} \, d\sigma = 0 \\ - \int_{\Omega} r \, \text{div } \vec{u}_b \, d\sigma = 0 \end{cases} \quad (\text{A4.2})$$

Substitutie van (3.11) en (3.13) in (A4.2) levert:

$$\begin{cases} \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \left( \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i \right) d\sigma - \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^m p_i \varphi_i \right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} d\sigma = 0 & k=1, \dots, n \\ \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \left( \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i \right) d\sigma - \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^m p_i \varphi_i \right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} d\sigma = 0 & k=1, \dots, n \\ - \int_{\Omega} \varphi_k \left( \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) d\sigma = 0 & k=1, \dots, m \end{cases}$$

ofwel

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i \left[ \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i d\sigma \right] + \sum_{i=1}^n v_i [0] &+ \sum_{i=1}^m p_i \left[ - \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} d\sigma \right] = 0 && k=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n u_i [0] + \sum_{i=1}^n v_i \left[ \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i d\sigma \right] + \sum_{i=1}^m p_i \left[ - \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} d\sigma \right] &= 0 && k=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n u_i \left[ - \int_{\Omega} \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\sigma \right] + \sum_{i=1}^n v_i \left[ - \int_{\Omega} \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} d\sigma \right] + \sum_{i=1}^m p_i [0] &= 0 && k=1, \dots, m \end{aligned}$$

zodat geldt:

$$S^D \hat{u} = \underline{0}$$

met:

$$S^D = \begin{bmatrix} S^{uu} & 0 & S^{up} \\ 0 & S^{vv} & S^{vp} \\ S^{pu} & S^{pv} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{en } S_{ik}^{uu} &= S_{ik}^{vv} = \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_k d\sigma && n \times n \text{ matrix} \\ S_{ik}^{up} &= S_{ki}^{pu} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_k d\sigma && n \times m \text{ matrix} \\ S_{ik}^{vp} &= S_{ki}^{pv} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \varphi_k d\sigma && n \times m \text{ matrix} \end{aligned}$$

$$\text{en } \hat{u} = [u, v, p]$$

appendix 5: discretisatie van de convectieve term.

Toepassing van Galerkin op de convectieve term vgl. (3.16) door vermenigvuldiging met testfunctie  $\vec{w}$  en substitutie van  $\vec{u}_b^I$  en  $\vec{u}_b^{I-1}$  levert de Galerkinvergelijking:

$$\int_{\Omega} \left\{ (\vec{u}_b^I \cdot \nabla) \vec{u}_b^{I-1} + (\vec{u}_b^{I-1} \cdot \nabla) \vec{u}_b^I - (\vec{u}_b^{I-1} \cdot \nabla) \vec{u}_b^{I-1} \right\} \cdot \vec{w} \, d\sigma$$

ofwel na substitutie van:

$$\vec{w} = (w, w) \text{ en } w = \varphi_k$$

$$\text{en} \\ u_b^I = \sum_{i=1}^n u_i^I \varphi_i \text{ en } v_b^I = \sum_{i=1}^n v_i^I \varphi_i$$

$$\left\{ \int_{\Omega} \left\{ \left( \sum_{i=1}^n u_i^I \varphi_i \right) \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + \left( \sum_{i=1}^n v_i^I \varphi_i \right) \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} + u_b^{I-1} \left( \sum_{i=1}^n u_i^I \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + v_b^{I-1} \left( \sum_{i=1}^n u_i^I \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) - u_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} - v_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} \right\} \varphi_k \, d\sigma \quad k=1, \dots, n \right. \\ \left. \int_{\Omega} \left\{ \left( \sum_{i=1}^n u_i^I \varphi_i \right) \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} + \left( \sum_{i=1}^n v_i^I \varphi_i \right) \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} + u_b^{I-1} \left( \sum_{i=1}^n v_i^I \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + v_b^{I-1} \left( \sum_{i=1}^n v_i^I \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) - u_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} - v_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} \right\} \varphi_k \, d\sigma \quad k=1, \dots, n \right.$$

$$\left\{ \text{ofwel:} \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \left[ u_i^I \left\{ \int_{\Omega} \left( \varphi_i \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + u_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \varphi_k \, d\sigma \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + v_i^I \left\{ \int_{\Omega} \left( \varphi_i \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} \right) \varphi_k \, d\sigma \right\} \right] - \int_{\Omega} \left( u_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} \right) \varphi_k \, d\sigma \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \left[ u_i^I \left\{ \int_{\Omega} \left( \varphi_i \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} \right) \varphi_k \, d\sigma \right\} + v_i^I \left\{ \int_{\Omega} \left( \varphi_i \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} + u_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \varphi_k \, d\sigma \right\} \right] + \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \left( u_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} \right) \varphi_k \, d\sigma \quad k=1, \dots, n \right.$$

In matrixvorm is dit:

$$\begin{bmatrix} N^{uu} & N^{uv} & 0 \\ N^{vu} & N^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^I \\ v^I \\ p^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^u \\ f^v \\ 0 \end{bmatrix}$$

met:

$$N_{ik}^{uu} = \int_{\Omega} \left( \varphi_k \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + u_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) \varphi_i d\sigma$$

$$N_{ik}^{vv} = \int_{\Omega} \left( \varphi_k \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} + u_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) \varphi_i d\sigma$$

$$N_{ik}^{uv} = \int_{\Omega} \left( \varphi_k \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} \right) \varphi_i d\sigma$$

$$N_{ik}^{vu} = \int_{\Omega} \left( \varphi_k \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} \right) \varphi_i d\sigma$$

$$f_k^u = \int_{\Omega} \left( u_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial u_b^{I-1}}{\partial y} \right) \varphi_k d\sigma$$

$$f_k^v = \int_{\Omega} \left( u_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial x} + v_b^{I-1} \frac{\partial v_b^{I-1}}{\partial y} \right) \varphi_k d\sigma$$


---

appendix 6: basisfuncties van het Crouzeix-Raviart element.

Teneinde de basisfuncties te bepalen voor het Crouzeix-Raviart element, worden de barycentrische coördinaten  $\lambda_i(\vec{x})$  ingevoerd volgens:

$\lambda_i(\vec{x}) =$  lineair in het element  $i = 1, 2, 3$

$\lambda_i(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$   $i, j = 1, 2, 3$

(zie fig A6.1)

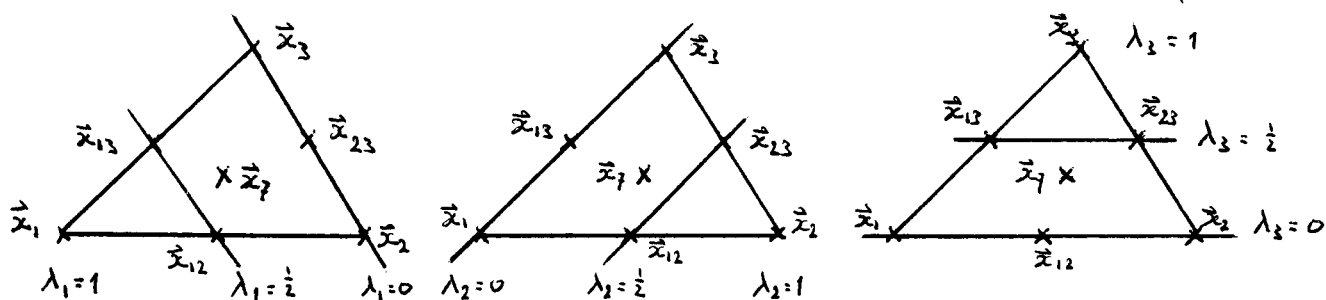


fig A.61: de barycentrische coördinaten.

De basisfuncties worden nu uitgedrukt in de functies  $\lambda_i(\vec{x})$   
 De constructie hiervan wordt toegelicht aan de hand van  $\varphi_1(\vec{x})$ .

Voor de basisfunctie  $\varphi_1$  is geëist:  $\varphi_1 = 1$  in  $\vec{x}_1$  en  $\varphi_1 = 0$  in alle andere basispunten.

De lijn door  $\vec{x}_2, \vec{x}_{23}$  en  $\vec{x}_3$  wordt gegeven door  $\lambda_1 = 0$

De lijn door  $\vec{x}_{13}$  en  $\vec{x}_{12}$  wordt gegeven door  $2\lambda_1 - 1 = 0$

De 3<sup>e</sup>-graads term in  $\varphi_i(\vec{x})$  mag geen voorkeur geven aan een bepaald basispunt en wordt dus gegeven door  $A\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

Voor  $\varphi_i(\vec{x})$  geldt dus:

$$\varphi_i(\vec{x}) = \lambda_i(2\lambda_i - 1) + A\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Daar eveneens moet gelden:  $\varphi_i(\vec{x}_7) = 0$ , geldt  $A = 3$   
immers  $\lambda_i(\vec{x}_7) = \frac{1}{3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Algemeen geldt:

$$\varphi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1) - 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad i = 1, 2, 3$$

Op analoge wijze is aan te tonen dat geldt:

$$\varphi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j - 12\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad 1 \leq i \leq j \leq 3$$

$$\varphi_7 = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

---

appendix 7: eliminatie van de parameters  $u_7, v_7, \frac{\partial p}{\partial x} |_{\vec{x}_7}$  en  $\frac{\partial p}{\partial y} |_{\vec{x}_7}$  bij het Crouzeix-Raviart element.

De benaderingsfuncties voor de snelheid en de druk luiden in eerste instantie:

$$u_b = \sum_{i=1}^7 u_i \varphi_i \quad v_b = \sum_{i=1}^7 v_i \varphi_i \quad p_b = \sum_{i=1}^3 a_i \psi_i$$

$$\left. \begin{aligned} \text{met } a_1 = p(\vec{x}_7), a_2 = \frac{\partial p}{\partial x} |_{\vec{x}_7} \text{ en } a_3 = \frac{\partial p}{\partial y} |_{\vec{x}_7} \\ \psi_1 = 1, \psi_2 = (x - x_7), \psi_3 = (y - y_7) \end{aligned} \right\} \text{(zie 3.23)} \quad (A7.1)$$

De Galerkin vergelijking voor de continuïteitsvergelijking op elementniveau luidt (zie 3.12):

$$\int_e \psi_k \operatorname{div} \vec{u}_b \, d\sigma = 0 \quad k=1,2,3 \quad (A7.2)$$

Voor  $k=1$  geldt dan  $\int_e \operatorname{div} \vec{u}_b \, d\sigma = 0$

Voor  $k=2$ :

$$\int_e (x - x_7) \left( \frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} \right) d\sigma = 0 \quad \text{immers } \psi_2 = (x - x_7)$$

Na partieel integreren (zie appendix 3) geeft dit:

$$-\int_e u_b \, d\sigma + \int_{\partial e} (x - x_7) (u_b n_x + v_b n_y) \, ds = 0$$

Substitutie van  $u_b = \sum_{i=1}^7 u_i \varphi_i$  en  $v_b = \sum_{i=1}^7 v_i \varphi_i$  levert

$$\sum_{i=1}^7 \left\{ \int_{\partial e} (x - x_7) (u_i \varphi_i n_x + v_i \varphi_i n_y) \, ds \right\} - \sum_{i=1}^7 \left\{ \int_e u_i \varphi_i \, d\sigma \right\} = 0$$



op rand  $\partial e$  geldt  $\varphi_7 = 0$  zodat geldt:

$$\sum_{i=1}^6 \left\{ \int_{\partial e} (x-x_7)(u_i \varphi_i n_x + v_i \varphi_i n_y) ds - \int_e u_i \varphi_i d\sigma \right\} - \int_e u_7 \varphi_7 d\sigma = 0$$

en dus

$$u_7 = \frac{\sum_{i=1}^6 \left\{ \int_{\partial e} (x-x_7)(u_i \varphi_i n_x + v_i \varphi_i n_y) ds - \int_e u_i \varphi_i d\sigma \right\}}{\int_e \varphi_7 d\sigma} \quad (A7.3)$$

analoog geldt voor  $k=3$

$$v_7 = \frac{\sum_{i=1}^6 \left\{ \int_{\partial e} (y-y_7)(u_i \varphi_i n_x + v_i \varphi_i n_y) ds - \int_e v_i \varphi_i d\sigma \right\}}{\int_e \varphi_7 d\sigma} \quad (A7.4)$$

De snelheden  $u_7$  en  $v_7$  zijn dus te schrijven als functies van  $u_1, \dots, u_6$  en  $v_1, \dots, v_6$ . De vergelijkingen met  $\varphi_7$  kunnen dus worden weggelaten en vervangen worden door (A7.3) en (A7.4) (indien men dat nog zou willen)

De continuïteitsvergelijking (A7.2) is nu dus al opgelost voor  $k=1$  en  $k=2$  en hoeft dus voor deze  $k$ 's niet meer te worden meegenomen. De parameters  $u_7$  en  $v_7$  zijn geëlimineerd en kunnen desgewenst nog worden berekend uit (A7.3) en (A7.4). Blijft dus nog over:

6 vergelijkingen voor de snelheid en 1 voor de druk, totaal dus  $2 \times 6 + 1 = 13$  vergelijkingen.

---

appendix 8:

In vergelijking (3.34) wordt het minimaliseringsprobleem gegeven als:

$$\min_{\vec{u}_p} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} |\nabla \vec{u}_p|^2 + \frac{\tau}{2} (\text{div } \vec{u}_p)^2 \right\} d\sigma$$

De Euler-Lagrange vergelijkingen worden dan

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_x} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} |\nabla \vec{u}_p|^2 + \frac{\tau}{2} (\text{div } \vec{u}_p)^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u_y} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} |\nabla \vec{u}_p|^2 + \frac{\tau}{2} (\text{div } \vec{u}_p)^2 \right\} = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v_x} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} |\nabla \vec{u}_p|^2 + \frac{\tau}{2} (\text{div } \vec{u}_p)^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v_y} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} |\nabla \vec{u}_p|^2 + \frac{\tau}{2} (\text{div } \vec{u}_p)^2 \right\} = 0 \end{cases}$$

dit geeft:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \text{div } \vec{u}_p \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \text{div } \vec{u}_p \right\} = 0 \end{cases}$$

ofwel:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_p - \tau \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{u}_p = 0 \\ -\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v_p - \tau \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \vec{u}_p = 0 \end{cases}$$

voor  $\tau \rightarrow \infty$  geldt  $\vec{u}_p \rightarrow \vec{u}$  en dus geldt:

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\tau \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{u}_p = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_p = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\tau \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \vec{u}_p = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v_p = \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

m.a.w.,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (-\tau \text{div } \vec{u}_p) = p$$


---

appendix 9: divergentievrije elementen.

In § 3.3.2.4 is voor het Crouzeix-Raviart element afgeleid dat de continuïteitsvergelijking na eliminatie van de parameters  $\frac{\partial p}{\partial x} |_{\vec{x}_7}$  en  $\frac{\partial p}{\partial y} |_{\vec{x}_7}$  wordt gediscretiseerd met:

$$\int_e \operatorname{div} \vec{u}_b \, d\sigma = 0$$

Partieel integreren (Green) geeft:

$$\int_e \operatorname{div} \vec{u}_b \, d\sigma = \int_{\partial e} \vec{u}_b \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

Litgaande van fig A9.1 kan dit worden geschreven als:

$$\sum_{l=1}^3 \int_{S_l} \vec{u}_b \cdot \vec{n}_l \, ds = 0$$

met  $S_l$  ( $l=1,2,3$ ) de zijden v.h. element.

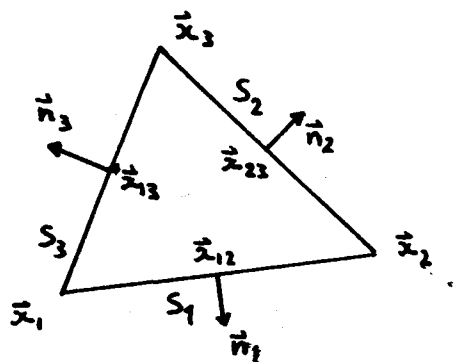


fig A9.1.

Invoeren van de stroomfunctie  $\Psi_i$  in de hoekpunten ( $i=1,2,3$ ) volgt uit:

$$\int_{S_i} \vec{u}_b \cdot \vec{n} \, ds = \Psi_{i+1} - \Psi_i \quad i=1,2,3 \text{ en } \Psi_4 = \Psi_1$$

immers:

$$\begin{aligned}\vec{u}_b \cdot \vec{n} &= \frac{\partial \Psi_b}{\partial y} n_x - \frac{\partial \Psi_b}{\partial x} n_y \\ &= t_y \frac{\partial \Psi_b}{\partial y} + t_x \frac{\partial \Psi_b}{\partial x} \\ &= (\nabla \Psi_b \cdot \vec{t})\end{aligned}$$

met  $(t_x, t_y) = (-n_y, n_x)$  = eenheidsvector in tangentiële richting.

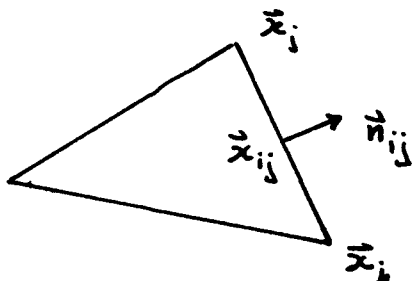
dan geldt dus:

$$\int_{S_i} \vec{u}_b \cdot \vec{n} ds = \int_{S_i} (\nabla \Psi_b \cdot \vec{t}) dt = \Psi_{i+1} - \Psi_i$$

Door introductie van  $\Psi_i$  ( $i=1,2,3$ ) wordt dus per element voldaan aan  $\int \text{div} \vec{u}_b = 0$ .  $\Psi_i$  is op een constante na bepaald en zal dus ergens moeten worden gegeven (meestal 0 op een rand). De normaalcomponenten van de snelheid in de middens van de zijden kunnen worden geëlimineerd door vgl. (A9.1) te benaderen met de Simpsonregel (Veltkamp en Geurts; 1979):

$$\Psi_{jb} - \Psi_{ib} = \frac{L_{ij}}{6} \left\{ \vec{u}_b(\vec{x}_i) \cdot \vec{n}_{ij} + 4 \vec{u}_b(\vec{x}_{ij}) \cdot \vec{n}_{ij} + \vec{u}_b(\vec{x}_j) \cdot \vec{n}_{ij} \right\}$$

met  $L_{ij}$  de lengte van de zijde en  $\vec{x}_{ij}$  en  $\vec{n}_{ij}$  gegeven zoals in fig. A9.2



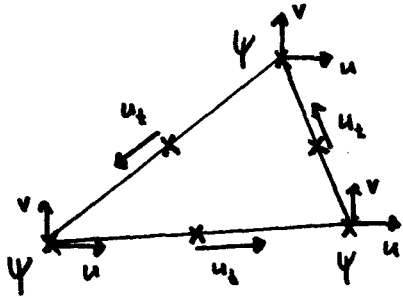
$$L_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$$

$$\vec{n}_{ij}^T = (y_j - y_i, x_i - x_j)$$

m.a.w.:

$$\vec{u}_b \cdot \vec{n}_{ij}(\vec{x}_{ij}) = \frac{6}{4L_{ij}} [\Psi_{jb} - \Psi_{ib}] - \frac{1}{4} [\vec{u}(\vec{x}_i) \cdot \vec{n}_{ij} + \vec{u}(\vec{x}_j) \cdot \vec{n}_{ij}]$$

Er blijft dan na eliminatie van  $\vec{u}_b \cdot \vec{n}_{ij}$  een element over met onbekenden zoals in fig. 9.3. is gegeven



De normaalcomponenten van de snelheid in de middens van de zijden zijn dus getransformeerd naar stroomfuncties in de hoekpunten. In matrixnotatie:

$$\vec{u}_e = R \vec{u}_{de}$$

met  $\vec{u}_e = [u_1, \dots, u_6, v_1, \dots, v_6]$

$$\vec{u}_{de} = [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, u_{12}, u_{13}, u_{23}]$$

In hoeverre de nu ontstane basisfuncties inderdaad divergentievrij zijn is hier niet nagegaan. (zie hiervoor Griffiths, 1979).



Literatuur:

-Assenberg D.:

"Numerieke oplossing van de stationaire Navier-Stokes-vergelijkingen m.b.v. de eindige elementen methode."

T.H.Delft rapport (1980)

-Baker A.J. :

"Finite element solution algorithm for incompressible fluid dynamics".

In: Gallagher<sup>1</sup>e.a.; (1975)

-Batchelor G.K. :

"An introduction to fluid dynamics".

Cambridge university press (1967).

-Bharadvaj B.K., Mabon R.F. en Giddens D.P.:

"Steady flow in a model of the human carotid bifurcation part 1: Flowvisualisation".

J.Biomech. 15 p349-362 (1982).

-Brekelmans W.A.M. :

"Energieprincipes en sterkteleer" (dictaat Fysica 40).

T.H.Eindhoven, onderafdeling der werktuigbouw (TM) (1981)

-Cheng R.T.:

"Numerical solution of the Navier-Stokes equations by the finite element method".

Physics of Fluids, 15, p2098-2105 (1972).

-Cramer R.K. :

"On the laminair separation bubbles".

J. of Aeronautical Sciences, 25, p143-144 (1958).

-Cuvelier C., Praagman N. en Segal A.:

"A survey of the finite element methods in fluid mechanics".

Report Delft university of technology NA-26 (1979)

-Denham M.K. en Patrick M.A. :

"Laminair flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel".

Trans. Inst. Chem. Engrs., 52, p361-367 (1974)

-Dhatt G. :

"Different finite element formulations for the Navier-Stokes equations".

in: "Numerical methods in laminair and turbulent flow".

editors: Taylor C. e.a. Pineridge press, Swansea U.K. (1981).

- Gallagher R.H. e.a. :
1. "Finite elements in fluids". Vol.1, Wiley, London, (1975)
  2. "Finite elements in fluids". Vol.2, Wiley, London, (1975)
  3. "Finite elements in fluids". Vol.3, Wiley, London, (1978).
- Gartling D.K., Nickell R.E. en Tanner R.I.:
- "A finite element convergence study for accelerating flow problems".  
Int.J.Num.Meth.Eng., 11, p1155-1174 (1977).
- Goldstein R.J. e.a. :
- "Laminar separation, reattachment, and transition of the flow over a downstream-facing step."  
J.Basic.Eng, 92, (ASME) (1970)
- Griffiths D.F.:
- "Finite elements for incompressible flow".  
Math.Meth.in the Appl.Sci., 1, p16-31 (1979)
- Hughes T.J.R., Taylor R.L. en Levy J.F.:
- "High Reynolds number, steady, incompressible flows by a finite element method".  
in: Gallagher<sup>3</sup> e.a. (1978) p55-72
- Hunt B.:
- "Numerical methods in applied fluid dynamics"  
Academic press (1980).
- Hutton A.G.:
- "Incompressible viscous flow modeling by the method of finite elements".  
in: Hunt (1980)
- Kan J. van en Segal A.:
- "Numerieke analyse CII/BIII" (dictaat).  
T.H.Delft, onderafdeling der wiskunde (1980)
- Neven J.H.M.:
- "Een analyse van de toepassingsmogelijkheden van een laser-doppler snelheidsmeter in een kanaalstroming".  
afstudeerverslag T.H.Eindhoven interafdelingsproject "Atherosclerose". (1982)
- Nuijten P.:
- "Analyse van de doppler-frequentietrackers van TPD en DISA".  
stageverslag T.H.Eindhoven interafdelingsproject "Atherosclerose". (1982).

-Olson M.D.:

"Variational finite element methods for two-dimensional an axisymmetric Navier-Stokes equations".

in: Gallagher<sup>1</sup>e.a.(1975).

-Segal A.:

"On the numerical solution of the Stokes equations using the finite element method."

Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.,19,p165-185 (1979).

-Segal<sup>1</sup> A.:

"Numerical solution of the Navier Stokes equations by means of the finite element method."Part 1

reports of the department of mathematics and informatics no.

81-19,Delft(1981).

-Segal<sup>2</sup> A.:

"AFEP user manual" (1981)

-Smulder P.T. en Schram P.P.J.M.:

"Fysische transportverschijnselen"(dictaat)

T.H.Eindhoven,onderafdeling der technische natuurkunde (1978)

-Taylor C. en Hood P.:

"A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique".

Comp.&Fluids,Vol.1 p73-100 Pergamon press (1973).

-Temam R.:

"Navier-Stokes equations".

North-Holland Publishing Comp. A'dam (1977).

-Vaessen E. en van Duppen T.:

"Het driedimensionale model van de aorta-klep".

rapport interafdelingsproject "Hartkleprothesen".T.H.E.(1976)

-Velte W.:

"Direkte Methoden der Variationsrechnung".

Teubner Studiënbücher,Band 26,Stuttgart,p19-22 (1976)

-Veltkamp G.W. en Geurts A.J.:

"Numerieke methode I en II"(dictaat)

T.H.Eindhoven,onderafdeling der wiskunde (1980)

-TPD:

"Fotodiode detector type 731"

tecnisch bulletin nr.6



met dank aan: Anton van Steenhoven  
Fons Sauren  
Rini van Dongen  
Jacques Cauwenberg  
Jos Corver