

## MASTER

### Schattingsmethoden ter bepaling van de orde van lineaire diskrete processen in het interactieve programmapakket SATER

Koenraads, A.J.T.M.

*Award date:*  
1978

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK  
TECHNISCHE HOGESCHOOL  
EINDHOVEN  
Groep Meten en Regelen

SCHATTINGSMETHODEN TER BEPALING VAN  
DE ORDE VAN LINEAIRE DISKRETE  
PROCESSEN IN HET INTERAKTIEVE  
PROGRAMMAPAKKET SATER  
door A. Koenraads

Rapport van het afstudeerwerk  
uitgevoerd van februari 1977 tot januari 1978.  
in opdracht van Prof. Dr. Ir. P. Eykhoff  
onder leiding van Ir. A.J.W. v.d. Boom  
kontaktpersoon met afd. NATUURKUNDE : Prof. Ir. O. Rademaker.

### SAMENVATTING

In de meeste parameterschattings methoden wordt voorkennis verondersteld t.a.v. de orde van het te bestuderen proces.

In veel praktijksituaties is deze informatie niet aanwezig. Daarom is ordeschatting noodzakelijk.

In dit verslag wordt een beschrijving gegeven van enkele bekende ordeschattingsmethoden. Een aantal simulaties van het Aström-proces voor verschillende signaal/ruis-verhoudingen worden besproken ten einde de verschillende methoden onderling te kunnen vergelijken. Een betrouwbare bepaling van de proces- en ruisorde is mogelijk, zelfs tot signaal/ruis-verhoudingen tot -15.7 dB. Enkele beschreven methoden worden gebruikt voor ordebepaling aan experimentele samplereeksen.

### SUMMARY

In most parameter estimation schemes the order of the process under study is assumed to be known a priori. In many practical situations this information is lacking. So determination of the order is needed.

In this report a description is given of some known ordertests. A number of simulations of the Aström-process for different signal/noise-ratios is presented in order to compare the different methods. An acceptable determination of the process- and noiseorder is possible, even for signal/noise-ratios at the processoutput of -15.7 dB. Some described methods are used for orderdetermination on experimental sample sequences.

INHOUDSOPGAVE

blz.

1. <u>Inleiding</u>	4
2. <u>Korte beschrijving van enkele recursieve parameterschattingsmethoden</u>	5
2.1 Modelstructuren	7
2.2 Ruismodellen	9
2.3 Kleinste Kwadraten Methode (Least Squares)	9
2.4 Extended matrix methode (EMM)	12
3. <u>Bepaling van de orde van een proces</u>	14
3.1 Gedrag van de foutfunctie	14
3.1.1 De foutfuncties $V_1$ en $V_2$	14
3.1.2 Witheidstest	18
3.1.3 Test op normaalverdeling van $\hat{e}(k)$	19
3.1.4 Test op signaalfouten	21
3.2 Het gedrag van de determinant van de signaalwaardenmatrix	22
3.2.1 De determinant $Q^*$	23
3.2.2 De determinant $C_{11}$ en $C_{22}$	24
3.2.3 Berekening van $V_1$ m.b.v. de signaalwaardenmatrix	25
3.3 Het gedrag van de overdrachtsfunctie	27
3.3.1 Bepaling van gemeenschappelijke factoren	27
4. <u>Implementatie van ordeschattingsprogramma's in SATER</u>	29
4.1 SATER, een interactief programmapakket	29
4.2 Ontwikkeling van ordeschattings algoritmen	30
4.3 Strukturele opbouw van de programmatuur voor de ordeschattings methoden	31
5. <u>Resultaten verkregen met beschreven ordeschattingsmethoden</u>	34
5.1 Resultaten, m.b.v. een gesimuleerd proces verkregen	34
5.2 Ordeschatting aan een praktijk-samplereeks	37
5.3 Vergelijking der methoden	38
6. <u>Konklusie</u>	38
7. <u>Literatuur</u>	39
8. <u>Bijlagen</u>	40

## 1. INLEIDING.

Een van de wensen in het projekt SATER (Systeem Analyse Technieken, vakgroep ER) was het implementeren van een aantal ordeschattings algoritmen en het opdoen van praktische ervaring daarmee in dit interactief programmapakket.

Omdat de meeste bekende parameterschattings methoden gebaseerd zijn op a priori-kennis ten aanzien van de juiste te kiezen orde van het proces- en ruismodel, moeten we deze eerst extraheren uit de beschikbare in- en uitgangs samples van het te identificeren tijdinvariante lineaire discrete proces (een ingang, een uitgang).

Deze eerste stap in dit identificatieproces heet ordetest, en geeft informatie t.a.v. het meest waarschijnlijke aantal karakteristieke parameters, welke het onbekende proces 'zo getrouw mogelijk' beschrijven, gegeven de beschikbare samples.

Veel aandacht is besteed aan de grafische presentatie van de resultaten, dit uit gebruikers oogpunt vanwege het interactieve karakter van het pakket. Daarnaast zijn alle methoden grondig uitgetest m.b.v. gesimuleerde processen en praktijksituaties, teneinde ervaring op te doen t.a.v. het kiezen van de juiste methode (of combinatie van methoden) in een gegeven situatie. Gesimuleerde sample-paren werden gegenereerd m.b.v. SATER, praktijk-samplereeksen werden betrokken van de afdeling der Psychologie van de Katholieke Hogeschool Tilburg. Het betreft hier meetgegevens van proefpersonen.

De verschillende methoden zijn op verschillende punten aan een vergelijkend onderzoek onderworpen. Voor elke methode wordt aangegeven onder welke condities hiervan betrouwbare resultaten verwacht mogen worden.

Tevens is getracht een gebruikershandleiding te schrijven, waarmee onervaren ordeschatters zo goed mogelijk wegwijs worden gemaakt in deze veelzijdige materie.

2. KORTE BESCHRIJVING VAN ENKELE RECURSIEVE PARAMETERSCHATTINGS METHODEN

De schattingsmethoden die behandeld zullen worden, gaan uit van lineaire tijdinvariante discrete processen.

De relatie tussen het uitgangssignaal  $x(k)$  en het ingangssignaal  $u(k)$  kan beschreven worden door de volgende differentie-vergelijking:

$$x(k) = \sum_{i=0}^P b(i) \cdot u(k-i) - \sum_{i=1}^q a(i) \cdot x(k-i) \quad (2.1)$$

Het uitgangssignaal wordt verstoord door het additieve ruissignaal  $n(k)$  met  $E[n(k)] = 0$  en  $n(k)$  onafhankelijk van  $u(k)$ , zodat

$$y(k) = x(k) + n(k) \quad (2.2)$$

met  $y(k)$  het waarneembare gestoorde uitgangssignaal van het proces. (zie fig. 2.1)

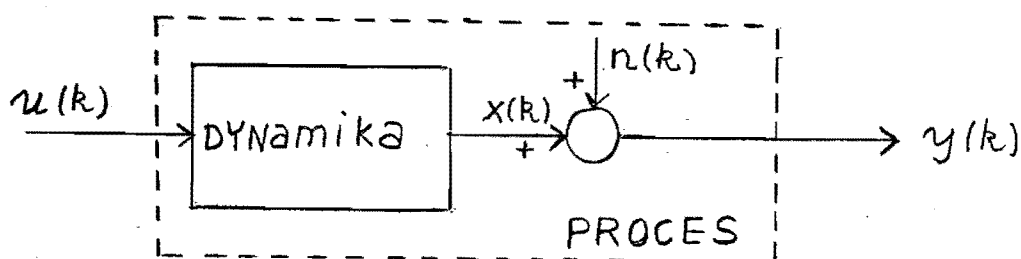


fig 2.1 : Voorstelling van het additief verstoorde proces

Kombinatie van (2.1) met (2.2) geeft het verband tussen het gestoorde uitgangssignaal  $y(k)$  en het ingangssignaal  $u(k)$  :

$$y(k) = \sum_{i=0}^P b(i) \cdot u(k-i) - \sum_{i=1}^q a(i) \cdot y(k-i) + e(k) \quad (2.3)$$

met equation error :  $e(k) = n(k) + \sum_{i=1}^q a(i) \cdot n(k-i)$  (2.4)

en waarin:  $p+1$  = aantal voorwaartse parameters

$q$  = aantal terugwaartse parameters (= procesorde)

Nu is het proces voor te stellen als in fig. 2.2.

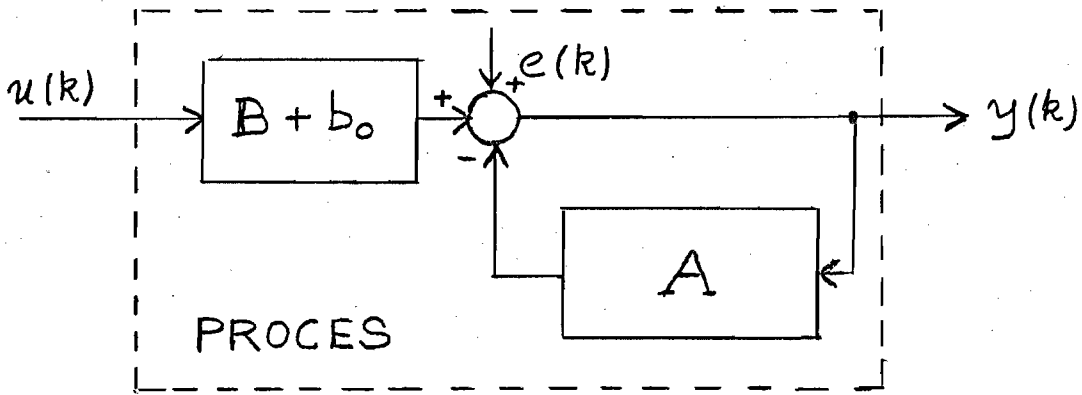


fig. 2.2 : Proces met storing in de vorm van equation error  $e(k)$

Vgl. (2.3) is in vektor-matrix notatie te schrijven als :

$$\underline{y} = \underline{\Omega}(u, y) \cdot \underline{\theta} + \underline{e} \quad (2.5)$$

- met output vektor :  $\underline{y}^T = \{y(k), \dots, y(2), y(1)\}$
- parameter vektor :  $\underline{\theta}^T = \{a(1), \dots, a(q), b(0), \dots, b(p)\}$
- equation error vektor :  $\underline{e}^T = \{e(k), \dots, e(2), e(1)\}$

en  $\underline{\Omega}(u, y) = [-Y, U]$  ; de signaalwaarden matrix:

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} -y(k-1) \dots -y(k-q), u(k) \dots u(k-p) \\ -y(k-2) \dots -y(k-q-1), u(k-1) \dots u(k-p-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -y(1) \dots, u(2), u(1), \\ 0 \dots, u(1), \dots \end{bmatrix} = [-Y; U]$$

en  $\underline{\theta}^T = \{a(1), a(2), \dots, a(q), b(0), b(1), \dots, b(p)\}$

## 2.1 MODELSTRUKTUREN

Recursief parameterschatten komt neer op het afregelen van een model van het proces op grond van een bepaald foutcriterium.

Welk model we kiezen wordt bepaald door de gekozen schattingsmethode.

Algemeen kunnen we dit als volgt voorstellen (fig. 2.3):

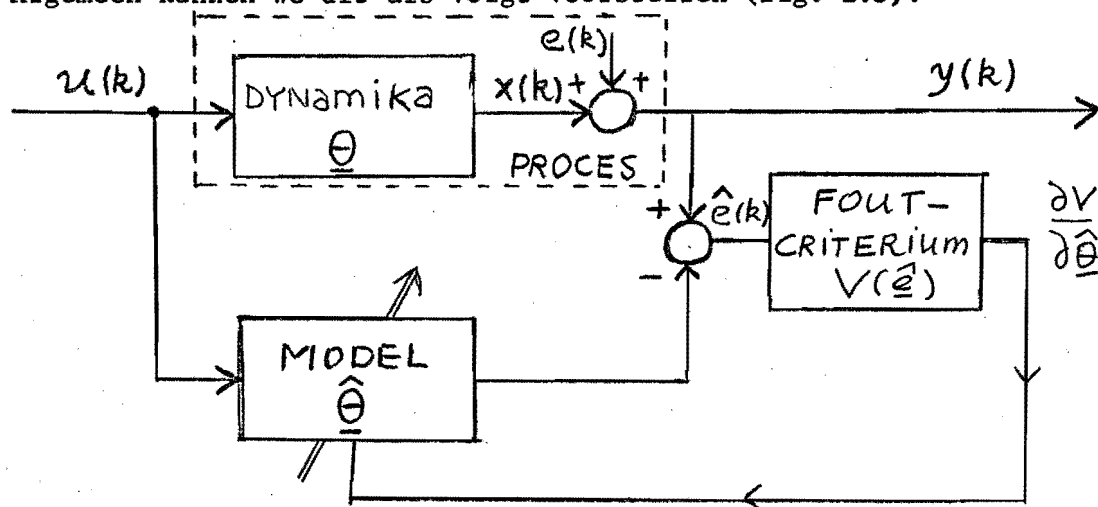


fig. 2.3 : Afregeling der modelparameters

Voor het model kunnen we bv. kiezen uit een der volgende structuren:

- 1) Voorwaarts model (MA: Moving Average model)

$$y(k) = \sum_{i=0}^P b(i) \cdot u(k-i) \quad (2.7)$$

fig. 2.4: Uitgang = gewogen som van oude (en actuele) inputdata  $u(k)$ .

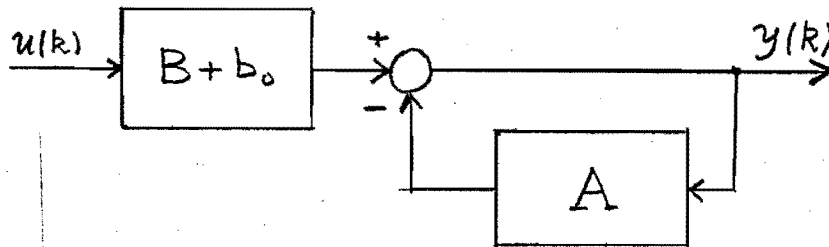
- 2) Terugwaarts model (AR: Auto Regressive model)

$$y(k) = u(k) - \sum_{i=1}^q a(i) \cdot y(k-i) \quad (2.8)$$

fig. 2.5: Uitgang = gewogen som van oude (en actuele) outputdata  $y(k)$  met input  $u(k)$  als verstoring.



3) Gegeneraliseerd model (ARMA: Auto Regressive/Moving Average model)



$$y(k) = \sum_{i=0}^P b(i) \cdot u(k-i) - \sum_{i=1}^q a(i) \cdot y(k-i) \quad (2.9)$$

fig. 2.6 : Gecombineerd voorwaarts-terugwaarts model.

Wat betreft de invloed van de uitgangsruis in het proces kunnen we de volgende modellen onderscheiden:

4) Uitgangsruis  $n(k)$  additief met niet observeerbare uitgang  $x(k)$ .

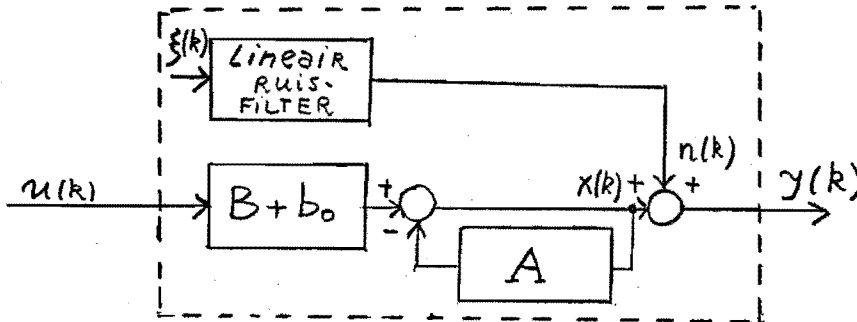


fig. 2.7

$$y(k) = \sum_{i=0}^P b(i) \cdot u(k-i) - \sum_{i=1}^q a(i) \cdot y(k-i) + n(k) \quad (2.10)$$

5) Procesruis voorgesteld d.m.v. de equationerror  $e(k)$ .

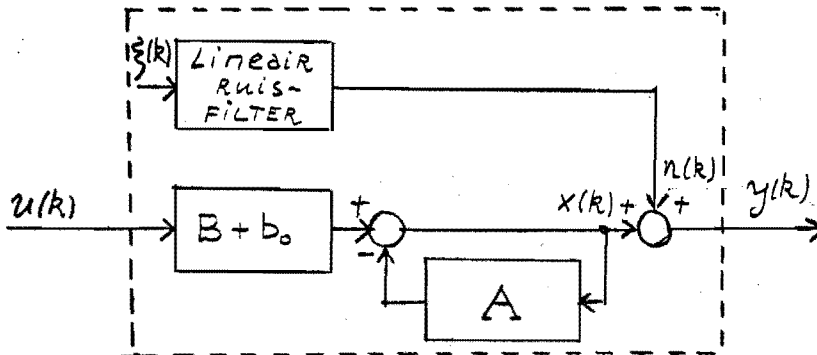


fig. 2.7

$$y(k) = \sum_{i=0}^P b(i) \cdot u(k-i) - \sum_{i=1}^q a(i) \cdot y(k-i) + e(k) \quad (2.11)$$

In bovenstaande modellen 4) en 5) wordt procesruis in rekening gebracht door rep.  $n(k)$  en  $e(k)$ , welke ontstaan gedacht kunnen worden uit witte ruis  $\xi(k)$ , gefilterd door een vormend (ruis-) filter dat lineair, discreet en tijdinvariant is. Verondersteld wordt dat  $\xi(k)$  statistisch onafhankelijk is van de ingang  $u(k)$  d.w.z.  $E[\xi(k) \cdot u(k)] = 0$ .

### Ruis modellen

Als ruismodellen kunnen we weer kiezen uit de hierboven structuren 1), 2) en 3) , met de opmerking dat we de voorwaartse/terugwaartse ruisparameters  $c$ - resp.  $d$ -parameters zullen noemen.

Algemeen ziet het ruismodel er als volgt uit (structuur 3):

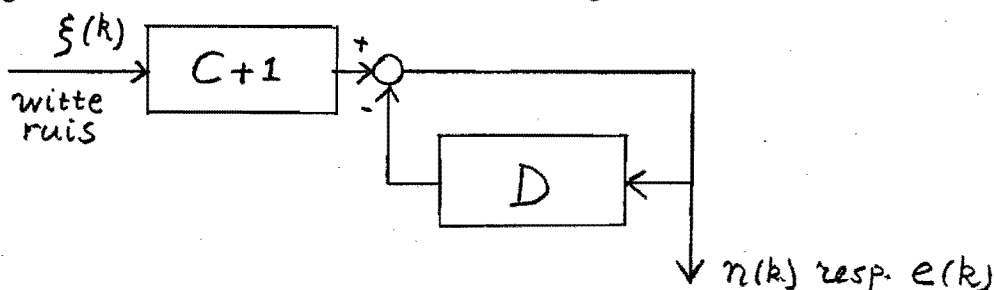


fig. 2.9 : ARMA- ruismodel.

Het verband tussen  $e(k)$  en  $\xi(k)$  wordt beschreven door:

$$e(k) = \xi(k) + \sum_{i=1}^r d(i) \cdot e(k-i) - \sum_{i=1}^s c(i) \cdot \xi(k-i) \quad (2.12)$$

met:  $r$  = aantal terugwaartse ruisparameters (= orde ruismodel)  
 en  $s$  = aantal voorwaartse ruisparameters

### 2.3 KLEINSTE KWADRATEN METHODE (LEAST SQUARES)

Het proces wordt verondersteld de structuur van fig. 2.6 te hebben. De differentie vergelijking luidt:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^q a(i) \cdot y(k-i) + \sum_{i=0}^p b(i) \cdot u(k-i) + e(k) \quad (2.3)$$

In matrix notatie: 
$$\underline{y} = \underline{\Omega} \cdot \underline{b} + \underline{e} \quad (2.13)$$

met als in (2.6), en  $\underline{b}^T = [a(1), \dots, a(q), b(1), b(2), \dots, b(p)]$

Deze methode werd in 1795 ingevoerd door K.F. Gauss voor de berekening van de baanparameters der planeten. Ze moet gezien worden als een fundamentele schattingsmethode, waaruit andere methoden zoals bv. de Extended Matrix methode (hieronder te bespreken) en de Instrumentele Variabele methode zijn afgeleid

Fundamenteel is de minimalisatie van een kwadratische foutfunctie V :

$$V = \frac{1}{N} \underline{\hat{e}}^T \cdot \underline{\hat{e}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{e}^2(k) \quad (2.14)$$

met 
$$\underline{\hat{e}} = \underline{y} - \underline{\Omega} \cdot \underline{\hat{\theta}} \quad (2.15)$$

Differentiëren we V naar  $\underline{\hat{\theta}}$  en stellen we het resultaat gelijk aan 0, dan vinden we de parametervektor  $\underline{\hat{\theta}}$  die V minimaliseert.

$$\nabla_{\underline{\hat{\theta}}} V \equiv \underline{0} \quad (2.16)$$

Hieraan is voldaan wanneer (Eykhoff '74) :  $\underline{y} = \underline{\Omega} \cdot \underline{\hat{\theta}}$  (2.17)

Na links en rechts vermenigvuldigen met  $\underline{\Omega}^T$  en daarna de vierkante matrix  $\underline{\Omega}^T \underline{\Omega}$  inverteren krijgen we een expliciete uitdrukking voor  $\underline{\hat{\theta}}$  :

$$\underline{\hat{\theta}} = [\underline{\Omega}^T(\underline{u}, \underline{y}) \cdot \underline{\Omega}(\underline{u}, \underline{y})]^{-1} \cdot \underline{\Omega}^T(\underline{u}, \underline{y}) \cdot \underline{y} \quad (2.18)$$

Hieruit kunnen we in de praktijk na N samples een schatting berekenen.

We kunnen (2.18) ook in een recursieve vorm schrijven:

$$\underline{\hat{\theta}}(k+1) = \underline{\hat{\theta}}(k) + \frac{P(k) \cdot \underline{\omega}(k+1) \cdot \hat{e}(k+1)}{\rho + \underline{\omega}(k+1) \cdot P(k) \cdot \underline{\omega}(k+1)}$$

waarin:

$$P(k+1) = \frac{1}{\rho} \left[ P(k) - \frac{P(k) \cdot \underline{\omega}(k+1) \cdot \underline{\omega}^T(k+1) \cdot P(k)}{\rho + \underline{\omega}^T(k+1) \cdot P(k) \cdot \underline{\omega}(k+1)} \right] \quad (2.19)$$

met: 
$$\hat{e}(k+1) = y(k+1) - \hat{\theta}^T(k) \underline{\omega}(k+1)$$

$$P(N) = \left[ \sum_{k=1}^N \underline{\omega}(k) \underline{\omega}^T(k) \rho^{N-k} \right]^{-1}$$

Weegfactor:  $\rho$

signaalvektor:  $\underline{\omega}(k+1) = [-y(k), \dots, -y(k-q+1), u(k+1), \dots, u(k-p+1)]^T$

Hiermee verkrijgen we na elke iteratieslag, waarbij een nieuw sample-paar  $[u(k), y(k)]$  bij de schatting wordt betrokken, een geschatte parameter vektor. Dit is gewenst wanneer we op basis hiervan 'on-line' willen regelen. Langzame parameter variaties kunnen zo 'op de voet' worden gevolgd.

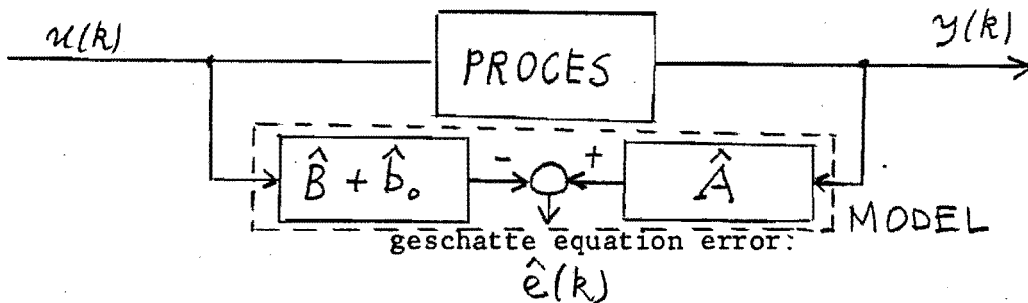


fig. 2.10 : Kleinste Kwadraten schattingsmethode.

De kleinste kwadraten methode geeft alleen dan goede resultaten als  $e$  wit is. Alleen dan geldt:  $\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\theta} - \theta] = 0$ , d.w.z.:  $\hat{\theta}$  is een asymptotisch zuivere schatting voor  $\theta$ , en zal ten opzichte hiervan geen zog. bias vertonen.

Onderdrukking van het optreden van deze bias bij niet-wit zijn van  $e$  wordt bereikt door de schattingsprocedure zo te modelleren dat we een schatting maken van de wit veronderstelde ingang  $\xi$  van een ruisproces. Dit gebeurt bij de in het volgende hoofdstuk te bespreken Extended Matrix methode (EMM).

2.4 EXTENDED MATRIX METHODE

Deze methode is een verfijning van de kleinste kwadraten methode, enwel m.b.t. het veronderstelde ruisproces. We gaan uit van het volgende model:

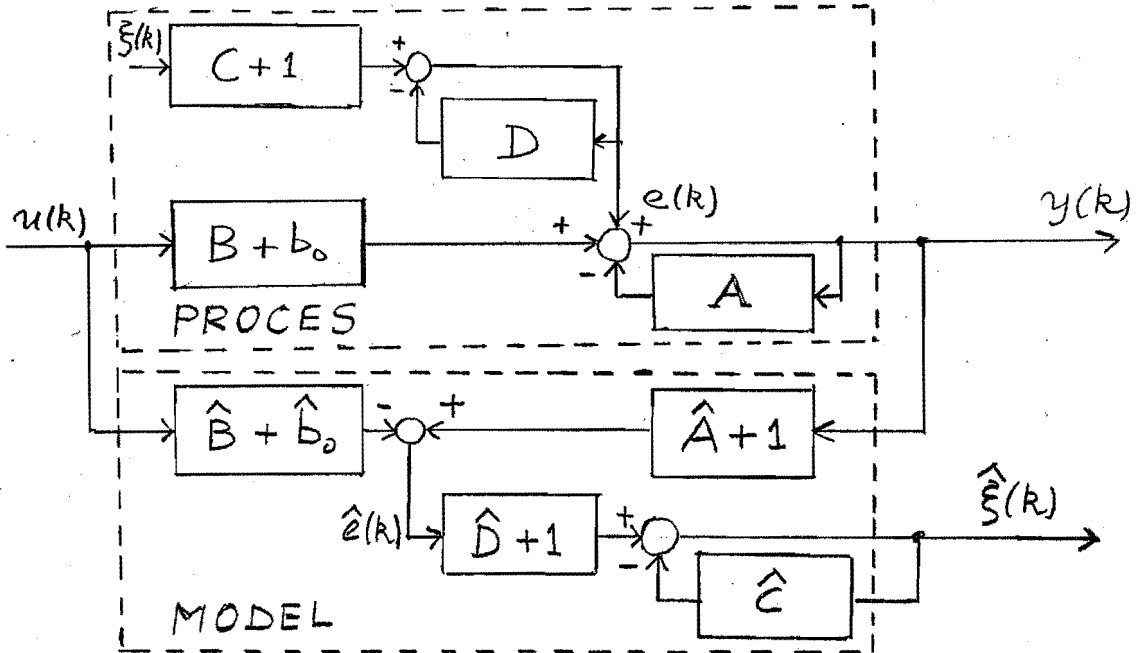


fig. 2.11 : Extended Matrix Methode.

Hierin is  $e(k)$  : equation error

$\xi(k)$  : witte ruis

$\hat{e}(k)$  : geschatte equation error

$\hat{\xi}(k)$  : geschatte witte ruis

We gaan uit van witte ruis  $\xi(k)$ , die door een vormend (tijdinvariant, lineair, discreet) ruisproces wordt gefilterd, en resulteert in de gekleurde equation error  $e(k)$ . Een schatting  $\hat{e}(k)$  van  $e(k)$  verkrijgen we analoog aan de kleinste kwadraten methode (fig.2.10). We trachten nu  $\xi(k)$  te schatten uit  $\hat{e}(k)$  m.b.v. een invers ruisproces. Hiervoor is het dus nodig ook de hierbij behorende ruisparameters (c- en d-) te schatten.

Het ruisproces wordt beschreven door vgl.(2.12). In matrix notatie:

$$e = \xi + \underline{C} \cdot c - \underline{E} \cdot d \tag{2.20}$$

waarin  $\xi$  witte bemonsterde ruis is.



3. BEPALING VAN DE ORDE VAN EEN PROCES

Zoals reeds in de inleiding vermeld, gaan de meeste parameterschatters uit van a priori-kennis t.a.v. de orde van het proces (en evt. die van het ruisfilter). In de praktijk zal deze a priori-kennis meestal niet aanwezig zijn, zodat voorafgaande aan of gecombineerd met een parameterschattingsproces een ordeschatting moet worden uitgevoerd.

Alle ordeschattings methoden berusten op het bepalen van een testgrootheid en op grond van een hieraan gesteld criterium neemt men een beslissing omtrent de orde van het proces (evt. ruisfilter).

Op grond van de gebruikte testgrootheid kan men de ordeschattings methoden onderverdelen in 3 groepen.

- Gedrag van de : 1) foutfunctie
- 2) determinant van de signaalwaarden matrix
- 3) overdrachtsfunctie

als functie van de orde ( $\hat{q}$ ) van het procesmodel.

3.1 Gedrag van de foutfunctie

In 2.2 hebben we gezien dat de kleinste kwadraten methode voor de procesparameters is gebaseerd op de minimalisatie van de functie:

$$V = \frac{1}{N} \underline{e}^T \underline{e} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \tag{3.1}$$

Uit (2.5) volgt:  $\underline{e} = \underline{y} - \Omega(u, y) \cdot \underline{\theta}$

In de praktijk zijn slechts schattingen  $\hat{\underline{e}}$  van  $\underline{e}$  en  $\hat{\underline{\xi}}$  van  $\underline{\xi}$  beschikbaar

met: 
$$\hat{\underline{e}} = \underline{y} - \Omega(u, y) \cdot \hat{\underline{\theta}} \tag{3.2}$$

Daarom bestuderen we het gedrag van :  $V_1 = \frac{1}{N} \hat{\underline{e}}^T \hat{\underline{e}}$

als functie van de orde  $\hat{q}$  van het procesmodel.

3.1.1. De foutfuncties V1 en V2

We schatten de parameters van het proces m.b.v. een model van de orde  $\hat{q}$ . Hiervoor wordt de EMM recursieve schattingsmethode gebruikt, die (van Megen 1977, p.10) bij juiste  $\hat{q}$  een zuivere schatting  $\hat{\underline{\theta}}$  van  $\underline{\theta}$  levert. Gedurende deze schatting wordt  $V1 = \frac{1}{N} \hat{\underline{e}}^T \hat{\underline{e}}$  berekend.

Bestuderen we nu  $V_1$  als functie van  $\hat{q}$ .

$$\text{Kijk naar : } \underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} (V_1) = \underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} \left( \frac{1}{N} \hat{\underline{e}}^T \hat{\underline{e}} \right) \quad (3.3)$$

$$\text{met } \hat{\underline{e}} = \underbrace{y - \Omega^*(u, y)}_{\text{modeluitgang}} \cdot \hat{\underline{\theta}} = \Omega(u, y) \cdot \underline{\theta} - \Omega^*(u, y) \hat{\underline{\theta}} + \underline{e} \triangleq \underline{m} + \underline{e} \quad (3.4)$$

Hieruit volgt:

$$V_1 = \frac{1}{N} \hat{\underline{e}}^T \hat{\underline{e}} = \frac{1}{N} \left\{ \underline{m}^T \underline{m} + 2 \underline{b}^T \cdot \Omega^T(u, y) \underline{e} - 2 \hat{\underline{\theta}}^T \cdot \Omega^*(u, y) \underline{e} + \underline{e}^T \underline{e} \right\} \quad (3.5)$$

Stel  $\underline{e}$  = witte ruis, onafhankelijk van  $\underline{u}$  en  $\underline{x}$ . Voor de waarschijnlijkheidslimiet van  $V_1$  geldt nu het volgende: (v.d. Boom, v.d. Enden 1973)

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} (V_1) = \underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} \left( \frac{1}{N} \underline{m}^T \underline{m} \right) + \underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} \left( \frac{1}{N} \underline{e}^T \underline{e} \right) \quad (3.6)$$

Beschouwen we nu de eerste term aan de rechterkant. Daartoe bekijken we eerst de asymptotische eigenschappen van de schatting  $\hat{\underline{\theta}}$  als functie van  $\hat{q}$ . Hiervoor geldt:

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} (\beta_i) = \begin{cases} \neq b_i & \text{als } \hat{q} < q \\ = b_i & \text{als } \hat{q} = q \\ = b_i & \text{als } i \leq q \\ = 0 & \text{als } i > q \end{cases} \text{ als } \hat{q} > q \quad (3.7)$$

en analoog voor de  $\alpha(i)$ -parameters.

Dit brengt ons tot:

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} \left( \frac{1}{N} \underline{m}^T \underline{m} \right) = \begin{cases} > 0 & \text{voor } \hat{q} < q \\ = 0 & \text{voor } \hat{q} \geq q \end{cases} \quad (3.8)$$

Dit geeft:

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}} \left( V_1 - \frac{1}{N} \underline{e}^T \underline{e} \right) = \begin{cases} > 0 & \text{voor } \hat{q} < q \\ = 0 & \text{voor } \hat{q} \geq q \end{cases} \quad (3.9)$$

Dientengevolge verandert het gedrag van de foutfunctie  $V_1$  significant in de omgeving van  $q$ . (zie fig. 3.1 : curve a)

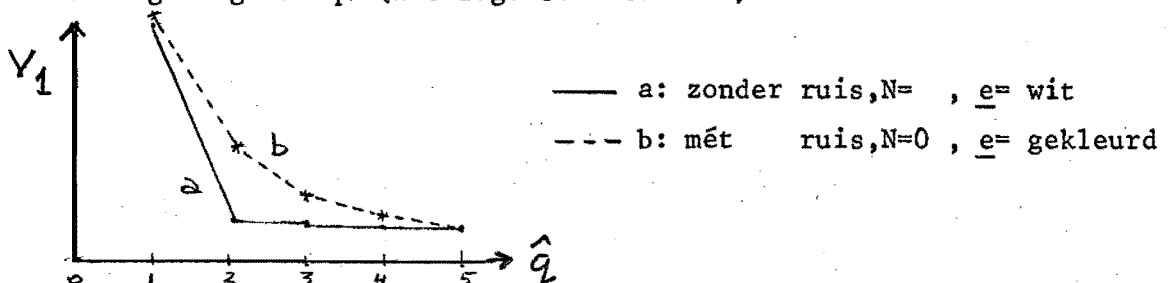


fig 3.1 :  $V_1$  als functie van  $\hat{q}$ .



In de praktijk hebben we te maken met eindige samplereeksen, met een equationerror die niet wit is en met schattingen  $\hat{e}$  voor  $e$ .

Daarom zal het gedrag van  $V_1$  rond  $\hat{q}$  minder significant zijn afhankelijk van de signaal/ruis-verhouding en de kleuring van  $e$ . (zie fig. 3.1. curve b)

We zoeken dus het punt  $\hat{q}$  waar de 1<sup>e</sup> en/of 2<sup>e</sup> differentie  $\Delta V_1$  resp.  $\Delta\Delta V_1$  de meest significante verandering vertoont, hetgeen gerelateerd zal zijn aan de orde  $q$  van het proces. Soortgelijke redeneringen kunnen we toepassen op de bepaling van de orde  $s$  van het ruisfilter.

Beschouw het EMM-parameterschattings schema, waarin ook de parameters van het ruisproces worden geschat.

Dit schema is gebaseerd op de minimalisatie van:  $V = \frac{1}{N} \hat{\xi}^T \hat{\xi}$  (3.10)

Daar we slechts beschikken over schattingen  $\hat{\xi}$  van  $\xi$ ,

kijken we naar het gedrag van:  $V_2 = \frac{1}{N} \hat{\xi}^T \hat{\xi}$  (3.11)

bij verschillende modelordes  $\hat{q}$  en  $\hat{s}$ .

Uit (2.20) volgt:  $\xi = e + E d - \Xi c$  (3.12)

Daar we slechts beschikken over schattingen  $\hat{e}$ ,  $\hat{d}$ ,  $\hat{E}$ ,  $\hat{\Xi}$  en  $\hat{c}$  van resp.

$e$ ,  $E$ ,  $d$ ,  $\Xi$  en  $c$  geldt voor de geschatte witte ruis:

$$\hat{\xi} = \hat{e} + \hat{E} \hat{d} - \hat{\Xi} \hat{c} = -E d + \Xi c + \hat{E} \hat{d} - \hat{\Xi} \hat{c} + \hat{\xi} \triangleq \underline{r} + \hat{\xi} \quad (3.13)$$

met  $\underline{r} = -E d + \Xi c + \hat{E} \hat{d} - \hat{\Xi} \hat{c}$

$$-\hat{E} = \begin{bmatrix} -\hat{e}(k-1), & \dots, & \hat{e}(k-r) \\ \vdots & & \vdots \\ -\hat{e}(1), & \phi, & \dots, & \phi \\ \phi, & \phi, & \dots, & \phi \\ \hat{\xi}(k-1), & \dots, & \hat{\xi}(k-s) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\xi}(1), & \phi, & \dots, & \phi \\ \phi, & \phi, & \dots, & \phi \end{bmatrix}$$

met  $r$ : aantal d-param's (=orde ruisfilter)

en  $\hat{\Xi} =$

met  $s$ : aantal c-param's

Nu geldt: 
$$plim_{N \rightarrow \infty} (V_2) = plim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \underline{r}^T \underline{r} \right) + plim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \underline{\xi}^T \underline{\xi} \right)$$

Omdat  $\underline{r}$  en  $\underline{\xi}$  niet gecorreleerd zijn door het witte ruis-karakter van  $\underline{\xi}$

We vinden dat 
$$plim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \underline{r}^T \underline{r} \right) = \begin{cases} > \sigma & \text{voor } \hat{s} < s \\ = \sigma & \text{voor } \hat{s} \geq s \end{cases}$$

Met V1 en V2 kunnen we dus tegelijkertijd en afzonderlijk van elkaar de ordes van de proces- en ruisdynamica bepalen.

Opgemerkt dient nog te worden dat V1 een functie is van  $\hat{s}$  en idem V2 een functie van  $\hat{q}$ , zodat uit V2 ook de procesorde bepaald kan worden.

Om uit  $V = f(\hat{q})$  beter de ligging van bovengenoemd knikpunt te kunnen vaststellen kunnen we de 1<sup>e</sup>- en 2<sup>e</sup> differentie (resp.  $\Delta V$  en  $\Delta\Delta V$ ) van  $^{10}\log V$  beschouwen. Deze zijn gedefinieerd als:

$$\Delta V(\hat{q}) \triangleq ^{10}\log V(\hat{q}) - ^{10}\log V(\hat{q}-1) \quad (3.14)$$

$$\Delta\Delta V(\hat{q}) \triangleq \Delta V(\hat{q}+1) - \Delta V(\hat{q}) = ^{10}\log V(\hat{q}-1) - 2 \cdot ^{10}\log V(\hat{q}) + ^{10}\log V(\hat{q}+1) \quad (3.15)$$

Schetsmatig bestaat tussen  $^{10}\log V$ ,  $\Delta V$  en  $\Delta\Delta V$  als functie van de orde  $\hat{q}$  van het model het volgende verband (fig. 3.2).

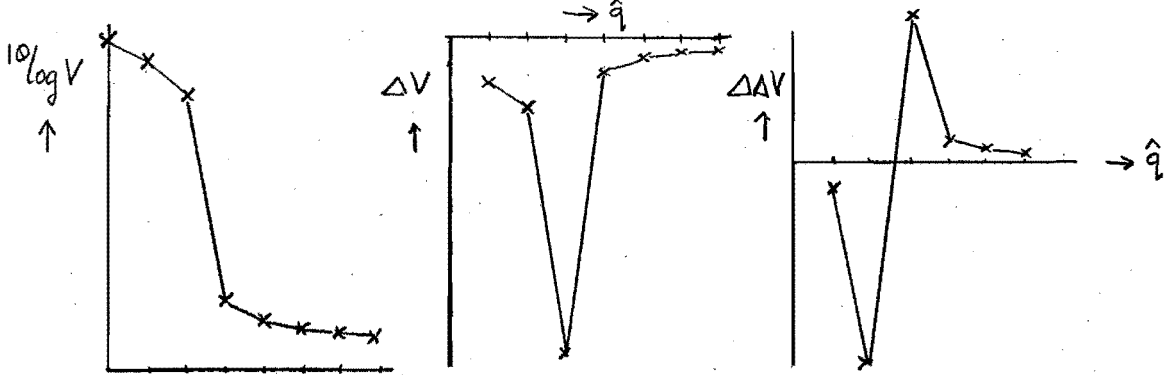


fig. 3.2 : Schetsmatig verloop van  $^{10}\log V$ ,  $\Delta V$  en  $\Delta\Delta V$ .

De differenties zijn zō gedefinieerd, dat een knikpunt in het verloop van  $V(\hat{q})$  overeenkomt met een minimum in  $\Delta V(\hat{q})$  en/of een maximum in  $\Delta\Delta V(\hat{q})$  bij dezelfde waarde van  $\hat{q}$  (zie fig. 3.2).

Met behulp van  $\Delta\Delta V$  is de ordebepaling gemakkelijk te automatiseren.

De bepaling komt neer op het zoeken van het maximum van:

$$\Delta\Delta V(\hat{q}) = ^{10}\log \left\{ \frac{V(\hat{q}-1) \cdot V(\hat{q}+1)}{V^2(\hat{q})} \right\} \quad (3.16)$$

Het maximum van  $\Delta\Delta V$ , en in mindere mate het minimum van  $\Delta V$  bepaalt de meest waarschijnlijke orde. Opgemerkt dient te worden dat dit alleen goed gaat voor niet al te slechte S/N -verhoudingen. Uit resultaten verkregen uit een gesimuleerd (Astrom-)proces blijkt dat dit nog goed gaat voor S/N = -27,7 dB!

### 3.1.2 Witheidstest (op het residu $\xi$ )

Deze methode is gebaseerd op de statistische eigenschappen van de schatting van de 'witte ruis'  $\xi$ , die tijdens het parameterschattingsproces beschikbaar komt.

Bij juiste proces- en ruisorde zal  $\xi$  een redelijke schatting zijn van de wit veronderstelde ruis  $\xi$ .

T.a.v. het asymptotisch gedrag van de parameters kunnen we concluderen dat de statistische eigenschappen niet significant veranderen voor  $\hat{q} > q$  en  $\hat{s} > s$  (proces- resp. ruisorde).

Het ligt voor de hand te kijken naar de autocorrelatie functie van  $\xi$ . Een schatting hiervoor is:

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi}(\tau) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\xi}(l+i) \cdot \hat{\xi}(l+i+\tau) \quad (3.17)$$

We kunnen testen of deze geaccepteerd kan worden als de autocorrelatie functie van een witte ruisreeks, daarbij rekening houdend met het eindige aantal samples N dat bij de berekening wordt betrokken.

Analoog aan Laning en Battin (1965) kan de variantie van  $\tilde{\gamma}(\tau)$  van een gaussisch verdeeld wit signaal op basis van N samples geschreven worden als:

$$\text{var}\{\tilde{\gamma}(\tau)\} = \frac{\gamma^2(0)}{N} \quad (\tau \neq 0) \quad (3.18)$$

Als we nu een genormeerde correlatie functie definiëren als:

$$\tilde{R}(\tau) \triangleq \frac{\tilde{\gamma}(\tau)}{\tilde{\gamma}(0)} \quad (3.19)$$

dan geldt :

$$\text{var}\{\tilde{R}(\tau)\} \approx \frac{1}{N} \quad (3.20)$$

Berekenen we de variantie van  $R(\cdot)$  gedefinieerd als:

$$\hat{\sigma}^2(\tilde{R}_{\hat{\xi}\hat{\xi}}) \cong \frac{1}{\tau_{max}-1} \sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tilde{R}^2(\tau) \quad (3.21)$$

dan kunnen we nagaan voor welke  $\hat{q}$  (en  $\hat{s}$ ) deze kleiner is dan de theoretische waarde  $1/N$ . Is hieraan niet voldaan, dan is het proces blijkbaar niet goed gemodelleerd.

Opgemerkt dient te worden dat alleen een combinatie van proces- en ruisorde bepaald kan worden; dus niet afzonderlijk !

Deze test kan gezien worden als verfijning van die, welke gebaseerd is op minimalisatie van de foutfunctie  $V_2$ . Hierbij kijken we nl. alleen maar naar het gedrag van  $\tilde{\mathcal{Y}}_{\hat{\xi}\hat{\xi}}(0)$ , immers:

$$V_2 = \frac{1}{N} \sum_{\hat{\xi}}^T \sum_{\hat{\xi}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\xi}(l+i) \cdot \hat{\xi}(l+i) = \tilde{\mathcal{Y}}_{\hat{\xi}\hat{\xi}}(0) \quad (3.22)$$

Witheidstest kijkt óók naar het gedrag van  $\tilde{\mathcal{Y}}_{\hat{\xi}\hat{\xi}}(\tau)$  voor  $\tau \neq 0$ .

### 3.1.3 Test op normaalverdeling van $\hat{e}(k)$

Indien men aanneemt (Göhring 1973) dat de equation error  $e$  voor orde  $\hat{q} \geq q$  een normale kansverdeling heeft, is een voor de hand liggende test de bepaling van de discrete kansverdelingsfunctie  $P_i$  voor de schattingen  $\hat{e}(k)$  van  $e(k)$ .

met:  $P_i \cong P\{(\hat{e}(k), k=1, \dots, N) < e(i)\}$  (3.23)

en:  $i = 0, 1, \dots, i_{max}$  en  $e_i = e_{min} + i \cdot \Delta e$   
 $\Delta e = \text{interval grootte}$

$P_i = 0\%$  correspondeert met  $e = e_{min}$   
 $P_i = 100\%$  correspondeert met  $e = e_{max} = e_{min} + i_{max} \cdot \Delta e$  (zie fig 3.3)

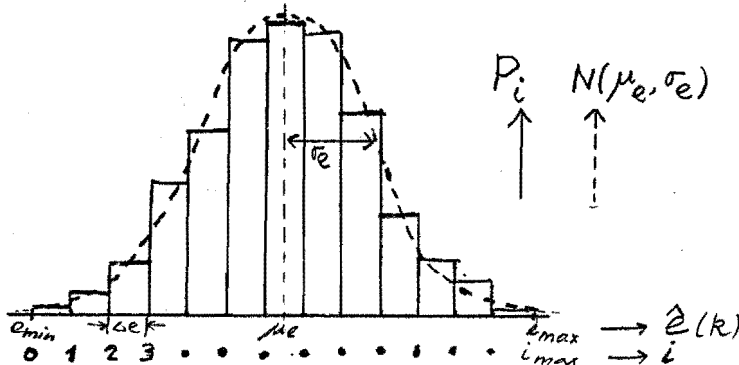


fig 3.3 : Discrete kansverdelingsfunctie van  $e(k)$ .

Door het zo verkregen histogram te vergelijken met de normaal verdeling  $N(\mu_e, \sigma_e)$  kunnen we een indruk krijgen van het ál of niet normaal verdeeld zijn van  $\hat{e}(k)$

$$\begin{aligned} \text{met : } \mu_e &\triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{e}(k) \\ \text{en : } \sigma_e &\triangleq \frac{1}{\sqrt{N-1}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^N (\hat{e}(k) - \mu_e)^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Hieruit kunnen we ook de cumulatieve verdeling van  $\hat{e}(k)$  berekenen.

Dit is de zogenaamde  $\int$ -curve, en is mathematisch als volgt gedefinieerd (zie fig. 3.4)

$$S(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx \quad (3.25)$$

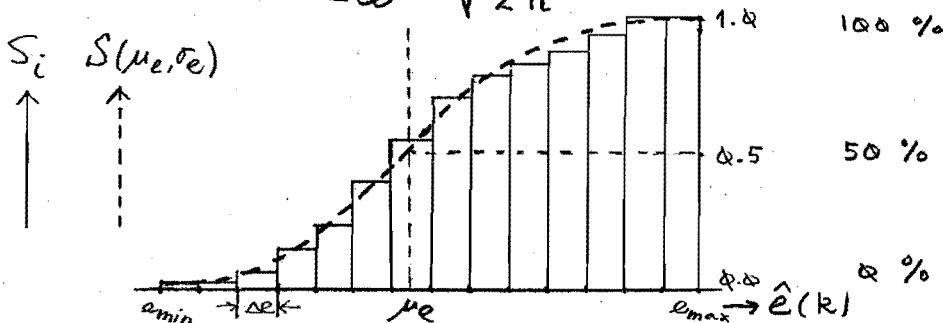


fig. 3.4 : Cumulatieve kansverdelings functie van  $e(k)$ .

Hiermee kan getest worden op de gemiddelde waarde  $\mu_e$ .

$$\text{Daarvoor geldt: } S_i = P\{(\hat{e}(k), k=1, \dots, N) < (e(i) = \mu_e)\} = 0.5 \quad (3.26)$$

Verwacht wordt dat  $\hat{e}(k)$  normaal verdeeld is voor  $\hat{q} > q$  (Göhring '73, Unbehauen en Göhring '73). Deze methode is alleen bruikbaar voor goede signaal-ruis verhoudingen, veel samples  $\hat{e}(k)$  waarvan het statistisch gedrag stationair is. Ze wordt daarom alleen aanbevolen als laatste check op andere methoden. Op waarschijnlijkheidspapier uitgezet levert de cumulatieve normale verdeling een rechte lijn op. Dit maakt voor de gebruiker een snellere beoordeling mogelijk, vooral als hieraan nog betrouwbaarheids-grenzen worden toegevoegd, die een functie zijn van het aantal samples  $N$ . Deze beoordeling is louter subjectief. Een objectieve beoordeling is slechts te geven wanneer men statistische criteria in de beschouwing betreft, zoals bv. een betrouwbaarheidsinterval rond  $P_i$  of cum. verd.  $S_i$ .

3.1.4 Test op signaalfouten

Uitgangspunt is de visuele vergelijking van de gemeten uitgang van het proces ( $y$ ) en de berekende uitgang ( $\hat{y}$ ) van het model, waarvan we de parameters geschat hebben, m.b.v. het ingangssignaal  $u(k)$ . (zie fig. 3.5)

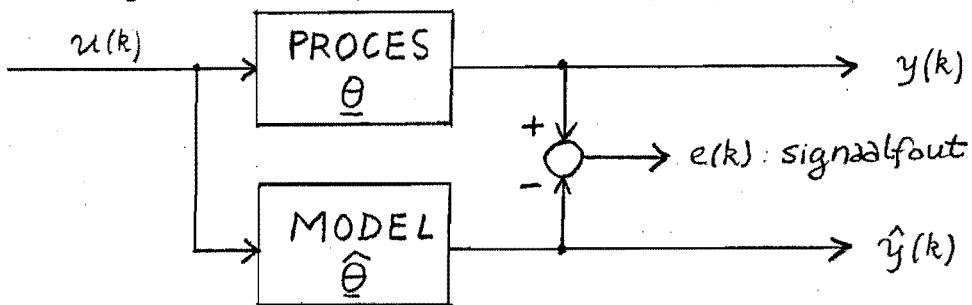


fig. 3.5 : Berekening signaalfout,  $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$

Deze methode is vooral geschikt voor vergelijking van responsies op bijzondere ingangssignalen zoals bv. stap- of impuls responsie.

(zie fig. 3.6)

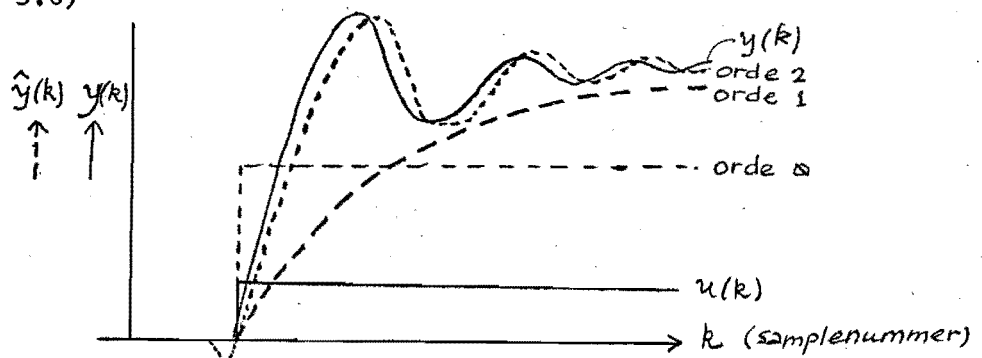


fig. 3.6 : Stapresponsies voor verschillende ordes.

De veronderstelling is dat de signaalfout  $e(k)$  significant afneemt bij toename van  $\hat{q}$  tot  $q$ . Voor  $\hat{q} > q$  wordt weinig afname verwacht. We kunnen dus zoeken naar een significante verandering in de afgeleide.

Wederom kunnen we de foutfunctie:

$$V(\hat{q}) \triangleq \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N e^2(k)$$

berekenen en hieruit conclusies te trekken t.a.v. de juiste orde  $q$ .

3.2 HET GEDRAG VAN DE DETERMINANT VAN DE SIGNAALWAARDENMATRIX

Een belangrijk voordeel van deze test is dat we geen parameters hoeven te schatten; we gaan direkt uit van de  $u(k)$ - en  $y(k)$ -samples in  $\Omega_m$  ter bepaling van een criteriumfunctie voor ordetest.

We gaan uit van het proces:

$$y = \Omega_p(u, y) \cdot \underline{\theta} + \underline{e} \quad , \text{ waarin } \underline{e} = \text{witte ruis} \quad (3.27)$$

en trachten dit te identificeren m.b.v. het model:

$$\hat{y} = \Omega_m(u, y) \cdot \hat{\underline{\theta}} + \hat{\underline{e}} \quad (3.28)$$

Met de kleinste kwadraten methode krijgen we als oplossing:

$$\hat{\underline{\theta}} = [\Omega_m^T \cdot \Omega_m]^{-1} \cdot \Omega_m \cdot y \quad (3.29)$$

Hiervoor moeten we inverteren:  $Q(\hat{p}, \hat{q}) \triangleq \frac{1}{N} \cdot \Omega_m^T \cdot \Omega_m$

met :  $\hat{p} + 1 =$  aantal voorwaartse modelparameters

$\hat{q} =$  aantal terugwaartse modelparameters

We kiezen  $\hat{p} = \hat{q}$  vanwege het gemak bij de berekeningen.

De vierkante matrix  $Q(\hat{q})$  is een benadering van de correlatie matrix tussen de elementen  $u(k)$  en  $y(k)$ . Wanneer  $\hat{q} > q$  raakt deze slecht geconditioneerd, waardoor het moeilijk zometermogelijk wordt deze te inverteren. We kunnen dus de orde van het proces bepalen door te testen op singulariteit van  $Q(\hat{q})$ . Als testgrootheid kiezen we de determinant van  $Q(\hat{q})$ , die klein wordt voor  $\hat{q} > q$ .

Wanneer de meetwaarden  $u(k)$  en  $y(k)$  behept zijn met meet- en/of procesruis zal  $Q$  natuurlijk nooit exact singulier, en daardoor  $\det(Q)$  nooit nul worden. Hierdoor wordt vaststelling van een significante daling bij te hoog veronderstelde orde bemoeilijkt, enwel des te meer naarmate de S/N-verhouding afneemt. Daartoe kunnen we kijken naar van  $\det(Q)$  afgeleide grootheden zoals 1<sup>e</sup>- en 2<sup>e</sup>-differentie van  $^{10} \log \det(Q)$  (we nemen de logaritme vanwege het grote bereik van de determinant).

Deze zijn als volgt gedefinieerd:

$$\Delta \det Q(\hat{q}) \triangleq ^{10} \log |\det Q(\hat{q}+1)| - ^{10} \log |\det Q(\hat{q})| = ^{10} \log \left| \frac{\det Q(\hat{q}+1)}{\det Q(\hat{q})} \right| \quad (3.30)$$

$$\Delta \Delta \det Q(\hat{q}) \triangleq \Delta \det Q(\hat{q}+1) - \Delta \det Q(\hat{q}) = - ^{10} \log \left| \frac{\det Q(\hat{q}+1) \cdot \det Q(\hat{q}-1)}{\det^2 Q(\hat{q})} \right|$$

De determinant van Q blijkt een functie te zijn van de amplitude der signalen u(k) en y(k), en wel volgens:

$$\det Q(u, y) = f \left\{ \text{ampl.}^{2(2\hat{q}+1)} \right\} \quad (3.31)$$

Willen we  $\det(Q)$  bij verschillende ordes  $\hat{q}$  met elkaar vergelijken, dan moeten we deze dus normeren. We krijgen dan een relatieve determinant. Dit kan op verschillende manieren bv. d.m.v. :

1) maximale inhoud van Q

$$\text{max. inh.} \triangleq \prod_{j=1}^{2\hat{q}+1} \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{2\hat{q}+1} q_{ii}^2} \right\} \quad (3.32)$$

2)  $\tilde{\Psi}_{uu}^{(0)}$  en  $\tilde{\Psi}_{yy}^{(0)}$  : (in- resp. uitgangsvermogen)

$$\begin{aligned} \text{met:} \quad \tilde{\Psi}_{uu}^{(0)} &\triangleq \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N u^2(i) \\ \text{en:} \quad \tilde{\Psi}_{yy}^{(0)} &\triangleq \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y^2(i) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Daartoe delen we u(k) door  $\sqrt{\tilde{\Psi}_{uu}^{(0)}}$  en y(k) door  $\sqrt{\tilde{\Psi}_{yy}^{(0)}}$

### 3.2.1 DE DETERMINANT Q\*

Door matrix  $\Omega(u, y)$  op een speciale manier te vullen met u(k)- en y(k)-samples (Hoffman, p. 27) kunnen we bereiken dat we niet voor elke modelorde  $\hat{q}$  de matrix Q moeten decomponeren ter berekening van de determinant. Deze speciale matrix noemen we  $\Omega_d(u, y)$ . Willen we testen tot orde  $\hat{q}_{\max}$ , dan decomponeren we  $\Omega_d^T(u, y) \cdot \Omega_d(u, y)$  tot een rechtsboven driehoeksmatrix. Hieruit kunnen we nu gemakkelijk de determinant voor alle  $\hat{q} \leq \hat{q}_{\max}$  berekenen volgens:

$$\det Q_d^*(\hat{q}) = \prod_{i=1}^{2\hat{q}+1} q_{ii}^* \quad (3.34)$$

met  $q_{ii}$  = diagonaalelementen der rechtsboven driehoeksmatrix.

Deze test blijkt betrouwbare schattingen van de procesorde mogelijk te maken, zelfs bij slechte S/N-verhoudingen !

Resultataen zijn te vinden in (Woodside '71) en in dit verslag.

Ter bepaling van de procesorde kunnen we ook kijken naar het spoor van de matrix, dat gedefinieerd is als:

$$\text{spr} \{ Q_d^*(\hat{q}) \} \triangleq \sum_{i=1}^{2\hat{q}+1} q_{ii} \quad (3.36)$$



Voor  $\hat{q} > q$  zal dit weinig toenemen, Ook hier is het verstandig te normeren, en wel d.m.v. de lengte van de kolomvektor van  $Q_d(u, y)$  gedefinieerd als:

$$SPR\{Q_d^*(\hat{q})\} = \frac{\sum_{j=1}^{2\hat{q}+1} q_{ii}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{2\hat{q}+1} \sum_{l=1}^2 q_{ij}^2}} = \sum_{j=1}^{2\hat{q}+1} \frac{q_{ii}}{|2j|} \quad (3.37)$$

3.2.2 DE DETERMINANT  $C_{11}$  EN  $C_{22}$

Ingeval  $e(k)$  géén witte ruis is moeten we een ruisproces in ons model opnemen, dat gestuurd gedacht wordt door witte ruis (white noise). Hiermee kunnen we de procesparameters schatten zonder bias. Hiervoor kunnen we de EMM schattingsmethode gebruiken. Hierin wordt het model als volgt voorgesteld:

$$y = \Omega_m(u, y, \xi, e) \cdot \hat{\theta} + \hat{\xi} \quad (3.38)$$

Zoals we in 2.4 gezien hebben beschikken we niet over  $e$  en  $\xi$ , maar wél over schattingen hiervoor.  $\hat{\Omega}_m$  is nu te schrijven als:  $[-Y; \hat{u}; -\hat{E}; \hat{\xi}]$ . Dit is de met  $\hat{E}$  en  $\hat{\xi}$  uitgebreide matrix:  $[-Y; \hat{u}]$ . Hiermee wordt:

$$Q^* \triangleq \hat{\Omega}_m^T \hat{\Omega}_m = \begin{bmatrix} Y^T Y & -Y^T \hat{u} & Y^T \hat{E} & -Y^T \hat{\xi} \\ -\hat{u}^T Y & \hat{u}^T \hat{u} & -\hat{u}^T \hat{E} & \hat{u}^T \hat{\xi} \\ \hat{E}^T Y & -\hat{E}^T \hat{u} & \hat{E}^T \hat{E} & -\hat{E}^T \hat{\xi} \\ -\hat{\xi}^T Y & \hat{\xi}^T \hat{u} & -\hat{\xi}^T \hat{E} & \hat{\xi}^T \hat{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & | & Q_{12}^* \\ \hline Q_{21}^* & | & Q_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Voor  $\hat{q} > q$  zal de deelmatrix  $Q_{11}$  neigen tot singulariteit. De singulariteit van de totale matrix  $Q$  wordt echter verhinderd door  $Q_{12}, Q_{21}$  en  $Q_{22}$  t.g.v. de erin voorkomende ruismatrices  $\hat{\xi}$  en  $\hat{E}$ . Tijdens de schatting hebben we de beschikking over:  $[\hat{\Omega}_m^T \hat{\Omega}_m]^{-1} = Q^{*-1}$

Hierdoor is het niet eenvoudig de voor ons interessante matrix  $Q_{11}$  te berekenen. Als we echter stellen:  $Q^{*-1} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & | & C_{12}^* \\ \hline C_{12}^* & | & C_{22}^* \end{bmatrix}$  symmetrisch

dan kunnen we  $Q_{11}$  schrijven als:  $Q_{11}^* \approx C_{11}^{*-1} + \begin{bmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & M \end{bmatrix} \quad (3.40)$

aangenomen dat  $\hat{\xi}$  onafhankelijk is van  $\hat{u}$  en het aantal samples  $N$  groot is.  $M$  is hierin een submatrix, die alleen belangrijk is voor kleine S/N-verhoudingen. Verwaarlozen we  $M$  dan is  $C_{11}$  een goede indicator voor de orde van het proces, beter dan de totale matrix  $Q$ !

Ook hier is het verstandig de determinant van  $C_{11}$  te normeren bv.:

$$\text{rel. det } C_{11}^* = \frac{\text{determinant } C_{11}^*}{\text{max. inhoud } C_{11}^*} \quad (3.41)$$

Voor  $\hat{q} > q$  zal  $\text{det. } C_{11}$  groot zijn, echter de max. inhoud stijgt sneller dan  $\text{det } C_{11}$  zodat  $\text{rel. det. } C_{11}$  zal dalen voor  $\hat{q} > q$ .

In de praktijk blijkt dat  $C_{22}$  een bruikbare indicator is voor de orde van het ruisproces. Hiertoe bekijken we:  $^{10} \log | \text{rel. det. } C_{22}^* |$

$$\text{Ook kunnen we kijken naar: } \Delta \text{det } C_{11}^*(\hat{q}) \cong ^{10} \log \left| \frac{\text{det. } C_{11}^*(\hat{q})}{\text{det. } C_{11}^*(\hat{q}-1)} \right| \quad (3.42)$$

$$\text{en: } \Delta \Delta \text{det } C_{11}^*(\hat{q}) \cong \Delta \text{det } C_{11}^*(\hat{q}+1) - \Delta \text{det } C_{11}^*(\hat{q}) = ^{10} \log \left| \frac{\text{det. } C_{11}^*(\hat{q}+1) \cdot \text{det } C_{11}^*(\hat{q}-1)}{\text{det}^2 C_{11}^*(\hat{q})} \right| \quad (3.43)$$

Het blijkt uit de praktijk, dat we het best eerst de proces  $q$  trachten te schatten m.b.v.  $\text{rel. det. } C_{11}^*$ , en daarna de ruisorde  $s$  m.b.v.

$\text{rel. det. } C_{22}^*$  en eerder verkregen  $q$ . Opgemerkt dient te worden dat deze test véél rekentijd vergt, daar er parameters geschat moeten worden.

Ze kan daarom het best gecombineerd worden met andere methoden, die ook uitgaan van schattingsresultaten.

### 3.2.3 BEREKENING VAN $V_1$ m.b.v. DE SIGNAALWAARDEN MATRIX

Woodside stelt een test voor om m.b.v. de matrix:

$$Q_d^*(u, y) = \frac{1}{N} \cdot \Omega_d^{*T}(u, y) \cdot \Omega_d^*(u, y) \quad (3.44)$$

(Dit is een  $(2 \cdot \hat{q} + 1)(2 \cdot \hat{q} + 1)$ - matrix bij orde  $\hat{q}$ )

$$\text{met: } \Omega_d^*(u, y) = \begin{bmatrix} u(k), y(k-1), u(k-1), \dots, y(k-\hat{q}), u(k-\hat{q}) \\ \vdots \\ u(k+N), y(k+N-1), u(k+N-1), \dots, y(k+N-\hat{q}), u(k+N-\hat{q}) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

de foutfunctie  $V_1$  te berekenen zonder parameters te hoeven schatten.

Deze matrix kan als volgt opgebouwd worden gedacht in matrices en

vektoren:

$$Q_d^*(u, y) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} H(u, y) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow g^T \rightarrow \\ \uparrow g \downarrow \\ Q_d^{**}(u, y) \end{matrix} \quad (3.46)$$

Dit is een  $(2\hat{q}+3)(2\hat{q}+3)$ -matrix

met  $H(u,y) : (2\hat{q}+2)(2\hat{q}+2)$ -matrix, rechts onderhoek van  $Q_d^*(u,y)$

$\underline{g}$  : kolomvektor met dimensie  $(2\hat{q}+1)$ : tweede kolom van  $Q_d^*(u,y)$

$Q_d^{**}(u,y) : (2\hat{q}+1)(2\hat{q}+1)$ -matrix, rechter onderhoek van  $Q_d^*(u,y)$

De matrix  $Q_d^*(u,y)$  voor orde  $\hat{q}+1$  bevat alle informatie nodig om een kleinste kwadraten schatting  $\hat{\theta}$  voor orde  $\hat{q}$  te doen.

Deze wordt gegeven door:

$$\hat{\theta} = \left\{ \Omega_d^{*T}(u,y) \cdot \Omega_d^*(u,y) \right\}^{-1} \cdot \Omega_d^{*T}(u,y) \cdot y = \left\{ Q_d^{**}(u,y) \right\}^{-1} \cdot g \quad (3.47)$$

Stel:  $\hat{e} = y - \Omega_d^*(u,y) \cdot \hat{\theta}$

dan geldt voor  $V_1 = \frac{1}{N} \hat{e}^T \cdot \hat{e}$  dat,  $V_1 = \frac{1}{N} \left\{ y^T - \hat{\theta}^T \cdot \Omega_d^{*T}(u,y) \right\} \cdot \left\{ y - \Omega_d^*(u,y) \cdot \hat{\theta} \right\}$

$$= \frac{1}{N} \left\{ y^T \cdot y - N g^T \cdot Q_d^{**^{-1}} \cdot g \right\} = \frac{\det \cdot H(u,y)}{\det Q_d^{**}(u,y)} \quad (3.48)$$

Indien  $\hat{q}_m$  de maximaal te testen orde is, dan moet  $Q_d^*(u,y)$  voor de orde  $\hat{q}_m+1$  berekend worden. Deze matrix moet in een rechtsboven driehoeksmatrix worden gedeconponeerd, echter beginnend van rechtsonder naar linksboven.

Nu is:

$$V_1(\hat{q}) = \frac{\prod_{i=1}^{2\hat{q}+2} q_{ii}}{\prod_{i=1}^{2\hat{q}+1} q_{ii}} = q_{ii} \quad (i=2\hat{q}+2) \quad (3.49)$$

met  $q_{ii}$  het diagonaalelement van  $Q_d^*(u,y)$  na decompositie.

Resultaten worden gegeven door Woodside (1971) en ondergetekende.

Opmerking: Bij bovenbeschreven methode is g een rekening gehouden met additieve stoornis op de uitgang.

Woodside geeft aan hoe die w el in rekening gebracht kan worden. Hiertoe veronderstelt hij additieve stoornis zowel op de uitgang ( $n_k$ ) als op de ingang ( $n'_k$ ) volgens fig. 3.7

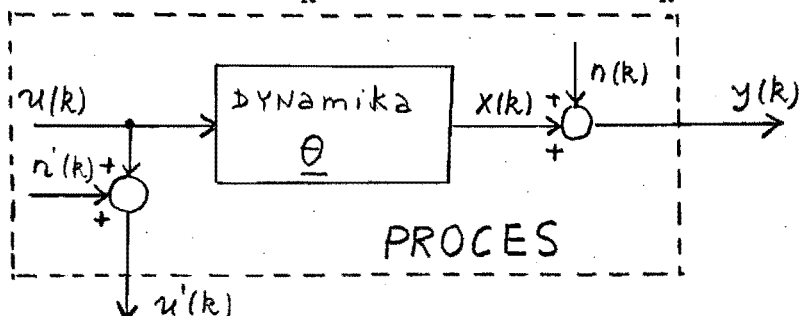


fig. 3.7 : Procesmodel gebruikt door Woodside ('71).

Nu geldt :  $\Omega(u', y) = \Omega(u, x) + \Omega(n', n)$  (3.50)

(zie Hoffman '76, p. 31)

Kijk naar :  $\lim_{N \rightarrow \infty} Q(u', y) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Omega^T(u', y) \Omega(u', y)$  (3.51)

Veronderstel nu  $\underline{n}'$  en  $\underline{n}$  onafhankelijk van elkaar en onafh. van resp.  $\underline{u}$  en  $\underline{x}$ , dan volgt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q(u', y) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q(u, x) + \sigma^2 R(n', n)$$
 (3.52)

met: 
$$\sigma^2 R(n', n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} N_c'^T N_c & 0 \\ 0 & N_c^T N_c \end{bmatrix}$$

Hierin is  $R(\underline{n}', \underline{n})$  de gecombineerde covariantie matrix van de ruisen  $\underline{n}'$  en  $\underline{n}$ .

Voor groot aantal samples N geldt:  $\hat{Q}(u, x) = Q(u, y) - \hat{\sigma}^2 R$  (3.53)

Voor  $\hat{q} \gg q$  moet gelden dat  $\det \hat{Q}(u, x) = \Phi$ .

waarmee  $\det [Q(u', y) - \hat{\sigma}^2 R] = \Phi$ . (3.54)

Voorwaarde hiervoor is dat R niet singulier is. De beschreven tests worden verricht op de matrix  $Q(u, y)$ . De resultaten gegeven door Woodside zijn vooral bij slechte S/N- verhoudingen beter dan bij gebruik van  $Q(u, y)$ . Een bezwaar is dat R bekend moet zijn, en wanneer alleen ruis op de uitgang verondersteld wordt gaat bovenstaande niet op, omdat dan R singulier is.

### 3.3 HET GEDRAG VAN DE OVERDRACHTSFUNKTIE

Hierbij kijken we naar het gedrag van de overdrachtsfunctie:

$$\frac{X(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_0 + B(z^{-1})}{1 + A(z^{-1})}$$
 (3.54)

Hierbij kunnen we kijken naar de coëfficiënten of naar de polen en nulpunten.

#### 3.3.1 Bepaling van gemeenschappelijke factoren.

Deze zogenaamde polen/nulpunten-methode (pole/zero-cancellation) gaat uit van een lineair onverstoord systeem:

$$(1 + A(z^{-1})) \cdot y(k) = (b_0 + B(z^{-1})) \cdot u(k) \quad (3.55)$$

Hetzelfde systeem wordt beschreven door:

$$\begin{aligned} (1+C)(1+A)y(k) &= (1+C)(b_0+B)u(k) & (3.56) \\ \equiv (1+A')y(k) &= (b_0+B')u(k) \end{aligned}$$

hiervoor zijn echter meer parameters nodig! Een dergelijke systeem-  
beschrijving wordt gebezigd wanneer we een lineair systeem trachten  
te identificeren aan de hand van een model van te grote orde  $\hat{q} > q$ .  
Om nu de gemeenschappelijke factor te vinden van  $(1+A')$  en  $(b_0+B')$   
moeten we de nulpunten van deze polynomen bepalen,

$$\text{immers:} \quad H(z^{-1}) = \frac{b_0 + B'(z^{-1})}{1 + A'(z^{-1})} \quad (3.57)$$

Stel nu dat het uitgangssignaal verstoord is met ruis, dan kunnen we  
het proces beschrijven m.b.v. :

$$\begin{aligned} (1+A)y(k) &= (b_0+B)u(k) + e(k) & (3.58) \\ (1+D)e(k) &= (1+C)\xi(k) \quad \text{: ruisproces} \end{aligned}$$

met  $\xi$  witte ruis, die onafhankelijk is van  $u$

$$\text{Stel:} \quad e(k) = \frac{(1+C)\xi(k)}{1+D} = \frac{\xi(k)}{1+D'} \approx \frac{\xi(k)}{1+D''} \quad (3.59)$$

waarin  $D'(z^{-1})$  een  $\infty$  reeks is met  $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = 0$ . Dit is een zuiver auto-  
regressieve beschrijving van het ruisproces.  $D''(z^{-1})$  is een eindige  
reeks (n termen) : een benadering voor de reeks  $D'(z^{-1})$ .

Hierdoor kunnen we het proces bij benadering schrijven als:

$$\begin{aligned} (1+D'')(1+A)y(k) &= (1+D'')(b_0+B)u(k) + \xi(k) & (3.60) \\ \equiv (1+A')y(k) &= (b_0+B')u(k) + \xi(k) \end{aligned}$$

Daar  $\xi(k)$  witte ruis is kunnen we de parameters zuiver schatten m.b.v.  
de kleinste kwadraten methode, waarna we de polen en nulpunten van het  
systeem kunnen berekenen. Daar we beschikken over een eindig aantal  
samples N zullen we de coëfficiënten van  $(1+A''')$  en  $(b_0+B''')$  niet exact  
kunnen bepalen. Hierdoor zullen de polen en nulpunten van  $(1+A''')$  en  
 $(b_0+B''')$  niet precies samenvallen. Dit effect zal des te sterker worden

naarmate de S/N- verhouding kleiner wordt, daar dan meer afgekapte termen in  $D''$  een rol gaan spelen. Dit wordt veroorzaakt door de zuiver autoregressieve beschrijving van het ruisproces, waardoor meer parameters nodig zijn om dit volledig te beschrijven. Hierdoor wordt de pool/nulpunt-opheffing minder significant !

#### 4 IMPLEMENTATIE VAN ORDESCHATTINGSPROGRAMMAS IN SATER

##### 4.1 SATER, een interactief programmapakket

In de vakgroep ER is het interactieve programmapakket SATER (= Systeem Analyse Technieken, vakgroep ER) in ontwikkeling. Het bestaat uit een aantal samenwerkende programma's, die elk een concrete operatie uitvoeren. Algemeen kunnen we zo'n operatie voorstellen als een systeem dat uitgaande van één of meerdere datasets als input, één dataset als output produceert. Daarnaast kunnen we zogenaamde 'invoerblokken' beschouwen, die geen dataset als input vereisen, maar m.b.v. antwoorden van de gebruiker op gestelde vragen middels een 'display', een dataset als output creëert. Voorbeelden van operaties zijn:

- invoer van proces- en ruisparameters
- invoer gegevens t.a.v. signaalreeks
- simulatie van eerder gespecificeerd proces m.b.v. een bepaald ingangssignaal
- parameterschatting m.b.v. in- en uitgangssignalen van een proces
- berekenen van 'root-loci'
- Bode- en Nyquistdiagrammen
- ordebepaling m.b.v. in- en uitgangssamples

Een structureel overzicht wordt gegeven in fig 4.1 (Bijlage)  
Tevens wordt hierin de rol van ordeschattingsmethoden binnen SATER verduidelijkt.

##### Het interactieve aspect van SATER

Doelstelling is dat verschillende categorieën gebruikers zoals bv. stageaires, afstudeerders en wetenschappelijk medewerkers zo effectief mogelijk met het systeem moeten kunnen werken. Daartoe wordt een

breed scala van algorithmen ingebouwd alsook de mogelijkheid de interactie met het systeem aan te passen aan de ervaring van de gebruiker. Zo dienen minder ervaren gebruikers in meer stappen naar het door hen gewenste eindresultaat te worden geleid dan regelmatige gebruikers, die inzicht hebben in de structuur van het gepresenteerde vragenpakket. Hiertoe is een 'help-optie' ingebouwd, die de gebruiker de mogelijkheid geeft op iedere vraag d.m.v. het intikken van een '?' van de computer toelichting te krijgen op de gang van zaken. Tevens kunnen foutief ingevoerde waarden ogenblikkelijk of achteraf gemakkelijk worden gecorrigeert of gecontroleerd. Voorts is een zodanige foutendetectie en -melding ingebouwd dat het vrijwel onmogelijk is een rekenproces te starten met verkeerde gegevens. Ook kan de gebruiker een rekenproces ogenblikkelijk onderbreken wanneer hij aan de hand van afwijkende tussenresultaten meent te moeten ingrijpen. Hierbij komt men terug in de aan het rekenproces voorafgaande vragenroutine, waarin men parameterwaarden kan veranderen alvorens dit opnieuw te starten.

#### 4,2 Ontwikkeling van ordeschattings algorithmen

In het algemeen zal bij parameterschatting aan een proces de orde hiervan niet of onvoldoende bekend zijn. Het is dus noodzakelijk ofwel vóór, tijdens of verweven met de schatting de orde van het proces te bepalen. Dit omdat schatting met modellen van onjuiste orde aanleiding geeft tot ongewenste resultaten. Karakteristiek voor alle ordetestmethoden is de bestudering van het gedrag van een bepaalde grootheid bij verschillende modelorden. Daarna volgt een subjektieve óf statistische beschouwing van het gedrag resulterend in een konklusie t.a.v. de juiste of meest waarschijnlijke orde. Statistische evaluatie geeft hierbij kwantitatieve maatstaven voor deze waarschijnlijkheid en is hierdoor erg gecompliceert en bewerkelijk (bv. F-test). Hierbij is ordetest te automatiseren. Daartegenover staat de mogelijkheid om het gedrag grafisch weer te geven, waarvoor SATER zich bij uitstek leent. Mede hierdoor is gekozen voor de laatste oplossing, waarbij de gebruiker zélf actief wordt ingeschakeld bij de beslissing t.a.v. de te kiezen modelorde. Nadeel van deze methode is dat van de gebruiker voorkennis wordt vereist, die verkregen kan zijn uit ervaring met gesimuleerde processen of door het bestuderen van een gebruikershandleiding, die door ondergetekende is geschreven.

Hierin wordt een onderlinge vergelijking gemaakt tussen de verschillende geïmplementeerde ordeschattingsmethoden t.a.v. betrouwbaarheid, snelheid en gebruikersgemak. Voor elke methode is getracht karakteristieke kenmerken aan te geven op grond waarvan men onder bepaalde kondities (S/N-verhouding!) een betrouwbare konklusie kan trekken t.a.v. de te kiezen orde.

#### 4.3 Strukturele opbouw van de programmatuur voor de ordeschattingsmethoden

De programmatuur is onder te verdelen in 2 groepen, te weten:

- 1) Ordeschattings algorithmen waarvoor we géén parameters hoeven te schatten. Hierbij gaan we uit van de beschikbare in- en uitgangssample paren  $(u(k), y(k))$ , waaruit een zogenaamde signaalwaardenmatrix kan worden opgebouwd.
- 2) Ordeschattings algorithmen waarvoor we wél parameters moeten schatten. Hierbij wordt gebruik gemaakt van gegevens die tijdens of na een parameterschattings proces beschikbaar komen.

In groep 1) staan ons 3 mogelijke methoden ter beschikking:

- a) berekening van de determinant en spoor van de signaalwaardenmatrix  $Q$ , genormeerd m.b.v. de maximale inhoud hiervan.
- b) berekening van de determinant van de signaalwaardenmatrix, genormeerd m.b.v. het vermogen van het in- en uitgangssignaal resp.  $\tilde{\Upsilon}_{uu}(0)$  en  $\tilde{\Upsilon}_{yy}(0)$ .
- c) berekening van de foutfunctie  $V_1$  volgens Woodside, direkt uit de signaalwaardenmatrix.

Kiezen we voor groep 2) dan krijgen we de keus uit een 5-tal methoden, die allen gebruik maken van resultaten die tijdens of na een parameterschattingsproces voor toenemende modelorden  $\hat{q}$  geproduceert zijn; voornamelijk de parameterwaarden,  $\hat{e}(k)$  en  $\hat{\xi}(k)$  na elke iteratieslag. Eerst worden dus vragen gesteld t.a.v. het schattingsproces zélf. (Hier geïmplementeerd is de EMM schattingsmethode). Daarna wordt dit proces voor toenemende  $\hat{q}$  uitgevoerd en tussentijdse resultaten worden opgeslagen in de file 'OEMPAR.DAT' (Order EstiMation PARAMeter file).



Pas daarna kan één van de volgende ordeschattings methoden uitgevoerd worden:

- a) polen/nulpunten-opheffing.
- b) foutfuncties  $V_1$  en  $V_2$ , afregeling der parameters,  $\hat{e}(k)$  en  $\hat{\xi}(k)$ , schattings resultaten.
- c) autokorrelatie functies van  $\hat{\xi}(k)$ , witheidstest.
- d) statistische verdeling van  $\hat{e}(k)$ , test op gaussische verdeling.
- e) (relatieve) determinant van  $C_{11}$  en  $C_{22}$ .

Elk der bovengenoemde methoden gaat gepaard met een rekenproces, die voorafgegaan wordt door een voor elke methode geeigende vragenroutine. Resultaten worden opgeslagen in de file 'OEMPAR.DAT', zodat deze hierna naar willekeur kunnen worden geanalyseerd. Daarna volgt er een voor de gekozen methode karakteristieke vragenroutine, waarin we wensen kunnen uiten t.a.v. de grafische presentatie. Deze routine wordt gevolgd door de eigenlijke grafische routine.

Resultaten kunnen ook naar wens numeriek worden gepresenteerd. We kunnen ons bij alle methoden de structuur van fig. 4.2 voor ogen houden.

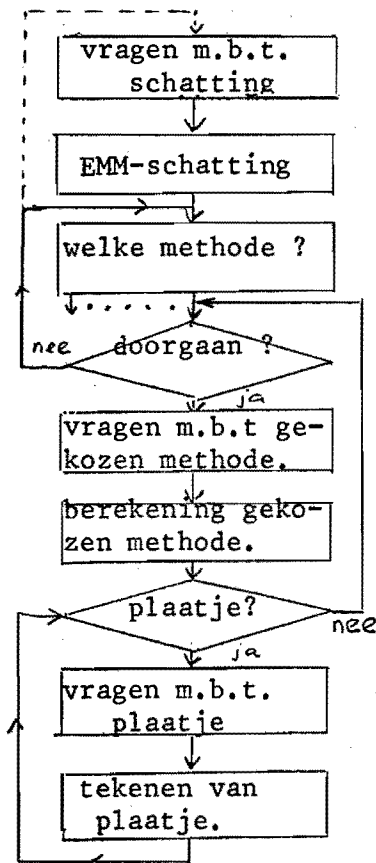


fig.4.2: flowdiagram orde-testmethoden met parameterschatting.

Bovendien hebben we in groep 2) de mogelijkheid in het EMM-schattingsproces de orde van het ruismodel te verhogen i.p.v. die van het procesmodel. Hiermee verkrijgen we informatie over de orde van het ruisproces. Deze methode is pas zinvol als we een indruk hebben van de procesorde, die we bv. hebben verkregen m.b.v. een methode uit groep 1).

Fig. 4.3 geeft een totaaloverzicht van de logische structuur van de geïmplementeerde subroutines. Voor een functionele beschrijving hiervan wordt verwezen naar de gebruikershandleiding. Deze geeft een uitvoerige beschrijving van de werking der geïmplementeerde subroutines, alsook hun onderlinge afhankelijkheid en plaats in de OVERLAY-structuur van SATER.

Tevens vindt U hierin richtlijnen voor het gebruik van de verschillende ordebepalingsmethoden en hun onderlinge relatie. Gepoogd is m.b.v. een groot aantal voorbeelden van ordeschatting aan gesimuleerde processen een inzicht te geven in de karakteristieke eigenschappen der methoden (Aström-proces met verschillende S/N-verhoudingen en 4<sup>e</sup>-orde proces). Tevens worden hierin resultaten gegeven van ordeschatting toegepast op samplereeksen uit praktijksituaties. Het betreft hier signaldata gegenereerd door proefpersonen aan de Psychologische faculteit van de Katholieke Hogeschool Tilburg.

5 RESULTATEN VERKREGEN MET BESCHREVEN ORDESCHATTINGSMETHODEN

Hieronder worden resultaten beschreven verkregen m.b.v.:

- 1) een gesimuleerd proces bij verschillende signaal/ruis-verhoudingen.
- 2) een praktisch samplereeks, gegenereerd door een proefpersoon aan de afdeling der Psychologie van de Katholieke Hogeschool Tilburg.

Uitgebreider beschrijving van uitgevoerde experimenten treft U aan in de gebruikershandleiding (Koenraads 1978). Hierin wordt ook geschat aan een 4<sup>e</sup>-orde proces en aan samplereeksen van meerdere proefpersonen.

5.1 Resultaten, met behulp van een gesimuleerd proces verkregen

Beschrijving van het gesimuleerde proces:

Het proces is hetzelfde als voorgesteld door Åström, <sup>(1968)</sup> terwijl het ruisfilter hetzelfde is als voorgesteld door Talmon en Van den Boom (1973).

$$\text{proces} : y(k) = 1.5y(k-1) - 0.7y(k-2) + u(k-1) + 0.5u(k-2) + e(k) \quad (5.1)$$

$$\text{ruis} : e(k) = 0.5e(k-1) + \xi(k) + 0.3\xi(k-1) \quad (5.2)$$

De signalen  $u(k)$  en  $\xi(k)$  zijn witte ruisreeksen met rechthoekige verdeling tussen resp.  $(-1, 1)$  en  $(-\lambda, \lambda)$ . We hebben voor schatting de beschikking over samples  $u(k)$  en  $y(k)$ : de verstoorde uitgang van de dynamica van het proces. Er wordt geschat over 1000 samples en voor signaal/ruis-verhoudingen van 8.3 tot -15.7 (dB).

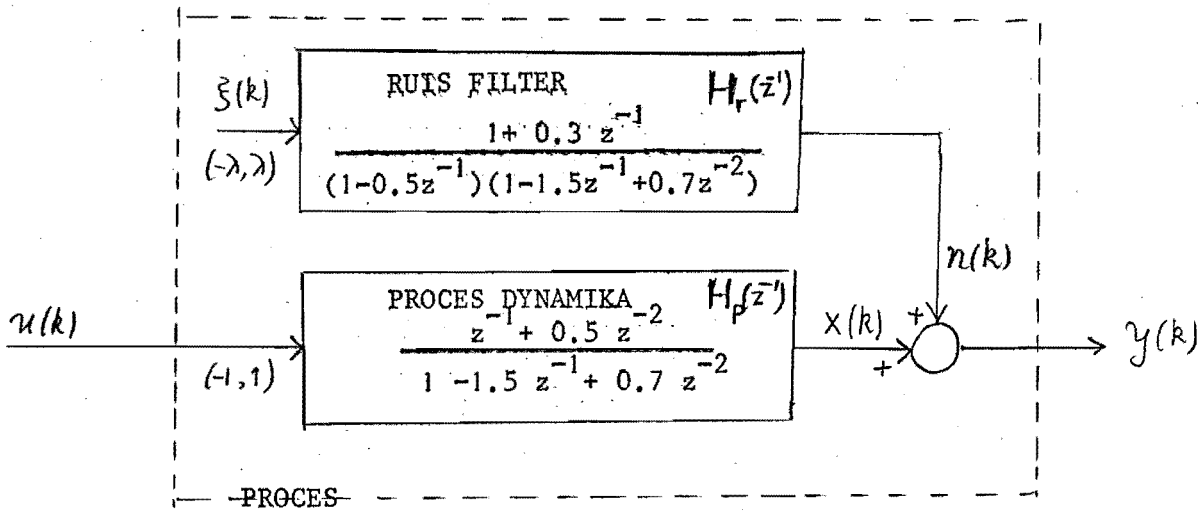
De S/N-verhouding voor het niet-verstoorde signaal  $x(k)$  en de additieve ruis  $n(k)$  (zie fig.5.1) is gedefinieerd als :

$$\frac{S}{N} \cong 10 \cdot \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \text{ [dB]} \text{ met } \sigma_n^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_r(z) \cdot H_r(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (5.3)$$

( $\sigma^2 = \text{vermogen v/h signaal}$ ).

Voor boven beschreven proces geldt de volgende relatie tussen  $\lambda$  en S/N:

- $\lambda = 1/4$  , S/N = 8.3 dB
- $\lambda = 1$  , S/N = -3.7 dB
- $\lambda = 4$  , S/N = -15.7 dB



FIG; 5.1 : Gesimuleerde procesdynamika met ruisfilter.

Voor parameterschatting is gebruik gemaakt van de extended matrix methode.

Fig. 5.3 toont het polen/nulpunten beeld van het proces  $H_p(z^{-1})$  in het z-vlak, terwijl in fig.5.4 dat van het ruisproces  $H_r(z^{-1})$  te vinden is.

RESULTATEN:

Determinanten, genormeerd m.b.v. maximale inhoud. (fig.5.5-5.8)

Fig. 5.5 toont het gedrag van de determinant met z'n 1<sup>e</sup>- en 2<sup>e</sup>-differentie. Hieruit blijkt dat we moeten kijken naar een plotselinge regelmatige daling van de determinant en/of stabilisering van de 1<sup>e</sup>-diff. tot een konstante waarde en/of minimum van de 2<sup>e</sup>-diff. Voor  $\lambda \gg 2.5$  blijkt dit laatste criterium niet meer bruikbaar te zijn, echter wél de eerste twee genoemde. Voor  $\lambda = 4$  zien we niets opvallends meer aan de determinant zelf, maar nog wel de 1<sup>e</sup>-diff. Samen met de 2<sup>e</sup>-diff. kunnen we hiervoor nog konkluderen tot orde  $q=2$ , hoewel dit al aanvechtbaar is. Dit geldt des te sterker voor kleinere S/N-verhoudingen.

Spoor van de matrix, genormeerd m.b.v. maximale inhoud. (fig.5.9-5.1)

Wederom kijken we naar het gedrag voor  $\lambda = 0$ . Hieruit blijkt dat we moeten kijken naar konstante toename van het spoor d.w.z. stabilisering van de 1<sup>e</sup>-differentie, idem voor de 2<sup>e</sup>-differentie. Dit gedrag blijft behouden tot  $\lambda = 1$ . Voor  $\lambda = 4$  (fig.5.13) blijft van dit gedrag weinig over, zodat we hier niet in staat zijn een verantwoorde schatting te doen.

Determinanten, genormeerd m.b.v  $\gamma_{uu}^{(0)}$  en  $\gamma_{yy}^{(0)}$  (fig. 5.13-17)

Hier geldt hetzelfde als boven beschreven bij de m.b.v de maximale inhoud genormeerde determinant, wat betreft het verwachte verloop als functie van  $\hat{q}$ . Ook de resultaten ontlopen elkaar niet veel, vooral wat betreft de onzekerheid bij  $\lambda \gg 4$ .

Foutfunctie V1 berekend volgens Woodside (fig. 5.17-20)

Het voorspelde verloop hiervan is als volgt: Plotselinge daling wanneer de juiste orde bereikt wordt, terwijl deze hierna niet significant meer daalt. Dit houdt voor de 1<sup>e</sup>-differentie een minimum en voor de 2<sup>e</sup>-diff. een maximum in. Dit minimum is nog voor  $\lambda = 4$  te herkennen. Voordeel van deze methode is het kleine aantal benodigde samples (20).

Polen/nulpunten-opheffing (fig. 5.21-23)

Met groot gemak is dat effect tot  $\lambda = 4$  te konstateren, hoewel dit voor ordes  $\hat{q} = 4$  en 5 moeilijker wordt naarmate de S/N-verhouding afneemt. Hiervoor zijn vaak lange schattingen nodig om tot stabiele parameterwaarden te komen, vooral wanneer we schatten aan een model van hoge orde (veel parameters, langzame convergentie).

De foutfunctie V1 (fig. 5.24-25)

Het verwachte verloop is zoals hierboven vermeld voor de methode van Woodside. Tot  $\lambda = 4$  is nog met grote zekerheid te konkluderen tot orde  $q=2$ . Hetzelfde geldt voor de foutfunctie V2.

De foutfunctie V2 (fig. 5.27-32)

Zie boven.

In de figuren 5.30-32 zien we het verloop van V2 voor verschillende ordes van het ruisfilter bij konstante procesorde  $\hat{q}=2$ . Hieruit volgt dat bepaling van de orde van het ruisfilter zeer goed mogelijk is tot kleine S/N-verhoudingen. De procesorde moet natuurlijk reeds (globaal) bekend zijn.

De autokorrelatie functie van  $\hat{\xi}(k)$ . (fig. 5.33-45)

In fig. 5.33 is  $\tilde{R}_{\hat{\xi}}(\tau)$  uitgezet voor  $\hat{s}=0$  en  $\hat{q}=0,1,2,3,4,5$ , met daarin de betrouwbaarheidsgrenzen. Om beter te kunnen beoordelen of de autokorrelatie functie de eigenschappen heeft van die van een witte ruisreeks is in de hieropvolgende figuren de spreiding berekend van  $\tilde{R}_{\hat{\xi}}(\tau)$ . Met behulp van de betrouwbaarheidsgrens is nu beter te bepalen vanaf welke orde voldaan is aan de gestelde eis.

In de figuren 5.34-42 is achtereenvolgens uitgezet de functie  $10 \log \hat{\sigma}^2(R_{\hat{\xi}})$  voor procesordes  $\hat{q}=0,1,2,3,4,5$  voor ruisorde  $\hat{s}=0,1,2$  voor S/N-verhoudingen 8.3 tot -15.7 dB (resp.  $\lambda = 1/4, 1$  en  $4$ ). Het verloop is voor  $\lambda = 1$  en  $4$  als volgt: ( $\lambda = 1/4$  wijkt af)

Voor  $\hat{s}=0$  konkluderen we tot  $q=3$ , voor  $\hat{s}=1$  tot  $q=2$  en voor  $\hat{s}=2$  tot  $q=1$ . Hieruit blijkt dat deze methode geen onderscheid kan maken tussen proces- en ruisorde. Dit kan als volgt verklaard worden: Uit vgl. 5.1 en 5.2 volgt:

$$(1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2})y(k) = (z^{-1} + 0.5z^{-2})u(k) + \frac{\xi(k)}{1 - 0.8z^{-1} + 0.24z^{-2} + \dots} \quad (5.4)$$

Hieruit blijkt dat  $(1 - 0.8z^{-1})$  een goede benadering is van  $(1 - 0.8z^{-1} + 0.24z^{-2} - 0.072z^{-3} + \dots)$ , waaruit:

$$(1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2})(1 - 0.8z^{-1})y(k) = (z^{-1} + 0.5z^{-2})(1 - 0.8z^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (5.5)$$

Dit duidt op een 3<sup>e</sup>-orde proces.

In de figuren 5.43-45 is de ruismodelorde  $\hat{s}$  gevarieerd bij vaste procesmodelorde  $\hat{q}=2$ . Hieruit volgt dat we bij juiste  $\hat{q}$  tot kleine S/N-verhoudingen een verantwoorde uitspraak kunnen doen over de ruisorde  $s$ .

Test op Gaussische verdeling van  $\hat{e}(k)$  (fig. 5.46-49)

In tegenstelling tot wat door Göhring ('73) verondersteld wordt vind ik dat voor ordes  $\hat{q} \leq q$   $\hat{e}(k)$  gaussisch verdeeld is, terwijl deze voor  $\hat{q} > q$  meer rechthoekig wordt. Zelfs voor lange samplereeksen blijkt dit het geval te zijn, zodat deze methode met de nodige voorzichtigheid moet worden gehanteerd. Fig 5.49 geeft de kumulatieve verdeling. Ook hieruit kan men nauwelijks een verantwoorde ordeschatting doen, mede door het feit dat hierin kleine foutjes worden uitgemiddeld door het integrerende karakter.

Relatieve determinanten van  $C_{11}$  en  $C_{22}$  (fig. 5.50-55)

We kijken naar een ploëselinge afname van de determinant en/of minimum van de 2<sup>e</sup>-differentie. Tot  $\lambda = 4$  konkluderen we hieruit dat  $q = 2$ .

Met behulp van de relatieve determinant van  $C_{22}$  kunnen we bij juiste procesorde  $\hat{q}=2$  tot  $\lambda = 4$  besluiten tot ruisorde  $s=1$ .

Test op signaalfouten (fig. 5.56-48)

Door visuele vergelijking van modeluitgangssignalen met de procesuitgang kunnen we bepalen welke orde akseptabel is. Dit is gemakkelijk voor grote signaal/ruis-verhoudingen, daar hiervoor de juiste 'fit' redelijk goed is. Voor kleinere S/N-verhoudingen ( $\lambda > 1$ ) is dit niet meer het geval, en krijgen we te maken met afwijkingen in de procesparameters. Typerend is het feit dat telkens voor  $\hat{q}=3$  de beste benadering wordt verkregen, terwijl deze voor orden  $\hat{q}=4$  en 5 slechter is.

5.2 Ordeschatting aan een praktijkamplereeks (fig. 5.59-67)

Doel van dit experiment is een antwoord te vinden op de vraag of het gedrag van de proefpersoon beschreven kan worden d.m.v. een lineair proces van bepaalde orde, en zo ja of de daarbij behorende parameters karakteristiek zijn voor de proefpersoon en/of leerfase.

De proefpersoon krijgt op een scherm 10 achtereenvolgende signaalwaarden van  $y$  te zien. Hem wordt gevraagd een voorspelling te doen voor de volgende waarde, na het intikken waarvan de juiste waarde verschijnt. Dit herhaalt zich 350 maal, waarbij telkens een voorspelling  $\hat{y}$  gemaakt wordt aan de hand van de laatste 10 signaalwaarden van  $y$ . Het signaal  $y$  bestaat uit een door 'n 1<sup>e</sup> orde discreet lineair filter (met filterfaktor:  $f$ ) gefilterde witte ruisreeks. (zie fig. 5.2)

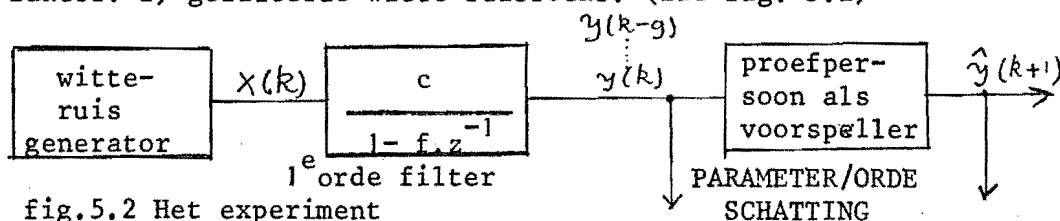


fig.5.2 Het experiment

Uit parameterschatting (fig. 5.59) voor orde 3 blijkt dat de parameters min of meer sprongsgewijs veranderen. Dit blijkt voor meerdere reeksen het geval te zijn en duidt op een verandering in voorspellingsstrategie. Hierdoor kunnen we dit leerproces als stuksgewijs tijdinvariant beschouwen. Ordeschatting over de hele reeks levert hierdoor een onbetrouwbare schatting  $q=2$  op. (zie fig. 5.60). Omdat we voor parameterschatting over maximaal 50 samples kunnen beschikken zal deze onbetrouwbaar zijn, zo ook de hierop gebaseerde ordeschattingmethoden! De methode van Woodside daarentegen levert (fig. 5.64-67) vrij bemoedigende resultaten: schatting over telkens 20 samples levert  $q=4,4,5$  en 5. Dit wordt nog ondersteund door berekening van de determinant en spoor (fig. 5.61-63) en blijkt voor meerdere proefpersonen te gelden! Meer resultaten van meerdere proefpersonen treft U aan in de gebruikershandleiding (Koenraads, 1978).

### 5.3 Vergelijking der methoden

Wat betreft bepaling van proces- en/of ruisorde kunnen we besproken tests indelen in 3 kategoriën.

- 1) bepaling van alleen procesorde
- 2) bepaling van proces- en ruisorde, elk afzonderlijk
- 3) bepaling van proces- en ruisorde in combinatie met elkaar

Tot groep 1) behoren de berekening der determinant en spoor, bepaling van  $V_1$  volgens Woodside en de polen/nulpuntenmethode, welke laatste vrij traag is. Tot groep 2) behoren bepaling van  $V_1$ ,  $V_2$  en  $\text{rel.det. } C_{11}$ ,  $-C_{22}$ . Hiermee is gescheiden ordebepaling tot  $-15.7$  dB ( $\lambda=4$ ) mogelijk! Tenslotte groep 3): witheid der residuen, verdeling van  $\hat{e}$  en de test op signaalfouten. Laatstgenoemde methoden worden aangeraden als laatste check op eerder genoemden daar ze niet veel rekentijd vereisen en gebaseerd zijn op reeds aanwezige schattingsresultaten.

Persoonlijk raad ik de volgende volgorde aan:  $V_1$  volgens Woodside voor een snelle oriëntatie, bij twijfel evt. aangevuld met determinant en spoor. Daarna parameterschatten met of zonder ruismodel van orde 0 tot voorbij verwachte orde, vervolgens parallel aan elkaar: beschouwing van verloop van parameters,  $\hat{e}(k)$  en  $\hat{\xi}(k)$ , berekening van  $V_1$  en  $V_2$ , polen/nulpunten,  $\text{rel.det. } C_{11}$ , witheid der residuen, evt. test op normaalverdeling en tenslotte test op signaalfouten. Als we nu enige zekerheid hebben omtrent de procesorde kunnen we nu opnieuw parameters gaan schatten waarbij we de ruisorde  $\hat{s}$  variëren bij vaste  $\hat{q}=q$ . Met  $V_2$  en  $\text{rel.det. } C_{22}$  kunnen we nu beslissen omtrent ruisorde  $s$ .

6

### KONKLUSIE

In dit verslag zijn een aantal ordeschattingsmethoden besproken en aan de hand van resultaten aan gesimuleerde- en praktijksemblereeksen vergeleken. Bij analyse van laatstgenoemde reeksen is kennis van het karakteristieke gedrag der methoden aan de hand van gesimuleerde processen van grote waarde, vooral bij kleine S/N-verhoudingen. Wat betreft rekensnelheid kunnen we 2 groepen onderscheiden: 1) determinant, spoor en  $V_1$  volgens Woodside (enkele sekonden) en 2) overige methoden gebaseerd op parameterschatting voor verschillende orden (enkele minuten afh. van lengte samplereeks). Slotkonklusie is dat het mogelijk is de proces- en ruisorde afzonderlijk te schatten m.b.v de foutfuncties  $V_1$  met  $V_2$  en  $\text{rel.det. } C_{11}$  met  $-C_{22}$  tot signaal/ruis-verhoudingen van  $-15.7$  dB ( $\lambda=4$ ).



## 7. LITERATUUR

1. Aström K.J. (1968)  
"Lectures on the identification problem - the least squares method"  
Report 6806, Lund Institute of Technology, Sweden.
2. Van den Boom A.J.W. en van den Enden A.W.M. (1973)  
"The determination of the order of process- and noisedynamics"  
Preprints, Third IFAC Symposium on Identification, The Hague
3. Van den Enden A.W.M. (1973)  
"Bepaling van de orde van lineaire diskrete en kontinue processen"  
Afstudeerverslag T.H. Eindhoven.
4. Eykhoff P. (1974)  
"System Identification : Parameter and state estimation"  
J. Wiley and Sons, London.
5. Giesbers H.A. (1974)  
"On the determination of the order of linear diskrete and continuous systems", M. Sc. Thesis, T.H. Eindhoven.
6. Göhring B. (1973)  
"Erprobung statistischer parameterschätzmethoden und strukturprüf-  
verfahren zur experimentellen identification von regelsystemen",  
pp. 46-55
7. Hofman J.A.M.  
"Testmethoden voor het bepalen van de orde van lineaire processen"  
Afstudeerverslag T.H. Eindhoven.
8. Iserman R. (19 )  
"Prozess identification" (Identification und parameterschätzung dyna-  
mischer prozesse mit discreten signalen", pp. 144-155
9. Laning J.H. en Battin R.H. (1956)  
"Random processes in Automatic control"  
Mc Graw-Hill, New York.
10. Koenraads A.J.T.M. (1978)  
"Gebruikershandleiding bij ordeschattingsmethoden in SATER"  
Verslag T.H. Eindhoven.
11. Lemmens W.J.M. en van den Boom A.J.W. (1977)  
"Interactive Computer programs for education and research, a survey"  
IFAC, on trends in Aut. Control Education, Barcelona.
12. Van de Sommen F.L.J. (1971)  
"De bepaling van de orde van lineaire systemen"  
Afstudeerverslag T.H. Eindhoven.
13. Talmon J.L. (1971)  
"Approximated Gauss-Markov estimators and related schemes"  
Report 71-E-17, University of Technology, Eindhoven.
14. Talmon J.L. en van den Boom A.J.W. (1973)  
"On the estimation of the transferfunction-parameters of process- end  
noisedynamics using a single-stage estimator",  
Proceedings Third IFAC Symposium on Identification, The Hague/Delft.
15. Unbehauen H. en Göhring B.  
"Application of different statistical tests for the determination of  
the model in parameter estimation", University of Stuttgart, W. Germany.

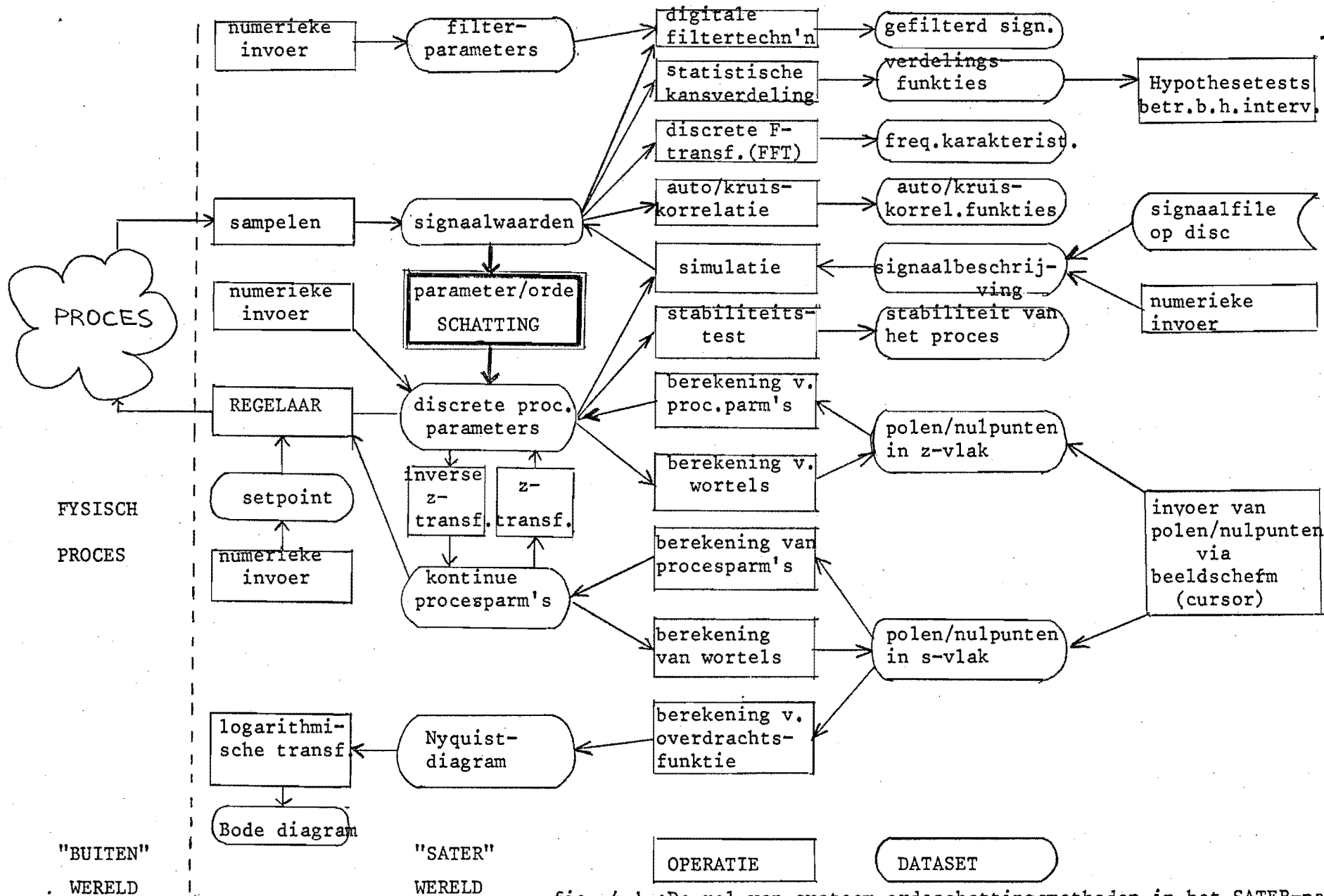


fig. 4.1 :De rol van systeem-ordeschattingmethoden in het SATER-pakket

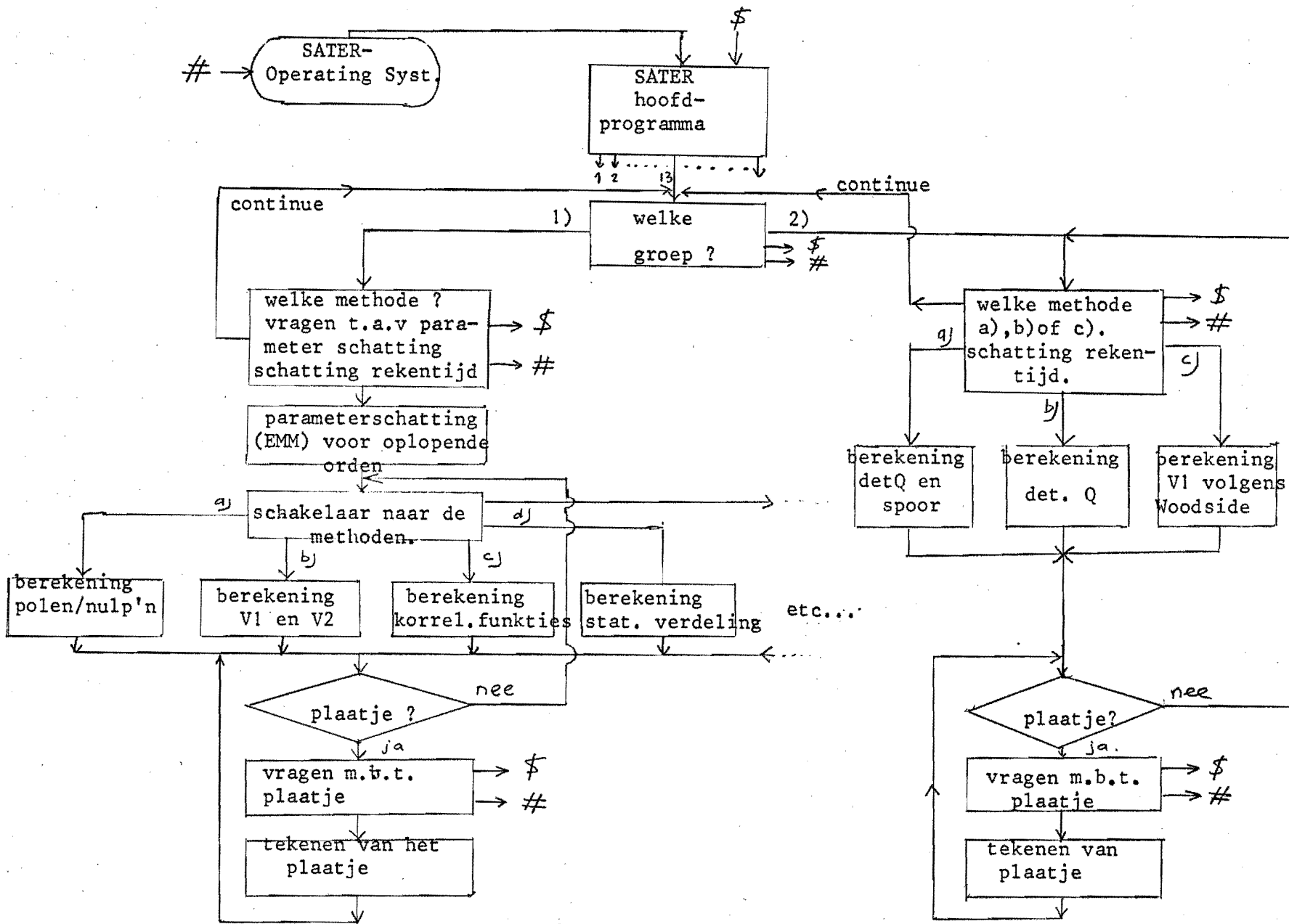


fig. 4.3 :Funktionele beschrijving der subroutines.

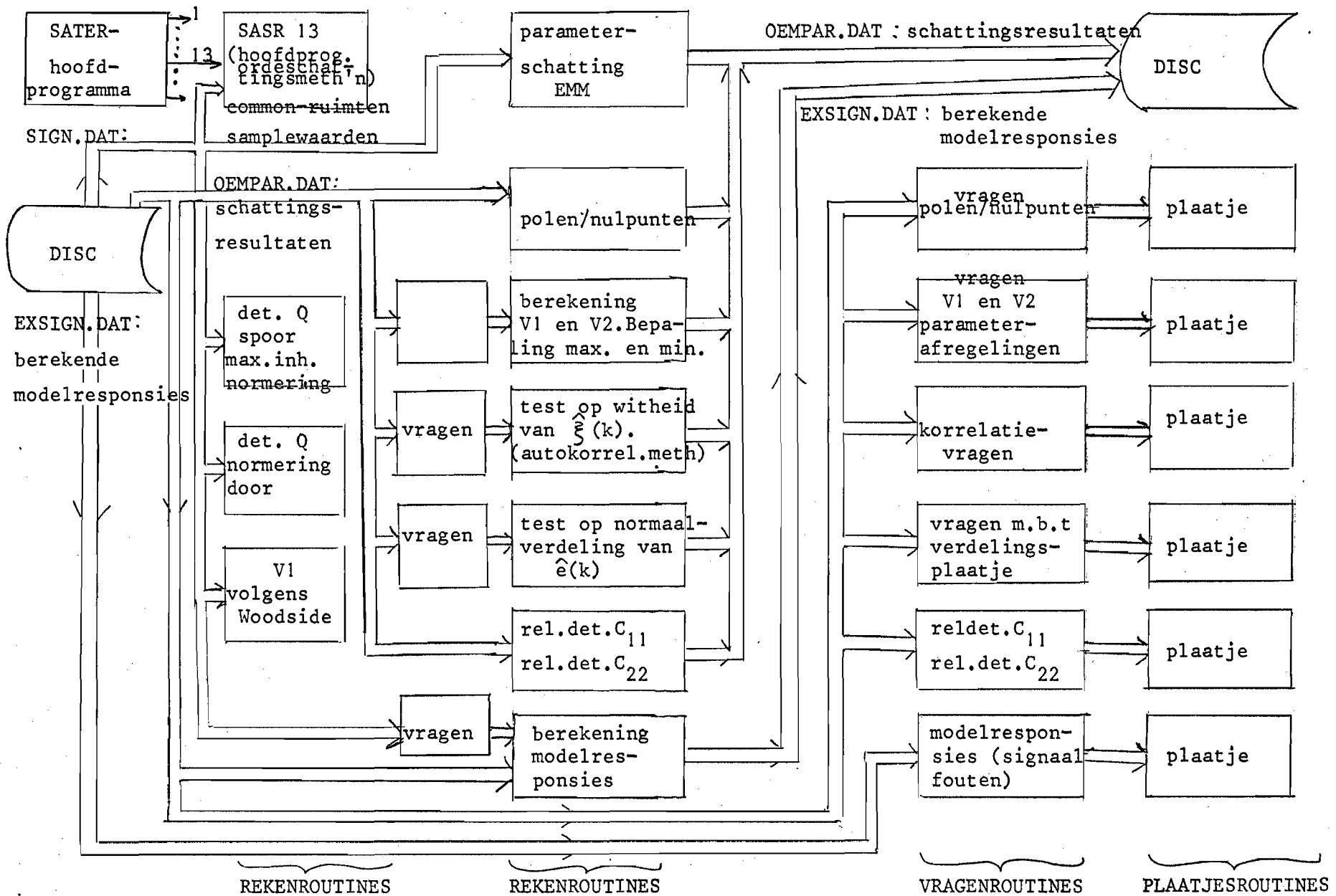


FIG. 4.4 : Relatie datafiles en subroutines van de ordeschatting methoden.

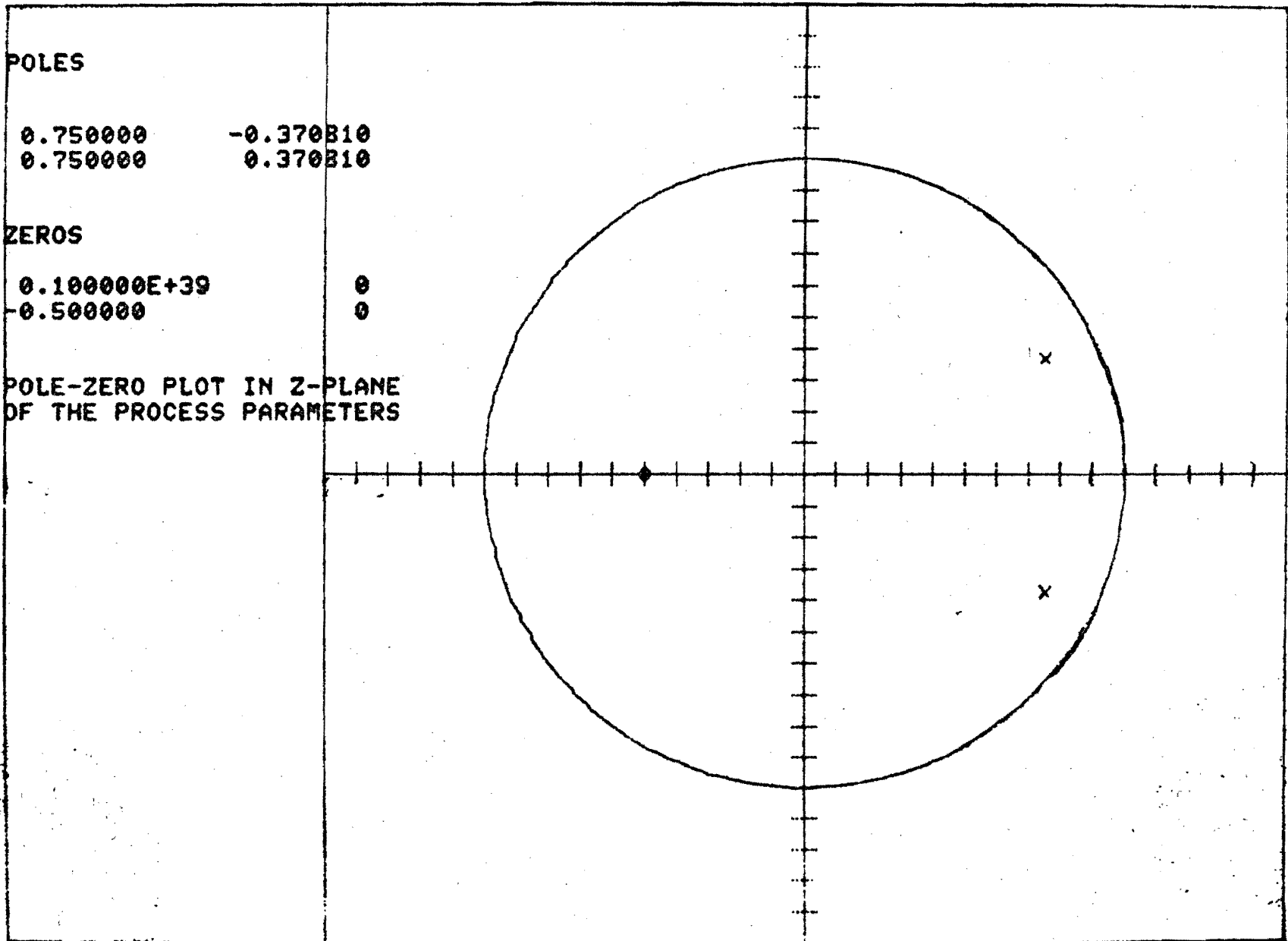


fig. 5.3 : Polen/nulpunten-plaatje van het gesimuleerde proces (Aström) :  $H_p(z^{-1})$

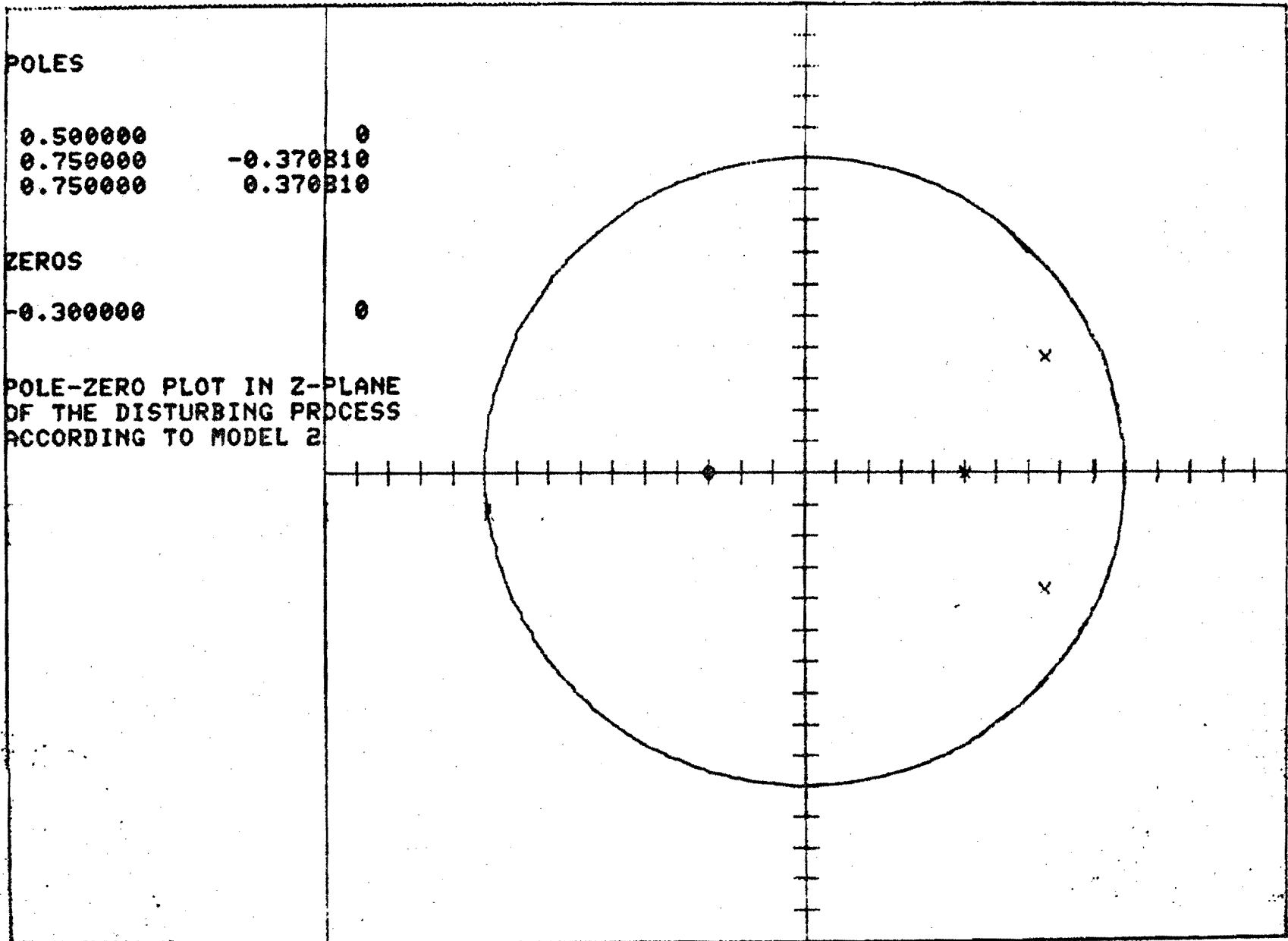
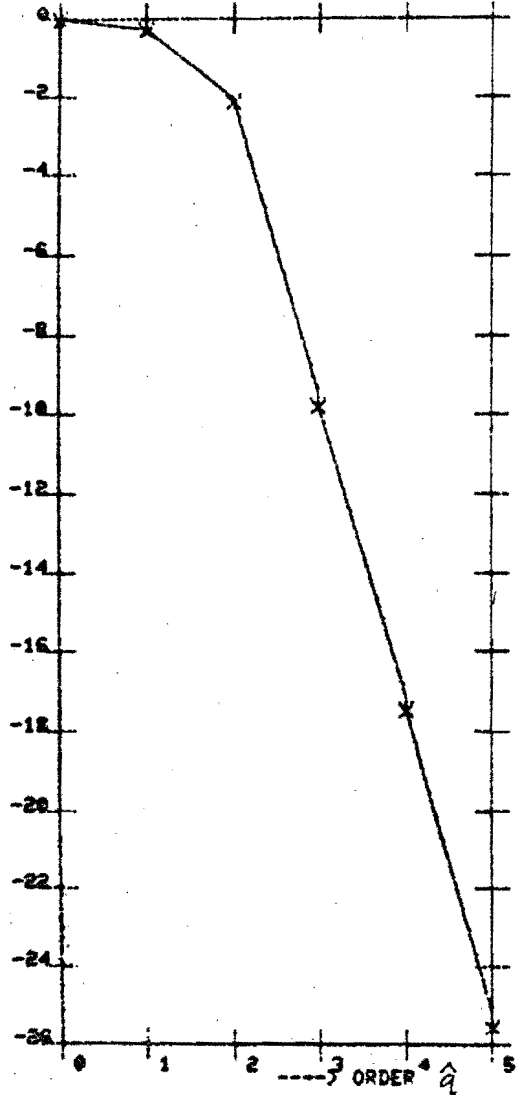
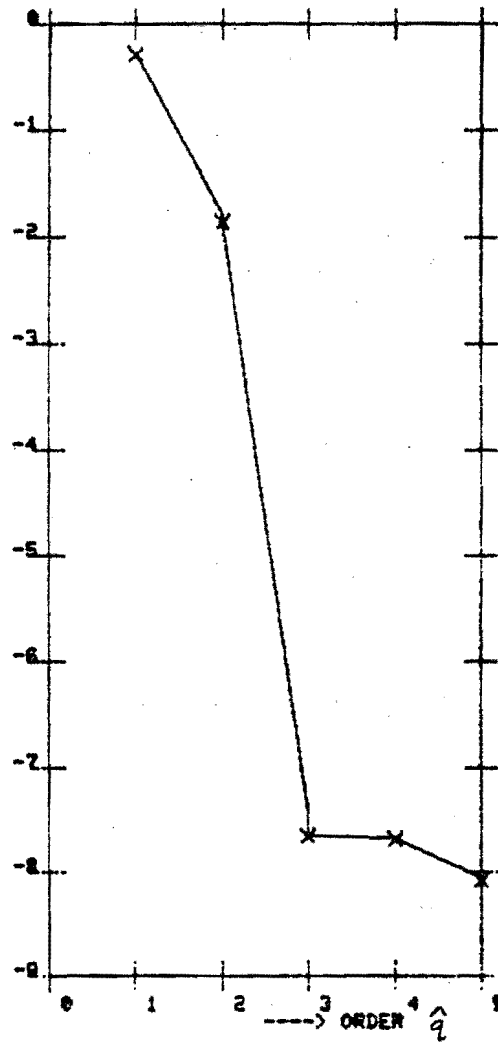


fig. 5.4 :Polen/nulpunten-plaatje van het ruisproces  $H_r(z^{-1})$ .

VALUE  
DETERMINANTS, NORMALIZATION BY MAXIMUM CONTENT



1ST DIFFERENCE



2ND DIFFERENCE

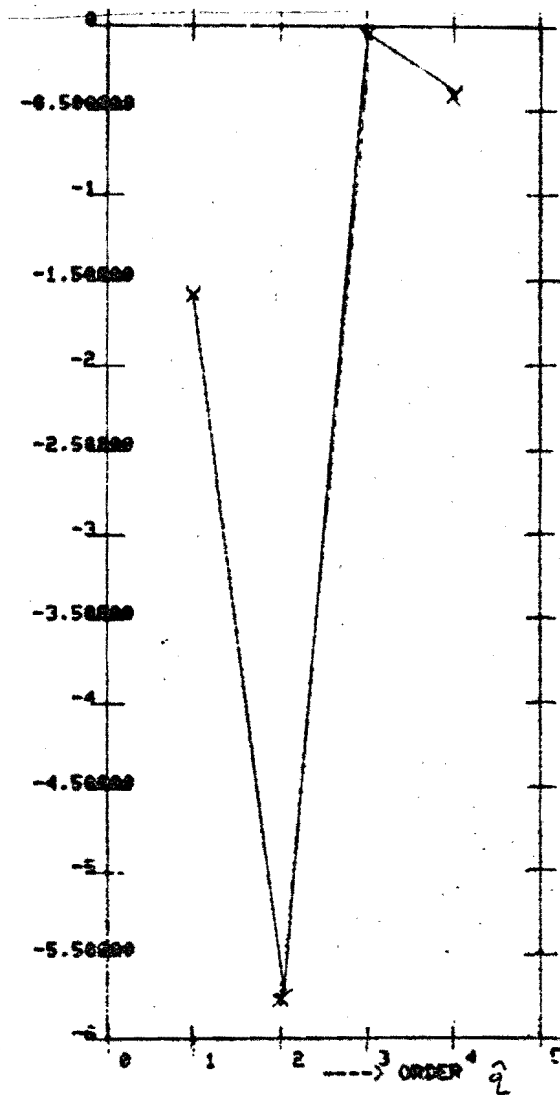
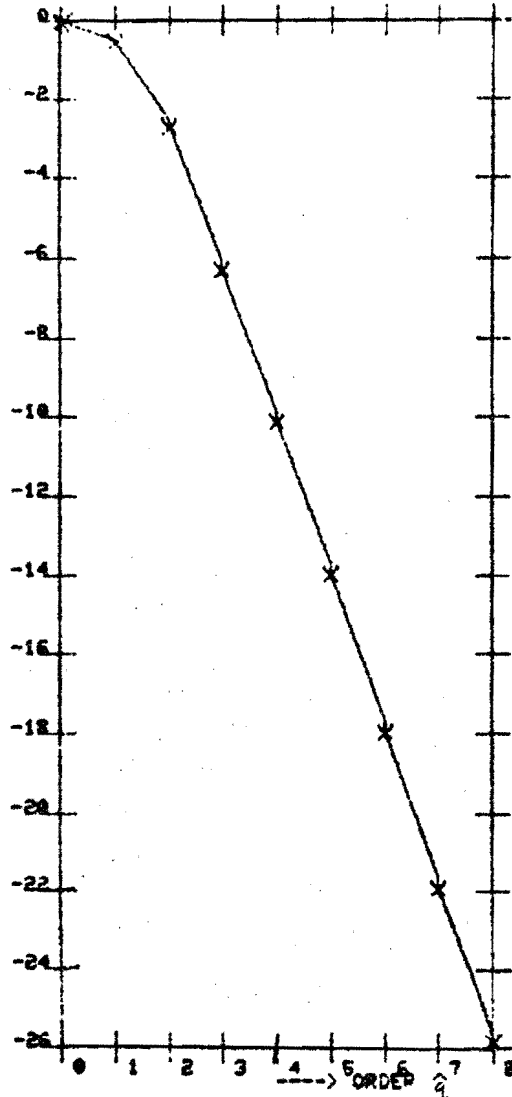
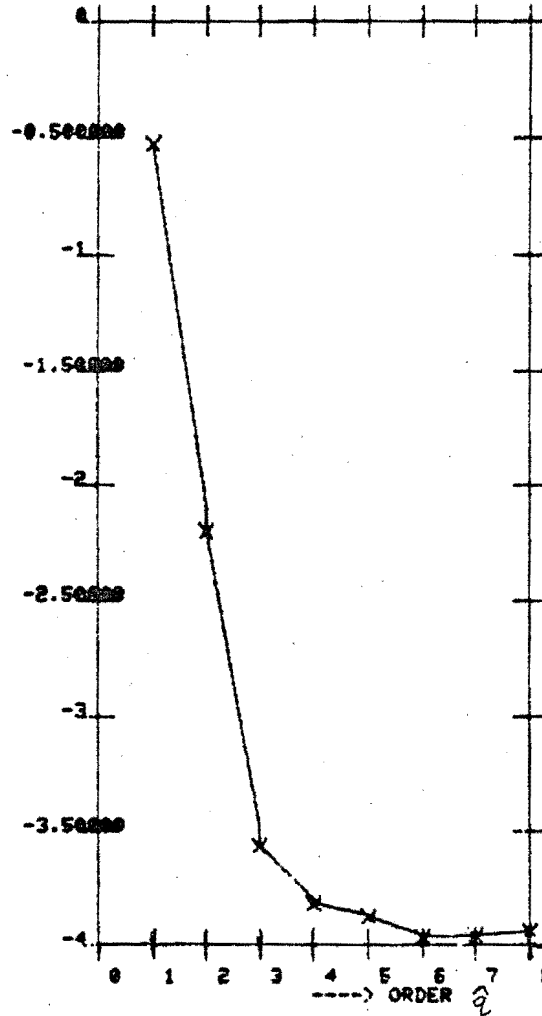


fig. 5.5 ;  $S/N = \infty$  , 50 samples.  
( $\lambda = 0.1$ )

VALUE  
DETERMINANTS, NORMALIZATION BY MAXIMUM CONTENT



1ST DIFFERENCE



END DIFFERENCE

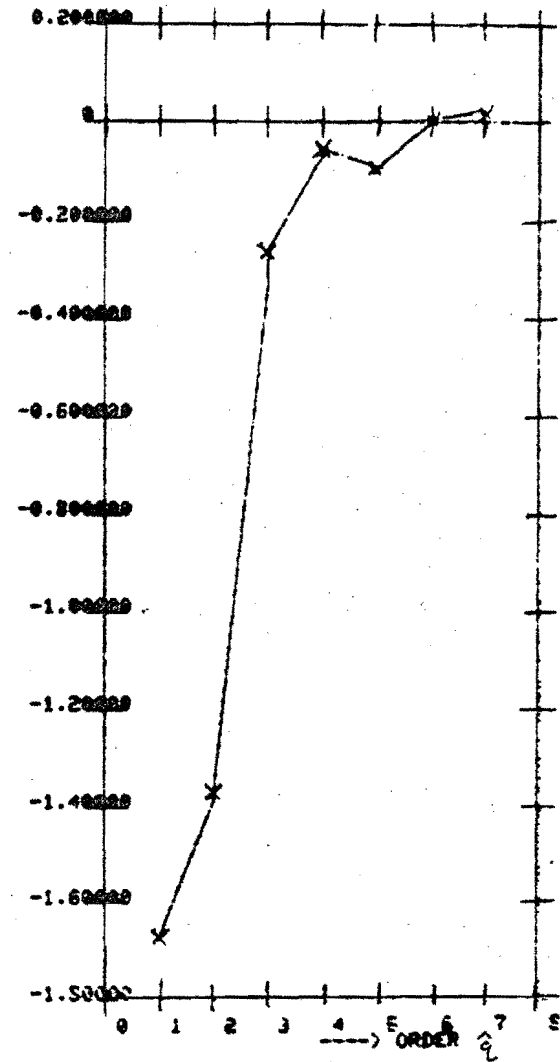


fig. 5-6 : S/N = 8,3 dB , 50 samples.  
( $\lambda = .25$ )



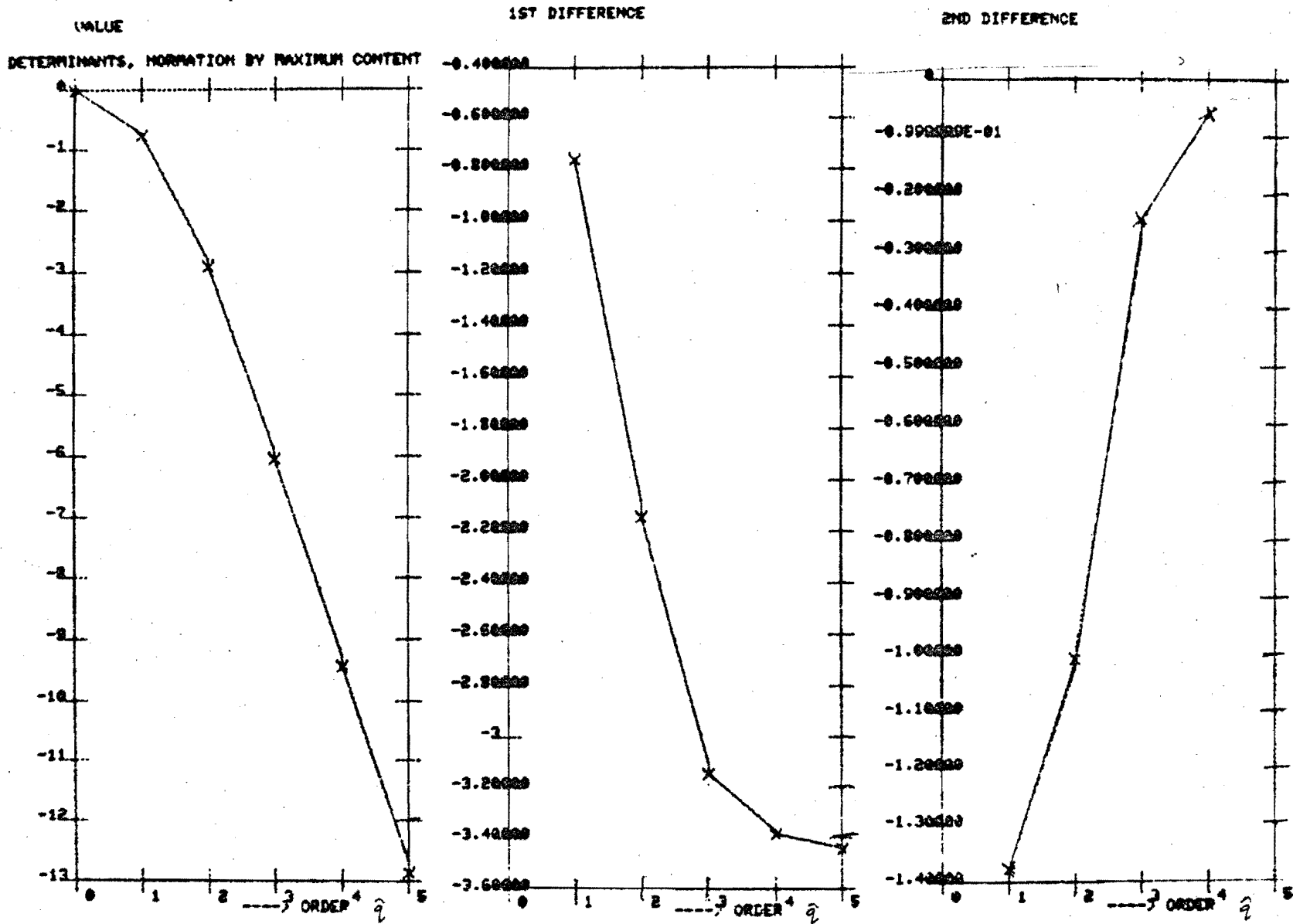


fig. 5.7 : S/N = -3,7 dB, 50 samples.  
( $\lambda = 1.$ )

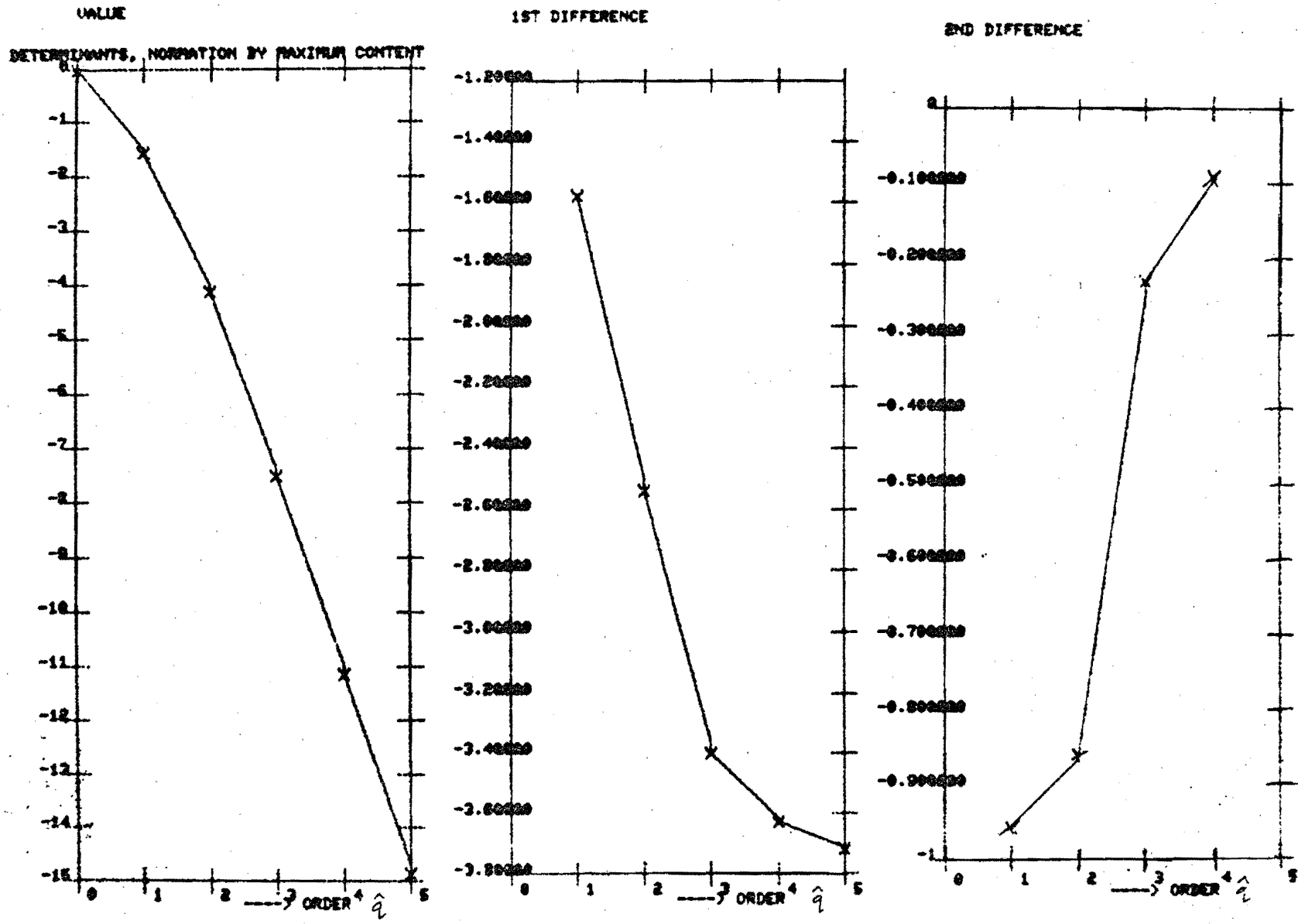


fig. 5.8 : S/N = -15,7 dB, 50 samples.  
( $\lambda = 4$ .)

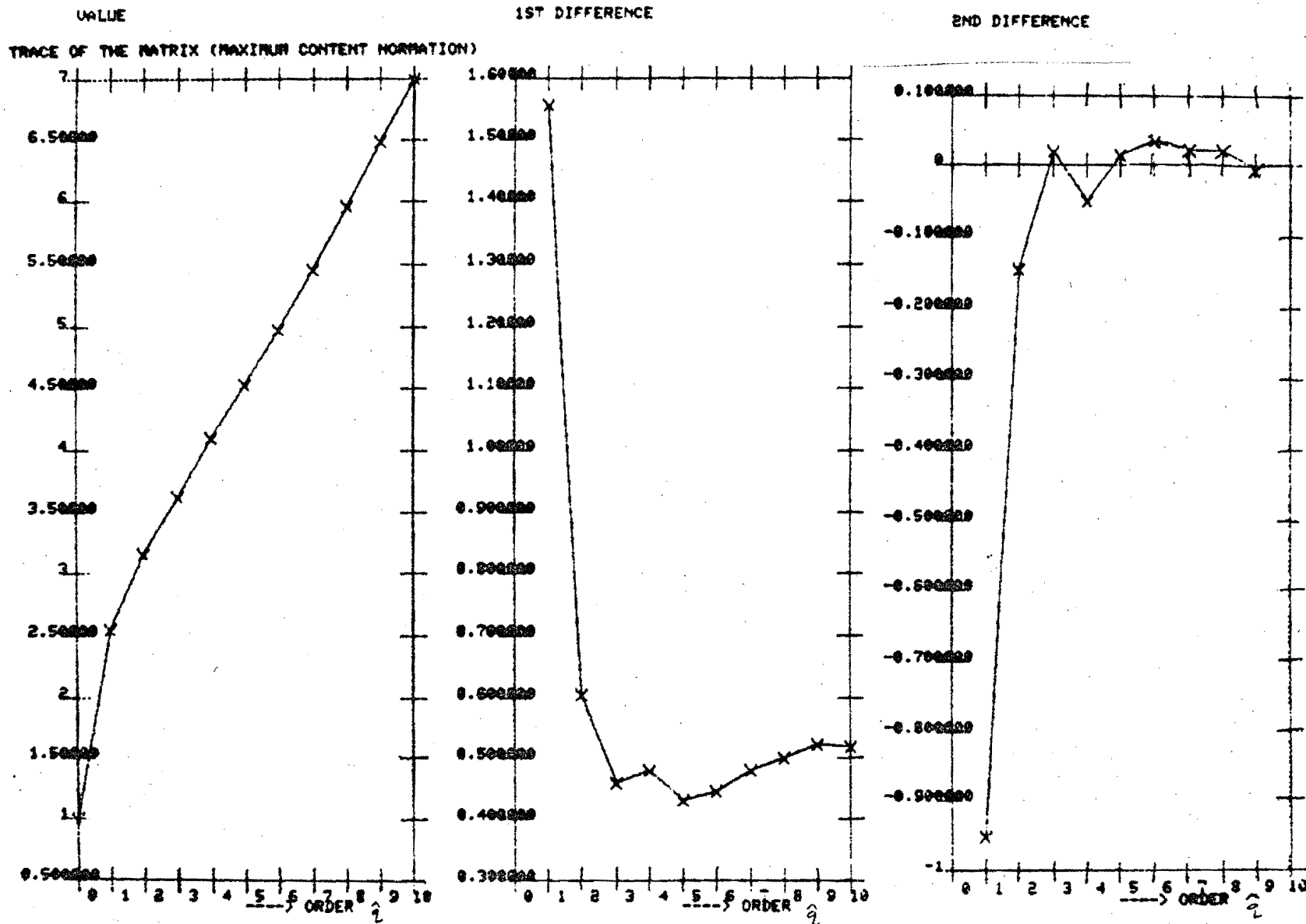


fig. 5.9 :  $S/N = \infty$  , 50 samples.  
 $(\lambda = 0)$

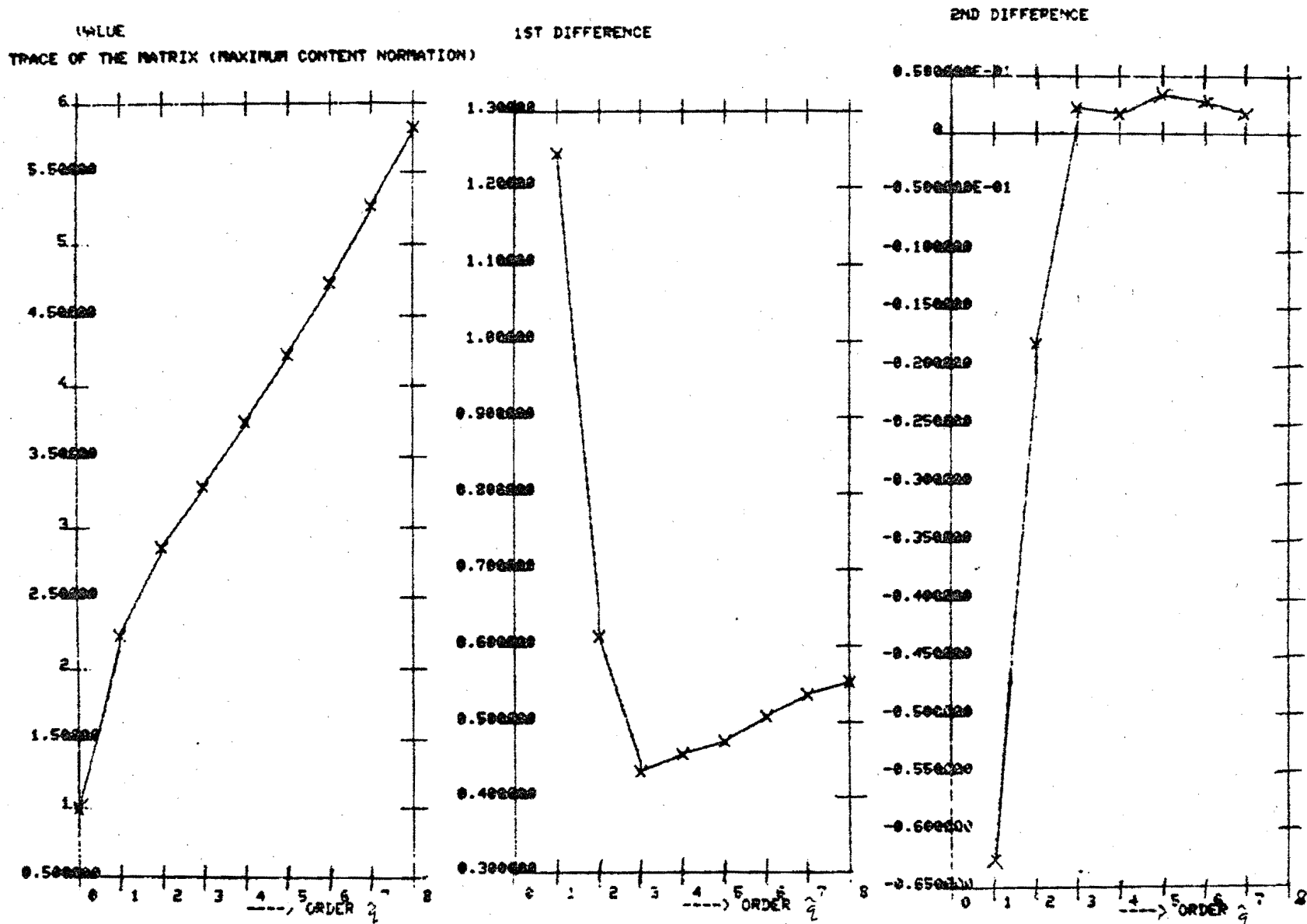


fig. 5.10:  $\frac{S}{N} = 8,3 \text{ dB}$ , 50 samples.  
 $(\lambda = .25)$

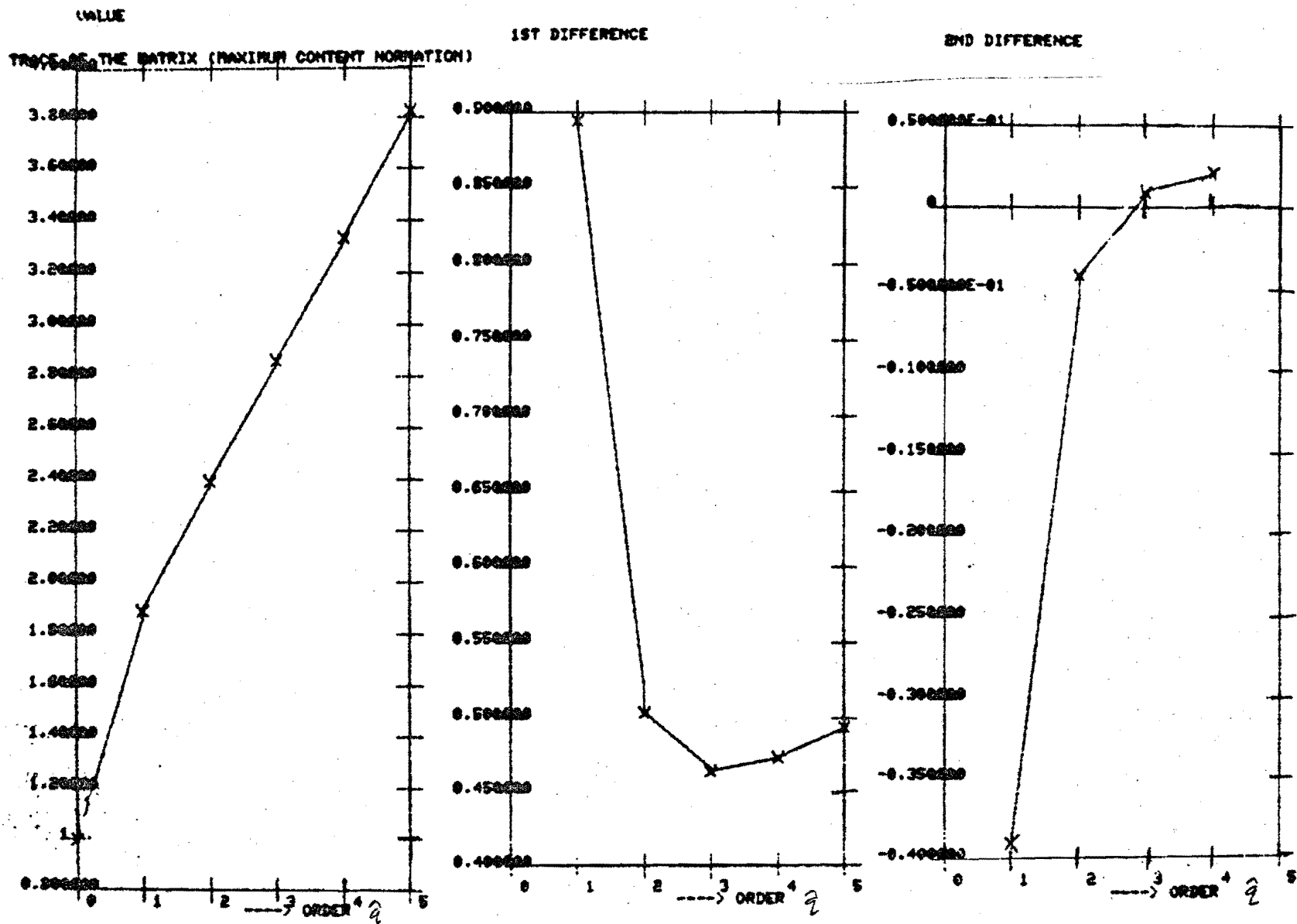


fig. 5.11 : S/N = -3,7 dB, 50 samples.  
( $\lambda = 1.$ )

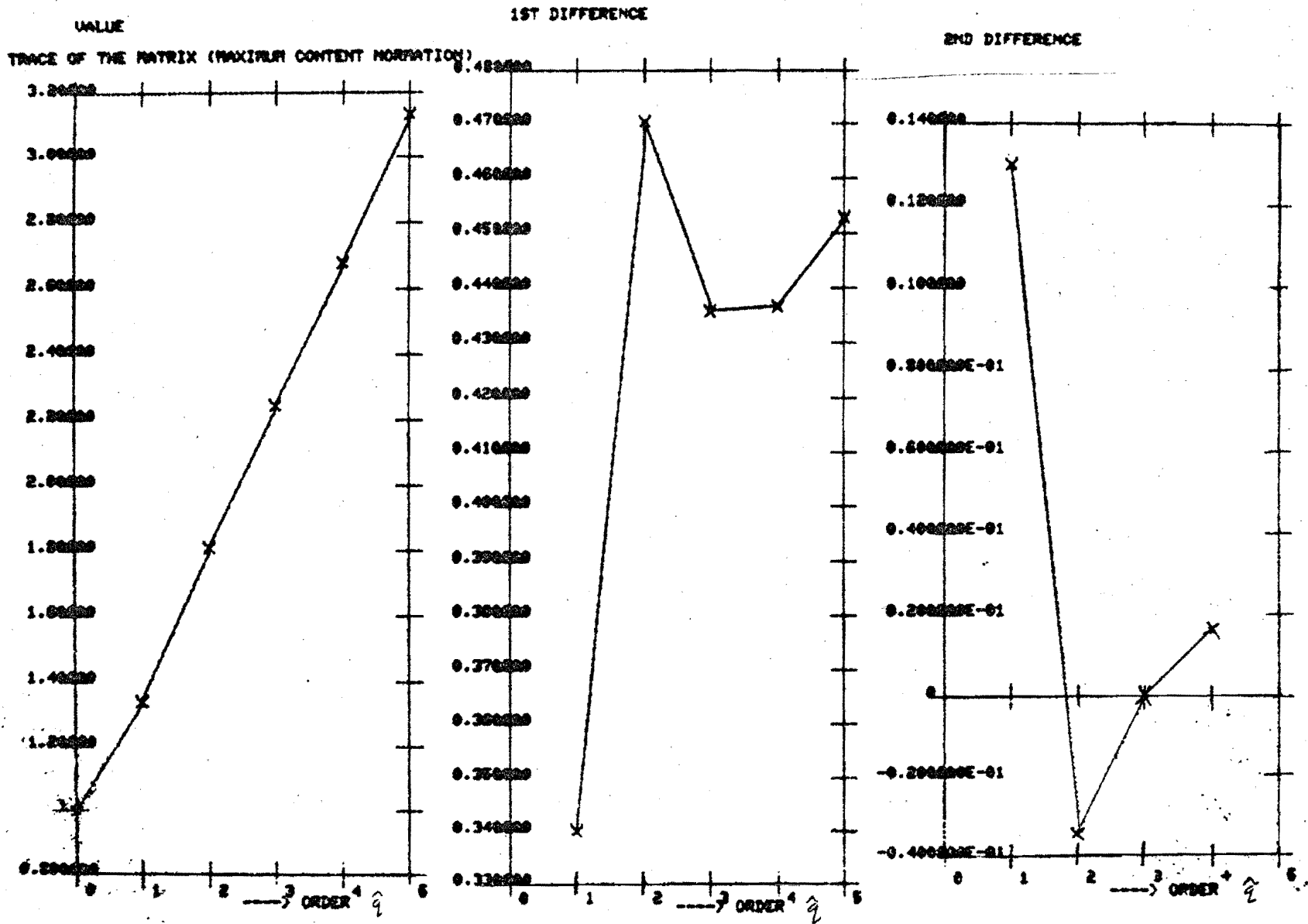


fig. 5.12 : S/N = -15,7 dB, 50 samples.  
 ( $\lambda = 4$ )

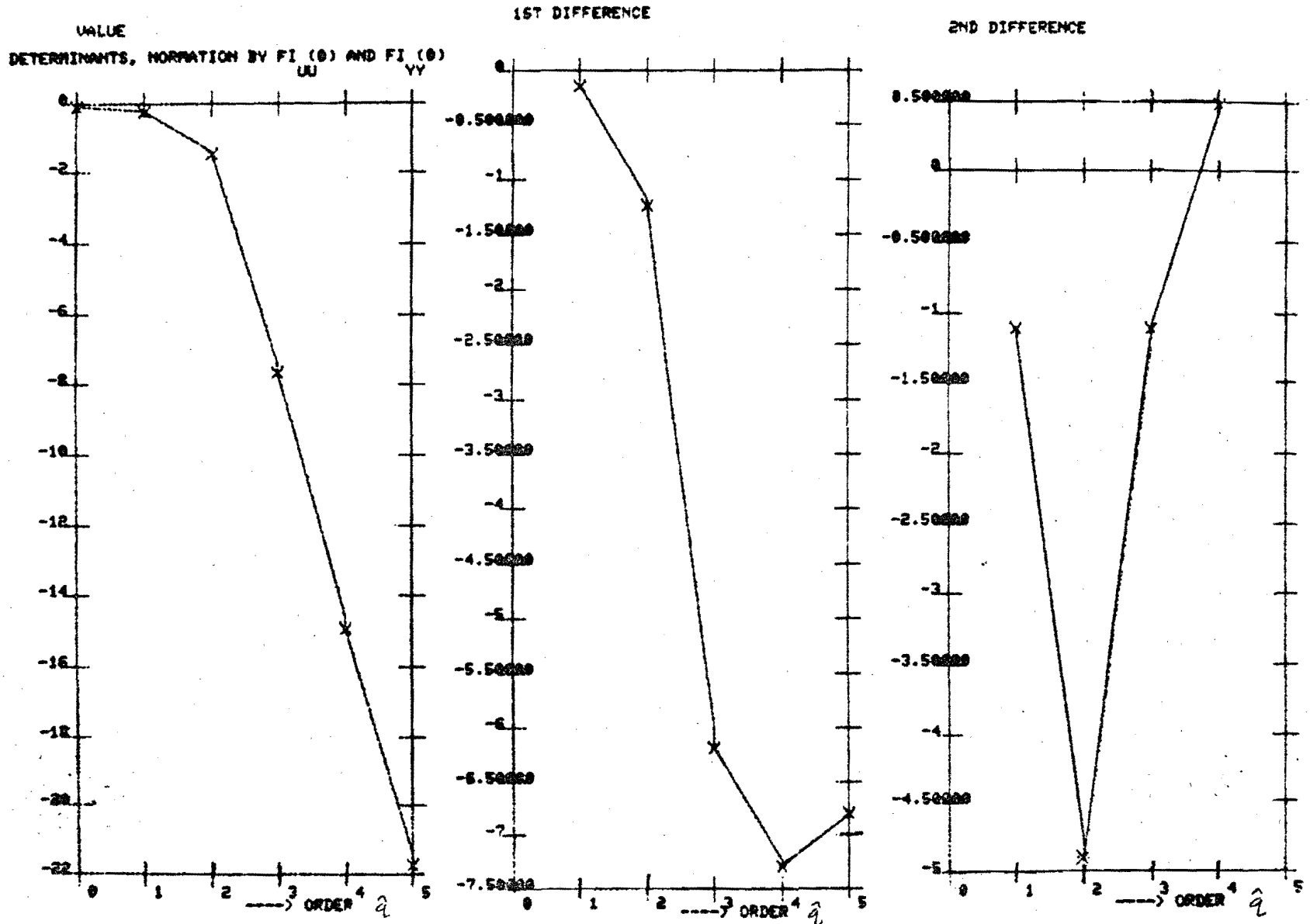


fig. 5.13 : S/N =  $\infty$  dB, 50 samples.  
 $(\lambda=0)$

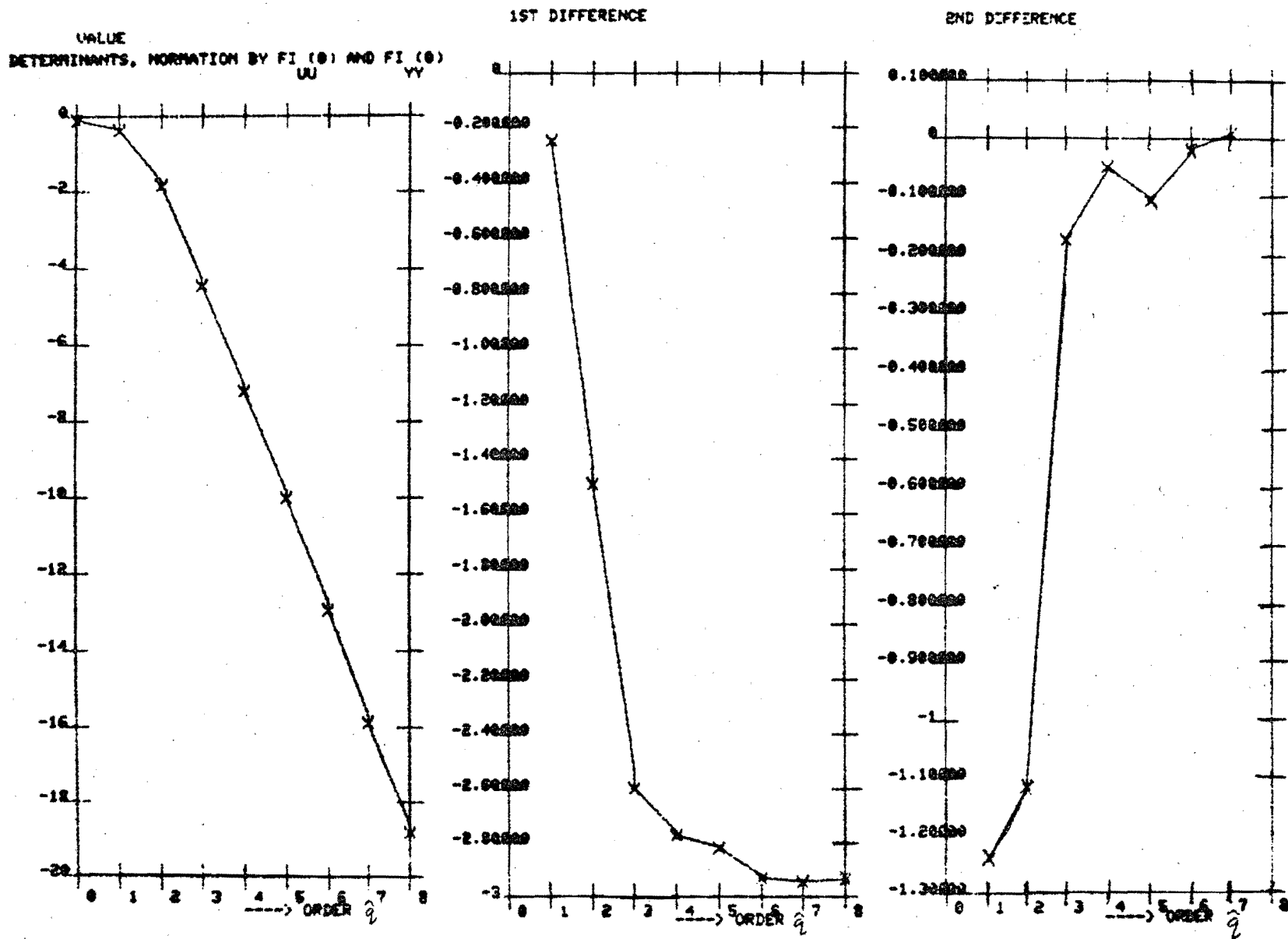


fig. 5.14 : S/N = 8,3 dB , 50 samples.  
 $(\lambda = .25)$



VALUES  
 DETERMINANTS, NORMALIZATION BY  $FI(\hat{q})$  AND  $FI(\hat{q})$   
 $UU$   $VV$

1ST DIFFERENCE

2ND DIFFERENCE

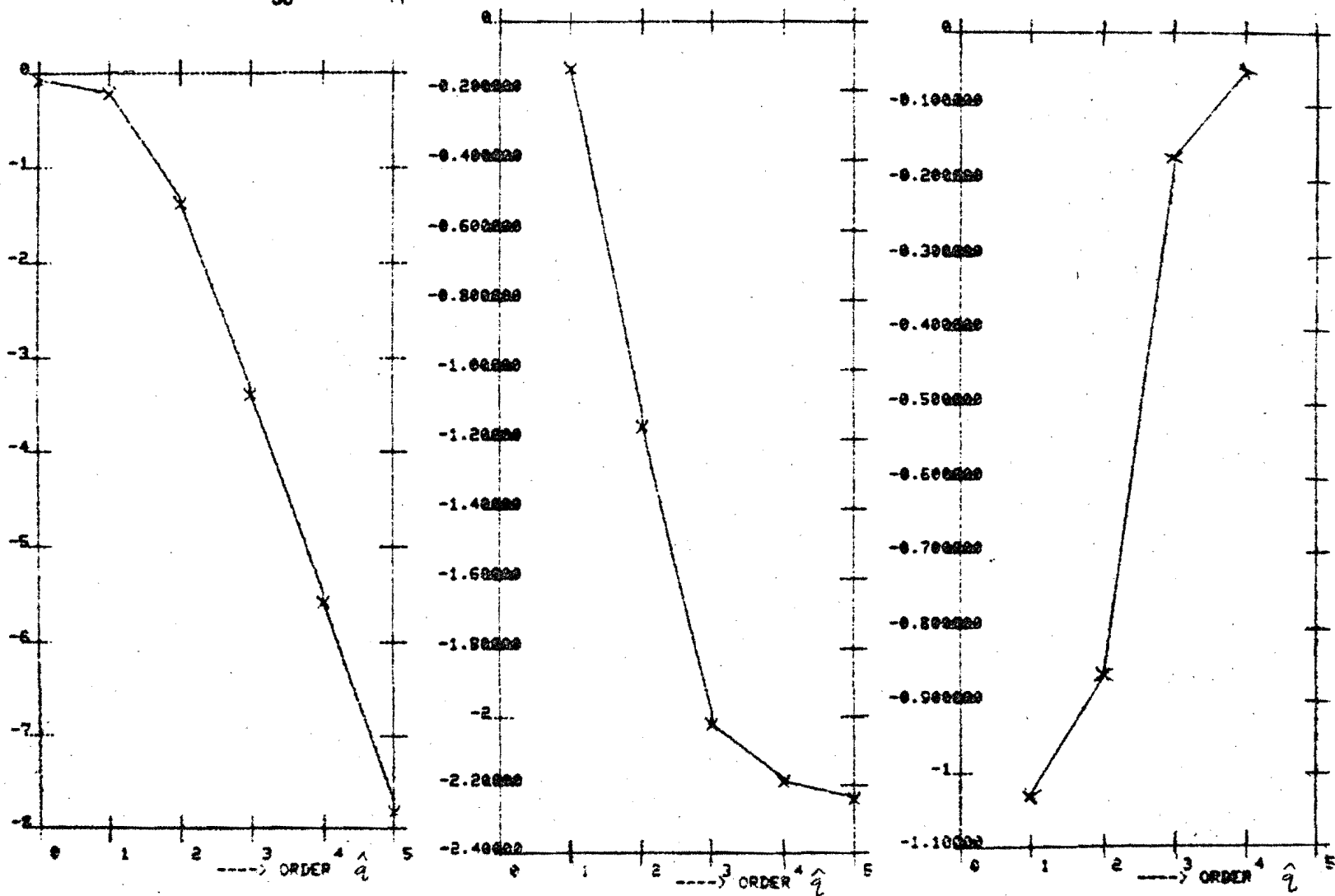


fig. 5.15 : S/N = -3,7 dB , 50 samples.  
 ( $\lambda = 1.$ )

PRESS RETURN TO CONTINUE  
VALUE

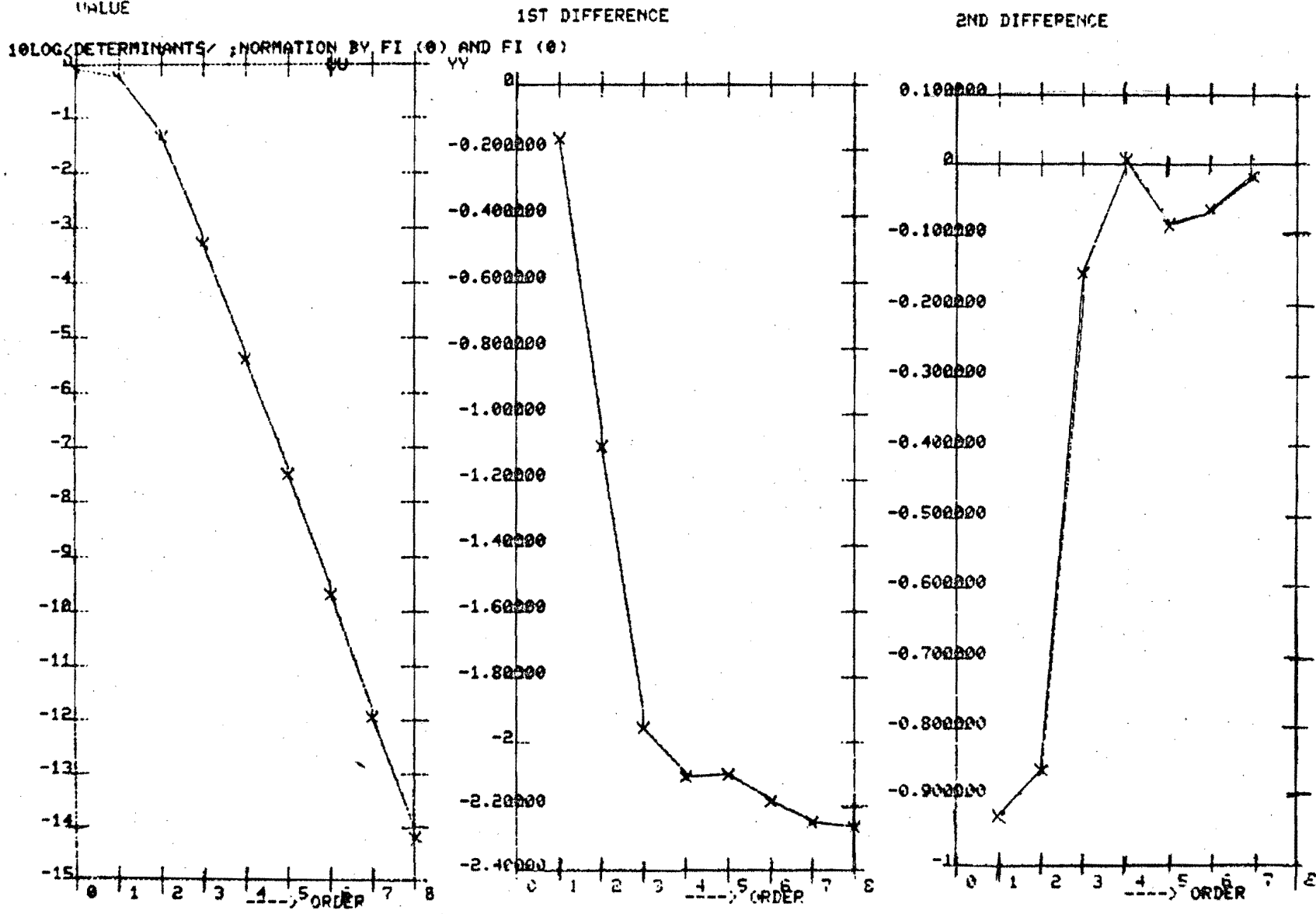


fig. 5.16 : S/N = -15.7 dB, 50 samples.  
( $\lambda = 4$ .)

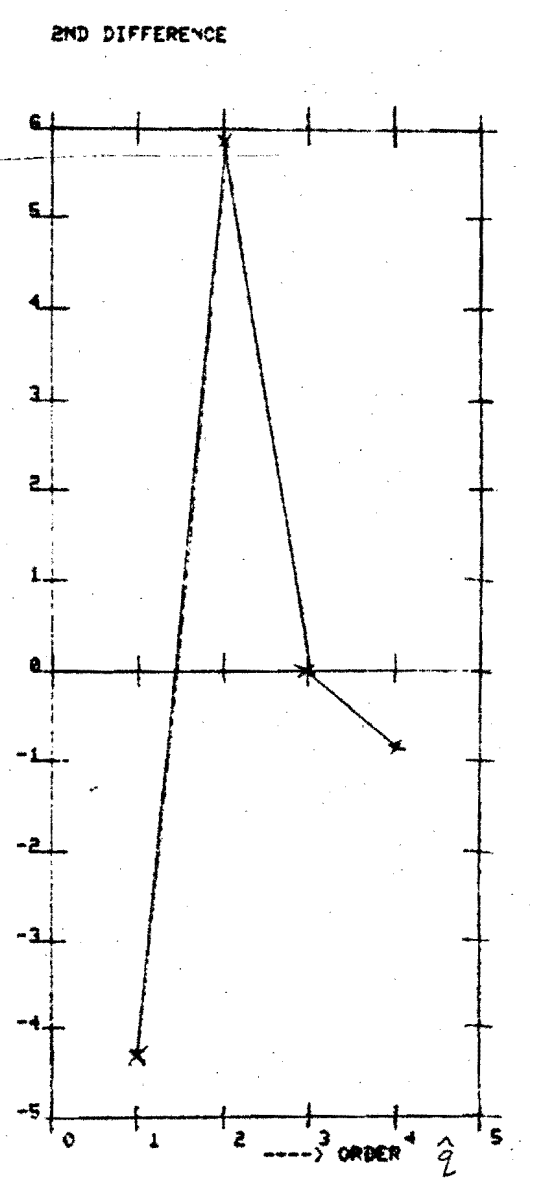
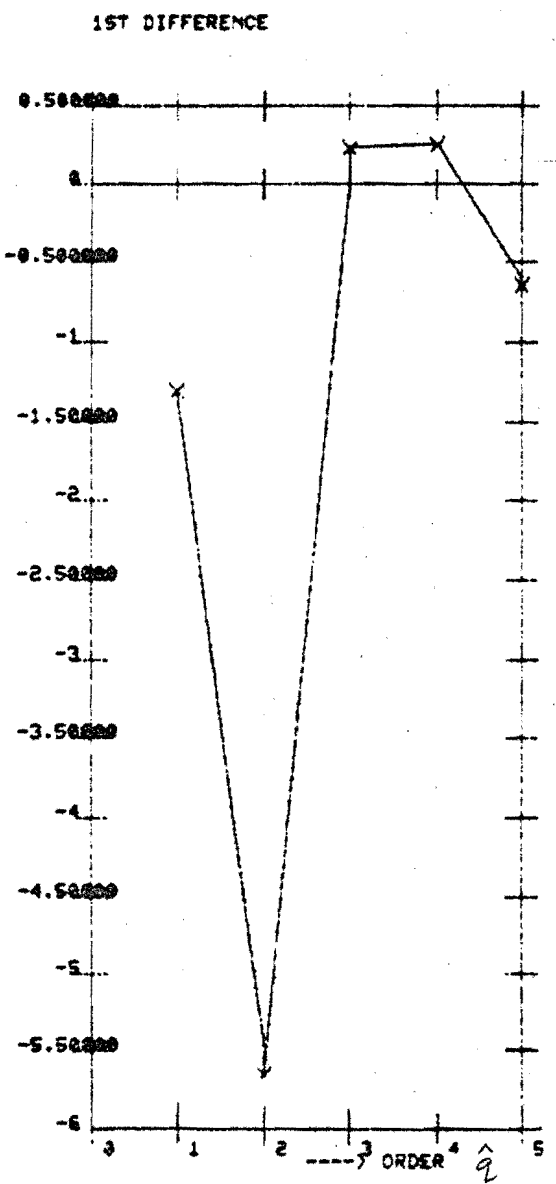
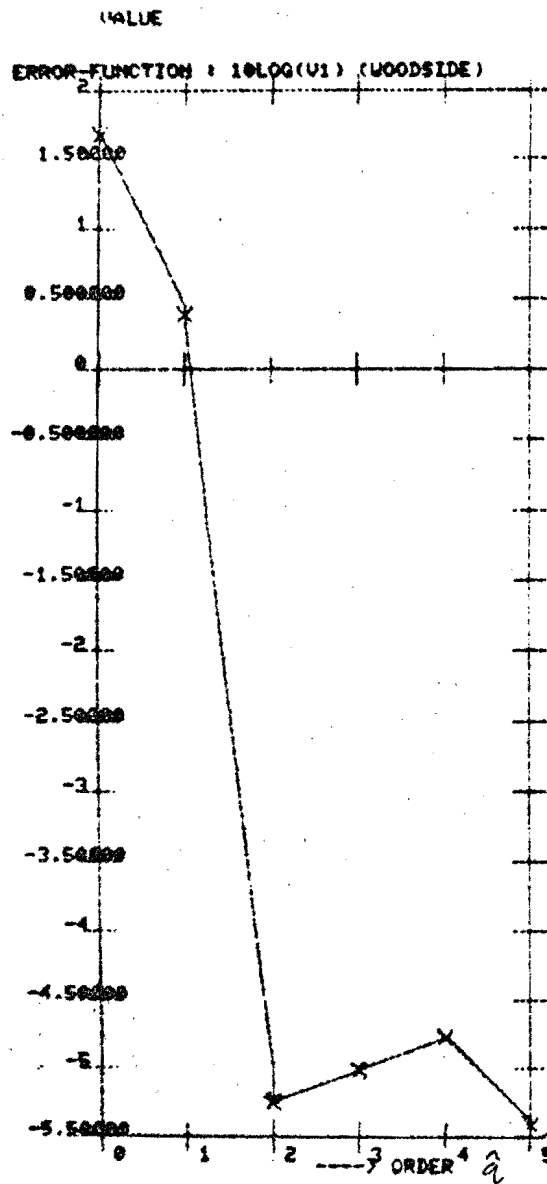


fig. 5.17 : S/N =  $\infty$  dB , 20 samples.  
( $\lambda=0.$ )

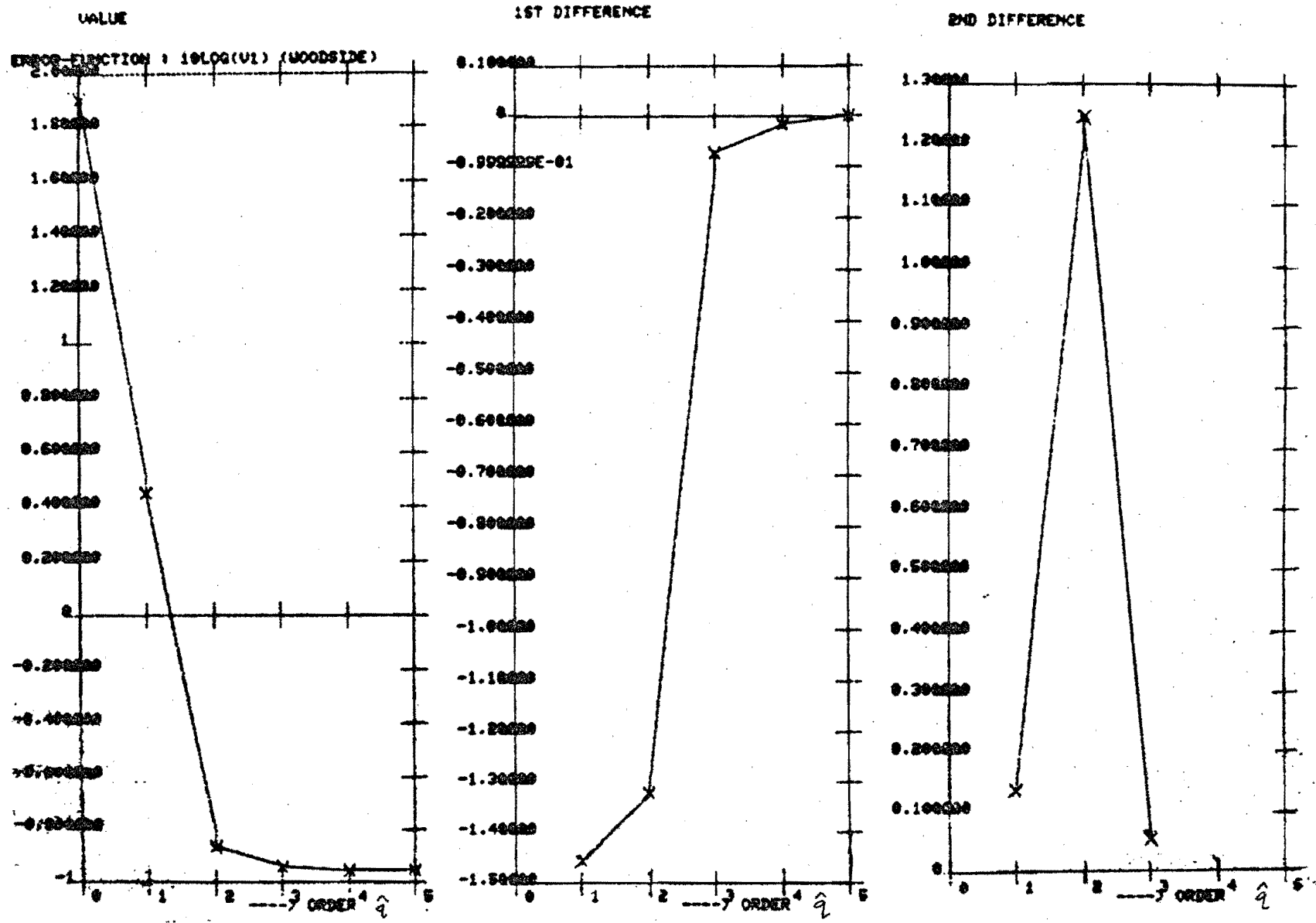
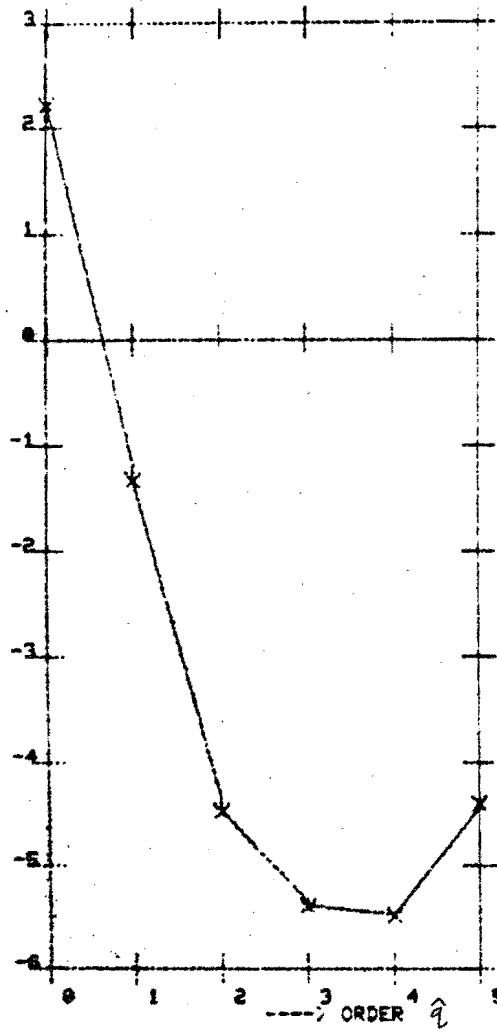
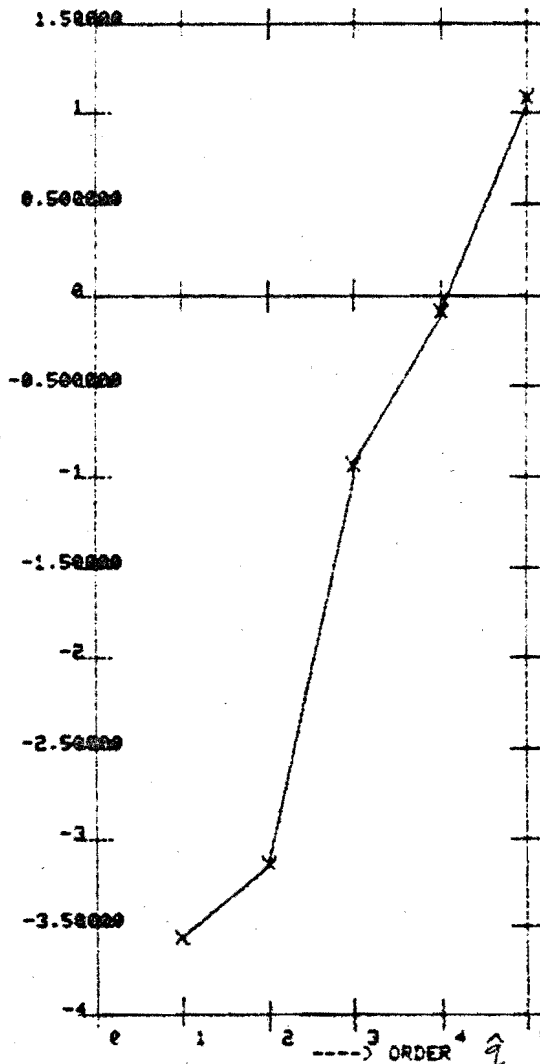


fig. 5.18 : S/N = 8,3 dB , 20 samples.  
( $\lambda = .25$ )

VALUE  
ERROR-FUNCTION : 10LOG(U1) (WOODSIDE)



1ST DIFFERENCE



2ND DIFFERENCE

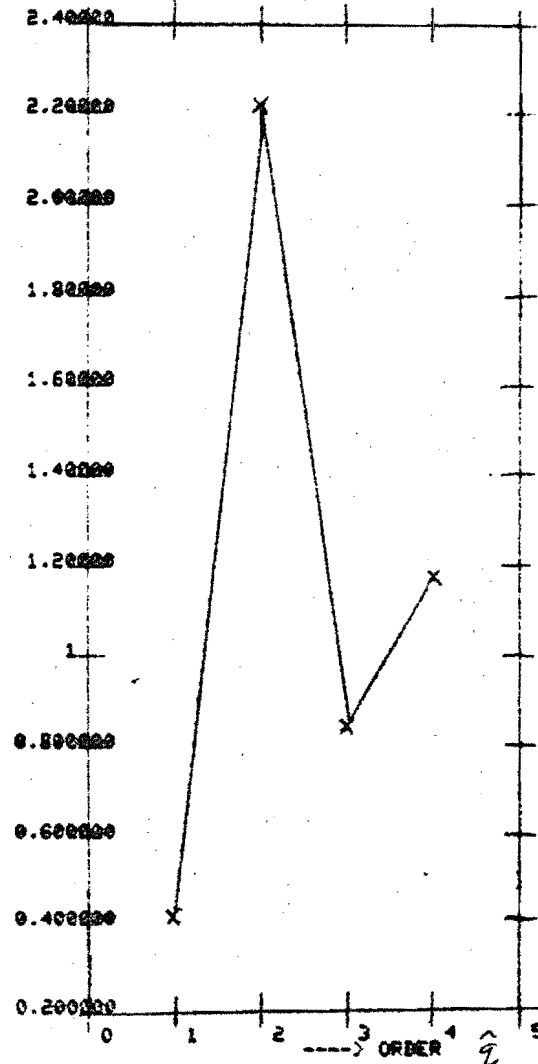


fig. 5.19 : S/N = -3,7 dB , 20 samples.  
( $\lambda = 1.$ )

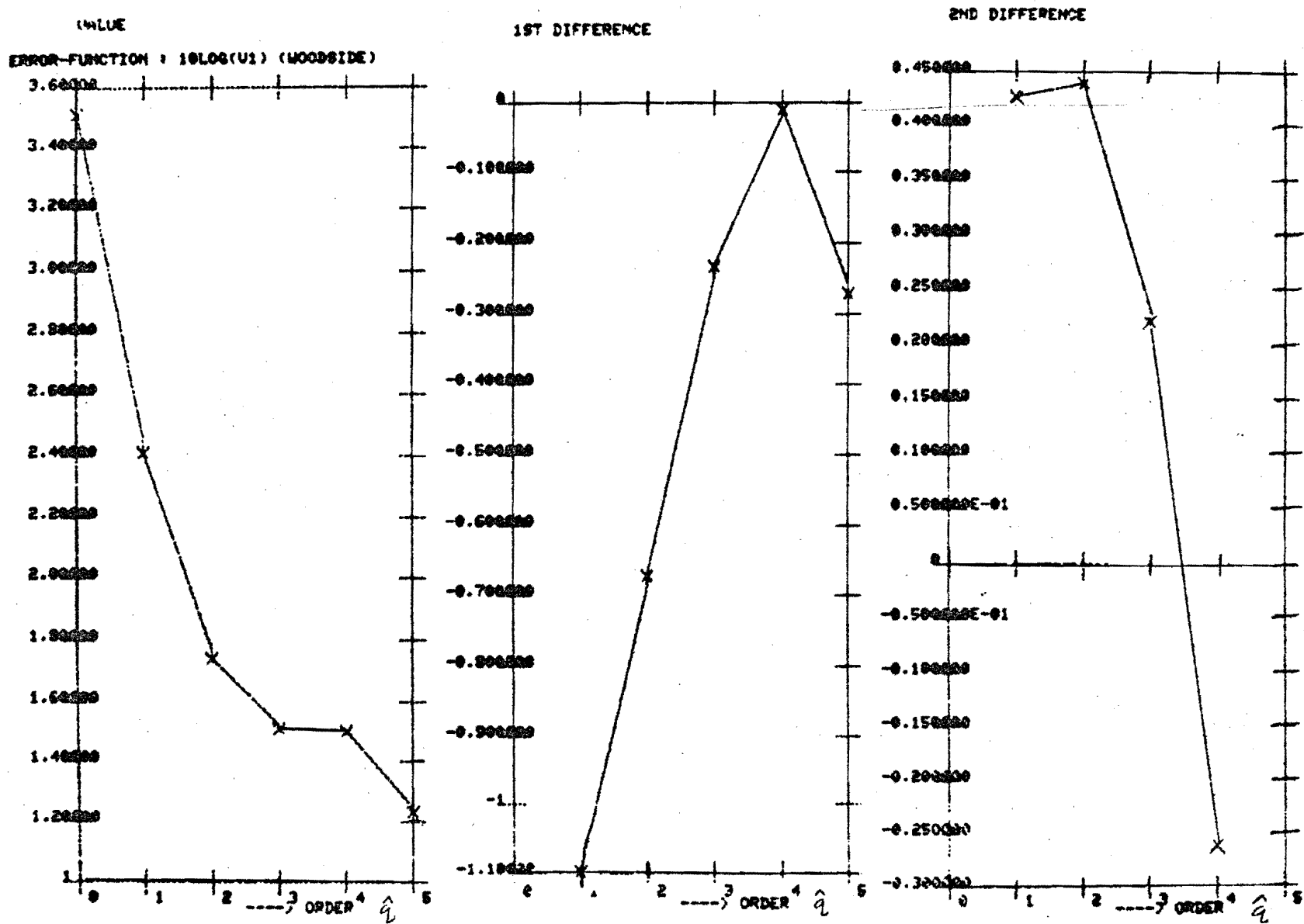


fig. 5.20 : S/N = -15,7 dB , 20 samples.  
( $\lambda = 4.$ )

POLE/ZERO PLOT OF ESTIMATED PROCESS MODEL

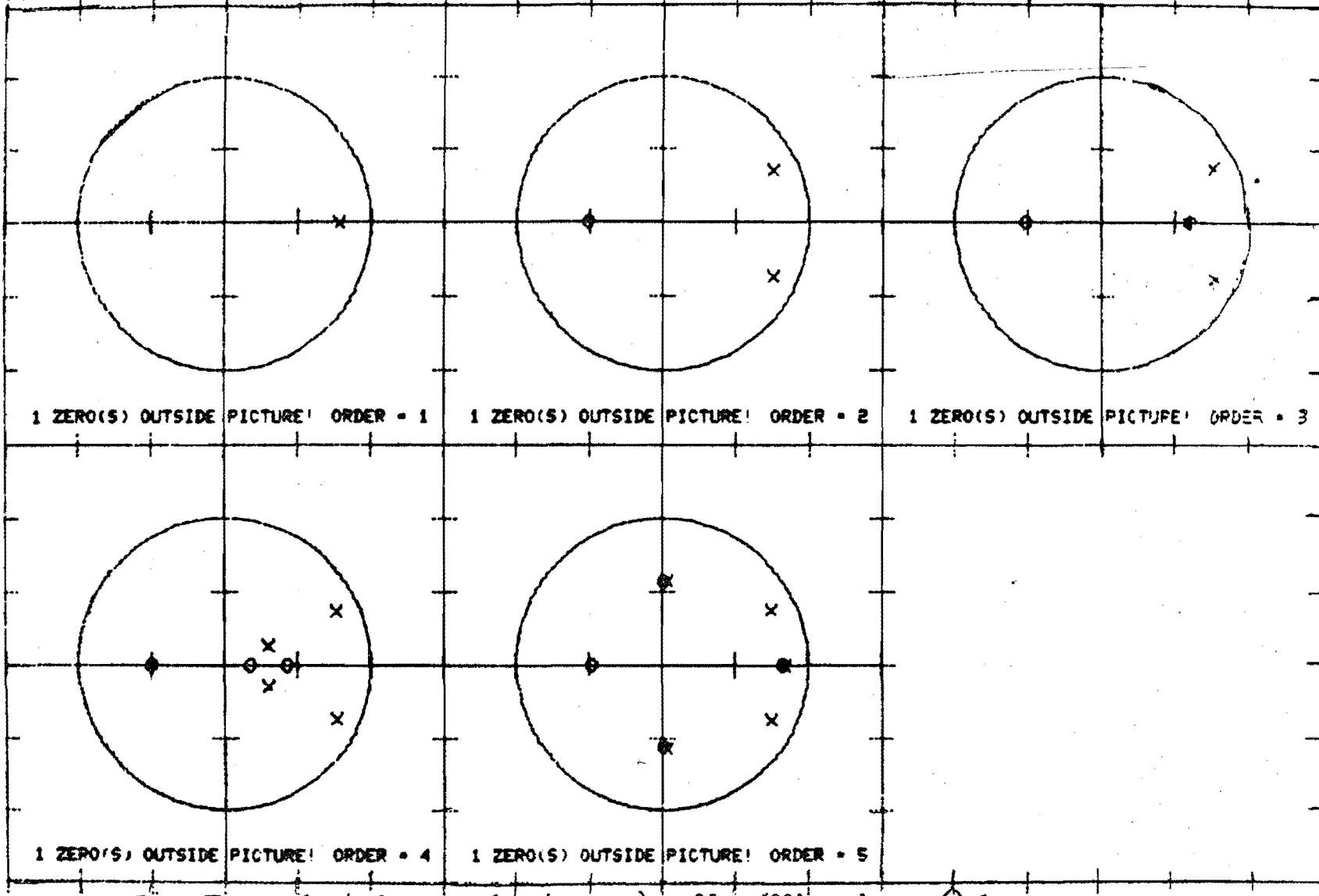


Fig. 5.21. polen/nulpunten-plaatje voor  $\lambda = .25$ , 1000 samples en  $\hat{s}=1$

POLE ZERO PLOT OF ESTIMATED PROCESS MODEL

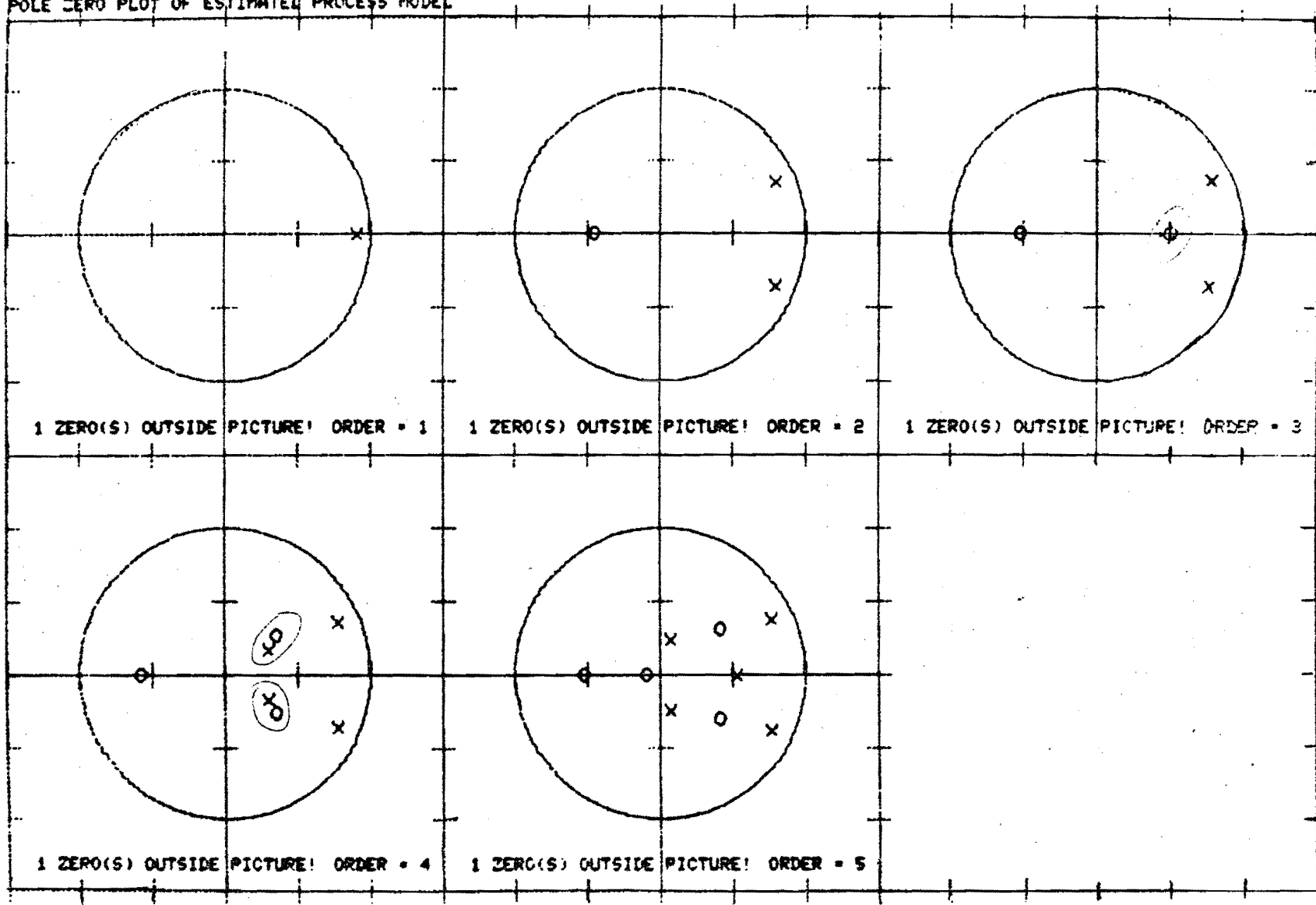


fig.5.22: polen/nulpunten-plaatje na 1000 samples voor  $\lambda=1$ . en  $\hat{s}=1$ .



POLE ZERO PLOT OF ESTIMATED PROCESS MODEL

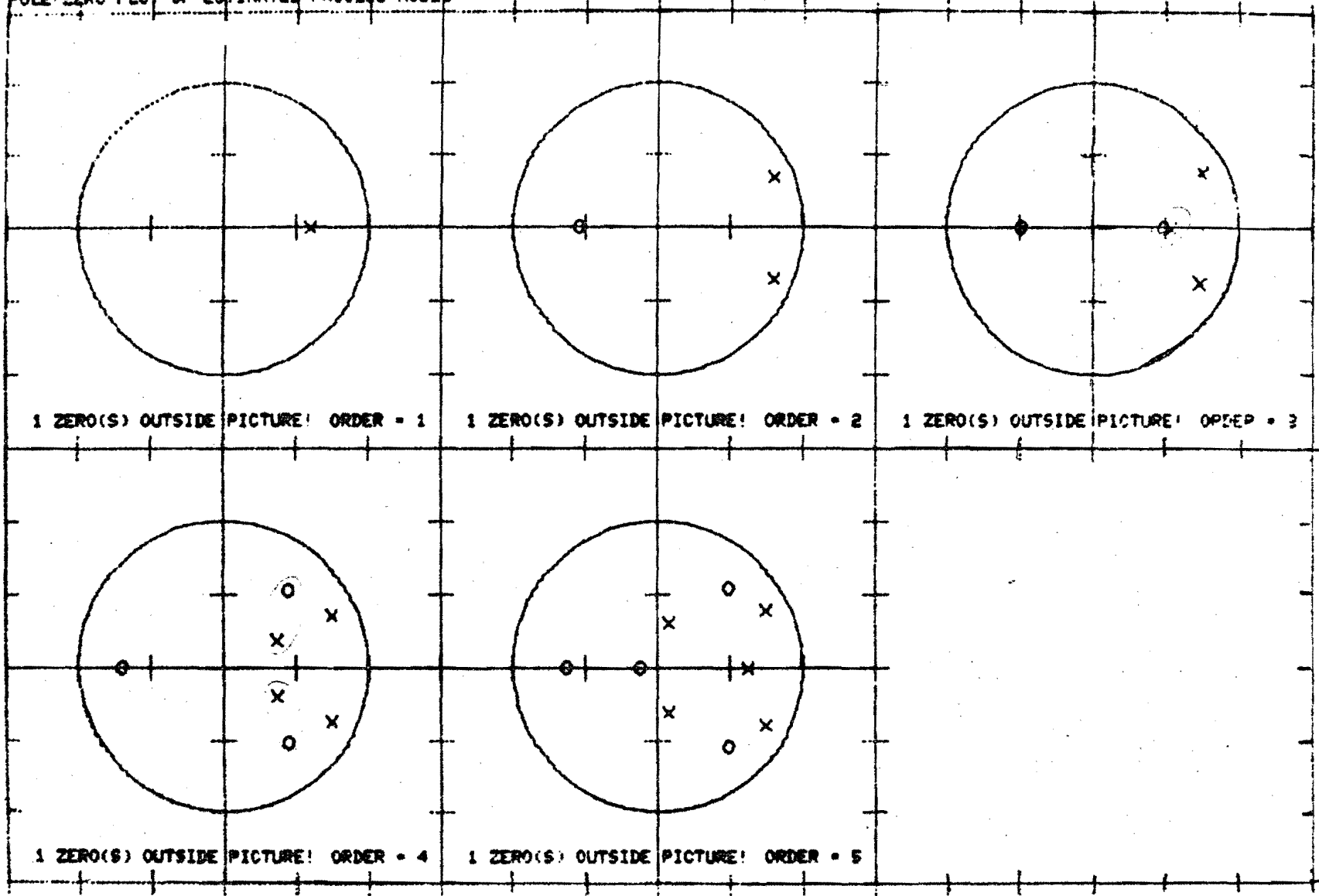


fig. 5.23: Polen/nulpunten-plaatje na 1000 samples  $\lambda = 4$  en  $\hat{s} = 1$

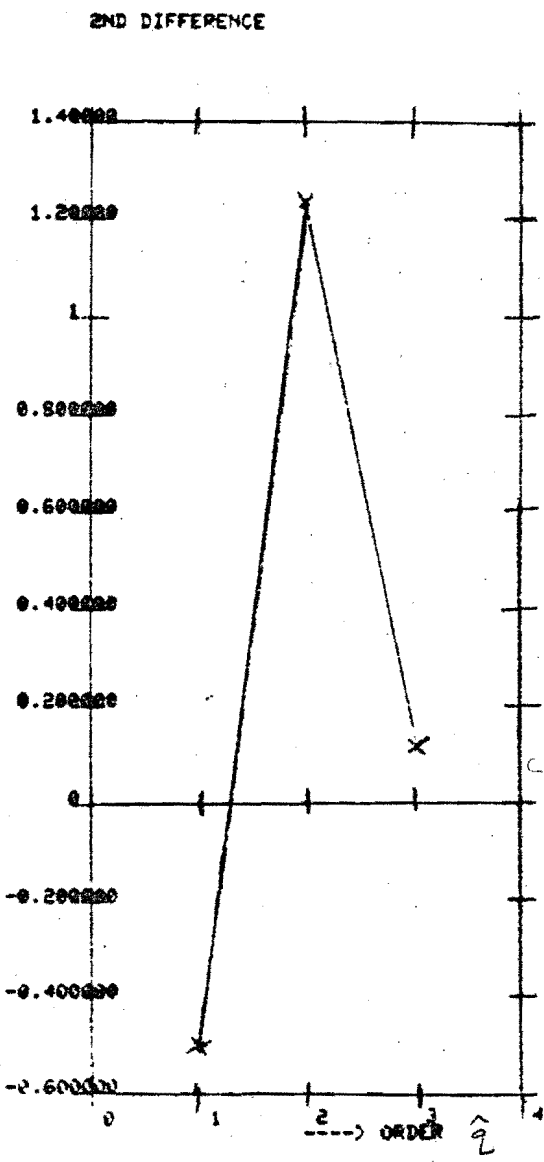
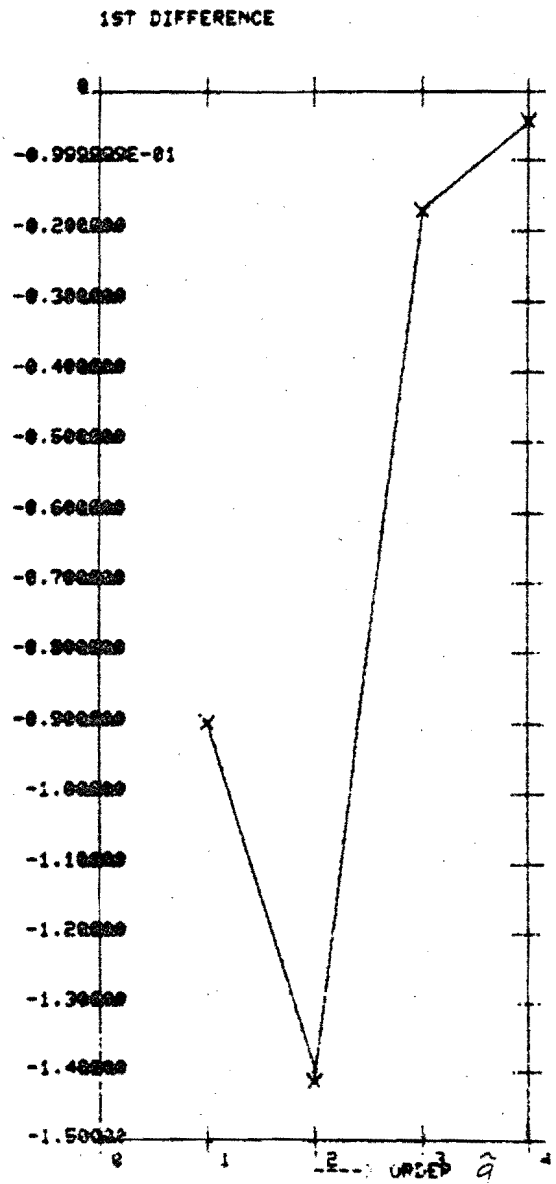
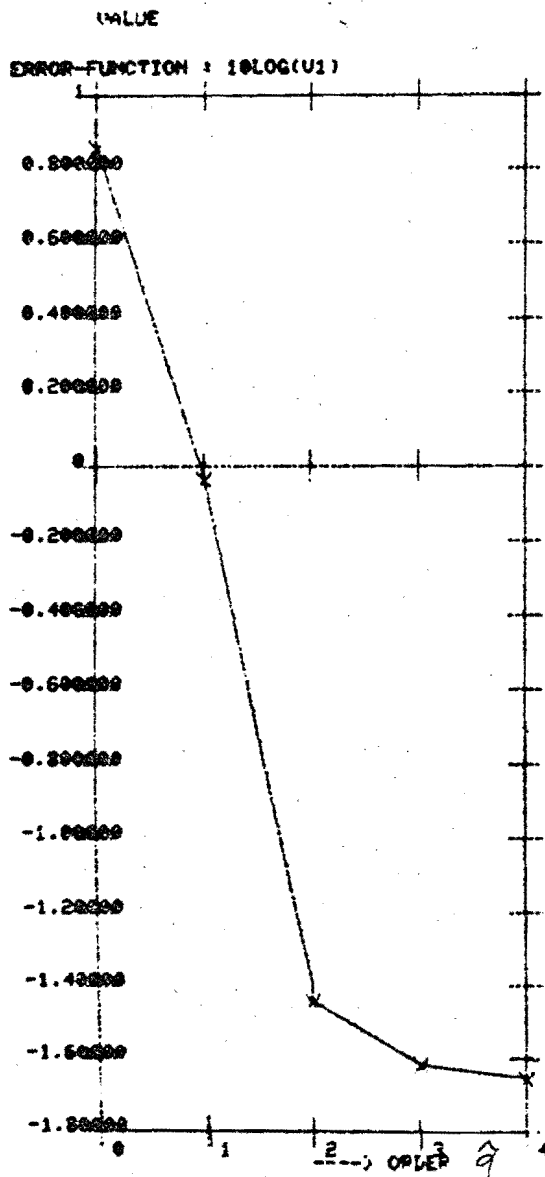
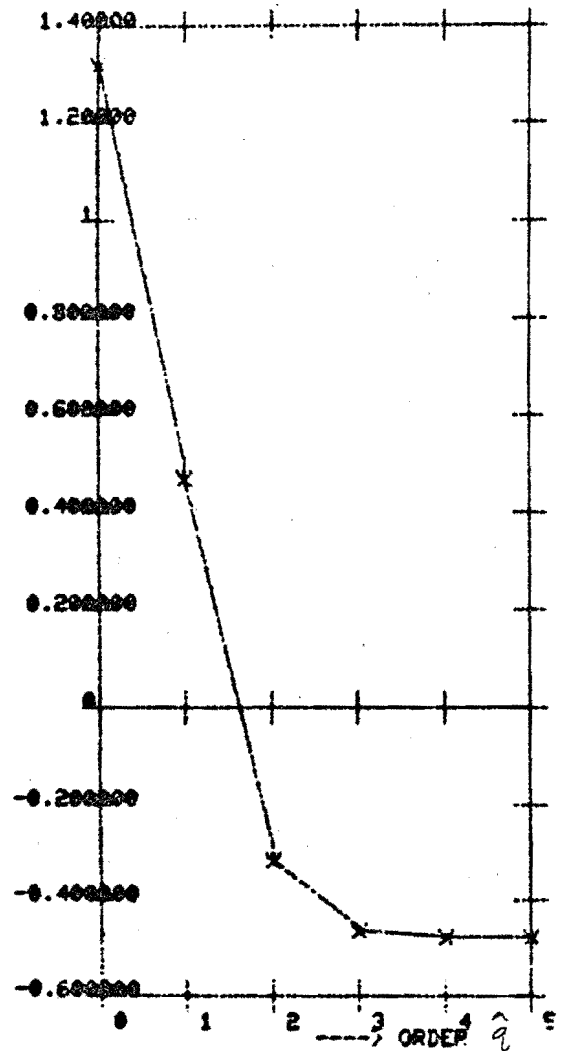
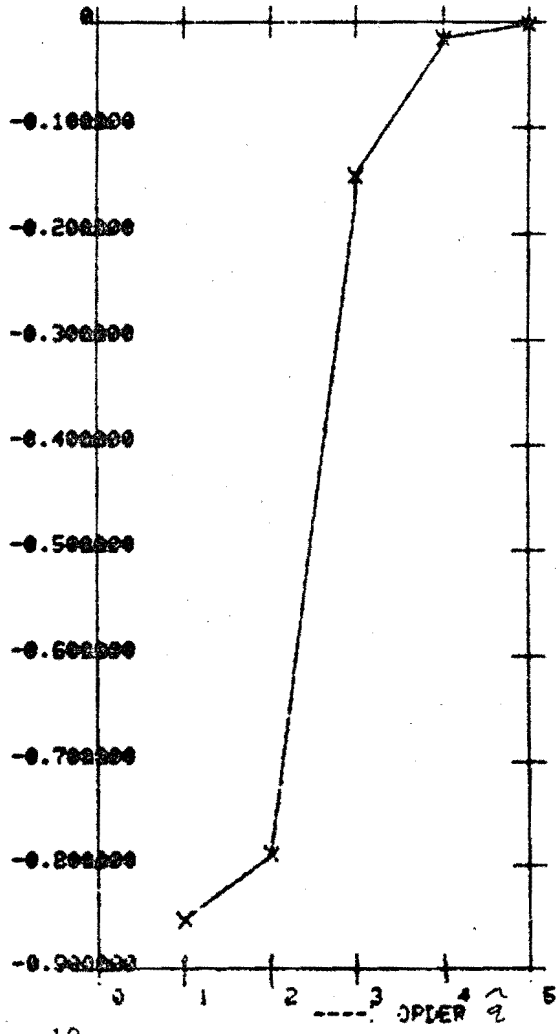


fig.5.24:  $V_1$  uit 900 samples,  $\lambda = .25$  en  $\hat{s}=2$ .

VALUE  
ERROR-FUNCTION :  $10\log(V_1)$



1ST DIFFERENCE



2ND DIFFERENCE

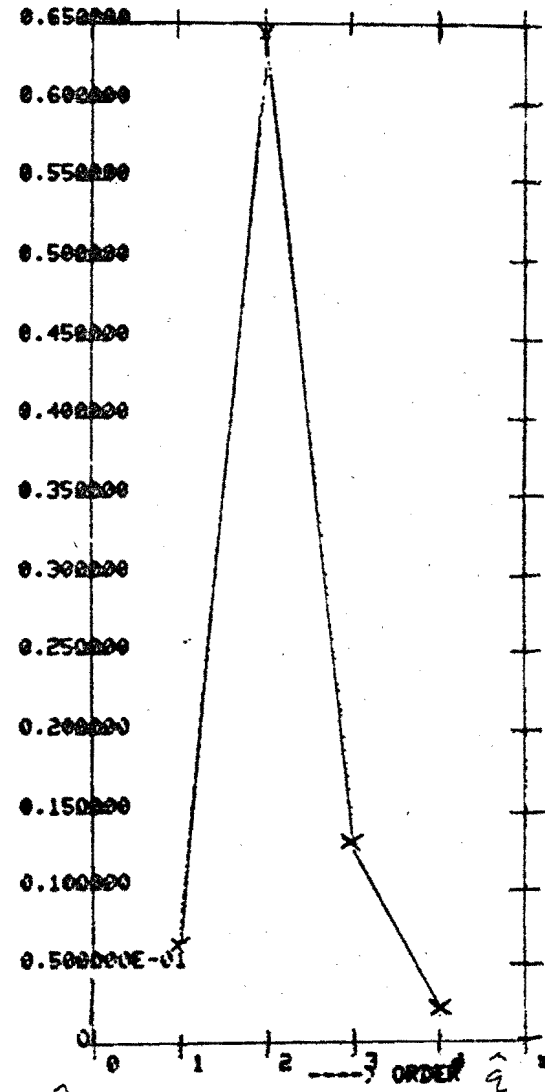


fig.5.25:  $10 \log V_1$  voor 900 samples,  $\lambda=1$ . en  $\hat{s}=1$ .

(VALUE  
ERROR-FUNCTION : 10LOG(V1)

1ST DIFFERENCE

2ND DIFFERENCE

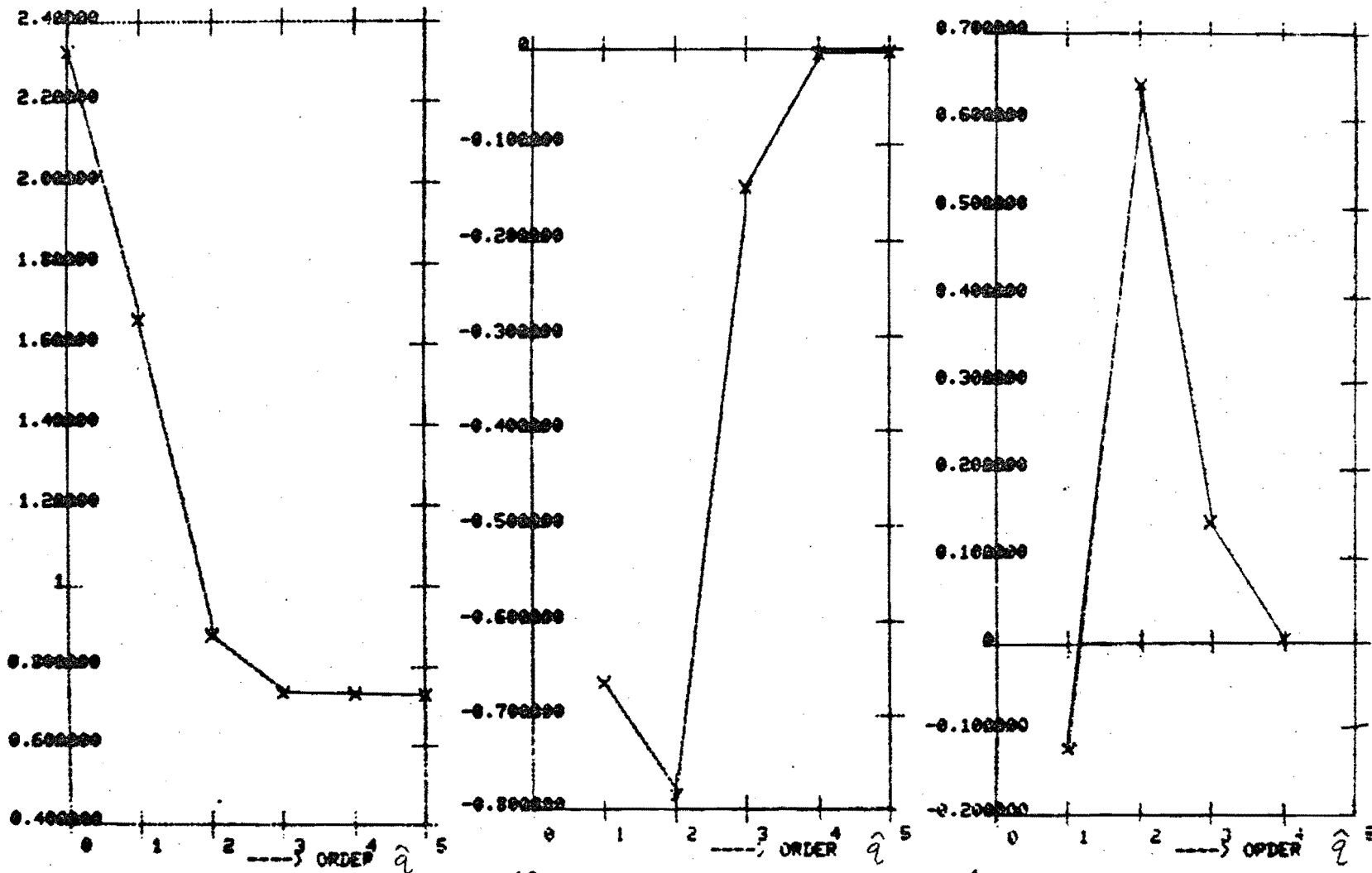


fig. 5.26:  $10 \log V_1$  over 900 samples,  $\lambda=4$  en  $s=1$

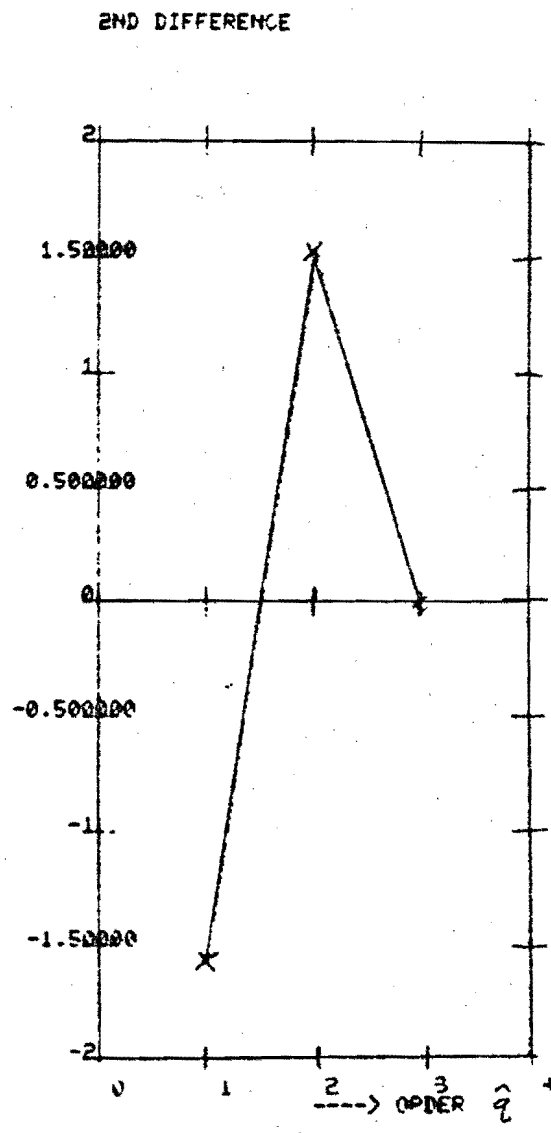
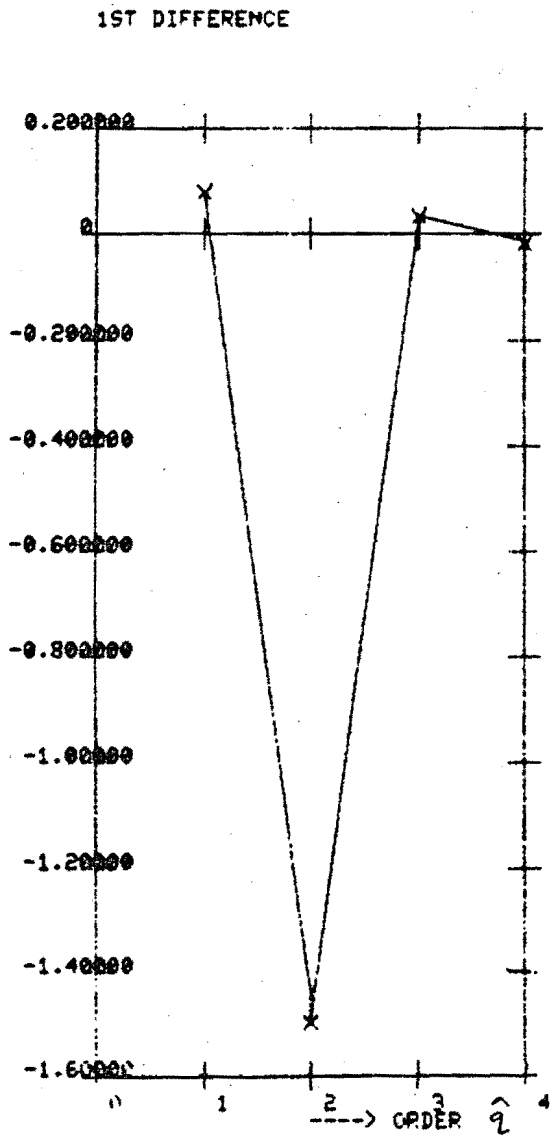
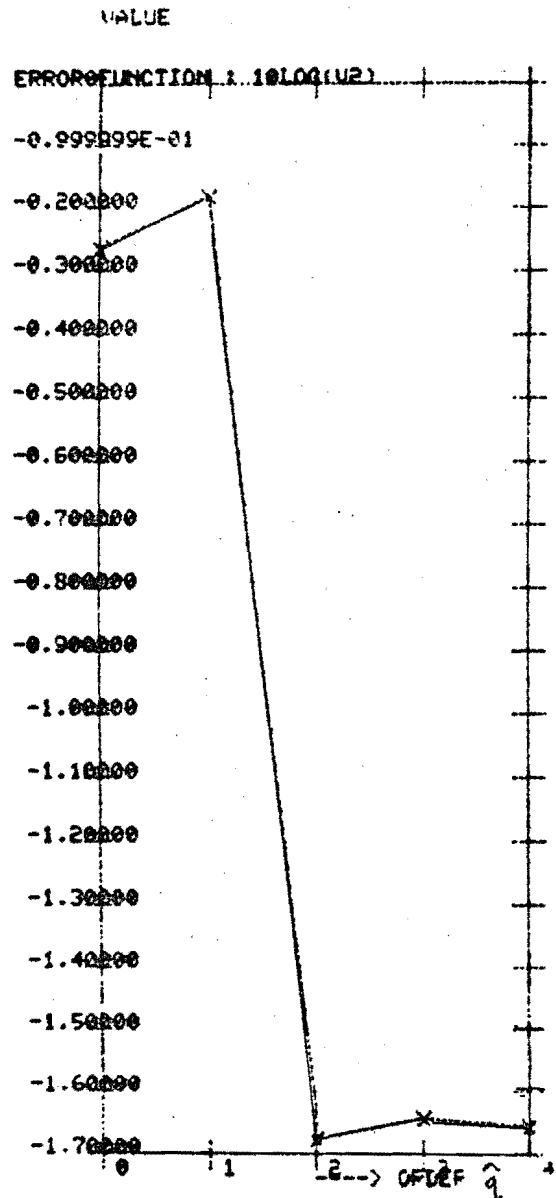
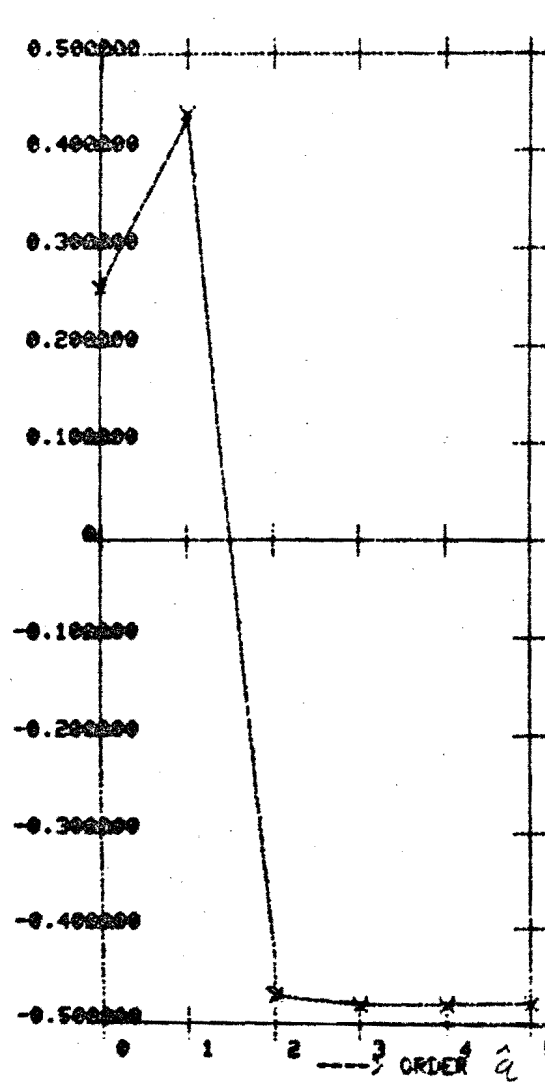
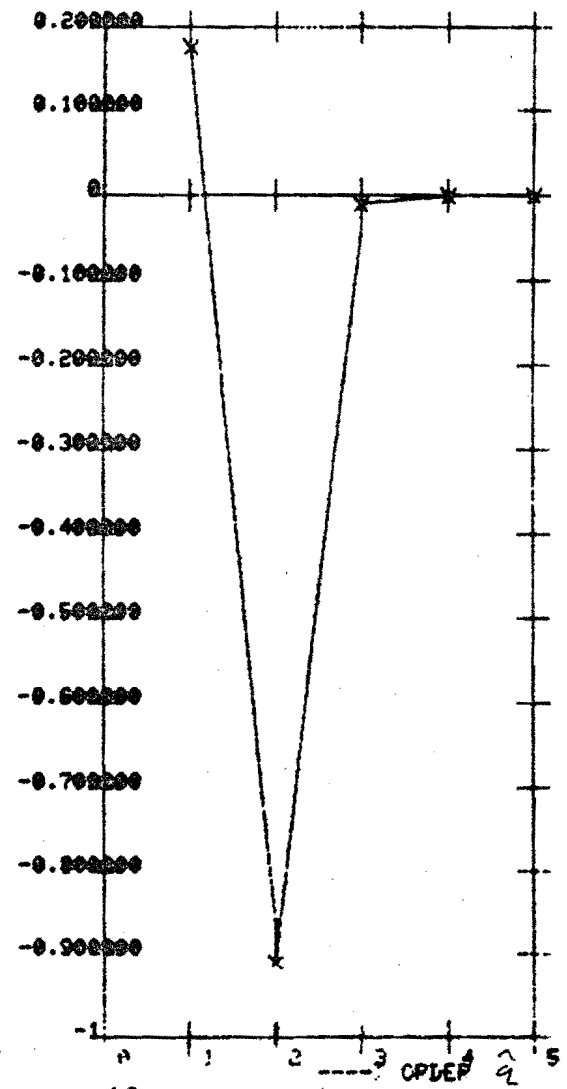


fig.5.27  $V_2$  voor 900 samples,  $\lambda = .25$  en  $\hat{s} = 2$ .

(VALUE  
ERROR-FUNCTION : 10LOG(U2)



1ST DIFFERENCE



2ND DIFFERENCE

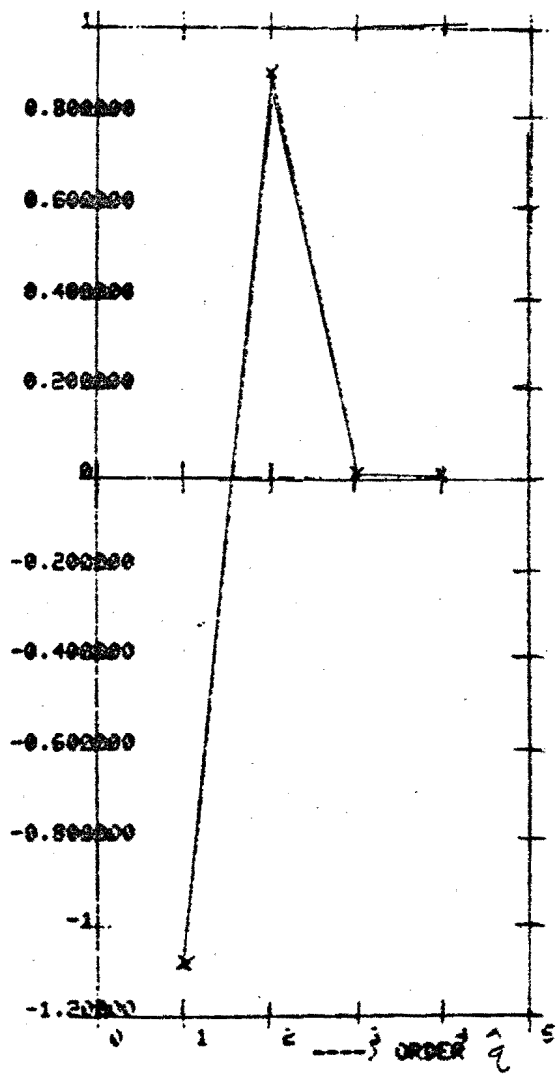


fig.5.28:  $10 \log V_2$  voor 900 samples,  $\lambda=1$ . en  $\hat{s}=1$ .

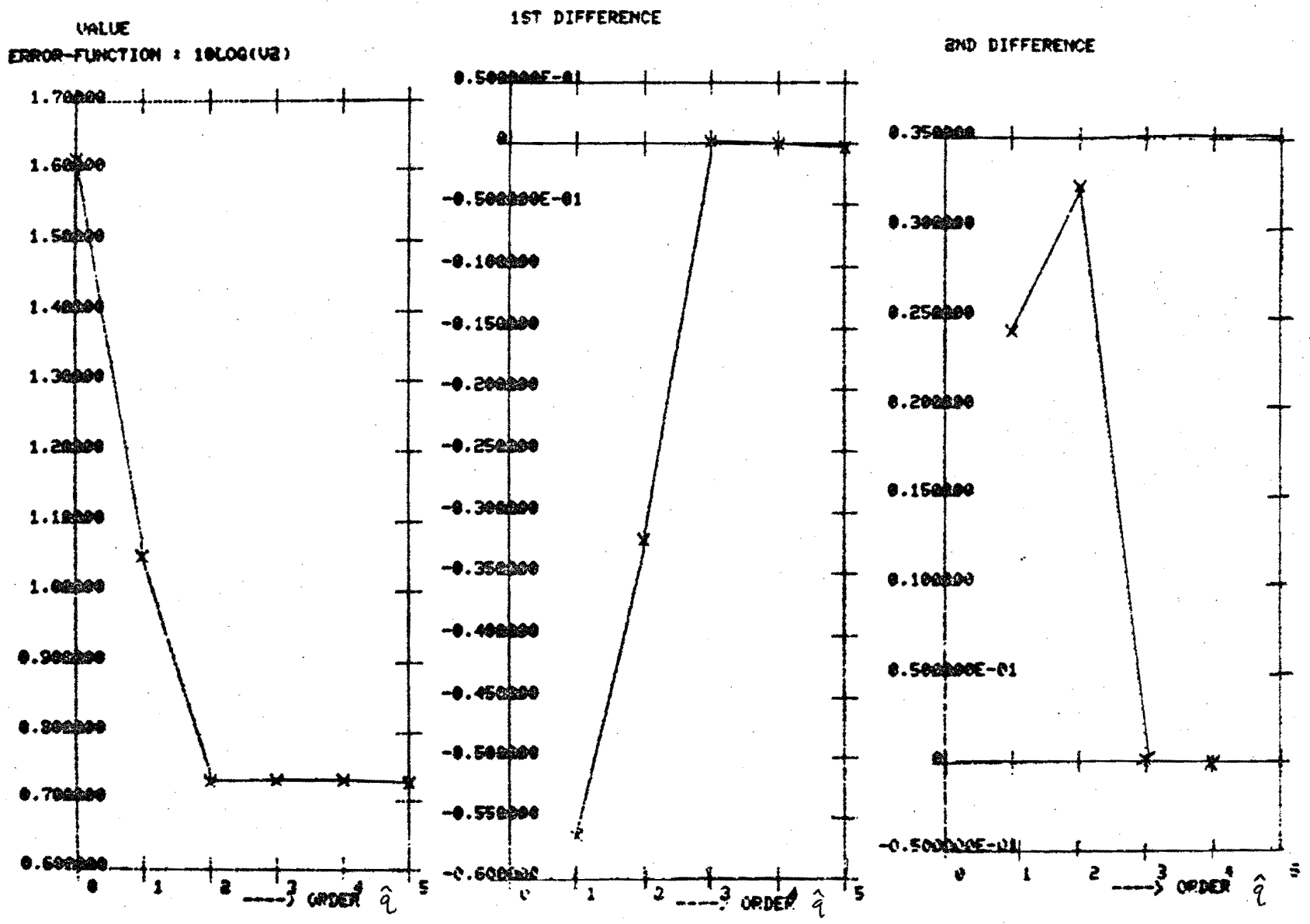


fig. 5.29 :  $10 \log V_2$  over 900 samples,  $\lambda = 4$  en  $\hat{s} = 1$

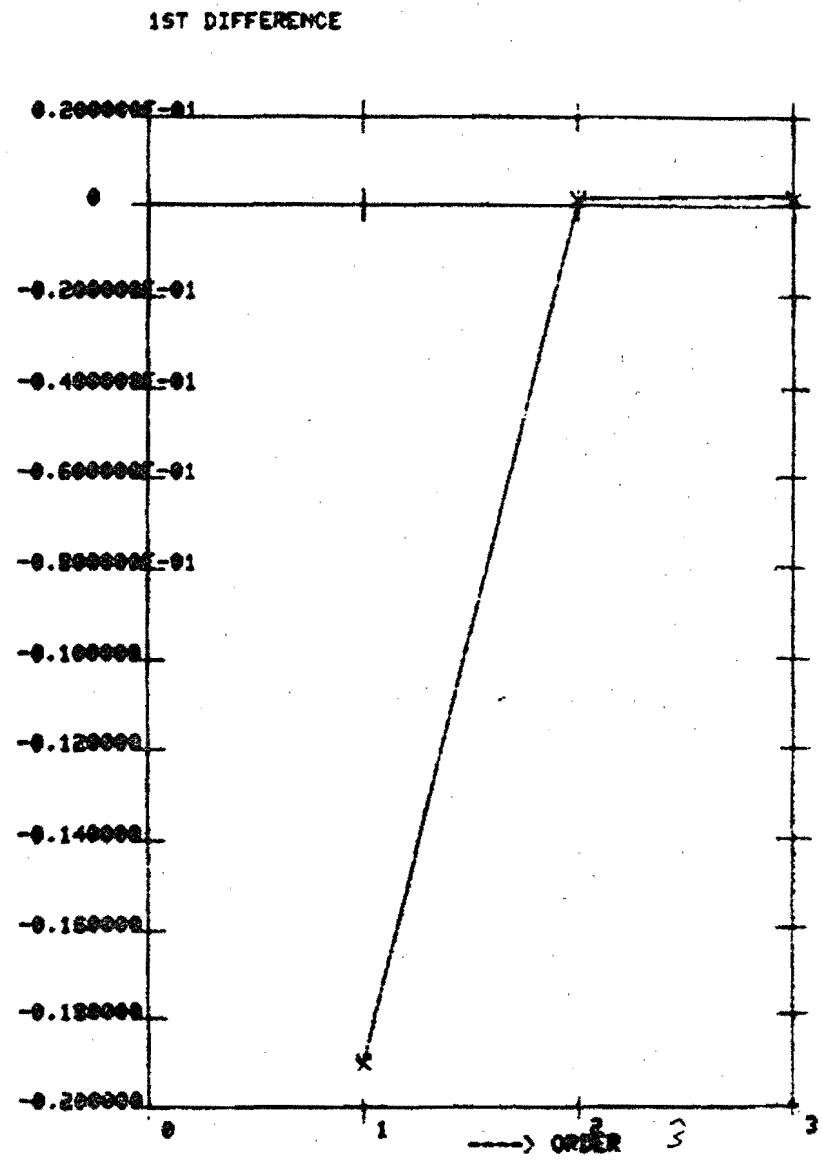
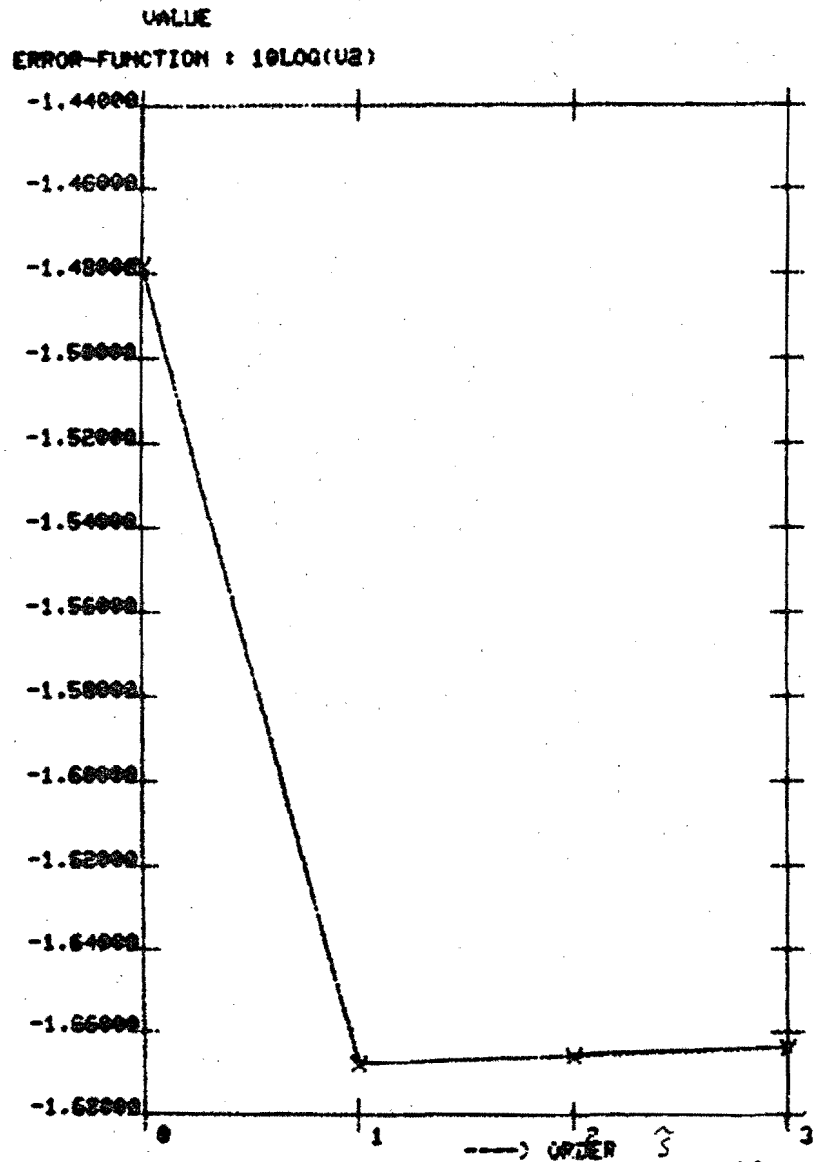


fig.5.30:  $10 \log V_1$  voor  $\hat{q}=2$  en  $\hat{s}=0,1,2,3$ .  $\lambda = .25$ , 1000 samples.



ERROR-FUNCTION :  $10\log(U_2)$

ORDER	VALUE	1ST DIFFERENCE	2ND DIFFERENCE
0	-0.327372		
1	-0.472013	-0.144640	0.144561
2	-0.472092	-0.794232E-04	0.171277E-02
3	-0.470459	0.163335E-02	

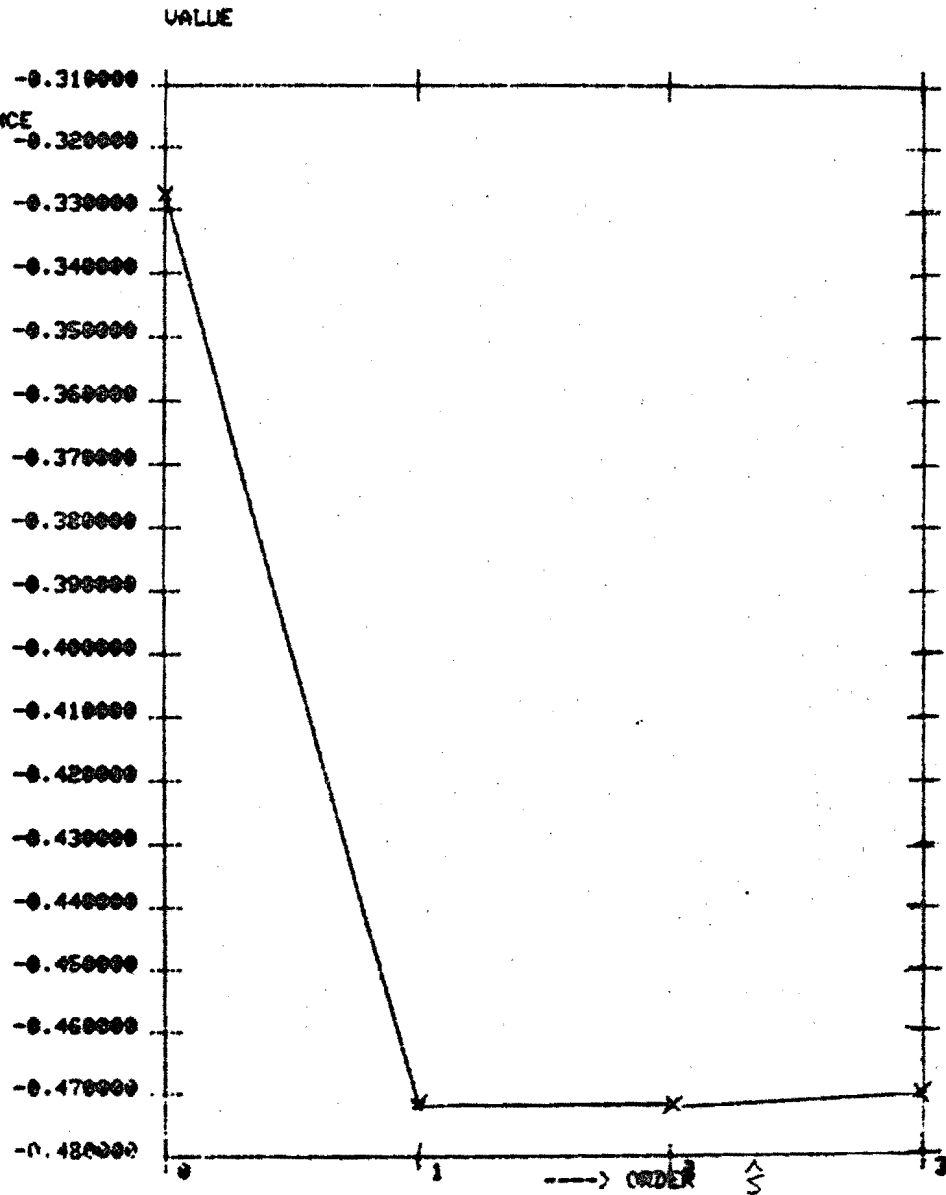


fig 5.31:  $10 \log V_2$  over 900 samples,  $\lambda=1$ .  
 voor  $\hat{s}=0,1,2,3$ , procesorde:  $\hat{q}=2$

ERROR-FUNCTION :  $10\log(V_2)$

ORDER	VALUE	1ST DIFFERENCE	2ND DIFFERENCE
0	0.861087		
1	0.729755	-0.131332	0.130586
2	0.729069	-0.745595E-03	

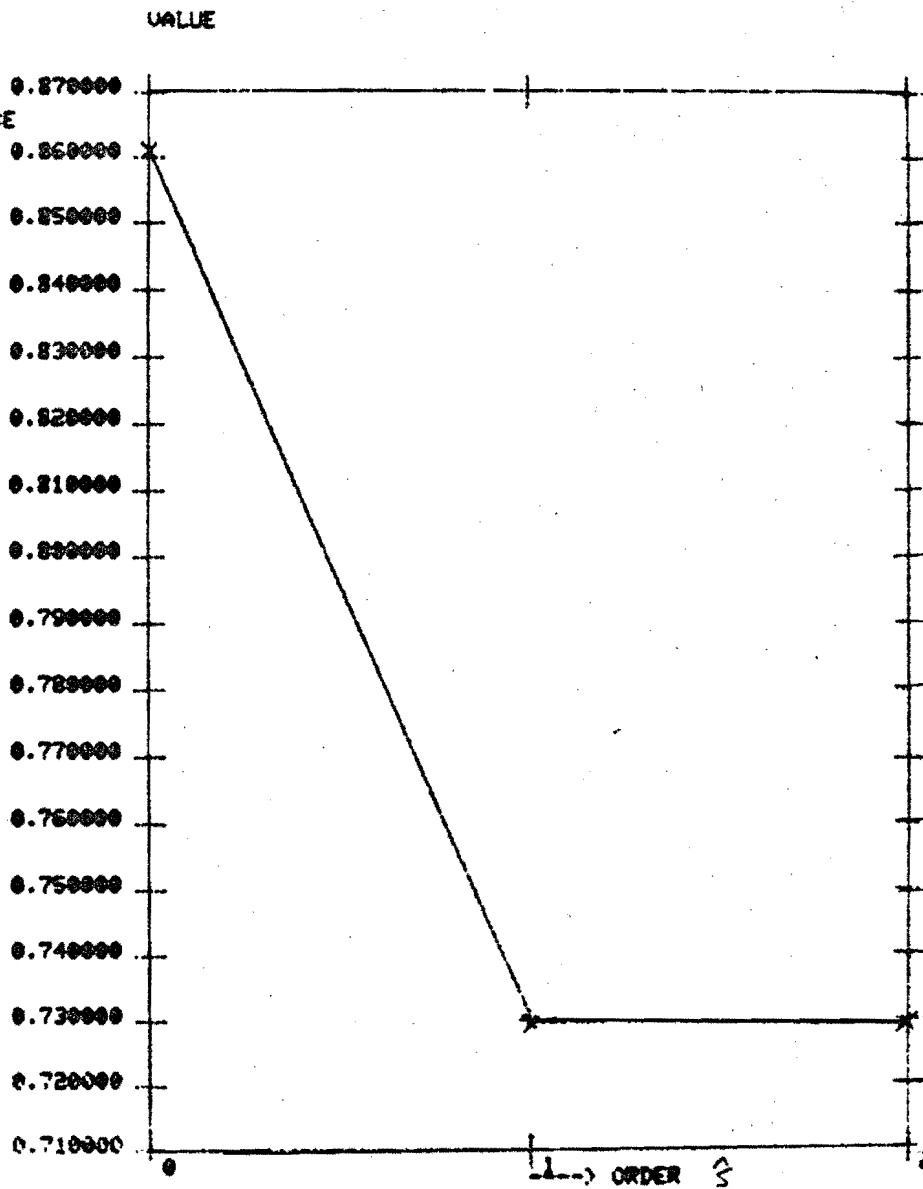


fig.5.32 :  $10 \log V_2$  over 900 samples,  
 voor  $\hat{s}=0,1,2,3$  en  $\hat{q}=2$ .  $\lambda=4$

PLOT OF AUTOCORRELATION FUNCTION OF  $\hat{X}(k)$

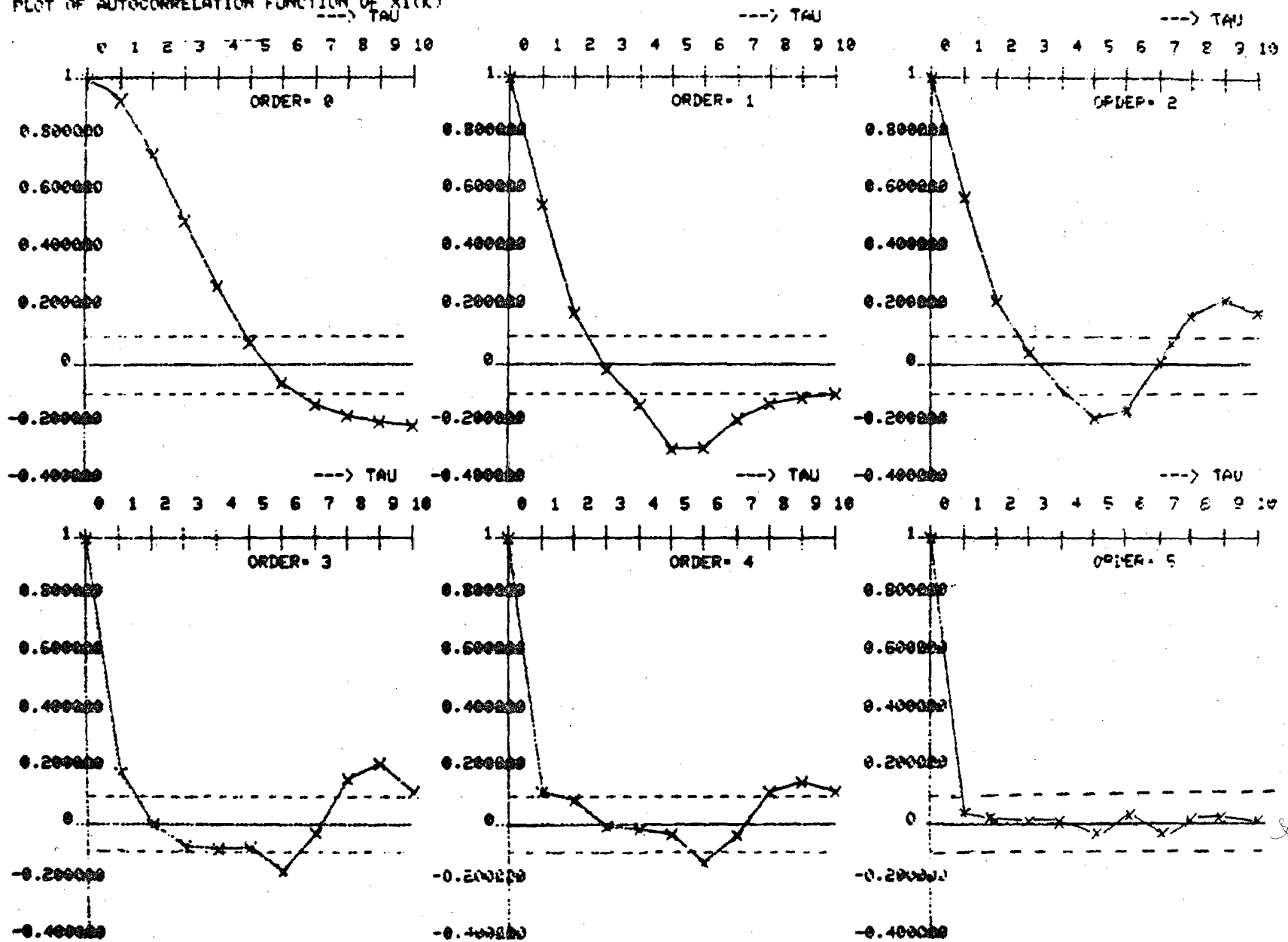


fig.5.33: Autokorrelatie functie van  $\hat{\xi}(k)$ ,  $\lambda = .25$ ,  $\hat{s} = 0$ .

$10 \log S^{-2}(R)$

----> ORDER  $\hat{q}$

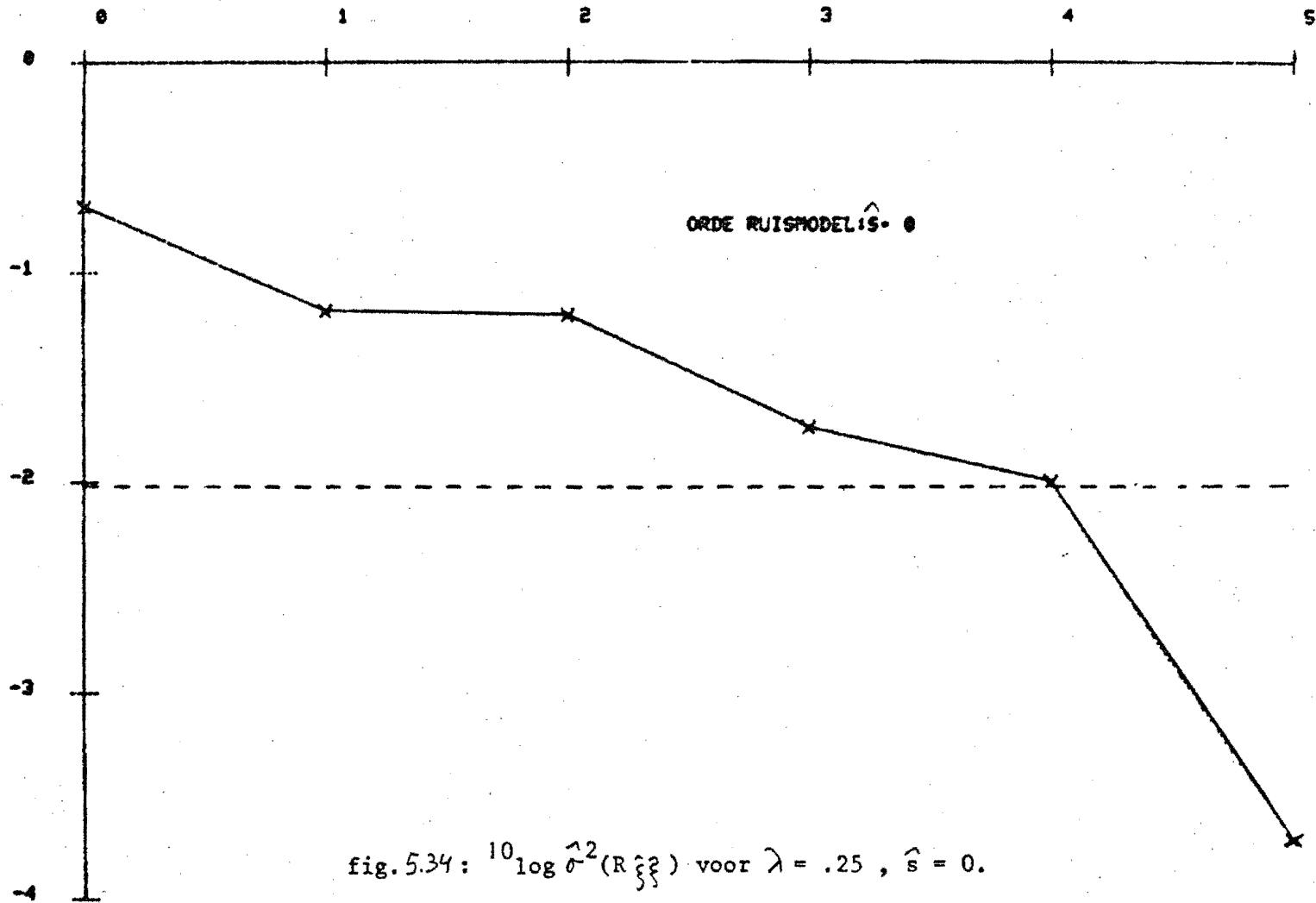


fig. 5.34:  $10 \log \hat{\sigma}^2(R_{\xi\xi})$  voor  $\lambda = .25$ ,  $\hat{s} = 0$ .

10LOG S-2(R)

----> ORDER  $\hat{q}$

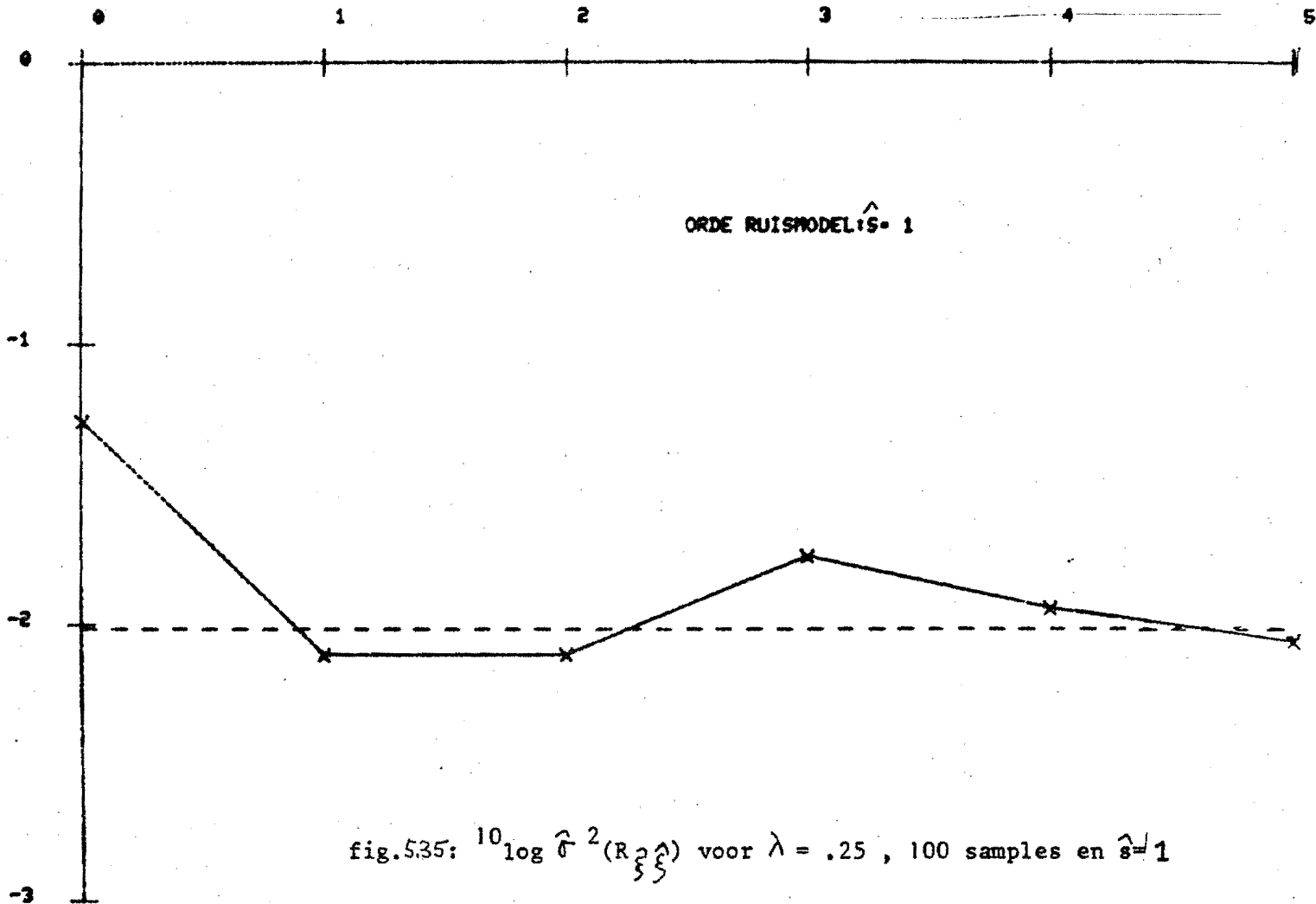


fig.5.35:  $10 \log \hat{\sigma}^2(R, \hat{q})$  voor  $\lambda = .25$ , 100 samples en  $\hat{s} = 1$

10LOG S-2(R)

----> ORDER  $\hat{q}$

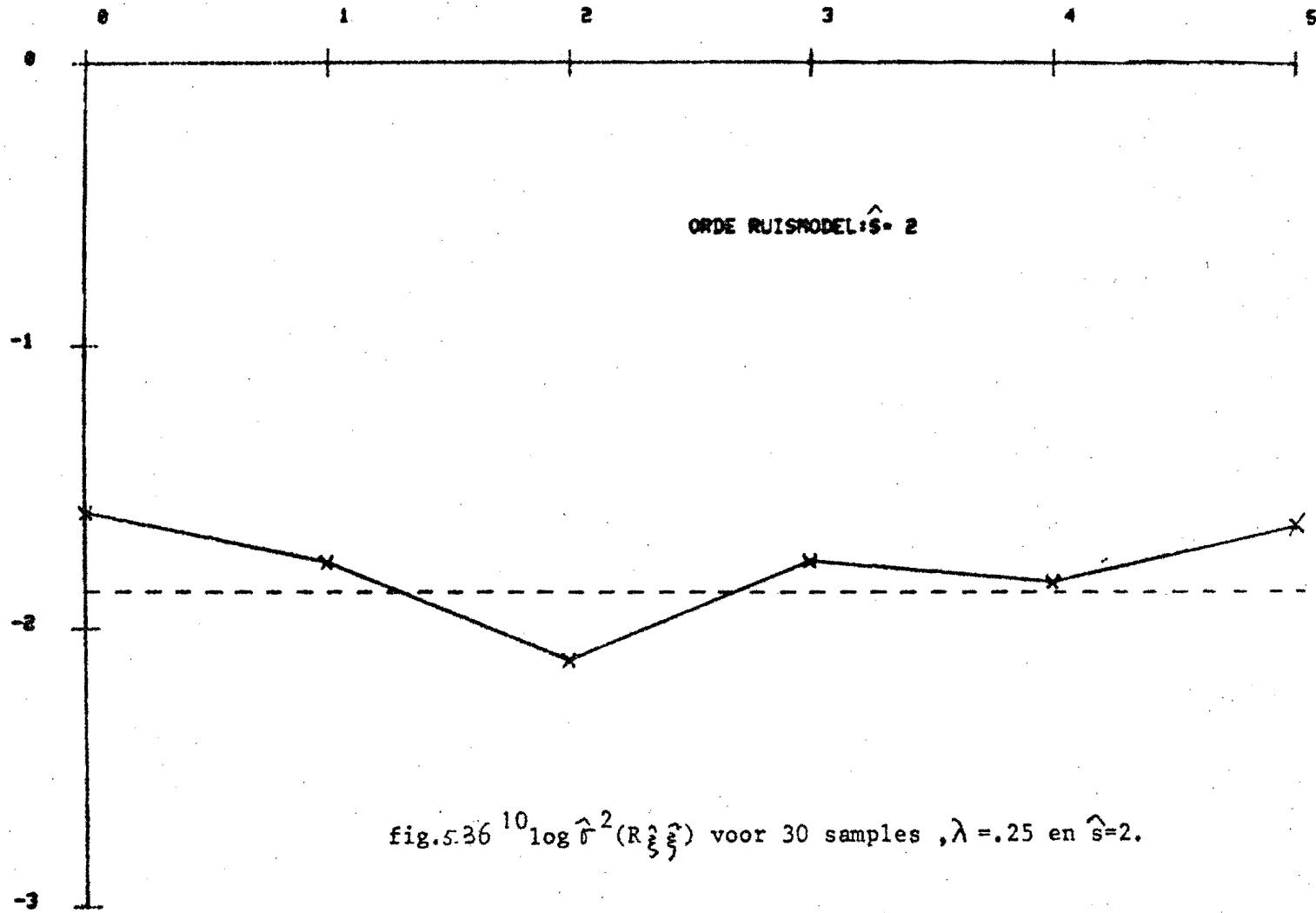


fig.5.36  $10 \log \hat{\sigma}^2(R; \hat{\xi})$  voor 30 samples,  $\lambda = .25$  en  $\hat{s} = 2$ .

10LOG S-hat^2(R)

----> ORDER  $\hat{q}$

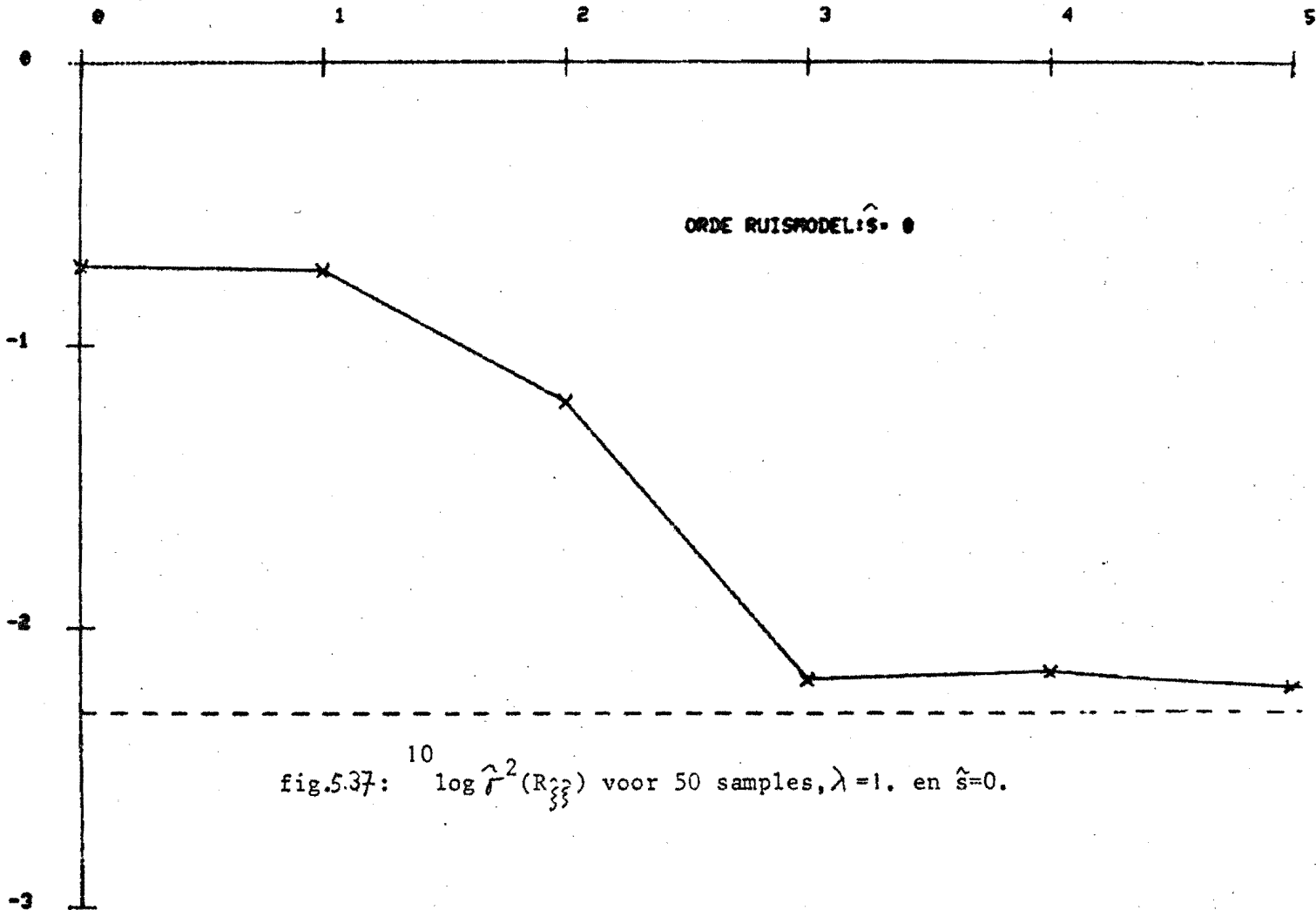


fig.5.37:  $10 \log \hat{r}^2(R_{\hat{q}})$  voor 50 samples,  $\lambda=1$ . en  $\hat{s}=0$ .

10LOG S-2(R)

----> ORDER  $\hat{q}$

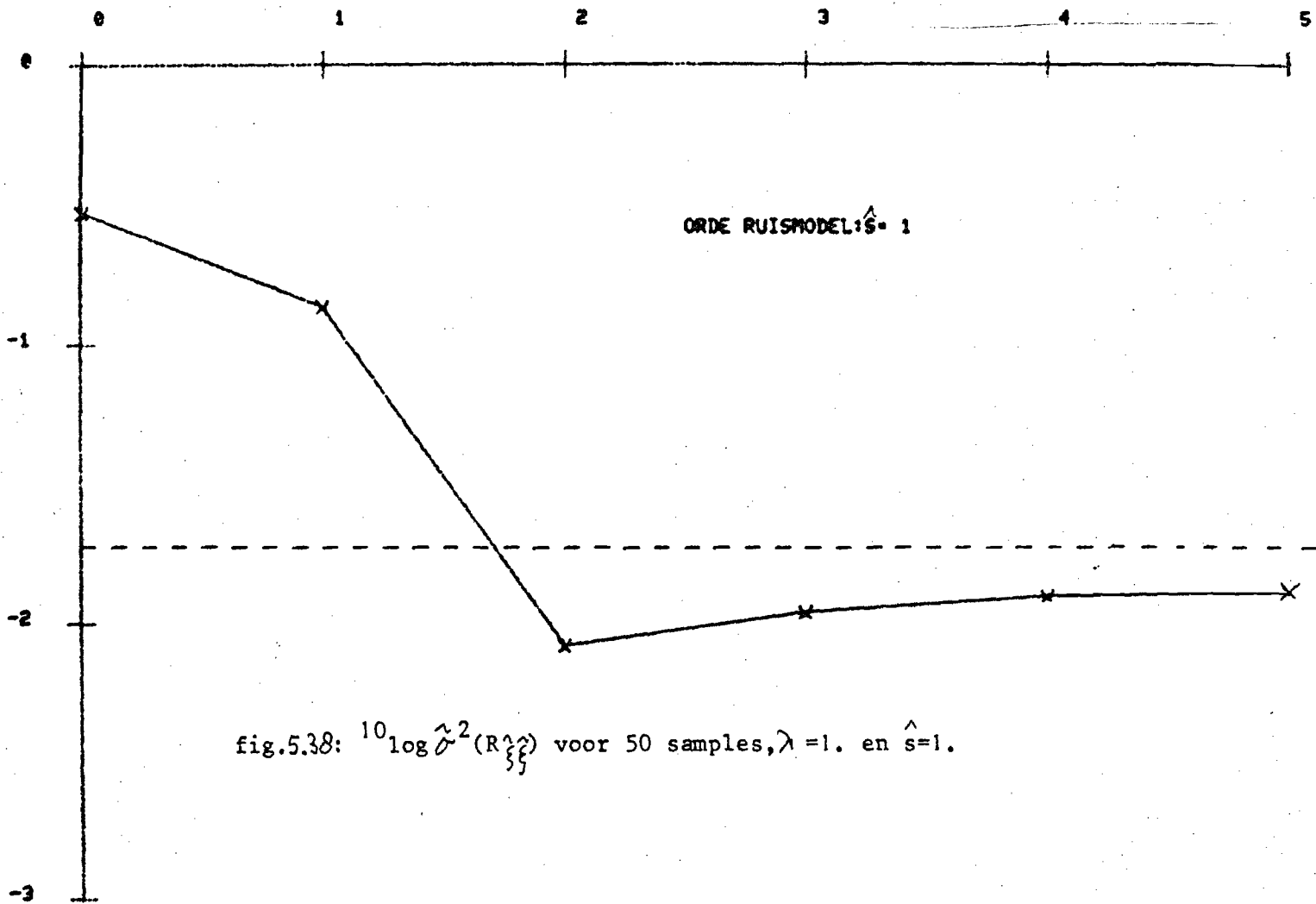
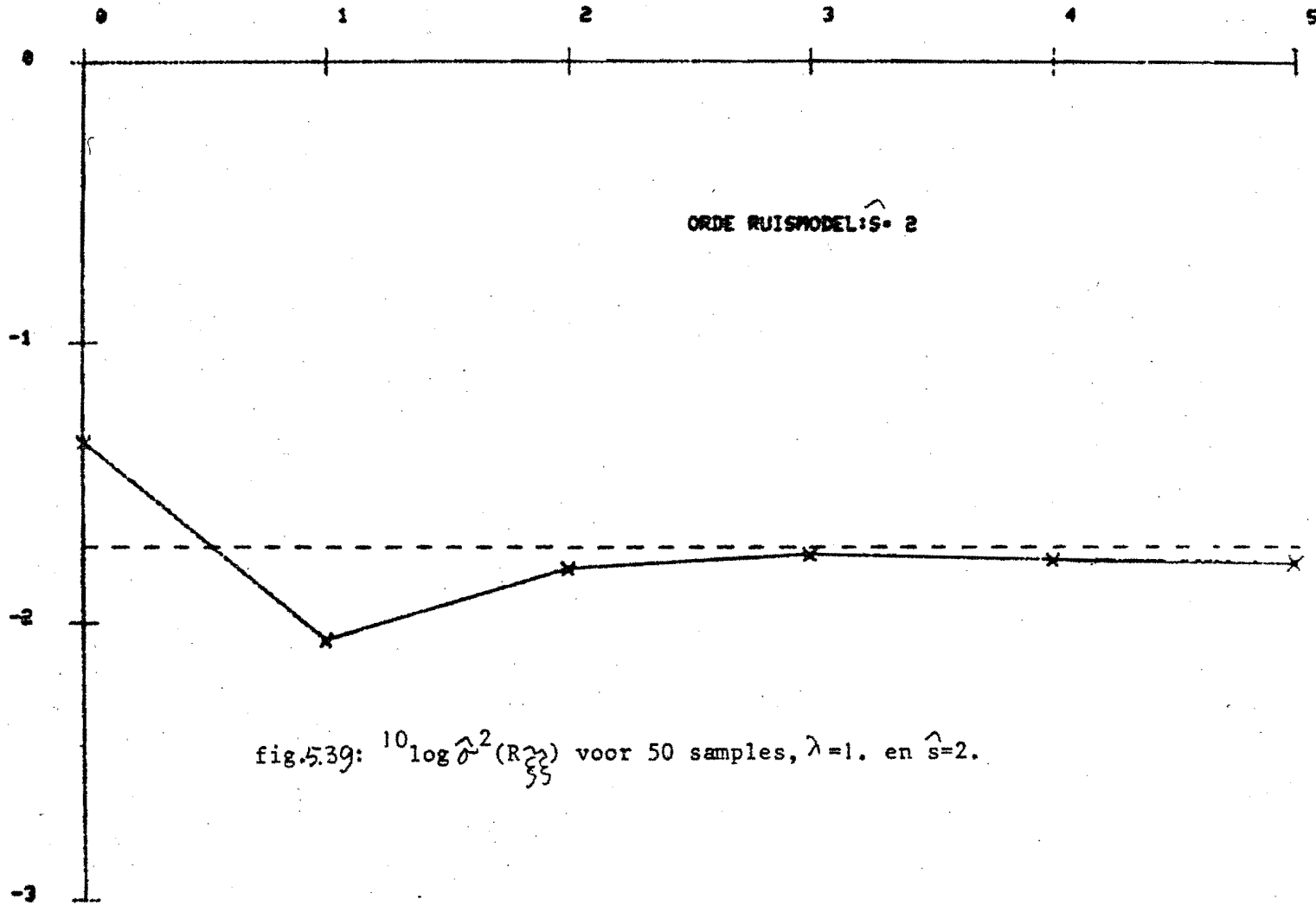


fig.5.38:  $10 \log \hat{\sigma}^2 (R_{\hat{q}})$  voor 50 samples,  $\lambda = 1$ . en  $\hat{s} = 1$ .



10LOG S<sup>2</sup>(R)

----> ORDER  $\hat{q}$



10LOG S<sup>2</sup>(R)

----> ORDER  $\hat{q}$

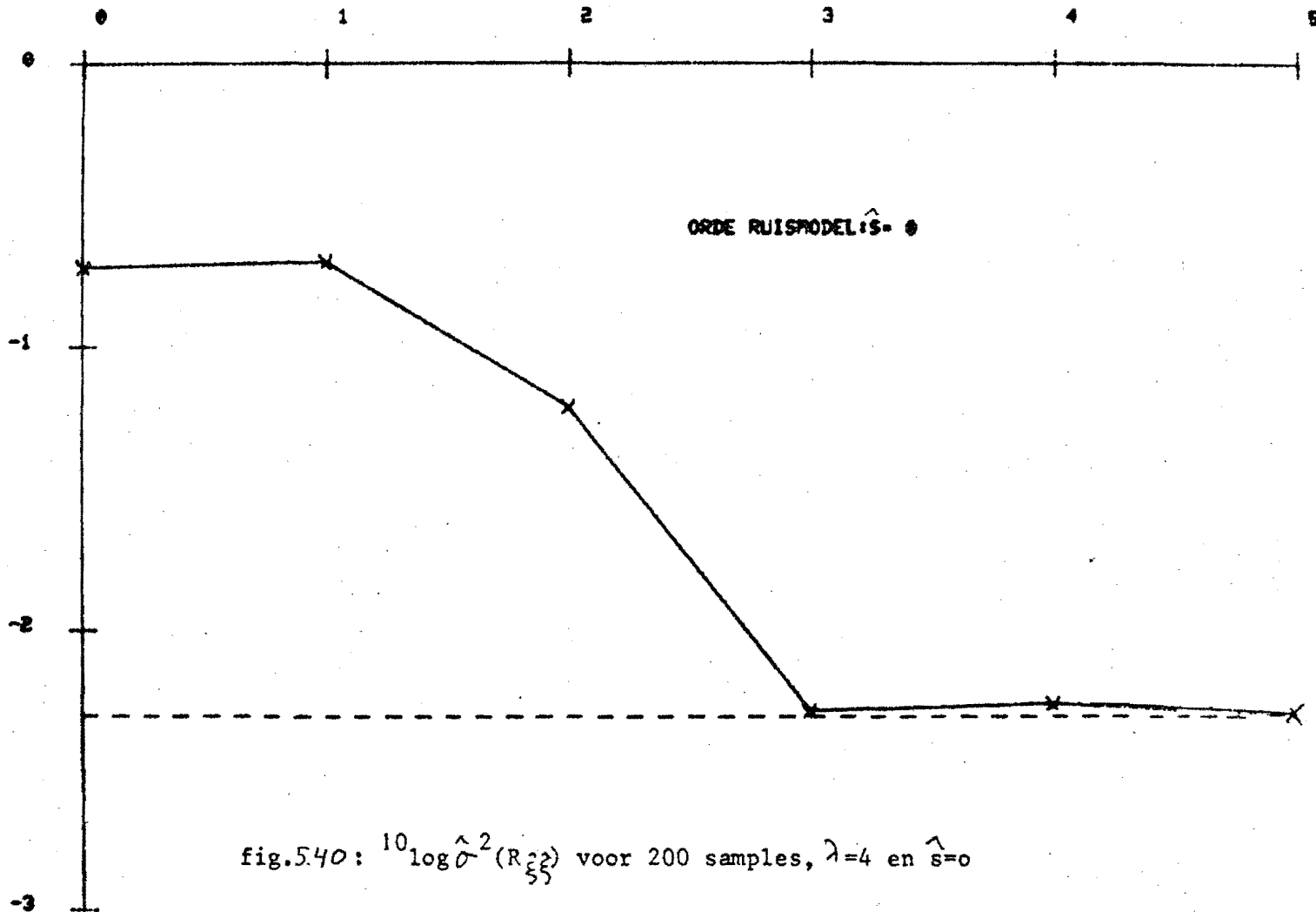


fig.5.40:  $10 \log \hat{\sigma}^2(R_{\xi\xi})$  voor 200 samples,  $\lambda=4$  en  $\hat{s}=0$

10LOG S-2(R)

----> ORDER  $\hat{q}$

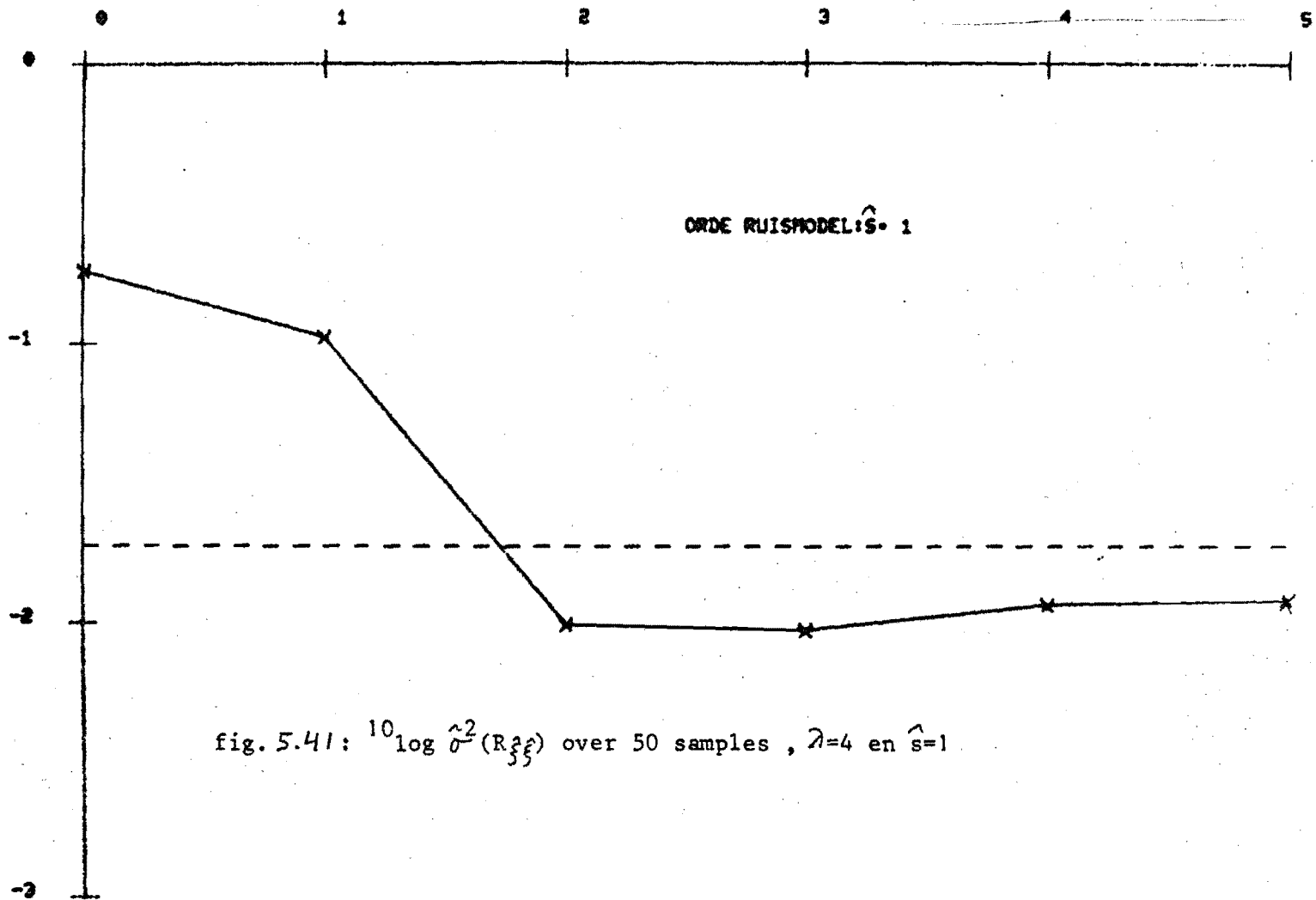
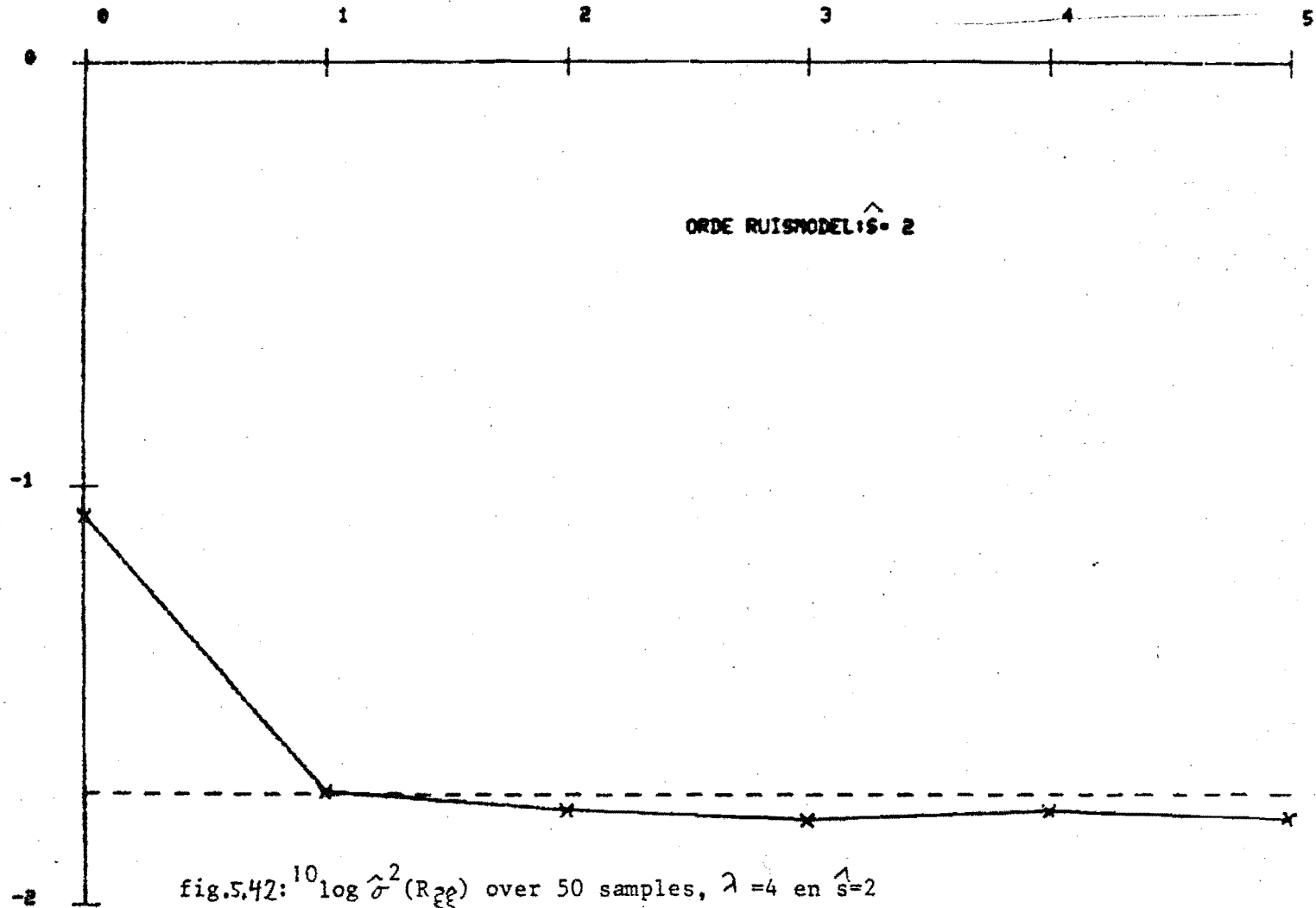


fig. 5.41:  $10 \log \hat{\sigma}^2 (R_{\xi\xi})$  over 50 samples,  $\lambda=4$  en  $\hat{s}=1$

10LOG S^2(R)

----> ORDER  $\hat{q}$



10LOG S-2(R)

----> ORDER  $\hat{5}$

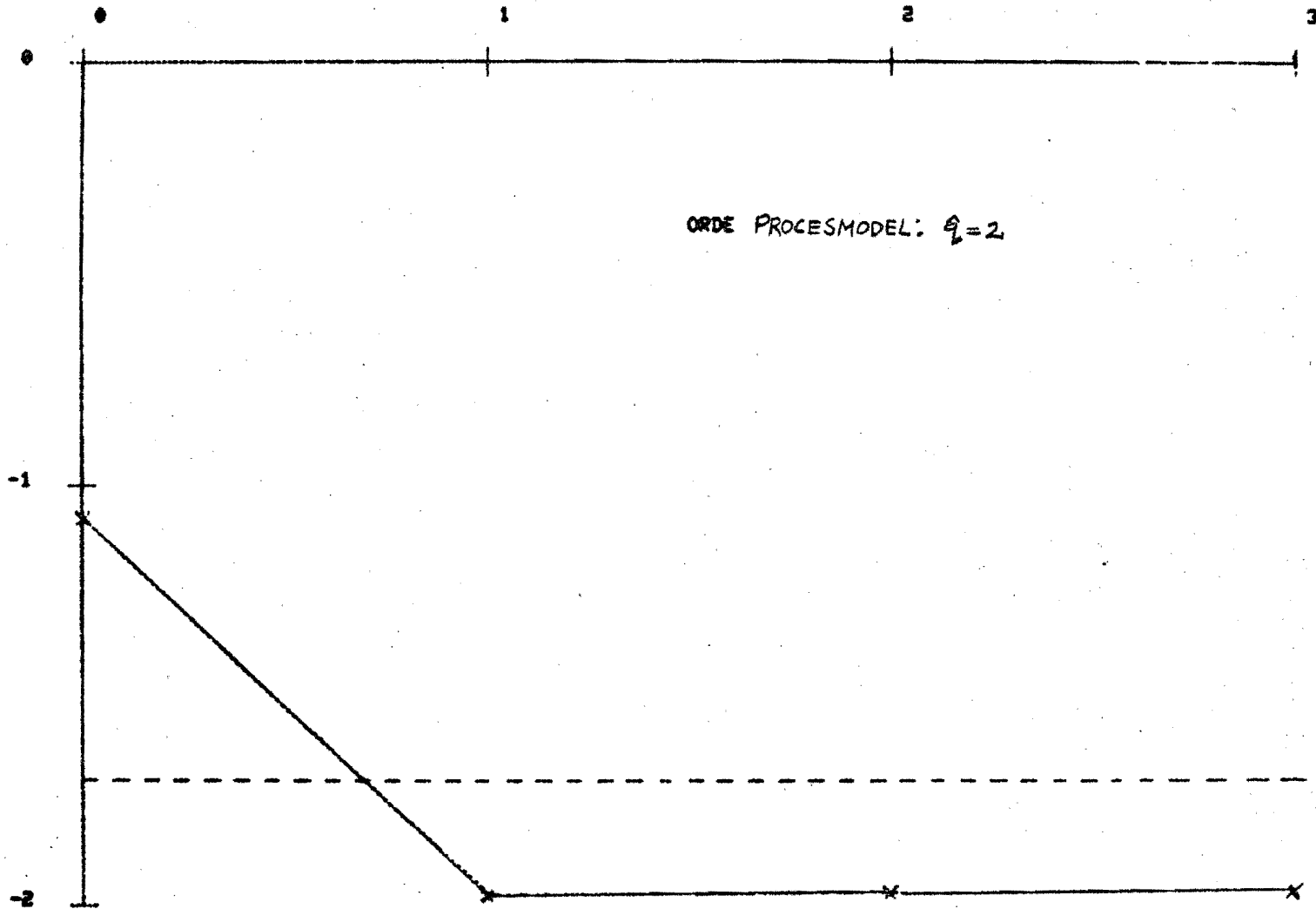


fig. 5.43:  $10 \log \hat{\sigma}^2 (R_{\hat{q}}^2)$  berekend uit 50 samples,  $\lambda = .25$ , orde procesmodel:  $\hat{q} = 2$ .

----> ORDER  $\hat{q}$

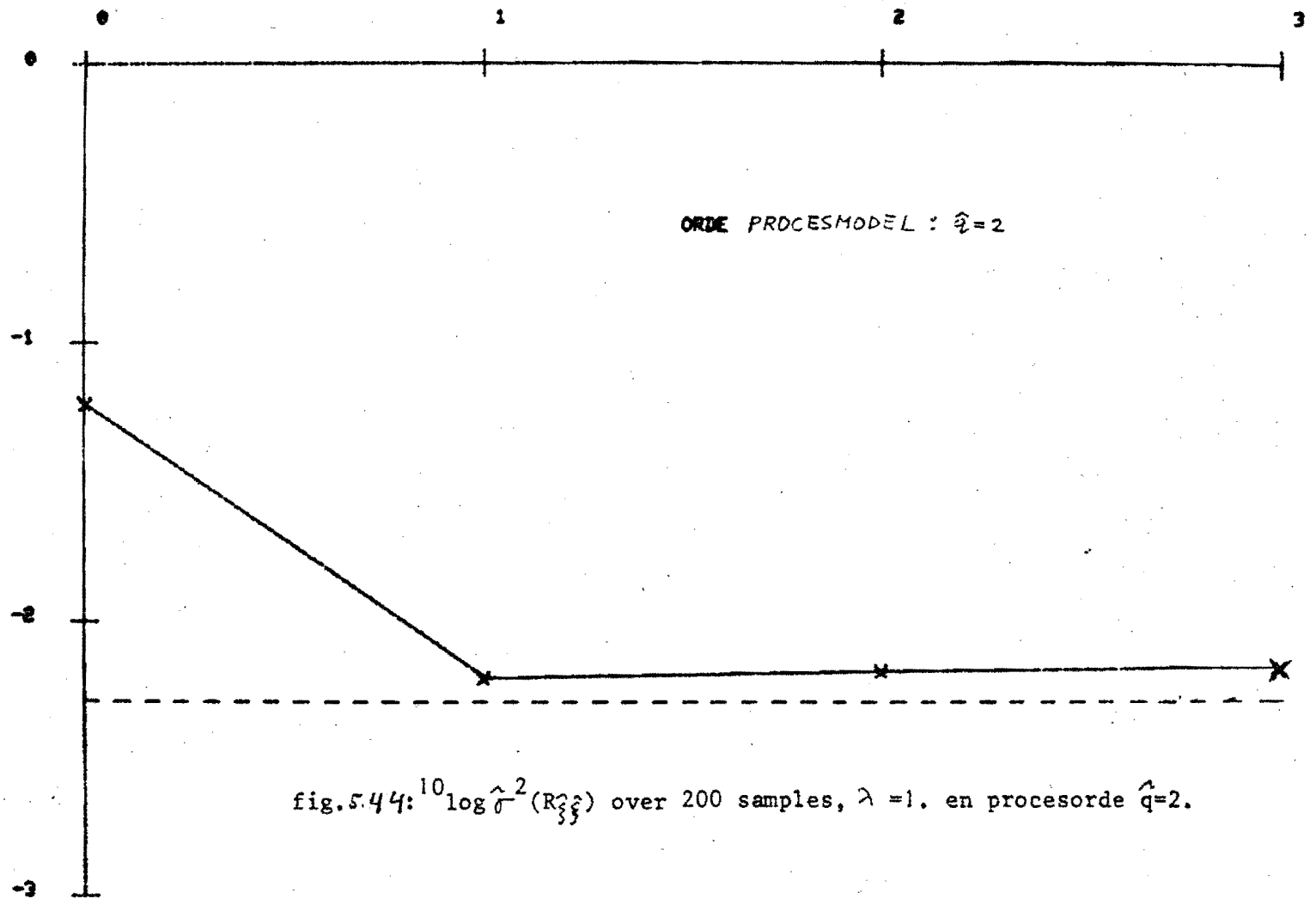


fig. 5.44:  $10 \log \hat{\sigma}^2(R_{\hat{q}})$  over 200 samples,  $\lambda = 1$ . en procesorde  $\hat{q} = 2$ .

10LOG S-2(R)

-----> ORDER  $\hat{S}$

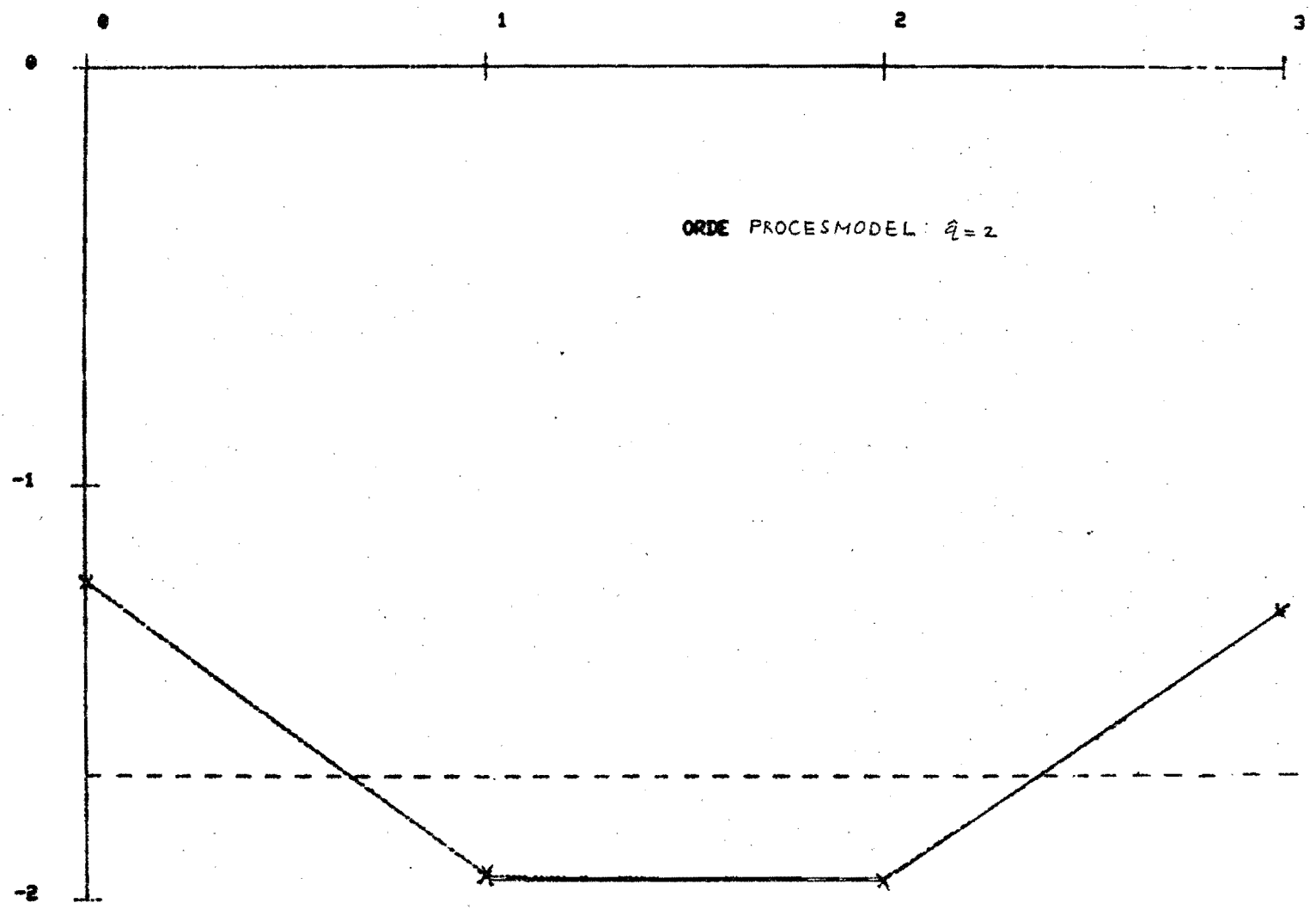


fig.5.45:  $10 \log \hat{\sigma}^2(R_{\hat{\xi}})$  over 50 samples met  $\lambda = 4$  en  $\hat{q} = 2$

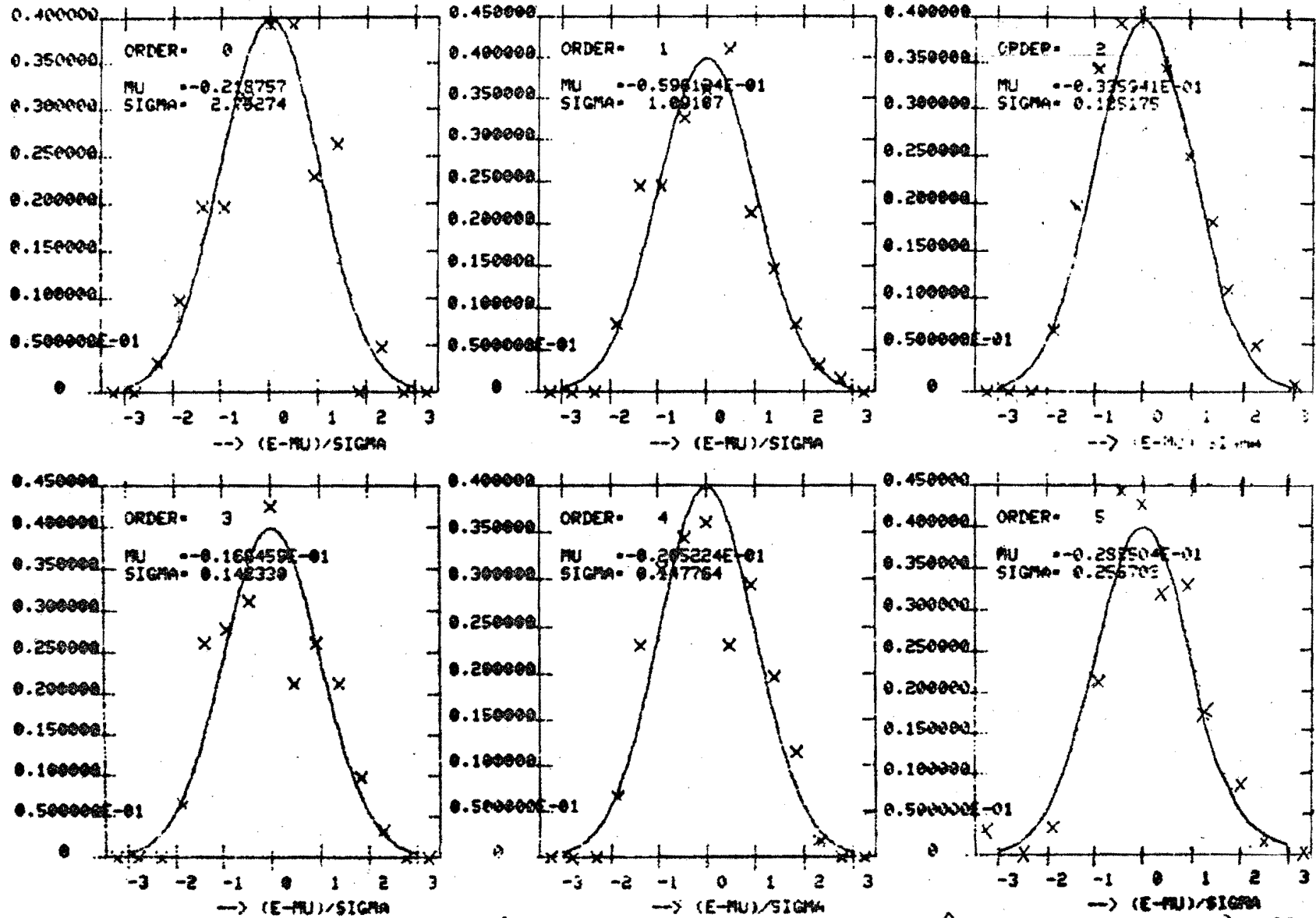


fig 5.46: Test op Gaussische verdeling van  $\hat{e}(k)$  voor 132 samples,  $\lambda = .25$  en  $\hat{s} = 1$ .



NUMBER OF SAMPLES: 735

PLOT OF GAUSSIAN DISTRIBUTION FUNCTION OF  $\hat{E}(k)$

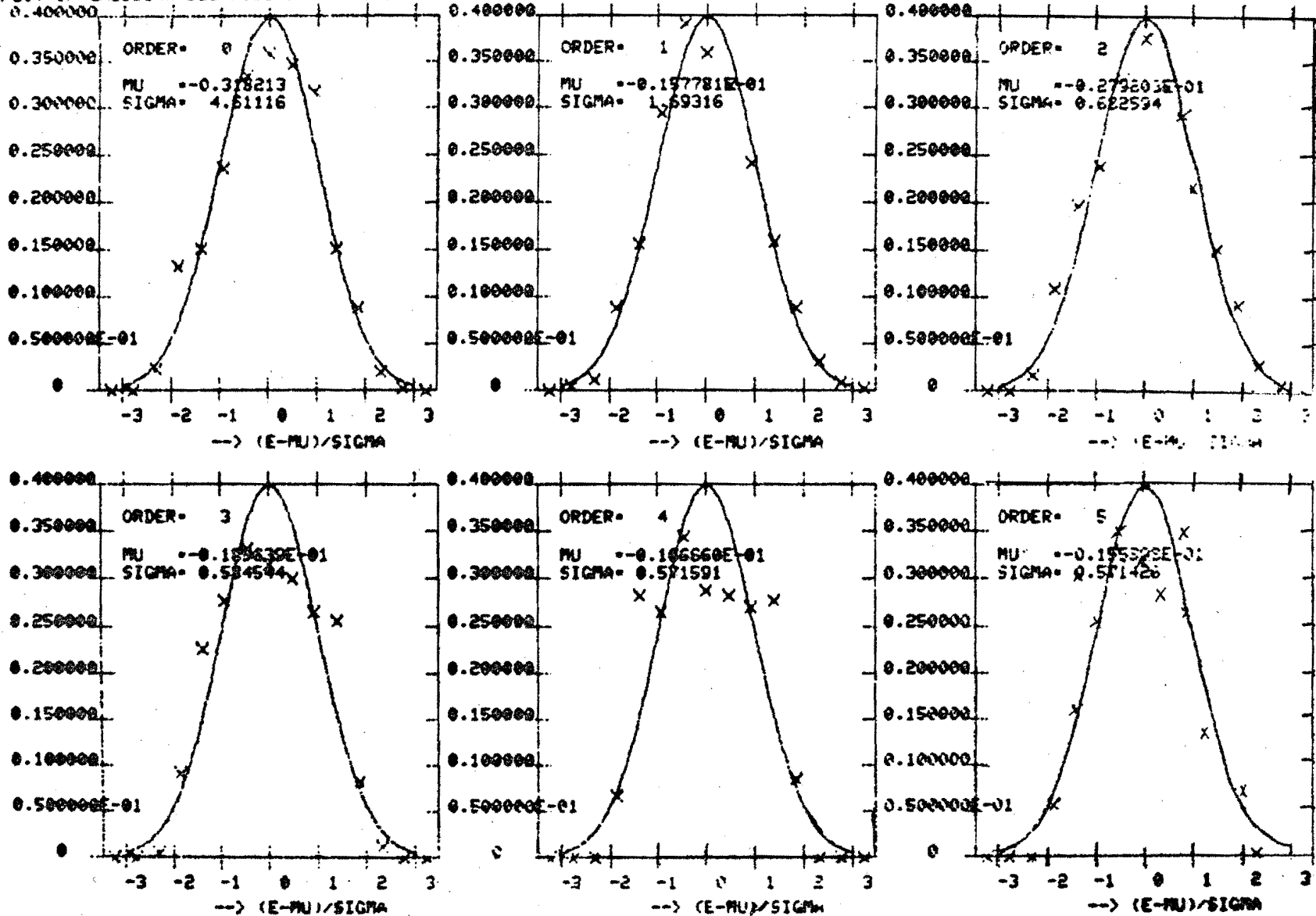


fig.5.47 test op Gaussische verdeling van  $\hat{e}(k)$  voor 735 samples,  $\lambda=1$ . en  $\hat{s}=1$ .

NUMBER OF SAMPLES: 903

PLOT OF GAUSSIAN DISTRIBUTION FUNCTION OF  $\hat{E}(k)$

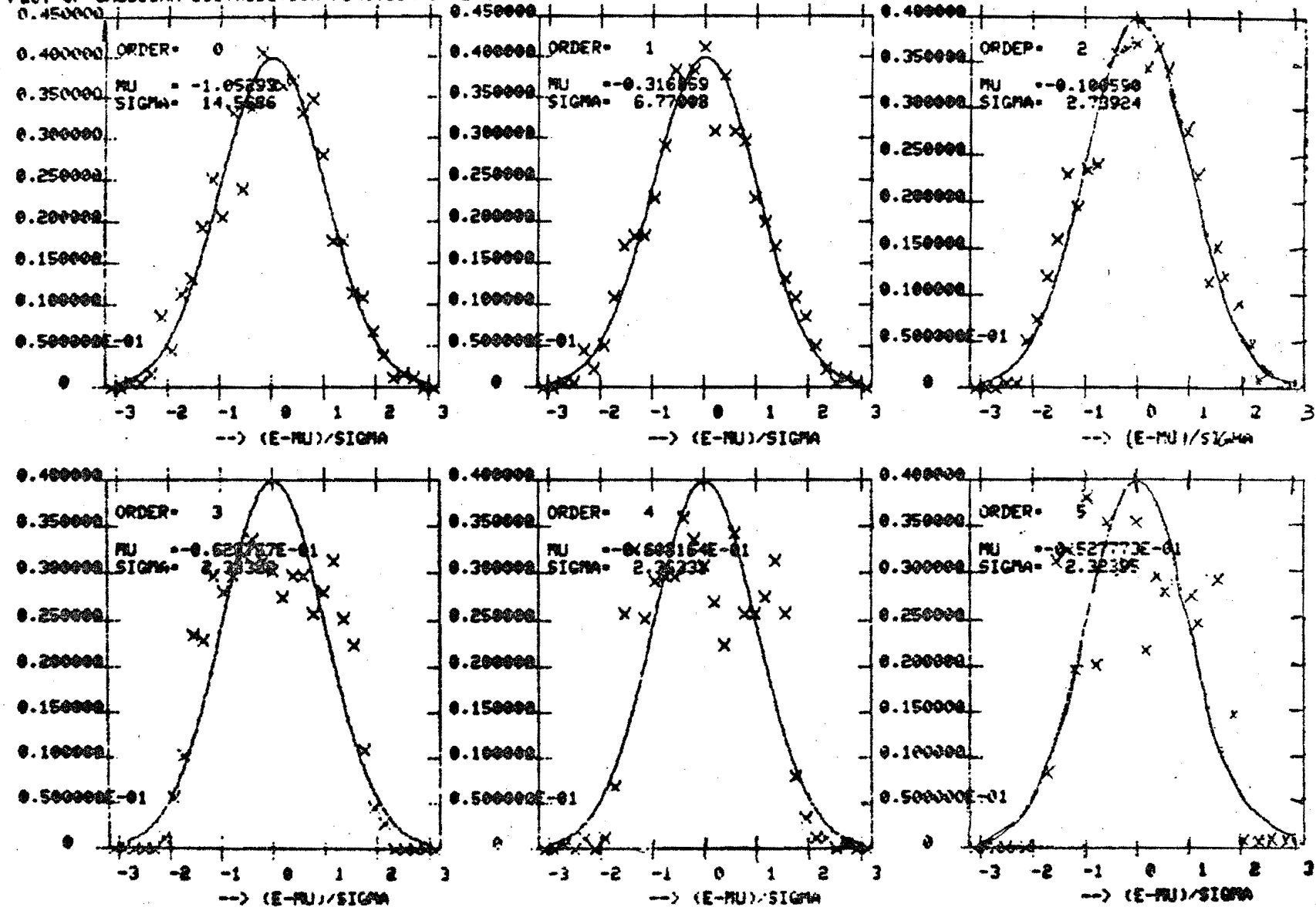


fig.5.48: Test op Gaussische verdeling van  $\hat{e}(k)$  over 903 samples, 31 intervallen

$\lambda = 4$   
 $S = 1$

NUMBER OF SAMPLES: 903

PLOT OF GAUSSIAN DISTRIBUTION FUNCTION OF  $\hat{E}(K)$

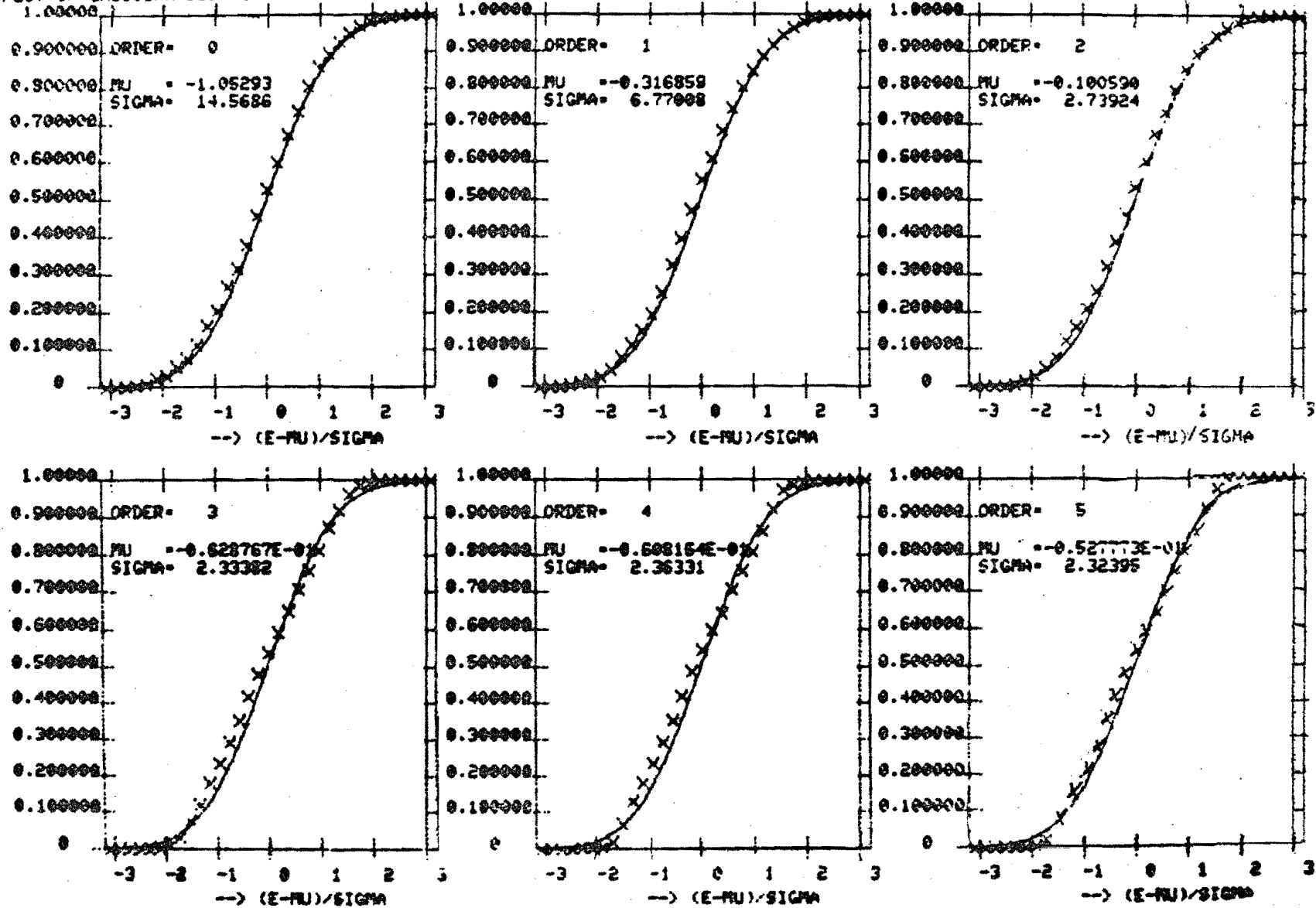


fig.5.49: Kumulatieve verdeling van  $\hat{e}(k)$  over 903 samples,  $\lambda = 4$  en  $\hat{s} = 1$

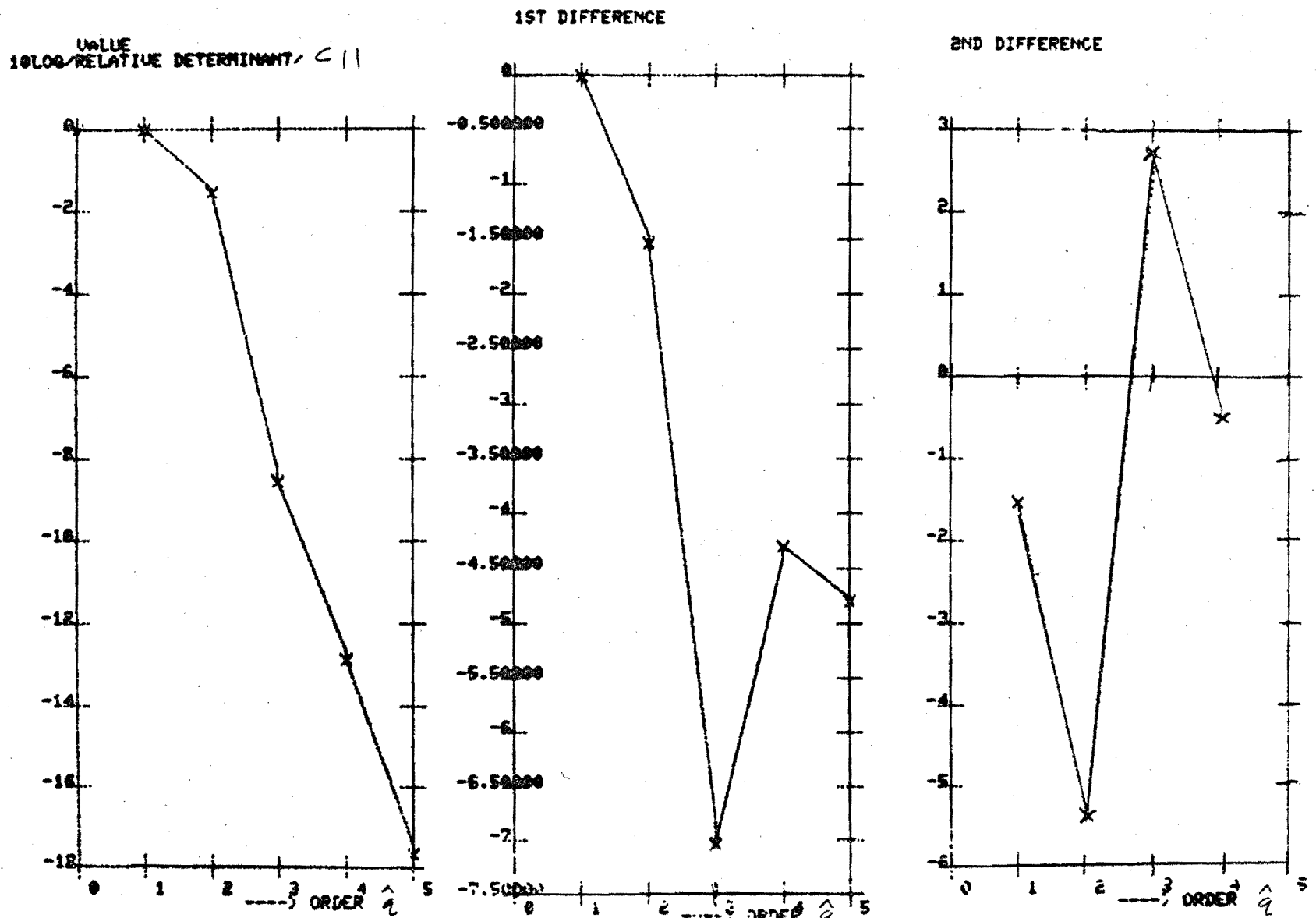


fig.5.5a  $10 \log / \text{rel. det. } C_{11} / \text{ voor } \lambda = .25, 1000 \text{ samples en } \hat{s} = 1.$

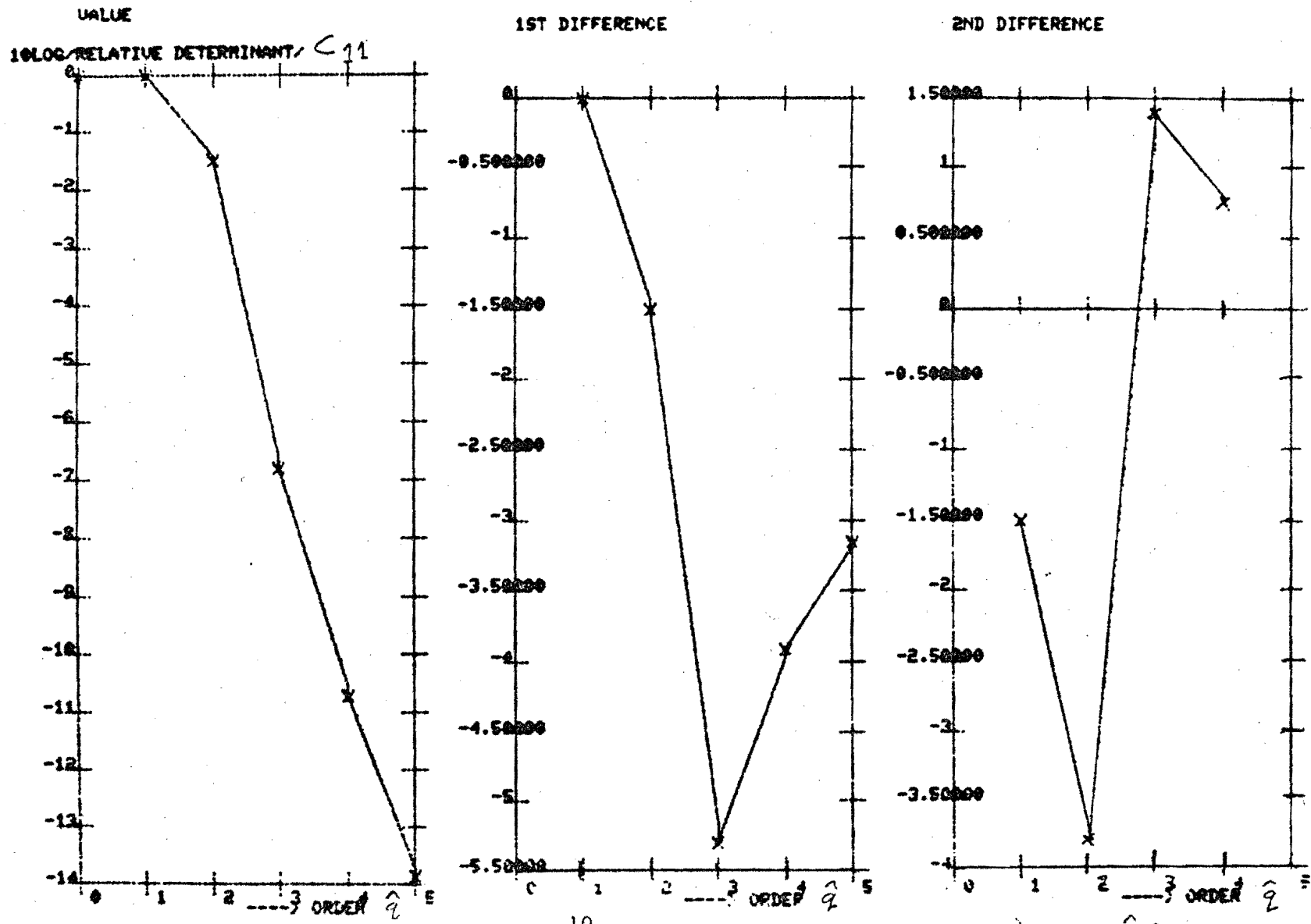
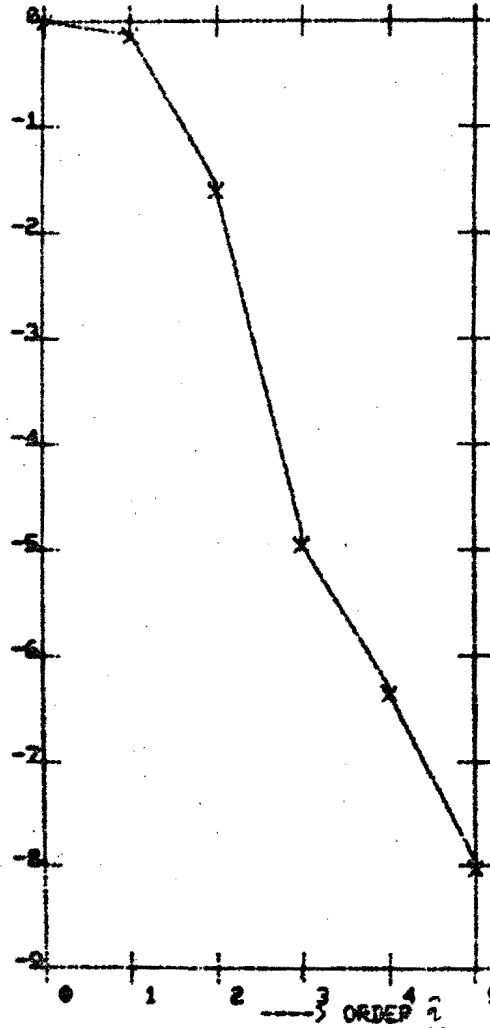
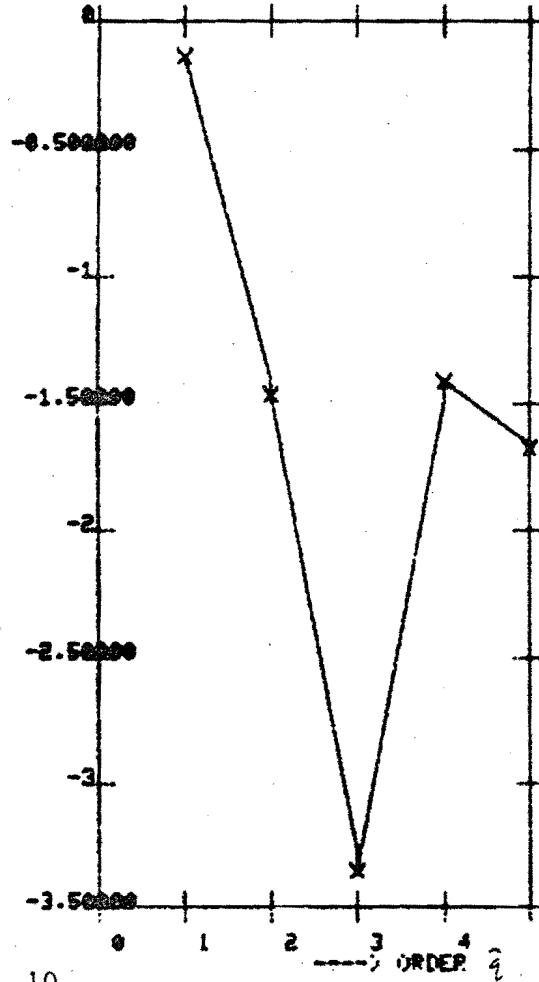


fig. 5.51:  $10 \log / \text{rel. det. } C_{11} /$  na 1000 samples,  $\lambda = 1$ . en  $\hat{s} = 2$ .

VALUE  
10LOG/RELATIVE DETERMINANT/  $C_{11}$



1ST DIFFERENCE



2ND DIFFERENCE

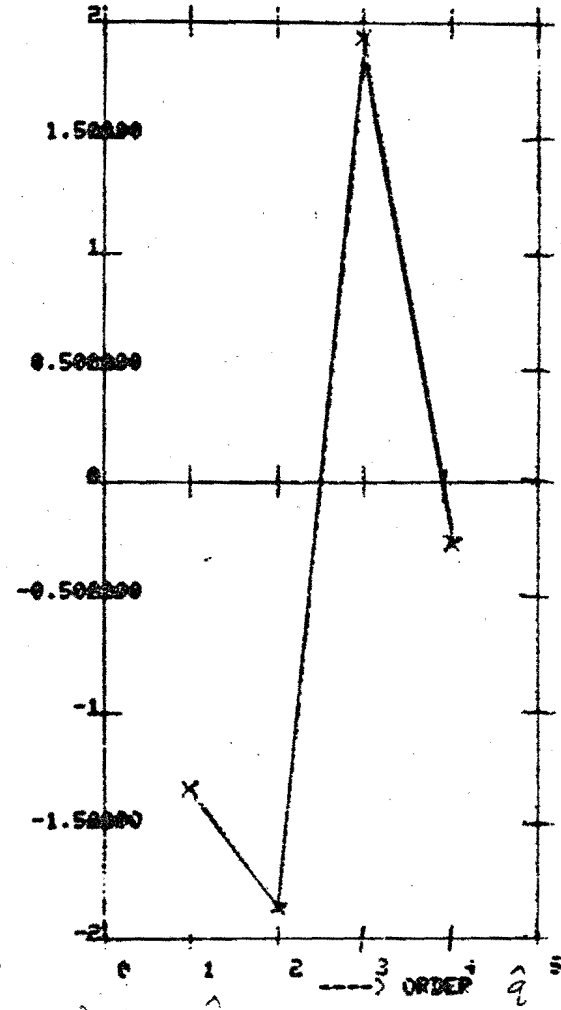
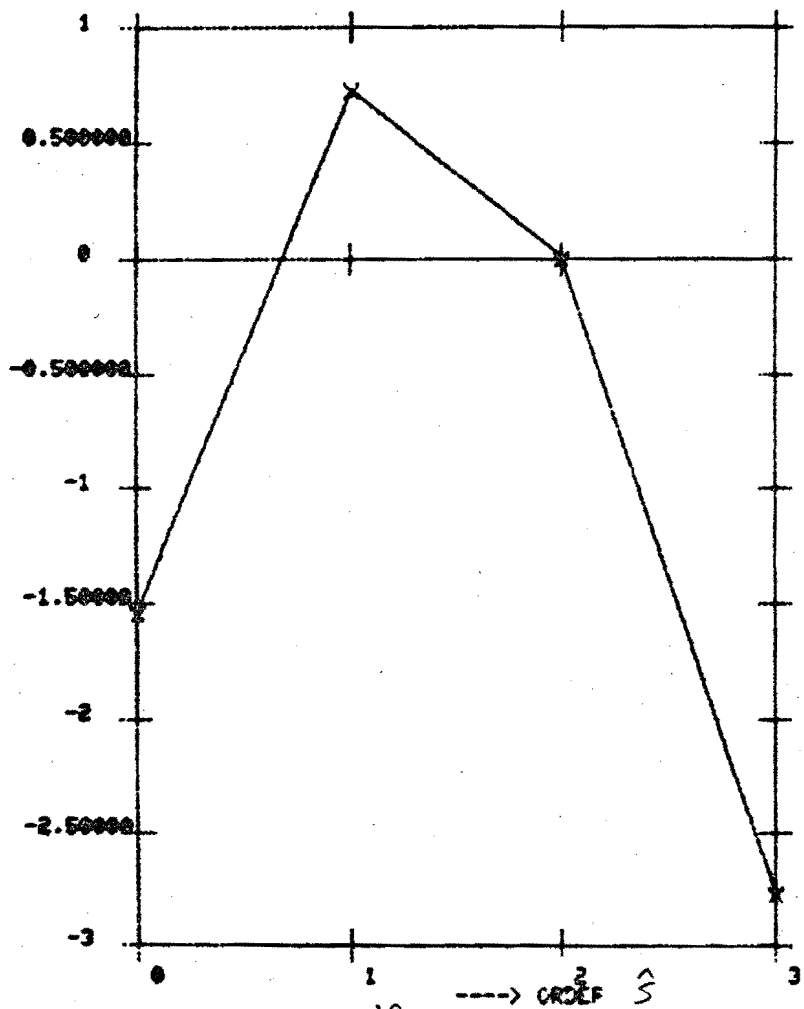


fig.5.52:  $10 \log / \text{rel. det. } C_{11} / n$  na 1000 samples,  $\lambda = 4$  en  $s=1$

10LOG/RELATIVE DETERMINANT/ C 22



1ST DIFFERENCE

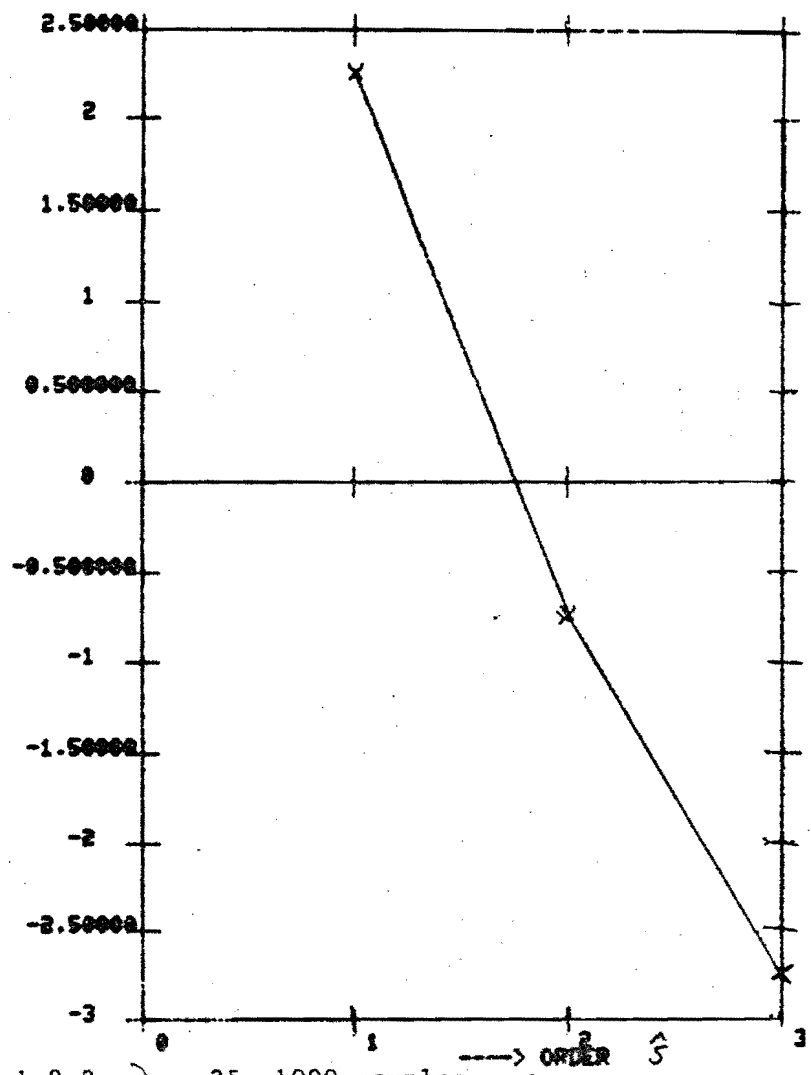


fig. 5.53  $10 \log / \text{rel. det. } C_{22} / \text{ voor } \hat{s}=0,1,2,3. \lambda = .25, 1000 \text{ samples. } \hat{q}=2$

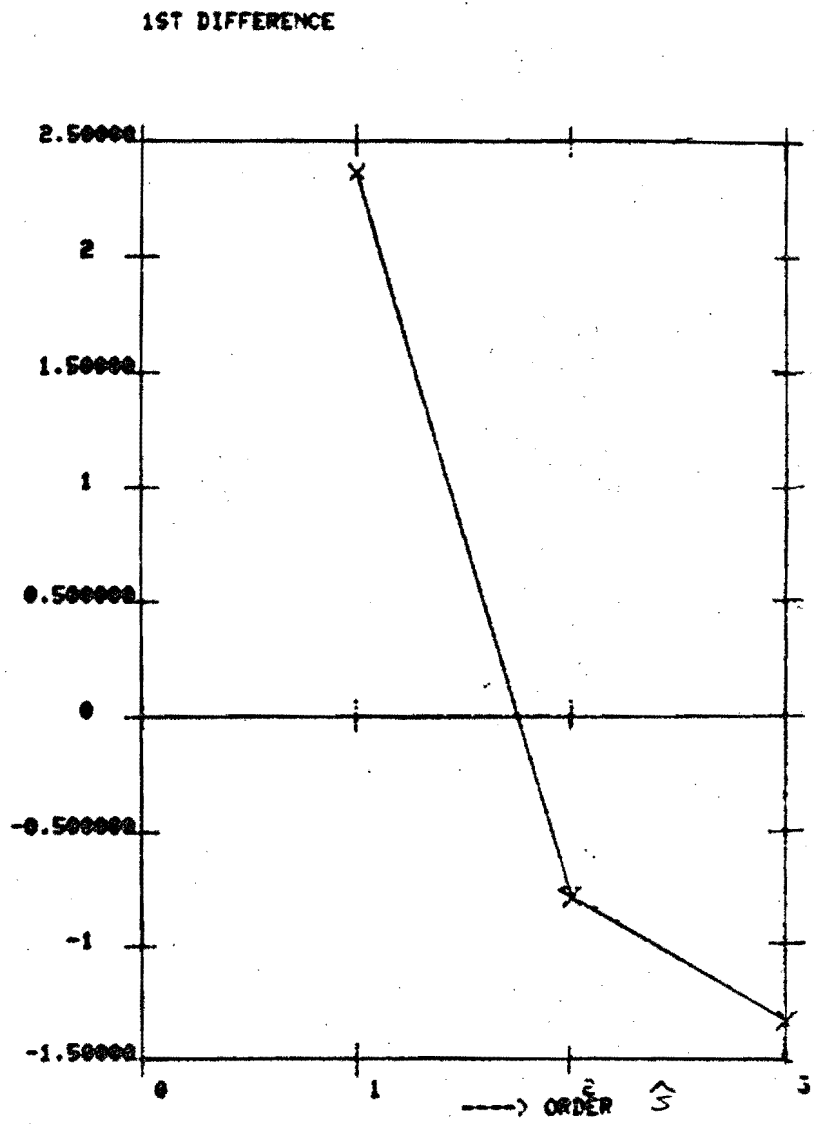
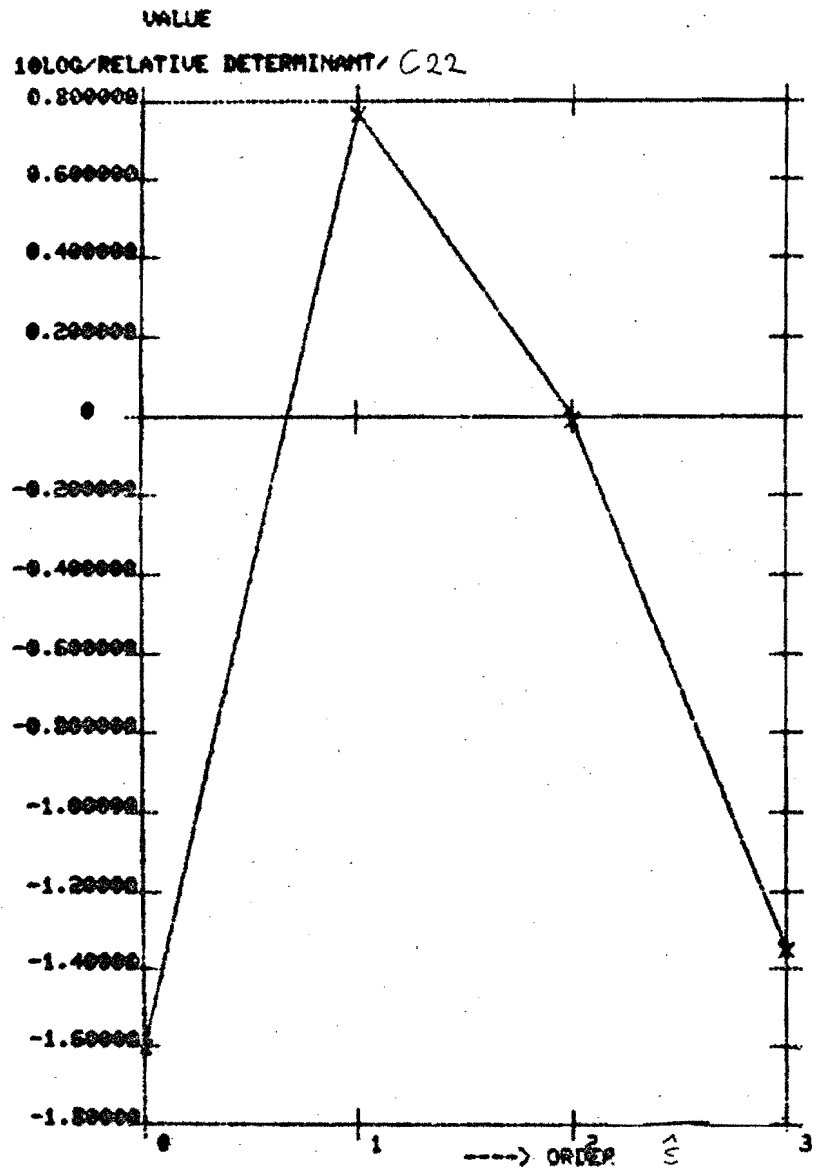


fig.5.54:  $10 \log/\text{rel.det.}C_{22}/$  na 1000 samples voor  $\hat{s}=0,1,2,3$  en  $\hat{q}=2, \lambda=1$ .



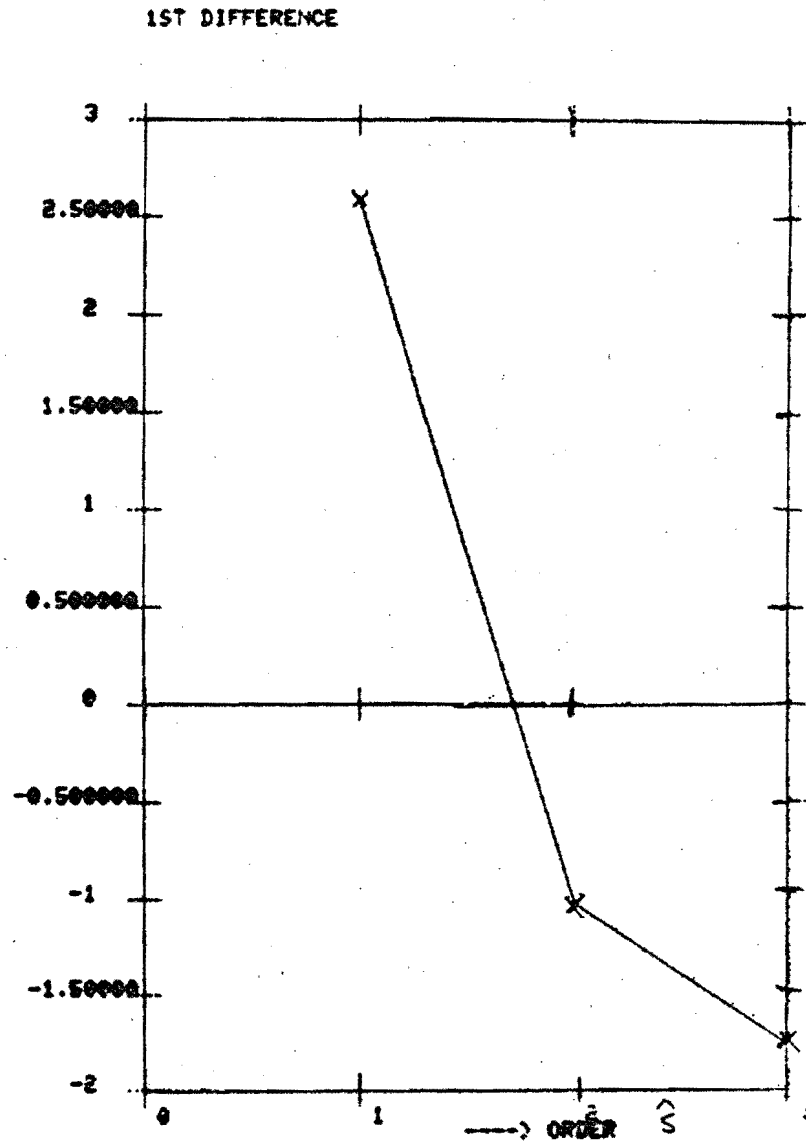
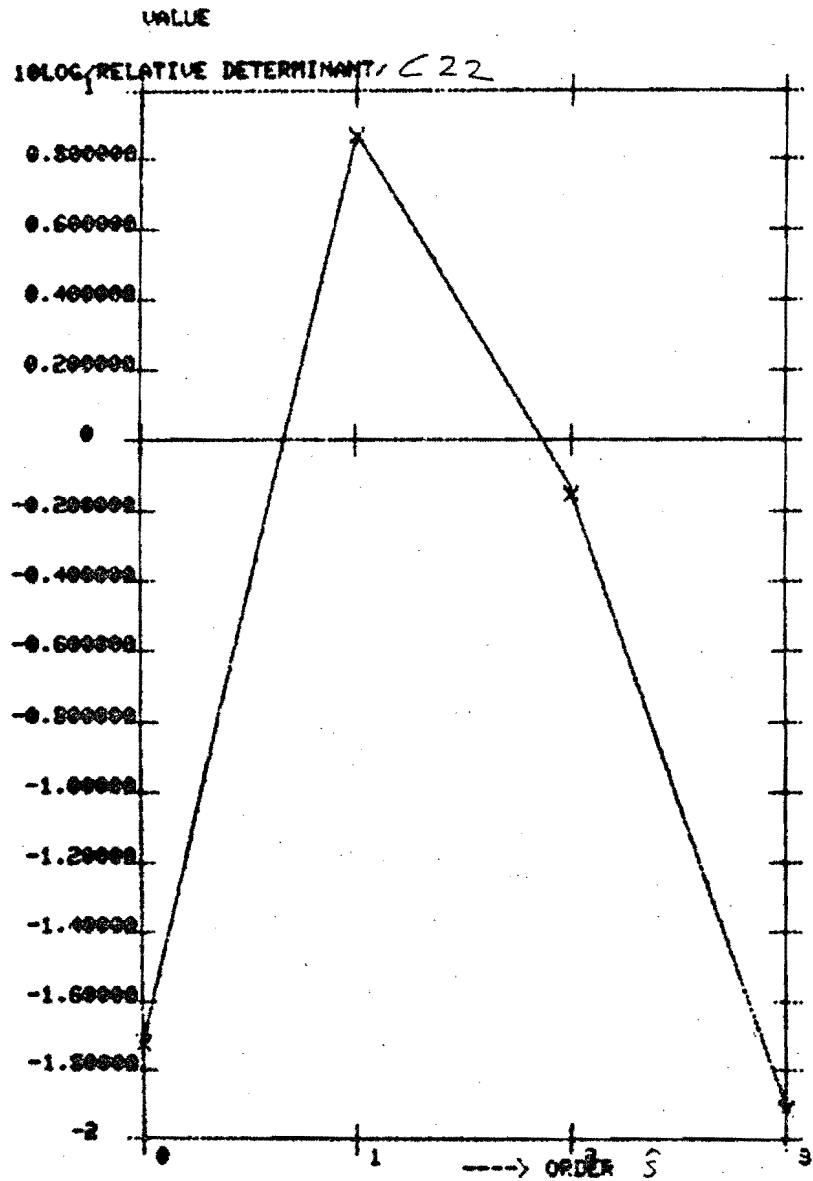


fig. 5.55:  $10 \log / \text{rel. det. } C_{22} /$  na 1000 samples,  $\lambda = 4$  en  $\hat{q} = 2$

X = ACTUAL PROCESS RESPONSE

NUMBERED = SIMULATED MODEL RESPONSE(S)

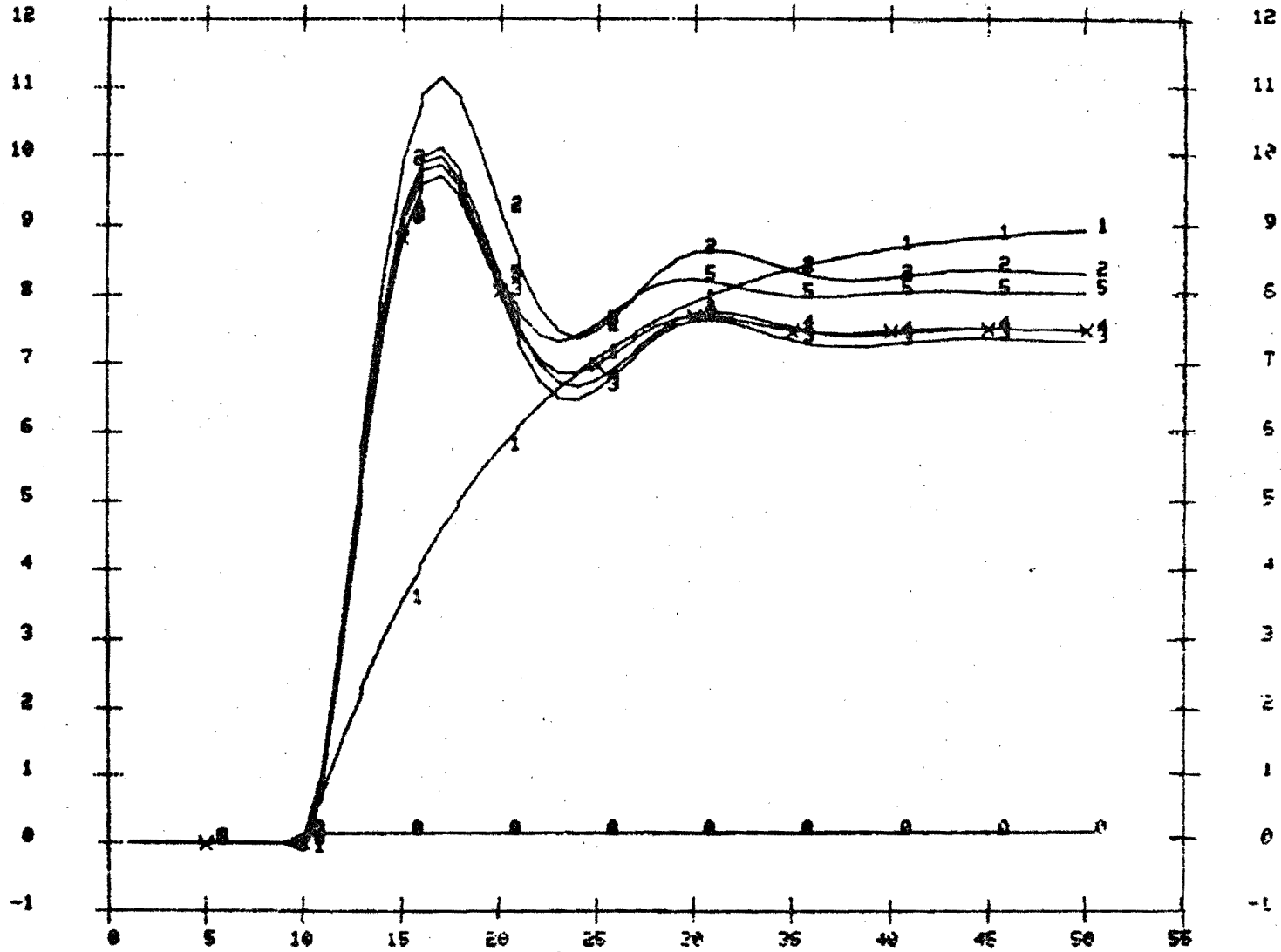


fig. 5.56: Model stapresponsies voor  $\lambda = .25$ ,  $\hat{s} = 0$ . -----> SAMPLE NUMBER

X    • ACTUAL PROCESS RESPONSE  
 NUMBERED    • SIMULATED MODEL RESPONSE(S)

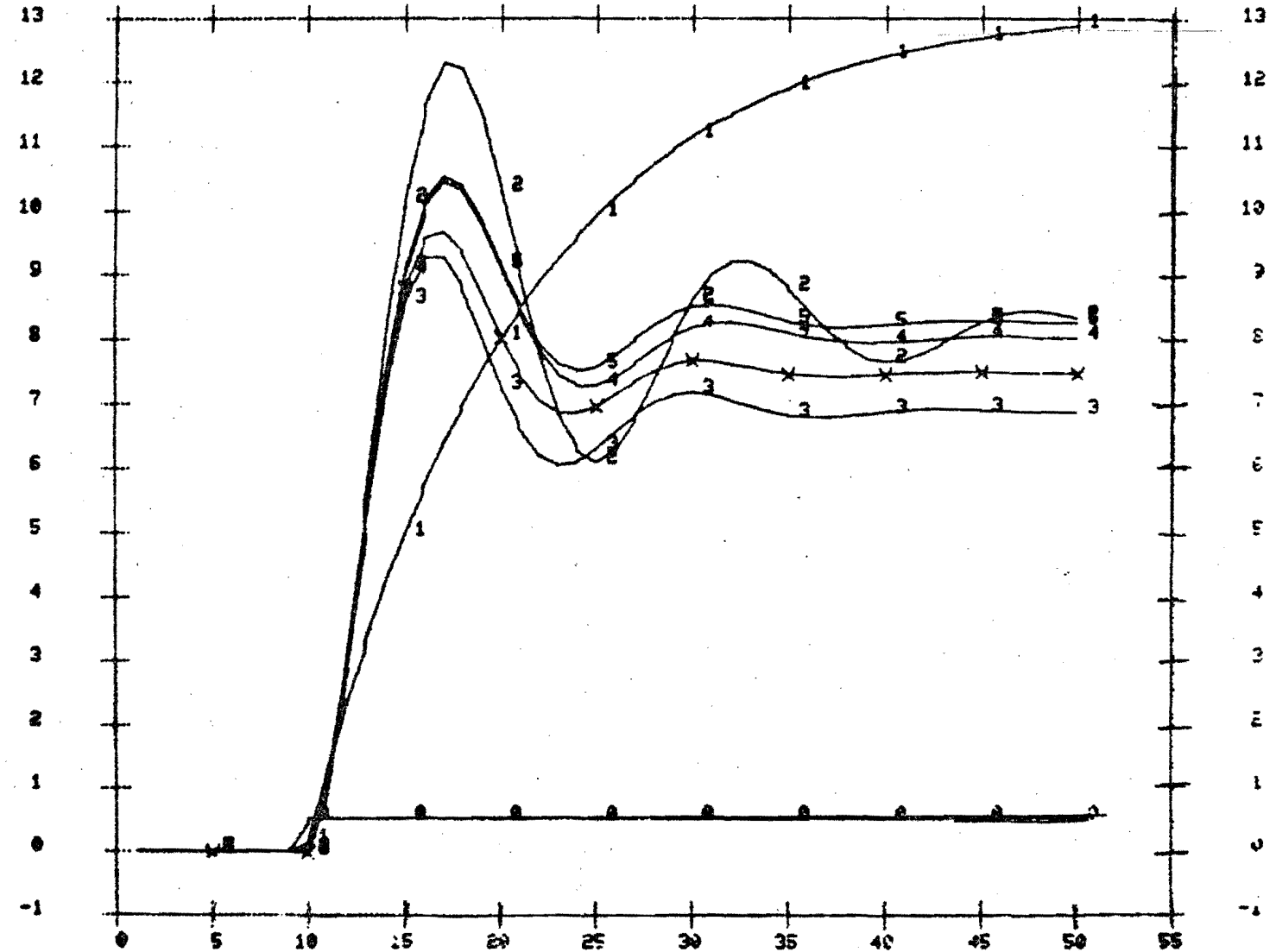


fig.557 Model stapresponsies voor  $\lambda=1$ ,  $\hat{\sigma}=0$  na 1000 samples. -----> SAMPLE NUMBER

x = ACTUAL PROCESS RESPONSE

NUMBERED = SIMULATED MODEL RESPONSE(S)

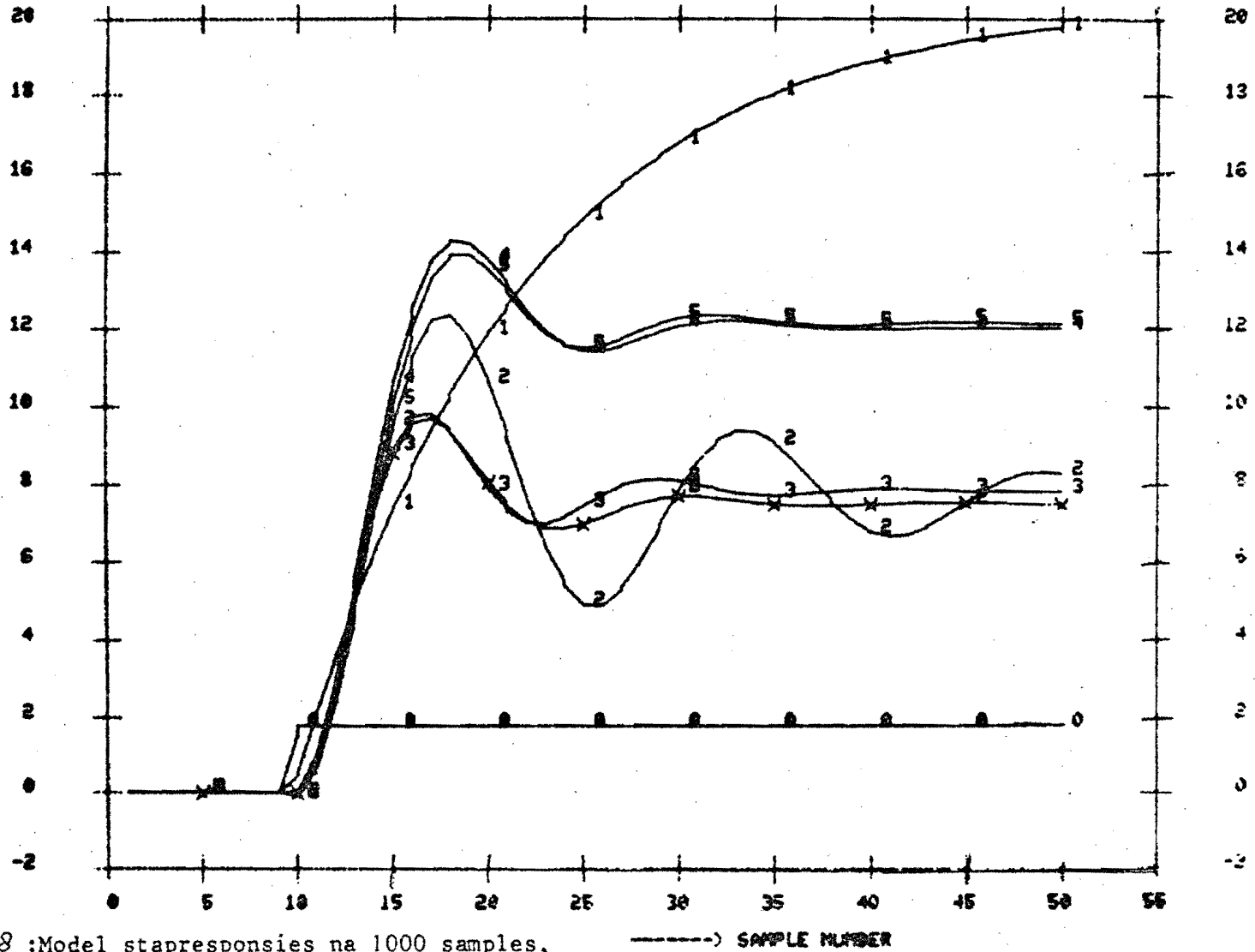


fig. 5.58 : Model stapresponcies na 1000 samples,  
 $\lambda = 4$ . en  $\hat{s}=0$

NUMBERS OF THE ESTIMATED PARAMETERS

I	A(I)	B(I)	D(I)	C(I)
0		4		
1	1	5		
2	2	6		
3	3	7		

ESTIMATED EQUATION ERROR, E(K) 8

ESTIMATED WHITE NOISE, XI(K) 9

EXTENDED MATRIX METHOD

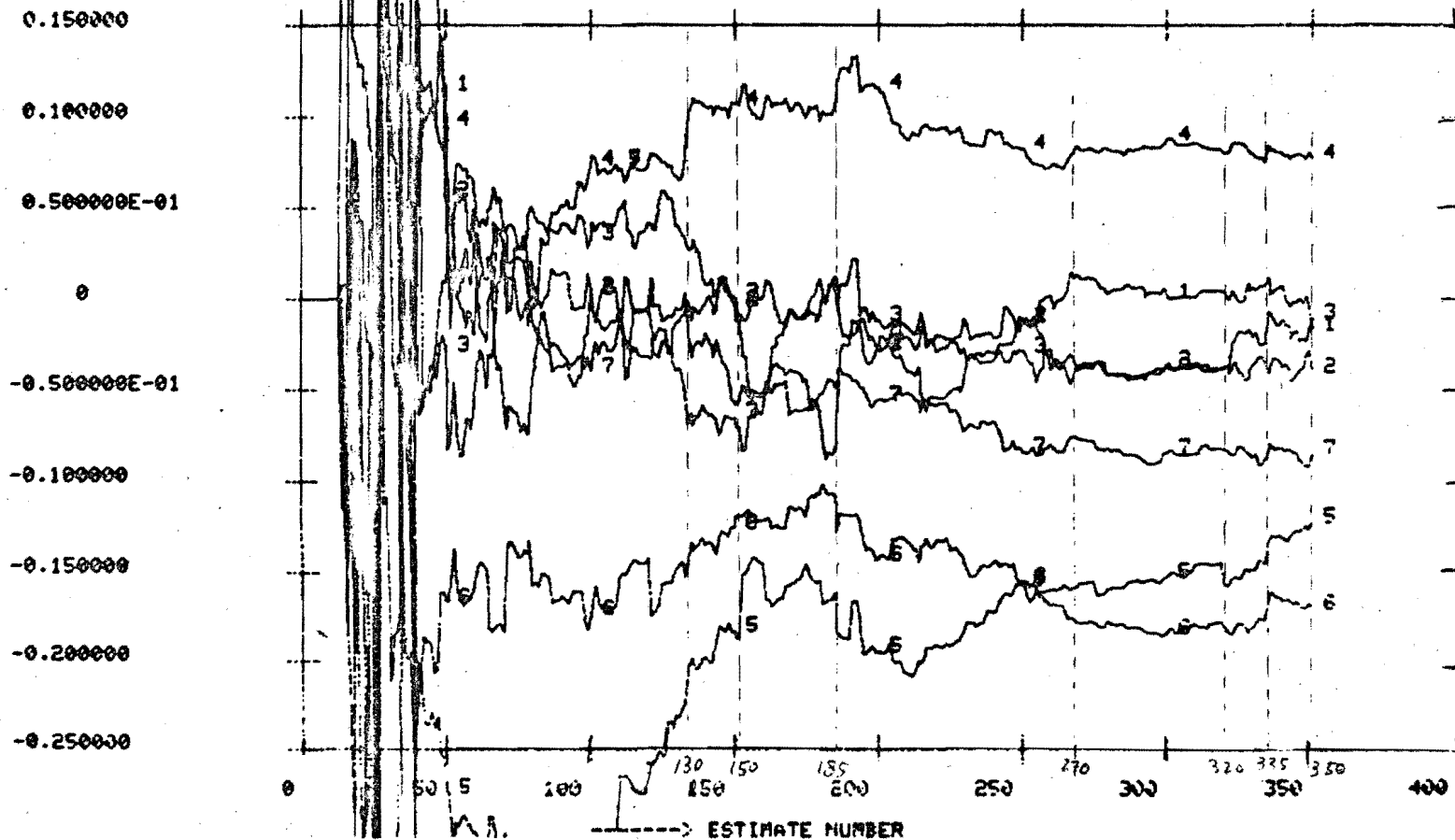
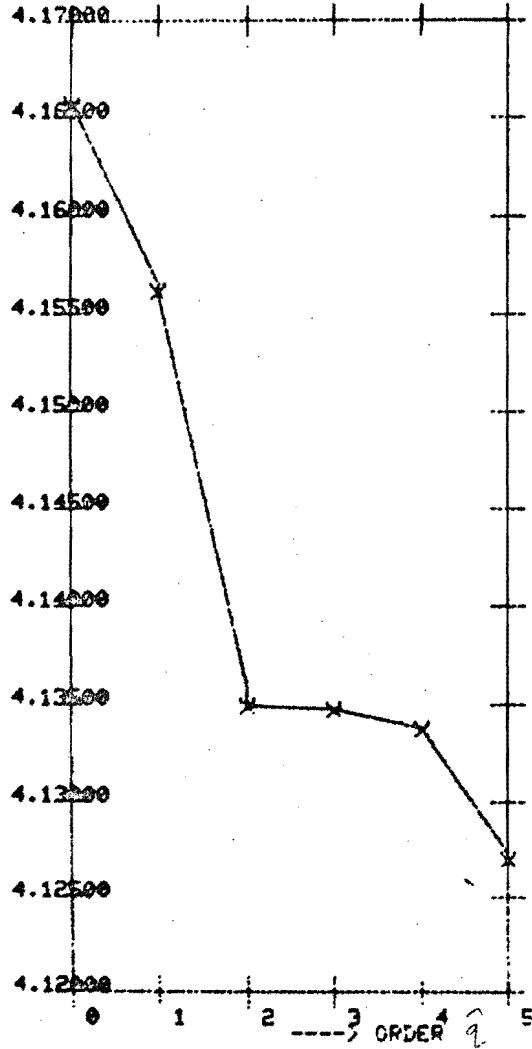
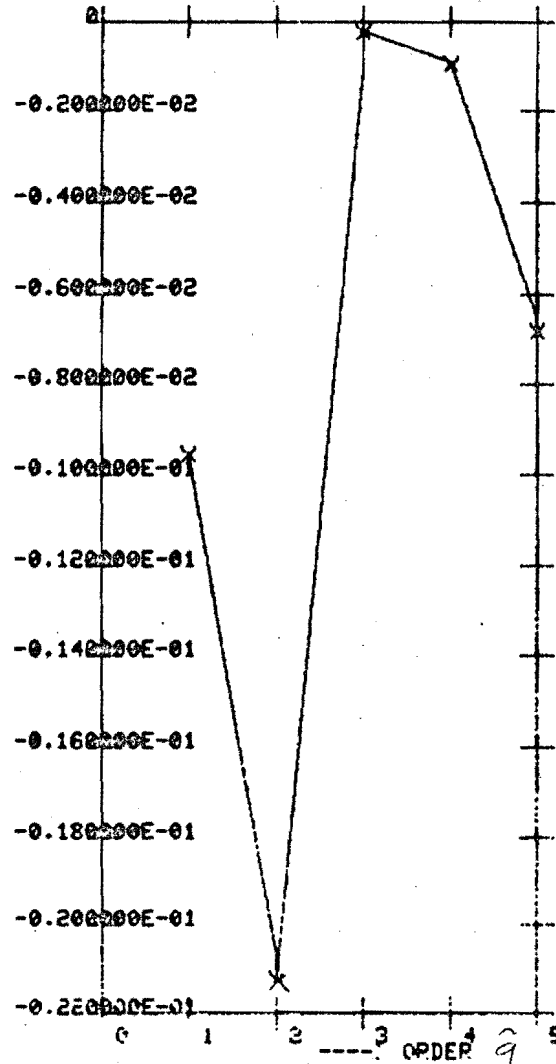


fig. 5.59 : Parameterschätzung (EMM) m.b.v. 3<sup>e</sup>-orde model ( $\hat{q}=3, \hat{s}=0$ ): Tilburg-data; filterfaktor=.2

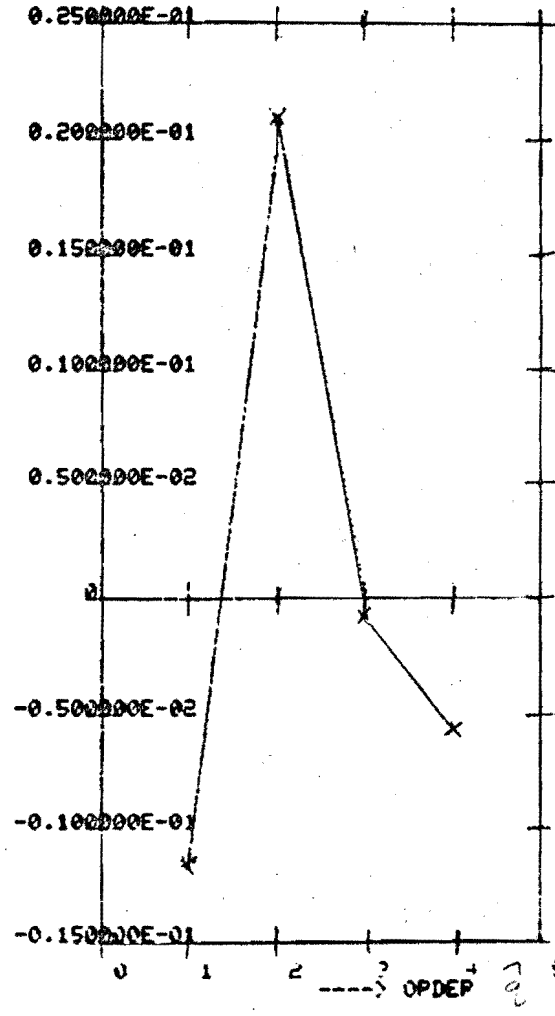
VALUE  
 ERROR-FUNCTION : 10LOG(U1) (WOODSIDE)



1ST DIFFERENCE



2ND DIFFERENCE



-100-

fig. 5.60

fig. 5.60:  $10 \log V_1$  volgens Woodside uit 350 samples; Tilburg-data (filterf.=.2)

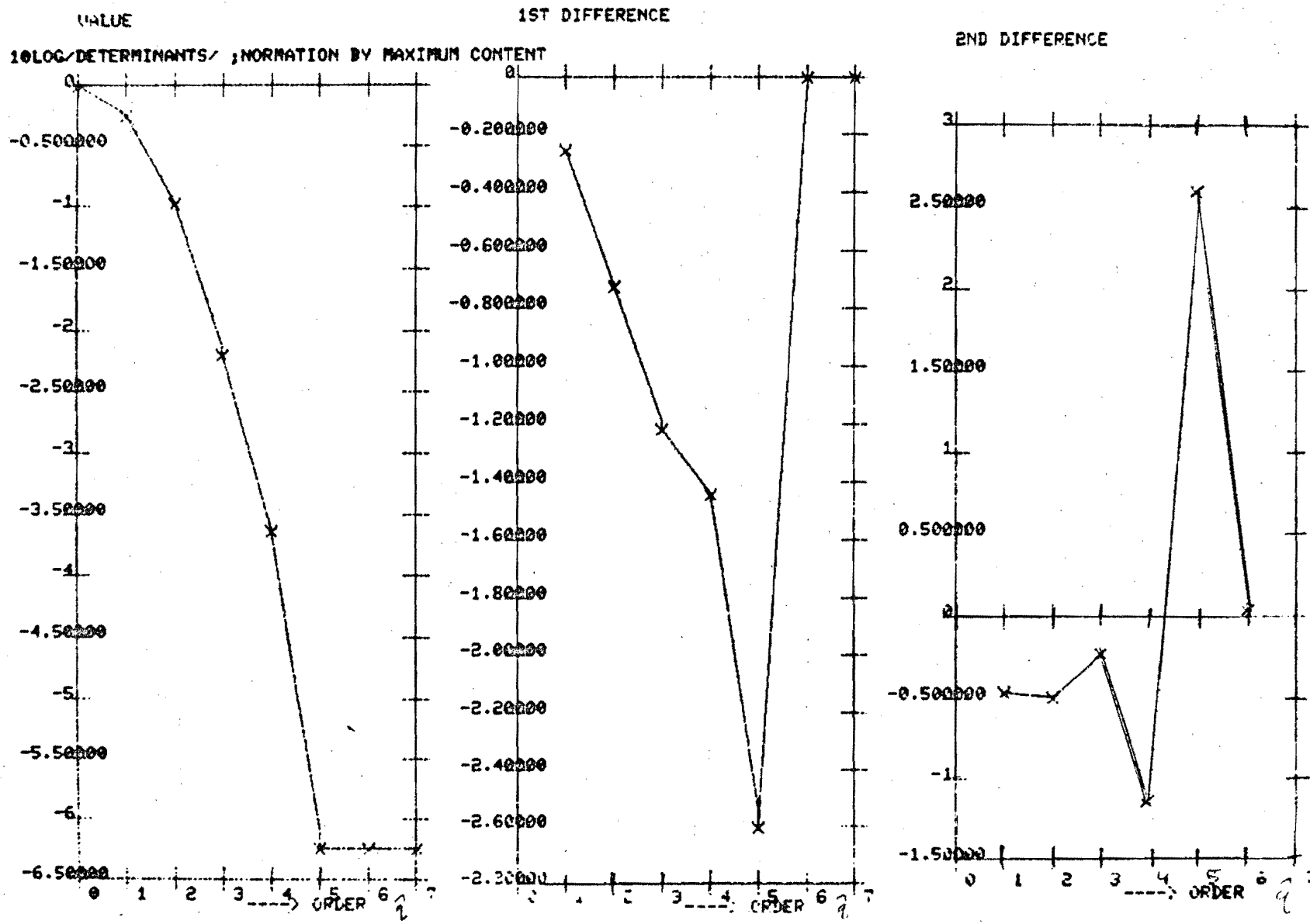


fig. 5.61; Determinanten over samples: 50-70 ; (Tilburg-data, filterfaktor = .2)

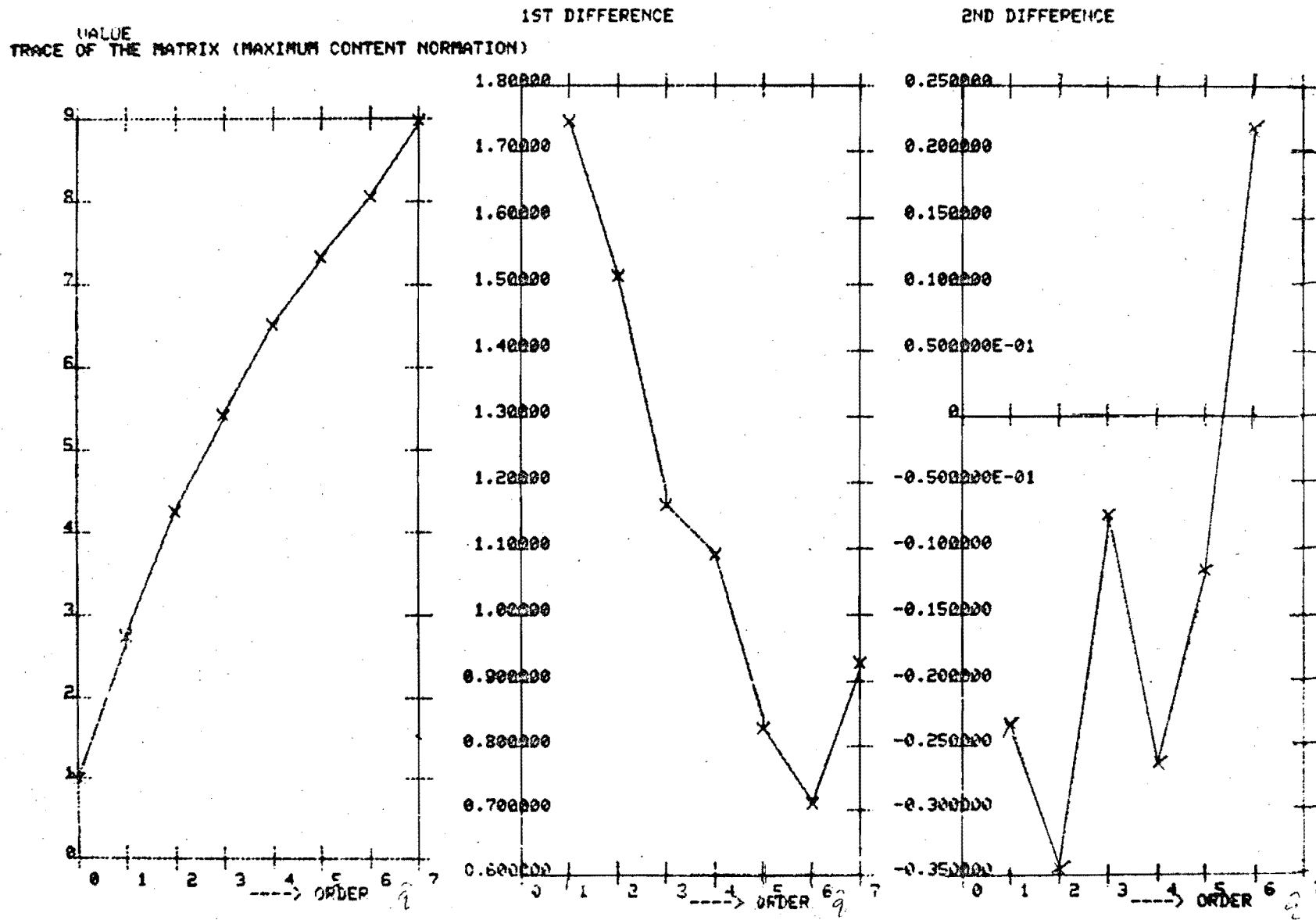


fig. 5.62: Spoor berekend voor samples: 50-70 (Tilburg-data; filterfaktor = .2)



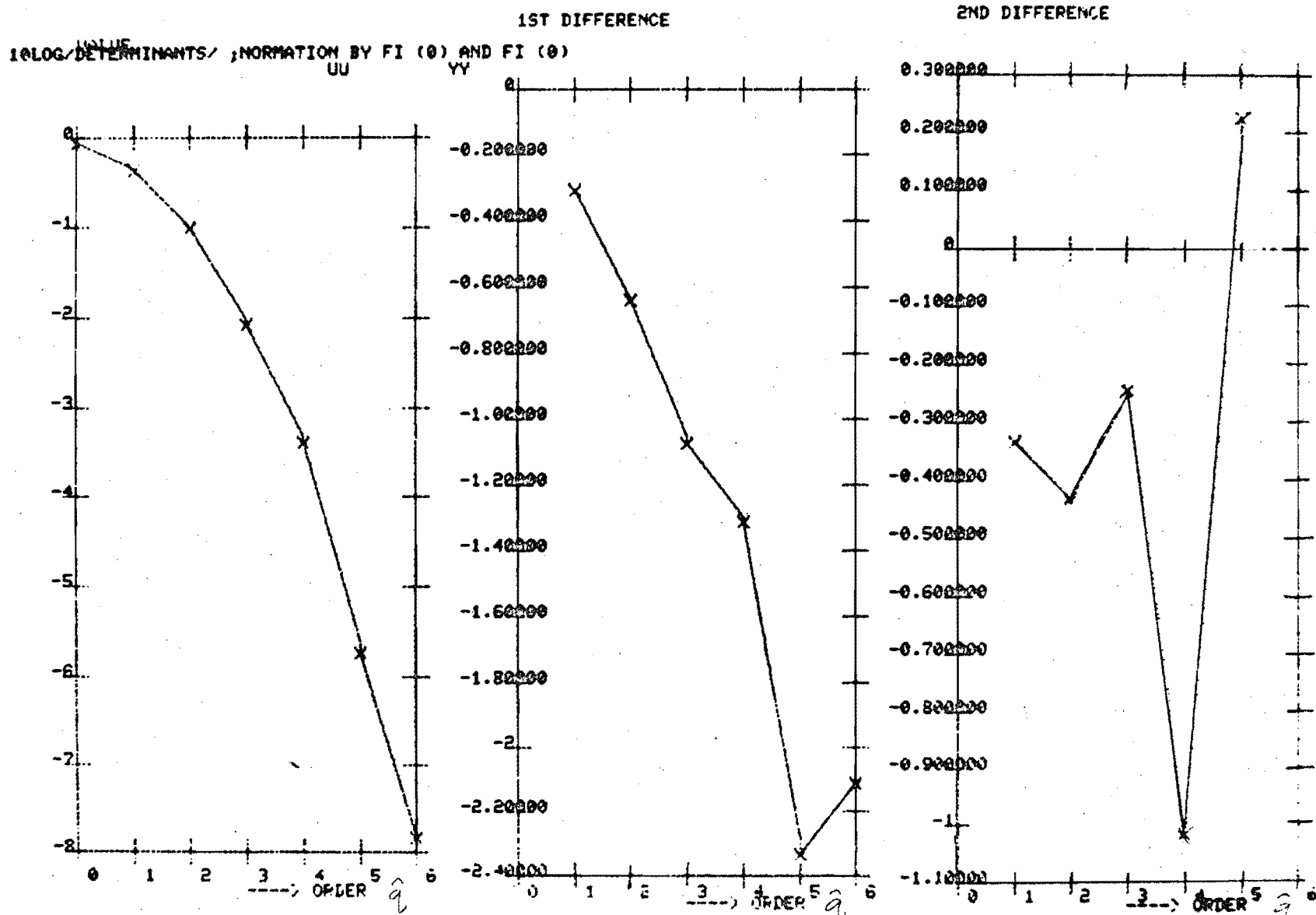
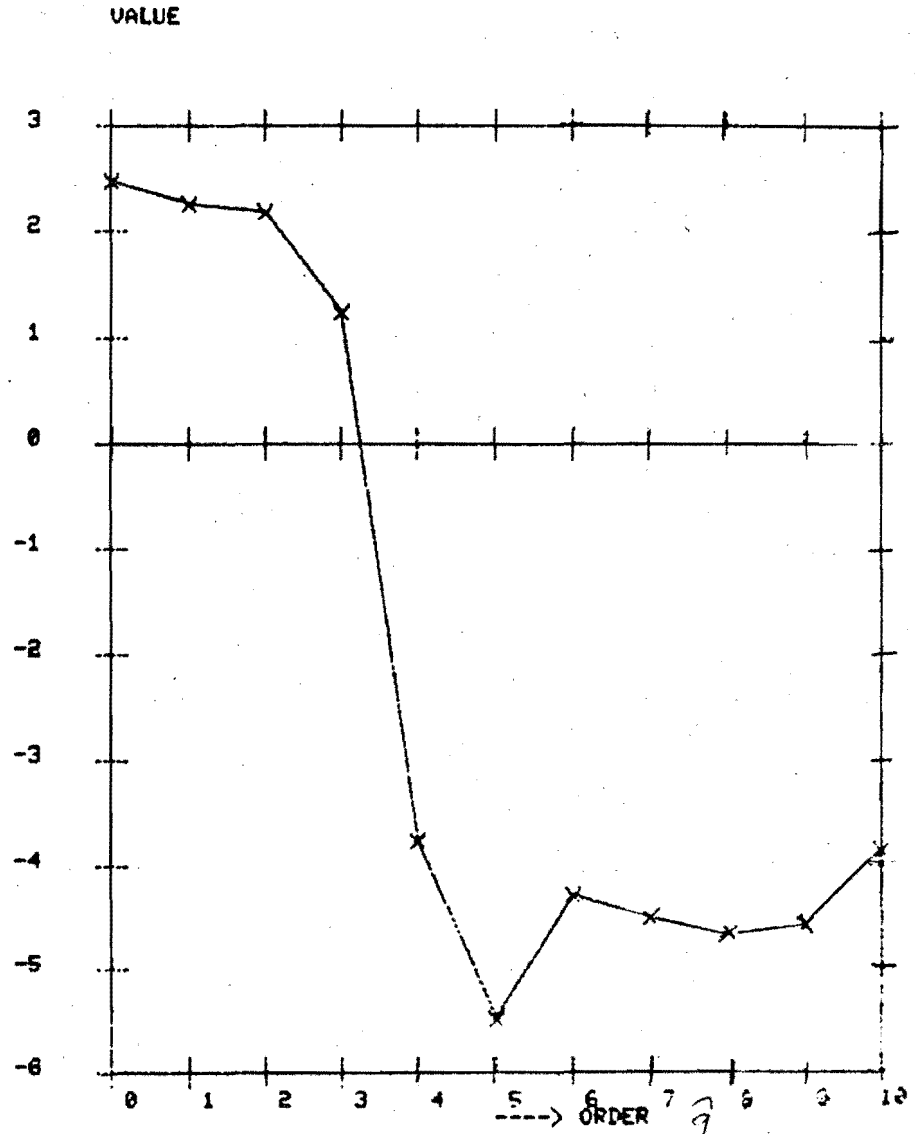


fig.5.63: determinanten over samples: 50-70 (Tilburg-data; filterfaktor = .2)

ERROR-FUNCTION : 10LOG(U1) (WOODSIDE)

ORDER	VALUE	1ST DIFFERENCE	2ND DIFFERENCE
0	2.47899		
1	2.26819	-0.210797	0.138474
2	2.19587	-0.723233E-01	-0.873643
3	1.24990	-0.945966	-4.05971
4	-3.75578	-5.00568	3.27598
5	-5.48549	-1.72970	2.93058
6	-4.28461	1.20087	-1.41088
7	-4.49462	-0.210036	0.400953E-01
8	-4.66453	-0.169911	0.266174
9	-4.56827	0.962634E-01	0.618355
10	-3.85365	0.714618	

fig.5.6: Ordeschatting over samples:10-30.  
(Tilburg-data, filterfaktor = .2)



ERROR-FUNCTION : 10LOG(U1) (WOODSIDE)

ORDER	VALUE	1ST DIFFERENCE	2ND DIFFERENCE
0	2.42319		
1	2.53055	0.107364	-0.374477
2	2.26344	-0.267113	0.666430E-01
3	2.06297	-0.200470	-6.21564
4	-4.35315	-6.41611	6.21216
5	-4.55710	-0.203953	0.430712
6	-4.33034	0.226759	0.115676E-01
7	-4.09201	0.238327	-0.342333
8	-4.19572	-0.103707	-0.351930E-01
9	-4.33462	-0.138900	0.219401
10	-4.25412	0.805011E-01	

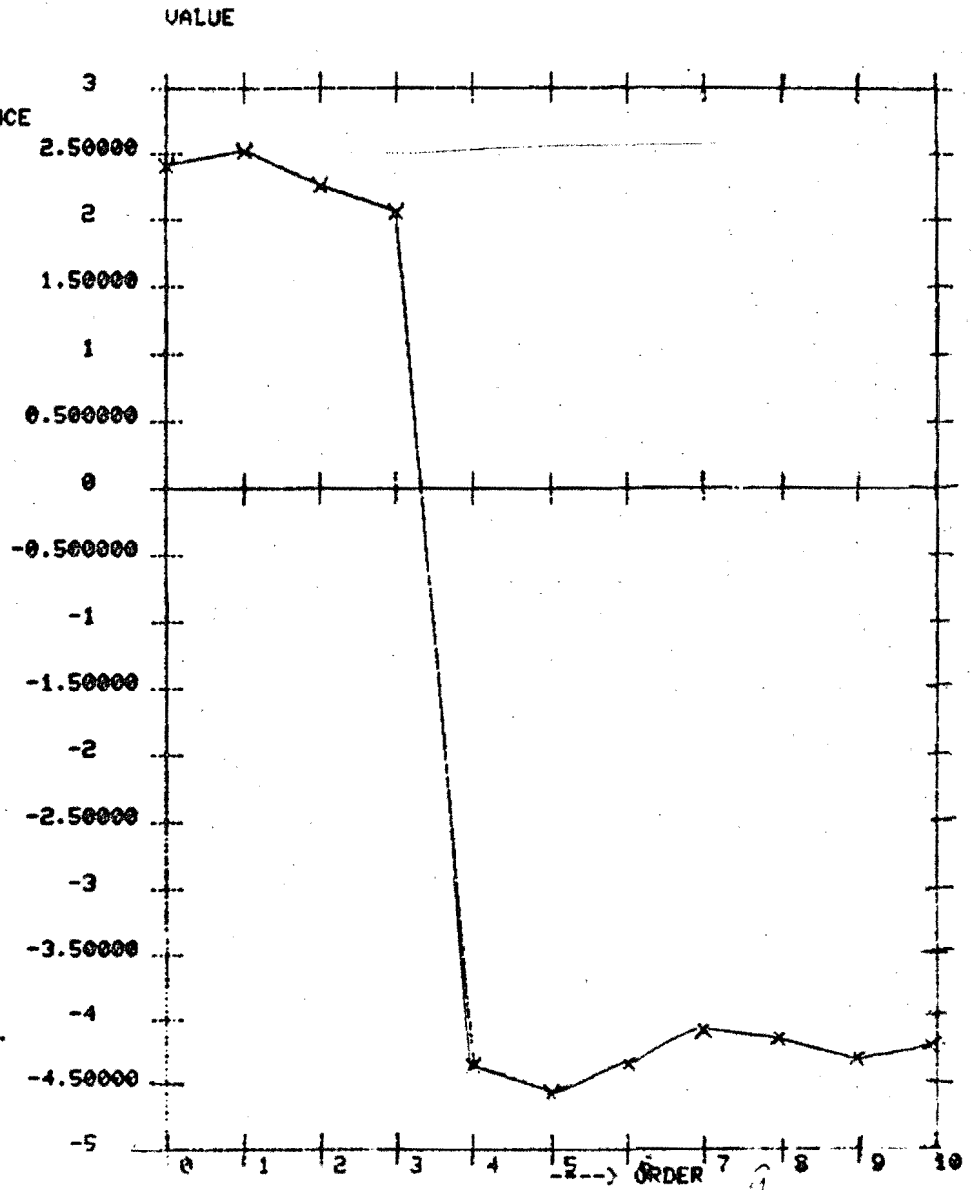


fig. 5.65: Ordeschatting over samples: 140-160.  
(Tilburg-data; filterfaktor = .2)

ERROR-FUNCTION : 10LOG(U1) (WOODSIDE)

ORDER	VALUE	1ST DIFFERENCE	2ND DIFFERENCE
0	2.53595		
1	2.54981	0.138597E-01	-0.467038
2	2.09663	-0.453178	-0.895257E-01
3	1.55393	-0.542704	-2.88918
4	-1.87796	-3.43189	0.588873
5	-4.72097	-2.84301	3.94304
6	-3.62095	1.10003	-1.75487
7	-4.27579	-0.654842	-0.117612E-02
8	-4.93181	-0.656018	0.794443
9	-4.79338	0.138425	-0.571658
10	-5.22662	-0.433233	

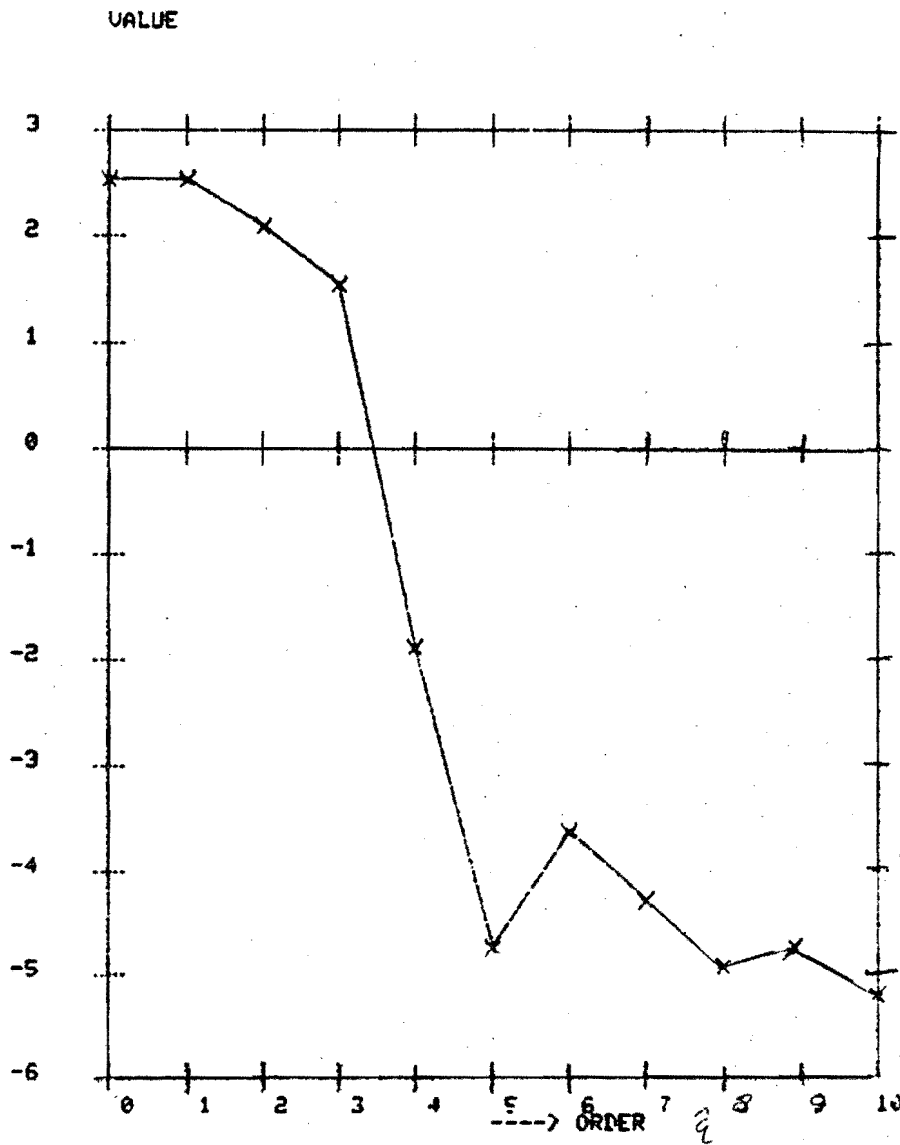


fig. 5.66: Ordeschatting over samples: 250-270.  
(Tilburg-data; filterfaktor = .2)

ERROR-FUNCTION : 10LOG(U1) (WOODSIDE)

ORDER	VALUE	1ST DIFFERENCE	2ND DIFFERENCE
0	2.74510		
1	2.66238	-0.827150E-01	-0.531712
2	2.04796	-0.614427	0.515785
3	1.94931	-0.986419E-01	-5.86063
4	-4.00996	-5.95927	3.27805
5	-6.69119	-2.68123	5.97102
6	-3.40140	3.28979	-4.89213
7	-5.00374	-1.60234	1.97709
8	-4.62898	0.374756	-0.142301
9	-4.39553	0.232455	-0.552841
10	-4.71691	-0.320386	

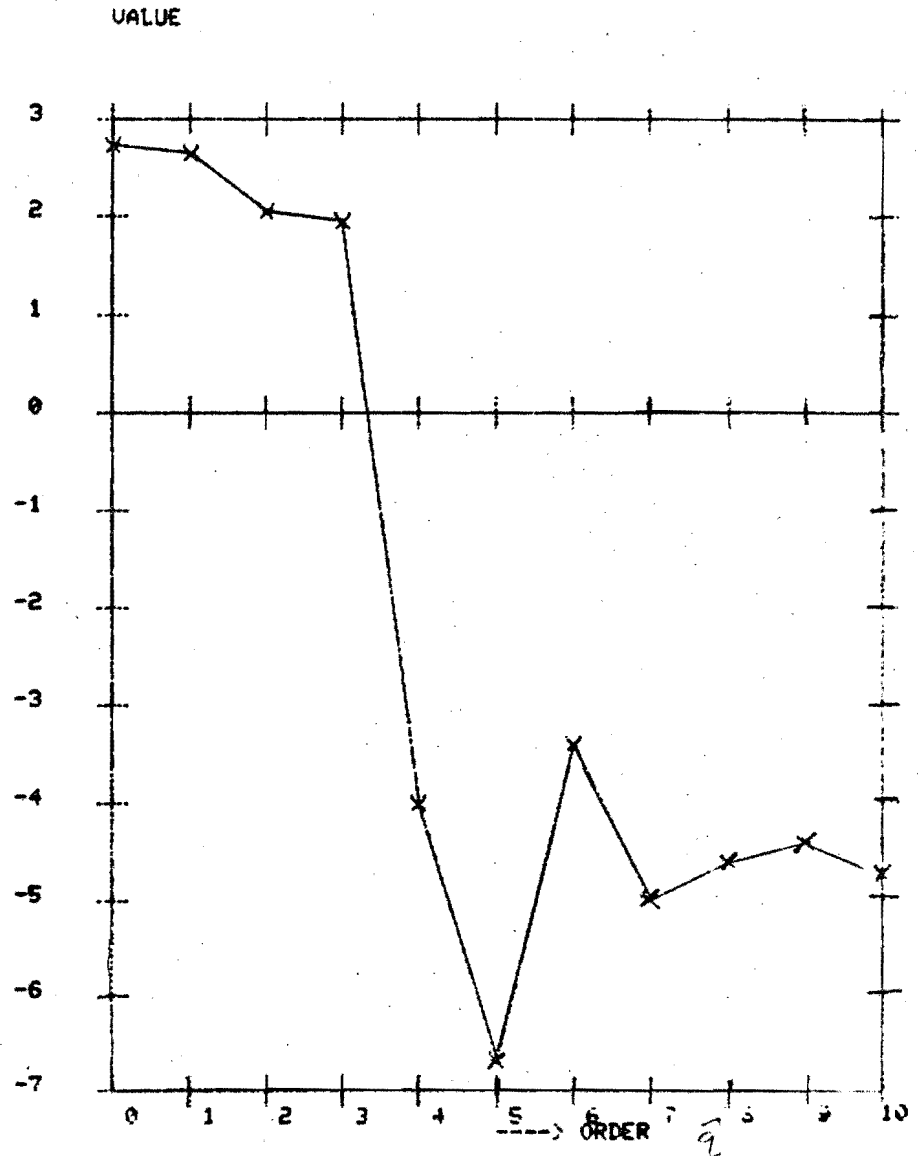


fig. 5.67: Ordeschatting over samples: 330-350.  
(Tilburg-data; filterfaktor = .2)