MASTER

Pseudorotatie voor de vergelijking qtt=-qxxxx-qyyyy : de vergelijking xfxxx=alfaf

Brands, Hans R.

Award date:
1978

Pseudorotatie voor de vergelijking

$$q_{tt} = -q_{xxxx} - q_{yyyy}.$$

De vergelijking $xf_{xxx} = -\alpha f$.

Verslag van het afstudeerwerk van Hans R. Brands in de vakgroep Theoretisch Natuurkunde onder leiding van Prof. dr. L.J.F. Broer en Drs. L.C.J.M. Mooren.

Eindhoven, december 1977.

I N H O U D

Notaties

De notatie van de elliptische funkties en integralen is identiek aan die van {ByF}

$am(u,k) = amu = \psi$	amplitudefunktie
$cn(u,k) = cnu$	cosinus amplitudefunktie
$dn(u,k) = dnu$	delta amplitudefunktie
$sn(u,k) = snu$	sinus amplitudefunktie
k	modulus van elliptische funkties en integralen
$k' = (1-k^2)^{\frac{1}{2}}$	complementaire modulus
$F(\psi,k) = u$	eerste elliptische integraal; inverse van amu
$K = K(k) = F(\frac{1}{2}\pi,k)$	volledige eerste elliptische integraal
$K' = K(k')$	geassocieerde volledige eerste elliptische integraal
$q = \exp(-\pi K'/K)$	Jacobi's nome

$K_1(z)$	gemodificeerde Hankelfunktie v.d. eerste orde	{AS 9.6.e.v.}
$J_1(z)$	Besselfunktie v.d. eerste orde	{AS 9.1.e.v.}
$erf(z)$	foutenintegraal	{AS 7.1.1.}
$erfc(z)$	complementaire foutenintegraal	{AS 7.1.2.}
M_o, M_e, M_1	Moorenfunkties	{zie tekst}
g_o, g_e, g_1	Laplacegetransformeerden van de Moorenfunkties	{zie tekst}
$Ei(z)$	exponential integraal	{GHI.312}
$I(z,\alpha)$	Abramowitz-Laporte integraal	{zie tekst}
$f_1(x)$	Abramowitz-Laporte funktie	{AS 27.5.}
$\mathcal{L}_z$	Laplaceoperator	{zie tekst}
$M(a,b,z)$	Kummerfunktie	{AS 13.1.2.}

1. P S E U D O R O T A T I E V O O R D E V E R G E L I J K I N G $q_{tt} = -q_{xxxx} - q_{yyyy}$

1.1. Inleiding

Bij het zoeken naar behoudswetten van bewegingsvergelijkingen van het type

$$q_{tt} = -Vq \tag{1}$$

waarin V een hermitische operator is, kunnen we gebruik maken van kommutatoren K van V.
Immers, als V met K kommuteert, gelden de volgende behoudswetten (zie {VaB}):

a) K hermitisch:

$$\tfrac{1}{2}(q_t, Kq_t) + (q, VKq) = \text{constant} \tag{2}$$

b) K antihermitisch:

$$(q_t, Kq\ ) = \text{constant} \tag{3}$$

In dit verslag wordt gekeken naar antihermitische kommutatoren van de operatoren

$$V_1 = -\partial_x^2 - \partial_y^2 \tag{4}$$

en

$$V_2 = \partial_x^4 + \partial_y^4 \tag{5}$$

Na fouriertransformatie worden "natuurlijke coördinaten" ingevoerd en worden de eigenwaardevergelijkingen voor de bijbehorende operatoren (de pseudorotatie- en pseudodilatatieoperator) opgelost.
Ten behoeve van de terugtransformatie wordt getracht de eigenfunkties van de $\hat{V}_{1op}$ uit te drukken in de eigenfunkties van de $\hat{V}_{2op}$ en omgekeerd.

1.2. De natuurlijke coördinaten $\hat{G}$ en $\hat{\theta}$

Zij in de vergelijking

$$q_{tt} = -Vq \tag{1}$$

$$V = V_1 = -\partial_x^2 - \partial_y^2 \tag{2}$$

of $$V = V_2 = \partial_x^4 + \partial_y^4. \tag{3}$$

Een antihermitische kommutator K van V is

$$K = xVy - yVx. \tag{4}$$

Fouriertransformatie van (1) en (2), resp. (1) en (3), resp. (4) levert:

$$\hat{V}_1 = \omega^2 = k^2 + l^2 \tag{5}$$

$$\hat{V}_2 = \omega^2 = k^4 + l^4 \tag{6}$$

$$\hat{K} = \partial_k(\hat{V}\partial_l) - \partial_l(\hat{V}\partial_k)$$

$$= \hat{V}_k\partial_l - \hat{V}_l\partial_k. \tag{7}$$

Deze operator $\hat{K}$ noemen we $\hat{V}_{op}$, de bij $\hat{V}$ horende kommuterende antihermitische operator.

We zoeken straks een n in

$$\hat{G} := \hat{V}^n \tag{8}$$

zodanig dat $\hat{G}_{op}$ éénwaardige periodieke eigenfunkties heeft van de vorm

$$\hat{u} = \exp i\lambda\hat{\theta} \tag{9}$$

met: $$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\tfrac{1}{k}) \tag{10}$$

We laten voor 't gemak de dakjes weg.

De eigenwaardevergelijking voor G_{op} wordt:

$$G_{op}u = G_k u_l - G_l u_k = i\lambda u$$

met(9):

$$G_k\theta_l - \theta_k G_l = 1 \qquad (11)$$

Deze regel wordt door Broer en Mooren de "oppervlakteregel" genoemd (zie hieronder).

Voor G_{op} geldt:

$$G_{op} = G_k\partial_l - G_l\partial_k = G_k\theta_l\partial_\theta + G_kG_l\partial_G - G_lG_k\partial_G - G_l\theta_k\partial_\theta$$

$$= \partial_\theta \qquad (12)$$

G_{op} is dus te beschouwen als een rotatieoperator. Hij wordt de "pseudorotatieoperator" genoemd.
Analoog geldt voor θ_{op}:

$$\theta_{op} = -\partial_G, \qquad (13)$$

zodat θ_{op} te beschouwen is als een dilatatieoperator, de "pseudodilatatieoperator"

G en θ worden de natuurlijke coördinaten van het probleem genoemd.

Het verband tussen V_{op} en G_{op} wordt gegeven door:

$$G_{op} = G_k\partial_l - G_l\partial_k =$$

$$= (V^n)_k\partial_l - (V^n)_l\partial_k =$$

$$= nV^{n-1}(V_k\partial_l - V_l\partial_k)$$

$$= nG^{\frac{n-1}{n}} V_{op}$$

$$V_{op} = n^{-1}G^{-\frac{n-1}{n}}\partial_\theta . \qquad (14)$$

(11) wordt de oppervlakteregel genoemd omdat er een meetkundige interpretatie voor is:
De raakvector $\underline{a}$ in het punt (k,l,0) (we schrijven even in drie dimensies) aan de kromme G = constant (∂_θ =0) is:

$$\underline{a} = (-G_l, G_k, 0).$$

De richtingsvector $\underline{b}$ in het punt (k,l,0) van de rechte θ= constant (∂_G =0) is:

$$\underline{b} = (-\theta_l, \theta_k, 0)$$

Het oppervlak door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ opgespannen heeft de vector

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = (0, 0, G_k\theta_l - \theta_k G_l)$$

volgens (11) is dus

$$\underline{c} = (0,0,1).$$

G_{op} verdeelt het oppervlak tussen twee krommen G = constant dus in gelijke stukken; θ_{op} verdeelt het oppervlak tussen twee rechten θ = constant in gelijke stukken.

1.3. De natuurlijke coördinaten in het geval $\hat{V} = k^2 + l^2$

We bepalen n in $G = V^n$ (1.1.8.), door G en θ in te vullen in de oppervlakteregel 1.2.11.

Dan vinden we

$$n(k^2 + l^2)^{n-1}\left(2\frac{l^2}{k^2}\,\theta' + 2\,\theta'\right) = 1 \tag{1}$$

Daar ook $\theta' = \theta'(\frac{l}{k})$, moet n=1 zijn; dus:

$$G = V = k^2 + l^2 \tag{2}$$

en $$\theta' = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{l^2}{k^2}\right)^{-1}$$

zodat $$\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{l}{k}} (1+z^2)^{-1}\, dz = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{l}{k} \tag{3}$$

Schrijven we $R^2 = l^2 + k^2$ en $\phi = \mathrm{Arctan}\,\frac{l}{k}$, dan is

$$G_{op} = \partial_{\frac{1}{2}\phi} \tag{4}$$

en

$$\theta_{op} = -\partial_{R^2} \tag{5}$$

De eigenfunkties van G_{op} worden dus

$$u = \exp(i\lambda\theta) = \exp(i\lambda\tfrac{1}{2}\phi)$$

met λ zó, dat

$$u(\phi = \phi' + 2\pi) = u(\phi = \phi')$$

dus $\lambda = 2n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

De verzameling

$$u = \exp(im\phi),\ m \in \{0,\mathbf{N}\} \tag{6}$$

vormt een orthonormale basis B_1 van de funktieruimte.

Een andere orthonormale basis B_2 van de funktieruimte vormt de verzameling

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos m\phi \\ u = \sin m\phi \end{array}\right\} m \in \{0,\mathbf{N}\} \tag{7}$$

1.4. De natuurlijke coördinaten in het geval $V = k^4 + l^4$

We bepalen n in $G = V^n$ weer door invullen in de oppervlakteregel 1.2.11.
Dat geeft:

$$nV^{n-1}\theta'(4k^2 + 4\,\frac{l^4}{k^2}) = 1$$

$$nk^{(n-1)}(1 + \frac{l^4}{k^4})^{n-1}\, 4k^2(1 + \frac{l^4}{k^4})\theta' = 1 \qquad (1)$$

waaruit volgt:

$$n = \tfrac{1}{2} \;;\quad G = V^{\frac{1}{2}} = (k^4 + l^4)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

$$2(1 + \frac{l^4}{k^4})^{\frac{1}{2}}\,\theta' = 1$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{l}{k}} (1+z^4)^{-\frac{1}{2}}dz \qquad \{\text{ObMa: Tabelle B; ByF: 263.50}\}$$

$$= \tfrac{1}{4}F(\arccos\{(1-\frac{l^2}{k^2})(1 + \frac{l^2}{k^2})^{-1}\},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$= \tfrac{1}{4}F(\arccos\{(1-\mathrm{tg}^2\phi)(1 + \mathrm{tg}^2\phi)^{-1}\},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$= \tfrac{1}{4}F(2\phi,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \qquad (3)$$

waarin $F(\psi,k)$ de eerste elliptische integraal is.
Ook hier is

$$G_{op} = \partial_\theta = \partial_{\frac{1}{4}F(2\phi,\frac{1}{2}\sqrt{2})} \qquad (4)$$

en

$$\theta_{op} = -\partial_G = -\partial_{(l^4+k^4)^{\frac{1}{2}}} \qquad (5)$$

De eigenfunkties van G_{op} worden hier dus

$$u = \exp i\lambda\theta = \exp i\tfrac{1}{4}\lambda F(2\phi,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}).$$

Opdat $\quad u(\phi = \phi' + 2\pi) = u(\phi = \phi')$

is $\quad \lambda = n\,\frac{\pi}{K}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Een orthonormale basis B_3 voor de funktieruimte is hier

$$u = \exp i\frac{n\pi}{4K}\,F(2\phi,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}), \qquad n \in \{0,\mathbf{N}\} \qquad (6)$$

of B_4:

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos(\frac{m\pi}{4K}\ F(2\phi,\tfrac{1}{2}\sqrt{2})) \\ \\ u = \sin(\frac{m\pi}{4K}\ F(2\phi,\tfrac{1}{2}\sqrt{2})) \end{array}\right\} m \in \{0,\mathbf{N}\} \qquad (7).$$

1.5. Beschrijving van cos(jϕ)en sin(jϕ) in termen van cos(jθ) en sin(jθ).

Volgens ByF 908.02 is

$$cn(u) = \frac{2\pi}{kK}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1+q^{2m+1}} \cos\{(2m+1)\frac{\pi u}{2K}\} \qquad (1)$$

waarin cn de cosinus amplitudefunktie en $q = \exp(-\pi\frac{K'}{K})$ (Jacobi's nome) is.
Gebruik:

$$u = F(2\phi,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \qquad (2)$$

dan is $\qquad 2\phi = \text{amu}, \qquad k = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad q = \exp(-\pi),$

$$cn(u) = \cos 2\phi \quad \text{en} \quad sn(u) = \sin 2\phi \qquad (3)$$

noteer $\qquad a_m = \frac{2\pi}{kK}\frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1+q^{2m+1}} \quad$ en $\theta = \frac{\pi u}{4K} \qquad (4)$

dan wordt (1):

$$\cos 2\phi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\{(4m+2)\theta\} \qquad (5)$$

Evenzo is m.b.v. ByF 908.01:

$$sn(u) = \frac{2\pi}{kK}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \sin\{(2m+1)\frac{\pi u}{2K}\}: \qquad (6)$$

$$\sin 2\phi = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin\{(4m+2)\theta\} \qquad (7)$$

waarin $\qquad b_m = \frac{2\pi}{kK}\frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \qquad (8)$

Met machten en produkten van cos2ϕ en sin2ϕ is elke funktie sin(2mϕ) en cos(2mϕ), $m \in \mathbf{N}$, op éénduidige wijze vast te leggen. Uitwerken van machten en produkten van de reeksen in (5) en (7) geeft nieuwe reeksen in cos(2nθ) en sin((4n+2)θ), $n \in \mathbf{N}$.

N.B. Gebruik van de reeksen:

$$\sin\phi = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{m\sin(2m\phi)}{m^2 - \frac{1}{4}}$$

en

$$\cos\phi = \frac{2}{\pi} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\frac{1}{2}\cos 2m\phi}{m^2 - \frac{1}{4}}\right)$$ {WW.Chapter $\overline{\underline{\text{1X}}}$ example 9.}

of van de formules

$$\sin\phi = \pm(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\phi = \pm(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}$$

en de reeksontwikkeling

$$(1 + q)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} q^n$$ { AS 3.6.9 }

leidt niet tot beschrijving van $\cos(j\phi)$ in termen van $\cos(k\theta)$ en $\sin(l\theta)$ omdat voor de reeksen uit {WW}het convergentiegebied niet van 0 tot 2π loopt en omdat in de formules het teken niet ondubbelzinnig vastgelegd kan worden voor datzelfde gebied.

1.6. De fourierreeks van $v = \cos m\theta = \cos \frac{m\pi}{4K} F(2\phi, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

De sinustermen van de fourierreeks van bovenstaande v zijn nul op grond van symmetrie.Het is alleen voor $m = 4j$ ($j \in \mathbf{N}$) gelukt de cosinustermen c_n van de reeks van v te bepalen.

$$c_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4n\phi)\cos(\frac{j\pi}{K} F(2\phi,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}))d\phi \qquad (1)$$

$$c_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\phi)\cos(\frac{j\pi}{K} F(2\phi,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}))d\phi \qquad (2)$$

met $2\phi = \mathrm{am}u$; $u = F(2\phi,\frac{1}{2}\sqrt{2})$; $\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \to F\Big|_0^{2K} \to \frac{\pi u}{K}\Big|_0^{2\pi}$ (3)

en
$$\frac{d^3}{du^3}(\mathrm{am}u) = -k^2\, \mathrm{dn}u\, \cos(4\phi) \qquad \text{(zie appendix 3.2)} \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{k^2}\frac{d^3}{du^3}(\mathrm{am}u)\ \cos(j\frac{\pi u}{K})\,(\mathrm{dn}u)^{-1}d\phi$$

$$= \frac{4K}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \frac{-1}{k^2}\cdot\frac{d^3}{du^3}(\mathrm{am}u)\ \cos(j\frac{\pi u}{K})\ d(\frac{\pi u}{K}) \qquad (5)$$

De reeksontwikkeling voor $\frac{d^3}{du^3}\mathrm{am}u$ is (zie appendix 3.2)

$$\frac{d^3}{du^3}\mathrm{am}u = -2\,\frac{\pi^3}{K^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 q^n}{(1+q^{2n})}\cos(n\,\frac{\pi u}{K}).$$

Ingevuld in (5):

$$c_1 = \frac{8\pi}{k^2K^2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2q^n}{(1+q^{2n})}\cos(n\,\frac{\pi u}{K})\cos(j\,\frac{\pi u}{K})\ d(\frac{\pi u}{K})$$

$$= 8\,\frac{\pi^2}{k^2K^2}\ \frac{j^2q^j}{(1+q^{2j})}.$$

$$c_2 = \frac{4K}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\cos(8\phi)\ \cos(j\frac{\pi u}{K})\ \mathrm{dn}u\ d(\frac{\pi u}{K})$$

$\cos(8\phi)$ kan uitgedrukt worden in $\frac{d^3}{du^3}\mathrm{am}u$ en $\frac{d^5}{du^5}$ amu en dat weer in een sommatie over $\cos(n\,\frac{\pi u}{K})$ (zie appendix)
zodat:

$$c_2 = \frac{4K}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{\pi^5}{3k^4K^5}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2q^n n^4}{(1+q^{2n})}\cos(n\,\frac{\pi u}{K})\Big) +$$

$$+\ \frac{(2k^2-4)\pi^3}{3k^4K^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2q^n n^2}{1+q^{2n}}\cos(n\,\frac{\pi u}{K})\Big)\Big\}\cos(j\,\frac{\pi u}{K})\,d(\frac{\pi u}{K})$$

$$= \Big(\frac{8\pi^4j^4}{3k^4K^4} + \frac{16k^2\pi^2-32\pi^2}{3k^4K^2}\Big)\ \frac{q^j}{1+q^{2j}}\ .$$

Op analoge wijze zijn ook alle andere cosinustermen van v voor m=4j te vinden.

2 DE VERGELIJKING $xf'''(x) = -\alpha f(x)$

2.1. Inleiding

Doordat aanvankelijk verondersteld werd dat de vergelijking

$$xf'''(x) = -\alpha f(x) \qquad (1)$$

in relatie stond met de problemen uit het voorgaande hoofdstuk, was een deel van het afstudeerwerk aan de oplossing van deze vergelijking gewijd. De veronderstelling bleek onjuist, reden waarom dit deel van het werk gestopt werd. De resultaten die op dat moment verkregen waren worden toch opgenomen in dit verslag omdat er een aantal Laplace- en Besseltransformaties gevonden werden, die, voor zover bekend, niet in desbetreffende handboeken zijn opgenomen. (zie b.v. {ObBa; Ob}).
In dit hoofdstuk wordt (1) opgelost door machtreekssubstitutie (2.2) en door Laplacetransformatie (2.3). Door de randvoorwaarden te bekijken kunnen de oplossingen uit beide methoden aan elkaar gelijk gesteld worden, zodat een aantal Laplacetransformaties wordt gevonden.
Inverse Laplacetransformatie (2.5) geeft een bekende funktie als oplossing van (1), waaruit Laplace- en Besseltransformaties volgen.
In de appendix (3.3) wordt onder meer een overzicht van de resultaten in tabelvorm gegeven. Fysische problemen waarin (1) ter sprake komt worden beschreven in {Za},{La} en {To}.

2.2 Oplossen door machtreekssubstitutie

Proberen we de oplossing van (1) te vinden door substitutie van de machtreeks

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2)$$

dan vinden we voor alle $n > 0$:

$$a_{n+2} = \frac{-\alpha a_n}{(n+2)(n+1)(n)} , \qquad (3)$$

zodat we twee onafhankelijke oplossingen van (1) verkrijgen: een oneven machtreeks M_o (de oneven Moorenfunktie),die bepaald wordt door a_1 en een even machtreeks M_e (de even Moorenfunktie), die bepaald wordt door a_2. Nemen we voor $a_1 = 1$ en $a_2 = -\alpha$ dan resulteert:

$$M_o = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m \, x^{2m+1}}{(2m+3)(2m+2)(2m+1)(2m+1)(2m)\ldots\ldots 1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m \, 2^m \, m! \, x^{2m+1}}{(2m+3)! \, (2m+1)!} \qquad (4)$$

$$M_e = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m \, x^{2m}}{(2m+2)(2m+1)(2m)(2m)(2m-1)\ldots\ldots 2}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m \, x^{2m}}{(2m+2)! \, 2^m \, m!} \quad . \qquad (5)$$

Een derde onafhankelijke oplossing die we de logaritmische Moorenfunktie M_l noemen vinden we door substitutie van de machtreeks:

$$f(x) = M_e \log x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (6)$$

waarbij we dan vinden: $b_0 = 2$ en (als we b_1 en b_2 gelijk aan nul nemen):

$$b_{n+2} = - \frac{\alpha b_n + \{(n+2)n + (n+1)n + (n+2)(n+1)\} \, a_{n+2}}{(n+2)(n+1)(n)} \qquad n \geq 2 \quad n \text{ even} \qquad (7)$$

Door volledige induktie is dan te bewijzen dat

$$b_{n+2} = - a_{n+2} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{n+2}\right) \qquad n \geq 2 \quad n \text{ even} \qquad (8)$$

dus:

$$M_l = 2 - \frac{x^2}{4.3.2.} \log x + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-\alpha)^m \, x^{2m} \left(\log x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots\ldots - \frac{1}{2m}\right)}{(2m+2)! \; 2^m \; m!} \qquad (9).$$

Met behulp van de reeksontwikkelingen (4), (5) en (9) zijn bijgaande tabellen berekend. (zie 2.6.)

Opgemerkt mag worden dat voor $x = 0$ geldt:

$M_o(0) = 0$ $\qquad$ $M_e(0) = 0$ $\qquad$ $M_1(0) = 2$

$\frac{dM_o}{dx}(0) = 1$ $\qquad$ $\frac{dM_e}{dx}(0) = 0$ $\qquad$ $\frac{dM_1}{dx}(0) = 0$

(10)

2.3. Oplossen door Laplacetransformatie

Transformeren van

$$tf'''(t) = -\alpha f(t) \tag{1}$$

geeft (zie ook de formules in de appendix):

$$-\frac{d}{dp}(p^3 g(p)) + 2pf(0) + f'(0) = -\alpha g(p) \tag{2}$$

waarin g(p) de éénzijdige Laplacegetransformeerde van f(t) is.
Door f(0) en f'(0) te kiezen, vinden we drie verschillende oplossingen, die we g_o, g_e, en g_1 noemen, vooruitlopend op par. 2.4.
Neem f(0) = f'(0) = 0 dan gaat (2) over in

$$\frac{d}{dp}(p^3 g_e) = \alpha g_e \tag{3}$$

Uitgewerkt:

$$\int \left(\frac{\alpha}{p^3} - \frac{3}{p}\right) dp = \int \frac{1}{g_e}\, dg$$

$$g_e = \frac{1}{p^3}\exp\left(\frac{-\alpha}{2p^2}\right) \tag{4}$$

We proberen g_o en g_1 te vinden door te veronderstellen:

$$g = g_e g_2 \tag{5}$$

Voor f(0) en f'(0) wordt kortheidshalve A resp. B gesubstitueerd.
(5) invullen in (2) levert:

$$-\frac{d}{dp}(p^3 g_e g_2) + 2pA + B = -\alpha g_e g_2$$

$$-g_2 \frac{d}{dp}(p^3 g_e) - p^3 g_e \frac{d}{dp}(g_2) + 2pA + B = -\alpha g_e g_2$$

wat wegens (3) vereenvoudigt tot:

$$2pA + B = p^3 g_e \cdot \frac{d}{dp} g_2.$$

(4) invullen levert:

$$g_2 = \int (2pA + B) \exp \frac{\alpha}{2p^2} dp \qquad (6)$$

A =0 resp. B = 0 levert g_o en g_1:

$$g_e^{-1} g_o = \int \exp(-\frac{\alpha}{2p^2}) dp \qquad \{u := p^{-1}\}$$

$$= \int \exp(\frac{\alpha}{2}u^2)\; u^{-2} du = \qquad \{k^2 := -\frac{\alpha}{2}u^2\}$$

$$= -i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \int \exp(-k^2)\; k^{-2} dk \qquad \{GHI:313,5a\}$$

$$= i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\{\exp(-k^2).k^{-1} + 2\int \exp(-k^2) dk\} \qquad \{GHI:313,1;AS.:7.1.1.\}$$

$$= p \exp(-\frac{\alpha}{2p^2}) + i\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}p^{-1}).$$

zodat:

$$g_o = \frac{1}{p^2} + \frac{i}{p^3}\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \exp(\frac{-\alpha}{2p^2}) \operatorname{erf}(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}p^{-1}) \qquad (7)$$

of met {AS:7.1.21.}:

$$g_o = \frac{1}{p^2} - \frac{\alpha}{p^4} M(1,\tfrac{3}{2},-\frac{\alpha}{2p^2}) \;, \qquad (8)$$

waarin M(a,b,z) de Kummerfunktie is.

$$g_e^{-1} g_1 = \int 2p \exp(-\frac{\alpha}{2p^2}) dp = \qquad \{w := p^{-2}\}$$

$$= \int -w^2 \exp(\frac{\alpha}{2}w) dw = \qquad \{GHI:312,2a\}$$

$$= \frac{1}{w}\exp(\frac{\alpha}{2}w) - \frac{\alpha}{2}\int \frac{1}{w} \exp(\frac{\alpha}{2}w) dw \qquad \{GHI:312,2a;\ AS.:\ 5.1.2.\}$$

$$= \frac{1}{w} \exp(-\frac{\alpha}{2}w) - \frac{\alpha}{2} \mathrm{Ei}(-\frac{\alpha}{2}w)$$

$$= p^2 \exp(\frac{\alpha}{2}p^{-2}) - \frac{\alpha}{2} \mathrm{Ei}(\frac{\alpha}{2}p^{-2}).$$

zodat:

$$g_1 = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2p^3} \exp(\frac{-\alpha}{2p^2}) \mathrm{Ei}\ (-\frac{\alpha}{2p^2}) \qquad (9)$$

waarin Ei(z) de exponential integraal is.

2.4 Gelijkstellen

De integralen in 2.3. zijn bepaald op constanten na. Er is niet uitvoerig studie gemaakt van de convergentie van de integralen. Door f(0),f'(0) en M(0), M'(0) te beschouwen kunnen we concluderen dat de eenzijdige Laplace-getransformeerden van M_o, M_e, M_1 respektievelijk $c_o g_o$, $c_e g_e$ en $c_1 g_1$ zijn, waarin de c's nog te bepalen zijn.

2.5. Inverse Laplacetransformatie

Wordt getracht 2.3.1 voor complexe x op te lossen door te beginnen met inverse Laplacetransformatie dan vindt men via vergelijking 2.3.3. en haar oplossing 2.3.4. één oplossing:

$$I(z,\alpha) = \int_0^\infty \exp(-uz).u^{-3}\exp(-\frac{-\alpha}{2u^2})du. \qquad (1)$$

Deze integraal voor α=2 noemt Abramowitz $f_1(x)$. Voor $f_1(x)$ geeft hij een machtreeksontwikkeling {AS 27.5}.

Substitutie $u = (\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{2}}t$ levert: $I(z,\alpha) = \frac{\alpha}{2}f_1(z\sqrt{\frac{2}{\alpha}})$ (2)

Door andere substituties vinden we andere integraaluitdrukkingen.

$$I(z,\alpha) = \int_0^\infty t^{-3}\exp(-\frac{\alpha}{2t^2} - zt)dt = \qquad \{\text{partieel integreren}\}$$

$$= \frac{z}{\alpha}\int_0^\infty \exp(-\frac{\alpha}{2t^2} - zt)dt$$

$$= \frac{z}{\alpha}\mathcal{L}_z\{\exp -\frac{\alpha}{2t^2}\} \qquad (3)$$

$$\{u := t^{-1}\}$$

$$= \frac{z}{\alpha}\int_0^\infty u^{-2}\exp(-\frac{\alpha}{2}u^2 - \frac{z}{u})du \qquad \{\text{ObBa 1.1.14,1.5.27}\}$$

$$= \frac{z}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2\alpha}}{u} \exp(-\frac{z^2}{4u^2}) K_1(u\sqrt{2\alpha})\, du \qquad (4)$$

$\{t:=u^2\}$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-\frac{\alpha}{2}t - \frac{z}{\sqrt{t}})\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \mathcal{L}_{\frac{\alpha}{2}}\{\exp(-\frac{z}{\sqrt{t}})\} \qquad (5)$$

$\{\text{ObBa } 1.1.16, 1.5.41\}$

$$= (\frac{\pi}{2\alpha})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty x \exp(\frac{x^4}{2\alpha}) \operatorname{Erfc}(\frac{x^2}{\sqrt{2\alpha}})\, x.2\sqrt{z}\, \mathcal{J}_1(x.2\sqrt{z})\, dx \qquad (6)$$

(3) en (5) zijn Laplacetransformaties: (3) met z en (5) met $\frac{\alpha}{2}$ als transformatie variabele; (4) en (6) zijn Besseltransformaties: (4) een K-transformatie met $\sqrt{2\alpha}$ als variabele en (6) een Hankeltransformatie met $2\sqrt{z}$ als variabele.

2.6. Tabel van de Moorenfunkties voor enkele reële waarden van x.

x	M_o	M_e	M_1
0	0	0	+ 2,000
0,1	+ 0,09983	− 0,009996	+ 2,023
0,2	+ 0,1987	− 0,03993	+ 2,064
0,3	+ 0,2955	− 0,08966	+ 2,108
0,4	+ 0,3894	− 0,1589	+ 2,145
0,5	+ 0,4793	− 0,2474	+ 2,169
0,6	+ 0,5642	− 0,3546	+ 2,175
0,8	+ 0,7156	− 0,6230	+ 2,121
1	+ 0,8361	− 0,9587	+ 1,956
2	+ 0,7539	− 3,356	− 1,011
3	− 0,8534	− 5,871	− 7,691
4	− 4,032	− 6,689	− 16,55
5	− 8,136	− 3,994	− 24,24
6	− 11,85	+ 3,451	− 26,27
8	− 10,75	+ 31,51	+ 3,981
10	+ 12,58	+ 59,50	+ 89,86
12	+ 58,53	+ 47,76	+ 193,5
14	+102,6	− 43,41	+ 214,5
16	+ 95,93	−217,8	+ 26,98
18	− 14,78	−408,3	− 437,5
20	−250,3	−470,1	−1089

3. APPENDIX

3.1. De fourierreeks van $\cos^n\alpha$

Zonder fourieranalyse is op eenvoudige wijze een even eenvoudig algoritme te maken om $\cos^n\alpha$ uit te drukken in een sommatie over $\cos(m\alpha)$:

$$\cos^n\alpha = 2^{1-n} \sum_{m=0}^{n} a_{m,n} \cos(m\alpha)$$

$$a_{0,1} = 0 \qquad a_{1,1} = 1 \qquad a_{-1,m} = 0$$

$$a_{m,n} = a_{m+1,n-1} + a_{m-1,n-1} \qquad\qquad (m = 0,2,3,4,\ldots.)$$

$$a_{1,n} = a_{2,n-1} + 2a_{0,n-1}$$

Bewijs:

$$\cos^1 \alpha = \cos(1\alpha)$$

$$\cos^{n+1}\alpha = \cos^n\alpha \cos\alpha = 2^{1-n} \sum_{m=0}^{n} a_{m,n} \cos(m\alpha)\cos\alpha$$

$$= 2^{-n} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} \cos(j\alpha)$$

met $a_{j,n+1} = a_{j-1,n} + a_{j+1,n} \qquad (j\geq 2)$

$$a_{1,n+1} = a_{2,n} + 2a_{0,n}$$

$$a_{0,n+1} = a_{1,n}$$

Q.E.D.

zo is:

$$\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(\cos(2\alpha) + 1)$$

$$\cos^3\alpha = \tfrac{1}{4}(\cos(3\alpha) + 3\cos\alpha)$$

$$\cos^4\alpha = \tfrac{1}{8}(\cos(4\alpha) + 4\cos(2\alpha) + 3)$$

$$\cos^5\alpha = \frac{1}{16}\ (\cos(5\alpha) + 5\ \cos(3\alpha) + 10\ \cos\alpha)$$

$$\cos^6\alpha = \frac{1}{32}\ (\cos(6\alpha) + 6\ \cos(4\alpha) + 15\ \cos(2\alpha) + 10)$$

$$\cos^7\alpha = \frac{1}{64}\ (\cos(7\alpha) + 7\ \cos(5\alpha) + 21\ \cos(3\alpha) + 35\ \cos\alpha)$$

$$\cos^8\alpha = \frac{1}{128}(\cos(8\alpha) + 8\ \cos(6\alpha) + 28\ \cos(4\alpha) + 56\ \cos(2\alpha) + 35)$$

etc.

3.2. Enkele eigenschappen van de amplitudefunktie

De fourierreeks van amu is bekend {ByF:908.00}:

$$\mathrm{amu} = \frac{\pi u}{2K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n}{n(1+q^{2n})} \sin(\pi n \frac{u}{K}).$$

amu is voor reële u een continue funktie, zodat ook de reeksontwikkelingen, die ontstaan door termsgewijze differentiatie, convergeren.

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{amu} = \frac{\pi}{2K} + \frac{\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n}{(1+q^{2n})} \cos(\pi n \frac{u}{K})$$

$$\mathrm{am}^{(2m)}u = (\frac{\pi}{K})^{2m} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n n^{2m-1}}{(1+q^{2n})} \sin(\pi n \frac{u}{K})$$

$$\mathrm{am}^{(2m+1)}u = (\frac{\pi}{K})^{2m+1} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n n^{2m}}{(1+q^{n})} \cos(\pi n \frac{u}{K})$$

Hieronder gebruiken we even de volgende notatie:

$$s := \mathrm{snu}; \quad c := \mathrm{cnu}; \quad d := \mathrm{dnu}; \quad a := \mathrm{amu} = \psi; \quad ' := \frac{d}{du}.$$

Bij constante k geldt {ByF:731}:

$$a' = d \;;\; c' = -sd \;;\; s' = cd \;;\; d' = -k^2 sc.$$

Verder geldt:

$$d^2+k^2s^2 = 1 \;;\; s^2+c^2 = 1 \;;\; s=\sin\psi \;;\; c=\cos\psi\ .$$

Herhaalde differentiatie van amu naar u levert:

$$a' = d$$

$$a'' = d' = -k\ sc$$

$$a''' = d(-k^2)(c^2-s^2) = d(-k^2)(2c^2-1) = d(-k^2)\cos(2\psi).$$

$$a^{(4)} = k^4 sc(c^2-s^2) + 4k^2d^2cs$$

$$a^{(5)} = d(-4k^2+5k^4+8k^2c^2-28k^4c^2+24k^4c^4) =$$

$$= d(-2k^4+4k^2)\cos(2\psi) + d(3k^4)\cos(4\psi)$$

etc.

zodat $\cos 2\psi = \dfrac{-a^{(3)}}{dk^2}$

$$\cos 4\psi = \frac{a^{(5)}}{3dk^4} + \left(\frac{2k^4-4k^2}{3k^4}\right)\left(\frac{-a^{(3)}}{dk^2}\right).$$

etc.

Op deze wijze is elke dn(u)cos(2jψ) uit te drukken in een reeks van (oneven) afgeleiden van amu.

3.3. Formules: Bessel- en Laplacetransformaties

Hieronder volgt een overzicht over de belangrijkste in hoofdstuk 2 gebruikte en nieuw gevonden formules.
De nummering uit {Ob} en {ObBa} is aangehouden.

3.3.1. Bessel transformaties {Ob}

nummer:

1.1.0.	$f(x)$	$g(y,\nu) = \int_0^\infty f(x)(xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)\,dx$
1.1.1.	$\int_0^\infty g(y)(xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)\,dy$	$g(y)$
-	$x^{-\frac{3}{2}} \exp(\frac{-z^2}{4x}z)$ $\{J_\nu \equiv K_1\}$	$y^{\frac{3}{4}}\, \pi^{\frac{1}{2}}\, z^{-1} 2^{-\frac{1}{4}} I(z,y)$
-	$x^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{x^4}{2\alpha})\,\mathrm{erfc}\, \frac{x^2}{\sqrt{2\alpha}}$ $\{J_\nu \equiv J_1\}$	$\alpha^{\frac{3}{2}}\, \pi^{-\frac{1}{2}}\, y^{-\frac{1}{4}} I(y,\alpha)$

3.3.2. Laplace transformaties {ObBa}

nummer:

1.1.1.	$f(t)$		$\mathcal{L}_p(f(t))$	
1.1.1.	$f(t)$		$g(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$	
1.1.2.	$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ut} g(u)\,du$		$g(p)$	
1.1.25.	$t^m f^{(n)}(t), m<n; m,n=0,1,2,..$		$(-\frac{d}{dp})^m \{p^n g(p)\} + (-1)^{m-1}\{\frac{(n-1)!}{(n-m-1)!}p^{n-m-1}f(0)$ $\frac{(n-2)!}{(n-m-2)!}p^{n-m-2}f'(0) + \ldots + m!f^{(m-n-1)}(0)\}$	
1.1.14.	$f(t^2)$		$\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \exp(-\frac{1}{4}p^2/u^2)g(u^2)\,du$	
1.5.27	$\exp(-a/t)$	$\{\mathrm{Re}\,a \geq 0\}$	$2(a/p)^{\frac{1}{2}} K_1\{2(ap)^{\frac{1}{2}}\}$	$\{\mathrm{Re}\,p>0\}$
-	$t^{-3}\exp(-\frac{\alpha}{2t}z)$		$I(p,\alpha) = \frac{\alpha}{2} f_1(p\sqrt{\frac{2}{\alpha}})$	

–	$\exp(-\frac{\alpha}{2t^2})$	$\frac{\alpha}{p}I(p,\alpha) = \frac{\alpha^2}{2p}f_1(p\sqrt{\frac{2}{\alpha}})$
–	$c_o\ M_o(t)$	$p^{-2}-\alpha p^{-4}M(1,\frac{3}{2}, -\frac{\alpha}{2p^2})$
–	$c_e\ M_e(t)$	$p^{-3}\exp(-\frac{\alpha}{2p}z)$
–	$c_1\ M_1(t)$	$p^{-1}-\frac{\alpha}{2p^2}\exp(-\frac{\alpha}{2p^2})Ei(\frac{\alpha}{2p^2})$
–	$\exp(-\frac{z}{\sqrt{t}})$	$2I(z,2p) = 2pf_1(z\sqrt{\frac{1}{p}})$

Literatuur

{AS} M.Abramowitz and I.A.Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1972.

{ByF} P.F.Byrd and M.D.Friedman: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. Springer-Verlag, 1971.

{GH} W.Gröbner und N.Hofreiter: Integraltafel.
I Teil: Unbestimmte Integrale.
II Teil: Bestimmte Integrale.
Springer-Verlag,1975 resp. 1961.

{GR} I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik: Table of integrals, series and products. Academic Press, 1965.

{Han} H.Hancock: Elliptic Integrals. Dover, 1958.

{Ob} F.Oberhettinger: Tables of Bessel Transforms. Springer-Verlag, 1972.

{ObBa} F.Oberhettinger and L.Badii: Tables of Laplace Transforms. Springer-Verlag, 1973.

{ObMa} F.Oberhettinger und W.Magnus: Anwendung der Elliptischen Funktionen in Physik und Technik. Springer-Verlag, 1949.

{WW} E.T.Whittaker and G.N.Watson: A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 1962.

{VaB} P.vd.Varst, naar het college van L.J.F. Broer: Bewegingsvergelijkingen, variatieprincipes en behoudswetten. T.H. Eindhoven, 1976.

{Za} C.T.Zahn: Absorbtion coefficients for thermal neutrons.
Phys. Rev. 52, 67 - 71 (1937).

{La} O.Laporte: Absorbtion coefficients for thermal neutrons.
Phys. Rev. 52, 72 - 74 (1937).

{To} H.C.Torrey: Notes on intensities of radio frequency spectra.
Phys. Rev. 59, 293 (1941).