

**MASTER**

**Stromingen bij het glasknippen**

Manche, O.

*Award date:*  
1978

[Link to publication](#)

**Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

CFT-Verslag 37/78

STROMINGEN BIJ HET GLASKNIPPEN

O. Manche

juni 1978

Een onderzoek naar methodieken waarmee de stroming beschreven kan worden, die ontstaat bij het afknippen van een aan de oven hangende glasdruppel

Dit verslag is het resultaat van het afstudeeronderzoek, dat ik als afronding van mijn studie op de TH Eindhoven, in de groep warmtetechnologie van het CFT heb verricht.

Ik wil graag iedereen bedanken die mij met diskussies en adviezen bij dit onderzoek gesteund heeft.

Daarnaast ben ik Ing. H. Hoefnagels van de afd. ISA zeer erkentelijk voor zijn steun bij het maken van het computerprogramma voor de minimaliseringsmethode.

### Samenvatting

Een uit een grote glasdruppel geperst TV scherm heeft groeven op het oppervlak, welke veroorzaakt worden door het afknippen van de glasdruppel, als deze aan de ovenmond hangt.

In het kader van een projekt bij Philips, waarin een onderzoek gedaan wordt naar het ontstaan van de groeven, zijn enkele methodieken onderzocht, waarmee de stroming van het glas rond de messen beschreven kan worden.

Het knipproces kan in twee fasen worden verdeeld: een insnoerfase en een snijfase.

In de insnoerfase is de glasstroming instationair. Het is niet mogelijk gebleken een analytische oplossing voor het stromingsprofiel te vinden. Een oplossing van het stromingsprofiel met de eindige elementenmethode is mogelijk, mits er een geschikt standaard computerprogramma beschikbaar komt. Er is in een stationaire benadering een stromingsprofiel aangenomen, waarin aanpasbare parameters voorkomen.

Deze parameters zijn m.b.v. een optimaliseringsprogramma voor het vermogen berekend. Met dit programma en het model is een schatting van de kracht op de messen en het door de messen geleverde vermogen gemaakt. Tevens blijkt uit het gevonden stromingsprofiel, dat de glasstroming slechts dicht bij de messen plaats vindt.

Het zoeken naar een analytische oplossing voor de kracht op de messen in de snijfase heeft geen resultaat opgeleverd. Tenslotte zijn meshouders ontworpen, waarmee de kracht op de messen gemeten kan worden. Deze metingen zijn nog niet uitgevoerd.

Inhoud

	blz.
Samenvatting	2
Inhoud	3
I. Inleiding	5
I.1. Motivering voor het onderzoek	5
I.2. De groeven en hun ontstaan.	6
II. Modellen voor de bestudering van het glasknippen	8
II.1. De insnoerfase	8
II.2. De snijfase	10
III. Dimensie-analyse	11
III.1. Inleiding	11
III.2. Bepaling van de dimensieloze produkten	12
III.2.1. Het $\Pi$ -theorema van Buckingham	12
III.2.2. De verhouding van grootheden met gelijke dimensie	16
III.3. Schatting van de grootte van de dimensie- loze produkten.	19
IV. De insnoerfase	20
IV.1. Inleiding	20
IV.2. Analytische oplossing van de Stokes verge- lijkingen	25
IV.3. De eindige elementen methode	28
IV.3.1. Inleiding	28
IV.3.2. De verdeling in elementen	29
IV.3.3. De gewogen residue methode	32
IV.3.4. Tijdsafhankelijke problemen	33
IV.3.5. Toepassing van de FEM op een twee-dimen- sionale Stokes-stroming met instationaire traagheidskracht.	36
IV.4. De methode van minimalisering van het verschil in opgenomen en afgegeven vermogen	39
IV.4.1. Inleiding	39
IV.4.2. De snelheidsprofielen	41

	blz.
V. De snijkrachtmetingen	50
V.1. De meetmethode	50
V.2. De krachtopnemers	54
V.3. De bevestiging van de krachtopnemers	
VI. Resultaten en discussie	60
VI.1. De parameters m en p	60
VI.2. De krachtmetingen	63
VII. Conclusies	64
Lijst van symbolen	65
Referenties	66
Foto's	67
Appendices	
A. De kracht op een cilinder met slip langs het oppervlak	70
B. De interpolatiefunctie voor een driehoekig element	73
C. De Stokes-vergelijkingen uitgewerkt voor driehoekige elementen	76
D. De functies $k(y)$ en $\tau_2(x)$	82
E. Snelheid, versnelling en afgelegde weg van de messen	86
F. De methode van Hooke en Jeeves	93
Verzendlijst	96

## I. Inleiding

### I.1. Motivering voor het onderzoek

De fabricage van TV-schermen is een continu proces, waarbij porties vloeibaar glas in een mal tot TV-scherm geperst worden. Het glas wordt in een oven gevormd door het smelten van een mengsel van grondstoffen en glasscherven. Door een opening onderaan de oven (de spout) wordt de voor een TV-scherm benodigde hoeveelheid glas d.m.v. een plunger naar buiten gedrukt. Aan de spout hangt dan een glasdruppel die niet vanzelf loslaat, maar die afgeknipt moet worden. Zou het knippen achterwege blijven, dan valt de druppel wel, maar hij blijft door een dunne sliert met het glas in de oven verbonden. De nog niet afgeknipte druppel zakt uit door zijn eigen gewicht, zodat vlak onder de spout insnoering plaats vindt. Op die plek wordt de glasdruppel door twee halfronde messen afgeknipt (zie foto's). Op het geperste TV-scherm zien we groeven, die hun ontstaan vinden in het knippen. Deze groeven zijn enkele tiende millimeters diep. Omdat het niet acceptabel is dat zij aanwezig blijven (de groeven bevinden zich op de voorkant van het scherm) moet het TV-scherm geslepen worden tot zij verdwenen zijn. Het wegslijpen van de groeven is een kostbaar proces, zodat het zinvol is een onderzoek te doen naar de aard en het ontstaan van de groeven en naar een mogelijke verbetering van het knipproces.

In de groep Warmtetechnologie van het CFT wordt door Ir. H. Reijnen onderzoek gedaan naar o.a. materiaal en vorm van de messen en naar de warmteoverdracht van glas naar mes. Dit verslag geeft het begin van het onderzoek weer naar de stroming van het glas rond het mes.

### 1.2. De groeven en hun ontstaan

De verzameling groeven die we op het TV-scherm zien noemen we de knip. We onderscheiden een oude en een nieuwe knip, die voortkomen uit resp. de onder- en bovenkant van de vallende glasdruppel. De afdruk van de messen, die zich op de bovenkant van de druppel bevindt, veroorzaakt de nieuwe knip, terwijl de afdruk van de messen op de onderkant (die ontstaan is bij het knippen van de vorige druppel) de oude knip veroorzaakt. Deze laatste is doorgaans minder ernstig, omdat na het knippen de resterende glasportie teruggezogen wordt in de spout en daar gedurende enige tijd door de oven aangestraald wordt.

In fig. I.1. zijn de groeven geschetst die we op het scherm in de oude en nieuwe knip aantreffen.

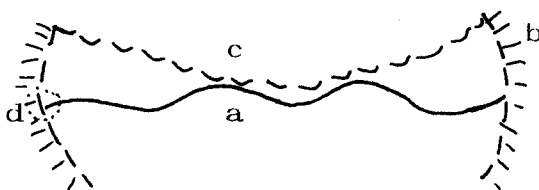


Fig. I.1.a. Oude knip

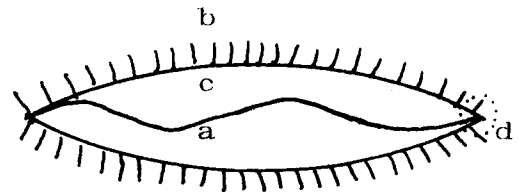


Fig. I.1.b. Nieuwe knip

De knippen worden door de volgende groeven gevormd:

i) oude knip

a) bellenbaan in het glas met afdruk van de kartels van het bovenmes

b) plooien



- c) afdruklijn van de voorrand van het bovenmes
  - d) gebied waar de verschillende groeven bij elkaar komen en dat we de oren noemen
- ii) nieuwe knip
- a) centrale lijn met afdruk van de kartels van het bovenmes
  - b) plooien
  - c) insnijlijn
  - d) de oren

De plooien worden vermoedelijk veroorzaakt doordat het glas niet overal het mes raakt, maar dat dit volgens een bepaald patroon gebeurt (1). Het gevolg hiervan is, dat het warmtecontact tussen glas en mes niet overal gelijk is. Door het grote temperatuurverschil tussen glas en mes ( $T_{\text{glas}} \approx 1000^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\text{mes}} \approx 50^{\circ}\text{C}$ ) kunnen er gebiedjes in het glas ontstaan die onderling een groot temperatuurverschil hebben, wat een verschil in viscositeit tot gevolg heeft. In de gebiedjes met lage viscositeit wordt het glas het meest gedeformeerd. De verschillende deformaties van naast elkaar liggende gebiedjes resulteren in plooien, welke na het persen in het glas te zien zijn. Een mogelijke verklaring voor dit verschijnsel is, dat de uitstroomopening van de oven niet volkomen vlak is. Foto's van uitstromend glas laten n.l. strepen op het glas rondom de uitstroomopening zien.

In de eerste fase van het knippen wordt op de punt van het mes een dun laagje glas "ingevroren", dat als een kapje om de punt blijft zitten. Het vloeibare glas hecht aan dit kapje en beweegt met het mes mee naar binnen, zodat de glasdruppel verder ingesnoerd wordt. De naar buiten gerichte trekkrachten op het glaskapje worden echter steeds groter en er komt een moment dat het kapje gaat scheuren. Het insnoeren van het glas gaat dan over in snijden en de plaats waar dit gebeurt

is als een groef zichtbaar op het geperste scherm. Deze groef wordt de insnijlijn genoemd. De centrale lijn ligt op de plaats waar de messen elkaar gaan overlappen. Door de halfronde vorm begint deze overlap aan de buitenkant van de messen. De bellenbaan ontstaat vermoedelijk doordat bij het overlappen van de messen een dun laagje glas bij de mespunt omgevouwen wordt.

## II. Modellen voor de bestudering van het glasknippen

Bij het glasknippen onderscheiden we twee fasen, n.l.

- i) de insnoerfase, waarbij het glas hecht aan het glaskapje om het mes en de glasdruppel verder ingesnoerd wordt, en
- ii) de snijfase, waarbij het glaskapje gescheurd is en er geen hechting is tussen glas en mes.

### II.1. De insnoerfase

Een beschrijving van de stroming van het glas in cilindercoördinaten, tijdens de insnoering, is niet mogelijk, omdat de doorsnede van het glas zijn ronde vorm verliest en overgaat in een ellipsachtige figuur met puntige uiteinden (fig. II.1).

Omdat de rand van het glas nergens buiten de rand van het mes komt is gekozen voor een twee-dimensionale beschrijving van de stroming van het glas, waarbij we steeds als x-richting de bewegingsrichting van de messen nemen en als y-richting de richting van de lengte-as van de glasdruppel. Bij deze beschrijving moeten we de grootste afwijking van de werkelijke stroming verwachten bij de buitenkant van de messen.

Om de stroming van het glas te onderzoeken, moeten de Navier-Stokes vergelijkingen voor de snelheid  $u$  in de x-richting en de snelheid  $v$  in de y-richting opgelost worden, waarbij steeds voldaan moet zijn aan de

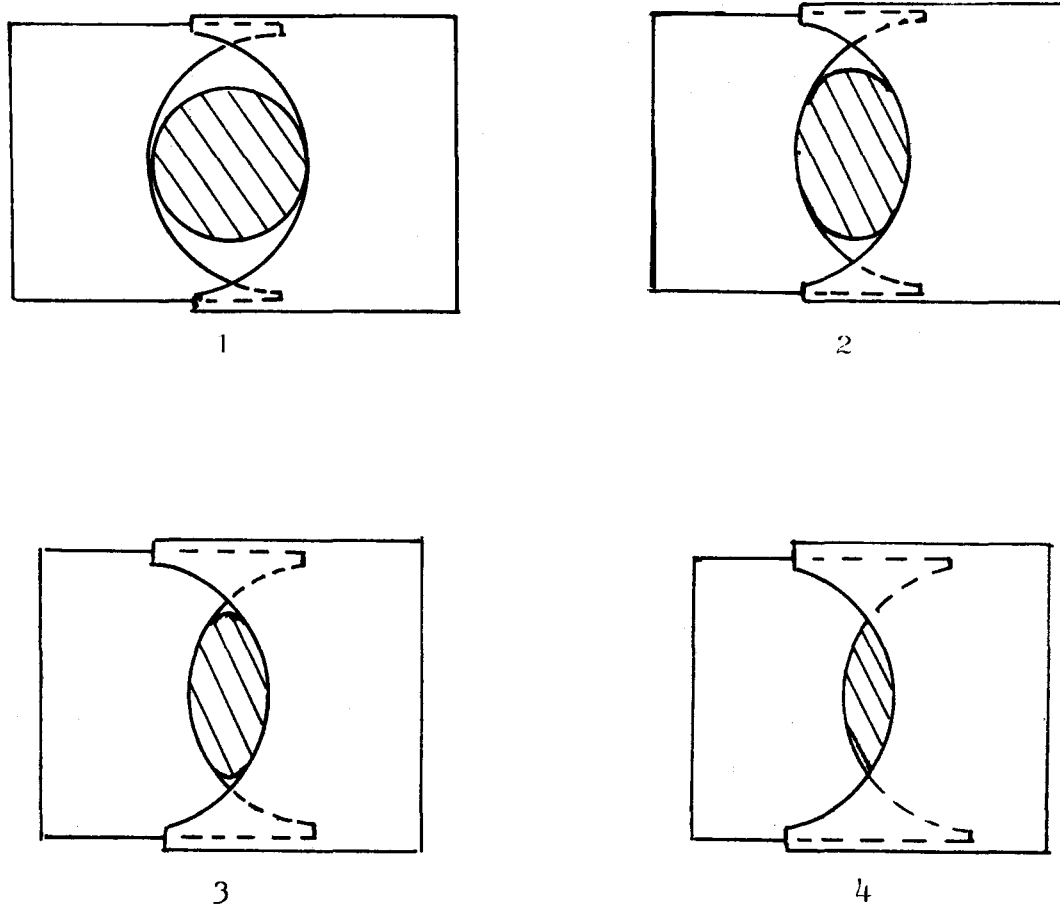


Fig. II.1. Vervorming van de glasdruppel

continuïteitsvergelijking. Een dimensie-analyse kan mogelijk uitsluitel geven of en zo ja welke termen uit de Navier-Stokes vergelijkingen weggelaten mogen worden. Het zal blijken dat deze aanpak niet op eenvoudige wijze een bevredigend resultaat geeft. Er is daarom ook een andere methode onderzocht die als methode van minimalisering van vermogen bekend is. We nemen hiertoe een snelheidsprofiel in de vloeistof aan, dat voldoet aan de continuïteitsvergelijking en dat gekarakteriseerd wordt door nog onbekende parameters. We hebben een optimum in de waarden van de parameters gevonden, als het verschil tussen afgegeven

vermogen door het mes en opgenomen vermogen door het glas minimaal is. Omdat we hier niet formeel te werk gaan, zoals bij het oplossen van de Navier-Stokes vergelijkingen gebeurt, is een experimentele controle van de resultaten noodzakelijk. We berekenen hiertoe de kracht die het mes ondervindt in het glas m.b.v. de al eerder gevonden snelheidsverdeling in het glas, en we vergelijken deze met de kracht die we vinden uit metingen aan de messen.

## II.2. De snijfase

Bij het snijden van het glas hebben we te maken met een glasstroming rond het mes, waarbij slip aan het oppervlak optreedt. Als we aannemen dat er 100% slip is, zijn er geen schuifkrachten tussen glas en mes aanwezig, maar worden er alleen normaalkrachten door de voorkant van het mes op het glas uitgeoefend. Omdat het platte vlak van het mes niet mee doet in het krachtenspel is gezocht naar een analogie met cilinders, die dwars op hun lengte-as in een vloeistof bewegen. De gevonden modellen, zoals die van Burgers (2) en Batchelor (3) zijn echter opgezet voor cilinders van eindige lengte in een oneindig uitgestrekte vloeistof. De door Burgers berekende kracht per lengte-eenheid op een cilinder is:

$$\frac{F}{l} = \frac{8\pi\eta U}{\log(l/d) + 0,5} \quad (\text{II.1})$$

waarbij  $l$  de lengte en  $d$  de diameter is.

We zien dat als de lengte  $l$  naar oneindig gaat, de kracht per lengte-eenheid nul wordt. Een dergelijk model is niet bruikbaar in het geval dat cilinderlengte en vloeistofruimte van gelijke afmetingen zijn.

In het door Batchelor beschreven model is de kracht per lengte-eenheid:

$$\frac{F}{l} = \frac{4\pi^2 u}{\text{Log}(7.4/R)} \quad (\text{II2})$$

(R is het getal van Reynolds).

(II2) is geldig dicht bij de cilinder en alleen als  $R \ll 1$ . Bij een vaste diameter van de cilinder is  $F \sim 1$ , zodat  $F/l$  niet nul wordt als 1 tot oneindig nadert. De in (II2) gegeven kracht is echter berekend voor het geval er hechting tussen cilinder en vloeistof optreedt. Een berekening analoog aan die voor een bol met en zonder slip, geeft in het geval van de cilinder een kracht gelijk aan nul als er slip langs het oppervlak optreedt (zie appendix A).

### III. Dimensie-analyse

#### III.1. Inleiding

Het verloop van een fysisch proces wordt in het algemeen bepaald door verschillende grootheden, die alle opgebouwd zijn uit één of meer basisgrootheden. Bij het glasknippen spelen alleen de basisgrootheden lengte (L), massa (M), tijd (T) en temperatuur ( $\theta$ ) een rol.

Dikwijls zijn niet alle grootheden even belangrijk bij het verloop van een proces. Om te onderzoeken welke grootheden we kunnen verwaarlozen bij de beschrijving van een proces, maken we gebruik van dimensieloze produkten of proceskengetallen en procesparameters. De dimensieloze produkten ontstaan uit een geschikte vermenigvuldiging van verschillende grootheden. Is bij de beschrijving van een proces een dimensieloos produkt veel kleiner dan één, dan

speelt één van de grootheden een ondergeschikte rol hierin t.o.v. de andere. Is b.v. bij een stroming om een lichaam het getal van Reynolds,  $\rho V L / \eta \ll 1$ , dan is de stationaire traagheidskracht te verwaarlozen t.o.v. de viskeuze kracht.

Indien er bij een fysisch proces  $n$  grootheden zijn, die opgebouwd zijn uit  $r$  basisgrootheden, dan zijn er volgens het  $\Pi$ -theorema van Buckingham  $n-r$  onafhankelijke dimensieloze produkten die het proces beschrijven.

### III.2. Bepaling van de dimensieloze produkten

Er zijn verschillende methoden om de dimensieloze produkten te bepalen. In dit verslag worden er twee besproken, n.l. een methode waarbij we gebruik maken van het  $\Pi$ -theorema van Buckingham en een methode waarbij we de verhoudingen van parameters, krachten, energiestromen e.a. beschouwen.

#### III.2.1. Het $\Pi$ -theorema van Buckingham

Volgens het  $\Pi$ -theorema van Buckingham moeten we  $n-r$  dimensieloze produkten vinden. Als we deze getallen met elkaar vermenigvuldigen, dan ontstaat een "groot" dimensieloos produkt, waarin alle grootheden voorkomen. Omdat de som van de exponenten van de basisgrootheden nul moet zijn, kunnen we nu  $r$  vergelijkingen met  $n$  onbekenden opstellen, waaruit de exponenten bepaald kunnen worden. Om deze vergelijkingen op te kunnen lossen, moeten  $n-r$  onbekenden vrij gekozen worden.

Met behulp van tabel I, waarbij voor het glasknipproces achtereenvolgens is gegeven de grootheid of procesvariabele, het symbool, de dimensie als produkt van basisgrootheden en de exponent van de grootheid, waarmee deze in het "grote" dimensieloze produkt voorkomt, worden de dimensieloze produkten bepaald.

Tabel I

procesvariabele	symbool	dimensie	exponent
dikte van het mes	L1	L	k1
diameter van de glasdruppel	L2	L	k2
snelheid van het mes	V1	$LT^{-1}$	k3
snelheid van het glas	V2	$LT^{-1}$	k4
temp. van het mes	$\theta 1$	$\theta$	k5
temp. van het glas	$\theta 2$	$\theta$	k6
warmte gel.coëff. v.h. mes	$\lambda 1$	$MLT^{-3}\theta^{-1}$	k7
warmte gel.coëff. v.h. glas	$\lambda 2$	$MLT^{-3}\theta^{-1}$	k8
soortelijke massa v.h. mes	$\rho 1$	$ML^{-3}$	k9
soortelijke massa v.h. glas	$\rho 2$	$ML^{-3}$	k10
soortelijke warmte v.h. mes	C1	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	k11
soortelijke warmte v.h. glas	C2	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	k12
viscositeit glas	$\eta$	$ML^{-1}T^{-1}$	k13
opp. spanning glas	$\gamma$	$MT^{-2}$	k14
versn. v.d. zwaartekracht	g	$LT^{-2}$	k15
snijtijd	T	T	k16
kracht op het mes	F	$MLT^{-2}$	k17

Met 17 grootheden en 4 basisgrootheden kunnen we nu 4 vergelijkingen met 17 onbekenden opstellen. Bij het oplossen moeten dan 13 onbekenden vrij gekozen worden.

De 4 vergelijkingen zijn voor resp. L, T, M en  $\theta$ :

$$\begin{aligned} k_1+k_2+k_3+k_4+k_7+k_8-3k_9-3k_{10}+2k_{11}+2k_{12}-k_{13}+k_{15}+k_{17} &= 0 & \text{(III1)} \\ -k_3-k_4-3k_7-3k_8-2k_{11}-2k_{12}-k_{13}-2k_{14}-2k_{15}+k_{16}-2k_{17} &= 0 & \text{(III2)} \\ k_7+k_8+k_9+k_{10}+k_{13}+k_{14}+k_{17} &= 0 & \text{(III3)} \\ k_5+k_6-k_7-k_8-k_{11}-k_{12} &= 0 & \text{(III4)} \end{aligned}$$

Het kiezen van de 13 onbekenden is niet geheel willekeurig, als b.v.  $k_1$  vrij gekozen wordt, ligt  $k_2$  vast en kan dus niet meer vrij gekozen worden. Als vrije onbekenden worden nu gekozen en benoemd:  $k_1=a$ ,  $k_3=b$ ,  $k_4=c$ ,  $k_7=e$ ,  $k_8=f$ ,  $k_9=h$ ,  $k_{11}=i$ ,  $k_{12}=l$ ,  $k_{13}=m$ ,  $k_{14}=n$ ,  $k_{15}=o$ ,  $k_{16}=p$ ,  $k_{17}=q$

We vinden nu voor  $k_2$ ,  $k_4$ ,  $k_6$  en  $k_{10}$ :

$$\begin{aligned} k_2 &= -(a+e+f+m+n-o+p+2q) \\ k_4 &= -(b+3e+3f+2i+2l+m+2n+2o-p+2q) \\ k_6 &= -c+e+f+i+l \\ k_{10} &= -(e+f+h+m+n+q) \end{aligned}$$

De verschillende grootheden komen dus met de volgende exponenten in het "grote" dimensieloze produkt voor:

$$\begin{aligned} L_1^a, L_2^{-(a+e+f+m+n-o+p+2q)}, V_1^b, V_2^{-(b+3e+3f+2i+2l+m+2n+2o-p+2q)}, \theta_1^c, \theta_2^{-c+e+f+i+l}, \lambda_1^e, \lambda_2^f, \rho_1^h, \rho_2^{-(e+f+h+m+n+q)}, \\ C_1^i, C_2^l, \eta^m, \gamma^n, g^o, T^p, F^q. \end{aligned}$$



Samenvoegen van grootheden met gelijke exponenten geeft nu de volgende dimensieloze produkten:

$$\frac{L_1}{L_2}, \frac{V_1}{V_2}, \frac{\theta_1}{\theta_2}, \frac{\lambda_1 \theta_2}{L_1 V_2^3 \rho_2}, \frac{\lambda_2 \theta_2}{L_2 V_2^3 \rho_2}, \frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{\theta_2 C_1}{V_2^2}, \frac{\theta_2 C_1}{V_2^2}$$

$$\frac{\eta}{L_2 V_2 \rho_2}, \frac{\gamma}{L_2 V_2^2 \rho_2}, \frac{L_2 g}{V_2^2}, \frac{V_2 T}{L_2}, \frac{F}{L_2^2 V_2^2 \rho_2}$$

(De exponenten a,b,...q zijn 1 gesteld).

Deze 13 dimensieloze produkten hebben niet alle een reële fysische betekenis, echter door onderlinge vermenigvuldiging kunnen we dimensieloze produkten vinden die dat wel hebben. Ook moeten we onderscheid maken in dimensieloze produkten als verhouding van gelijke grootheden, de procesparameters en dimensieloze produkten als verhouding van verschillende grootheden, de kengetallen.

De resulteert in de procesparameters:

$$\frac{L_1}{L_2}, \frac{V_1}{V_2}, \frac{\theta_1}{\theta_2}, \frac{1}{2}, \frac{(\lambda \rho C)_1}{(\lambda \rho C)_2} \text{ en } \frac{(\lambda / \rho C)_1}{(\lambda / \rho C)_2} \left( \text{of } \frac{a_1}{a_2} \right)$$

(  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$  mag vervangen worden door  $\frac{C_1}{C_2}$  ),  
en in de kengetallen:

$$\frac{\eta}{L_2 V_2 \rho_2}, \frac{\gamma}{\eta V_2}, \frac{\lambda_2 L_2^2 g}{\eta V_2}, \frac{\lambda_2 T}{(\rho C)_2 L_2^2}, \left( \text{of } \frac{a_2 T}{L_2^2} \right)$$

$$\frac{\eta_T}{\rho_2 L_2^2}, \frac{\theta_2}{\eta V_2^2} \text{ en } \frac{F}{\eta V_2 L_2}$$

Hoewel nu alle dimensieloze produkten bekend zijn, hebben we nog geen inzicht in hun fysische betekenis, terwijl ook nog onderzocht moet worden of de geïndiceerde grootheden bij het glas of bij het mes behoren.

III.2.2. De verhouding van grootheden met gelijke dimensie

De fysische betekenis van de dimensieloze produkten wordt duidelijk als we m.b.v. de tweede methode een dimensie-analyse maken.

Wat betreft de procesparameters, deze kunnen we voorstellen als dimensieloze grootheden, nl.:

een dimensieloze lengte:  $L' = \frac{L_1}{L_2}$

een dimensieloze snelheid:  $V' = \frac{V_1}{V_2}$

een dimensieloze temperatuur:  $\theta' = \frac{\theta_1}{\theta_2}$

een dimensieloze dichtheid:  $\rho' = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

een dimensieloze temperatuurvereffeningscoëfficiënt:

$$a' = \frac{a_1}{a_2} = \frac{(\lambda/\rho c)_1}{(\lambda/\rho c)_2}$$

een dimensieloze warmte-indringscoëfficiënt:

$$b' = \frac{b_1}{b_2} = \frac{(\lambda \rho c)_1}{(\lambda \rho c)_2}$$

De overige dimensieloze produkten, de kengetallen, kunnen we vinden door de onderlinge verhouding van krachten en van energiestromen te beschouwen.

De verhouding van krachten leidt tot de volgende overwegingen:

Omdat het glas een hoog viskeuze vloeistof is ( $\eta$  glas  $\approx$  1500 Pas) worden in deze analyse alle optredende krachten vergeleken met de viskeuze kracht.

De viskeuze kracht is de schuifkracht die op een oppervlak  $L^2$  werkt onder invloed van de dynamische viscositeitscoëfficiënt  $\eta$  en de snelheidsgradiënt  $V/L$  en is gelijk aan  $\eta VL$ .

De traagheidskrachten moeten we onderverdelen in stationaire en instationaire traagheidskrachten.

De stationaire traagheidskracht heeft betrekking op de versnelling, als we deze zien als de snelheidsverandering van een deeltje met massa  $\rho L^3$  in een tijd  $L/V$ , terwijl het een weg ter lengte  $L$  aflegt. De stationaire traagheidskracht is dan  $\rho V^2 L^2$ .

De instationaire traagheidskracht treedt op bij een een in de tijd  $T$  veranderende snelheid. Een deeltje met massa  $\rho L^3$  ondervindt dan een versnelling  $V/T$  en de instationaire traagheidskracht is  $\rho VL^3/T$ .

De oppervlaktekracht treedt op onder invloed van de oppervlakte spanning  $\gamma$  en is evenredig met  $\gamma L$ . ( $\gamma = F/L$ ) De zwaartekracht werkt door de versnelling  $g$  op een volume-elementje met massa  $\rho L^3$  en is  $\rho g L^3$ .

Tenslotte ondervindt het mes een tegenwerkende kracht  $F$  van het glas tijdens het knippen.

De verhouding van deze krachten tot de viskeuze kracht levert nu de volgende kengetallen op:

$$\text{stationaire traagheidskracht/viskeuze kracht: } \frac{\rho 2V1L1}{\eta}$$

$$\text{instationaire traagheidskracht/viskeuze kracht: } \frac{\rho 2L1^2}{\eta T}$$

$$\text{oppervlaktekracht/viskeuze kracht: } \frac{\gamma}{\eta V1}$$

$$\text{zwaartekracht/viskeuze kracht: } \frac{\rho 2gL1^2}{\eta V1}$$

$$\text{kracht op het mes/viskeuze kracht: } \frac{F}{\eta V1L1}$$

We beschouwen vervolgens de enthalpieverhoging van een volume-elementje glas met massa  $\rho L^3$  in de tijd  $T$ , welke gelijk is aan  $\rho c L^3 \theta_3 / T$ , in verhouding tot de viskeuze dissipatie  $\eta v^2 L$  en de warmtegeleiding  $\theta_3 L \lambda$ . Hierbij is  $\theta_3$  een temperatuurverschil in het glas.

De kengetallen worden dan:

$$\text{viskeuze dissipatie/enthalpieverhoging: } \frac{\eta v_1^2 T}{\rho c L^3 \theta_3}$$

$$\text{warmtegeleiding/enthalpieverhoging: } \frac{\lambda T}{(\rho c) L^2} = \frac{a T}{L^2}$$

Vergelijking van beide methoden toont aan, dat de eerste alle dimensieloze produkten die het proces beschrijven, kan geven, onder voorwaarde dat bij het opstellen van de 4 vergelijkingen alle grootheden meegenomen worden. Echter door het onbeperkt met elkaar kunnen vermenigvuldigen van de dimensieloze produkten is inzicht in het proces nodig om die produkten te vinden, die een fysische betekenis hebben. De tweede methode kan toegepast worden als van een proces de krachten- en energieverhoudingen opgesteld kunnen worden. We hoeven hier dan ook niet achteraf te bepalen of de grootheden betrekking hebben op het glas of op het mes. Bij deze laatste methode ontbreekt echter een controle op het vinden van het juiste aantal dimensieloze produkten, zodat het bij een complex probleem aanbeveling verdient beide methoden toe te passen.

We kunnen het proces nu beschrijven door:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{13}) = 0$$

Zijn we echter geïnteresseerd in het verband tussen één dimensieloos produkt (b.v.  $\Pi_i = F/\eta V_1 L_1$ ) en de overige is dan ook:

$$F/\eta V_1 L_1 = g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{13})$$

Door in een experiment het verband tussen  $F/\eta V_1 L_1$  en steeds een ander dimensieloos produkt te bepalen, kan de funktie  $g$  bepaald worden.

III.3. Schatting van de grootte van de dimensieloze produkten

Om een indruk te krijgen van de grootte van de dimensieloze produkten worden deze m.b.v. de getallen in tabel II uitgerekend en weergegeven in tabel III.

L1	$8 \cdot 10^{-3}$ m	C1	490 J/kgK
L2	$1,2 \cdot 10^{-1}$ m	C2	1300 J/kgK
V1	6 m/s	$\eta$	$1,5 \cdot 10^3$ Pas
$\theta_1$	50°C	$\gamma$	0,277 N/m
$\theta_2$	1000°C	$g$	$9,8 \text{ m/s}^2$
$\lambda_1$	15 J/msK	T	$10^{-2}$ s
$\lambda_2$	2,2 J/msK	F	?
$\rho_1$	$7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	$\theta_3$	100°C
$\rho_2$	$2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	V2	$10^{-1} \text{ m/s}$

Tabel II

L'	$6,7 \cdot 10^{-1}$	$\rho_2 V_1 L_1 / \eta$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
V'	6,10	$\rho_2 L_1^2 / \eta T$	?
$\theta'$	$5 \cdot 10^{-2}$	$\gamma / \eta V_1$	$3,3 \cdot 10^{-5}$
$\rho'$	3,1	$\rho_2 g L_1^2 / \eta V_1$	$1,7 \cdot 10^{-4}$
a'	5,8	$F / \eta V_1 L_1$	F/72
b'	3,7	$\eta V_1^2 T / \rho_2 C_2 L_1^2 \theta_3$	$2,6 \cdot 10^{-4}$
		$\lambda_2 T / \rho_2 C_2 L_1^2$	$1,1 \cdot 10^{-4}$

Tabel III

De verhouding van instationaire traagheidskracht tot de viskeuze kracht is niet ingevuld, omdat in tabel II voor de tijd T is genomen de tijd, die het mes nodig heeft om het glas te kunnen doorsnijden. Bij de instationaire traagheidskracht moeten we echter de tijd beschouwen die het mes nodig heeft om een glasdeeltje met lengte L1 en breedte L2 te passeren. Deze is ongeveer  $10^{-3}$  sec. De verhouding wordt dan

$$\frac{\rho L_2 L_1}{\eta T} = 1,6$$

Wanneer we de stroming met de Navier-Stokes vergelijking beschrijven, dan zien we dat de termen voor de stationaire traagheidskracht en de zwaartekracht hieruit weggelaten mogen worden.

#### IV. De insnoerfase

##### IV.1. Inleiding

De glasdruppel wordt door twee messen doorgesneden op de plaats van de grootste "natuurlijke" insnoering (fig. IV.1).

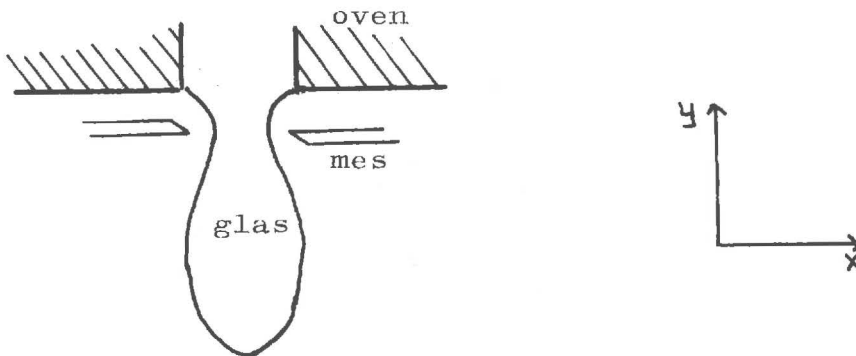


Fig. IV.1. Glasdruppel aan uitstroomopening

De messen raken tegelijk het glas en er ontstaat een stroming in x- en y-richting die we symmetrisch veronderstellen t.o.v. een verticale lijn door het midden van de druppel. Zoals uit de dimensie-analyse gebleken is, mag de invloed van de zwaartekracht buiten beschouwing blijven en er wordt dan ook symmetrie in de stroming aangenomen t.o.v. het onder- en bovenzvlak van het mes. Het mes wordt oneindig dun verondersteld, om de stroming te kunnen beschrijven als stroming langs een vlakke plaat. We bekijken nu de stroming alleen in het eerste kwadrant.

In fig. IV.2 is de glasbel getekend, waar het mes een klein stukje ingedrongen is.

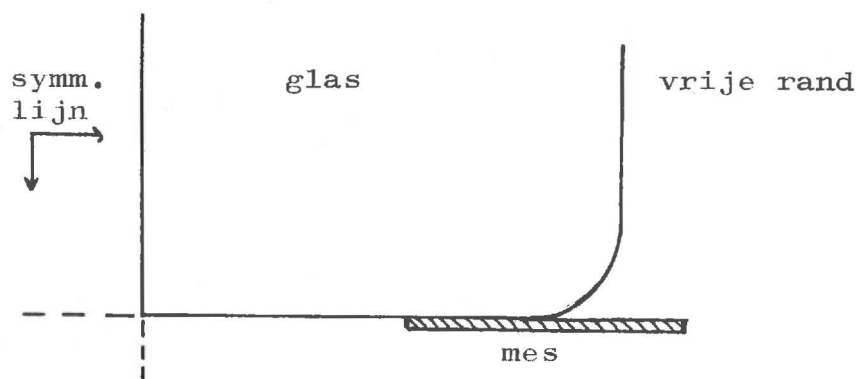


Fig. IV.2. Doorsnede van glasdruppel in insnoerfase

Als we het glas beschouwen als een Newtonse vloeistof (4), wordt de stroming van het glas beschreven door de Stokes vergelijking met instationaire traagheidskracht. (Temperatuurinvloed op de viscositeit wordt buiten beschouwing gelaten).

Deze luidt:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (\text{IV.1})$$

We veronderstellen dat het glas een incompressibele vloeistof is, zodat de stroming voldoet aan de continuïteitsvergelijking:

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Uitgewerkt in resp. x- en y-richting wordt voor een vlak probleem gevonden:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{IV.3})$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{IV.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

In fig. IV.3. is de oorsprong van het assenstelsel gekozen op de plaats waar de symmetrielijnen samenkomen, omdat dit punt onveranderlijk is in de tijd.

Voor fig. IV.3 z.o.z.



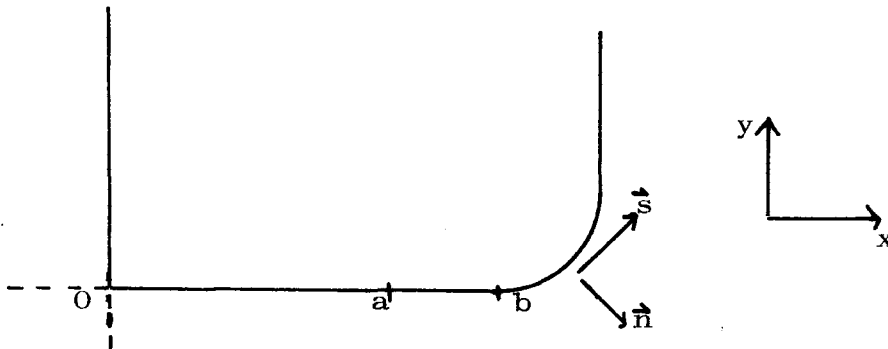


Fig. IV.3. Als fig. IV.2., echter met x-y coördinatenstelsel.

(Het mes raakt het glas over het traject a naar b).

Bij het oplossen van (IV.3,4,5) moeten we voldoen aan de volgende voorwaarden:

beginvoorwaarde:

$$t=0: u=0$$

Vorm van de vrijerand is bekend ( $y=f(x)$ )

Voor vrije randen, waarvoor  $f(x)$  een lineaire uitdrukking in  $x$  is, vinden we een randvoorwaarde uit de eis dat  $\int_{\partial n} = 0$ . Voor willekeurig gekromde vrije randen is de bepaling van de randvoorwaarde ingewikkelder (5).

Op  $y=0$  en  $0 \leq x \leq a$  is  $v=0$  en  $\partial u / \partial y = 0$ , door symmetrie met het ondervlak. Op  $y=0$  en  $a < x < b$  is  $v=0$  en  $\partial u / \partial y \neq 0$ .

Samenvattend luiden de randvoorwaarden:

$$\text{vrije rand } p - \frac{2\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) (f'(x))^2 - \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) f'(x) + \eta \frac{\partial v}{\partial y}}{(1+(f'(x))^2)^{1/2}} = 0$$

$$2\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) f'(x) + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) (f'(x)^2 - 1) = 0$$

$$y=0 \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq a$$

$$\text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \quad \text{voor } a < x < b$$

$$x=0 \quad u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$y \rightarrow \infty \quad u = v = 0$$

Door invoering van de stroomfunctie  $\psi$ , gedefinieerd door:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{IV.6})$$

kunnen  $\frac{\partial p}{\partial x}$  en  $\frac{\partial p}{\partial y}$  uit (IV.3,4) geëlimineerd worden.

De vergelijkingen gaan dan over in 1 vergelijking:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \eta \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{IV.7})$$

of met invoering van de rotatie  $\omega$ ,

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \quad (\text{IV.8})$$

in

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} - \eta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Het omwerken van (IV3,4) in (IV.7) heeft het voordeel dat er slechts 1 vergelijking opgelost hoeft te worden om  $u$  en  $v$  te bepalen. De op te lossen vergelijking is echter een 4e orde differentiaal vergelijking en leent zich dus nauwelijks voor een numerieke aanpak. Is echter  $\omega$  op de randen bekend, dan wordt de oplossing van (IV.7) sterk vereenvoudigd.

#### IV.2. Analytische oplossing van de Stokes vergelijkingen

Een analytische oplossing van de Stokes vergelijkingen voor stroming in twee richtingen is dikwijls erg moeilijk en in veel gevallen niet mogelijk. We zullen aan de hand van een sterk vereenvoudigd voorbeeld zien, dat dit ook voor de glasstroming bij het knippen geldt.

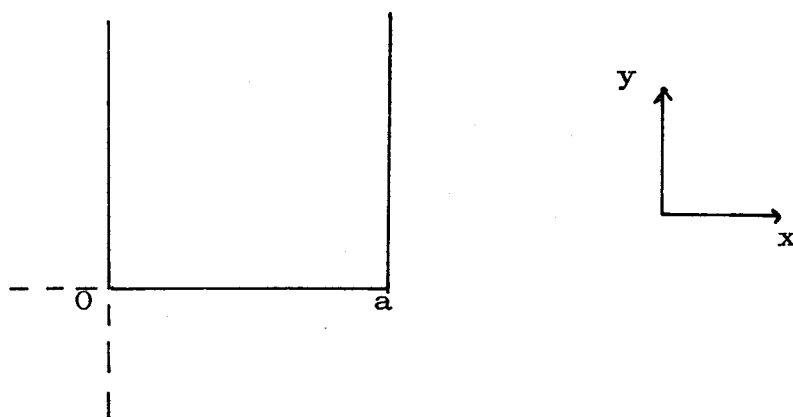


Fig. IV.4. Rechthoekige glasbolk.

Als we ons de glasbolk voorstellen volgens fig. IV.4, dan zijn  $x=0$  en  $y=0$  symmetrielijnen en  $x=a$  is een vrije rand. In  $y$ -richting strekt het glas zich tot oneindig uit.

We nemen nu aan dat het glas voor  $t > 0$  op  $y=0$  een snelheid  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  heeft.

Als we het snelheidsveld met de Stokes vergelijkingen (IV.3,4) willen berekenen, maken we gebruik van de volgende begin- en randvoorwaarden.

verg.		IV.3	IV.4
tijd	plaats		
$t \leq 0$	$\forall x, y$	$u=0$	$v=0$
$t > 0$	$x=0$	$u=0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$
$t > 0$	$x=a$	$u=0, p=p_0 + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, p=p_0 + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}$
$t > 0$	$y=0$	$u=-U_0$	$v=0$
$t > 0$	$y \rightarrow \infty$	$u \rightarrow 0$	$v \rightarrow 0$

Tabel IV

De vergelijkingen (IV.3) en (IV.4) zijn gekoppeld door de druk  $p$ , terwijl tevens  $u$  en  $v$  moeten voldoen aan de continuïteitsvergelijking.

Omdat (IV.3) en (IV.4) simultaan opgelost moeten worden, is het vinden van een analytische oplossing niet eenvoudig. In dit geval is echter ook de term  $2\eta \frac{\partial u}{\partial x}$  niet bekend, zodat een analytische oplossing op deze wijze niet mogelijk is.

We kunnen ook proberen het snelheidsveld te berekenen m.b.v. de stroomfunctie  $\psi$  in (IV.7). De begin- en randvoorwaarden worden met (IV.6) afgeleid uit die, welke voor  $u$  en  $v$  in tabel IV gegeven zijn.

Deze worden voor  $\psi$  :

Tabel V

tijd	plaats	begin en r.v.w.
$t \leq 0$	$\forall x, y$	$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
$t > 0$	$x=0$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$
$t > 0$	$x=a$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$
$t > 0$	$y=0$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -u_0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
$t > 0$	$y \rightarrow \infty$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0$

Hoewel alle begin- en randvoorwaarden bekend zijn, heb ik in de literatuur geen analytische oplossing voor  $\psi$  kunnen vinden.

De laatste mogelijkheid is een berekening van het snelheidsveld met de rotatie  $\omega$ . We moeten hiertoe (IV.9) oplossen, waarbij voldaan moet zijn aan de volgende begin- en randvoorwaarden:

tijd	plaats	begin en r.v.w.
$t \leq 0$	$\forall x, y$	$\omega = 0$
$t > 0$	$x=0$	$\omega = 0$
$t > 0$	$x=a$	$\omega = 0$
$t > 0$	$y=0$	$\omega = \frac{\partial u}{\partial y}(t)$
$t >$	$y \rightarrow \infty$	$\omega \rightarrow 0$

Tabel VI

Een tijdsafhankelijke oplossing is hier niet mogelijk, omdat op  $y=0$  het verloop van  $\partial u / \partial y$  in de tijd niet bekend is. Het probleem kan stationair opgelost worden, als op  $y=0$  de schuifspanning  $\gamma = \eta \partial u / \partial y$  bekend is.

In het voorgaande is geschetst welke overwegingen gebruikt moeten worden om een analytische oplossing te vinden voor het stromingsveld in een gebied met een tamelijk eenvoudige geometrie. Omdat dit al niet tot resultaten leidt kunnen we aannemen dat het niet mogelijk is een analytische oplossing van de in werkelijkheid optredende stroming te vinden, waarbij immers slechts een deel van de rand  $y=0$  een voorgeschreven snelheid heeft en waarbij de vrije rand niet recht is en tevens verandert in de tijd.

In de volgende paragrafen van dit hoofdstuk worden daarom enkele numerieke methoden besproken waarmee het snelheidsveld uitgerekend kan worden.

#### IV.3. De eindige elementen methode

##### IV.3.1. Inleiding

Een fysisch probleem kan dikwijls op twee manieren opgelost worden. De eerste is de differentiaalvergelijkingen die het verschijnsel beschrijven, op te lossen en de tweede is het probleem zo te beschrijven, dat een variatieprobleem ontstaat, waarbij het minimum van een functionaal  $X$  bepaald moet worden. Het minimaliseren van  $X$  houdt meestal in, dat de toestand met de laagste potentiële energie van het systeem bepaald wordt. Een exacte oplossing van beide methoden dient een gelijk resultaat op te leveren.

Voor het numeriek oplossen van de differentiaalvergelijkingen worden dikwijls eindige differentie methoden gebruikt, terwijl voor de methode van minimalisering van een functionaal de eindige elementen methode goed bruikbaar is.

De eindige elementen methode (Eng., Finite Element Method, afgekort FEM) heeft als voordeel t.o.v. de eindige verschil methode, dat er met onregelmatig gevormde roosters gewerkt kan worden, wat vooral bij grillige en/of veranderende randen een voordeel kan zijn. Een nadeel is dat bij de FEM een funktionaal gevonden moet worden, die equivalent is met de differentiaalvergelijkingen, wat vaak moeilijk en soms onmogelijk is. Er is daarom een methode ontwikkeld die de FEM rechtstreeks op een differentiaal vergelijking toepasbaar maakt en die bekend is als de Galerkin methode. Deze methode zullen we gebruiken bij de Stokes vergelijkingen. Voor de bestudering van het algemene gedeelte van de FEM is voornamelijk gebruik gemaakt van het boek van O.C. Zienkiewicz (6).

#### IV.3.2. De verdeling in elementen

Als we een differentiaal vergelijking willen oplossen in een domein B, dan kunnen we gebruik maken van variatierekening als aan een aantal voorwaarden is voldaan (6). Als we b.v. de functie  $\phi(x)$  in domein B willen bepalen, zoeken we naar die  $\phi(x)$ , welke de variatie integraal

$$\mathcal{X} = \int F(x, \phi, \phi_x) dx \quad (\text{IV.10})$$

minimaliseert (F is de funktionaal).

Een minimum wordt voor de  $\mathcal{X}$  gevonden als  $\mathcal{X}$  stationair is en als de tweede variatie van  $\mathcal{X}$  in  $\phi$  ( $\delta^2 \mathcal{X}[\phi]$ ) positief definitief is.  $\mathcal{X}$  is stationair als de eerste variatie van  $\mathcal{X}$  in  $\phi$  ( $\delta \mathcal{X}[\phi]$ ) gelijk aan nul is, waaraan voldaan kan worden door de differentiaalvergelijking van Euler op te lossen. Deze luidt voor (IV.10):

$$\frac{dF}{d\phi} - \frac{d}{dx} \frac{dF}{d\phi_x} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Voor funkties van meerdere variabelen of verschillende funkties van één variabele kunnen overeenkomstige vergelijkingen van Euler opgesteld worden. In ieder punt van domein B moet  $\phi$  nu zolang gevarieerd worden tot er een minimum bepaald is. Omdat  $\phi$  dan echter in een oneindig aantal punten gevarieerd moet worden is dit in de meeste gevallen niet mogelijk. Als we voor de oplossing van het probleem de FEM gebruiken, verdelen we het domein B in elkaar niet overlappende subdomeinen, de elementen. Een voorbeeld hiervan is gegeven in fig. IV.5 waar B verdeeld is in 9 elementen.

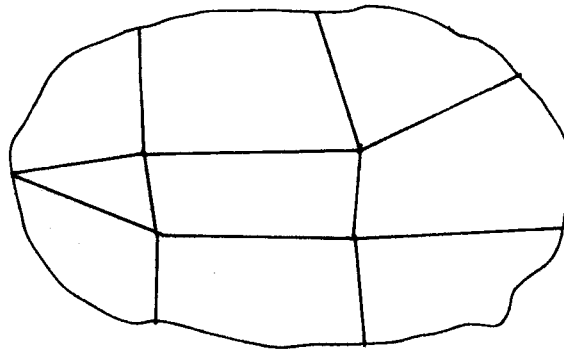


Fig. IV.5. Verdeling van een domein B in 9 elementen

De punten waar de randen van de elementen elkaar ontmoeten worden de knooppunten genoemd. In deze punten wordt nu  $\phi$  gevarieerd. Door middel van interpolatie funkties, die bepaald worden uit de geometrie van de elementen kan  $\phi$  overal binnen de elementen bepaald worden. Als  $\{\phi\}^e$  de waarden van  $\phi$  op de knooppunten van element e weergeeft en als  $[N]$  de interpolatiefunktie is, dan geldt binnen het element e:



$$\{\phi\} = [N] \{\phi\}^e \quad (\text{IV.12})$$

Als we in het tweedimensionale gebied B de funktie  $\phi(x, y)$  willen bepalen, dan verdelen we B in een gebied V en een rand S. De funktionaal wordt dan:

$$\begin{aligned} \chi = & \int_V F(x, y, \{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x} \{\phi\}, \frac{\partial}{\partial y} \{\phi\}, \dots) dV \\ & + \int_S G(x, y, \{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x} \{\phi\}, \frac{\partial}{\partial y} \{\phi\}, \dots) dS \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Om de oplossingen van (IV.13) met gebruikmaking van (IV.12) te doen convergeren, als we het domein in steeds kleinere elementen verdelen, moeten F en G één-éénduidig zijn en zich bij fysische problemen "netjes" gedragen. Hiertoe moet voldaan zijn aan voorwaarde 1:

De interpolatiefunkties [N] van een element moeten zodanig zijn, dat voor een bepaalde keuze van  $\{\phi\}^e$  alle waarden van  $\{\phi\}$  of zijn afgeleiden die in  $\mathcal{X}$  aanwezig zijn, ook gevonden worden, als in de limiet de afmeting van het element tot nul nadert.

Verder moet bij een verdeling in elementen de funktionaal X voldoen aan:

$$\chi = \sum_{i=1}^n \chi^i \quad (\text{IV.14})$$

waarbij n het aantal elementen is.

(IV.14) is geldig als de funkties G en F eindig blijven op de grenzen tussen de elementen. Dit wordt bereikt als de hoogste afgeleiden van  $\{\phi\}$  in F en G eindig zijn, waarvoor voldaan moet zijn aan

voorwaarde 2:

De interpolatiefunkties  $[N]$  moeten zo gekozen worden, dat op de grenzen van een element,  $\{\phi\}$  en zijn afgeleiden van één orde lager dan die, welke in F en G optreden, continu zijn.

In appendix B wordt als voorbeeld de interpolatiefunctie berekend die behoort bij een driehoekig element.

IV.3.3. De gewogen residu methode

Toepassing van de methode van minimalisering van een funktionaal vereist dat we een funktionaal kunnen vinden, die equivalent is met de op te lossen differentiaalvergelijking. Omdat dit niet altijd mogelijk is, is een methode ontwikkeld, waarbij de FEM direkt op de differentiaalvergelijking toegepast kan worden.

Stel dat in gebied V de funktie  $\{\phi\}$  voldoet aan:

$$A(\{\phi\}) = 0 \tag{IV.15}$$

met als randvoorwaarde op S

$$C(\{\phi\}) = 0 \tag{IV.16}$$

Als we nu een probeerfunctie  $\{\phi\}_a$ , die aan (IV.16) voldoet, schrijven als:

$$\{\phi\}_a = [N]\{\phi\} \tag{IV.17}$$

Dan is in het algemeen:

$$A(\{\phi\}_a) = R \neq 0 \tag{IV.18}$$

De beste oplossing van (IV.18) is die  $\{\phi\}_a$  waarbij het residu R minimaal wordt in alle punten van V. We kunnen dit bereiken door gebruik te maken van het feit, dat als R overal nul is, ook

$$\int_V W.R \, dV = 0 \quad (\text{IV.19})$$

waarbij W een willekeurige functie van de coördinaten is.

Als er N onbekende parameters  $\{\phi\}$  zijn, dan kunnen we, door n lineair onafhankelijke functies  $W_i$  te kiezen een even groot aantal simultane vergelijkingen

$$\int_V W_i R \, dV = \int_V W_i A([N] \{\phi\}) \, dV = 0 \quad (\text{IV.20})$$

opschrijven, waaruit alle n functies  $\{\phi\}$  gevonden kunnen worden.

Deze methode wordt "gewogen residu methode" genoemd, waarbij  $W_i$  de "gewichtsfunctie" is. Afhankelijk van het op te lossen probleem kan aan  $W_i$  de waarde 0 of 1 toegekend worden, of kan  $W_i$  gelijk gesteld worden aan de interpolatiefunctie  $N_i$ . Wordt dit laatste toegepast dan heet de methode de Galerkin methode.

#### IV.3.4. Tijdsafhankelijke problemen

We kunnen een tijdsafhankelijk probleem, waarbij de functie  $\phi$  een eerste afgeleide naar de tijd heeft, beschrijven met de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H\phi = 0 \quad (\text{IV.21})$$

(hierin is H een differentiaal operator).

Als we deze D.V. in een gebied V willen oplossen m.b.v. de FEM, dan kan (IV.21), gebruikmakend van de Galerkin methode, herschreven worden als:

$$\int_V N_L \left( \frac{\partial}{\partial t} [N] \{ \phi \} + H [N] \{ \phi \} \right) dV = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Om deze integraal op te kunnen lossen, moet een geschikte beschrijving gevonden worden voor de term

$$\frac{\partial}{\partial t} [N] \{ \phi \} \quad (\text{IV.23})$$

Een methode, die hier niet verder uitgewerkt wordt, is het gebied  $V$  te verdelen in eindige elementen van ruimte en tijd, waardoor de interpolatiefuncties ook tijdsafhankelijk worden, en (IV.23) overgaat in:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} [N(x, y, t)] \right) \{ \phi \} \quad (\text{IV.24})$$

Een andere methode is die, waarbij het gebied alleen in eindige elementen van de ruimte verdeeld wordt, en waarbij voor de tijdsafhankelijke deel de eindige verschil methode gebruikt wordt (7).

Door in eerste benadering voor  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_A$  (zie fig. IV.6) te schrijven:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_n - \phi_o}{\Delta t} \quad (\text{IV.25})$$

(met  $\phi_n = \phi_{\text{nieuw}}$  en  $\phi_o = \phi_{\text{oud}}$  )  
wordt. (IV.23)

$$\frac{[N]}{\Delta t} \left( \{ \phi \}_n - \{ \phi \}_o \right) \quad (\text{IV.26})$$

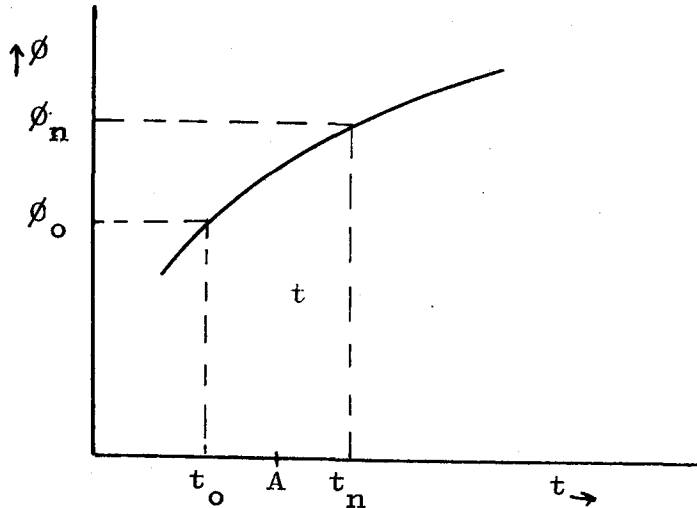


Fig. IV.6. De verandering van  $\phi$  als functie van de tijd

Omdat nu  $\partial\phi/\partial t$  berekend is in het midden van het tijdsinterval  $[t_0, t_n]$ , moeten we  $\phi$  in dat punt berekenen. In (IV.22) wordt nu  $\{\phi\}$  uit de tweede term vervangen door  $\{\phi\}^*$ , waarbij

$$\{\phi\}^* = \frac{1}{2} (\{\phi\}_0 + \{\phi\}_n) \quad (\text{IV.27})$$

met (IV,26, 27) wordt (IV.22)

$$\int_V N_i \left( \frac{[N]}{\Delta t} (\{\phi\}_n - \{\phi\}_0) + H[N] \{\phi\}^* \right) dV = 0 \quad (\text{IV.28})$$

of anders geschreven

$$\int_V N_i \left( \left( \frac{[N]}{\Delta t} + \frac{H[N]}{2} \right) \{\phi\}_n - \left( \frac{[N]}{\Delta t} - \frac{H[N]}{2} \right) \{\phi\}_0 \right) dV = 0 \quad (\text{VI.29})$$

Als de tijdstappen  $\Delta t$  klein genoeg zijn, kunnen we mogelijk volstaan met i.p.v.  $\{\phi\}^*$ , te nemen  $\{\phi\}_n$ , zodat (IV.28) wordt:

$$\int_V N_i \left( \frac{[N]}{\Delta t} (\{\phi\}_n - \{\phi\}_0 + H[N]\{\phi\}_n) \right) dV = 0 \quad (\text{IV.30})$$

IV.3.5. Toepassing van de FEM op een tweedimensionale Stokesstroming met instationaire traagheidskracht

De differentiaal vergelijkingen die in gebied V opgelost moeten worden om het stromingsveld te kennen zijn:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{IV.31})$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{IV.32})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.33})$$

Na verdeling van gebied V in eindige elementen en met gebruikmaking van de Galerkin methode, wordt (IV.31) voor knooppunt i:

$$\int_V N_i \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) dV = 0 \quad (\text{IV.34})$$

Met de 1e identiteit van Green

$$\left( \int_V \{ \varphi \Delta \varphi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi) \} dV = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \right)$$

wordt (IV.34):

$$\int_V \left( N_i \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \eta \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dV - \int_S \eta N_i \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (\text{IV.35})$$

(S is de rand van V en n is de naar buiten gerichte normaal).

Met gebruikmaking van de interpolatiefuncties en met (IV.30) wordt (IV.35):

$$\int_V \left( N_i \left( \frac{\partial [N]}{\partial t} \right) \rho (\{u\}_n - \{u\}_0) + \frac{\partial [N]}{\partial x} \{p\}_n + \gamma \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{u\}_n \right) dV - \int_S \eta N_i \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (\text{IV.36})$$

Als op de rand S,  $\partial u / \partial n = 0$  verdwijnt de oppervlakte integraal; als  $\partial u / \partial n$  een voorgeschreven waarde heeft, wordt deze in (IV.36) ingevuld.

Uitwerking van (IV.32) geeft een vergelijking die identiek is aan (IV.36).

Uitwerking van (IV.33) geeft

$$\int_V N_i \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u\}_n + \frac{\partial N}{\partial y} \{v\}_n \right) dV = 0 \quad (\text{IV.37})$$

We kunnen de variabelen in punt i voorstellen door:

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} u_{in} \\ u_{io} \\ v_{in} \\ v_{io} \\ p_{in} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

Waarmee het stelsel vergelijkingen beschreven kan worden als:

$$[K] \{\phi\} + \{F\} = 0 \quad (\text{IV.39})$$

Voor een element  $e$  wordt dan de matrix  $[k_{ij}]^e$

$$[k_{ij}]^e = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \rho A + \gamma B & -\rho A & 0 & 0 & N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & 0 & \rho A + \gamma B & -\rho A & N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} dV \quad (\text{IV.40})$$

waarin  $A = \frac{N_i N_j}{\Delta t}$  en  $B = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x}$

De vektor  $\{F\}$  wordt voor element  $e$

$$\{F_i\}^e = \gamma \int_{S^e} N_i \begin{Bmatrix} \partial u / \partial n \\ \partial v / \partial n \\ 0 \end{Bmatrix} dS \quad (\text{IV.41})$$

In appendix C is  $[k_{ij}]^e$  uitgewerkt voor een driehoekig element en is het stelsel vergelijkingen uitgewerkt voor een gebied dat verdeeld is in 6 rechthoekige, gelijkbenige driehoeken. De gediscretiseerde Stokes vergelijking die hierbij gevonden wordt heeft door de keuze van deze driehoeken een betrekkelijk eenvoudige vorm.

Het oplossen m.b.v. een computerprogramma van het stelsel vergelijkingen dat op deze wijze gevonden wordt, is bij Philips niet mogelijk, omdat er nog geen standaard programma's beschikbaar zijn die tijdsafhankelijke problemen kunnen verwerken.



In de volgende paragraaf wordt een methode besproken die als uitgangspunt een stationaire stroming van het glas rond het mes heeft.

IV.4. De methode van minimalisering van het verschil in opgenomen en afgegeven vermogen

IV.4.1. Inleiding

De entropietoename van een incompressibel medium wordt beschreven door:

$$\rho \theta \frac{ds}{dt} = \lambda \nabla^2 \theta + \varphi + 2\gamma D:D \quad (\text{IV.42})$$

De eerste term van het rechterlid is de entropie toename door warmtegeleiding, de tweede term is de entropie toename door warmtebronnen en de derde term is de entropie toename door viskeuze dissipatie. (D:D is het dubbel inwendig produkt van de deformatietensor D met zichzelf en is het spoor van  $(\vec{D} \cdot \vec{D})$

en gelijk aan:  $\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 D_{ik} D_{ki}$

Voor een twee dimensionale stroming is de deformatietensor D:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

Het viskeuze vermogen dP dat door een glasdeeltje met afmetingen dx dy wordt opgenomen is:

$$dP = 2\gamma D:D \, dx \, dy \quad (\text{IV.44})$$

zodat door de hele glasbolk een vermogen  $P$  wordt opgenomen, dat gelijk is aan:

$$P = 2\eta \int_0^h \int_0^l D:D \, dx \, dy \quad (\text{IV.45})$$

Het viskeuze vermogen van het glas wordt geleverd door het in het glas bewegende mes, dat via het glaskapje met een deel van het oppervlak aan het glas hecht.

Het mes ondervindt een schuifspanning:

$$(\tau_{xy})_{y=0} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{IV.46})$$

en de kracht op het mes is:

$$F = \eta \int_a^b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \, dx \quad (\text{IV.47})$$

Het door het mes geleverde vermogen is  $P=F \cdot U_0$ , dus

$$P = \eta U_0 \int_a^b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \, dx \quad (\text{IV.48})$$

Gelijkstelling van (IV.53) en (IV.56) geeft nu:

$$2 \int_0^h \int_0^l D:D \, dx \, dy - U_0 \int_a^b \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y=0} \, dx = 0 \quad (\text{IV.49})$$

(Op grond van de dimensie-analyse blijft de convectieve energietoename buiten beschouwing).

In de nu volgende paragrafen wordt een methode besproken om een snelheidsprofiel van het stromende glas te vinden dat aan (IV.49) voldoet.

Hierbij wordt het snelheidsprofiel voorgesteld door:

$$u = u_0 f(y, m) \cdot g(x, p) \text{ en } v = u_0 h(y, m) \cdot j(x, p)$$

waarin m en p parameters zijn, die berekend moeten worden.

Met gebruikmaking van een numeriek minimaliseringsprogramma, worden die waarden voor de parameters gezocht, waarbij zo goed mogelijk aan (IV.49) wordt voldaan.

Om een indruk van de juistheid van het model te krijgen, wordt de kracht F met de gevonden snelheid berekend en wordt deze vergeleken met de kracht K die experimenteel bepaald wordt.

IV.4.2. De snelheidsprofielen

In een eerste benadering voor de snelheidsprofielen wordt de gekromde vrije rand (zie fig. IV.3) vervangen door een rechte rand, die een hoek van 45° met de x-as maakt (fig. IV.7)

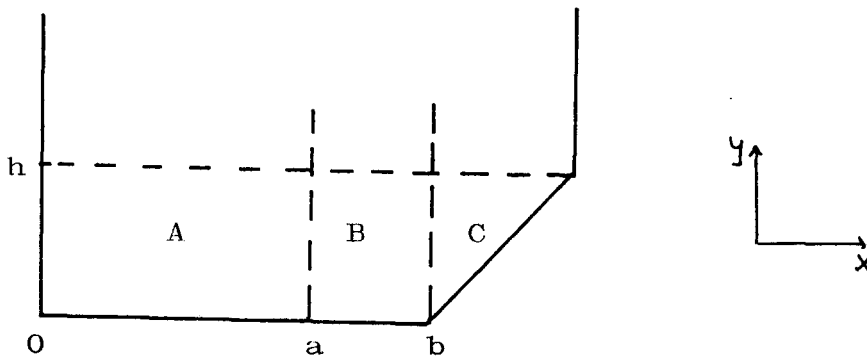


Fig. IV.7. Model van de glasbalk, zoals gebruikt bij de minimaliseringsmethode.

De snelheid wordt globaal beschreven. (Dit kan vooral in de buurt van de mespunt aanleiding geven tot afwijkingen, omdat daar grote locale verstoringen kunnen optreden).

Het mes, dat een snelheid  $-U_0$  heeft, raakt het glas tussen a en b. Indien we kiezen voor een glashechting tot aan de punt van het mes treedt op  $x=a$  een singulariteit op in  $\partial u/\partial y$ . Om dit te voorkomen wordt aangenomen dat er een van de plaats x afhankelijke slip langs het oppervlak optreedt, zodanig dat op  $x=a: (\tau_{yx})_{y=0} = 0$  en op  $x \neq a: (\tau_{yx})_{y=0} \neq 0$

Vanwege de verschillende randen en randvoorwaarden is een onderverdeling gemaakt in drie gebieden A, B en C waarin de snelheid beschreven wordt. Op de grenzen van A met B ( $x=a$ ) en B met C ( $x=b$ ) moeten aansluitvoorwaarden gelden voor  $u, v, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ .

Vergelijking (IV.49) kan nu herschreven worden als:

$$2 \sum_{i=1}^3 \int_0^h \int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 dx dy - U_0 \int_a^b \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{y=0} dx = 0 \quad (\text{IV.50})$$

Hierin is

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad x_3 = b, \quad x_4 = b+y$$

$$u_1, v_1 = u_A, v_A$$

$$u_2, v_2 = u_B, v_B$$

$$u_3, v_3 = u_C, v_C$$

De randvoorwaarden zijn:

gebied A:

$$x = 0 : u = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$y = 0 : u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.51})$$

$$y = h : u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

gebied B:

$$y = 0 : v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = f(x)$$

(IV.52)

$$y = h : u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Voor de bepaling van de randvoorwaarden in gebied C op  $y=x-b$ , gaan we over naar een nieuw coördinatenstelsel (fig. IV.8) dat zijn oorsprong heeft in  $(b,0)$ .

Hierin is:

$$x' = (x - b + y) / \sqrt{2} \quad \text{en}$$

$$y' = (-x + b + y) / \sqrt{2}$$

(IV.53)

In dit stelsel is:

$$\begin{aligned} u' &= (u+v)/\sqrt{2} && \text{en} \\ v' &= (-u+v)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

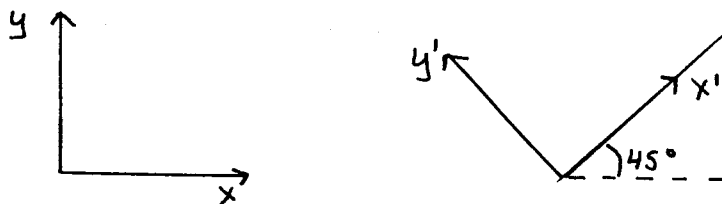


Fig. IV.8.

De randvoorwaarden worden dan voor gebied C

$$\begin{aligned} y' = 0 & : \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0 \\ y = h & : u = 0 \\ & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

Als aansluitvoorwaarde wordt geëist, dat de snelheden en hun afgeleiden op  $x=a$  en  $x=b$  continu zijn.

Bij de bepaling van het snelheidsprofiel nemen we aan dat op een lijn waar  $y = \text{constant}$ , de hoogste snelheid in  $x$ -richting gevonden wordt op  $x=b$ .

Deze snelheid kunnen we beschrijven door:

$$u_{x=b} = u_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m \quad (\text{IV.56})$$

( $m$  is een nog onbekende parameter).

Deze snelheid moet afnemen in beide x-richtingen.

Dan is dus:

$$u = u_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m f(x) \quad (\text{IV.57})$$

met  $0 \leq f(x) \leq 1$

(IV.57) voldoet aan de r.v.w. van gebied B voor  $y=0$ , n.l.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \neq 0.$$

Dat betekent tevens dat (IV.57) niet geldig is in gebied A. Snelheden die in A en B voldoen kunnen we weergeven door:

$$u_A = u_0 k(y) \cdot g(x) \quad (\text{IV.58})$$

en

$$u_B = u_0 \left(k(y) \cdot g(x) + \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m f(x)\right) \quad (\text{IV.59})$$

Deze laatste uitdrukking is mogelijk, omdat in de (lineaire) Stokes-vergelijkingen snelheden mogen worden opgeteld.

De functies  $f(x)$  en  $g(x)$  moeten aan de volgende eisen voldoen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{op } x=b \\ f(x) &= 0 && \text{op } x=a \\ \frac{df(x)}{dx} &= 0 && \text{op } x=a \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 && \text{op } x=0 \\ g(x) &= 0 && \text{op } x=b \\ \frac{dg(x)}{dx} &= 0 && \text{op } x=b \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

In gebied C stellen we het verloop van  $u$  voor door de uitdrukking:

$$u_c = u_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m l(x) \quad (\text{IV.62})$$

Dan moet  $l(x)$  voldoen aan:

$$\begin{aligned} l(x) &= 1 \quad \text{op } x=b \\ \frac{dl(x)}{dx} &= \frac{df(x)}{dx} \quad \text{op } x=b \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

Aan de laatste voorwaarde van (IV.63) kunnen we voldoen door  $l(x)$  en  $f(x)$  zo te kiezen, dat hun afgeleiden in  $x=b$  gelijk aan nul zijn.

De snelheid  $v$  in  $y$ -richting wordt bepaald m.b.v. de continuïteitsvergelijking (IV.5) zodat:

$$v = - \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + r(x) \quad (\text{IV.64})$$

Voor de verschillende gebieden betekent dit:

gebied A

$$v_A = -u_0 \left\{ \frac{dg(x)}{dx} \int k(y) dy + r_1(x) \right\} \quad (\text{IV.65})$$

gebied B

$$v_B = -u_0 \left\{ \frac{dg(x)}{dx} \int k(y) dy + \frac{df(x)}{dx} \int \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m dy + r_2(x) \right\} \quad (\text{IV.66})$$

gebied C

$$v_C = -u_0 \left\{ \frac{dl(x)}{dx} \int \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m dy + r_3(x) \right\} \quad (\text{IV.67})$$



In (IV.65) is  $r_1(x)=0$  omdat  $V_A=0$  op  $y=0$ . Om dezelfde reden is  $r_2(x)=0$  in (IV.66).

In (IV.67) wordt  $r_3(x)$  bepaald uit (IV.53), (IV.54) en (IV.55).

De funktie  $k(y)$  moet voldoen aan:

$$\begin{aligned} k(y) &= 0 \quad \text{op } y=h \\ k(y) &= 1 \quad \text{op } y=0 \\ \int k(y) dy &= 0 \quad \text{op } y=0 \\ \frac{dk(y)}{dy} &= 0 \quad \text{op } u=0 \text{ en } y=h \end{aligned} \tag{IV.68}$$

De volgende funkties voldoen aan de gestelde rand- en aansluitvoorwaarden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2\right)^P \\ g(x) &= \left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right)^P \left(\frac{x}{b}\right)^{2P} \\ l(x) &= \left(1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2\right)^P \end{aligned} \tag{IV.69}$$

$$k(y) = \frac{2}{m-2} \left(\frac{y}{h}\right)^m - \frac{m}{m-2} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + 1$$

$$r_3(x) = \frac{4P}{h} \int_0^x \left(\frac{x-b}{c-b}\right) \left(1 - \frac{x-b}{c-b}\right)^m \left(1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2\right)^{P-1} dx$$

De afleiding van  $k(y)$  en  $r_3(x)$  is gegeven in appendix D.

Hiermee zijn de snelheidsprofielen in de verschillende gebieden bepaald. Deze zijn:

gebied A

$$u_A = u_0 \left( \frac{2}{m-2} \left( \frac{y}{h} \right)^m - \frac{m}{m-2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 + 1 \right) \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^p \left( \frac{x}{b} \right)^{2p}$$

(IV.70)

$$v_A = \frac{u_0 2 p h}{b} \left( \frac{2}{(m-2)(m+1)} \left( \frac{y}{h} \right)^{m+1} - \frac{m}{3(m-2)} \left( \frac{y}{h} \right)^3 + \frac{y}{h} \right) \\ * \left( - \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^p \left( \frac{x}{b} \right)^{2p-1} + \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^{p-1} \left( \frac{x}{b} \right)^{2p+1} \right)$$

gebied B

$$u_B = u_A + u_0 \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^m \left( 1 - \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right)^p$$

(IV.71)

$$v_B = v_A - \frac{u_0 2 p h}{(m+1)(a-b)} \left( \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^{m+1} - 1 \right) \left( 1 - \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right)^{p-1} \left( \frac{x-b}{a-b} \right)$$

gebied C

$$u_c = u_0 \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^m \left( 1 - \left( \frac{x-b}{c-b} \right)^2 \right)^p$$

(IV.72)

$$v_c = u_0 2 p \left( - \frac{(x-b)}{(m+1)(c-b)} \left( 1 - \left( \frac{x-b}{c-b} \right)^2 \right)^{p-1} \left( \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^{m+1} - 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{h} \int_0^x \left( \frac{x-b}{c-b} \right) \left( 1 - \frac{x-b}{c-b} \right)^m \left( 1 - \left( \frac{x-b}{c-b} \right)^2 \right)^{p-1} dx \right)$$

De eerste term uit (IV.50) kan nu bepaald worden met de afgeleiden van de funkties uit (IV.70), (IV.71) en (IV.72).

Deze zijn:

gebied A:

$$\frac{\partial u_A}{\partial x} = \frac{2p u_0}{b} \left( \frac{2}{m-2} \left( \frac{y}{h} \right)^m - \frac{m}{m-2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 + 1 \right) \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^p \left( \frac{x}{b} \right)^{2p-1} - \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^{p-1} \left( \frac{x}{b} \right)^{2p+1}$$

$$\frac{\partial u_A}{\partial y} = \frac{u_0}{h} \left( \frac{2m}{m-2} \left( \frac{y}{h} \right)^{m-1} - \frac{2m}{m-2} \left( \frac{y}{h} \right) \right) \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^p \left( \frac{x}{b} \right)^{2p} \quad (\text{IV.73})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_A}{\partial x} &= \frac{2ph u_0}{b^2} \left( \frac{2}{(m-2)(m+1)} \left( \frac{y}{h} \right)^{m+1} - \frac{mh}{3(m-2)} \left( \frac{y}{h} \right)^3 + \left( \frac{y}{h} \right) \right) \\ &\quad * \left( - (2p-1) \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^p \left( \frac{x}{b} \right)^{2p-2} + 2p \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^{p-1} \left( \frac{x}{b} \right)^{2p} \right. \\ &\quad \left. + (2p+1) \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^{p-1} \left( \frac{x}{b} \right)^{2p} - 2(p-1) \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right)^{p-2} \left( \frac{x}{b} \right)^{2p+2} \right) \end{aligned}$$

gebied B:

$$\frac{\partial u_B}{\partial x} = \frac{\partial u_A}{\partial x} - \frac{2u_0 p}{(a-b)^2} \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^m \left( 1 - \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right)^{p-1} (x-b)$$

$$\frac{\partial u_B}{\partial y} = \frac{\partial u_A}{\partial y} - \frac{m u_0}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^{m-1} \left( 1 - \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right)^p \quad (\text{IV.74})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_B}{\partial x} &= \frac{\partial v_A}{\partial x} - \frac{2ph u_0}{(m+1)(a-b)^2} \left( \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^{m+1} - 1 \right) \left( -2(p-1) \left( 1 - \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right)^{p-2} \right. \\ &\quad \left. * \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right)^{p-1} \right) \end{aligned}$$

gebied C:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_c}{\partial x} &= -\frac{2p\mu_0}{h^2} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m \left(1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2\right)^{p-1} (x-b) \\ \frac{\partial u_c}{\partial y} &= -\frac{m\mu_0}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{m-1} \left(1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2\right)^p \quad (\text{IV.75}) \\ \frac{\partial v_c}{\partial x} &= -2p\mu_0 \left(\frac{1}{(m+1)(c-b)} \left(\left(1 - \frac{y}{h}\right)^{m+1} - 1\right)\right) \left(1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2\right)^{p-1} \\ &\quad - 2(p-1) \left(1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2\right)^{p-2} \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2 - \frac{2}{h^2} \left(1 - \frac{x-b}{c-b}\right)^m \\ &\quad * \left(1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2\right)^{p-1} \end{aligned}$$

De berekening van de parameters m en p gebeurt met het optimaliseringsprogramma "OPTPAC 3". De gebruikte methode is die van Hooke en Jeeves (zie appendix F).

Deze methode zoekt naar een zo laag mogelijke funktiewaarde. In dit proces zijn we echter geïnteresseerd in een oplossing, waarbij de funktiewaarde zo dicht mogelijk bij nul ligt. Door nu de absolute waarde van (IV.50) te berekenen is nul de laagst mogelijke funktiewaarde geworden.

## V. De snijkrachtmetingen

### V.1. Meetmethode

Tijdens het knippen worden verschillende krachten op de messen uitgeoefend, nl. een normaalkracht op de voorkant van het mes, een schuifkracht op de bovenkant, het gewicht van de glasbalk boven het mes en een versnellingskracht door de veranderende snelheid van het mes.

Om de krachten die op een mes werken te kunnen bepalen is een wijziging aangebracht in de bevestiging van de messen. In de normale bevestiging is het mes op een mesdrager gemonteerd, die op een meshouder geplaatst is (fig. V.1). In de opstelling waarmee de kracht gemeten wordt, zijn tussen mesdrager en meshouder drie ringvormige krachtopnemers geplaatst (fig. V.2).

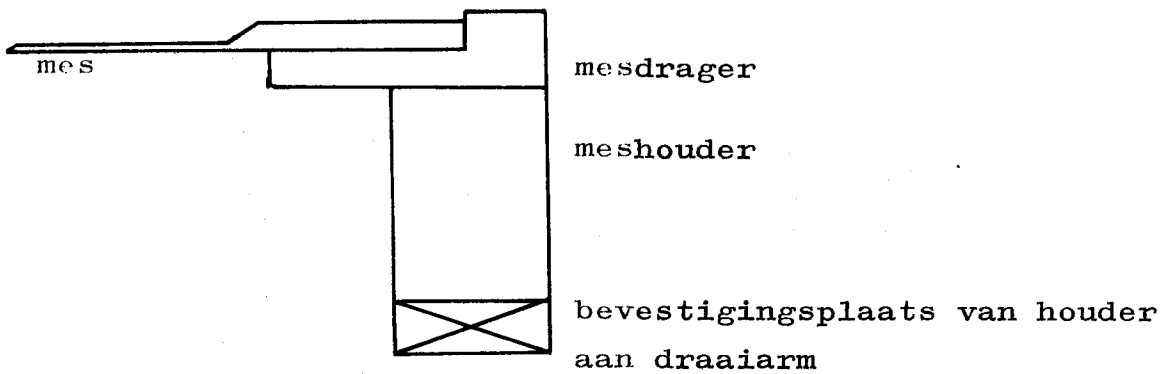


Fig. V.1. Oorspronkelijke mesbevestiging.

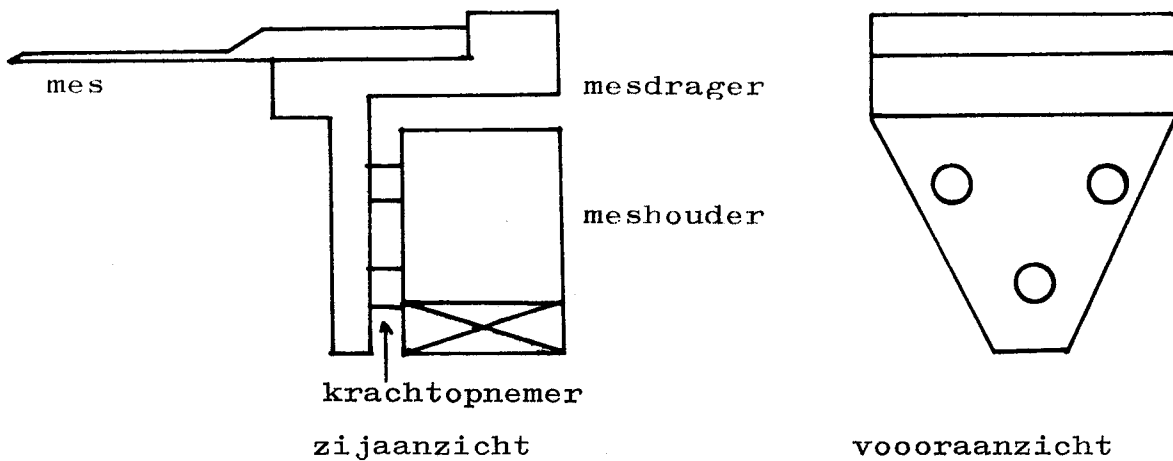


Fig. V.2. Mesbevestiging met krachtopnemers.

Als we het aangrijpingspunt van de kracht op het midden van de punt van het mes veronderstellen, dan zijn in fig. V.3. de krachten getekend die op het mes en de krachtopnemers werken. De versnellingskracht wordt buiten beschouwing gelaten. (zie §V.2.).

De kracht  $F$  op het mes is ontbonden in een horizontale kracht  $F_H$ , een verticale kracht  $F_V$  en een dwarskracht  $F_D$ . De horizontale krachten op de krachtopnemers zijn  $A_1$ ,  $A_2$  en  $B$ . De verticale krachten zijn  $A_1'$ ,  $A_2'$ , en  $B'$ . (De dwarskrachten op de opnemers en het mes zijn niet getekend).

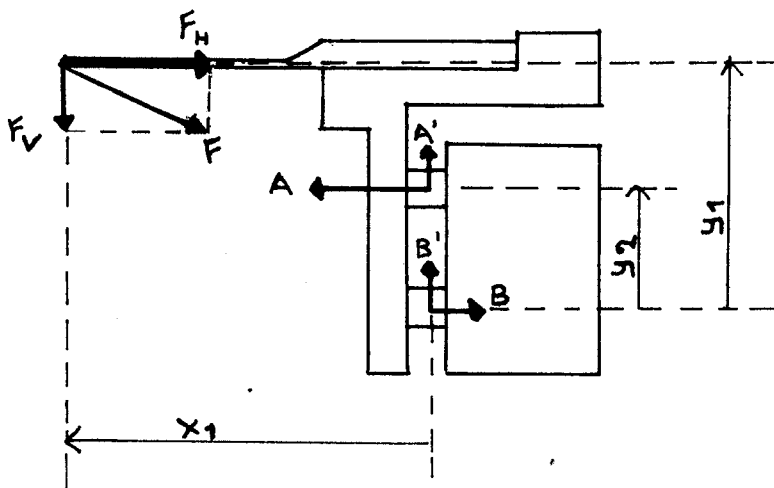


Fig. V.3. De horizontale en verticale krachten op de messen en op de krachtopnemers

De horizontale kracht  $F_H$  wordt bepaald uit:

$$\sum F_x = 0 \tag{V.1}$$

waarmee

$$F_H = A_1 + A_2 - B \tag{V.2}$$

Omdat de krachtopnemers, zoals ze hier bevestigd zijn slechts horizontale krachten kunnen meten, worden de vertikale en de dwarskracht bepaald uit:

$$\sum M_{x_i, y_i, z_i} = 0 \quad (V.3)$$

waarbij  $M_{x_i, y_i, z_i}$  het moment van een kracht  $K$  is t.o.v. een willekeurig punt  $x_i, y_i, z_i$ .

Als we voor de vertikale kracht de plaats waar de krachtopnemer B bevestigd is, als draaipunt beschouwen, dan is met (V.3)

$$F_V x_1 + (A_1 + A_2) y_2 - F_H y_1 = 0 \quad (V.4)$$

zodat met (V.2)

$$F_V = \frac{(A_1 + A_2)(y_1 - y_2) - B y_1}{x_1} \quad (V.5)$$

In fig. V.4. is de situatie getekend die betrekking heeft op de dwarskracht  $F_D$  die op een mes uitgeoefend wordt.

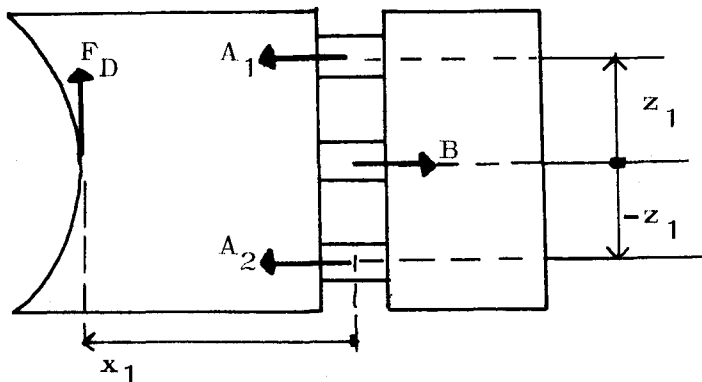


Fig. V.4. De dwarskracht op de messen.

Met (V.3) wordt  $F_D$  bepaald door:

$$-F_D x_1 + A_1 z_1 - A_2 z_1 = 0 \quad (V.6)$$

of

$$F_D = \frac{(A_1 - A_2) z_1}{x_1} \quad (V.7)$$

Omdat, zoals uit de volgende paragraaf zal blijken, zowel druk- als trekkrachten gesommeerd kunnen worden gemeten, kan  $F_H$  in 1 meting van  $A_1 + A_2 + (-B)$  bepaald worden. Om  $F_V$  te bepalen moeten  $A_1 + A_2$  en  $B$  apart gemeten worden en voor  $F_D$  moeten  $A_1$  en  $A_2$  apart worden bepaald.

Voor beide meshouders is:

$$y_1 = 82 \text{ mm}$$

$$y_2 = 58 \text{ mm}$$

$$z_1 = 20 \text{ mm}$$

terwijl voor het ondermes:

$$x_1 = 121 \text{ mm}$$

en voor het bovenmes:

$$x_1 = 105 \text{ mm.}$$

## V.2. De krachtopnemers

De gebruikte krachtopnemers zijn kwartskristal-meetschijven van het merk Kistler, type 9011. Ze zijn ringvormig, met een inwendige diameter van 6,5 mm, een uitwendige diameter van 14 mm en een dikte van 8 mm.

In fig. V.5. is een deel van de doorsnede van een krachtopnemer getekend.



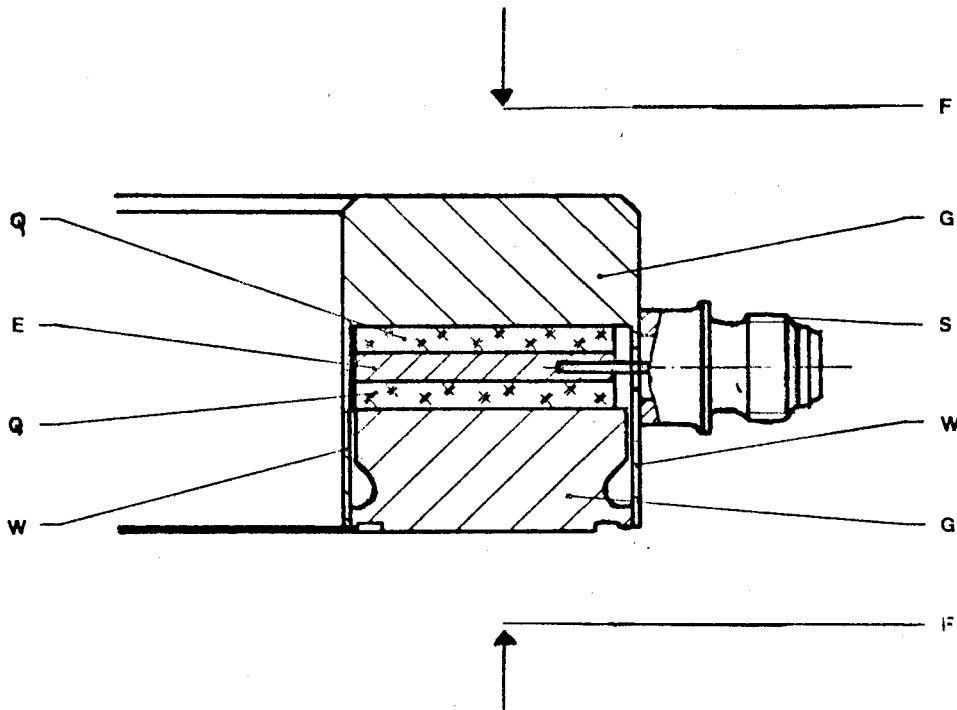


Fig. V.5. Doorsnede van een krachtopnemer.

- Q = kwartskristalschijf
- E = elektrode
- W = elastische wand
- G = omhulling
- S = stekker
- F = op de schijf uitgeoefende kracht.

Wordt de schijf Q samengedrukt door een kracht F, dan geeft deze een elektrische lading af, welke door de elektrode E die met de stekker S is verbonden, wordt opgenomen. Een drukkracht op de schijf veroorzaakt een negatieve lading, die evenredig is met de kracht. Wordt de drukkracht opgeheven nadat eerst, door kortsluiten van de stekker aansluiting, de lading afgevoerd is, dan wordt door de schijf een positieve lading afgegeven. Dit maakt het mogelijk om zowel druk- als trekkrachten te meten.

(Bij het meten van trekkrachten moet dus aan de kracht-opnemer een voorspanning gegeven zijn). De kracht-opnemer wordt verbonden met een ladingsversterker (Kistler, type 5001) welke een uitgangsspanning heeft die evenredig is met de door de krachtopnemer afgegeven lading. Bij parallelschakeling van meerdere opnemers worden de ladingen opgeteld, zodat de ladingsversterker de som van de krachten meet. Door de krachtopnemers wordt tijdens het knippen zowel de door het glas uitgeoefende kracht gemeten als ook de op het mes werkende versnellingskracht. (De snelheid en versnelling van de messen is gegeven in appendix E). Om de meting onafhankelijk van de versnellingskracht te kunnen uitvoeren wordt op de meshouders een versnellingsopnemer (Kistler, type 808A) gemonteerd. Deze geeft een lading af die evenredig is met de versnelling welke de opnemer ondervindt. Deze lading wordt eveneens door een ladingsversterker in een spanning omgezet. De uitgangen van de ladingsversterkers worden verbonden met een galvo-versterker (Kistler, type 5211A) die een stroom levert, welke evenredig is met het verschil van de spanningen op de ingangen. Deze stroom wordt gemeten m.b.v. een U.V. oscillograaf.

De ladingsversterker van de versnellingsopnemer wordt nu zo afgeregeld, dat er bij een loze knip (knipbeweging zonder dat er glas geknipt wordt) geen stroom gemeten wordt. Wordt daarna tijdens het glasknippen gemeten, dan is de uitslag op de U.V. oscillograaf evenredig met de door het glas veroorzaakte kracht.

Om de grootte van de gemeten kracht te kunnen bepalen moeten de krachtopnemers vooraf geijkt worden. Dit gebeurt door de stroom te meten, die veroorzaakt wordt als op het mes een bekende kracht uitgeoefend wordt.

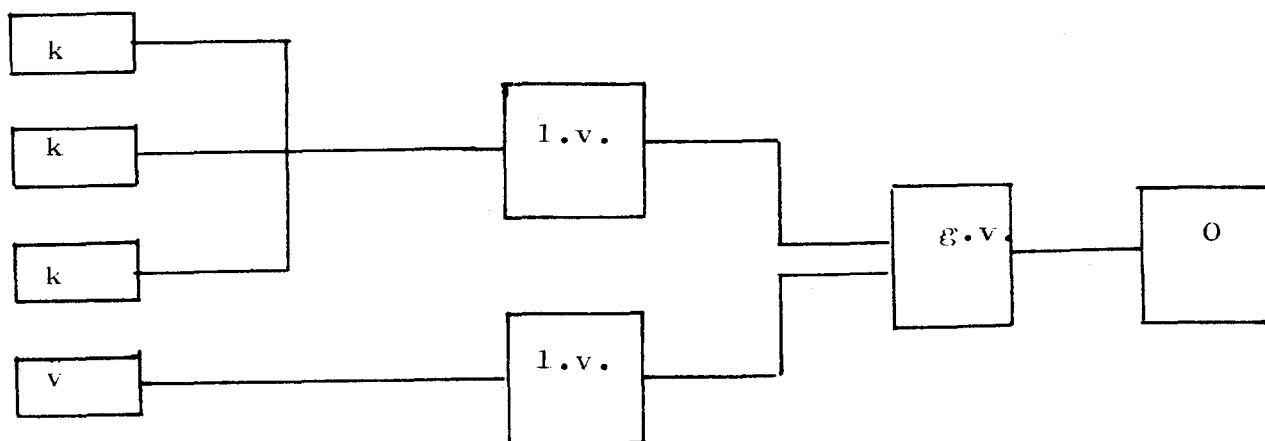


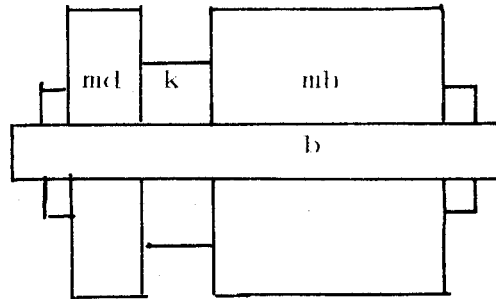
Fig. V.6. Aansluitschema van kracht- en versnellingsopnemers.

- k = krachtopnemers
- v = versnellingsopnemer
- l.v. = ladingsversterker
- g.v. = galvoversterker
- O = U.V. oscillograaf.

### V.3. De bevestiging van de krachtopnemers

De bevestiging van een krachtopnemer tussen de mesdrager en meshouder is schematisch weergegeven in fig. V.7.

voor Fig. V.7. z.o.z.



k = krachtopnemer  
 md= mesdrager  
 mh= meshouder  
 b = bevestigingsbout

Fig. V.7. Schematische bevestiging van de kracht-opnemers

Omdat we er naar streven dat een zo groot mogelijk deel van de kracht op de messen door de krachtopnemers opgenomen en gemeten wordt, moet de veerconstante van de bevestigingsbouten aanmerkelijk minder zijn dan die van de krachtopnemers. Bij gegeven materiaaleigenschappen wordt de veerconstante van de bout bepaald door zijn diameter en lengte. De diameter van de bout wordt i.v.m. een goede positionering van de kracht-opnemer 0.1 mm kleiner gekozen dan de inwendige diameter van de laatste, welke 6,5 mm bedraagt.

De veerconstante van de krachtopnemers is  $S = 1,8 \cdot 10^6$  N/mm.

De verkorting van een opnemer bij een drukkracht van  $F$  Newton bedraagt:

$$\Delta l_k = \frac{F}{S} = 5,56 \cdot 10^{-7} F \quad \text{mm} \quad (\text{v.8})$$

De verkorting van een bout bij een drukkracht van  $F$  Newton bedraagt:

$$\Delta l_b = \frac{F}{EA} l_b \quad (\text{v.9})$$

(E is de elasticiteitsmodulus, A is doorsnede,  $l_b$  is oorspronkelijke lengte).

Met  $E = 21 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$  en  $A = 32,17 \text{ mm}^2$  wordt (V.9)

$$\Delta l_b = 1,48 \cdot 10^{-7} l_b F \quad \text{mm} \quad (\text{V.10})$$

Indien we het acceptabel vinden dat 10% van de kracht door de bout wordt opgenomen, dan wordt

$$\frac{\Delta l_b}{\Delta l_b + \Delta l_k} \times 100\% = 90\% \quad (\text{V.11})$$

van de kracht opgenomen door de krachtopnemers.

In dit geval is:

$$9 \Delta l_k = l_b \quad (\text{V.12})$$

en met (V.8), (V.10) en (V.12) is nu de minimum boutlengte:

$$l_b = 33,8 \text{ mm}$$

Door de afmetingen van mesdrager, meshouder en krachtopnemer is  $l_b$  echter minimaal 48 mm, zodat ruimschoots aan de eis voldaan wordt.

Door de krachtopnemer wordt met deze bout 92.7% van de kracht F gemeten.

## VI. Resultaten en discussie

### VI.1. De parameters m en p

Er is m.b.v. het optimaliseringsprogramma "OPTPAC 3" een optimale waarde voor de parameters m en p berekend. Bij de berekening zijn (zie fig. 5) de volgende afstanden langs de x-as gekozen:

oa = 3,5 cm, ab = 1,5 cm, terwijl de hoogte h is gesteld op h = 2 cm.

Voor de uitvoering van het programma is een startwaarde vereist. Hiervoor is achtereenvolgens genomen: m = p = 3, m = p = 5 en m = p = 7. (Het is niet noodzakelijk dat m en p gelijke startwaarden krijgen). De startwaarde m = p = 7 heeft geen absoluut minimum opgeleverd. Bij de startwaarden m = p = 3 en m = p = 5 is binnen de afbreekfout ( $\Delta m = \Delta p = 1 \cdot 10^{-3}$ ) een absoluut minimum in het verschil van vermogen gevonden voor

$$\begin{aligned} m &= 8,04 \\ p &= 2,00. \end{aligned}$$

Met deze parameters is, bij een messnelheid  $U_0 = 4$  m/s en  $\eta = 1500$  Pas het verschil in vermogen per lengte-eenheid:

$$|\Delta P'| = |P'_{mes} - P'_{glas}| = 3,3 \cdot 10^{-1} \text{ N/s}$$

Het door het mes geleverde vermogen per lengte-eenheid is  $18,6 \cdot 10^3$  N/s, zodat:

$$\frac{\Delta P}{P_{mes}} = 1,8 \cdot 10^{-5}$$

Met een (geschatte) mesbreedte van 10 cm en rekening houdend met glashechting aan beide kanten van het mes, is de op het mes uitgeoefende kracht:

$$F = 947 \text{ N}$$

en het door het mes geleverde vermogen is:

$$P = 3790 \text{ Nm/s}$$

De bij de gevonden parameters behorende snelheidsprofielen zijn getekend in fig. VI.1. Uit het profiel van de snelheid  $u$  blijkt dat door de grote waarde van  $m$ , de  $x$ -component van snelheid in  $y$ -richting snel afneemt.

Vanwege de globale beschrijving van de snelheid en de verdeling in drie gebieden, is een gedetailleerde bespreking van het snelheidsprofiel niet erg zinvol, met name waar het de stroming rond de punt van het mes betreft.

De  $x$ -component van de snelheid, ingevuld in de Stokes vergelijking:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

bepaalt de druk  $p = p(x, y)$  in het hele gebied, gebruikmakend van de 1e randvoorwaarde voor een vrije rand (blz. 24), die voor de rand  $y = x - b$ , uitgedrukt in het  $x'$ - $y'$  stelsel luidt:

$$p + \eta \sqrt{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = 0$$

Als het snelheidsprofiel overeenkomt met het profiel dat gevonden zou zijn als oplossing van de Stokes vergelijkingen, dan moet de afgeleide  $\partial p / \partial y$  van de hierboven gevonden druk  $p$ , oplossing zijn van de Stokes vergelijking voor de verticale component van de

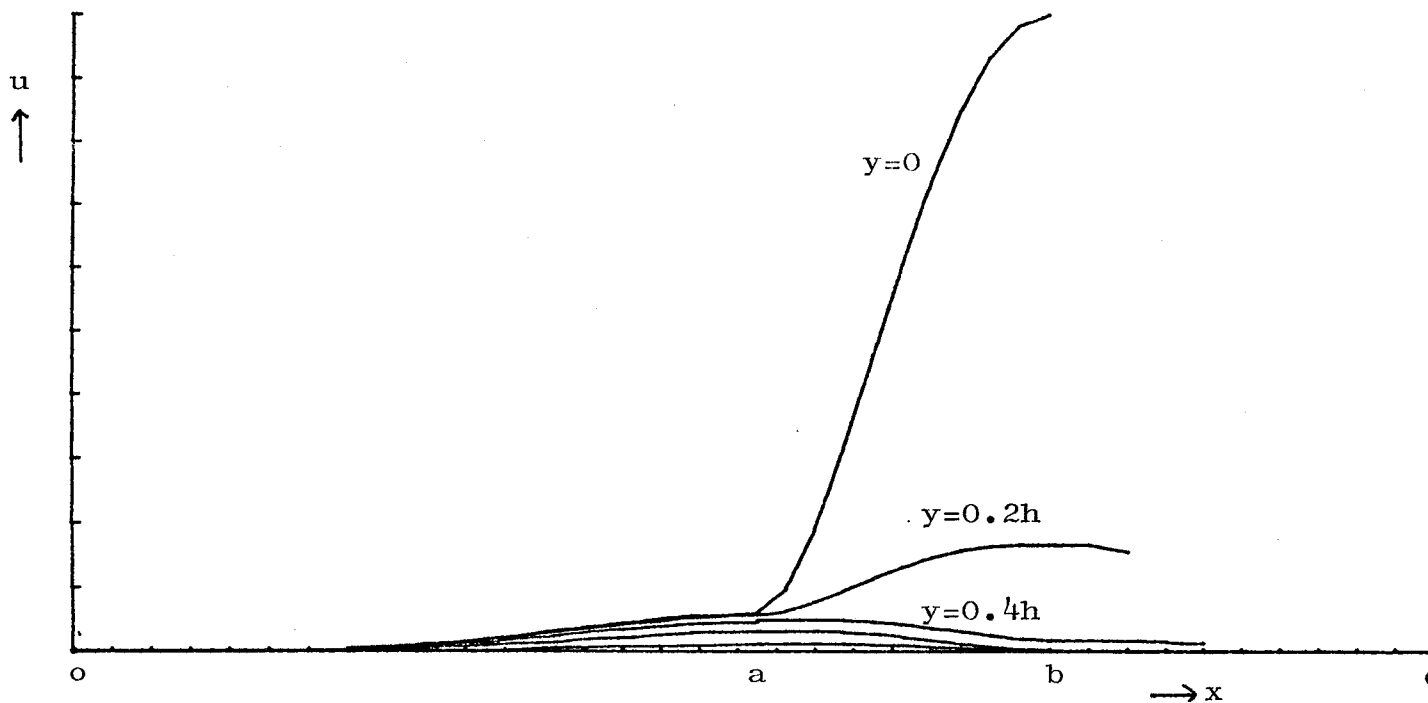
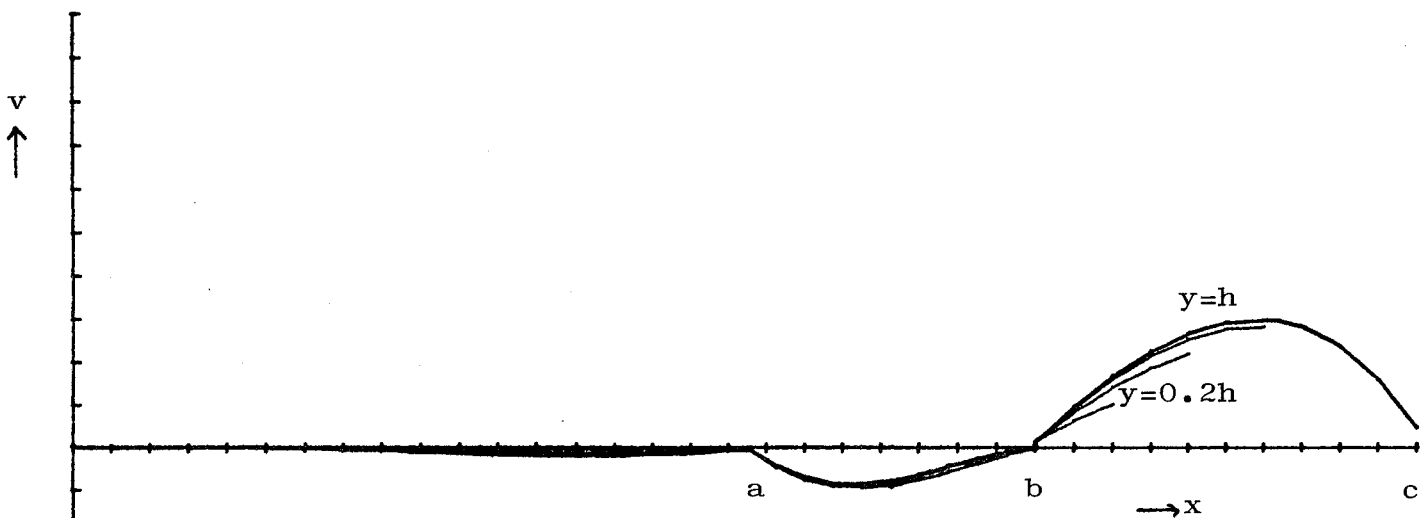


Fig.VI1a.  $u$  als funktie van  $x$ .



b Fig.VI1b  $v$  als funktie van  $x$



snelheid:

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 .$$

## VI.2. De krachtmetingen

De messen met krachtopnemers zijn gemonteerd, zoals in hoofdstuk V beschreven is.

Er zijn op dit moment echter nog geen krachtmetingen uitgevoerd, zodat er geen vergelijking van de gemeten en berekende kracht mogelijk is.

Een uitspraak over de relevantie van het model kan dus nog niet gedaan worden.

## VII. Conclusies

Het onderzoek naar methodieken, waarmee de glasstroming rond het mes beschreven kan worden, heeft enig inzicht gegeven in de problemen die hierbij optreden.

De belangrijkste oorzaken van deze problemen zijn: het glas is een hoogviskeuze vloeistof, de stroming is instationair en er is een vrije rand aanwezig. In de insnoerfase is een numerieke oplossing van de instationaire Stokes vergelijkingen mogelijk, als gebruik gemaakt wordt van de eindige elementenmethode. Hoewel er nu nog geen standaard computerprogramma beschikbaar is, kan in de (nabije?) toekomst mogelijk het programma MARC uitkomst bieden. Bij een verdeling in driehoekige, gelijkbenige elementen kan de gediscrètiseerde Stokes vergelijking gebruikt worden, die in appendix C beschreven is.

De minimaliseringmethode heeft enerzijds een beeld gegeven van de mate waarin de stroming zich uitstrekt in het glas en anderszijds een orde van grootte van de kracht op de messen en het door de messen geleverde vermogen. Een vergelijking met de werkelijke (gemeten) kracht op de messen is helaas niet mogelijk geweest. Het model kan belangrijk verbeterd worden door een beschrijving van het stromingsprofiel, zonder dat een verdeling in 3 gebieden gemaakt wordt. Een beperking van het model blijft echter de stationaire beschrijving van de stroming, in een stadium dat deze als instationair beschouwd moet worden.

Voor de snijfase is geen methode gevonden om de kracht op de messen te kunnen bepalen. Het is niet mogelijk gebleken (in analogie met de kracht op een bol met en zonder slip langs het oppervlak) de kracht op een cilinder met slip langs het oppervlak te berekenen.

Lijst van gebruikte symbolen

	eenheid
C	$J \cdot kg^{-1} K^{-1}$
F, K	N
P	$J \cdot s^{-1}$
p	$N \cdot m^{-2}$
T, t	s
$U_0$	$m \cdot s^{-1}$
u, v	$m \cdot s^{-1}$
$\eta$	$N \cdot m^{-2} \cdot s$
$\rho$	$kg \cdot m^{-3}$
$\theta$	K
$\psi$	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\omega$	$s^{-1}$
$\tau$	$N \cdot m^{-2}$
$\gamma$	$N \cdot m^{-1}$
$\lambda$	$J \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$
$\pi$	dimensieloos produkt

Referenties

1. H. Reijnen  
Interne Mededeling, juni 1977
2. J.M. Burgers  
Sec.rep. on viscosity and plasticity  
Noord Holl. Uitg. Mij, 1938, Amsterdam
3. G.K. Batchelor  
An introduction to fluid dynamics  
University Press, Cambridge 1967
4. F. Booth, e.a.  
Glas Techn. 13, 1 febr. 1972
5. J.V. Wehausen e.a.  
Surface Waves, Handbuch der Physik, IX, p. 446 e.v.  
Springer, Wien
6. O.C. Zienkiewicz  
The finite element method in engineering science  
McGraw Hill, Londen 1971
7. L.J. Segerlind  
Applied finite element analysis,  
John Wiley & Sons inc., New York 1977
8. J. Happel e.a.  
Low Reynolds number hydrodynamics  
Noordhof Int. Publ., Leiden 1965

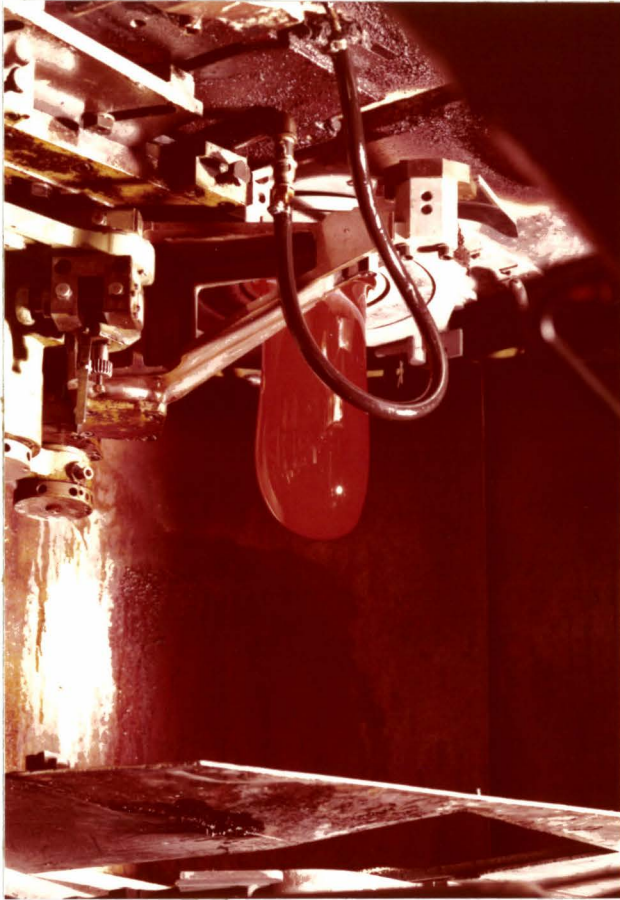


Foto 1  
Uit de oven  
komende glas-  
druppel



Foto 2  
Glasdruppel  
vlak na het  
knippen



Foto 3

De vallende glasdruppel, met aan de bovenkant de nieuwe knip



Foto 4

De glasportie die na het knippen achterblijft en waarop de oude knip is te zien

Appendix A

De kracht op een cilinder met slip langs het oppervlak

Door Batchelor (3), blz. 229 t/m 246, wordt de kracht bepaald die een starre bol, een vloeistofbol en een starre cilinder ondervinden, als deze zich in een Stokes stroming met snelheid  $U$  bevinden.

De kracht op een vloeistofbol is:

$$F = -4\pi\eta U \frac{\eta + \frac{3}{2}\eta'}{\eta + \eta'} \quad (A1)$$

Hier is  $\eta$  de viscositeit van de omringende vloeistof en  $\eta'$  de viscositeit van de vloeistofbol.

Als  $\eta' \rightarrow \infty$ , is

$$F = -6\pi\eta U \quad (A2)$$

en de kracht is dus gelijk aan de kracht op een starre bol.

Als  $\eta' = 0$ , is

$$F = -4\pi\eta U \quad (A3)$$

Deze kracht is gelijk aan die, welke door Happel (7), blz. 126, berekend is, als de kracht op een bol met 100% slip langs het oppervlak.

Om te onderzoeken of in analogie met deze beschouwing voor een bol, ook de kracht op een cilinder waarlangs 100% slip optreedt, berekend kan worden, wordt eerst de kracht op een vloeistofcilinder berekend. (Verklaring van de symbolen aan het eind van deze appendix).



starre cilinder

vloeistof cilinder

$$\frac{p-p_0}{\eta} = \frac{C \vec{u} \cdot \vec{x}}{r^2} \quad (A4)$$

$$\frac{p'-p_0'}{\eta'} = C' \vec{u} \cdot \vec{x} \quad (A4')$$

$$\vec{\omega} = \frac{C \vec{u} \times \vec{x}}{r^2} \quad (A5)$$

$$\vec{\omega}' = -\frac{1}{2} C' \vec{u} \times \vec{x} \quad (A5')$$

$$\psi = u \sin \theta \cdot f(r) \quad (A6)$$

$$\psi = \vec{u} \sin \theta \cdot f'(r) \quad (A6')$$

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} = \omega \psi \quad (A7)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} = \omega' \psi \quad (A7')$$

$$\omega \psi = \frac{-C u \sin \theta}{r} \quad (A8)$$

$$\omega' \psi = -\frac{1}{2} C' u r \sin \theta \quad (A8')$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} = \frac{C}{r} \quad (A9)$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} = -C' r \quad (A9')$$

$$f(r) = \frac{1}{2} C r \log\left(\frac{r}{a}\right) + r + \frac{1}{4} C \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \quad (A10)$$

$$f(r) = \frac{1}{8} C' a^2 (r-a) + r \quad (A10')$$

$$\vec{u} = \vec{u} + C \vec{u} \left( \frac{1}{2} \log\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (A11)$$

$$\vec{u}' = \vec{u} + C' \vec{u} \frac{a^2}{8} + \frac{C' \vec{x} \cdot \vec{u} \cdot \vec{x}}{r^2}$$

$$+ C \vec{x} \cdot \vec{u} \cdot \vec{x} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (A11) \quad * \left( -\frac{1}{8} C' \frac{a^2}{r} \right) \quad (A11')$$

Op  $x = a$  gelden dynamische aansluitcondities, n.l. de schuifspanning die door beide vloeistoffen op elkaar uitgeoefend wordt, is gelijk en tegengesteld. Dit resulteert in:

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{x} \times \vec{u}' \quad \text{op } r = a \quad (A12)$$

Deze voorwaarde toegepast op (A10) en (A10') levert:

$$\vec{x} \times u = \vec{x} \times \vec{u}' + C' \vec{x} \times \vec{u} \frac{a^2}{8} \quad (A13)$$

of op  $r = a$ :

$$a = a + C' \frac{a^3}{8} \quad (A14)$$

Dus  $C = 0$  voor iedere  $\eta$ .

De kracht op een vloeistofcilinder kan dus niet op deze wijze bepaald worden.

Verklaring symbolen:

$U$  = snelheid hoofdstroming

$u$  = verstoorde snelheid rond de cilinder

$a$  = diameter van de cilinder

$r$  = afstand tot de cilinder

$C$  = constante voor de starre cilinder

$C'$  = constante voor de vloeistof cilinder

$\omega_y$  = azimuthale component van  $\omega$

Appendix B

De interpolatiefunctie voor een driehoekig element

Met de interpolatiefunctie wordt de waarde van  $\phi$  binnen een element bepaald, als deze op de knooppunten bekend is. Welke interpolatiefunctie genomen moet worden hangt af van de geometrie van het element. In het nu volgende wordt voor een driehoekig element de interpolatiefunctie afgeleid. Als we het domein B in driehoeken verdelen, maken we geen gebruik van cartesische coördinaten, maar van een set genormaliseerde coördinaten  $L_i, L_j, L_k$  voor een driehoek  $i, j, k$  (fig. B1). Dit houdt in, dat in punt  $i$ ,  $L_i=1$  en  $L_j=L_k=0$ .

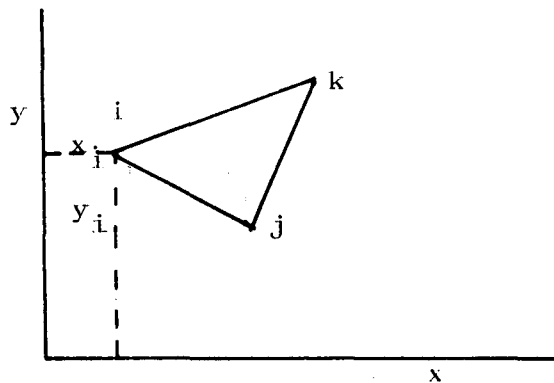


Fig. B1. Driehoekig element.

We nemen aan dat  $L_i$  lineair verloopt van 1 tot 0 als we van  $i$  naar  $k$  of van  $i$  naar  $j$  gaan. Dit betekent dat  $L_i$  overal binnen de driehoek bepaald is en dat er lijnen zijn met constante  $L_i$  (fig. B2a). We kunnen  $L_i$  behorende bij een punt  $p$  binnen de driehoek (fig. B2b) berekenen uit:

$$L_i = \frac{\text{opp } \Delta pjk}{\text{opp } \Delta Ljk} \quad (\text{B1})$$

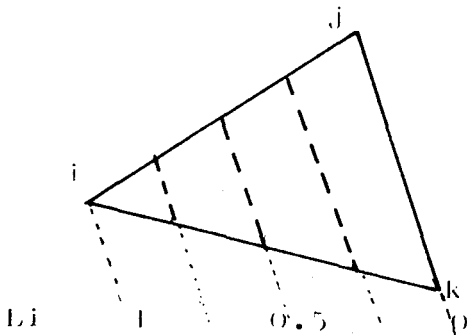


Fig. B2a

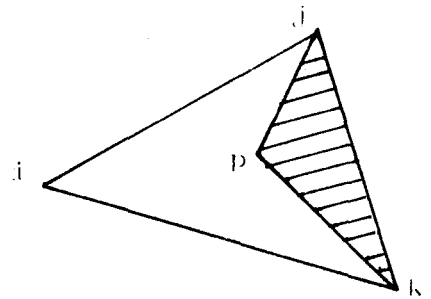


Fig. B2b

De punten binnen de driehoek in fig. B1 zijn door het volgende lineaire verband tussen de cartesische coördinaten en  $L_i$ ,  $L_j$  en  $L_k$  gedefinieerd:

$$\begin{aligned} x &= L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k \\ y &= L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k \\ 1 &= L_i + L_j + L_k \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

De oplossing voor  $L_i$ ,  $L_j$  en  $L_k$  is dan:

$$\begin{aligned} L_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2A \\ L_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2A \\ L_k &= (a_k + b_k x + c_k y) / 2A \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

met:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \text{opp. } \Delta \text{ } ijk \quad (\text{B4})$$

$$\begin{aligned} \text{en } a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

(opm.:  $a_j$  en  $a_k$  kunnen verkregen worden uit cyclische verwisseling van  $i$ ,  $j$  en  $k$ ).

Voor de driehoek van fig. B1 zijn de interpolatiefuncties  $N$  gelijk aan de oppervlaktecoördinaten, dus:

$$N_i = L_i, \quad N_j = L_j \quad \text{en} \quad N_k = L_k \quad (\text{B6})$$

Als we in de driehoek ook nog knooppunten aanbrengen op de zijden is (B7) niet geldig. Ook bij een andere configuratie zoals b.v. bij een rechthoek vinden we een ander (en dus ingewikkelder) verband tussen  $N$  en  $L$ .

Indien we op de knooppunten van fig. B1 de grootte  $\vec{\phi} = \vec{\phi}(x, y)$  kennen en we willen in punt  $f$   $\vec{\phi}$  bepalen, dan is:

$$\vec{\phi}_f = (\phi_{fx}, \phi_{fy}) \quad (\text{B7})$$

En met (B2,3) en (IV.12) is nu

$$\phi_{fx} = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x_f + c_i y_f) \phi_{ix} + (a_j + b_j x_f + c_j y_f) \phi_{jx} + (a_k + b_k x_f + c_k y_f) \phi_{kx} \} \quad (\text{B8})$$

en

$$\phi_{fy} = \frac{1}{2A} \{ a_i + b_i x_f + c_i y_f \} \phi_{iy} + (a_j + b_j x_f + c_j y_f) \phi_{jy} + (a_k + b_k x_f + c_k y_f) \phi_{ky} \} \quad (\text{B9})$$

Appendix CDe Stokes vergelijkingen uitgewerkt voor driehoekige elementen

Voor een driehoekig element is

$$\text{en } N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A \quad (C1)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}, \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{b_j}{2A}, \quad \text{enz.}$$

Tevens is

$$\int_{V^e} N_i dV^e = \frac{1}{3} A$$

en

$$\int_{V^e} N_i N_j dV^e = \begin{cases} \frac{1}{6} A & \text{als } i=j \\ \frac{1}{2} A & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

Hiermee wordt  $[k_{ij}]^e$

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \rho P + \gamma \varphi & -\rho P & 0 & 0 & \frac{b_j}{\delta_j} \\ 0 & 0 & \rho P + \gamma \varphi & -\rho P & \frac{c_j}{\delta_j} \\ \frac{b_j}{\delta_j} & 0 & \frac{c_j}{\delta_j} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C2)$$

$$\text{met } P = \frac{A(1 + \delta_{ij})}{12 \Delta E} \quad \text{en } \varphi = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4A}$$

Laten we nu (IV.39) vereenvoudigen door  $\{F\}=0$  te veronderstellen, dan krijgen we na uitwerking van de eerste rij van (C2):

$$\frac{2}{4A} \begin{pmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{in} \\ u_{jn} \\ u_{kn} \end{pmatrix} + \frac{AP}{12\Delta k} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{in} - u_{io} \\ u_{jn} - u_{jo} \\ u_{kn} - u_{ko} \end{pmatrix} \quad (C3)$$

$$+ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{pmatrix}$$

De tweede rij van (C2) levert een identieke uitdrukking op voor de verticale snelheidscomponent  $v$ .

Uitwerking van de derde rij geeft:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{in} \\ u_{jn} \\ u_{kn} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{in} \\ v_{jn} \\ v_{kn} \end{pmatrix} \quad (C4)$$

Stel nu dat we het gebied  $V$  waarin we  $u$  en  $v$  willen bepalen verdelen in rechthoekige, gelijkbenige driehoeken. Een deel van dit gebied is getekend in fig. C1.

Voor een driehoek  $ijk$  volgens fig. C3 is:

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_k = -l & c_i &= x_k - x_j = 0 \\ b_j &= y_k - y_i = l & c_j &= x_i - x_k = -l \\ b_k &= y_i - y_j = 0 & c_k &= x_j - x_i = l \end{aligned} \quad (C5)$$

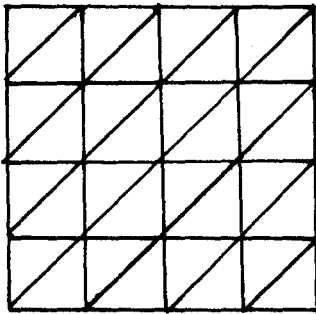


Fig. C1

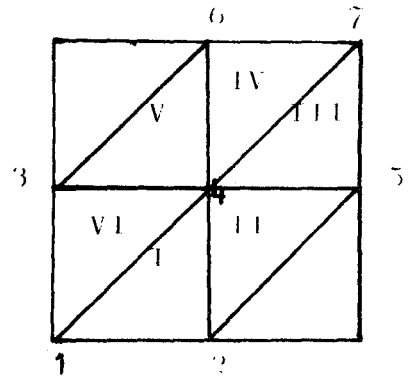


Fig. C2

Verdeling gebied V in driehoeken

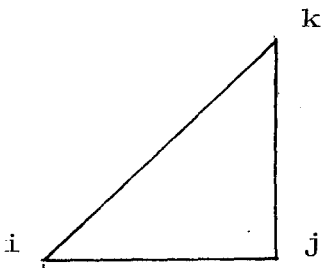


Fig. C3

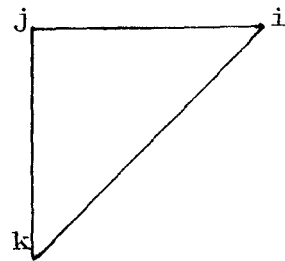


Fig. C4

Indicering van de punten van de driehoeken uit fig. C2



Voor een driehoek ijk volgens fig. C4 is:

$$\begin{array}{ll} b_i = 1 & c_i = 0 \\ b_j = -1 & c_j = 1 \\ b_k = 0 & c_k = -1 \end{array} \quad (C6)$$

Het oppervlak A van ijk is  $l^2/2$ .

Voor elk van de 6 driehoeken kunnen we nu (C3) opschrijven.

Dit levert ons 6 stelsels van 3 uitdrukkingen op, welke volgens het principe van FEM gesommeerd moeten worden tot 1 vergelijking in de horizontale snelheden in de punten

1 t/m 7. We beschouwen in de praktijk een groter gebied

dan de 6 genoemde driehoeken. Achtereenvolgens laten we

dan punt 4 alle knooppunten van het gebied V doorlopen. Door

nu in (C3) voor iedere driehoek slechts die uitdrukking te

beschouwen welke betrekking heeft op punt 4, vinden we voor dat punt de gediscretiseerde Stokes vergelijking. Dit komt

erop neer, dat in de integraal  $\int_V N_4 A \{ \phi \} dV$  slechts die driehoeken een bijdrage leveren tot de integraal, waarvoor

$N_4 \neq 0$ . Dit zijn juist de 6 driehoeken die punt 4 gemeenschappelijk hebben.

De uitdrukkingen voor de driehoeken I t/m VI zijn resp.:

$$\frac{\eta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ u_{4n} \end{pmatrix} + \frac{l^2 \beta}{24 \Delta t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1n} - u_{10} \\ u_{2n} - u_{20} \\ u_{4n} - u_{40} \end{pmatrix} + \frac{l}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ p_{4n} \end{pmatrix} \quad (C7)$$

$$\frac{\eta}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{5n} \\ u_{4n} \\ u_{2n} \end{pmatrix} + \frac{l^2 \beta}{24 \Delta t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{5n} - u_{50} \\ u_{4n} - u_{40} \\ u_{2n} - u_{20} \end{pmatrix} + \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{5n} \\ p_{4n} \\ p_{2n} \end{pmatrix} \quad (C8)$$

$$\frac{\eta}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{4n} \\ u_{5n} \\ u_{7n} \end{pmatrix} + \frac{l^2 \beta}{24 \Delta t} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{4n} - u_{40} \\ u_{5n} - u_{50} \\ u_{7n} - u_{70} \end{pmatrix} + \frac{l}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{4n} \\ p_{5n} \\ p_{7n} \end{pmatrix} \quad (C9)$$

$$\frac{\eta}{2} (0 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} u_{7n} \\ u_{6n} \\ u_{4n} \end{pmatrix} + \frac{l^2 \rho}{24 \Delta t} (1 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} u_{7n} - u_{70} \\ u_{6n} - u_{60} \\ u_{4n} - u_{40} \end{pmatrix} + \frac{l}{2} (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} p_{7n} \\ p_{6n} \\ p_{4n} \end{pmatrix} \quad (C10)$$

$$\frac{\eta}{2} (-1 \ 2 \ -1) \begin{pmatrix} u_{3n} \\ u_{4n} \\ u_{6n} \end{pmatrix} + \frac{l^2 \rho}{24 \Delta t} (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} u_{3n} - u_{30} \\ u_{4n} - u_{40} \\ u_{6n} - u_{60} \end{pmatrix} + \frac{l}{2} (-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} p_{3n} \\ p_{4n} \\ p_{6n} \end{pmatrix} \quad (C11)$$

$$\frac{\eta}{2} (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} u_{4n} \\ u_{3n} \\ u_{1n} \end{pmatrix} + \frac{l^2 \rho}{24 \Delta t} (2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} u_{4n} - u_{40} \\ u_{3n} - u_{30} \\ u_{1n} - u_{10} \end{pmatrix} + \frac{l}{2} (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} p_{4n} \\ p_{3n} \\ p_{1n} \end{pmatrix} \quad (C12)$$

De vereenvoudigde vergelijking (IV.39) kan geschreven worden als:

$$\sum_{e=1}^6 [k_{ij}]^e \{ \phi \} = 0 \quad (C13)$$

Met (C7) t/m (C12) wordt (C13)

$$\frac{\eta}{2} (-2u_2 - 2u_3 + 8u_4 - 2u_5 + 2u_6) + \frac{l^2 \rho}{12 \Delta t} (u_1' + u_2' + u_3' + 6u_4' + u_5' + u_6' + u_7') + \frac{l}{2} (-p_1 + p_2 - 2p_3 + 2p_5 - p_6 + p_7) = 0 \quad (C14)$$

(In (C14) is  $u_i' = u_{in} - u_{i0}$ ).

Verg. (C14) is de gediscretiseerde impliciete vergelijking voor de Stokes vergelijking in punt 4. Met deze vergelijking kan voor ieder ander punt in een gebied  $V$  een identieke vergelijking opgesteld worden. Is echter punt 4 een punt op de rand dan is (C14) niet geldig, maar wordt een andere uitdrukking gevonden.

Bij een verdeling van een gebied in  $n$  punten worden op deze wijze  $n$  vergelijkingen met  $n$  onbekenden opgesteld.

## Appendix D

De funktie  $k(y)$ 

Er zijn 5 randvoorwaarden voor  $k(y)$ ,  $\int k(y) dy$  en  $\frac{d(k(y))}{dy}$

Deze funkties kunnen dus uit 5 vergelijkingen met 5 onbekenden bepaald worden.

Stel nu:

$$k(y) = ay^m + by^2 + cy + d \quad (D1)$$

dan is:

$$K(y) = \int k(y) dy = \frac{a}{m+1} y^{m+1} + \frac{b}{3} y^3 + \frac{c}{2} y^2 + dy + e \quad (D2)$$

$$k'(y) = \frac{dk(y)}{dy} = m a y^{m-1} + 2by + c \quad (D3)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$K(y) = 0 \quad \text{voor} \quad y = 0$$

$$K(y) = 0 \quad \text{voor} \quad y = h$$

$$k(y) = 1 \quad \text{voor} \quad y = 0$$

$$k'(y) = 0 \quad \text{voor} \quad y = 0$$

$$k'(y) = 0 \quad \text{voor} \quad y = h$$

Hieruit volgt dat  $c=e=0$ , en  $d=1$ .

Dit resulteert in de vergelijkingen

$$ah^m + bh^2 + 1 = 0 \quad (D4)$$

$$mah^{m-1} + 2bh = 0 \quad (D5)$$

Oplossen van (D4) en (D5) geeft:

$$a = \frac{2}{(m-2)h^m}$$

en

$$b = \frac{-m}{(m-2)h^2}$$

De drie vergelijkingen worden nu:

$$k(y) = \frac{2}{m-2} \left(\frac{y}{h}\right)^m - \frac{m}{m-2} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + 7 \quad (D6)$$

$$K(y) = \frac{2h}{(m-2)(m+1)} \left(\frac{y}{h}\right)^{m+1} - \frac{mh}{3(m-2)} \left(\frac{y}{h}\right)^3 + h \left(\frac{y}{h}\right) \quad (D7)$$

$$k'(y) = \frac{2m}{(m-2)h} \left(\frac{y}{h}\right)^{m-1} - \frac{2m}{(m-2)h} \left(\frac{y}{h}\right) \quad (D8)$$

De functie  $r_3(x)$

De functie  $r_3(x)$  wordt bepaald door de randvoorwaarde op de vrije rand. Deze luidt in het  $x'$ - $y'$ -stelsel (zie fig. IV.9)

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0$$

Met (IV.54) worden  $u'$  en  $v'$  bepaald:  
( $c-b$  wordt vervangen door  $h$ )

$$u' = \frac{u+v}{\sqrt{2}} = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \left\{ \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m \left(1 - \left(\frac{x-b}{h}\right)^2\right)^p - \frac{2p(x-b)}{(m+1)h} \left(\left(1 - \frac{y}{h}\right)^{m+1} - 1\right) \right. \\ \left. * \left(1 - \left(\frac{x-b}{h}\right)^2\right)^{p-1} + r_3(x) \right\} \quad (D9)$$

$$v' = \frac{-u+v}{\sqrt{2}} = \frac{-u_0}{\sqrt{2}} \left\{ \left(1 - \frac{y}{h}\right)^m \left(1 - \left(\frac{x-b}{h}\right)^2\right)^P + \frac{2p(x-b)}{(m+1)h} \left(\left(1 - \frac{y}{h}\right)^{m+1} - 1\right) \right. \\ \left. * \left(1 - \left(\frac{x-b}{h}\right)^2\right)^{P-1} - r_3(x) \right\} \quad (D10)$$

Uitgedrukt in de coördinaten  $x'$  en  $y'$  worden (D9) en (D10)  
(met  $c = \sqrt{2}$ )

$$u' = \frac{u_0}{c} \left\{ \left(1 - \frac{x'+y'}{ch}\right)^m \left(1 - \left(\frac{x'-y'}{ch}\right)^2\right)^P - \frac{2p(x'-y')}{ch(m+1)} \left(\left(1 - \frac{x'+y'}{ch}\right)^{m+1} - 1\right) \right. \\ \left. * \left(1 - \left(\frac{x'-y'}{ch}\right)^2\right)^{P-1} + \frac{1}{c} r_3(x'-y') \right\} \quad (D11)$$

$$v' = -\frac{u_0}{c} \left\{ \left(1 - \frac{x'+y'}{ch}\right)^m \left(1 - \left(\frac{x'-y'}{ch}\right)^2\right)^P + \frac{2p(x'-y')}{ch(m+1)} \left(\left(1 - \frac{x'+y'}{ch}\right)^{m+1} - 1\right) \right. \\ \left. * \left(1 - \left(\frac{x'-y'}{ch}\right)^2\right)^{P-1} - \frac{1}{c} r_3(x'-y') \right\} \quad (D12)$$

Differentiëren van (D11) en (D12) naar resp.  $y'$  en  $x'$  en daarna optellen geeft:

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{u_0}{c} \left\{ 8p \frac{(x'-y')}{c^2 h^2} \left(1 - \frac{x'+y'}{ch}\right)^m \left(1 - \left(\frac{x'-y'}{ch}\right)^2\right)^{P-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial r_3(x'-y')}{\partial y'} - \frac{\partial r_3(x'-y')}{\partial x'} \right) \right\} \quad (D13)$$

zodat op de rand  $y'=0$ :

$$\left. \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right|_{y'=0} = \frac{u_0}{c} \left\{ \frac{8p}{c^2 h^2} \left( 1 - \frac{x'}{ch} \right)^m \left( 1 - \left( \frac{x'}{ch} \right)^2 \right)^{p-1} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial r_3(x'-y')}{\partial y'} - \frac{\partial r_3(x'-y')}{\partial x'} \right) \right\}_{y'=0} = 0 \quad (D14)$$

$r_3(x'-y')$  is een polynoom in  $x'-y'$ , dus

$$\frac{\partial r_3(x'-y')}{\partial x'} = \frac{d r_3(x'-y')}{d(x'-y')} \quad \text{en} \quad \frac{\partial r_3(x'-y')}{\partial y'} = -\frac{d r_3(x'-y')}{d(x'-y')}$$

Tevens kan in (D14)  $x'$  vervangen worden door  $x'-y'$ , waarmee (14) teruggetransformeerd kan worden naar het  $x-y$  stelsel. Dit levert ons de vergelijking:

$$\frac{d r_3}{d x} = \frac{4p}{h^2} (x-b) \left( 1 - \frac{(x-b)}{h} \right)^m \left( 1 - \left( \frac{(x-b)}{h} \right)^2 \right)^{p-1} \quad (D15)$$

$$\text{en } r_3(x) = \frac{4p}{h^2} \int (x-b) \left( 1 - \frac{(x-b)}{h} \right)^m \left( 1 - \left( \frac{(x-b)}{h} \right)^2 \right)^{p-1} dx + C \quad (D16)$$

De integratieconstante  $C$  is 0, omdat  $v_c=0$  op  $x=b$ .

Appendix E

Snelheid, versnelling en afgelegde weg van de messen

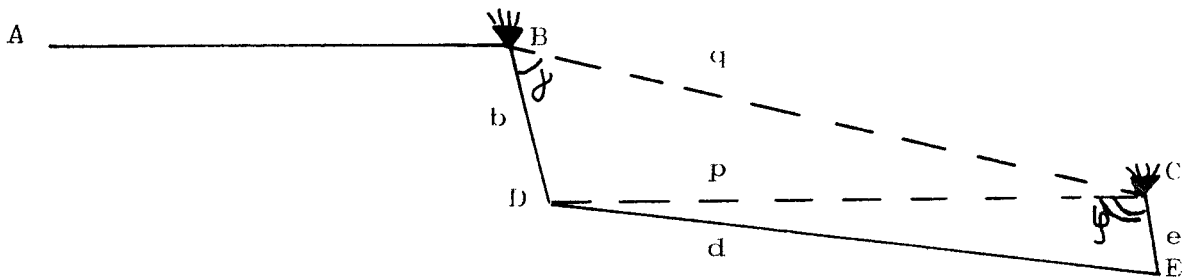


Fig. E1

In fig. E1 is de bevestiging van het mes aan het draai-  
mechanisme schematisch weergegeven.

Het mes is bevestigd in A, aan een arm a die een starre  
verbinding heeft met de arm b. In punt B is de arm ab  
draaibaar. In punt D is b scharnierend verbonden met  
de arm d, welke in E scharnierend is verbonden met de  
kruk e. De punten B en E liggen vast, de punten D en  
E niet.

Tijdens een knipbeweging wordt de kruk e over  $270^\circ$  gedraaid,  
waarna het mes weer op zijn oorspronkelijke plaats terug  
is. In een volgende beweging (de z.g. loze knip) draait  
de kruk weer terug naar zijn beginstand.

Omdat we geïnteresseerd zijn in de snelheid van het mes  
tijdens het knippen, wordt alleen gedurende de eerste  
 $135^\circ$  draaiing van de kruk de messnelheid bepaald.



Het verband tussen de hoeken  $\varphi$  en  $\gamma$ .

In  $\triangle CDE$ :

$$p^2 - 2ep \cos \varphi + e^2 - d^2 = 0 \quad (\text{E1})$$

of

$$p = e \cos \varphi + \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + d^2 - e^2} \quad (\text{E2})$$

(alleen positieve deel v.d. oplossing, omdat  $p > e \cos \varphi$ )

In  $\triangle BDC$ :

$$p^2 = q^2 + b^2 - 2bq \cos \gamma \quad (\text{E3})$$

of

$$\gamma = \arccos \left( \frac{q^2 + b^2 - p^2}{2bq} \right) \quad (\text{E4})$$

en met (E2):

$$\gamma = \arccos \left[ \frac{(b^2 + q^2 + e^2 - d^2 - 2e^2 \cos^2 \varphi - 2e \cos \varphi \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + d^2 - e^2})}{2bq} \right] \quad (\text{E5})$$

Als  $\varphi$  in 27 stappen van  $5^\circ$  loopt van  $135^\circ$  tot  $0^\circ$ , dan is:

$$\forall_{i \ll 27} \gamma_i = \arccos \left[ \frac{(b^2 + q^2 + e^2 - d^2 - 2e^2 \cos^2 \varphi_i - 2e \cos \varphi_i \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi_i + d^2 - e^2})}{2bq} \right] \quad (\text{E6})$$

De weg die het mes aflegt bij een hoekverandering

$$\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1} \quad \text{van de kruk is:}$$

$$s_i = \frac{2\pi r}{360} \cdot \Delta \varphi_i \quad (\text{E7})$$

waarbij  $\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$

Na N stappen heeft het mes een weg  $S_t$  afgelegd welke gelijk is aan:

$$S_t = \sum_{i=1}^N s_i \quad (\text{E8})$$

De gediscretiseerde snelheid van het mes is:

$$V_i = \frac{s_i}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{360} \cdot \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta t} \quad (\text{E9})$$

waarbij  $\Delta t$  de tijd is waarin de krukhoek verandert van

$$\varphi_{i-1} \quad \text{in} \quad \varphi_i.$$

De versnelling van het mes wordt gegeven door:

$$a_i = \frac{\Delta V_i}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{360} \frac{\Delta \varphi_i - \Delta \varphi_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (\text{E10})$$

met  $\Delta^2 \varphi_i = \Delta \varphi_i - \Delta \varphi_{i-1}$  wordt (E10):

$$a_i = \frac{2\pi r}{360} \frac{\Delta^2 \varphi_i}{(\Delta t)^2} \quad (\text{E11})$$

De berekende waarden voor  $S$ ,  $V$  en  $a$  zijn weergegeven in de grafieken op de volgende bladzijden.

De berekeningen zijn met de volgende gegevens uitgevoerd:

I      $e = 62 \text{ mm}$   
        $d = 520 \text{ mm}$   
        $b = 137 \text{ mm}$   
        $r = 370 \text{ mm}$   
        $q = 570 \text{ mm}$

II     $e = 37 \text{ mm}$   
        $d = 520 \text{ mm}$   
        $b = 137 \text{ mm}$   
        $r = 370 \text{ mm}$   
        $q = 567 \text{ mm}$

De tijd nodig voor een halve slag is  $5 \cdot 10^{-2}$  sec, zodat

$$\Delta t = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{27} = 1.85 \times 10^{-3} \text{ sec.}$$

(Bij stappen van  $1^\circ$  is  $\Delta t = 6.86 \times 10^{-5}$  sec).

Fig. E2 Snelheid van het mes.

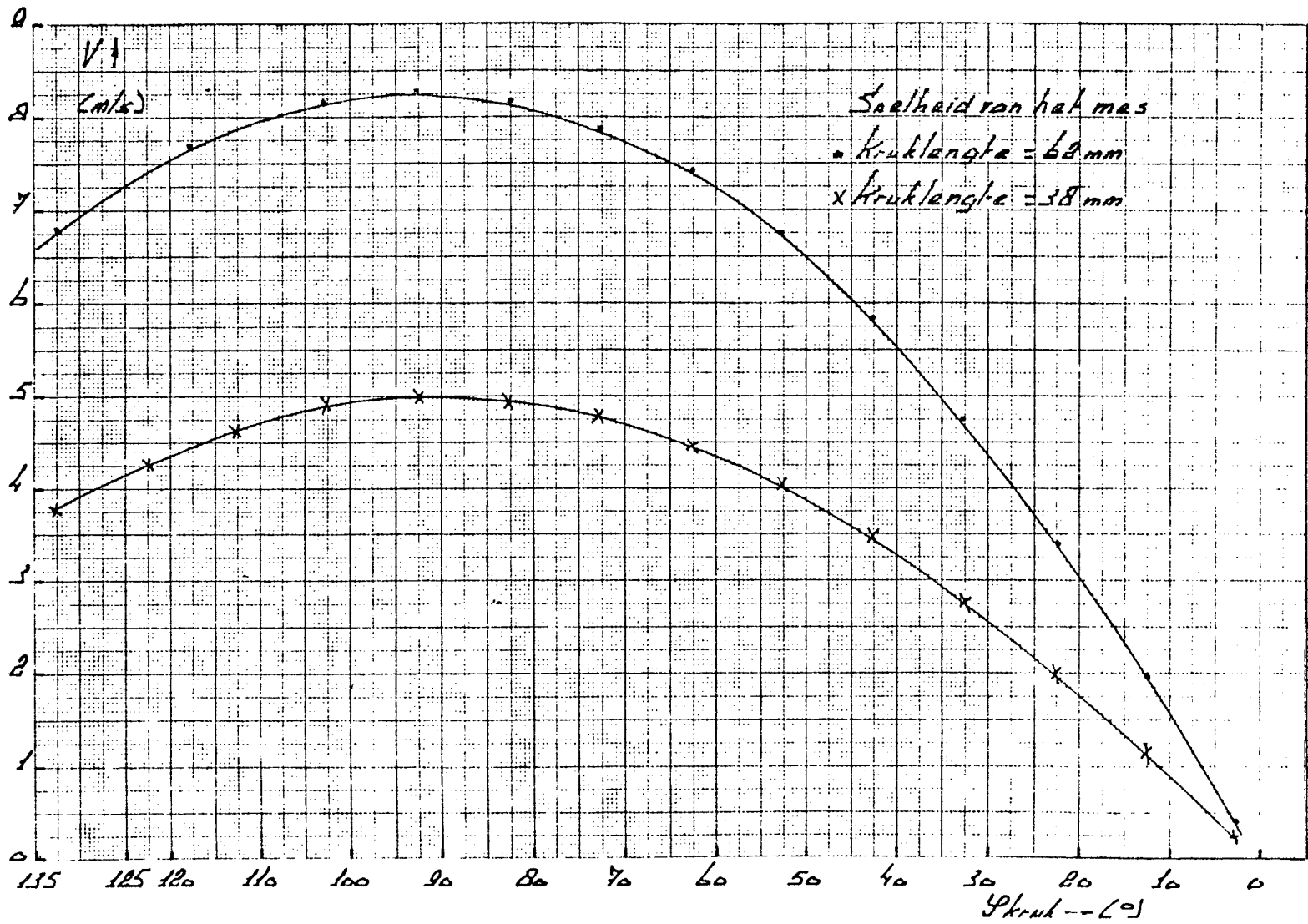
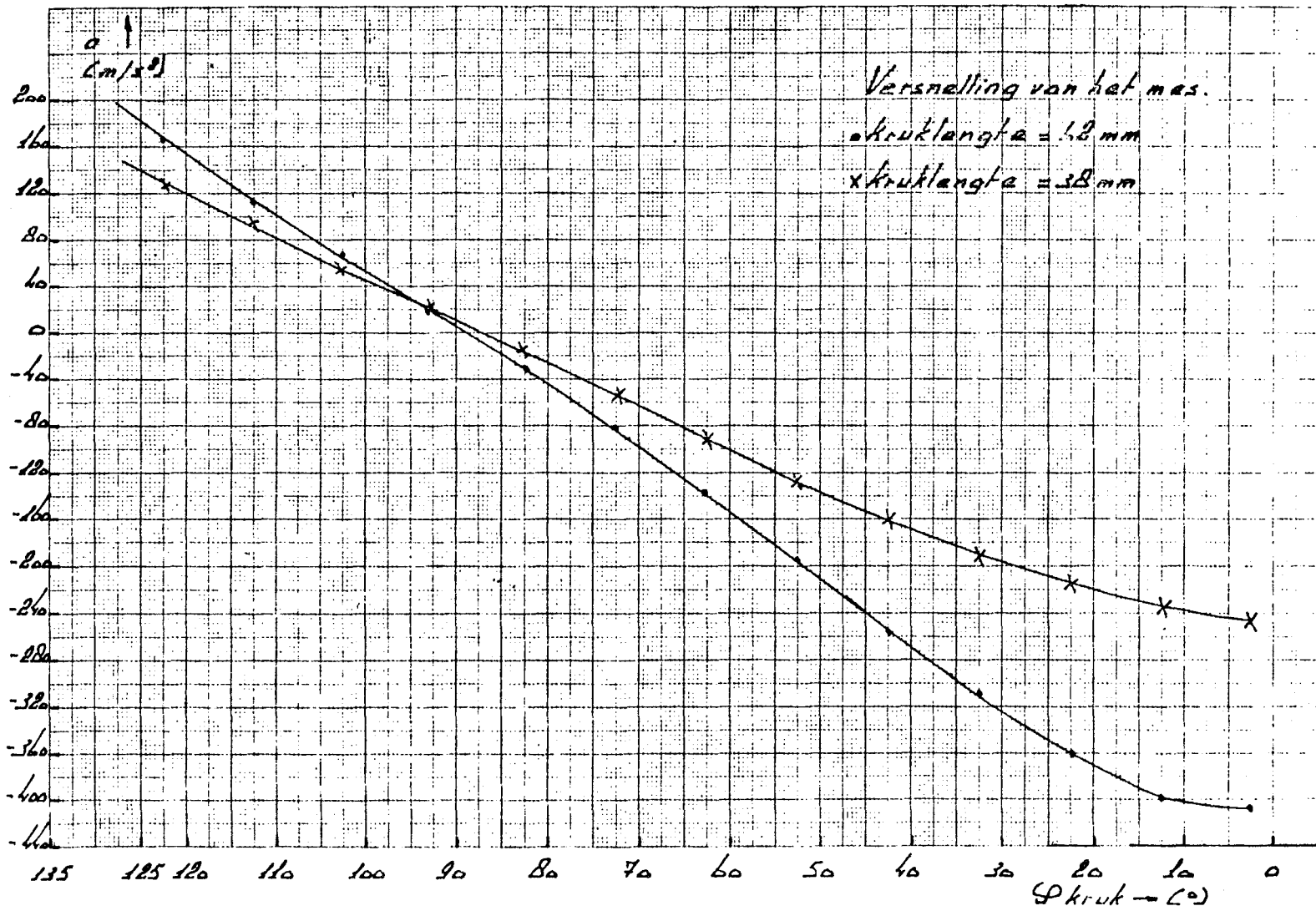


Fig. E3 Versnelling van het mes.



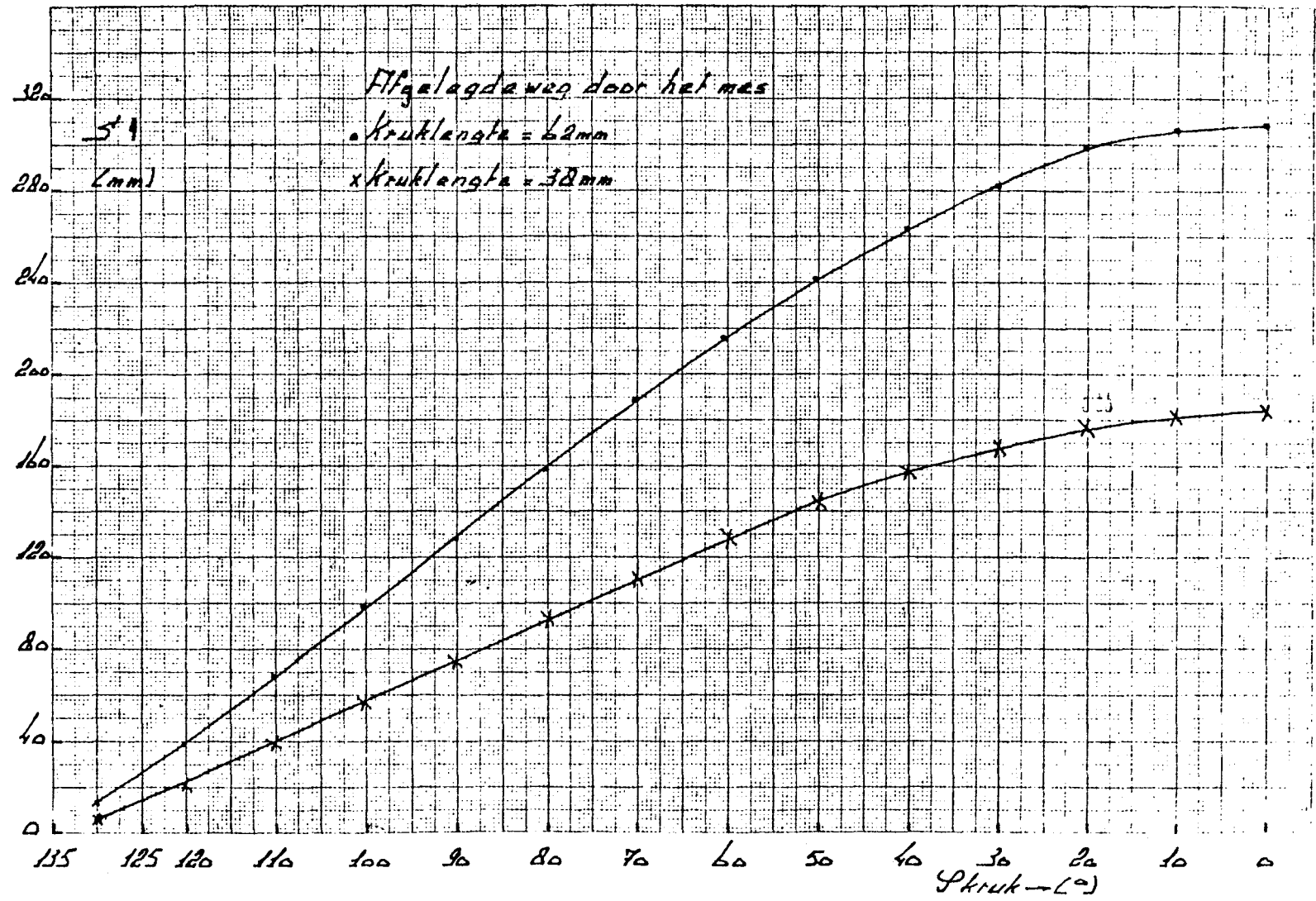


Fig. E4 Afgelagde weg door het mes.

Appendix FDe methode van Hooke en Jeeves

De direkte zoekmethode van Hooke en Jeeves is een techniek van opeenvolgende stappen, waarbij iedere stap uit twee bewegingen bestaat: opsporing en patroonstap.

De eerste beweging onderzoekt het lokale gedrag van de te onderzoeken functie.

Stel een functie wordt bepaald door N parameters.

Er wordt een startpunt  $\vec{x}$  gekozen, waarbij

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

en er wordt een staplengte  $\Delta x_i$  in iedere richting  $\vec{e}_i$  vastgesteld, met  $i = 1, 2, \dots, N$ .

De opsporingsbeweging gaat nu als volgt:

1. Bereken  $F = f(\vec{x})$ , met  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

2. Neem nu een nieuw punt  $\vec{x}$ , met

$$\vec{x} := (x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$$

3. Als  $f(\vec{x}) < F$ , dan  $F := f(\vec{x})$  en  $i := i+1$ , herhaal vervolgens de beweging vanaf 2.

4. Als  $f(\vec{x}) \geq F$  dan  $\vec{x} := (x_1, x_2, \dots, x_i - \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$  en test of  $f(\vec{x}) < F$ .

Bij succes:  $F := f(\vec{x})$  en start met  $i := i+1$  vanaf 2.

Als echter  $f(\vec{x}) \geq F$ , dan wordt deze beweging gestopt en  $x_i$  gehouden zijn oorspronkelijke waarde. Start daarna weer bij 2 met  $i := i+1$ .

Op deze wijze wordt tenslotte het punt  $\vec{x}^B$  bereikt.  
( $\vec{x}^B$  wordt basispunt genoemd).

Nu start de patroonstap, welke een enkele stap is van het gevonden basispunt naar een punt  $\vec{x}$ , volgens:

$$\vec{x} = \vec{x}_n^B + (\vec{x}_n^B - \vec{x}_o^B) = 2\vec{x}_n^B - \vec{x}_o^B$$

$$(\vec{x}_n^B = \vec{x}_{\text{nieuw}}^B, \quad \vec{x}_o^B = \vec{x}_{\text{oud}}^B)$$

Vanuit het punt  $\vec{x}$  wordt opnieuw de opsporingsbeweging uitgevoerd en er wordt een nieuw basispunt gevonden. Is de funktiewaarde bij het nieuwe basispunt kleiner dan bij het oude dan wordt het opsporingsproces vanuit het vorige basispunt uitgevoerd.

Als er vanuit geen enkel basispunt een kleinere funktiewaarde wordt gevonden, dan wordt het proces voortgezet met kleinere stappen  $\Delta x_i$ . Dit gaat zolang door, tot de staplengte  $\Delta x_i$  onder een vooraf vastgestelde waarde is gekomen.

In fig. F1 is een voorbeeld van een zoekproces voor 2 parameters  $x_1$  en  $x_2$  gegeven.

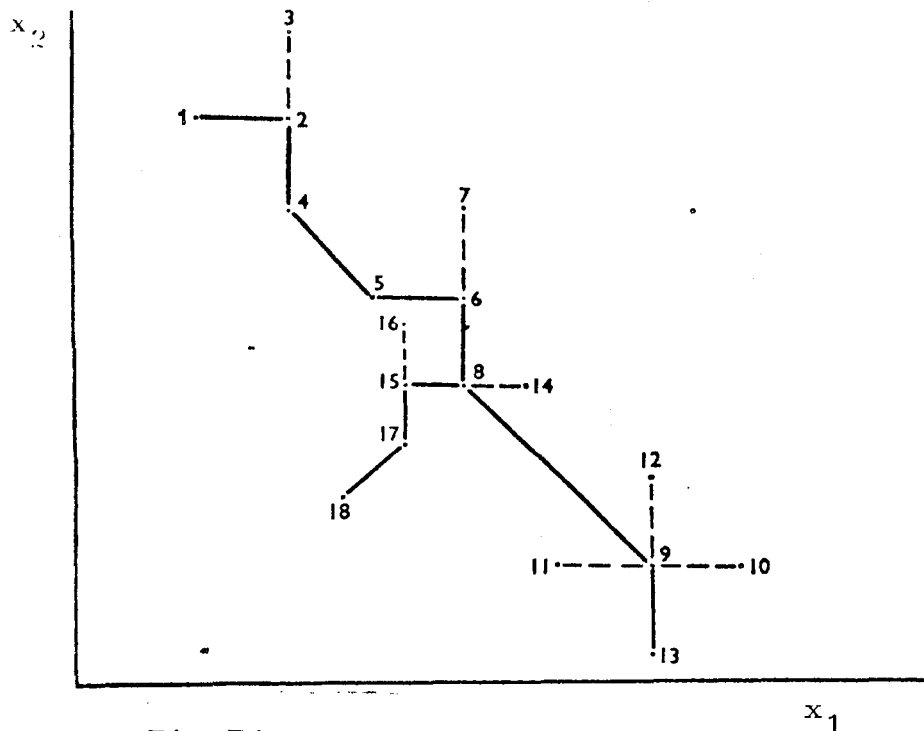


Fig.F1



Het punt  $\vec{x}^1$  is het start basispunt. De nieuwe basis  $\vec{x}^4$  ( $f(\vec{x}_4) < f(\vec{x}_1)$ ) is verkregen door de opsporingsbeweging. Het punt  $\vec{x}^5$  is verkregen door de patroonstap. De opsporing start nu vanuit  $\vec{x}^5$  en  $\vec{x}^8$  wordt een basis, als  $f(\vec{x}^8) < f(\vec{x}^4)$ . Stel nu dat na een volgende beweging  $f(\vec{x}^{13}) > f(\vec{x}^8)$  dan wordt  $f(\vec{x}^{13})$  niet geaccepteerd als nieuw basispunt, maar wordt vanuit de laatste basis  $\vec{x}^8$  gestart met gereduceerde staplengtes. Hieruit wordt dan b.v.  $\vec{x}^{18}$  als nieuw basispunt gevonden.

Overgenomen uit:

Methods for unconstrained optimization problems,  
J. Kowalik and M.R. Osborne  
Elsevier, New York, 1973.

Verzendlijst

Ir. H.C.J. v. Beukering	CFT	SAQ-p
Dr. Th.P.J. Botden	CFT	SAQ-p
Dr.Ir. J.A. Rietdijk	Nat.Lab.	WB-5
Dr. S. van Houten	CFT	SAQ-p
Ir. H.M.J. Reijnen (5x)	CFT	SAQ-p
Dr. F.J. du Chatenier	CFT	SMM-p
Ir. F. Doorschot	CFT	SAQ-p
Hr. J.W. de Ruiter	CFT	SAQ-p
Ing. H.H.M. v.d. Aa	CFT	SAQ-p
Ir. A. Mijnheer	CFT	SMM-p
Ir. N.J.M. Taen	CFT	SMM-p
Ing. A.J.M. Peters	CFT	SMM-p
Ing. P.L. Holster	CFT	SAQ-p
Hr. J.P. de Meij	CFT	SAQ-p
Drs. A.K. Niessen	CFT	SAQ-p
Hr. J.T. Klomp	CFT	SMM-p
Dr.Ir. C.G.M. van Kessel	CFT	SMM-p
Dr.Ir. P.J. Vrugt	CFT	SMM-p
Dr.Ir. W.P.A. Joossen	Nat.Lab.	WY-p
Dr.Ir. E.A. Muijderman	Nat.Lab.	WY-p
Ing. H.C. Hoefnagels	ISA	VN-5
Dr. H. Lydtin	P.F. Aaken	