

## MASTER

Het gedrag van een vlies tussen twee parallelle vloeistoflagen : stabiliteitsanalyse t.b.v. vlieskleprothesen

Oomens, C.W.J.

*Award date:*  
1979

[Link to publication](#)

### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

INTERAFDELINGSPROJECT "HARTKLEPPROTHESEN"

HET GEDRAG VAN EEN VLIES TUSSEN TWEE PARALLELE VLOEISTOFLAGEN;  
- stabiliteitsanalyse t.b.v. vliesklepprothesen -

verslag van het afstudeerwerk van:

C.Oomens

verricht onder leiding van:

Prof. Dr. Ir. G.Vossers

Prof. Dr. P.C.Veenstra

dagelijkse begeleiding:

Ir. A.A.v.Steenhoven

technische assistentie:

J.Cauwenberg

Ing. T.v.Duppen

juli, 1979

## SAMENVATTING

Binnen het interafdelingsproject "Hartklepprothesen" is een eerste aanzet gemaakt met het onderzoek naar het instabiele gedrag van kunstvlieskleppen tijdens de systole. Met eerste orde storingsrekening zijn enkele instabiliteitsproblemen opgelost. De modellen gaan allemaal uit van een dun, flexibel vlies tussen twee vloeistoflagen die met verschillende snelheid parallel aan elkaar bewegen. Hieruit volgen 4 parameters: de vloeistofsnelheid, de grenslaagdikte, de massa van het vlies en de spankracht in het vlies. Verder zijn er experimenten gedaan, waarbij ook de invloed van de vlieslengte onderzocht is. Zij geven een kwalitatief beeld van de vliesbeweging en tevens een globale bevestiging van de modellen.

# INHOUDSOPGAVE

HOOFDSTUK 1: INLEIDING	1.1
1.1 De werking van het hart	1.1
1.2 De doelstellingen van het hartkleppen- projekt	1.3
1.3 Het vliesflapperonderzoek	1.5
1.3.1 Inleiding	1.5
1.3.2 Echocardiografische bevindingen	1.5
1.3.3 Het vliesflapperen als hypothese voor het vroegtijdig stukgaan van vliesklepprothesen	1.7
1.3.4 Onderwerp van het afstudeerwerk	1.8
HOOFDSTUK 2: HISTORISCH OVERZICHT VAN HET VLOEISTOF- INSTABILITEITENONDERZOEK	2.1
HOOFDSTUK 3: THEORETISCHE MODELVORMING	3.1
3.1 De Orr-Sommerfeldvergelijking en de Rayleighvergelijking	3.2
3.2 Stromingen met een sprong in het snelheidsprofiel	3.8
3.2.1 Het scheidingsvlak kan geen druk- verschil weerstaan	3.8
3.2.2 Het scheidingsvlak kan een druk- verschil weerstaan	3.12
3.2.3 De begrensde stroming	3.17
3.3 Stromingen waarbij de snelheidsprofielen lineair zijn	3.18
3.3.1 De "Shear-layer"	3.19
3.3.2 "Shear-layer"-model voor de stroming langs een vlies	3.23
3.3.3 Stromingen met een gebroken profiel- vorm	3.27
3.4 Konklusies en discussie	3.30
3.4.1 De uitkomsten van de problemen	3.30
3.4.2 De rekenmethode en de bruikbaarheid van de modellen	3.32

HOOFDSTUK 4: EXPERIMENTEN	4.1
4.1 Inleiding	4.1
4.2 De meetopstelling	4.2
4.3 De experimenten in de vrije grenslaag	4.7
4.3.1 De opzet van de experimenten	4.7
A. Werkwijze	4.7
B. De ten grondslag liggende literatuur m.b.t. theorie en experiment	4.8
4.3.2 De resultaten	4.11
A. De metingen in de aanstroming	4.11
B. De metingen in de meetsektie	4.14
4.3.3 Konklusies en discussie	4.21
A. De meetopstelling	4.21
B. De meetresultaten	4.23
4.4 De vliesexperimenten	4.24
4.4.1 De experimentele opzet	4.24
4.4.2 Kwalitatieve beschrijving van de verschijnselen	4.25
4.4.3 De vergelijking met de vrije-grenslaag-experimenten	4.28
4.4.4 De vergelijking met de theorie	4.31
4.4.5 Konklusies en discussie	4.31
HOOFDSTUK 5: KONKLUSIES EN VOORTGANG	5.1
5.1 Konklusies	5.1
5.2 De voortgang	5.3
APPENDIX A: DE STELLINGEN VAN RAYLEIGH	
APPENDIX B: DE LAMINAIRE KANAALINSTROMING	
LITERATUURLIJST	
SYMBOLENLIJST	

## HOOFDSTUK 1: INLEIDING.

In dit hoofdstuk zal worden getracht een indruk te geven van de werkzaamheden binnen het interafdelingsproject "Hartklepprothesen" en de plaats die mijn afstudeerwerk daarbij inneemt. Hiertoe zal allereerst in paragraaf 1.1 een beknopte beschrijving worden gegeven van het hart en zijn functie. Bovendien zal kort worden ingegaan op de moeilijkheden die op kunnen treden als hartkleppen vervangen moeten worden door kunstkleppen. In paragraaf 1.2 wordt ingegaan op de doelstellingen van het hartkleppenproject en hoe mijn afstudeerwerk in dit project past. Paragraaf 1.3 gaat in op de motivering, het doel en de wijze van aanpak van mijn afstudeerwerk en de verdere indeling van dit verslag.

### 1.1 De werking van het hart.

Het hart is een van de belangrijkste organen in het menselijk lichaam. Het heeft als functie het bloed door de bloedvaten te laten circuleren. Dit is noodzakelijk om allerlei voor het lichaam belangrijke stoffen naar de verschillende organen toe te kunnen voeren en afvalstoffen af te voeren. De belangrijkste transportfunctie is de toevoer van zuurstof en de afvoer van koolzuur. Dit komt tot uitdrukking als men een schema van de bloedsomloop beschouwt (zie fig. 1.1)

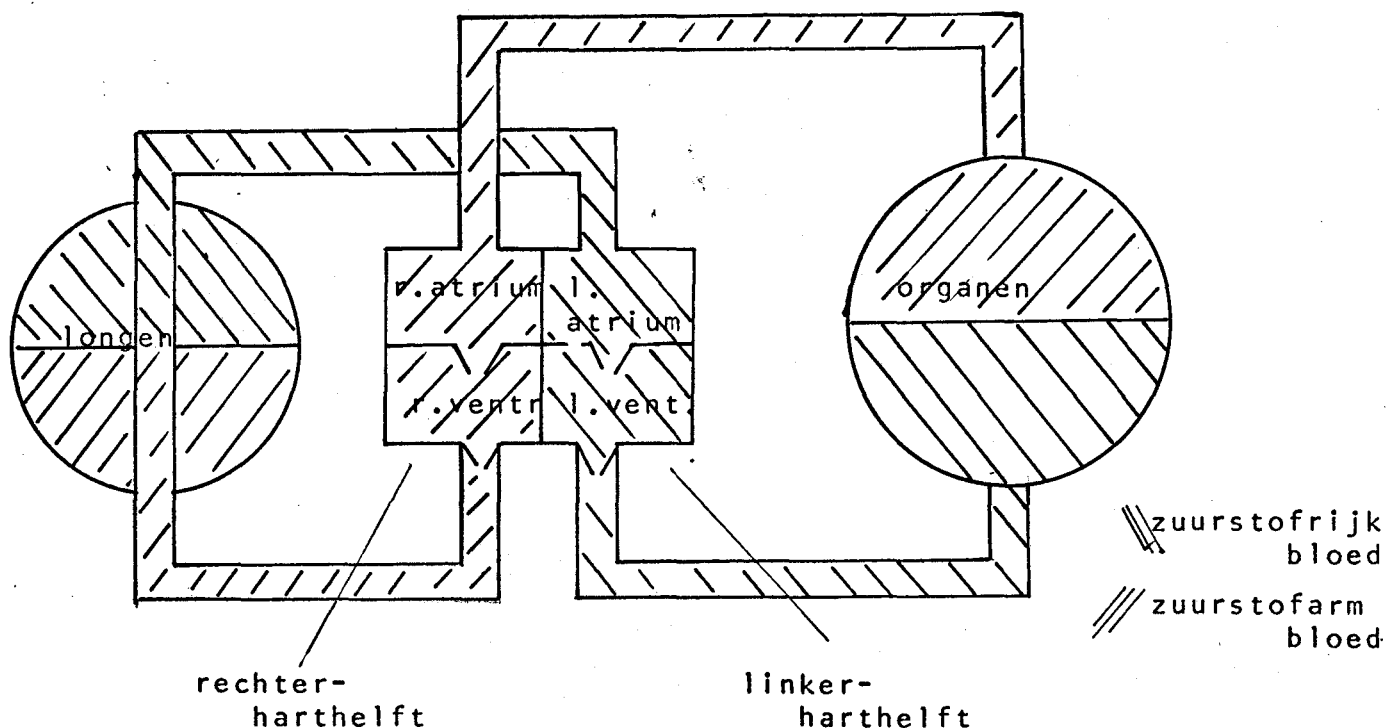


fig. 1.1



die qua vorm gelijken op de natuurlijke kleppen. Een voorbeeld hiervan is de fascia-lata-klep. Hierbij wordt het dekvlies van de bovenbeenspier (het zogenaamde fascia-lata) als vliesmateriaal gebruikt. Deze kleppen bleken echter na 1 à 1½ jaar scheurtjes te gaan vertonen, waardoor ze opnieuw vervangen moeten worden. Ook vliesklepprothesen, waarvan de vliezen gemaakt worden van andere biologische en chemische materialen vertonen een beperkte levensduur. De reden voor dit vroegtijdig stukgaan zou naast een geleidelijke afbraak van de weefselstructuren ook een ongunstiger mechanisch en hydrodynamisch functioneren kunnen zijn.

## 1.2 De doelstellingen van het hartkleppenproject

Het hartkleppenproject is in 1974 gestart, met als doelstelling:

" Het formuleren van technische specificaties voor de konstruktie en implantatie van vliesklepprothesen welke aanleiding moeten geven tot een acceptabele levensduur en een optimaal functioneren van deze kleppen."

Bij de aanvang van het onderzoek werden twee beperkingen gemaakt:

1. Het onderzoek wordt verricht naar het functioneren van de aortaklep en diens prothesen. Dit omdat de aortaklep ongespierd is, en dus eenvoudig te modelleren is, en omdat zij in gesloten toestand de grootste belasting moet weerstaan.
2. Alleen die fenomenen worden in onderzoek genomen die duidelijk een technische benadering eisen (d.w.z. mechanica, kinematika, en hydrodynamika), terwijl bijvoorbeeld degeneratieve verschijnselen van de biologische weefsels buiten beschouwing worden gelaten.

Er zijn indertijd 3 hypothesen geformuleerd voor het vroegtijdig stukgaan van de vliesklepprothesen, welke tot op de dag van vandaag de basis vormen van het onderzoek (v. Steenhoven, 1975):

1. Het blijkt dat de aortaklep al begint te sluiten tijdens de vertragingfase van de bloedstroom en bijna gesloten is op het moment dat de stroming omkeert ( het terugstromend bloedvolume is ongeveer 2% van het totale voorwaartse volume). De veronderstelling is nu dat vliesklepprothesen pas beginnen te sluiten



onder invloed van terugstroming, zodat het terugstromend volume en de terugstroomsnelheid en dus ook de te keren impuls veel groter zijn. Dit leidt tot hogere spanningen in de vliezen nadat de klep gesloten is.

2. De structuur en materiaaleigenschappen van de vliesklepprothesen worden geacht anders te zijn dan die van normale kleppen. Dit kan leiden tot een ongunstiger spanningsverdeling in de prothese.
3. De derde hypothese berust op de verwachting dat de vliezen van een vliesklepprothese heviger flapperen in de stroming op het moment dat ze geheel geopend zijn, dus als het hart het bloed ejecteert, dan de normale aortaklepvliezen.

Het onderzoek binnen het hartkleppenprojekt, op basis van deze drie hypothesen, is er nu op gericht inzicht te krijgen in de parameters die de diverse verschijnselen (sluitingsgedrag, spanningsverdeling, vliesflapperen) bepalen. Daartoe wordt in eerste instantie uitgegaan van de natuurlijke aortaklep die blijkbaar zo optimaal funktioneert, dat zij het bij de meeste mensen 70 jaar uithoudt. Uit deze studie zouden dan de specificaties voor de vliesklepprothesen moeten volgen. Het onderzoek binnen het projekt verloopt dan ook langs een vijftal hoofdlijnen:

1. De hydrodynamische tak houdt zich vooral bezig met de bepaling van het klepvliesgedrag als funktie van de snelheid en tijd. De nadruk heeft tot nu toe vooral gelegen op het sluitingsgedrag. Dit onderzoek bevindt zich nu in een eindstadium. Aan het vliesflapperen is na 1974 niet veel meer gedaan. Nu het onderzoek naar de verlate sluiting zijn afronding nadert is het vliesflapperen weer opnieuw punt van onderzoek geworden.
2. De drukopbouw tak. In deze onderzoektak staat de drukbelasting als funktie van de klepgeometrie en het vloeistofgebeuren centraal. Men probeert via modelstudies een indruk te krijgen van de impedantie van het systeem klep en aorta.
3. De mechanikata tak. Via materiaalonderzoek, mechanische en kinematische modelvorming en histologisch onderzoek wordt getracht inzicht te verwerven in de parameters die de spanningsverdeling in de klep bepalen.
4. Door middel van dierexperimenten wordt een terugkoppeling naar de realiteit verkregen door verificatie van de in modelexperimenten

gevonden resultaten.

5. De konstruktietak tenslotte moet leiden tot een verbeterde (vlies)klepprothese.

### 1.3 Het vliesflapperonderzoek

#### 1.3.1 Inleiding

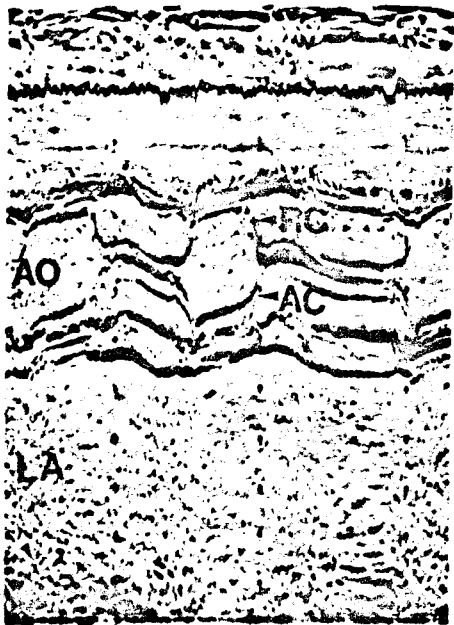
Zoals reeds vermeld is, is het onderzoek naar het flapperen van klepvliezen na 1974 gestopt. Dat onderzoek naar dit fenomeen evenwel gewenst is volgt uit een drietal observaties.

1. In de echocardiografie blijkt men regelmatig oscillaties te registreren, die wijzen op instabiel gedrag van klepvliezen. Dit komt voor bij kunstvliezen, maar treedt soms ook op bij normale kleppen. Hierop zal nog nader worden ingegaan.
2. Bij de 2-dimensionale modelexperimenten met betrekking tot het sluitingsgedrag van de aortaklep blijkt het vlies bij een stationaire hoofdstroming vaak hevig te flapperen.
3. Door H. in 't Zand zijn de bewegingen van een fascia-lata klep, welke geplaatst was in een 3-dimensionale modelopstelling met pulserende stroming, op film vastgelegd. Hieruit bleek dat de vliezen van zo'n klep, onder de opgelegde stromingscondities en tijdens de fase dat de klep geheel geopend was, hevige flapperbewegingen vertoonden.

#### 1.3.2 Echocardiografische bevindingen.

In figuur 1.2a en b worden twee echocardiogrammen gegeven van normale kleppen. (pag 1.6)

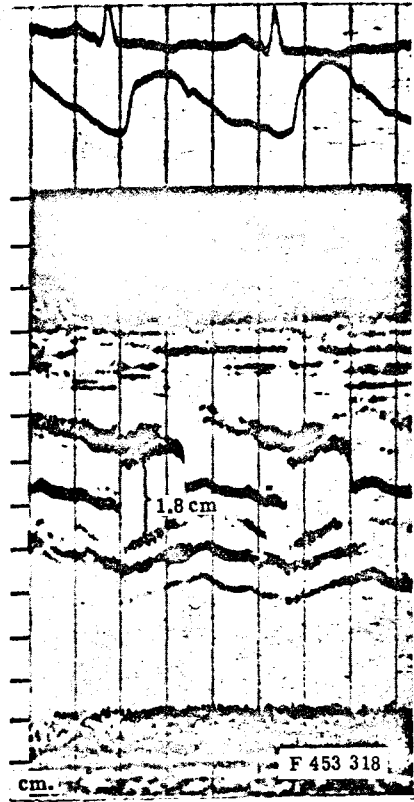
Op de horizontale as staat de tijd uit, op de verticale as de afstand tot het lichaamsoppervlak. Op het echocardiogram is de aortawand te zien als twee donkere lijnen die periodiek van plaats veranderen, maar daarbij dezelfde afstand houden. De kleppen zijn over het algemeen te zien als donkere lijnen die in geopende stand vlak langs de aortawand liggen en bij sluiting naar elkaar toe bewegen en als één of meerdere dicht bij elkaar lopende lijnen in het midden van de aorta zichtbaar zijn. De klep uit figuur 1.2a vertoont een stabiel gedrag, maar de klep uit figuur 1.2b laat duidelijk oscillaties zien tijdens de systole.



SU25437

N. BOM (1977)

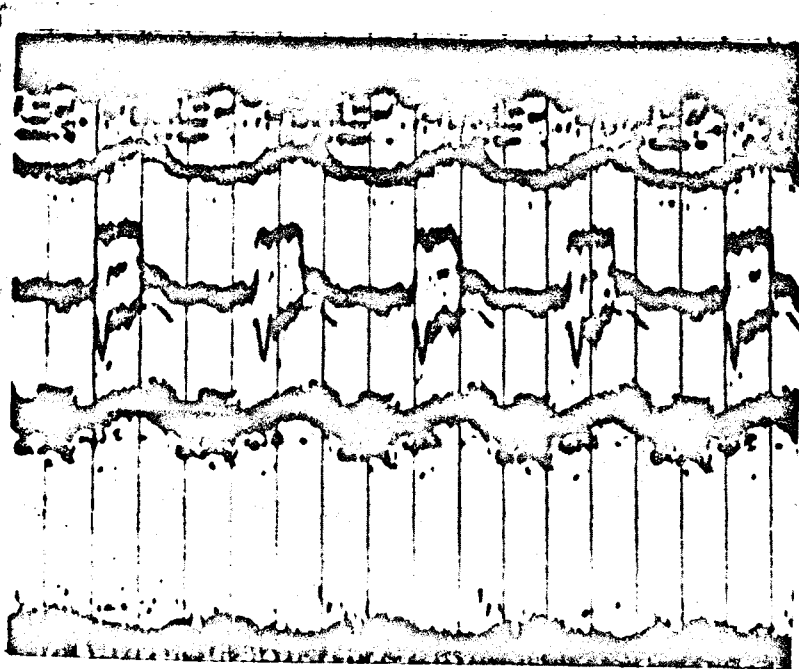
fig. 1.2a



Echogram of a normal aortic valve (Feigenbaum, 1972)

fig. 1.2b

In figuur 1.3 wordt een echocardiogram getoond van een homograft. Dit is een klep die ongeveer dezelfde ophanging heeft als een fascia-lataklep, maar waarbij voor de vliezen gebruik is gemaakt van de aortaklepvliezen van een donor. Ook hier zijn duidelijk oscillaties te zien.



Echogram of an aortic valve homograft (Feigenbaum, 1972)

fig.1.3

Vermeldenswaard is verder nog een artikel van E.R.Pinto(1978), waarin melding wordt gemaakt van een statistisch onderzoek naar het verband tussen ziektes en de registratie van oscillaties van klepvliezen met behulp van echocardiogrammen. Uit het artikel blijkt , dat oscillaties op vrij grote schaal waargenomen worden, niet alleen bij normale kleppen, maar vooral ook bij een groot aantal situaties die als bijzonder beschouwd moeten worden. Voorbeelden hiervan zijn zwangerschap, bloedarmoede, hoge bloeddruk enz.

### 1.3.3 Het vliesflapperen als hypothese voor het vroegtijdig stukgaan van vliesklepprothesen.

Uit het voorgaande blijkt dat het onder bepaalde omstandigheden mogelijk is dat (aorta)klepvliezen instabiel worden. De vraag is of er in het hart mechanismen aanwezig zijn die deze instabiliteiten tegengaan of uitdempen, en of deze mechanismen ook aanwezig zijn indien kunstkleppen geïmplanteerd zijn. Ook is het mogelijk dat normale kleppen een instabiel gedrag beter kunnen verdragen dan kunstkleppen. Of kunstkleppen instabieler zijn dan normale kleppen dient onderzocht te worden. Ook de invloed van het instabiele gedrag op de levensduur is hierbij van belang. Indien noodzakelijk, moet er gezocht worden naar mogelijkheden om een grotere stabiliteit te krijgen.

In 1974 heeft v.Steenhoven een begin gemaakt met een onderzoek naar dit verschijnsel. Een van de verschillen tussen een kunstklep en een normale hartklep is de aanwezigheid van een holte achter de normale klepvliezen, de zogenaamde sinus van Valsalva. Door Leonardo da Vinci is in 1492 al aangetoond, dat er in de sinus een vloeistofstroming aanwezig is, waardoor bij een normale klep het snelheidsverschil over het vlies gereduceerd wordt. Door de vervorming van de sinusholten bij implantatie van een kunstklep zou de vloeistofstroming in de sinus kunnen worden verstoord, waardoor het snelheidsverschil over de vliesen groter wordt (v.Steenhoven, 1974). Om de invloed van dit snelheidsverschil op de stabiliteit van een vlies te onderzoeken heeft v.Steenhoven op basis van potentiaaltheorie het probleem uitgewerkt van een oneindig lang vlies tussen twee niet-viskeuze vloeistoflagen, die met verschillende snelheid t.o.v. elkaar bewegen. Het bleek,

dat de groei van een instabiel gedrag in de tijd een functie is van het snelheidsverschil! Op basis hiervan werd de hypothese geformuleerd dat de vliezen van vliesklepprothesen, tijdens de fase dat de klep geheel geopend is, heviger flapperen dan de vliezen van de natuurlijke aortaklep.

#### 1.3.4 Onderwerp van het afstudeerwerk.

Uitgaande van de vliesflapperhypothese ben ik in mei 1978 gestart met mijn afstudeerwerk. Het doel was een algemeen inzicht te verwerven in het instabiele gedrag van dunne, zeer flexibele vliezen in vloeistofstromingen. Waar wordt het gedrag door veroorzaakt, welke parameters hebben er invloed op en hoe groot is die invloed?

Hiertoe is begonnen met een literatuurstudie die geleid heeft tot een aantal reeds bekende en een aantal nieuwe modellen waarmee het vliesgedrag beschreven kan worden in enkele vereenvoudigde situaties. Deze worden beschreven in hoofdstuk 3. Hoofdstuk 2 geeft eerst een historisch overzicht van het instabiliteitsonderzoek in het algemeen. In hoofdstuk 4 wordt een beschrijving gegeven van de gedane experimenten. Tot slot zal in hoofdstuk 5 worden ingegaan op de eindconclusies en op een mogelijke voortgang van dit onderzoek.

## HOOFDSTUK 2: HISTORISCH OVERZICHT VAN HET VLOEISTOFINSTABILITEITEN- ONDERZOEK.

Als men spreekt over het flapperen van een dun flexibel vlies in een vloeistof spreekt men eigenlijk van een instabiel gedrag van een stroming. Het vlies volgt deze instabiele stroming en zal zodoende flapperbewegingen gaan maken.

Aan het instabiele gedrag van stromingen is in de laatste eeuw erg veel (vooral theoretisch) onderzoek gedaan. Al aan het eind van de 19de eeuw kwamen er publikaties van de hand van Helmholtz (1868), Kelvin (1871) en Rayleigh (1894) over de stabiliteit van stromingen die parallel aan elkaar, maar met verschillende snelheid, bewegen. Men heeft daarna aan allerlei stromingen instabiliteitsonderzoek gedaan, maar voor ons zijn alleen de parallelle stromingen van belang.

In het begin van de 20ste eeuw werd vooral onderzoek gedaan aan de stroming door pijpen (Reynolds, 1883) en aan de stroming langs een starre, vlakke plaat. Op de laatste zal nu iets verder worden ingegaan. Bij zo'n stroming zal zich vlak langs de plaat een laminaire grenslaag vormen. Binnen de grenslaag gedraagt de vloeistof zich viskeus en kan het stromingsprofiel beschreven worden met de grenslaagvergelijkingen van Prandtl. Buiten de grenslaag gedraagt de vloeistof zich niet-viskeus (zie oa. Schlichting, 1951, par. VIIa). Op een bepaalde afstand tot het begin van de plaat slaat de stroming om van laminair naar turbulent, d.w.z. de stroming wordt instabiel en voldoet niet meer aan de vergelijkingen van Prandtl.

De gebruikte methode voor de beschrijving van deze omslag van laminair naar turbulent berusten allemaal op het zelfde principe; men brengt een verstoring aan op de hoofdstroming en bestudeert het gedrag van de verstoring als functie van de tijd. Dit leidt tot een stabiliteitstheorie voor laminaire stromingen. Het blijkt dat het gedrag sterk bepaald wordt door het getal van Reynolds ( $Re = U \delta / \nu$  met  $U$  = de snelheid van de hoofdstroming,  $\delta$  = de dikte van de grenslaag,  $\nu$  = de kinematische viskositeit). Boven een zekere kritische waarde is de stroming turbulent, daaronder laminair.

Tollmien(1929) was de eerste die betrouwbare waarden van  $Re_{krit}$  voor deze "Tollmien-Schlichting"-instabiliteit kon berekenen. Deze waarden zijn experimenteel bevestigd door G.B.Schubauer en H.K.Skramstad (1943). Een complete beschrijving van dit fenomeen gaf C.C.Lin (1955).

Toen het probleem van de stroming langs een vlakke plaat, de gebonden grenslaag nagenoeg was opgelost kwam de vrije grenslaag weer opnieuw in de aandacht. Dit is het overgangsgebied tussen twee parallelle stromingen die met verschillende snelheid bewegen. Martin Lessen (1950) gaf een eerste numerieke benadering van het probleem. Hij nam hierbij ook als een der eersten de viskositeit in de beschouwingen op, waarover met betrekking tot de vrije grenslaag nog geen eerdere publikaties waren verschenen. Daarna is er nog een groot aantal artikelen verschenen die een analytische of een numerieke benadering behandelen of een combinatie van beiden. Esch (1957) ging uit van snelheidsprofielen die bestaan uit lineaire overgangen, waarbij ook viskeuze effecten in rekening worden gebracht. Experimenteel werk aan de vrije grenslaag is oa. verricht door Sato (1956) en Lochtenberg (1957). Een vrij complete analyse is gegeven door M.Lessen en Sung-Hwan Ko (1966). Vermeldenswaard is verder nog een goed overzichtsartikel van Gaster (1962).

Door observaties aan het verbazingwekkende zwemgedrag van dolfijnen begon men rond 1960 te vermoeden dat de flexibele huid van deze dieren de waarde van  $Re_{krit}$  zou verhogen en daardoor hun wrijvingsweerstand in het water verminderen. Naar aanleiding van experimenten van M.O.Kramer (1960) op dit gebied ging men ook stromingen langs flexibele wanden theoretisch op hun stabiliteit onderzoeken. Dit leidde ertoe dat T.B.Benjamin (1963) tot een klasse-indeling kwam voor stromingen langs een flexibele wand. De indeling heeft vooral betrekking op de verschillende manieren waarop de instabiliteiten beïnvloed worden door de wandeigenschappen en de wijze waarop de energie aan de instabiliteit wordt toegevoerd. Benjamin onderscheidt drie klassen:

1. De klasse A. Deze instabiliteit treedt vooral op bij starre wanden of bij wanden met een erg lage flexibiliteit. Het beste

voorbeeld is de reeds eerder genoemde Tollmien-Schlichting-instabiliteit voor de stroming langs een starre, vlakke plaat.

2. De klasse B. Bij stromingen langs een flexibele wand zal ook instabiel gedrag van de klasse B voorkomen. De instabiliteiten van de klassen A en B reageren vergelijkbaar op een verhoging van de flexibiliteit, ze worden er namelijk door gedempt. Wordt de beweging van de wand echter gedempt (bijvoorbeeld door een vloeistoflaag achter de wand, of een demping die van de wand zelf uitgaat) dan gaan de klassen verschillend reageren. Op de klasse A zal een verhoging van de demping stabiliserend werken, maar de klasse B zal hierdoor juist versterkt worden. Het is hieruit duidelijk dat beide klassen op een andere manier hun energie aan de stroming en/of de wand onttrekken. Ze zijn dus essentieel verschillend. Een instabiel verschijnsel, dat zich als een klasse B gedraagt, is dat van golven die ontstaan als de wind over een wateroppervlak scheert.
3. De klasse C of Kelvin-Helmholtz. Wordt de flexibiliteit van de wand erg hoog, dan zal de Kelvin-Helmholtz-instabiliteit gaan optreden. Een voorbeeld hiervan vormen twee parallel bewegende vloeistoflagen, waartussen zich eventueel nog een zeer flexibel vlies bevindt. De instabiliteiten in de reeds eerder genoemde vrije grenslaag behoren ook tot deze klasse.

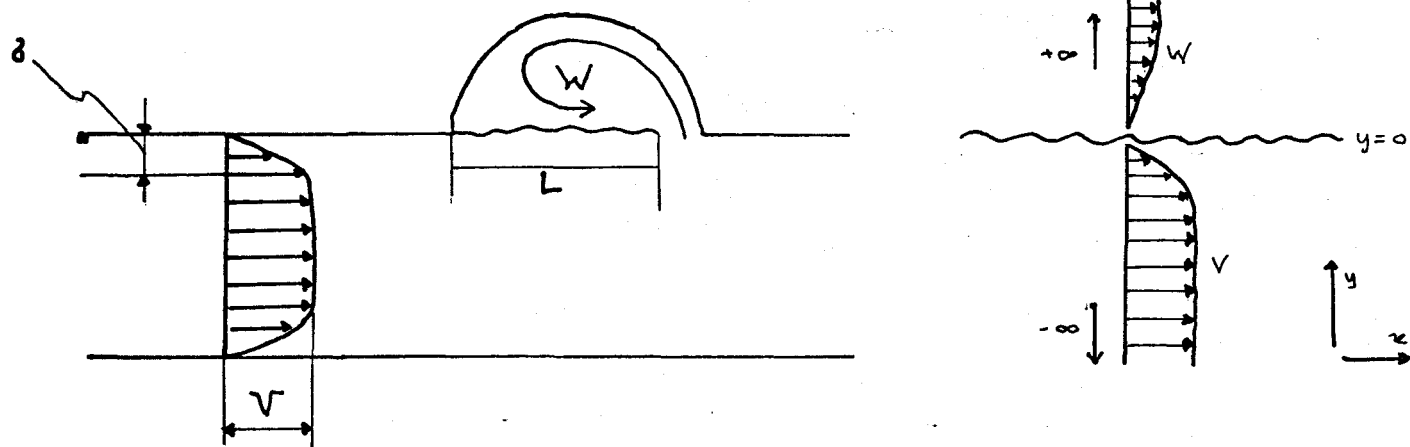
Het probleem van een vliesklep in een stroming met aan weerszijden een verschillende snelheid lijkt erg veel op de laatste klasse. Deze is bovendien het eenvoudigst te beschrijven. Mijn afstudeerwerk is er dan ook voornamelijk op gericht om instabiliteiten van deze klasse nader te onderzoeken.



HOOFDSTUK 3: THEORETISCHE MODELVORMING.

In dit hoofdstuk wordt allereerst in paragraaf 3.1 beschreven hoe men over het algemeen een instabiliteitsprobleem aanpakt. Dit leidt tot de basisvergelijking van Orr-Sommerfeld en de Rayleighvergelijking. In de daarop volgende paragrafen wordt de Rayleighvergelijking opgelost voor een aantal eenvoudige gevallen, waardoor het mogelijk wordt over de invloed van parameters als spankracht in een vlies, vliesmassa (paragraaf 3.2) en stromingsprofiel (paragraaf 3.3) enkele uitspraken te doen. In paragraaf 3.4 worden de konklusies gegeven en een discussie.

De theoretische modeluitkomsten zullen steeds worden toegepast op de fysiologische werkelijkheid. Daartoe zal worden uitgegaan van de volgende waarden (zie fig. 3.1).



a. werkelijke situatie

b. modelsituatie

fig. 3.1

De hoofdstroomsnelheid v.h. bloed tijdens systole:

-  $V = 1 \text{ m/s}$

De snelheid achter het vlies:

-  $W = 0-1 \text{ m/s}$

De vlieslengte:

-  $L = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

De soortelijke massa van het vlies:

-  $\rho_{\text{vlies}} = 1050 \text{ kg/m}^3$

De grenslaagdikte langs het vlies:

-  $\delta = 10^{-3} \text{ m}$

De kinematische viskositeit van bloed:

-  $\nu = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Bij beschouwingen over instabiel gedrag worden verstoringen met een golflengte van 2 maal de vlieslengte nog als relevant beschouwd, dit betekent een maximale golflengte van 3 cm. Als minimum golflengte wordt 0.1 cm aangehouden. Over het algemeen wordt niet met de golflengte  $\lambda$  gewerkt, maar met het golfgetal  $\alpha$  ( $\alpha = 2\pi/\lambda$ ), waarvoor dus geldt:  $200 < \alpha < 6000 \text{ m}^{-1}$

### 3.1 De Orr-Sommerfeldvergelijking en de Rayleighvergelijking

De belangrijkste methode die gebruikt wordt voor de theoretische bestudering van de stabiliteit van stromingen is die van de kleine verstoringen. Men neemt in de laminaire basisstroming een kleine verstoring aan en gaat dan het gedrag van de verstoring in tijd en plaats bestuderen. Als de verstoring groeit, dan is de stroming instabiel. Dempt de verstoring uit, dan is de stroming stabiel.

Uitgangspunten bij de mathematische beschrijving zijn de wet van behoud van massa en die van impuls, beschreven met respectievelijk de continuïteitsvergelijking en de Navier-Stokes-vergelijking. Voor de stromingen die in dit rapport aan de orde komen kan uit deze vergelijkingen met behulp van eerste-orde-storingsrekening de Orr-Sommerfeldvergelijking worden afgeleid. In het geval dat de viscositeit wordt verwaarloosd gaat deze over in de Rayleighvergelijking. In dit hoofdstuk zullen beide vergelijkingen worden afgeleid.

Zoals uit het voorgaande is gebleken hebben we te maken met een vlies dat zich tussen twee parallelle lagen in bevindt en waarbij de hoofdstroomsnelheden in beide lagen verschillend van grootte zijn. Als uitgangspunt voor onze berekeningen wordt het volgende model gekozen. Beschouw twee inkompressibele vloeistoffen, die parallel aan elkaar bewegen. Met gravitatieeffecten wordt geen rekening gehouden en de dichtheid van de vloeistof wordt konstant verondersteld. Op het scheidingsvlak van de twee vloeistoffen kan dan een oneidig dun vlies gedacht worden. Bij het doorrekenen van konkrete problemen zal tevens de viscositeit worden verwaarloosd. De in dit hoofdstuk af te leiden vergelijkingen bevatten de viscositeit nog wel.

Hoofdstromingen laten zich beschrijven met behulp van de snelheidsverdeling:

$$\vec{u} = ( U(y), 0, 0 )$$

Elke stroming strekt zich uit van  $x = -\infty$  tot  $x = +\infty$ . In de meeste gevallen gaat ook  $y$  van  $-\infty$  tot  $+\infty$ , maar soms worden er vaste of flexibele wanden in de beschouwing betrokken.

Voor deze stroming geldt:

1. De continuïteitsvergelijking

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.1)$$

2. De Navier - Stokesvergelijking:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.2)$$

Om de stabiliteit van deze stroming te bestuderen wordt een verstoring aangebracht op de hoofdstroming (basisstroming) en gaat men kijken hoe deze zich gedraagt in de plaats en in de tijd. H.B.Squire (1933) heeft aangetoond, dat een parallelle stroming waar een 3-dimensionale verstoring op wordt aangebracht door een eenvoudige bewerking te herleiden is naar een 2-dimensionaal verstoorte stroming en bovendien dat een 2-dimensionale storing eerder een instabiliteit tot gevolg heeft dan een 3-dimensionale. Daarom zullen we alleen 2-dimensionale situaties beschouwen. We stellen daarom:

$$\vec{u}(x, y, t) = \vec{U}(y) + \vec{u}'(x, y, t) \text{ met } \vec{u}' = (u', v', 0)$$

$$p(x, y, t) = P(x, y) + p'(x, y, t)$$

Deze waarden worden gesubstitueerd in (3.1) en (3.2) en de tweede-orde termen worden hierbij verwaarloosd. Tevens wordt aangenomen dat de hoofdstroming stationair is. Dit leidt tot de vergelijkingen

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad (3.3c)$$

De hoofdstroming voldoet ook aan de Navier-Stokesvergelijking, dus (3.3) gaat over in:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad (3.4c)$$

Er wordt nu aangenomen, dat een willekeurige, zeer kleine verstoring beschreven kan worden als een superpositie van een aantal onafhankelijke golfcomponenten die ieder aan de vergelijkingen 3.4 voldoen. Er wordt daarom gezocht naar typische golfoplossingen van de vorm:

$$u'(x, y, t) = \bar{u}(y) \exp [i\alpha(x - ct)] \quad (3.5)$$

$$p'(x, y, t) = \bar{p}(y) \exp [i\alpha(x - ct)]$$

We zullen ons nu beperken tot een oneindig uitgerekt vlies. Daartoe nemen we aan dat het golfgetal  $\alpha$  een reëel getal is. Dit betekent dat opgelegde verstoringen zich niet instabiel kunnen gedragen in de plaats, geen spatiële groei kunnen vertonen.

De golfsnelheid  $c = c_r + ic_i$  is een complexe grootheid. Dit betekent dat als  $\alpha c_i > 0$  de golf groeit in de tijd en dus instabiel is. De golf is stabiel als  $\alpha c_i < 0$  en neutraal stabiel als  $\alpha c_i = 0$ .

Spreekt men over vliezen die oneindig lang zijn, dan is het een logische zaak dat alleen een groei in de tijd, een temporele groei, in de beschouwing betrokken wordt. Bij vliezen met een eindige lengte zal echter een groei in de plaats een veel belangrijkere invloed op het instabiele gedrag hebben. M.Gaster (1962) toonde aan dat er wel een koppeling bestaat tussen temporele en spatiële groei, maar beide afzonderlijk zijn niet in staat een complete beschrijving van de verschijnselen te geven. De problemen die in dit hoofdstuk zijn opgelost gaan allemaal uit van een temporele groei, omdat deze

het eenvoudigst te behandelen is. Spatieel groeiende golven zijn nog niet bestudeerd. Er zijn wel enkele uitkomsten van andere auteurs gebruikt bij de vergelijking met de gedane experimenten in de vrije grenslaag (zie hoofdstuk 4).

Substitutie van (3.5) in (3.4) geeft de lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$i\alpha \hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \quad (3.6a)$$

$$i\alpha(U-c)\hat{u} + \hat{v} \frac{dU}{dy} + i\alpha \frac{\hat{p}}{\rho} \Rightarrow \left( \frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{u} \right) \quad (3.6b)$$

$$i\alpha(U-c)\hat{v} + \frac{1}{\rho} \frac{d\hat{p}}{dy} \Rightarrow \left( \frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{v} \right) \quad (3.6c)$$

Om de berekeningen eenvoudiger te maken wordt nu de stroomfunctie  $\vec{\Psi} = (0, 0, -\psi)$  ingevoerd. Deze is zodanig gedefinieerd dat:

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{\Psi} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

De stroomfunctie van de hoofdstroom  $\Psi$  wordt nu ook gestoord gedacht:

$$\psi = \Psi(y) + \psi'$$

met:

$$\psi'(x, y, t) = \phi(y) \exp [i\alpha(x-ct)]$$

waarbij:  $u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y}$  en  $v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}$   
 Hieruit volgt:  $\hat{u} = d\phi/dy$ ,  $\hat{v} = -i\alpha\phi$

De stroomfunctie voldoet al aan de continuïteitsvergelijking. Uit (3.6b) volgt onder verwaarlozing van de viskeuze termen:

$$\frac{\hat{p}}{\rho} = \phi \frac{dU}{dy} - (U-c) \frac{d\phi}{dy} \quad (3.7)$$

Substitutie van (3.7) in (3.6c) geeft de Rayleighvergelijking. Deze vergelijking beschrijft de verstoring wanneer de viscositeit buiten beschouwing is gelaten!

$$\phi \frac{d^2 U}{dy^2} - (U - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi = 0 \quad (3.8)$$

Voor de viskeuze situatie geldt de Orr-Sommerfeldvergelijking:

$$\frac{d^2 U}{dy^2} \phi - (U - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi = \frac{i\nu}{\alpha} \left( \frac{d^4 \phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \alpha^4 \phi \right) \quad (3.9)$$

Bij al de in dit rapport behandelde problemen wordt de viscositeit verwaarloosd; we hebben dus overal te maken met vergelijking (3.8). Vergelijking (3.8) heeft 2 onafhankelijke oplossingen  $\phi_1$  en  $\phi_2$ , die analytische functies zijn van  $y, \alpha^2$  en  $c$ . Dit geldt evenwel alleen als de vergelijking geen singulariteit heeft in het stromingsveld, in het bijzonder mag  $c$  nergens in de buurt liggen van  $U(y)$ . Dus:

$$\phi = A_1 \phi_1(y, \alpha^2, c) + A_2 \phi_2(y, \alpha^2, c)$$

waarbij  $A_1$  en  $A_2$  complexe constanten zijn. Na substitutie van  $\phi$  in de randvoorwaarden is het mogelijk  $A_1$  en  $A_2$  te elimineren, zodat een eigenwaardevergelijking ontstaat:

$$F(\alpha^2, c) = 0$$

Meestal is het mogelijk om dan  $c$  als een continue functie van  $\alpha^2$  te schrijven,  $c = c(\alpha^2)$  in een gebied waar  $c$  niet in de buurt van  $U(y)$  komt. In die gevallen dat  $c$  wél in de buurt van  $U(y)$  komt kan de Rayleighvergelijking grote problemen opleveren. Als  $d^2 U / dy^2 \neq 0$  in dat punt, dan is de vergelijking daar singulier en levert geen oplossing meer op. Men moet dan in dat punt een wrijvingscorrectie aanbrengen. Als  $d^2 U / dy^2 = 0$  voldoet in het punt  $U=c$  elke oplossing aan de Rayleighvergelijking, zodat  $\phi$  gewoon continu door kan lopen.

De bij de, voor de niet-viskeuze situatie geldende, Rayleighvergelijking geldende randvoorwaarden zijn:

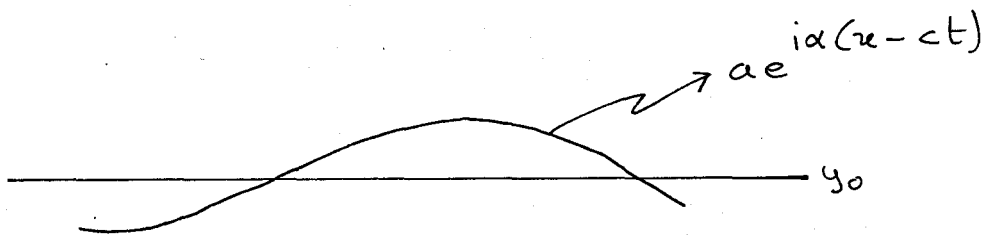
1. Als  $U$  of  $dU/dy$  diskontinu zijn in bijvoorbeeld  $y = y_0$ , dan moet de druk continu zijn over het scheidingsvlak  $y = y_0$ . Daarom moet voor de verstoring gelden:

$$\left[ \frac{dU}{dy} \phi - (U - c) \frac{d\phi}{dy} \right] = 0 \quad \text{in } y = y_0 \quad (3.10)$$

De notatie in formule (3.10) betekent:

$$\lim_{y \downarrow y_0} \left\{ (U - c) \frac{d\phi}{dy} - \frac{dU}{dy} \phi \right\} - \lim_{y \uparrow y_0} \left\{ (U - c) \frac{d\phi}{dy} - \frac{dU}{dy} \phi \right\} = 0$$

2. Een tweede eis is, dat de snelheid normaal op het grensvlak continu is. Stel, dat dit vlak harmonisch beweegt met amplitude  $a$ .



Hieruit volgt voor de vergelijking van het vlak  $G(x, y, t)$ :

$$G(x, y, t) = y - y_0 - a e^{i\alpha(x - ct)} = 0$$

Dus in eerste orde:

$$dG/dt = \partial G / \partial t + U \partial G / \partial x + v' \partial G / \partial y = 0$$

Hieruit volgt:  $v' = i\alpha a (U - c) e^{i\alpha(x - ct)}$

Uit de definitie van  $v' = -\partial \psi' / \partial x$  volgt evenwel  $v' = -i\alpha \phi e^{i\alpha(x - ct)}$ .

Dus:  $a = \phi / (c - U)$ .

De eis van continuïteit van de normale snelheid houdt dus in:

$$\left[ \frac{\phi}{c - U} \right] = 0 \quad (3.11)$$

3. De derde randvoorwaarde eist, dat de verstoring niet meer merkbaar is in het oneindige, dus:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow 0 & \text{als } y &\rightarrow \pm\infty \\ d\phi/dy &\rightarrow 0 & \text{als } y &\rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2 Stromingen met een sprong in het snelheidsprofiel

Om te komen tot uitspraken over een aantal vliesparameters zijn in deze paragraaf enkele problemen opgelost die als overeenkomst hebben, dat ze allemaal te maken hebben met een vlies tussen twee stromingen in, die met verschillende snelheid langs elkaar bewegen. Er wordt aangenomen, dat de snelheid ter hoogte van het vlies een sprong maakt. Men noemt de instabiliteiten die hier ontstaan van het type Kelvin-Helmholtz.

#### 3.2.1 Het scheidingsvlak kan geen drukverschil weerstaan.

Eerst wordt de situatie uitgewerkt, waarin het vlies de bewegingen van de vloeistof volgt zonder de vloeistofstroming te belemmeren. Uitgangspunt zijn twee parallelle, inkompressibele, niet viskeuze stromingen, die een uniform snelheidsprofiel, maar verschillende snelheid hebben. Voor het stromingsprofiel geldt:

$$U(y) = \begin{cases} V & \text{als } y > 0 \\ W & \text{als } y < 0 \end{cases} \quad V > W$$

zie figuur (3.1)

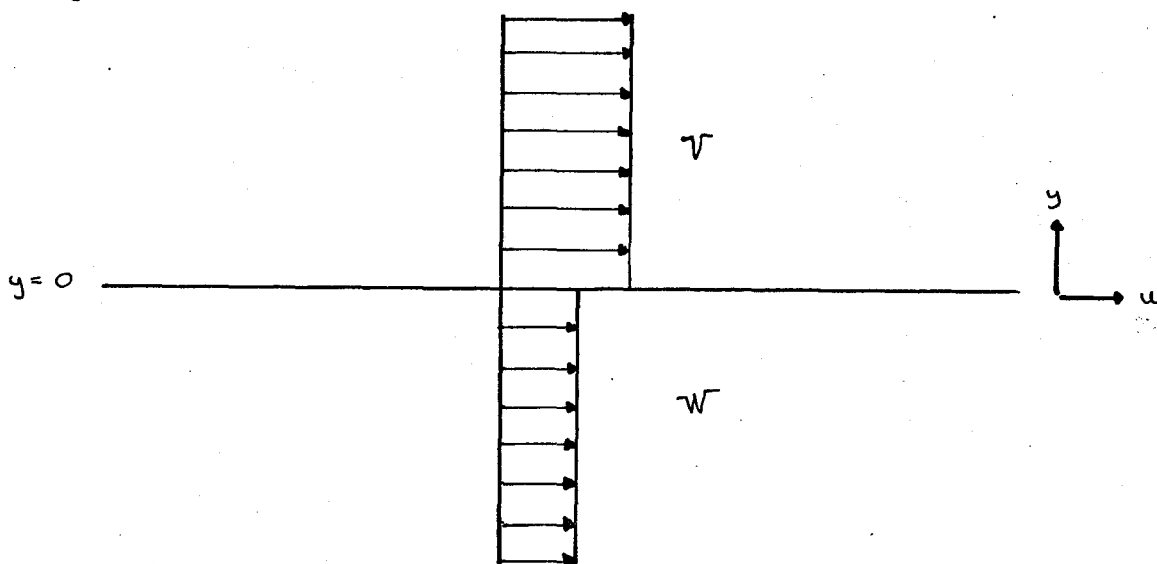


fig. 3.1



Op dit snelheidsprofiel wordt een verstoring aangebracht:

$$u = U(y) + u'(x, y, t)$$

$$v = v'(x, y, t)$$

We gaan de stroming beschrijven met behulp van de stroomfunctie en daarbij zoeken we lopende golfoplossingen van de vorm:

$$\psi' = \phi(y) e^{i\alpha(x-ct)}$$

waarbij:  $u' = \partial\psi'/\partial y$  en  $v' = -\partial\psi'/\partial x$

Dit betekent, dat we vergelijking (3.8) op moeten lossen, ofwel:

$$(U - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi = 0 \quad (\text{voor } y > 0 \text{ en } y < 0) \quad (3.13)$$

Bij deze vergelijking horen de randvoorwaarden:

$$1. \quad \phi(\pm\infty) = \left. \frac{d\phi}{dy} \right|_{\pm\infty} = 0 \quad (3.14)$$

2. Continuïteit van de normale snelheid en druk op  $y = 0$ .

Laten we situaties waarvoor  $U(y) = c$  buiten beschouwing dan gaat (3.13) over in:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi = 0$$

N.B.  $U(y) = c$  kan alleen buiten beschouwing worden gelaten, omdat  $d^2U/dy^2 = 0$ , zie appendix A.

De algemene oplossing van deze vergelijking is:

$$\phi = A e^{\alpha y} + B e^{-\alpha y}$$

Met randvoorwaarde (3.14) geeft dit:

$$\phi = \begin{cases} \phi_1 = B e^{-\alpha y} & y > 0 \\ \phi_2 = A e^{\alpha y} & y < 0 \end{cases}$$

Randvoorwaarde (3.11) voor de snelheid geeft:

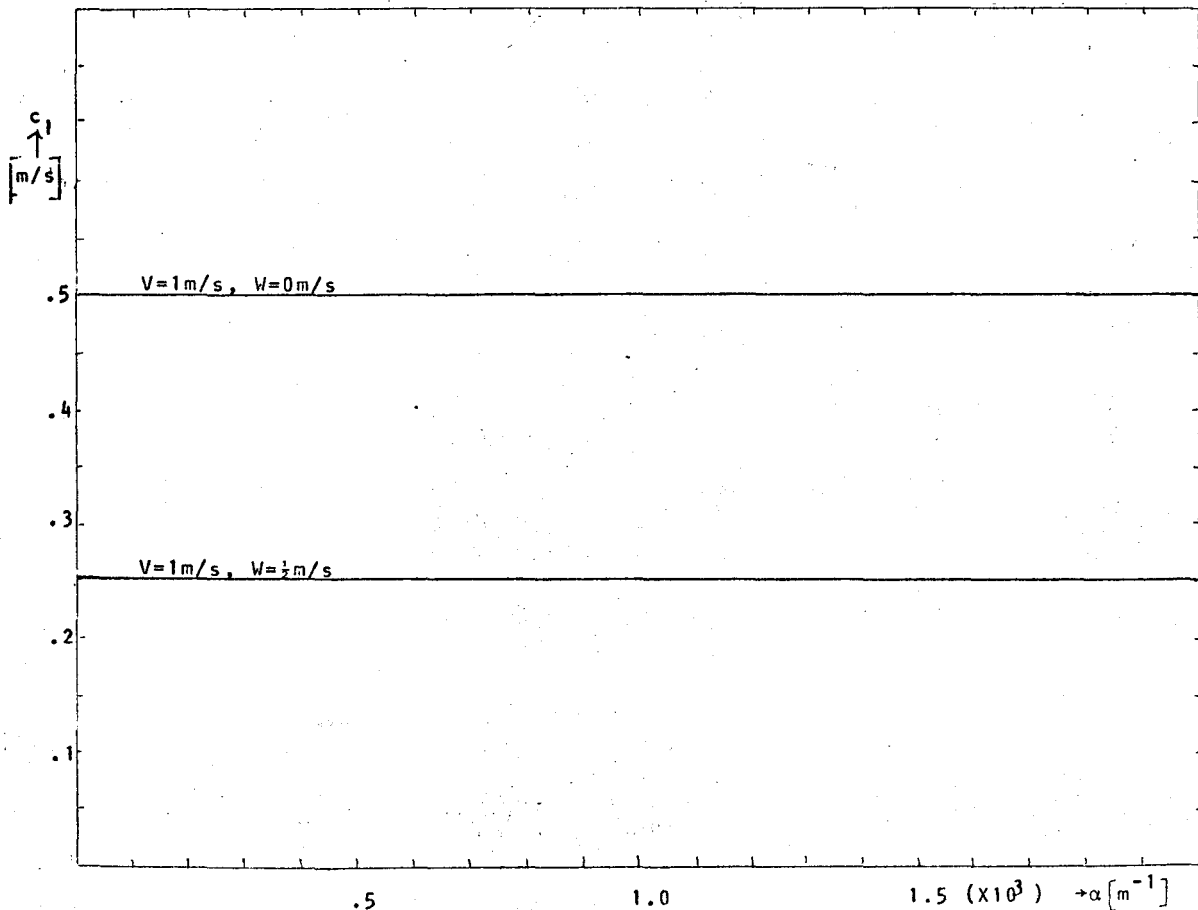
$$\frac{B}{V-c} - \frac{A}{W-c} = 0 \quad (3.15)$$

Randvoorwaarde (3.10) voor de druk geeft:

$$-(V-c) B \alpha - (W-c) A \alpha = 0 \quad (3.16)$$

Uit (3.15) en (3.16) volgt ( $\alpha \neq 0$ ):

$$(V-c)^2 + (W-c)^2 = 0$$



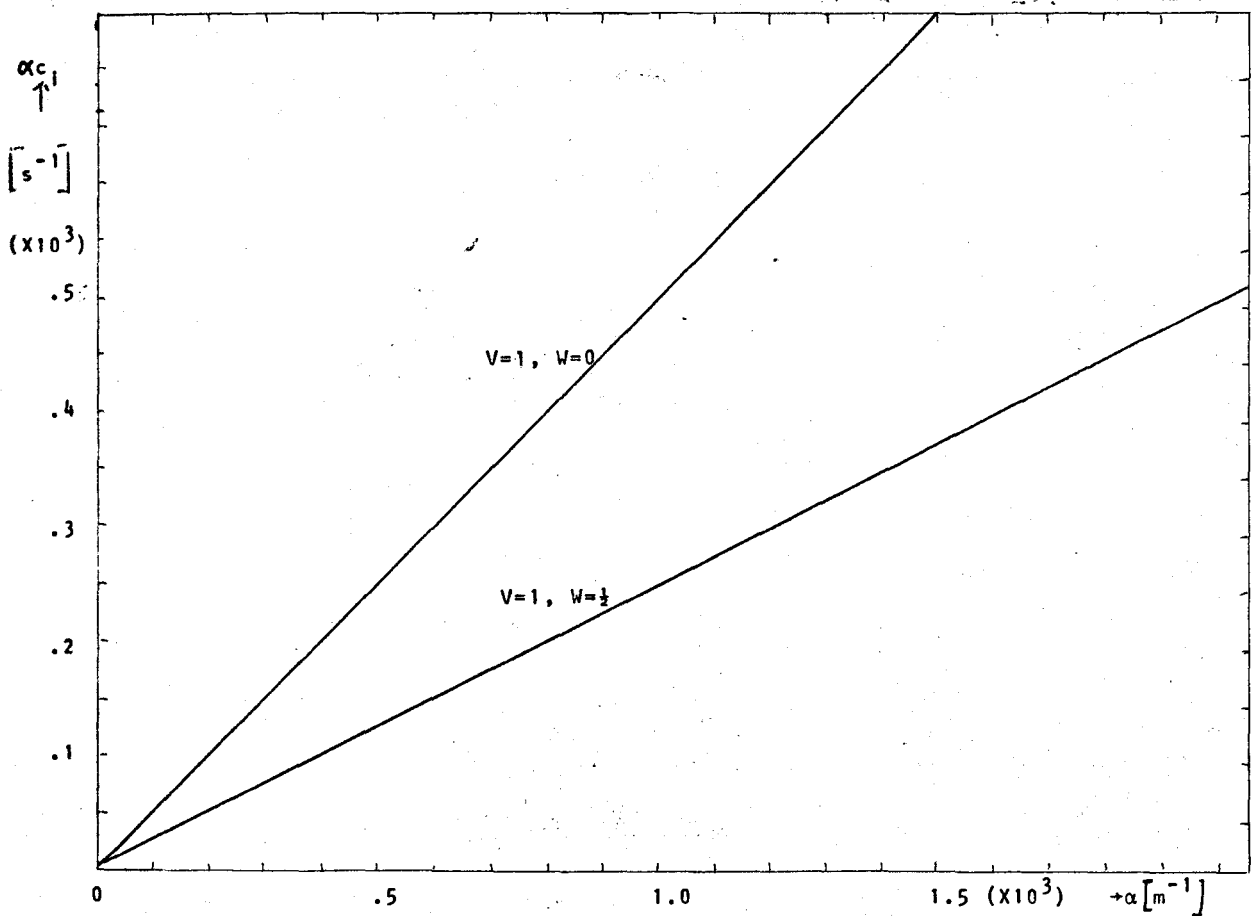
Het Imaginaire deel van de golfsnelheid tegen het golfgetal bij een stroming met een sprong in het snelheidsprofiel.

$\delta f$ :

$$c = \frac{V + W}{2} \pm i \left( \frac{V - W}{2} \right)$$

(3.17)

Dit betekent, dat de verstoring instabiel wordt voor iedere  $\alpha$  als  $V \neq W$ . (zie fig.3.2). De instabiliteit groeit sneller naarmate het golfgetal groter wordt, (fig.3.3) dus de golflengte kleiner wordt. Bovendien blijkt dat een groter snelheidsverschil een snellere groei tot gevolg heeft.



De amplitudegroei tegen het golfgetal bij een stroming met een sprong in het snelheidsprofiel.

fig. 3.3

### 3.2.2 Het scheidingsvlak kan een drukverschil weerstaan.

In paragraaf 3.2.1 wordt ervan uitgegaan dat een vlies met de stroming meebeweegt zonder daarop invloed uit te oefenen. In werkelijkheid heeft het echter een massa. Bovendien zorgt de viskositeit van de vloeistof voor een zekere spankracht in het vlies. Ook kan het vlies zelf een voorspanning hebben. Om de invloed van deze effecten te bestuderen wordt in deze paragraaf aangenomen dat het vlies een drukverschil kan weerstaan. We laten daarom een sprong van de druk toe op  $y = 0$ .

In geval van de spankracht kan het drukverschil worden beschreven als:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = T \frac{d^2 y}{dx^2}$$

(In deze vergelijking, die in eerste orde korrekt is, heeft  $T$  de dimensie: kracht per lengteëenheid.)

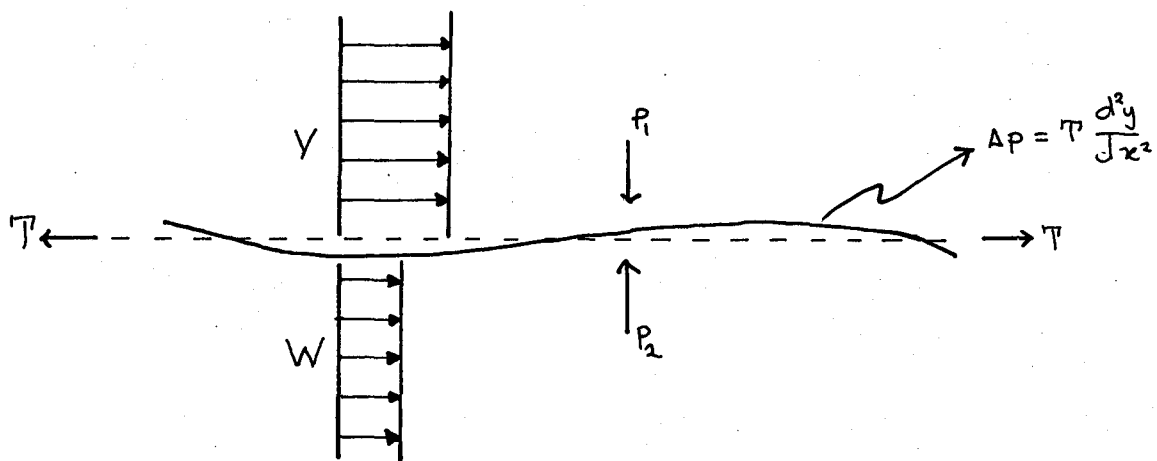


fig. 3.4

De Rayleighvergelijking wordt op analoge wijze opgelost als in paragraaf 3.2.1. Drukvoorwaarde (3.10) wordt nu evenwel:

$$\left[ \frac{dU}{dy} \phi - (U - c) \phi \right] = \frac{1}{\rho} \hat{\Delta} p \quad (3.18)$$

waarbij:

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = \frac{1}{\rho} \hat{\Delta} p e^{i\alpha(x-ct)} = \frac{1}{\rho} (p_1 - p_2) e^{i\alpha(x-ct)}$$

dus (3.18) wordt:

$$\left[ \frac{dU}{dy} \phi - (U - c) \phi \right] = \frac{T}{\rho} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.19)$$

Om nu de tweede afgeleide in  $y$  in vergelijking (3.19) te elimineren, wordt de vliesbeweging gerelateerd aan de vloeistofbeweging. Stel dat op het vlies geldt:

$$y = y_0 \exp [i\alpha(x - ct)]$$

Nu geldt op het vlies ook:

$$v_1 = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.20)$$

In deze formule wordt de snelheid  $v_1$  van het bovengebied beschreven. Men kan de hierna volgende afleiding ook doen voor het gebied  $y < 0$ . Daar de snelheden evenwel op het scheidingsvlak gekoppeld worden d.m.v. voorwaarde 3.12, maakt dat voor de berekeningen niets uit. Uit (3.20) volgt:

$$v_1 = +i\alpha y_0 (V - c) e^{i\alpha(x - ct)} \quad (3.21)$$

maar:

$$v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -i\alpha B e^{-\alpha y} e^{i\alpha(x - ct)} \quad (3.22)$$

Voor  $y = 0$  geldt:

$$v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -i\alpha B e^{i\alpha(x - ct)} \quad (3.23)$$

Dus:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha^2 B}{V - c} e^{i\alpha(x - ct)}$$

Voorwaarde (3.19) wordt dan:

$$\frac{dU}{dy} \phi - (U - c) \frac{d\phi}{dy} = \frac{T}{S} \frac{\alpha^2 B}{V - c} \quad (3.27)$$

Substitutie van  $\phi_1$  en  $\phi_2$  in (3.24) leidt samen met de continuïteitsvoorwaarde voor de normale snelheid tot:

$$(V - c)^2 + (W - c)^2 = \frac{T}{S} \alpha$$

Hieruit volgt:

$$c = \frac{V + W}{2} \pm \left\{ \frac{\alpha T}{2S} - \frac{V - W}{4} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

De golfsnelheid heeft een imaginair deel als hetgeen dat onder het wortelteken staat negatief is. Dus als:

$$\alpha < \frac{S(V - W)}{2T} \quad (3.26)$$

Het blijkt dus, dat er bij iedere golflengte een maximaal snelheidsverschil bestaat, waarboven de verstoring instabiel wordt. Tevens blijkt dat een verhoging van de spankracht stabiliserend werkt.

Om er een idee van te krijgen hoe belangrijk de spankracht is bij hartkleppen is een ruwe schatting gemaakt van de grootte van  $T$ . Hoewel het in strijd is met de aanname dat de stroming niet-viskeus is, nemen we aan dat in het vlies naast een eventuele voorspanning ook een spanning kan ontstaan door de schuifkracht van de vloeistof langs dit vlies. Voor een eerste orde schatting van de schuifspanning geldt:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} = \eta \frac{U_{\max}}{\delta} \quad (3.27)$$

$U_{\max}$  : de snelheid van de hoofdstroming buiten de grenslaag

$\delta$  : de dikte van de grenslaag

$\eta$  : de dynamische viskositeit (kg/ms)

In de fysiologische situatie geldt ongeveer:

$$\eta = 3 * 10^{-3} \text{ Ns/m}^2; U_{\max} = 1 \text{ m/s}; \delta = 10^{-3} \text{ m}$$

Hieruit volgt:  $\tau = 3 \text{ N/m}^2$

Het vlies is ongeveer 1,5cm lang, zodat als schatting voor  $T$  wordt gebruikt:  $T(x) = \int_0^x \tau dx = \tau x$ , dus  $\bar{T} = \int_0^L T(x) dx / L = \frac{1}{2} \tau L$

Dus:  $T = 1.5 * 0.5 * 3 * 10^{-2} = 2.25 * 10^{-2} \text{ N/m}$ . We nemen  $T = 3 * 10^{-2} \text{ N/m}$

In de figuren 3.5 en 3.6 is  $c_i$  en  $\alpha c_i$  uitgezet tegen  $\alpha$ , met gebruikmaking van  $T = 3 * 10^{-2} \text{ N/m}$  voor verschillende waarden van  $V - W$ .

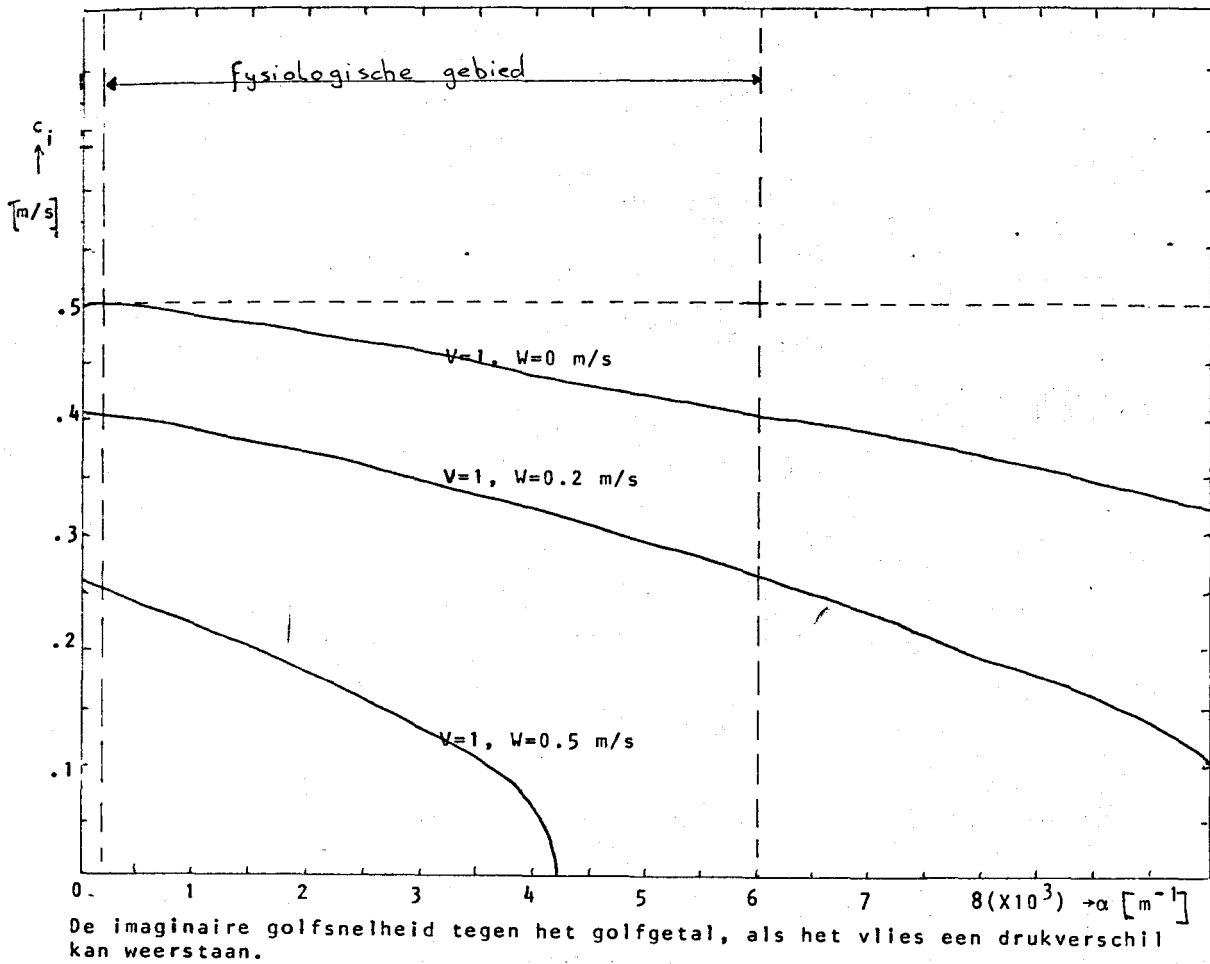


fig 3.5

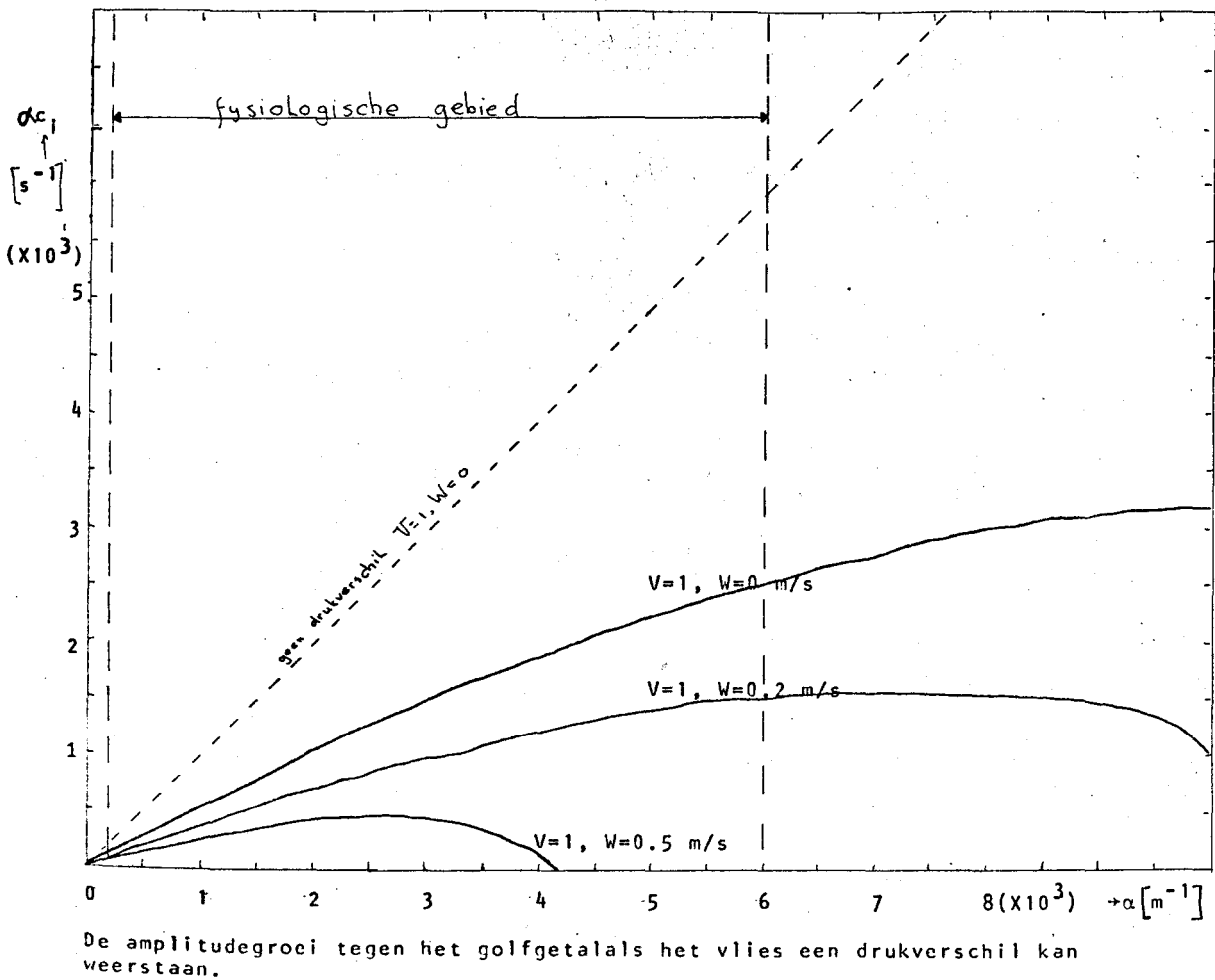


fig 3.6

Uit deze figuren blijkt, dat de horizontale lijnen uit fig. 3.2 nu monotoon dalen en dat het imaginaire deel van de golfsnelheid nul kan worden. De spankracht heeft dus een stabiliserende invloed op de stroming. Bij een snelheidsverschil van 1m/s is daar in het fysiologische gebied nog niet veel van te merken, hooguit een minder snelle groei van de instabiliteit. Bij een snelheidsverschil van 0.5 m/s blijkt de golf die maximaal groeit ( $\alpha$  ongeveer 2300) precies midden in het fysiologische gebied te liggen. Een eventuele extra voorspanning zou het instabiele gebied meer naar de langgolvige kant verschuiven (kleine  $\alpha$ ).

Het veroorzaakte drukverschil kan ook ontstaan doordat het vlies een massa heeft. Dan geldt:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = - \frac{\rho_{\text{vlies}} - \rho_{\text{vloeistof}}}{\rho_{\text{vloeistof}}} * d * \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.28)$$

Hierbij is  $d$  de dikte van het vlies,  $\rho_{\text{vlies}}$  en  $\rho_{\text{vloeistof}}$  zijn de dichtheid van vlies en vloeistof (dimensie  $\text{kg/m}^3$ )

Stel:

$$\frac{\rho_{\text{vlies}} - \rho_{\text{vloeistof}}}{\rho_{\text{vloeistof}}} * d = M$$

Nu geldt met behulp van (3.18) en (3.20):

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = - \frac{BM}{V-c} \alpha^2 c^2 e^{i\alpha(x-ct)}$$

Dus met behulp van vergelijking (3.7) en de randvoorwaarden in  $+\infty$  en  $-\infty$ :

$$(V-c)^2 - (W-c)^2 = -M \alpha c^2 \quad (3.29)$$

Uit (3.29) volgt:

$$c = \frac{W+V}{2+M\alpha} \pm i \frac{\{(V-W)^2 + M\alpha(V^2+W^2)\}^{\frac{1}{2}}}{2+M\alpha} \quad (3.30)$$



Bij invulling van fysiologische waarden blijkt dat de invloed van de massa voor het fysiologische gebied niet relevant is. (de invloed wordt pas goed merkbaar als  $\alpha$  in de buurt van  $10^5 \text{ m}^{-1}$  ligt) In het algemeen kan men echter stellen, dat indien  $M > 0$ ,  $c$  altijd een imaginair deel heeft, wat betekent dat er altijd een instabiliteit optreedt. Deze instabiliteit groeit echter wel langzamer dan in het geval zonder massa. Er gaat dus wel een dempende werking van uit.

Ook is een combinatie van spankracht en massa mogelijk:

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = \frac{1}{\rho} \left\{ T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - M \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\} \quad (3.31)$$

Dit leidt tot:

$$c = \frac{V+W}{2+\alpha M} \pm i \frac{\left\{ \frac{TM}{\rho} \alpha^2 - M(V^2+W^2) - 2 \frac{T}{\rho} \alpha (V-W) \right\}^{\frac{1}{2}}}{2+\alpha M} \quad (3.32)$$

### 3.2.3 De begrensde stroming.

In werkelijkheid heeft men nooit te maken met een oneindig medium. Om de invloed van het niet-oneindig zijn te onderzoeken wordt nu een begrenzing aangebracht. Het stromingsprofiel wordt dan:

$$U(y) = \begin{cases} V & ; 0 < y \leq y_1 \\ W & ; -y_2 \leq y < 0 \end{cases}$$

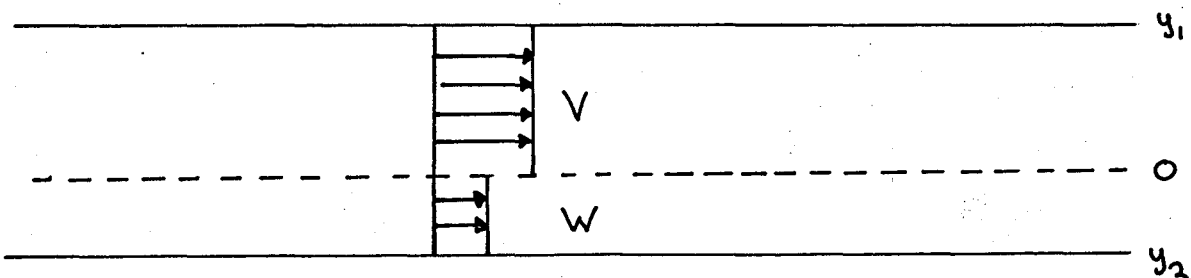


fig 3.7

Extra randvoorwaarde bij dit probleem is de eis, dat de normale snelheid op de wand  $y = y_1$  en  $y = y_2$  gelijk is aan nul.

Dit leidt tot:

$$C = \frac{V \coth \alpha y_1 + W \coth \alpha y_2 \pm i(V-W) [\coth \alpha y_1 \coth \alpha y_2]}{\coth \alpha y_1 + \coth \alpha y_2} \quad (3.33)$$

Deze oplossing is net zoals bij oneindig uitgestrekte lagen instabiel voor iedere  $\alpha$ . Men kan op dezelfde wijze te werk gaan, om de invloed van het drukverschil over het vlies te beschrijven. Daar hier echter geen essentieel andere resultaten uit komen dan de reeds beschrevene, wordt dat hier achterwege gelaten.

### 3.3 Stromingen, waarbij de snelheidsovergangen lineair zijn.

De in paragraaf 3.2 behandelde inviskeuze problemen hebben als overeenkomst, dat er een sprong in de snelheid van de hoofdstroming optreedt. Om te trachten viskeuze effecten na te bootsen, worden in paragraaf 3.3 de stromingsprofielen aangepast. De snelheidsovergangen van de hoofdstroming worden nu continu genomen. De profielen blijven nu echter nog wel lineair, zodat het nog redelijk eenvoudig is om analytische oplossingen te vinden, daar dan in de Rayleighvergelijking de term  $d^2U/dy^2$  verdwijnt.

Bij de problemen die in deze paragraaf worden behandeld, is het handig om met dimensieloze grootheden te werken. Dit in tegenstelling tot paragraaf 3.2 waar namelijk geen karakteristieke lengtemaat te definiëren is. In het vervolg worden dimensievolle grootheden met een sterretje (\*) aangegeven. Deze worden nu als volgt dimensieloos gemaakt:

$$t = t_* U_{\max} / \delta; \quad r = r_* / \delta; \quad u = (U, 0, 0) = u_* / U_{\max};$$

$$p = p_* / \rho U_{\max}^2; \quad Re = U_{\max} \delta / \eta = \text{het getal van Reynolds}$$

Hierbij is:

$U_{\max}$  = de karakteristieke snelheid. Hiervoor wordt de maximum snelheid van de stroming gebruikt.

$\delta$  = de karakteristieke lengtemaat. Hiervoor wordt de dikte van de grenslaag genomen

$\eta$  = de dynamische viskositeit

$\rho$  = de soortelijke massa

### 3.3.1 De "Shear-layer".

De eerste uitbreiding van de Kelvin-Helmholtz-instabiliteit is die van de gewone "shear-layer". De situatie van paragraaf 3.2.1 wordt uitgebreid met een lineaire overgang. Voor de eenvoud wordt aan beide zijden van het vlies een tegengestelde snelheid verondersteld (zie fig 3.8)

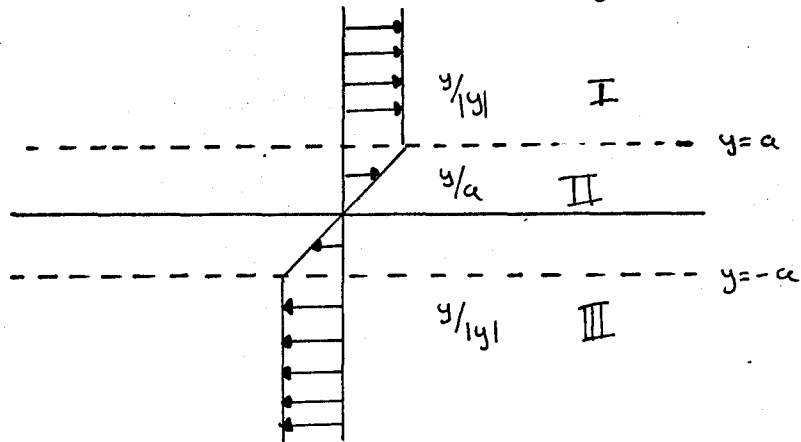


fig 3.8

Het stromingsprofiel wordt nu:

$$U(y) = \begin{cases} y/|y| & |y| > a \\ y/a & |y| < a \end{cases}$$

De grootte  $a$  wordt als variabele in de berekeningen meegenomen. De dikte van de grenslaag is echter de karakteristieke lengtemaat. Daarom is alleen de waarde  $a = 1$  fysisch reëel. De limiet voor  $a$  gaat naar 0 moet het model uit paragraaf 3.2.1 opleveren.

Er wordt gezocht naar lopende golfoplossingen van de vorm:

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) e^{i\alpha(x - ct)}$$

Voor  $\phi$  geldt (behalve in  $y = \pm a$ ) de Rayleighvergelijking:

$$\frac{d^2 U}{dy^2} \phi - (U - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi = 0$$

De randvoorwaarden hierbij zijn:

1.  $\phi(\infty) = \phi(-\infty) = 0$
2. De normale snelheid is continu op  $y = a$  en  $y = -a$
3. De druk is continu op  $y = a$  en  $y = -a$ .

In de gebieden I ( $y > a$ ), II ( $-a < y < a$ ), III ( $y < -a$ ) geldt, dat  $d^2U/dy^2 = 0$ , dus:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi = 0 \quad (\text{mits } U \neq c, \text{ zie par. 3.4.2})$$

Men kan in deze gebieden zoeken naar oplossingen van de vorm:

$$\phi = A e^{\alpha y} + B e^{-\alpha y}$$

Kies voor  $\phi_I, \phi_{II}, \phi_{III}$  de volgende vorm:

$$\begin{cases} \phi_I = A e^{-\alpha(y-a)} + B e^{-\alpha(y+a)} & y > a \\ \phi_{II} = A e^{\alpha(y-a)} + B e^{-\alpha(y+a)} & -a < y < a \\ \phi_{III} = A e^{\alpha(y-a)} + B e^{\alpha(y+a)} & y < -a \end{cases}$$

Deze oplossingen zijn zodanig gekozen, dat zij reeds aan de randvoorwaarden 1 en 2 voldoen. De oplossingen moeten ook voldoen aan de drukvoorwaarde zoals beschreven in vergelijking (3.10). In  $y = a$  geldt dan dat:

$$\begin{aligned} \phi(a) = A + B e^{-2\alpha a} \quad \text{en} \quad \left( \frac{\partial \phi_I}{\partial y} \Big|_a - \frac{\partial \phi_{II}}{\partial y} \Big|_a \right) &= -2\alpha A \\ \left( \frac{\partial U_I}{\partial y} \Big|_a - \frac{\partial U_{II}}{\partial y} \Big|_a \right) &= -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

Dus (3.10) wordt:

$$\left[ 1 - (1-c)2\alpha a \right] A + B e^{-2\alpha a} = 0 \quad (3.34)$$

In  $y = -a$  geldt:

$$\left[ 1 - (1+c)2\alpha a \right] B + A e^{-2\alpha a} = 0 \quad (3.35)$$

Uit (3.34) en (3.35) volgt:

$$c^2 = \frac{1}{4\alpha^2 a^2} \left\{ (2\alpha a - 1)^2 - e^{-4\alpha a} \right\} \quad (3.36)$$

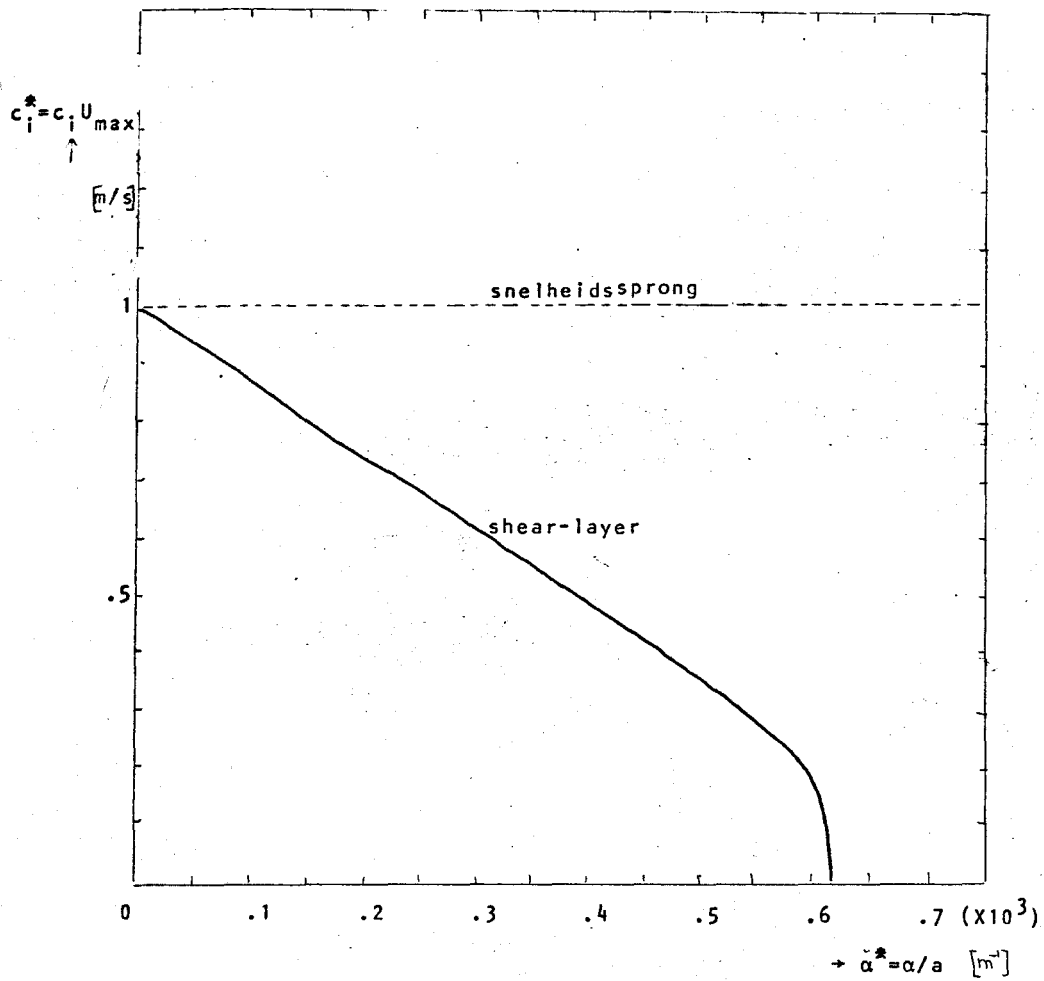


fig 3.9

De imaginaire golfsnelheid tegen het golfgetal bij een stroming met een "shear-layer".

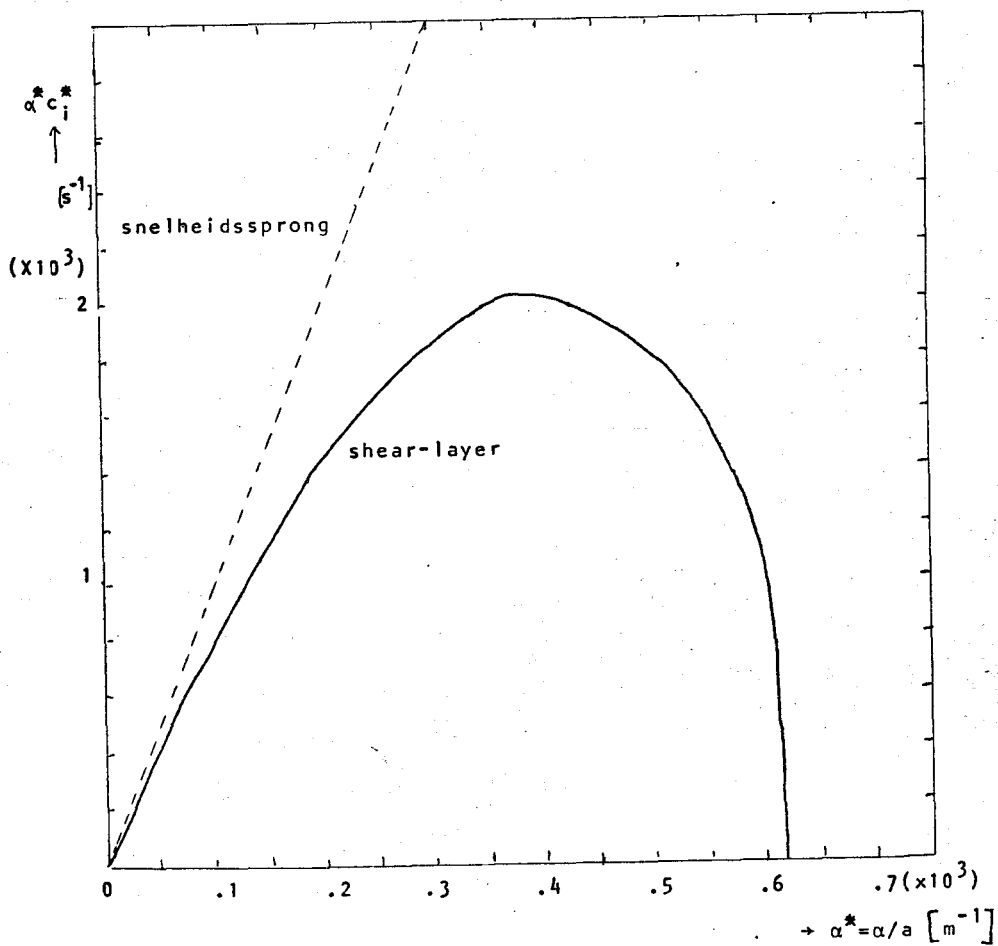


fig 3.10

De amplitudegroei tegen het golfgetal bij een stroming met een "shear-layer".

Uit (3.36) blijkt, dat de golfsnelheid  $c$  een imaginair deel heeft als  $\alpha^* < 0.64 \cdot 10^3$ . In figuur 3.9 en 3.10 zijn de dimensievolle grootheden  $c_i^*$  en  $\alpha^* c_i^*$  uitgezët tegen  $\alpha^*$ . Het blijkt, dat er in deze situatie weer een eindig instabiel gebied ontstaat. Verstoringen met een golfgetal groter dan  $0.64$  veroorzaken geen instabiel gedrag meer. De shear-layer werkt dus in dit geval stabiliserend.

Vergelijking met de fysiologie is in dit geval niet zo zinvol, omdat daar aan beide zijden van het vlies de snelheden dezelfde richting hebben. Alleen de situatie, waarvoor geldt dat de snelheid onder het vlies gelijk is aan nul komt voor vergelijking met de fysiologie in aanmerking. Op dezelfde manier als hierboven volgt dan uit de Rayleighvergelijking:

$$c = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\alpha a} \{ (\alpha a - 1)^2 - e^{-2\alpha a} \}^{\frac{1}{2}}$$

Nu is de maximale waarde van  $\alpha$ , waarbij nog instabiliteit optreedt gelijk aan  $1.28$ . Bovendien heeft  $c$  een reëel deel gekregen. De snelheid waarmee de golven zich voortplanten is gelijk aan de helft van de hoofdstroomsnelheid.

Ter controle is nog nagegaan of formule (3.36) de oplossing van paragraaf 3.2.1 oplevert als  $a \rightarrow 0$ . Ontwikkelt men de e-macht uit (3.36) in een reeks, dan ontstaat:

$$c^2 = \frac{1}{4\alpha^2 a^2} \left\{ 4\alpha^2 a^2 - 4\alpha a + 1 - 1 + 4\alpha a - 8\alpha^2 a^2 + \dots \right\} \quad (3.37)$$

als  $a \rightarrow 0$  kan men derde-orde termen en hoger verwaarlozen en dan gaat (3.37) over in:

$$c^2 = \frac{1}{4\alpha^2 a^2} \left( -4\alpha^2 a^2 \right) = -1$$

of:  $c = \pm i$

Dit volgt ook uit vergelijking (3.17) met  $V = 1$  m/s en  $W = -1$  m/s.

### 3.3.2 "Shear-layer"-model voor de stroming langs een vlies

In het model uit paragraaf 3.3.1 hadden de stromingen langs het vlies een tegengestelde richting. Bij een hartklep stroomt het bloed aan beide zijden in dezelfde richting. Daarom wordt in deze paragraaf uitgegaan van een "Shear-layer"-model, waarbij de vloeistoffen dezelfde kant op stromen, maar met verschillende snelheid. Het vlies is oneindig dun en niet in staat een drukverschil te weerstaan. Bovendien wordt aangenomen dat langs het vlies de tangentiële snelheid nul is. De normale snelheid van de stroming bij het vlies is gelijk aan de normale snelheid van het vlies.

De karakteristieke snelheid en lengtemaat zijn: de grootste snelheid van de hoofdstroming en de daarbij behorende grenslaag. Het stromingsprofiel wordt dan (zie fig. 3.11):

$$U(y) = \begin{cases} y/|y| & y > 1 & \text{gebied I} \\ y & 0 < y < 1 & \text{gebied II} \\ -(V/d)y & -d < y < 0 & \text{gebied III} \\ -V y/|y| & y < -d & \text{gebied IV} \end{cases}$$

In de gebieden I, II, III en IV wordt weer gezocht naar lopende golfoplossingen van de vorm:

$$\phi_i = A e^{\pm \alpha y} + B e^{\pm \alpha y}$$

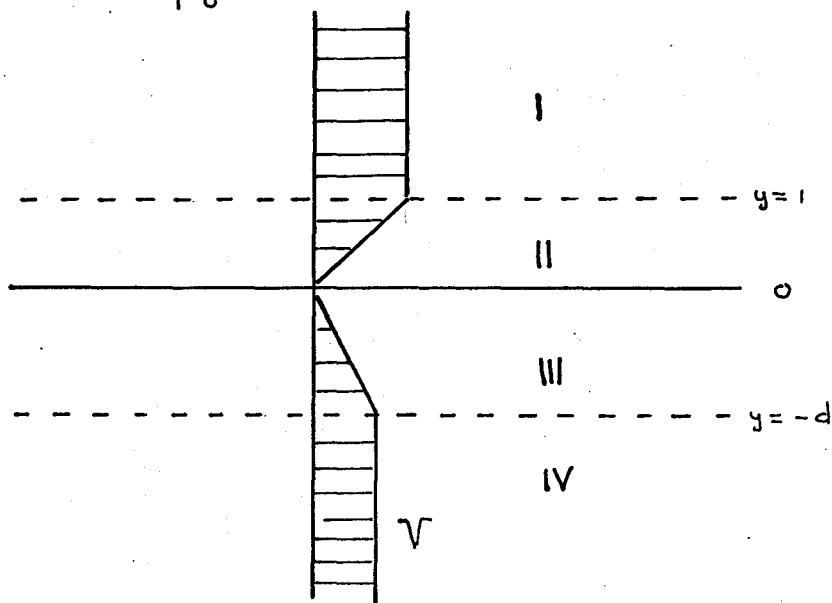


fig 3.11

Op dezelfde manier als in paragraaf 3.3.1 geldt:

$$\phi_1 = A e^{-\alpha(y-1)} + B e^{-\alpha y} + C e^{-\alpha(y+d)}$$

$$\phi_2 = A e^{\alpha(y-1)} + B e^{-\alpha y} + C e^{-\alpha(y+d)}$$

$$\phi_3 = A e^{\alpha(y-1)} + B e^{\alpha y} + C e^{-\alpha(y+d)}$$

$$\phi_4 = A e^{\alpha(y-1)} + B e^{\alpha y} + C e^{\alpha(y+d)}$$

De drukvoorwaarde leidt tot:

$$\{2\alpha(1-c)-1\}A - e^{-\alpha}B - e^{-\alpha(d+1)}C = 0 \text{ in } y=1$$

$$(d+V)e^{-\alpha}A + (d+V-2\alpha dc)B + (d+V)e^{-\alpha d}C = 0 \text{ in } y=1$$

$$-Ve^{-\alpha(d+1)}A - Ve^{-\alpha d}B + \{(V-c)2\alpha d - V\}C = 0 \text{ in } y=-d$$

Dit stelsel heeft een onafhankelijke oplossing als de determinant van de coëfficiënten nul is, dus:

$$\begin{vmatrix} 2\alpha(1-c)-1 & -e^{-\alpha} & -e^{-\alpha(d+1)} \\ (d+V)e^{-\alpha} & d+V-2\alpha dc & (d+V)e^{-\alpha d} \\ -Ve^{-\alpha(d+1)} & -Ve^{-\alpha d} & (V-c)2\alpha d - V \end{vmatrix} = 0$$

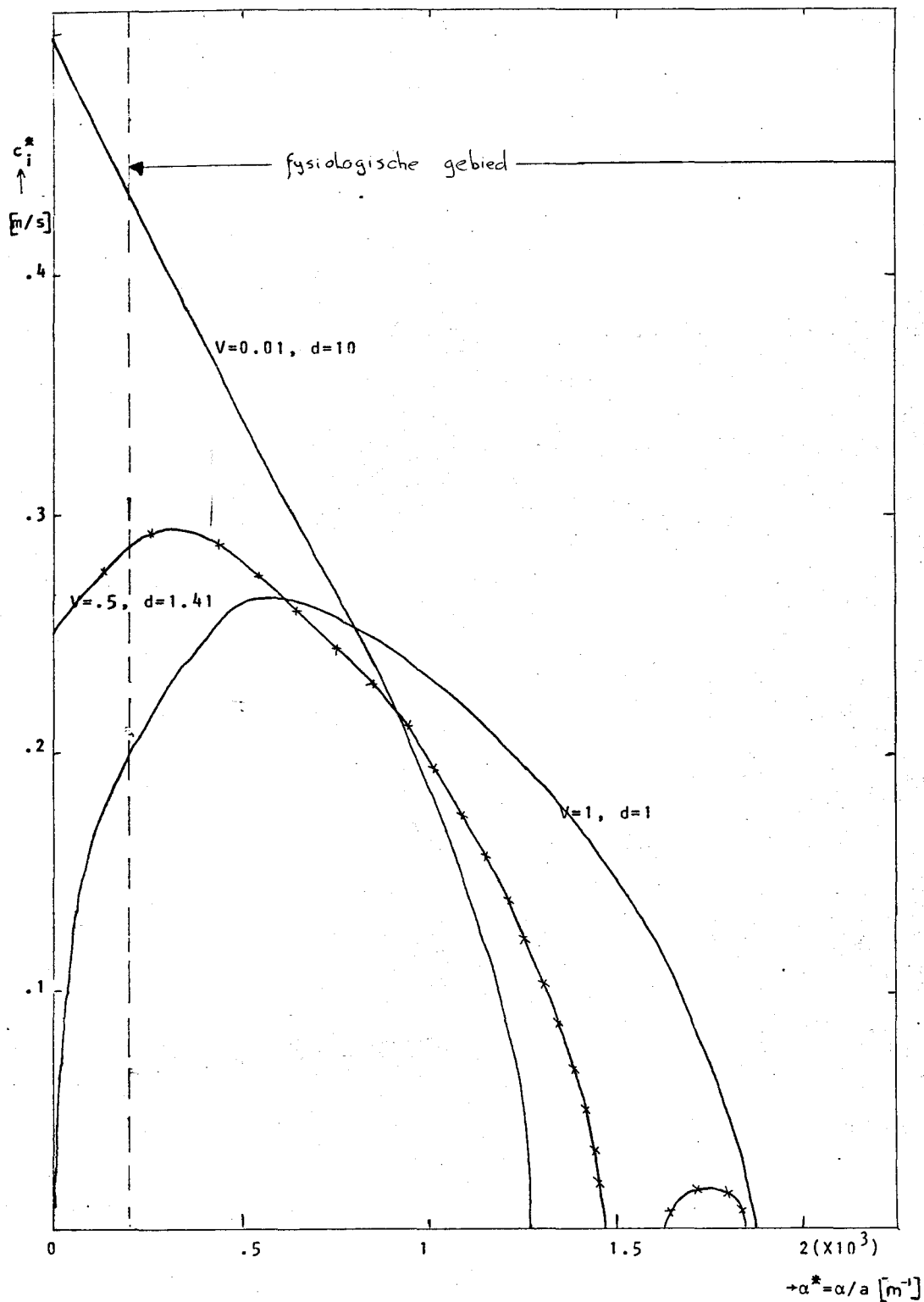
(3.38)

Deze vergelijking is opgelost voor een aantal gevallen. Hierbij is de hoofdstroomsnelheid  $V$  gevarieerd. Wat betreft de grenslaagdikte is uitgegaan van de relatie tussen  $d$  en  $V$  volgens Blasius (zie oa. Schlichting, 1951, par. VIIa), welke geldig is voor een stroming langs een vlakke plaat:

$$V^{-\frac{1}{2}} \sim d$$

De resultaten staan in figuur 3.12 en 3.13.





De imaginaire golfsnelheid tegen het golfgetal bij het "shear-layer"-model.

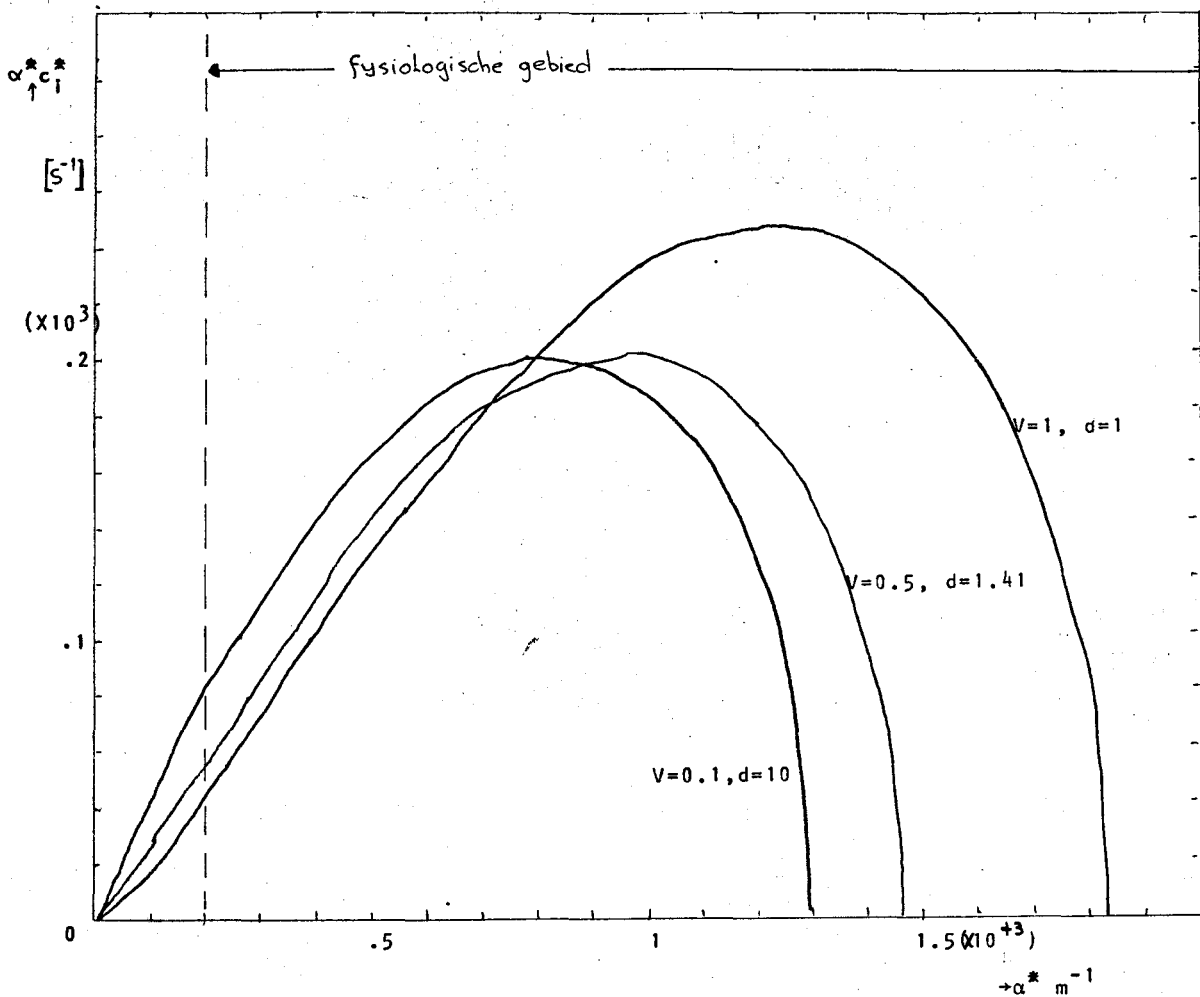
fig 3.12

De situatie, waarvoor geldt dat  $V = 0$  komt overeen met de "shear-layer" uit paragraaf 3.3.1. Laat men de hoofdstroomsnelheid toenemen tot  $V = 1$ , dan blijkt de stroming stabielere te worden voor verstoringen met een grote golflengte ( $\alpha$  klein), in die zin dat deze minder snel groeien. Het instabiele gebied breidt zich echter uit aan de kortgolvige kant.

In tegenstelling tot wat het model met de snelheidssprong voorspelt geeft een evengrote snelheid aan beide zijden van het vlies toch instabiel gedrag.

Uit figuur 3.13 blijkt, dat de maximale groei zelfs hoger is dan in de situaties met een snelheidsverschil. Hier werkt de "Shear-layer" dus destabiliserend.

Vult men fysiologische waarden in, dan blijkt het golfgetal met maximum groei in de buurt van  $1000 \text{ m}^{-1}$  te liggen. Dit komt overeen met een golflengte van ongeveer 6 mm. Dit is ongeveer de halve vlieslengte.



De amplitudegroei tegen het golfgetal bij het "shear-layer"-model.

fig. 3.13

### 3.3.3 Stromingen met een gebroken profielvorm.

Tot slot is er nog een berekening uitgevoerd, waarbij de mogelijkheid van bolle en holle profielen in rekening is gebracht. Hiertoe wordt een extra knikpunt in het profiel aangenomen. Om de berekeningen toch nog redelijk eenvoudig te houden veronderstellen we de snelheid onder het vlies gelijk aan nul. Dit leidt tot het volgende stromingsprofiel:

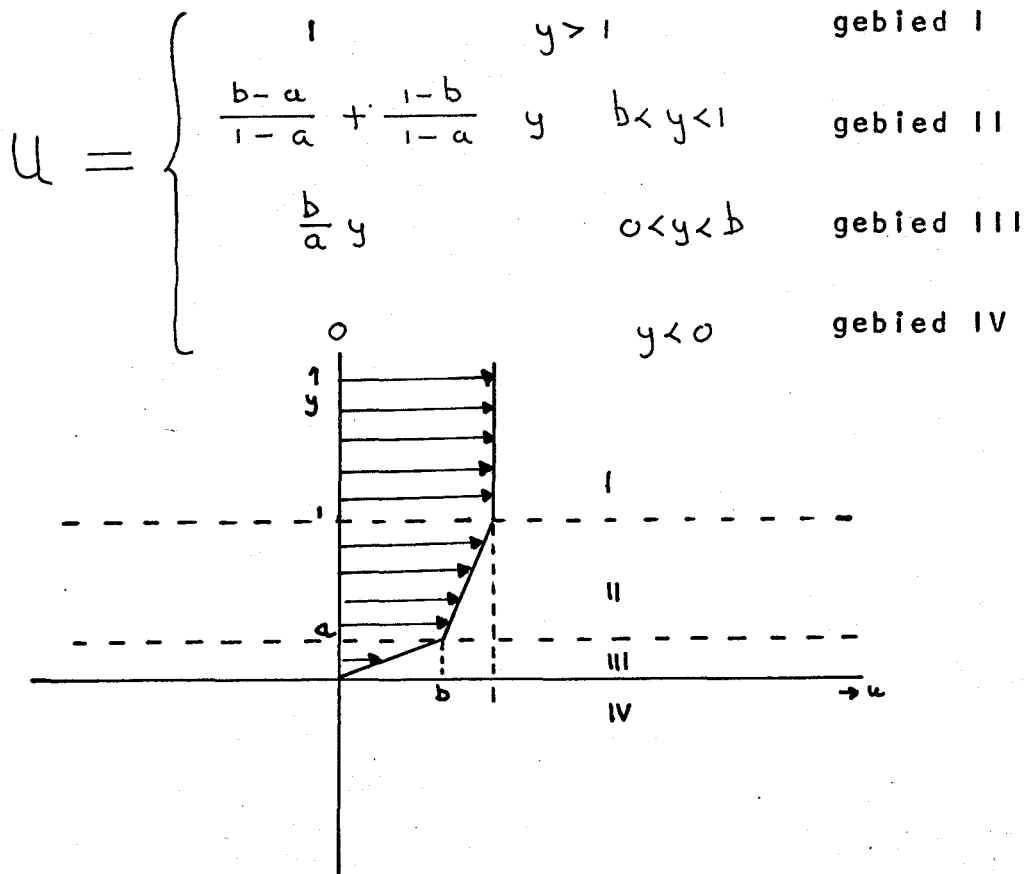


fig 3.14

Als  $b > a$  spreken we van een "bol" profiel, is  $b < a$  van een "hol" profiel. Probeer als oplossing van de Rayleighvergelijking:

$$\phi_1 = A e^{-\alpha(y-1)} + B e^{-\alpha(y-a)} + C e^{-\alpha y}$$

$$\phi_2 = A e^{\alpha(y-1)} + B e^{-\alpha(y-a)} + C e^{-\alpha y}$$

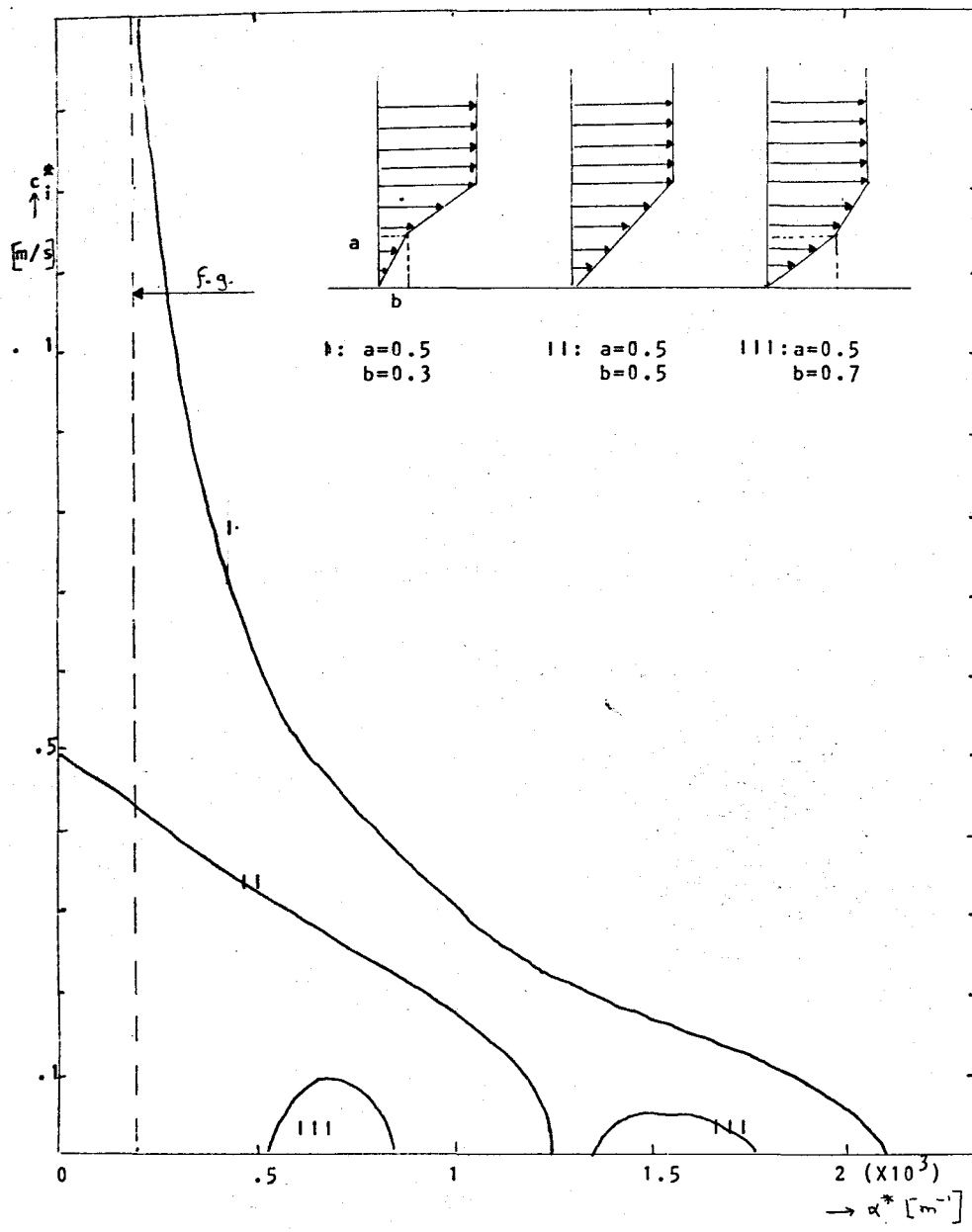
$$\phi_3 = A e^{\alpha(y-1)} + B e^{\alpha(y-a)} + C e^{-\alpha y}$$

$$\phi_4 = A e^{\alpha(y-1)} + B e^{\alpha(y-a)} + C e^{\alpha y}$$

Op dezelfde manier als in paragraaf 3.3.2 leiden de randvoorwaarden tot een determinant die gelijk moet zijn aan nul.

$$\begin{vmatrix} 2\alpha(1-c)(1-a) + b - 1 & (b-1)e^{-\alpha(1-a)} & (b-1)e^{-\alpha} \\ (a-b)e^{\alpha(a-1)} & 2\alpha(1-a)(b-c) + (a-b) & (a-b)e^{-\alpha a} \\ be^{-\alpha} & be^{-\alpha} & b - 2\alpha ac \end{vmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

Met behulp van een computer is deze vergelijking opgelost voor drie combinaties van  $a$  en  $b$ . De resultaten zijn weergegeven in grafiek 3.15. De situatie, waarvoor geldt dat  $a = b = \frac{1}{2}$  is weer de "Shear-layer". Uit de grafieken blijkt dat het holle profiel veel instabieler is dan het bolle profiel. Dit komt overeen met een stelling van Rayleigh over profielen met een buigpunt (zie appendix A)



De imaginaire golfsnelheid tegen het golfgetal bij stromingen met een gebroken profielvorm.

fig 3.15

### 3.4 Konklusies en diskussie.

In deze paragraaf zullen eerst de uitkomsten van de diverse modellen worden besproken. Daarna zal de fysische bruikbaarheid van de modellen en de rekenmethode aan de orde komen.

#### 3.4.1 De uitkomsten van de problemen.

Allereerst dient gesteld te worden, dat een aantal van de hier gepresenteerde uitwerkingen al bekend zijn uit de literatuur. Er is getracht om zoveel mogelijk eenduidigheid in de manier van oplossen te krijgen. De volgorde, waarin de problemen worden behandeld, illustreert de werkwijze. Er is begonnen met een erg eenvoudig model, dat langzaam uitgebreid is tot het model uit paragraaf 3.3.2.

Het eerste probleem (paragraaf 3.2.1) is al door Kelvin (1871) en Helmholtz (1868) opgelost in de vorige eeuw. Het blijkt, dat twee niet-viskeuze, parallelle stromingen die met verschillende snelheid bewegen, altijd instabiel worden tengevolge van het snelheidsverschil. De instabiliteit groeit sneller naarmate het snelheidsverschil groter wordt. Kiest men het golfgetal  $\alpha > 0$ , dan blijkt er altijd een instabiele oplossing te bestaan ( $c_i > 0$ ), die vergezeld wordt van een oplossing die gedempt wordt ( $c_i < 0$ ). Alle oplossingen van de Rayleighvergelijking hebben deze symmetrie en dit geldt dus voor alle niet-viskeuze problemen. (Het doet voor de algemeenheid van de oplossing dus niet ter zake of men  $\alpha > 0$  of  $\alpha < 0$  kiest).

Het probleem uit paragraaf 3.2.2 sluit beter aan bij de realiteit dan het eerste. Het is namelijk waarschijnlijk, dat het vlies een klein drukverschil kan weerstaan vanwege een spankracht of de massa.

De spankracht blijkt inderdaad stabiliserend te werken. Bij ieder snelheidsverschil is er een golfgetal  $\alpha_{\max}$  waarvoor geldt, dat verstoringen met een groter golfgetal niet meer instabiel worden. Bovendien blijkt er een golfgetal te zijn, waarvoor de verstoring maximaal groeit. Bij de gebruikte schatting voor de spankracht  $T$  blijkt, dat pas bij een snelheidsverschil van 0.5 m/s het golfgetal  $\alpha_{\max}$  in het fysiologische gebied ligt. Bij grotere snelheids-

verschillen is weliswaar sprake van een minder snelle groei dan in de situatie zonder spankracht, maar dit effect is erg klein. Het is echter goed mogelijk dat de schatting voor  $T$  te laag is, bijvoorbeeld als er een voorspanning in het vlies aanwezig is. Bovendien zal het effect altijd optreden in combinatie met andere, wellicht dempende factoren. De massa blijkt alleen invloed te hebben op de groei van de instabiliteit, maar niet op de grootte van het instabiele gebied. In de fysiologische situatie is deze invloed echter zo klein, dat deze verwaarloosd kan worden. Hierbij dient evenwel opgemerkt te worden dat de gebruikte waarde voor  $\rho_{\text{vlies}}$  erg onnauwkeurig is en een kleine variatie in  $\rho_{\text{vlies}}$  kan veel invloed op de uitkomst hebben.

In werkelijkheid hebben we natuurlijk nooit te maken met oneindig dikke lagen vloeistof. Daarom is in paragraaf 3.2.3 getracht begrenzungen in de breedte in rekening te brengen. Dit probleem is al beschreven en uitgewerkt door Kelvin (1871) en Rayleigh (1894). Het blijkt, dat het aanbrengen van vaste wanden de grootte van het instabiele gebied niet beïnvloedt. Wel is er enige invloed met betrekking tot de groei en de voortplantingssnelheid, maar deze invloed neemt zeer snel af, als de afstand  $y$  tot het scheidingsvlak toeneemt. Gaat men uit van verstoringen, waarbij 2<sup>de</sup>-orde-effecten niet meer te verwaarlozen zijn, dan zal waarschijnlijk de invloed van de wand groter worden.

Bij de problemen uit paragraaf 3.3 is getracht de invloed van viskeuze effecten na te bootsen door de profielvorm aan te passen. Het blijkt, dat de overgang van stromingsprofielen met een diskontinuiteit naar continue profielen, die uit lineaire stukken bestaan, een grote invloed heeft op het gedrag van de stroming.

Het probleem uit paragraaf 3.3.1 is in deze vorm het eerst opgelost door Rayleigh (1894). Men noemt een stromingsprofiel met die vorm een "Shear-layer" (zie Drazin en Howard, 1966, pag. 32,33). Het blijkt, dat de aanname van zo'n stromingsprofiel een stabilisering voor kleine golflengtes tot gevolg heeft. Bovendien is er duidelijk een golflengte herkenbaar, waarbij de groei van de instabiliteit maximaal is.

In paragraaf 3.3.2 is de methode van Rayleigh toegepast op de stroming langs een vlies. Aan beide zijden van het vlies is de richting van de stroomsnelheid hetzelfde. Hier blijkt, dat de "Shear-layer" zowel een dempend effect, als een versterkend effect op verstoringen kan hebben. Het geval, waarvoor geldt dat de snelheid onder het vlies  $V = 0$ , komt overeen met de "Shear-layer" uit paragraaf 3.3.1 en leidt tot stabilisering. Bij een toenemende hoofdstroomsnelheid  $V$  onder het vlies, blijkt de golf met maximale groei naar de kortgolvlige kant te verschuiven; het instabiele gebied wordt groter. Dit is een destabiliserend effect van de "Shear-layer". Hierbij moet wel worden opgemerkt dat lange golven minder hard gaan groeien.

De stromingen uit paragraaf 3.3.3 tenslotte tonen aan dat een "bol" profiel zeer stabiel is en een "hol" profiel erg instabiel. Dit komt overeen met de stelling van Rayleigh (1880) over buigpunten in profielen (zie Appendix A) en de bevindingen van Prandtl (1921) en Tietjens (1925) met betrekking tot gebroken profielen langs een starre vlakke plaat, waarbij ook een bol profiel stabiel en een hol profiel instabiel blijkt te zijn.

#### 3.4.2 De rekenmethode en de bruikbaarheid van de modellen

Het blijkt, dat in principe voor alle modellen, waarbij men aanneemt dat de stroming niet-viskeus en inkompressibel is en waar de stromingsprofielen stuksgewijs lineair zijn, een analytische oplossing te vinden is. Deze oplossingen blijken wel erg snel ingewikkelder te worden als er meer vlakken optreden, waarin de snelheid en/of de afgeleide van de snelheid diskontinu zijn.

Al zijn de lineaire profielen nog goed handelbaar, de profielen waar  $d^2U/dy^2 \neq 0$  geven een geheel nieuw soort moeilijkheden. De plaats waar  $U = c$  levert in de lineaire situatie nog weinig problemen op, doordat dan nog voor iedere  $\phi$  aan de vergelijking van Rayleigh is voldaan op dat punt. Er is dan ook geen enkel bezwaar om daar  $\phi$  gewoon door te laten lopen. Is echter  $d^2U/dy^2 \neq 0$  dan wordt de Rayleighvergelijking singulier; dit betekent, dat  $d\phi/dy = \infty$  als  $U = c$ . Dus wordt dan ook de snelheid van de verstoring in de  $x$ -richting  $u'$  oneindig groot.



Daarom kan men op deze plaats in de stroming niet meer de wrijvingseffekten buiten beschouwing laten. Tollmien (1929) was de eerste die dit probleem op een bevredigende manier oploste. De methode houdt in, dat men  $\phi$  ontwikkelt in machtreeksen van  $y - y_k$ , waarbij  $y_k$  de kritische waarde van  $y$  is, waarvoor geldt  $U(y_k) = c$ . Om tot een fysisch reële oplossing te komen wordt op de reeksen een wrijvingskorrektie aangebracht. Men neemt dan aan, dat ter plaatse van  $y_k$  de wrijving niet meer te verwaarlozen is. Binnen het kader van het hartkleppenproject voert het nog te ver, om dergelijke theorieën toepasbaar te maken op stromingen langs vliezen, waar aan twee kanten een vloeistof langs stroomt (er zijn dan twee kritische waarden van  $y$  waarvoor geldt  $U = c$ )

Naast de lineariteit is er nog een tweede beperking van groot belang. Bij alle problemen is uitgegaan van media die zich uitstrekken van  $x = -\infty$  tot  $x = +\infty$ . Het is dan triviaal om de groei in de plaats niet in de beschouwing te betrekken, maar alleen een temporele groei. In werkelijkheid hebben we echter altijd te maken met eindig uitgestrekte media. Het is dan ook waarschijnlijk dat een groei in de plaats een betere beschrijving kan geven dan een temporele groei. Men kan beide methoden wel koppelen door uit te gaan van een met de stroming meebewegende waarnemer (Gaster, 1962), maar geheel bevredigend is dit niet. Door tijdgebrek is het niet meer mogelijk geweest, om een uitgebreide studie te maken van de spatiële groei. Wel is een resultaat van dergelijke berekeningen gebruikt om te vergelijken met gedane experimenten (zie hoofdstuk 4).

Om tot duidelijke kwantitatieve uitspraken te komen zullen de modellen wel uitgebreid moeten worden. Men kan hierbij denken aan het in rekening brengen van parameters als de vlielengte en de viskositeit, maar ook aan het combineren van parameters als het drukverschil en de profielvorm, die nu nog afzonderlijk worden behandeld. Het blijkt echter, dat nu al duidelijke uitspraken kunnen worden gedaan over de invloed van een aantal parameters, ofschoon deze uitspraken een kwalitatief karakter hebben.

## HOOFDSTUK 4: EXPERIMENTEN.

### 4.1 Inleiding

De experimenten die in dit hoofdstuk worden beschreven hadden het volgende doel:

1. Een kwalitatieve analyse doen van het instabiele gedrag van een dun, flexibel vlies in een twee-dimensionale stroming teneinde een eerste toetsing te krijgen van de theoretische modellen.
2. Bestudering van de invloed van de lengte van een vlies op zijn instabiele gedrag. De vlieslengte lijkt ons een belangrijke parameter die theoretisch echter nog niet binnen onze mogelijkheden ligt.
3. Het uitproberen van een aantal, binnen het hartkleppen-projekt gebruikelijke, meettechnieken, om zodoende een indruk te krijgen van hun bruikbaarheid voor het vliesflapperonderzoek

Om de bovenstaande doelstellingen te verwezenlijken is voor een reeds bestaande opstelling voor twee-dimensionale experimenten een nieuw tussenstuk gebouwd, waardoor het mogelijk is geworden twee parallelle stromingen te realiseren, die met verschillende snelheid langs elkaar bewegen. Op het scheidingsvlak tussen de stromingen kan een vlies bevestigd worden. De opstelling wordt beschreven in paragraaf 4.2. In paragraaf 4.3 zal worden ingegaan op experimenten in de vrije grenslaag. Bij deze experimenten bevindt zich geen vlies in de stroming. Ze zijn noodzakelijk om te begrijpen welke verschijnselen door het vlies en welke door de stroming worden veroorzaakt. In paragraaf 4.4 komen de vliesexperimenten aan de orde. Bij deze experimenten zijn het snelheidsverschil over het vlies en de lengte van het vlies de gevarieerde parameters. Er is een vergelijking gemaakt met het model uit paragraaf 3.3.2.

## 4.2 De meetopstelling

Voor de experimenten is gebruik gemaakt van een watertafel van de vakgroep Transportfysika van de afdeling Natuurkunde, waaraan reeds geruime tijd twee-dimensionale modelexperimenten zijn gedaan. Hiervoor is een nieuw tussenkstuk gebouwd, zodat 2 parallelle stromingen gerealiseerd kunnen worden. De opstelling is schematisch weergegeven in figuur 4.1.

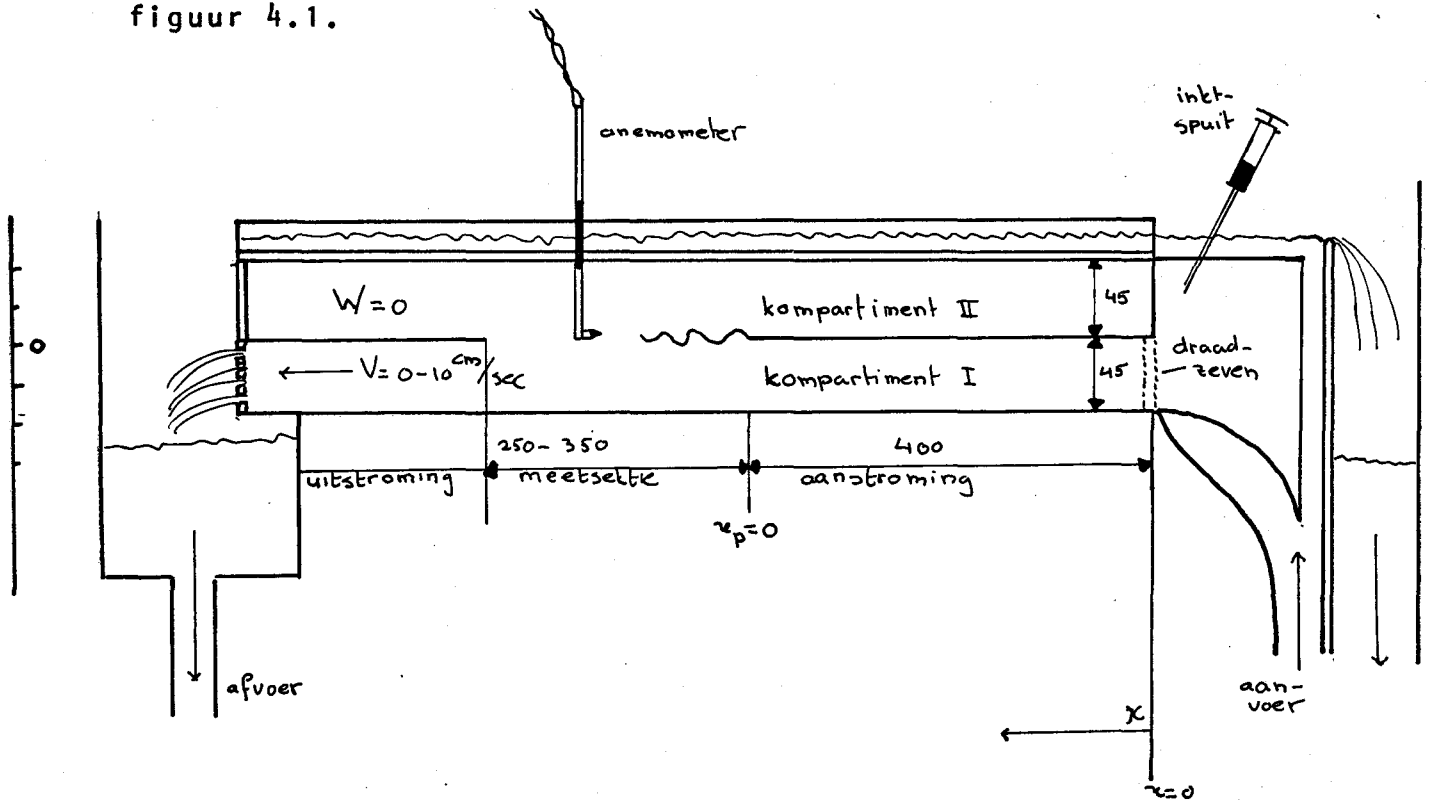


fig. 4.1

De metingen worden gedaan aan een doorzichtige, perspex bak, die is opgebouwd uit twee kompartimenten die parallel aan elkaar liggen en 104 cm lang zijn, 4.5 cm hoog en 12 cm breed. In de kompartimenten I en II bevindt zich water. In kompartiment I stroomt het water met een stationaire snelheid die gevarieerd kan worden tussen 0 en 10 cm/sec. In kompartiment II is de snelheid 0 cm/sec.

De snelheid wordt geregeld met een instelbare overdruk aan het begin en een variabele doorstroomopening aan het eind van het

stromingskanaal. De opstelling wordt van water voorzien door een gesloten systeem met een watertoren op het dak van het gebouw en een reservoir in de kelder. Aanvoer geschiedt vanuit de watertoren. Het water wordt afgevoerd naar het reservoir in de kelder, waarna het weer naar de watertoren wordt gepompt. De watertafel met de overstort, een gekromde instroomtuit en enkele draadzeven zorgen voor nette stromingsprofielen.

De beide stromingen komen met elkaar in contact in de meetsektie. Deze begint 40 cm vanaf het begin van het kanaal. De lengte van de meetsektie is te variëren tussen 25 en 35 cm. Dan begint de uitstroming, waar beide kanalen weer gescheiden zijn. De laatste scheidingswand kan ook geheel worden weggelaten, zodat de stromingen uit kompartiment I en II over ongeveer 64 cm met elkaar in contact zijn.

Aan het begin van de meetsektie kan een vlies worden bevestigd. Voor de vliezen is gebruik gemaakt van een zeer flexibel kunststoffolie met een dikte van 2  $\mu\text{m}$  van het merk, Bayer. Boven de meetsektie is een luikje aangebracht, waardoor het mogelijk wordt om luchtbelletjes te verwijderen die zich aan het vlies hechten als de opstelling gevuld wordt.

Om de diverse parameters te meten en de stroming te visualiseren kon beschikt worden over het volgende instrumentarium:

1. Een konstant-temperatuur-anemometer (thermo-systems inc.)

Deze snelheidsmeter werkt met een meetprobe die op een vast aantal plaatsen in de stroming is aan te brengen. Op de punt van de probe bevindt zich een laag met een elektrische weerstand die temperatuurgevoelig is. De anemometer zorgt er middels een terugkoppeling voor dat de temperatuur van deze laag konstant blijft. Stroomt de vloeistof sneller, dan zal de punt harder afkoelen en moet er meer vermogen worden toegevoerd. Dit vermogen is dus een maat voor de snelheid van de vloeistof. Elektronisch wordt er dan nog voor gezorgd, dat de uitgang een spanning afgeeft die rechtevenredig is met de snelheid. Met behulp van een referentieprobe wordt er voor gezorgd dat temperatuurvariaties van het water geen invloed hebben op de metingen.

De anemometer is gebruikt voor snelheidsmetingen in de aanstroming en in de meetsektie. De metingen in de aanstroming

hadden tot doel: de bepaling van het stromingsprofiel, de grenslaagdikte en de stabiliteit van de aanstroming. In de meetsectie zijn bij de vrije grenslaag stromingsprofielen opgemeten. Bovendien zijn deze signalen gebruikt voor een frequentieanalyse bij de instabiele stroming.

Omdat de gemeten signalen over het algemeen een sinusvormig karakter hebben, was het mogelijk met de hand de frequentie te bepalen. Hiertoe werd het signaal van de anemometer met behulp van een recorder op millimeterpapier uitgezet tegen de tijd. Dan werd de afstand gemeten tussen de maxima van het signaal. Middeling over een aantal afstanden gaf een redelijke indruk van de gemiddelde periodetijd. De metingen worden nauwkeuriger naarmate de snelheid toeneemt, omdat de signalen steeds meer een sinusvormig karakter krijgen. Bij snelheden lager dan 4 cm/sec ligt de relatieve fout tussen 20 en 30%. Bij snelheden van 4 - 10 cm/sec ligt de fout tussen 10 en 20%.

## 2. Inkt.

Er is veel gebruik gemaakt van een spuit, waarmee via een dunne naald vulpeninkt in de stroming werd gespoten. Deze werd gebruikt om een kwalitatief beeld te krijgen van de optredende stromingsverschijnselen. Met name de vorming van wervels is duidelijk waarneembaar met behulp van inkt.

De inkt is ook gebruikt voor het meten van snelheden. Hiertoe spuit men een hoeveelheid inkt in het stromingskanaal en meet men de tijd die deze inktprop nodig heeft om een bepaalde afstand af te leggen. Een belangrijk nadeel van deze manier van meten is, afgezien van afleesfouten, dat er alleen een indruk verkregen wordt van de gemiddelde snelheid op een bepaald traject. Bij een stroming door een kanaal zal namelijk de grenslaag dikker worden, naarmate de afstand tot de instroming groter wordt. Dit betekent, dat op korte afstand van de wand de snelheid afneemt. Volgens de wet van behoud van massa moet dan de snelheid van de hoofdstroom toenemen (zie fig.4.2 en appendix B). Op een afstand van 60 cm van het begin van het kanaal kan de maximumsnelheid met 20-30% toegenomen zijn. Kiest men het punt waar men de snelheid wil

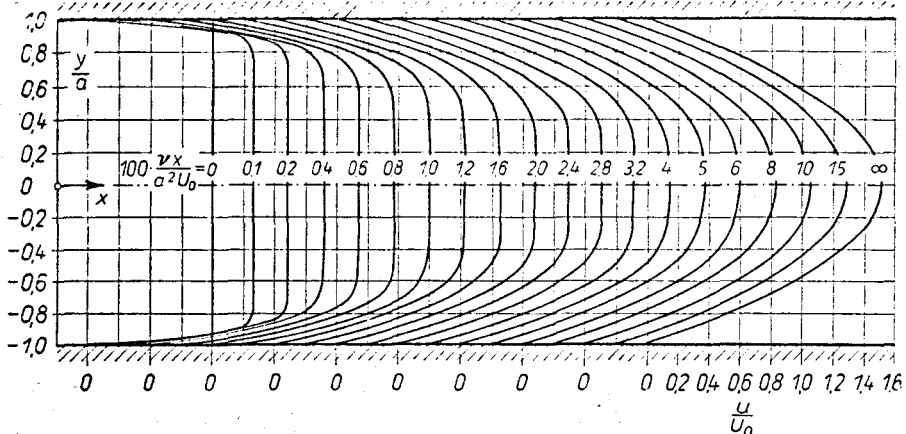


Bild 9.16. Geschwindigkeitsverteilung der laminaren Kanaleinlaufströmung

(Schlichting, 1934)

fig. 4.2

weten in het midden van het traject, waarover wordt gemeten, dan zal de afwijking toch vrij gering zijn.

### 3. Waterstofbelletjes

Op een aantal plaatsen in de opstelling is het mogelijk, om platinadraadjes te spannen met een diameter van 20  $\mu\text{m}$ . Op deze draadjes wordt een blokspanning gezet, die negatief is t.o.v. een verderop liggende roestvrijstalen anode. Door elektrolyse zullen zich dan aan de platinadraad waterstofbelletjes vormen, die door de stroming worden mee-gevoerd. Deze belLENblokken kunnen worden gebruikt voor snelheidsmetingen en voor een kwalitatieve analyse van het stromingsprofiel. Tijdens dit onderzoek zijn ze alleen gebruikt voor het laatste doel. Door in de meetsectie op verschillende plaatsen draadjes te spannen kan een redelijke indruk worden verkregen van de ontwikkeling van de vrije grenslaag.

Als zich een vlies in de stroming bevindt hebben de draadjes weinig of geen nut. Ze zouden hooguit in de aanstroming gebruikt kunnen worden, maar dan zullen zich waarschijnlijk veel waterstofbellen aan het vlies hechten. Achter het vlies is de stroming turbulent en leent inkt zich beter voor de visualisering.

### 4. Videoapparatuur

Met behulp van Sony-videoapparatuur zijn in verschillende situaties opnamen gemaakt van de stroming met en zonder

vlies. Met name voor de registratie van de vliesbewegingen was de videoapparatuur belangrijk. De opnamen werden later vertraagd afgespeeld, waarbij een aantal parameters gemeten konden worden:

- De frequentie van de vliesbewegingen.

Tegelijkertijd met het vlies wordt, om de tijd te registreren, een elektronische teller in beeld gebracht. De frequentie van de flapperbeweging van het vlies wordt bepaald door op een vaste afstand van het ophangpunt de tijd te registreren waarop het vlies een maximale uitwijking in een bepaalde richting heeft. Het tijdsverschil tussen de twee toppen is een maat voor de trillingstijd. Door over een aantal tijdsverschillen te middelen kan met een redelijke nauwkeurigheid de frequentie worden bepaald (rel.fout 5 - 20%). Dit is mogelijk, omdat bij een stationaire stroming, dus met een konstant snelheidsverschil over het vlies, de frequentie van de flapperbewegingen erg konstant blijkt te zijn. Het blijkt ook, dat metingen op verschillende afstanden van het ophangpunt geen significante verschillen opleveren.

- De golflengte.

De golflengte is een grootte die moeilijker te bepalen is, omdat deze niet konstant is. De golflengte neemt toe naarmate de afstand tot het ophangpunt groter wordt. Bovendien is het punt, waar de golf start niet voor elk vlies hetzelfde (de vlieslengte speelt hierbij een belangrijke rol). Van de golflengte kan alleen een globale grootteordeschatting worden gegeven.

- Kwalitatieve analyse.

Er is een kwalitatieve analyse gedaan van de vloeistofbeweging in de buurt van het vlies, waarbij met name gebruik is gemaakt van inkt die vlak onder het vlies gebracht werd. Er werd daartoe in het begin van het kanaal gedurende ongeveer 20 seconden een vrij grote hoeveelheid inkt in het kanaal gespoten. Het zo gevisualiseerde stromingsgebeuren werd op video vastgelegd en daarna overgetekend.

Bij kwalitatieve beschouwingen over het totale stromingsgebeuren zijn zoveel mogelijk alle waarnemingsmethoden betrokken.

### 4.3 De experimenten in de vrije grenslaag

Zoals reeds eerder gezegd is, noemt men het overgangsgebied tussen twee parallelle stromingen een vrije grenslaag, dit ter onderscheiding van een gebonden grenslaag langs een vaste wand. In de meetsektie vormt zich, als er geen vlies in de opstelling hangt, zo'n vrije grenslaag. Daarom worden de experimenten, waarbij zich geen vlies in de opstelling bevindt, experimenten in de vrije grenslaag genoemd. Deze zijn noodzakelijk, om het gedrag van de stroming zonder vlies te kennen, zodat het mogelijk wordt om te bepalen welke verschijnselen aan het vlies zijn toe te schrijven en welke aan de stroming. In deze paragraaf zullen deze experimenten worden beschreven.

#### 4.3.1 De opzet van de experimenten.

##### A. De werkwijze.

Het uitgangspunt bij de experimenten is geweest, dat het snelheidsverschil de belangrijkste parameter is. Omdat bij de aanvang van de experimenten nog niet duidelijk was welke verschijnselen verwacht konden worden, is besloten, om met zoveel middelen als beschikbaar waren, de stroming te bestuderen d.w.z. met inkt, waterstofbellen en de anemometer.

De werkwijze was als volgt: Er wordt een hoofdstroom-snelheid in kompartiment I ingesteld tussen 1 en 10 cm/sec. De eerste observaties zijn gedaan met inkt en waterstofbelletjes. De inkt wordt in een dunne straal ingespoten aan het begin van het kanaal en er wordt genoteerd wat er kwalitatief waar te nemen is.

Voor de waterstofbellen waren op 4 plaatsen in de stroming platinadraadjes aangebracht: 10 cm na het begin van de aanstroomsektie en op 2, 10 en 20 cm van het begin van de meetsektie. Van de bellenblokken worden videoopnamen gemaakt. Ook hiervan wordt genoteerd, wat kwalitatief waar te nemen is.

De belangrijkste waarnemingen zijn gedaan met de anemometer. Er is zowel in de aanstrooming als in de meetsektie gemeten. De metingen in de aanstrooming zijn op een afstand van 12 cm en 37 cm vanaf het begin van het stromingskanaal gedaan



in kompartiment I. Het laatste zeefje wordt als het begin van het kanaal beschouwd. Op beide plaatsen is ook de hoogte in het kanaal  $y$  gevarieerd, zodat de vorm van het stromingsprofiel gemeten kon worden (zie fig.4.3)

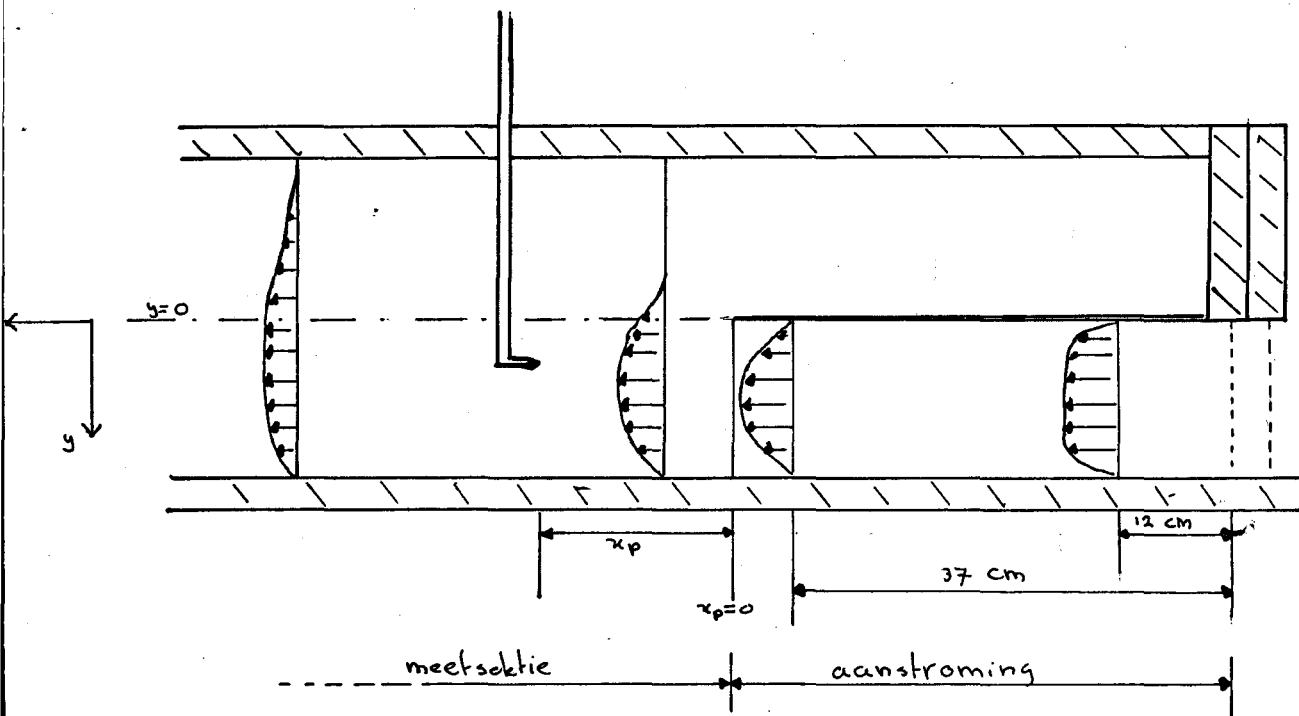


fig. 4.3

In de meetsektie is gemeten op een afstand  $x_p = 9.5$  cm en 19.5 cm vanaf het begin van de meetsektie. Bovendien is de afstand  $y$  tot het midden van het kanaal gevarieerd, waardoor het mogelijk is de maximum snelheid  $U_{\max}$ , de gradiënt  $dU/dy$  en de grenslaagdikte  $\delta$  te berekenen.

B. De ten grondslag liggende literatuur m.b.t. theorie en experiment.

De metingen in de aanstroming zijn vergeleken met de theoretische resultaten van H.Schlichting (1934) met betrekking tot een laminaire kanaalinstroming. Zie hiervoor appendix B. Deze resultaten worden in paragraaf 4.4 ook gebruikt bij de koppeling van de theorieën over het vliesflapperen met de experimenten met een vlies.

Op de theorie die het gedrag in de meetsektie beschrijft zal nu iets nader worden ingegaan. Het eenvoudigste model om de vrije grenslaag te beschrijven is dat van Kelvin en Helmholtz (zie paragraaf 3.2.1). Uit dit model blijkt het

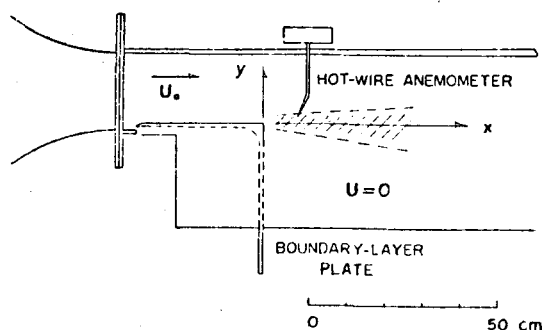
belang van het snelheidsverschil. Een verbetering van dit model is de theorie van Rayleigh (par. 3.3.1) die van een gelineariseerd stromingsprofiel uitgaat. Hieruit blijkt dat niet alle golflengtes instabiel zijn en dat er een golflengte bestaat die harder groeit dan de andere. Beide modellen gaan uit van een temporele groei. In de werkelijkheid moet ook een spatiële groei in beschouwing worden genomen. In verband met de tijd is het niet meer mogelijk geweest om hier uitvoerig aandacht aan te besteden. Bij de vergelijking van theorie en experiment is wel gebruik gemaakt van een publikatie van M.Gaster (1962). Hierin wordt uitgegaan van een gelineariseerd stromingsprofiel, waarbij niet de golfsnelheid  $c$ , maar het golfgetal  $\alpha$  complex verondersteld wordt. Er wordt dus uitgegaan van een spatiële groei. De voornaamste konklusie die uit dit model getrokken kan worden is de volgende: Bij een random verstoring (alle frequenties) zal slechts een zeer smalle band van frequenties worden versterkt in de vrije grenslaag en leiden tot instabiel gedrag. Voor de maximaal versterkte frequentie geldt:

$$f = \frac{1}{4\pi} \frac{U_\infty}{\delta} \quad [s^{-1}] \quad (4.1)$$

$U_\infty$  = de hoofdstroomsnelheid

$\delta$  = de grenslaagdikte

Er is ook een vergelijking gemaakt met uitgebreide experimentele onderzoeken van H.Sato (1956,1959) aan een vrije grenslaag. Sato bestudeerde met behulp van een windtunnel het gedrag van een luchtstroming na een drempel. Men noemt de stroming die dan ontstaat een "laminaire half-jet". Men heeft hier te maken met een luchtlaag met snelheid nul, die in contact komt met een



Sato (1956)

Fig. 1. Test-section arrangement.

luchtlaag met eindige snelheid (zie figuur 4.4)

Uit zijn metingen blijkt oa. dat verstoringen het meest worden versterkt in het midden van de grenslaag en dat de turbulentie ook toeneemt naarmate de afstand tot de drempel groter wordt (zie figuur 4.5)

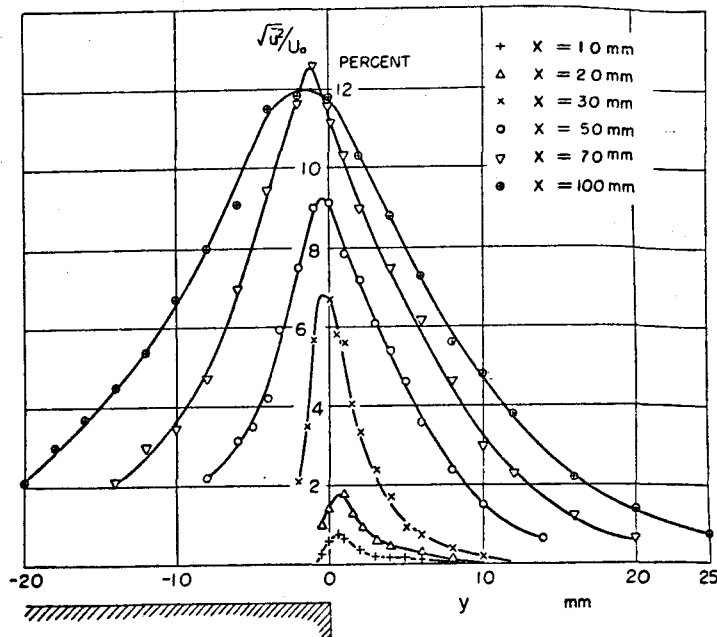


Fig. 11. Turbulence level distribution, Plate II,  $U_0=10.0$  m/s.

fig.4.5

Het meest opvallend is echter de waarneming van sinusvormige variaties in de ontstane vrije grenslaag (figuur 4.6)

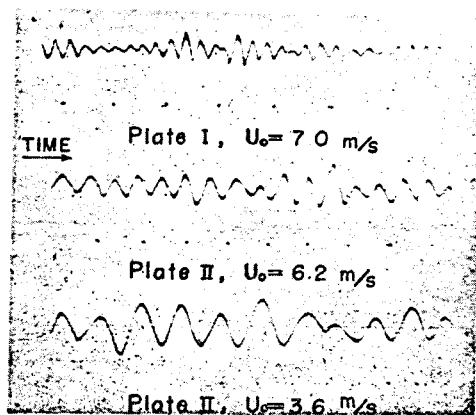


Fig. 4.  $u$ -fluctuation records for various wind speeds. Time interval between dots 0.01 sec.

fig.4.6

De sinusvormige variaties hebben frequenties die evenredig zijn met de snelheidsgradiënt in de y-richting. Hij vond:

$$f = \frac{0.47}{2\pi} \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0} \quad [s^{-1}] \quad (4.2)$$

Waar dat mogelijk was, is de frequentie en de snelheidsgradiënt bepaald bij verschillende hoofdstroomsnelheden en deze zijn vergeleken met de vergelijkingen (4.1) en (4.2). Bij de vergelijking met (4.1) is uitgegaan van de veronderstelling dat  $U_{\infty}/\delta = dU/dy|_{y=0}$ .

#### 4.3.2 De resultaten

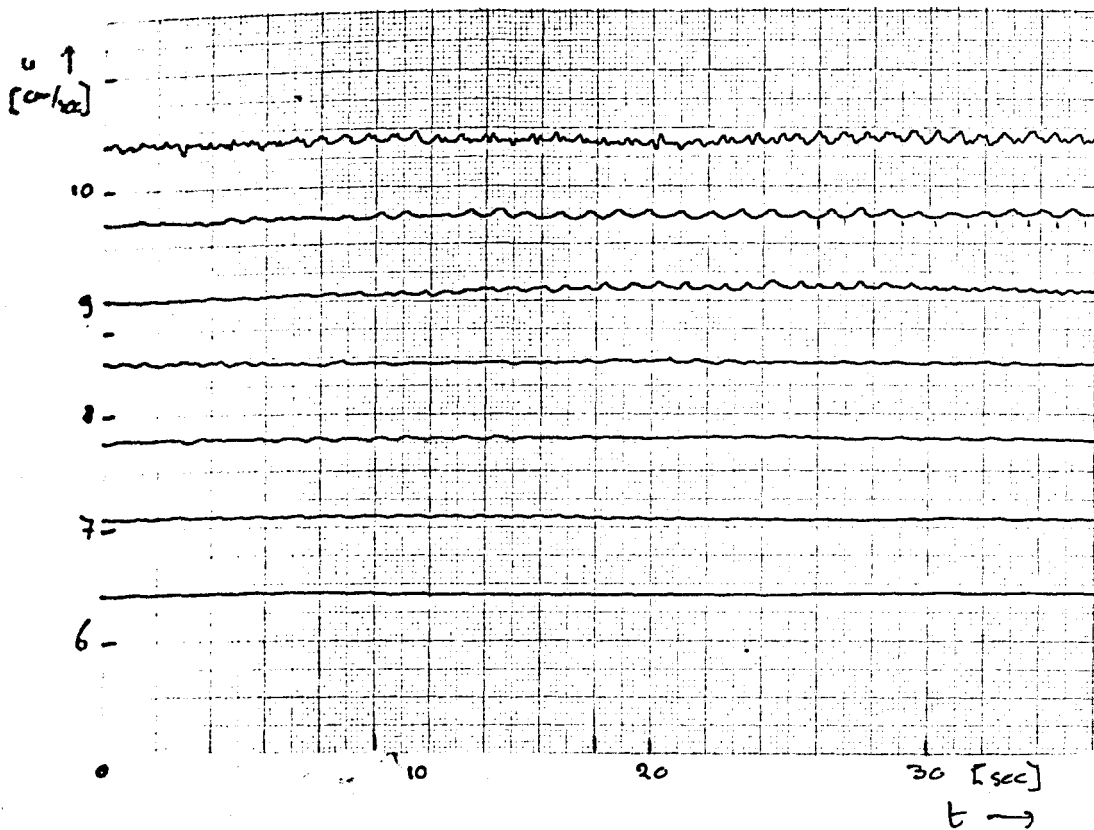
##### A. De metingen in de aanstroming.

De metingen in de aanstroming hadden het volgende doel:

1. De bepaling van de mate van turbulentie in het kanaal.
2. Bepaling van het stromingsprofiel, om te controleren of de theoretische resultaten van H. Schlichting (1934) voor de kanaalinstroming tussen twee vlakke platen op dit kanaal toegepast konden worden.

Voor het eerste doel zijn metingen gedaan in de hoofdstroming en in de grenslaag bij verschillende snelheden. De punt van de probe reageert niet alleen op variaties in de stromingsrichting, maar ook op variaties daar loodrecht op, al heeft de laatste reactie een andere versterkingsfaktor. Hierdoor wordt het mogelijk, om een globale schatting te maken van de turbulentiegraad  $\sqrt{\{(u')^2 + (v')^2 + (w')^2\}}/U$ . Er is slechts op één plaats gemeten, namelijk op 37 cm van de draadzeven.

in de hoofdstroming is geen verstoring te bespeuren tot snelheden van ongeveer 7 cm/sec. Bij snelheden van 7 - 10 cm/sec komt er een rimpel op de hoofdstroomsnelheid met een sinusvormig karakter. Boven 10 cm/sec krijgt de rimpel een random karakter (zie figuur 4.7). De gemeten verstoring is overal minder dan 2% van de gemeten hoofdstroomsnelheid. De gemeten frequenties liggen

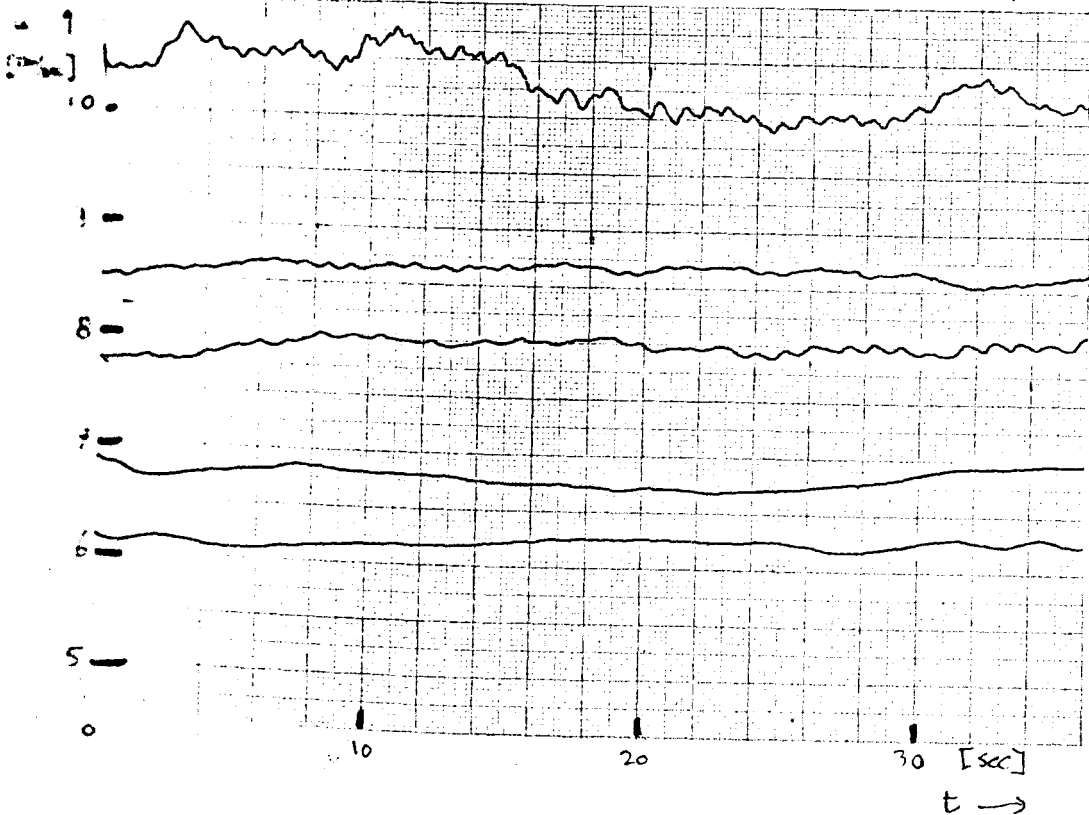


$y = 22 \text{ mm}$   
 $r = 37 \text{ cm}$   
 $u_{\text{max}} = 10.5 \text{ cm/sec}$

fig. 4.7

In de buurt van de 1 Hz bij snelheden tussen 7 en 10 cm/sec, en variëren niet significant met de snelheid.

Uit metingen in de grenslaag blijkt, dat daar een variatie van de snelheid bestaat met een lage frequentie die niet snelheidsafhankelijk is, met een maximale amplitude van ongeveer 6% van de hoofdstroomsnelheid (zie fig.4.5). Ook hier is bij snelheden boven 7 cm/sec een hoogfrequente rimpel waarneembaar van



$y = 3 \text{ mm}$   
 $r = 37 \text{ cm}$   
 $u_{\text{max}} = 10.5 \text{ cm/sec}$

fig. 4.8

ongeveer 1 Hz.

Naast deze metingen is ook bij één snelheid de hoogte van de probe in het kanaal gevarieerd teneinde de vorm van het stromingsprofiel te bepalen en daaruit de dikte van de van de grenslaag te berekenen. Uit de metingen is gebleken, dat het snelheidsprofiel niet helemaal symmetrisch is. Aan de bovenkant is de grenslaag dunner dan aan de onderkant (zie fig.4.9)

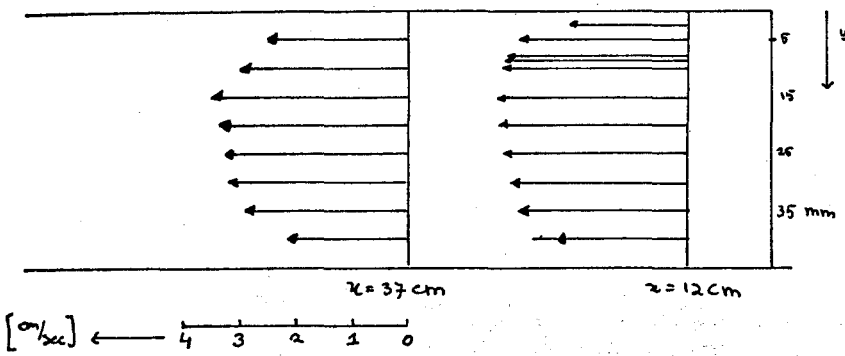


fig.4.9

afstand	0	12	37	cm
ber. $U_{max}$	2.8	3.3	3.6	cm/sec
ber. $\delta$	0	6	10	mm
gem. $U_{max}$	-	3.4	3.5	cm/sec
$\delta_{boven}$	-	5	10	mm
$\delta_{onder}$	-	10	15	mm

fig.4.10

De gemeten snelheden en grenslaagdiktes zijn vergeleken met theoretisch berekende snelheden en grenslaagdiktes volgens de methode van Schlichting (appendix B). Bij de berekende waarden is als beginsnelheid 2.8 cm/sec gekozen, zodat de hoofdstroomsnelheid op 12 cm overeenkwam met de gemeten waarde (zie fig. 4.10) Zowel bij de theoretisch als de experimentele grenslaagdikte is als grens die waarde van  $y$  gekozen, waarvoor geldt  $u = 0.9 U_{max}$ . Het blijkt, dat met name de bovenste grenslaagdikte overeenkomt met de theoretische waarde. Van dit gegeven is gebruik gemaakt in paragraaf 4.4.4 waar het model uit paragraaf 3.3.2 wordt vergeleken met vliesflapperexperimenten.

### B. De metingen in de meetsectie.

Men kan de waargenomen verschijnselen in de meetsectie globaal verdelen in drie gebieden:

#### 1. snelheden lager dan 3 cm/sec.

Bij deze snelheden loopt een dunne straal inkt volkomen recht door het stromingskanaal. De straal vertoont nergens afwijkingen en wordt niet zichtbaar breder. De waterstofbelletjes laten vlakke stromingsprofielen zien. Bij snelheden lager dan 2 cm/sec wordt de grenslaag zichtbaar breder naarmate de afstand tot het begin van de meetsectie groter wordt. De dikte varieert wel vrij sterk. Soms is de grenslaag zo dik dat op een afstand van 25 cm vanaf het begin van de meetsectie de snelheden in de kompartimenten I en II van dezelfde grootte worden. Deze variatie is duidelijk zichtbaar in fig.4.11.

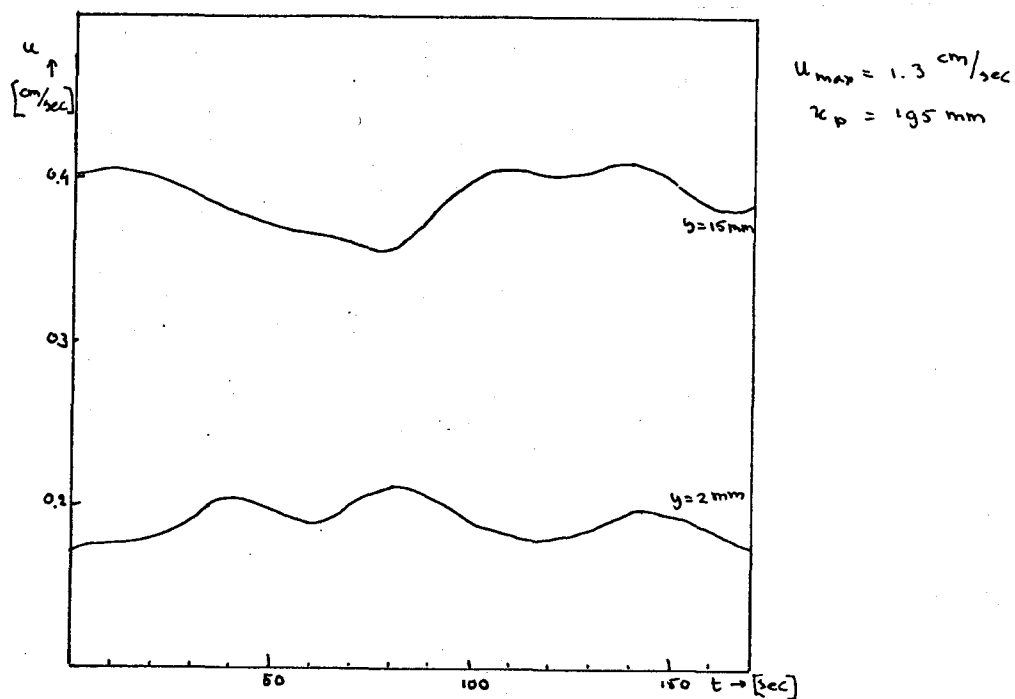
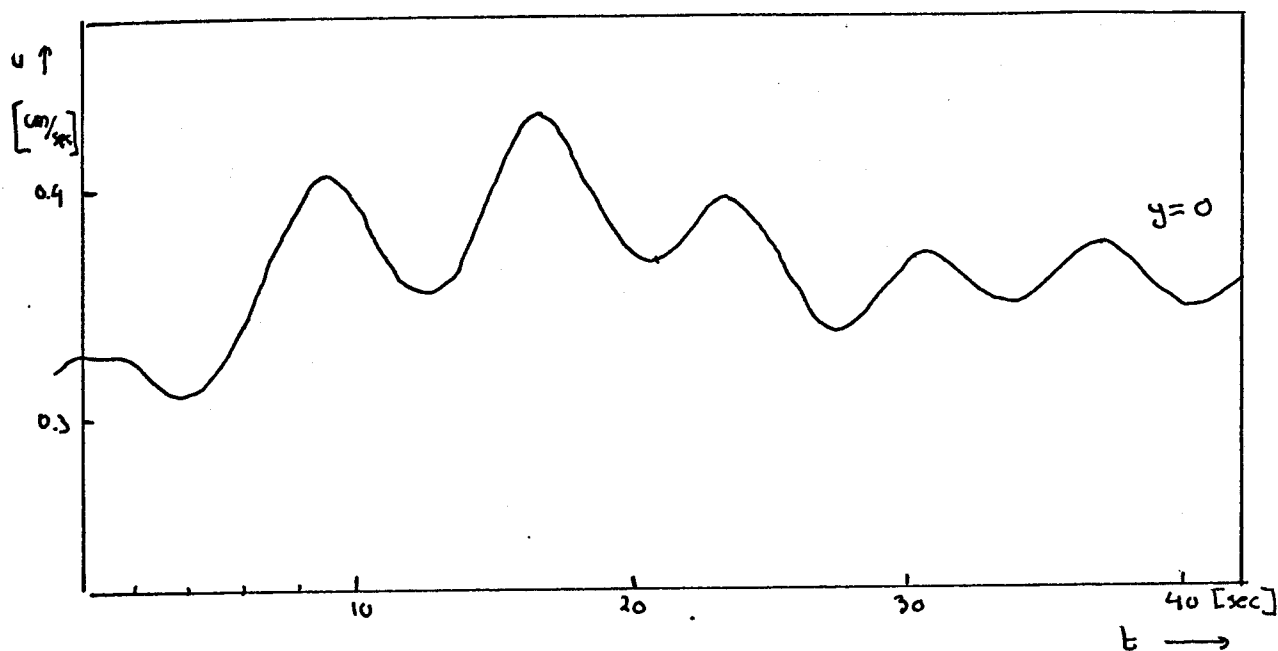


fig. 4.11

Bij snelheden kleiner dan 2 cm/sec is slechts heel globaal een schatting te maken van de optredende periodetijden; ze liggen tussen 20 en 30 seconden ( $0.03 \text{ Hz} < f < 0.05 \text{ Hz}$ ).

Bij snelheden tussen 2 en 3 cm/sec worden de frequenties iets



$z_p = 95 \text{ mm}$   
 $U_{\text{max}} = 2.1 \text{ cm/sec.}$

fig. 4.12

beter te bepalen (figuur 4.12). Hier liggen de periodetijden tussen 5 en 10 seconden ( $0.1 \text{ Hz} < f < 0.2 \text{ Hz}$ ). De snelheid varieert het sterkst in de buurt van  $y = 0$ . Naarmate de absolute waarde van  $y$  groter wordt, wordt de stroming stabiel.

## 2. snelheden tussen 3 en 5 cm/sec

Bij deze snelheden gaat de inktstraal in de meetsectie kronkelen. Bij lage snelheid begint dit pas ongeveer 20 cm na het begin van de meetsectie. Bij hogere snelheden begint het al eerder (tot ongeveer 10cm) en kunnen wervels zichtbaar worden gemaakt. De bellenblokken gaan ook vervormen. Met deze bellen is telkens het begin van een wervel te zien, waarna de blokken uiteen vallen. Ook hier geldt, dat de afstand waarop de wervelvorming optreedt, kleiner wordt als de snelheid (= het snelheidsverschil) groter wordt.

De snelheden die met de anemometer worden gemeten hebben nu duidelijk een sinusvormig karakter. De frequenties liggen in een zeer smalle frequentieband en worden steeds nauwkeuriger te bepalen ( $2 < T_p < 6 \text{ sec}$   $\delta f$   $0.15 < f < 0.5 \text{ Hz}$ ) zie figuur 4.13.



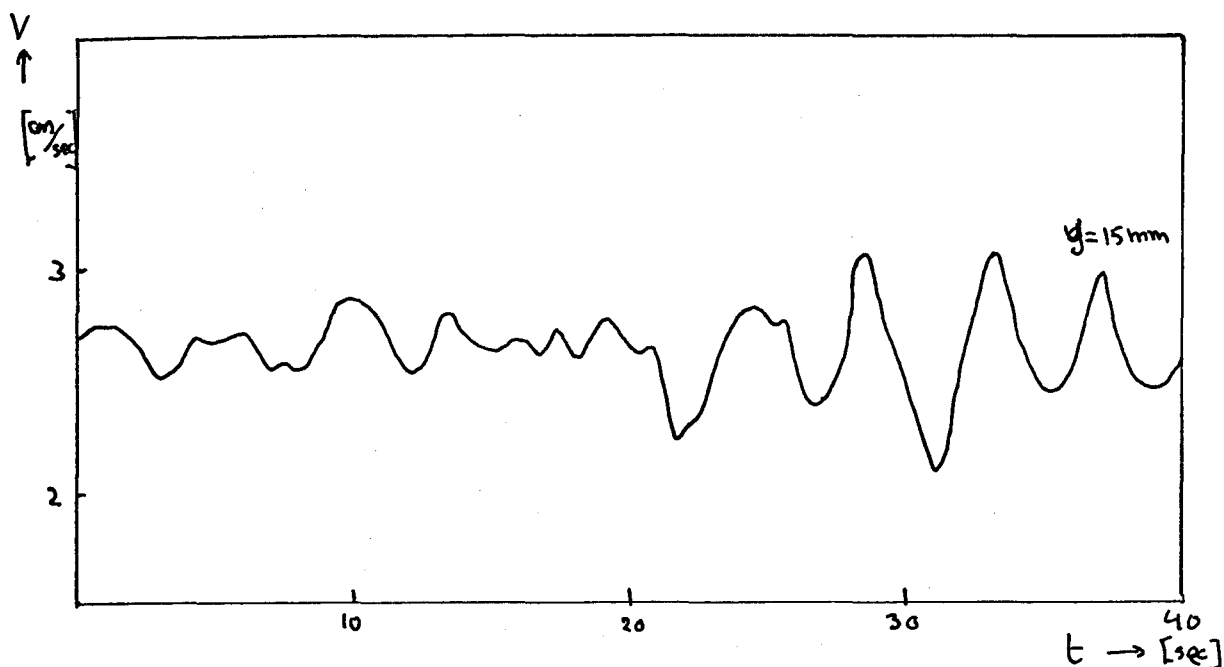


fig. 4.13

Ook hier blijkt de turbulentiegraad het grootst te zijn rond  $y = 0$ . De turbulentiegraad neemt ook toe met toenemende  $x$ .

### 3. Snelheden groter dan 5 cm/sec.

De waterstofbellen en de inkt vertonen in de meetsectie verschijnselen die duiden op een volkomen turbulent gedrag. De bellenblokken beginnen meteen te wervelen en worden volledig verstrooid. De inktstraal gaat ook snel uit elkaar en begint volkomen willekeurige wervelingen te vertonen. Reeds enkele centimeters na het begin van de meetsectie slaat de stroming om van laminair naar turbulent.

Uit de anemometeropnamen blijkt echter dat de frequenties binnen een smalle band liggen. De signalen zijn bijna sinusvormig (zie figuur 4.14). Bij deze snelheidsverschillen zijn de frequenties ook met redelijke nauwkeurigheid te bepalen. Hier blijkt, dat de stroming duidelijk het karakter heeft wat van een vrije grenslaag verwacht wordt.

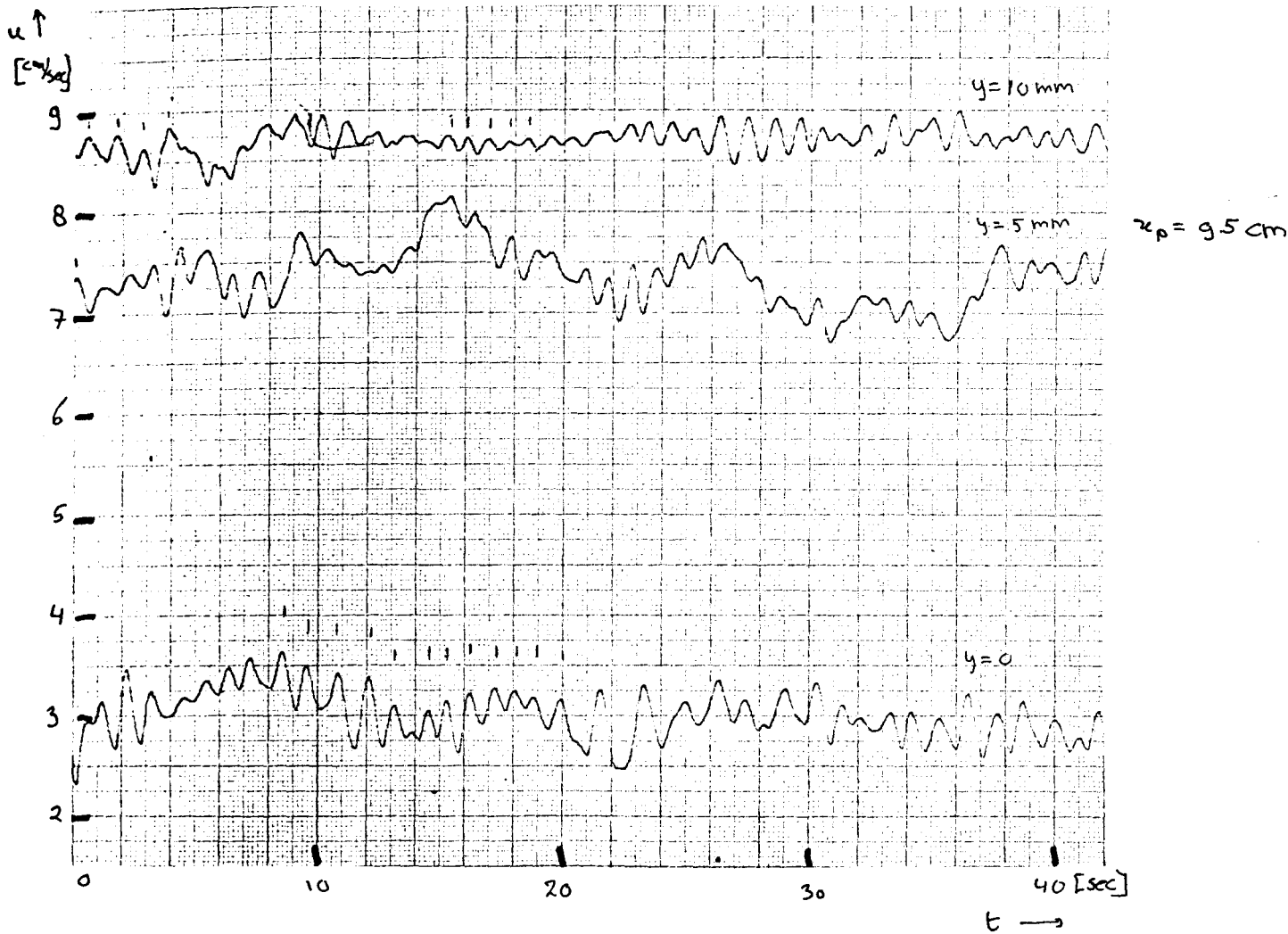


fig. 4.14

Bovenstaande metingen zijn allemaal gedaan met een lengte van de meetsektie van 35 cm. Er is ook gemeten met een meetsektie van 64 cm, maar dit leverde geen significante verschillen op.

Bovengenoemde observaties zijn nog eens samengevat in een schema op pagina 4.18, zodat de onderlinge samenhang duidelijker wordt.

Bij alle situaties is  $du/dy$  bepaald door lineaire regressie op een aantal meetwaarden van  $U$  rond het punt  $y = 0$ . Dit geeft een gelineariseerde maat voor de grenslaagdikte, zodat vergelijking met de literatuur mogelijk wordt. Door het beperkte aantal meetpunten in de buurt van  $y = 0$  en de onnauwkeurige hoogtebepaling van de anemometer is de fout in  $du/dy$  vrij groot. Bovendien komt daar nog bij dat het profiel niet lineair is. De grootte van de fout kan slechts worden geschat. Afwijkingen van 20 tot 30% zijn zeker mogelijk.

DE EXPERIMENTEN AAN DE VRIJE GRENSLAAG

Stroom snelh.	anemometeropnames						kwal.observaties met inkt	kwal.observaties met waterstofbelletjes	
	$U_{max}$	$dU/dy$ $y=0$	$\delta$	Re	$x_p$	$T_p$			$\bar{v}$
cm/s	$s^{-1}$	mm	$U_{max} \delta/v$	cm	s	$s^{-1}$			
1.27	0.51	25	320	9.5	23	0.044	grote fout in $T_p$	De inkt vormt een rechte lijn, die nergens afwijkingen vertoont en ook niet breder wordt	mooie stromingsprofielen zeer dikke grenslaag
1.33	0.60	22	290	19.5	27	0.037			
2.70	1.55	17	460	9.5	9	0.111		mooie profielvormen met geleidelijk toenemende grenslaagdikte	
2.92	1.73	17	500	19.5	6	0.167			
3.60	2.57	15	500	9.5	5.5	0.182	duidelijk waarneembaar is een toenemende turbulentiegraad als $x_p$ toeneemt	Het inktspoor blijft een dunne straal maar gaat aan het eind van de meetsektie kronkelen	mooie profielvormen. ongeveer 25 cm na het begin van de meetsektie ontstaan wervels
3.20	2.39	13	420	19.5	6.1	0.164			
3.20	2.16	15	480	9.5	5.1	0.196			
4.2				9.5	4	0.25	de snelheid is met inkt geschat	De inkt kronkelt sterk in de meetsektie en wordt aan het eind volkomen turbulent.	vlakke profielvormen. 10cm na het begin van de meetsektie ontstaan wervels.
6.5	5.2	12	780	9.5	1.7	0.58	de signalen van de anemometer zijn vrijwel sinusvormig	de inkt begint in de aanstroming te kronkelen en wordt in de meetsektie turbulent	de bellenblokken worden volledig verstrooid in de meetsektie
8.6	7.1	12	1000	9.5	1.7	0.91			
10.9	10.4	10	1090	9.5	0.8	1.25			

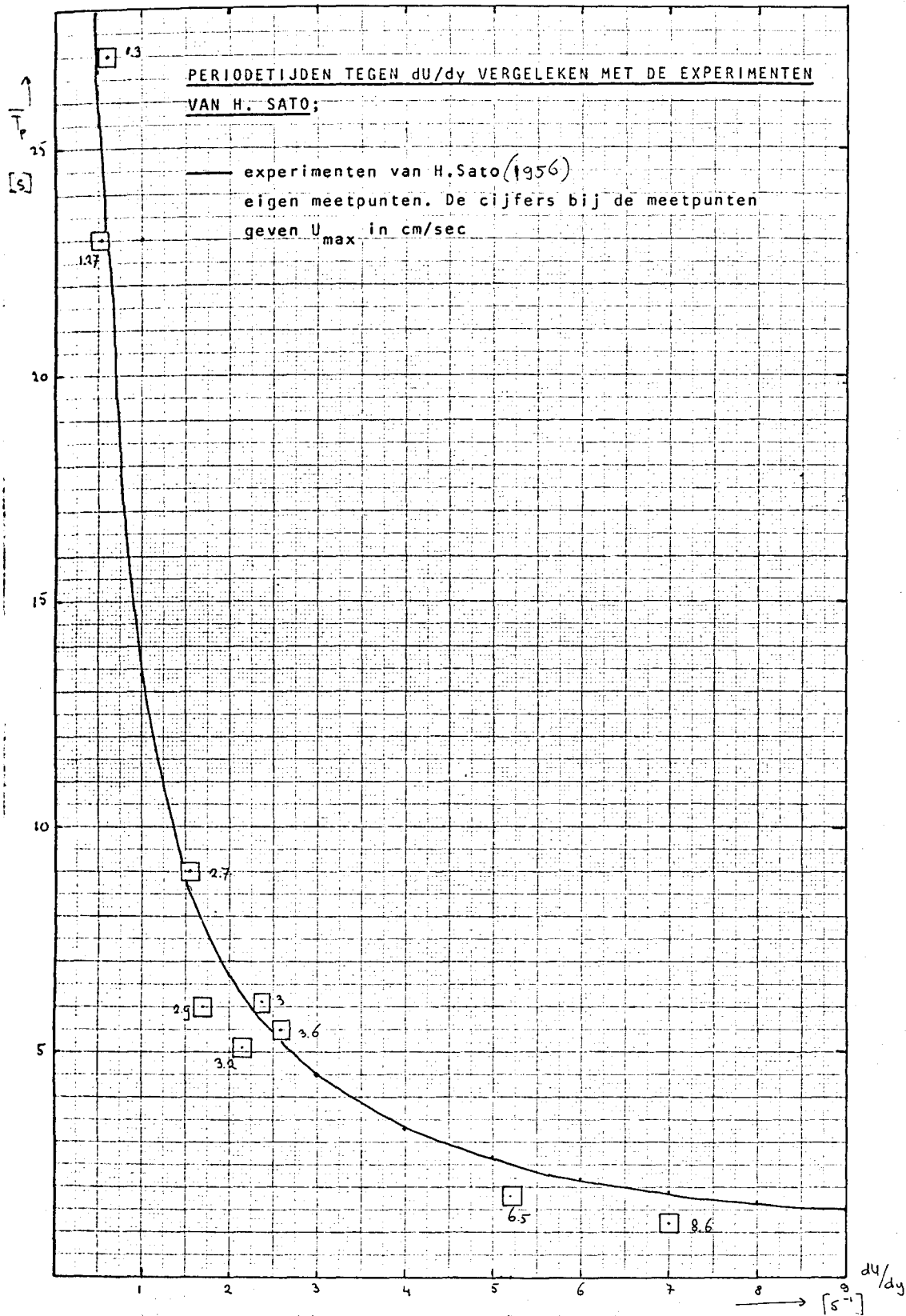


fig. 4.15

In figuur 4.15 is de periodetijd uitgezet tegen de snelheidsgradiënt rond  $y = 0$  voor de meetpunten samen met de experimentele kromme van H. Sato, zoals die werden bepaald uit metingen met lucht. Er blijkt een redelijke overeenkomst te zijn. In figuur 4.16 is de frequentie

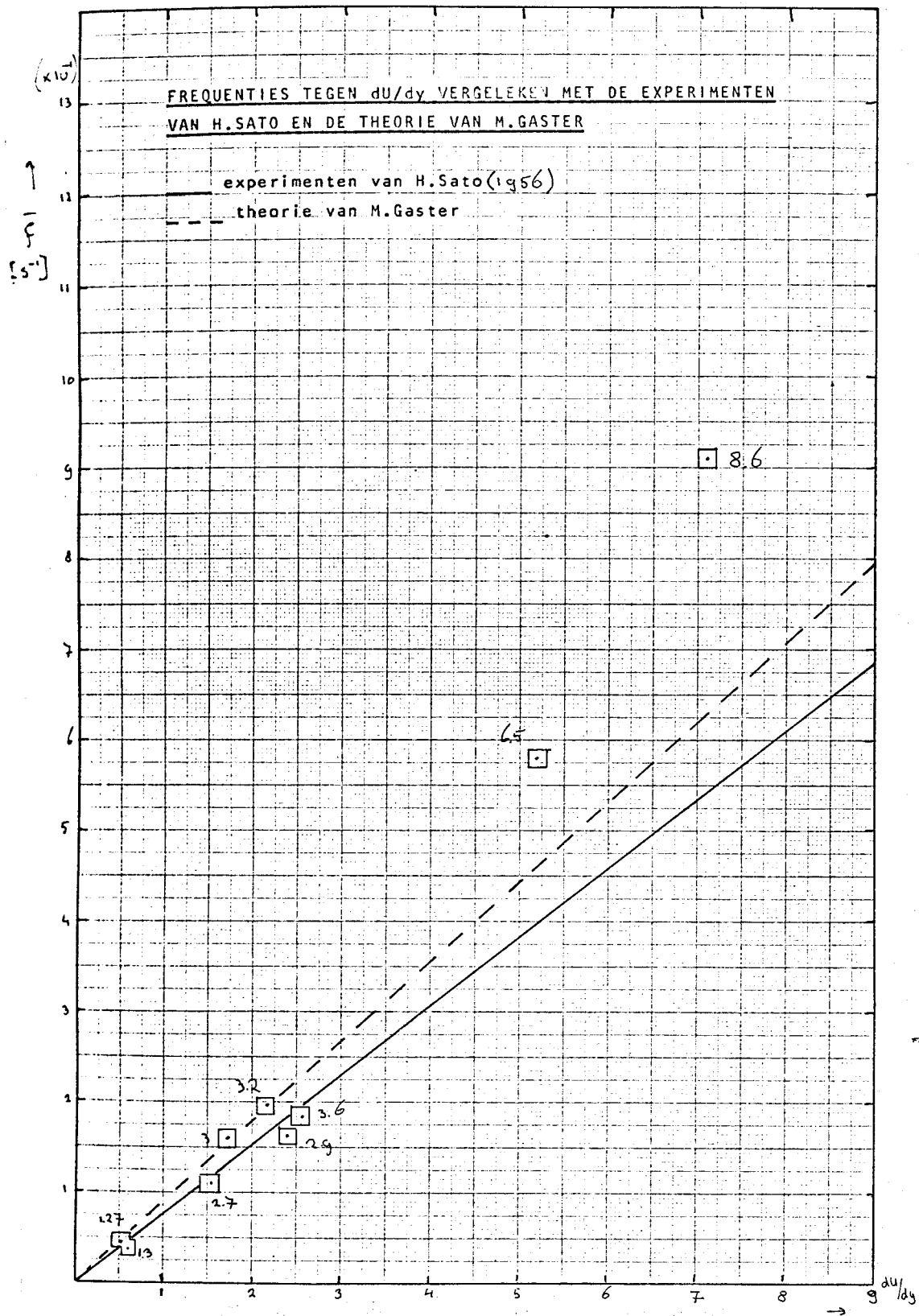


fig. 4.16

uitgezet tegen  $du/dy|_{y=0}$ . Uit deze figuur blijkt duidelijk, dat bij hogere snelheden de frequentie hoger ligt dan voorspeld wordt door de theorie van Gaster en de experimenten van Sato. Dit zou mogelijk veroorzaakt kunnen worden door een dominant aanwezig zijnde verstoring of de geometrie van de bak. Het is echter ook mogelijk dat de fout in de bepaling van  $du/dy$  in dit gebied van doorslaggevende aard is.

### 4.3.3 Konklusies en diskussie.

In deze paragraaf zal allereerst de opstelling ter diskussie worden gesteld, waarna de meetresultaten aan de orde zullen komen.

#### A. de meetopstelling.

Hieronder zullen enkele aspecten worden behandeld, die van belang zijn bij de interpretatie van een aantal resultaten en die mogelijk tot verbeteringen kunnen leiden:

- De eindigheid van de opstelling. De theorie die wordt gebruikt, gaat uit van oneidig dikke lagen, maar de opstelling is van eindige breedte. De opstelling is symmetrisch rond  $y = 0$ . Voor een dergelijke situatie gaat formule (3.33) over in:

$$c = \frac{V + W}{2} \pm \left( \frac{V - W}{2} \coth^2 ah \right) i$$

waarbij  $h$  de hoogte van één kompartiment is. Hieruit blijkt, dat in dit geval het eindig zijn alleen invloed heeft op de groei van de instabiliteit. Lange golven ( $\alpha$  klein) zullen sneller groeien dan korte golven. De verschillen zijn echter niet groot. Voor een golf van 25 cm geldt nog:  $\coth ah = 1.23$  ( $h = 4.5$  cm). Voor een golf van 15 cm geldt:  $\coth ah = 1.05$ . Dus bij een golflengte van 15 cm is de afwijking van de oneindige theorie nog maar 5%.

- De opstelling is niet 2 - dimensionaal. Er zal invloed worden uitgeoefend door de zijwanden van de perspexbak, maar de gemeten verschijnselen zullen hierdoor niet essentieel van karakter veranderen (er wordt voortdurend in het midden van het kanaal gemeten): Bij een vlies wat vlak langs de wand zit zal de invloed wel merkbaar zijn. (zie paragraaf 4.4)

- Het is de vraag of de verstoring wel een random karakter heeft. Het blijkt bij snelheden van 7 - 10 cm/sec, dat er een sinusvormige rimpel op de snelheid zit, die waarschijnlijk wordt veroorzaakt door de draadzeefjes. Het blijkt ook, dat in dit gebied de gemeten frequenties hoger liggen dan de theoretische waarden. Het is mogelijk dat dit wordt veroorzaakt, doordat verstoringen met deze hoge frequenties nogal dominant aanwezig zijn. Om hierover meer definitieve uitspraken te kunnen doen, moeten meer nauwkeurige experimenten worden gedaan.

- Het blijkt, dat de aanstroming voor de onderzochte hoofdstroomsnelheden een zeer lage turbulentiegraad heeft. Dit geldt zowel voor de hoofdstroming als voor de grenslaag. Toch is de aanstroming in wezen verkeerd gemaakt. Een te snelle kromming van de instroomtuit, en de draadzeven die ervoor zorgen dat grote wervels gedempt worden, laten een groot aantal kleine werveltjes achter, die in de hoofdstroming worden gedempt, maar in de grenslaag blijven bestaan en daar onder invloed van de viskositeit groeien. Om dit te voorkomen dient men een geheel andere aanstroming te maken, waarbij gebruik wordt gemaakt van een buffervat. Zo'n aanstroming wordt uitgebreid beschreven door E.Vaessen (1977).

Met een buffervat verdwijnen wel de werveltjes in de stroming, maar er blijven loslatingsverschijnselen optreden aan de scherpe rand bij het begin van het kanaal (zie fig.4.17).

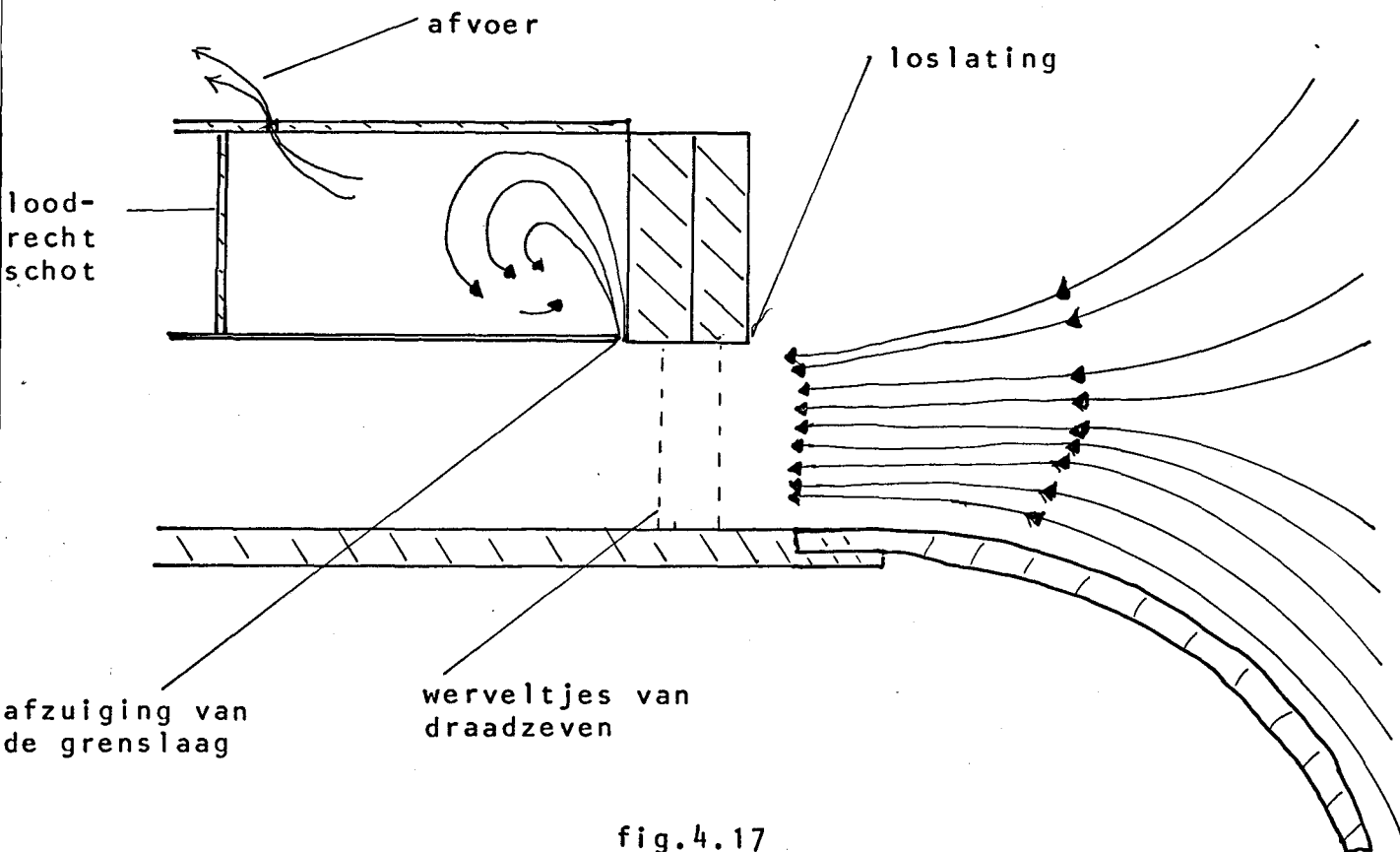


fig.4.17

Een verbetering treedt op als de grenslaag vlak na het begin van het kanaal wordt afgezogen. Dit vermindert zowel de grootte van de wervels als de loslatingsverschijnselen. In de opstelling

bevindt zich tussen het laatste zeefje en de scheidingswand tussen de kompartimenten I en II een spleet met een breedte van ongeveer een millimeter. Ofschoon dit eigenlijk een onvolkomenheid in de konstruktie van de bak is blijkt hierdoor precies bovengenoemd effekt op te treden. Een dergelijke spleet wordt in de literatuur als truc beschreven, om een laminaire grenslaag te krijgen (Sato, 1956) en is tijdens de experimenten gehandhaafd. Het bezwaar van de spleet is, dat hierdoor een wervel in kompartiment II ontstaat en dat dus hier de snelheid niet meer gelijk is aan nul. De snelheid blijkt echter zeer laag te zijn. Om zeker te zijn, dat ook bij nauwkeurige metingen de genoemde wervel geen invloed heeft, kan men een afgesloten ruimte kreëren door een loodrecht schot in kompartiment II te plaatsen. Men moet dan wel een afvoermogelijkheid naar buiten maken. Zo'n loodrecht schot heeft als bijkomend voordeel, dat voorkomen wordt, dat de scheidingswand gaat trillen en daardoor de stroming en/of vliesbeweging beïnvloedt.

#### B. De meetresultaten.

Uit de metingen blijkt, dat de aanstroming een vlak stromingsprofiel heeft met een acceptabele turbulentiegraad. Het blijkt wel, dat tussen 7 en 10 cm/sec een sinusvormige verstoring optreedt. Deze dominante verstoring kan de betrouwbaarheid van de metingen beïnvloeden.

Het stromingsprofiel is niet symmetrisch. Dit wordt waarschijnlijk voor een deel veroorzaakt door de afzuiging aan het begin van het kanaal. Andere redenen kunnen zijn een drukgradiënt in de hoogte van het kanaal en de andere instroming aan de boven- en onderkant van het kanaal (zie fig.4.17). De grenslaagdikte aan de bovenkant komt in grootteorde overeen met de theoretische waarde volgens Schlichting, terwijl de verschillen m.b.t. de onderkant op basis van bovengenoemde oorzaken verklaard kunnen worden.

De experimenten in de vrije grenslaag geven een stromingskarakter te zien, dat geheel in overeenstemming is met de theorie en de experimenten van Sato. Alleen de oorzaak van de te hoge frequenties dient nader onderzocht te worden. Verder treden alle verschijnselen op die Sato ook beschrijft: de sinus-



vormige oscillaties, de snelheidsafhankelijkheid van de frequentie daarvan en de verdeling van de turbulentie in het kanaal. Dit gegeven kan een belangrijke ruggesteun zijn bij verdere experimenten. Aan de vrije grenslaag is veel onderzoek gedaan, zodat veel vergelijkingsmateriaal voorhanden is. Als duidelijk vastligt hoe de vrije grenslaag de stabiliteit beïnvloedt wordt ook duidelijk wat de vliesinvloeden zijn.

#### 4.4 De vliesexperimenten

In deze paragraaf worden de experimenten beschreven, waarbij zich een vlies in de stroming bevindt. Allereerst wordt in paragraaf 4.4.1 aangegeven welke experimenten zijn gedaan en op welke wijze ze zijn uitgevoerd. Paragraaf 4.4.2 geeft een kwalitatieve beschrijving van de waargenomen verschijnselen. Vooral het stromingsbeeld in de buurt van het vlies neemt hier een belangrijke plaats in. In paragraaf 4.4.3 worden de gemeten frequenties, waarmee de vliezen flapperen, vergeleken met de vrije-grenslaag-experimenten. In paragraaf 4.4.4 wordt het theoretische model uit 3.3.2 met de experimenten vergeleken. Tot slot worden in paragraaf 4.4.5 de konklusies gegeven en besproken.

##### 4.4.1 De experimentele opzet

Bij de hieronder beschreven experimenten zijn twee belangrijke parameters gevarieerd:

###### 1. de vliesslengte

Deze parameter heeft vrij veel invloed op de beweging van het vlies. Theoretisch kunnen we hier nog geen uitspraak over doen. Om een idee te krijgen van het belang van de vliesslengte werd besloten, om er experimenteel aandacht aan te besteden. Daarom is er gewerkt met 3 verschillende vliezen met een lengte van respectievelijk 7.5, 15 en 22.5 cm. De vliezen waren allemaal 11 cm breed, zodat ze aan beide zijden 0.5cm van de kant af zaten. De dikte van de gebruikte vliezen was 2  $\mu$ m.

###### 2. de snelheid

Er is gewerkt met 3 hoofdstroomsnelheden van respectievelijk 4, 6 en 8 cm/sec. Het is weliswaar niet mogelijk om deze

waarden precies in te stellen, maar er is getracht zo dicht mogelijk in de buurt te komen. De snelheid wordt gemeten met behulp van inkt. Tegelijk met de hoofdstroomsnelheid varieert ook de grenslaagdikte. Beide grootheden zijn namelijk gekoppeld, waardoor dit vrijwel niet te vermijden is.

De lengte van de meetsectie was in alle gevallen 30 cm. Omdat bij het vlies van 22.5 cm er een invloed van de achterste scheidingswand verwacht kan worden, zijn er bij deze vlieslengte ook experimenten gedaan zonder scheidingswand (lengte meetsectie 64 cm).

Bij elke situatie werd eerst geruime tijd gewacht tot de stroming behoorlijk ingesteld was. Daarna werden gedurende 1 à 2 minuten videopnamen gemaakt van de vliesbewegingen. Tegelijkertijd met het vlies werd een elektronische teller in beeld gebracht, die de tijd aangaf in tienden van seconden. Op regelmatige tijdstippen werd een hoeveelheid inkt in de opstelling gespoten, waardoor de vloeistofbewegingen gevisualiseerd werden. Van deze videoopnamen zijn contouren overgetekend voor een kwalitatieve beschrijving. Verder zijn uit de opnamen frequenties bepaald.

#### 4.4.2 Kwalitatieve beschrijving van de verschijnselen.

Het vlies met de lengte van 15 cm is gekozen als centrumsituatie en zal het eerst behandeld worden.

##### A. vlieslengte 15 cm.

Bij snelheden kleiner dan 4 cm/sec hangt het vlies volkomen stil in de stroming. De inkt stroomt onder het vlies gewoon rechtdoor en begint wervelingen te vertonen als het vlies gepasseerd is. Bij ongeveer 6 cm/sec gaat het vlies flapperbewegingen vertonen, die soms heviger worden en dan weer uitdempen. Het blijkt dat de vloeistof onder het vlies wervels begint te vormen, die in diameter groeien en onder het vlies uit rollen. Bij 8 cm/sec flappert het vlies voortdurend met een frequentie en amplitude die duidelijk groter zijn dan bij 6 cm/sec. Opvallend is wel, dat bij 8 cm/sec de flapperbeweging pas inzet op enkele centimeters van het ophangpunt. Het eerste stuk hangt volkomen stil in de stroming.

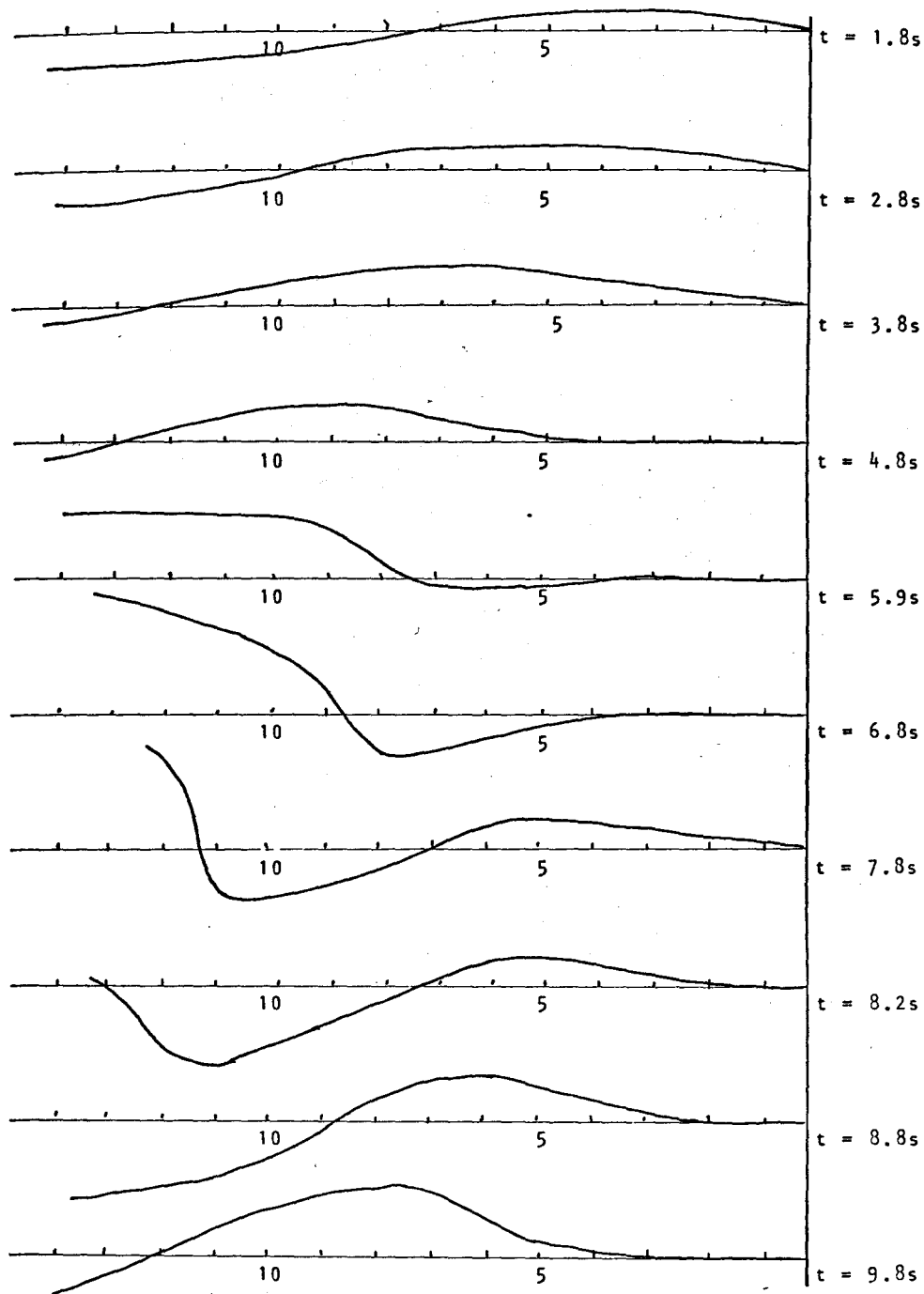


fig. 4.18

In figuur 4.18 staat de positie van de rand van het vlies op een aantal tijdstippen bij een snelheid van 6.5 cm/sec ter plaatse van het vlies. Opvallend is, dat de golflengte niet konstant is in de tijd en dat vanuit een rustpositie het vlies altijd begint te bewegen in de richting van kompartiment II, waar de hoofdstroomsnelheid gelijk is aan nul. Dit wordt begrijpelijk als men figuur 4.19 bekijkt. Hier zijn de deeltjesbanen overgetekend van

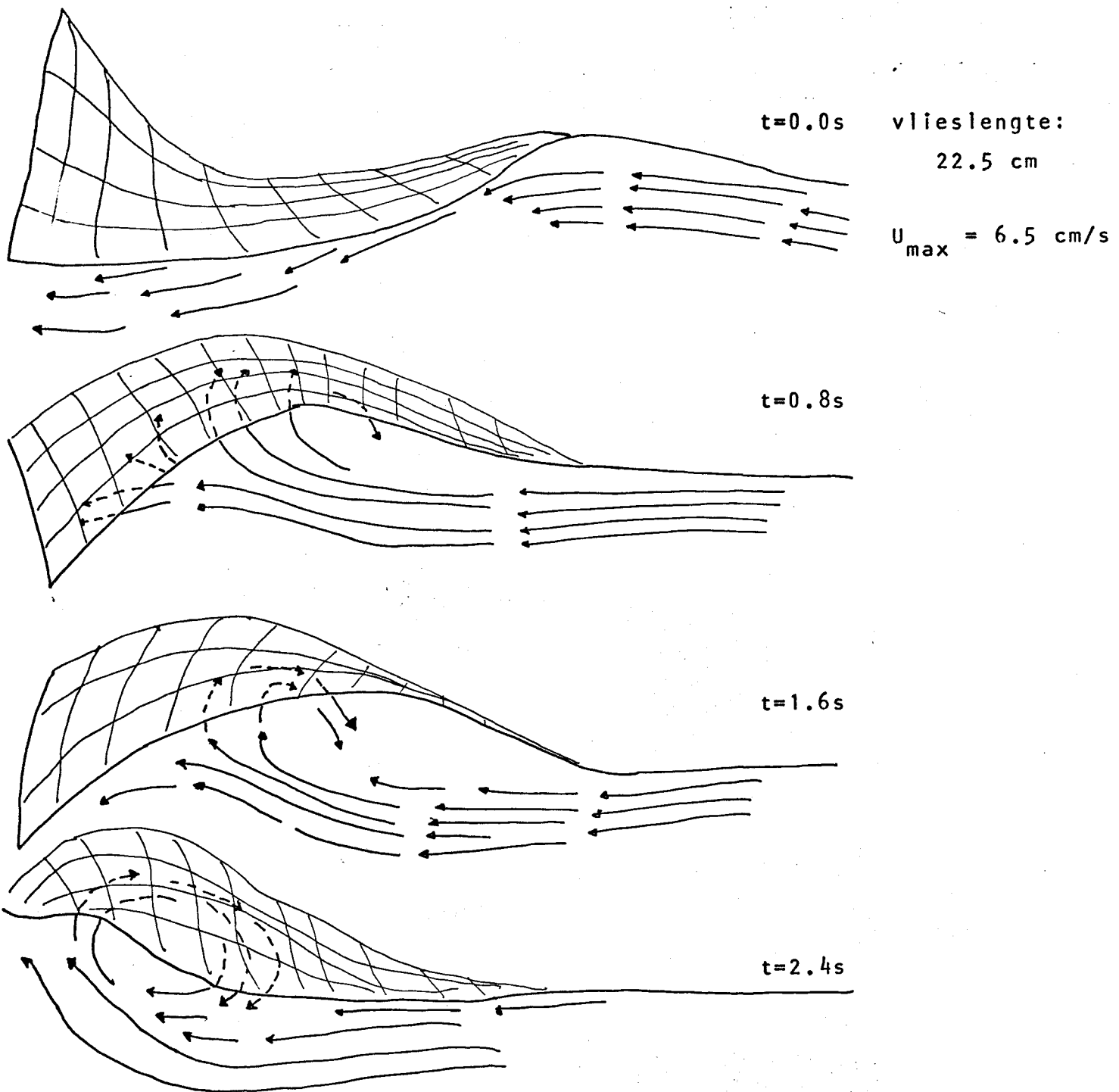


fig. 4.19

videopnamen van de stroming met een hoeveelheid inkt onder het vlies. Het is duidelijk zichtbaar, dat zich onder het vlies een wervel vormt, die het vlies in kompartiment II drukt. Deze wervel groeit onder het vlies en rolt er onder uit, waarna zich weer een nieuwe wervel kan vormen.

Verder was opvallend, dat het vlies niet helemaal 2-dimensionaal beweegt. De golfbeweging loopt schuin door het vlies. Dit effect wordt echter minder als de snelheid groter wordt. Het is waarschijnlijk, dat dit effect veroorzaakt wordt

door het vlies, omdat dit niet bij elk vlies hetzelfde is. Mogelijke oorzaken zijn randeffekten aan de zijkant van het vlies, of de ophanging van het vlies.

#### B. Vlieslengte 22.5 cm

Tot 4 cm/sec hangt ook dit vlies volkomen stil in de stroming. Boven 4 cm/sec gaat het vlies flapperen op dezelfde manier als het vlies van 15 cm. Ook hier neemt de frequentie en de amplitude toe met de snelheid. Opmerkelijk is echter, dat het vlies pas instabiel wordt op een afstand van 10 - 15 cm van het ophangpunt. Het gedeelte daarvoor beweegt in het geheel niet. Opnamen met inkt laten zien, dat pas op 10 - 15 cm van het ophangpunt een werveltje ontstaat wat in diameter groeit en onder het vlies uitrolt. Een mogelijke verklaring voor het stabiele eerste stuk is misschien de t.g.v. viskeuze krachten hoge spankracht aldaar, waardoor instabiliteit tegengegaan wordt. Over het algemeen is de frequentie waarmee dit vlies beweegt lager dan bij het vlies van 15 cm. Vergroten van de meetsektie heeft op de frequentie geen invloed. Wel lijkt de amplitude hierdoor groter te worden.

#### C. Vlieslengte 7.5 cm

Dit vlies beweegt nauwelijks tot snelheden van 8 cm/sec. Daarboven gaat het lichte flapperbewegingen maken. Analyse met inkt laat duidelijk zien, dat wervels pas na het vlies gaan optreden.

Uit het voorgaande is duidelijk, dat de flapperbewegingen van het vlies altijd samengaan met wervels die onder het vlies ontstaan in kompartiment I. De plaats waar de wervels ontstaan is zowel van de snelheid van de hoofdstroming als van de vlieslengte afhankelijk.

#### 4.4.3 De vergelijking met de vrije-grenslaag-experimenten.

Voor vergelijking met de vrije grenslaag komen alleen de vliezen van 22.5 cm en 15 cm in aanmerking, omdat bij het vlies van 7.5 cm nauwelijks een frequentieanalyse mogelijk was. De frequenties, waarmee de vliezen bewegen, zijn bepaald uit de

videopnamen. In elke situatie is de snelheid van de hoofdstroming bepaald met behulp van inkt. De gemiddelde snelheid in de meetsektie wordt als maat genomen. Omdat de fout in de snelheidsmeting erg groot is en de snelheid moeilijk instelbaar is op een bepaalde waarde gebruiken we snelheidsintervallen.

A.  $8 < U_{\max} < 10$  cm/sec.

In tabel 4,20 staat voor een aantal meetsituaties de vloeistofsnelheid en de vliesfrequentie. Met  $L = 0$  wordt de vrije grenslaag bedoeld.

$U_{\max}$	L	met/zonder scheidings- wand	$T_p$	f
cm/sec	cm		sec	$s^{-1}$
$8.8_{\pm} 0.5$	22.5	m	$2.8_{\pm} 0.7$	$0.4_{\pm} 0.1$
$8.1_{\pm} 0.4$	22.5	m	$2.8_{\pm} 0.2$	$0.36_{\pm} 0.03$
$8.5_{\pm} 0.4$	22.5	z	$2.9_{\pm} 0.3$	$0.34_{\pm} 0.04$
$8.3_{\pm} 0.4$	15	m	$1.9_{\pm} 0.2$	$0.53_{\pm} 0.06$
$8.6_{\pm} 0.4$	0	m	$1.2_{\pm} 0.1$	$0.83_{\pm} 0.07$

fig. 4.20

In een vergelijkbare situatie blijkt dus een langer vlies met een lagere frequentie te bewegen dan een korter vlies. De frequentie in de vrije grenslaag is hoger dan met vlies. Deze trend zet zich voort in het gebied van 6 - 8 cm/sec.

B.  $6 < U_{\max} < 8$  cm/sec

De uitkomsten van deze metingen staan weergegeven in tabel 4.21

$U_{\max}$	L	met/zonder scheidings- wand	$T_p$	f
cm/sec	cm		sec	sec <sup>-1</sup>
$6.3 \pm 0.2$	22.5	m	$3.3 \pm 0.6$	$0.30 \pm 0.5$
$6.2 \pm 0.2$	22.5	z	$4.4 \pm 0.4$	$0.23 \pm 0.02$
$6.7 \pm 0.2$	15	m	$2.4 \pm 0.4$	$0.42 \pm 0.07$
$6.5 \pm 0.2$	0	m	$1.7 \pm 0.2$	$0.59 \pm 0.06$
$6.7 \pm 0.2$	0	m	$1.5 \pm 0.2$	$0.67 \pm 0.07$

fig. 4.21

Uit de tabel blijkt, dat in dit snelheidsinterval dezelfde verschijnselen optreden als hierboven.

C.  $U_{\max} < 6$  cm/sec.

Ook bij snelheden onder 6 cm/sec zijn genoemde verschijnselen te zien

$U_{\max}$	L	met/zonder scheidings- wand	$T_p$	f
cm/sec	cm		sec	sec <sup>-1</sup>
$4.8 \pm 0.2$	15	m	$4.5 \pm 0.4$	$0.22 \pm 0.02$
$3.8 \pm 0.2$	15	m	$7 \pm 1$	$0.14 \pm 0.02$ (*)
$3.6 \pm 0.2$	0	m	$5.5 \pm 0.8$	$0.18 \pm 0.03$
$4.2 \pm 0.2$	0	m	$4 \pm 0.6$	$0.25 \pm 0.04$

fig.4.22

Uit het bovenstaande blijkt, dat de aanwezigheid van een vlies er voor zorgt, dat de stroming gevoelig wordt voor verstoringen met een andere frequentie dan bij een vrije grenslaag het geval is. Die frequentie ligt lager. Bij een lang vlies is de frequentie lager dan bij een kort vlies, wat nog niet verklaard kan worden.

(\*) Over het algemeen hing het vlies stil bij snelheden lager dan 4 cm/sec. Deze opname vormt een uitzondering.

#### 4.4.4 De vergelijking met de theorie.

Om het model toe te passen uit paragraaf 3.3.2 moet  $U_{\max}$  en  $\delta$  bekend zijn. Het is dan mogelijk om de frequentie van de golf die maximaal groeit uit te rekenen. Voor deze golf geldt, dat het dimensieloze golfgetal  $\alpha$  gelijk is aan 0.8 en de dimensieloze golfsnelheid gelijk is aan  $c_r = \frac{1}{2}$ . Uitgaande van een bepaalde uniforme beginsnelheid kan met behulp van de theorie van H. Schlichting (appendix B)  $U_{\max}$  en  $\delta$  worden berekend. Er wordt uitgegaan van beginsnelheden van 3, 5 en 7 cm/sec. Dan wordt  $U_{\max}$  en  $\delta$  uitgerekend in het midden van de meetsektie, dus op  $x = 55$  cm, waarbij gedaan wordt of het vlies gewoon horizontaal hangt. In figuur 4.23 staan de berekende waarden met de bijbehorende frequenties getabelleerd.

$U_o$	$\frac{vx}{a^2 U_o}$	$U_{\max}(55)$	$\delta(55)$	$\lambda^*$	$c_r^*$	$T^*$	$f^*$	gem. $f^*$
3	0.04	4	1.6	13	2	6	0.15	0.14 - 0.22
5	0.022	6.4	1.4	11	3.2	3.4	0.29	0.23 - 0.42
7	0.015	8.7	1.4	11	4.35	2.5	0.39	0.34 - 0.53

fig. 4.23

In figuur 4.23 geeft de laatste kolom de gemeten frequenties, met een vlies in de stroming. Een vergelijking met de gemeten frequenties wijst uit, dat deze in grootte overeenkomen met de experimenteel waargenomen frequenties. Voor een eerste-orde-schatting voldoet het model dus.

#### 4.4.5 Konklusies en discussie.

De metingen aan de vliezen hebben een globaal, verkennend karakter en moeten voorzichtig geïnterpreteerd worden. Enkele kwalitatieve konklusies zijn zeer zeker te trekken:

- De instabiele beweging van het vlies wordt veroorzaakt, doordat in kompartiment I, waar de vloeistof een eindige snelheid heeft, een verstoring begint te groeien. Het blijkt, dat zich een wervel vormt langs het vlies. Deze wervel groeit in diameter en drukt het vlies in kompartiment II. De wervel rolt onder het vlies



uit, waarna het proces weer opnieuw kan beginnen. Deze wervel heeft een lopende golfbeweging tot gevolg, waarvan de golflengte groeit in de tijd en de amplitude in de plaats. Er is geen tijds- en plaatsafhankelijkheid gevonden van de frequentie en de vliesbeweging.

- De plaats waar de wervel ontstaat is afhankelijk van de lengte van het vlies en het snelheidsverschil over het vlies. Is het laatste kleiner dan 4 cm/sec dan ontstaat geen instabiele beweging. Het vlies met een lengte van 7.5 cm is stabiel tot 8 cm/sec. Daarboven maakt het lichte flapperbewegingen.

- Frequentiemetingen hebben aangetoond, dat het aanbrengen van een vlies de gevoeligheid van het systeem verandert t.o.v. die van de vrije grenslaag. Deze frequentieverschuiving wordt groter naarmate het vlies langer wordt.

De theorie voorspelt op dit moment in grootteorde de frequenties die optreden. De frequentieverandering die door het toenemende snelheidsverschil wordt veroorzaakt volgt wèl uit de theorie. De veranderingen die door het vlies worden veroorzaakt echter niet. Voor het laatste is op dit moment nog geen verklaring voorhanden.

- De beweging van de vliezen is niet 2-dimensionaal. De golven lopen soms schuin door de vliezen. Het vlies hangt in het begin ook niet altijd vlak. Om bovengenoemde redenen is het misschien noodzakelijk om de vliezen smaller te maken, zodat de rand niet meer in de grenslaag van de zijwand hangt. Ook is het mogelijk dat de vliezen enigszins schuin in de stroming hangen, zodat de afstand tot de wand niet konstant is.

- Het is aan te bevelen om frequentiemetingen aan het vlies te combineren met snelheidsmetingen achter het vlies. Op het laatste signaal kan een spektrale analyse worden gedaan.

- Het is niet uitgesloten, dat het ophangpunt van het vlies enigszins oscilleert. Dit kan voorkomen worden door een loodrecht schot te plaatsen op de scheidingswand tussen de kompartimenten.

## HOOFDSTUK 5: KONKLUSIES EN VOORTGANG.

### 5.1 Konklusies

In het voorgaande is een studie beschreven aan de stabiliteit van parallelle stromingen die met verschillende snelheid bewegen en waartussen zich eventueel een vlies kan bevinden. Hieruit is het volgende gebleken:

I Een verstoring zal groeien onder invloed van het snelheidsverschil. De verstoring zal harder groeien naarmate het snelheidsverschil groter wordt. Dit werkt dus destabiliserend.

II Neemt men in plaats van een stromingsprofiel met een diskontinuiteit een kontinu profiel aan met lineaire snelheidsovergangen, dan gaat hier een stabiliserende werking van uit.

III Gaat men uit van een vlies tussen de twee stromingen met een lineair snelheidsprofiel aan beide zijden (dubbele shear-layer), dan kan het snelheidsprofiel ook destabiliserend werken.

IV Neemt men een spankracht aan in het vlies dan wordt de stroming stabiel. Het instabiele gebied wordt kleiner en de verstoringen die instabiel worden groeien minder snel.

V De massa van het vlies zorgt voor een minder snelle groei, maar heeft geen invloed op de grootte van het instabiele gebied. Wel verandert de voortplantingssnelheid van de golven.

VI Een stroming met een "bol" stromingsprofiel is stabiel dan een stroming met een "hol" profiel.

VII De experimenten die gedaan zijn in de vrije-grenslaag vertonen veel overeenkomsten met de literatuur.

VIII Het aanbrenge van een vlies in de stroming verandert de frequentie van de verstoring die het hardst groeit. Deze wordt lager.

IX Een lang vlies flappert met een lagere frequentie dan een kort vlies. Hiervoor is nog geen verklaring gevonden.

X Het "shear-layer"-model uit par. 3.3.2 voorspelt frequenties als functie van de snelheid die in grootteorde overeenkomen met de waargenomen frequenties.

Het gedrag van een instabiel vlies kan worden beschreven met 4 grootheden, waarvan er enkele gekoppeld zijn. Zij worden hieronder elk afzonderlijk behandeld. Men kan de instabiliteit beschrijven met:

#### 1. De frequentie

Deze grootheid is zowel experimenteel als theoretisch het best te bepalen. Bij fysiologische studies is dit waarschijnlijk de eenvoudigste. Uit het voorgaande zijn een aantal aspecten van de frequentie duidelijk geworden. De frequentie van de verstoring die het snelst groeit is afhankelijk van de vlieslengte, het snelheidsverschil over het vlies en de spankracht in het vlies. Zijn genoemde parameters bepaald, dan zal het spektrum slechts een beperkte bandbreedte hebben. Als dit spektrum in het fysiologische gebied ligt, dan zal de vliesklep flapperen. Het is mogelijk dat een kleine verandering in bovengenoemde parameters een verschuiving van het spektrum tot gevolg heeft, waardoor dit in een fysiologisch gunstiger gebied komt te liggen.

#### 2. De amplitude

Deze grootheid is in modelexperimenten redelijk eenvoudig te meten. Het blijkt, dat deze afhankelijk is van het snelheidsverschil en de vlieslengte en van de afstand tot het ophangpunt. Hoewel dit niet experimenteel is bewezen zijn er toch aanwijzingen dat de spankracht ook invloed heeft op de amplitude. Theoretisch kan de snelheid waarmee de verstoring groeit in de tijd worden bepaald. Als de spankracht deze groeisnelheid vermindert, zal waarschijnlijk ook de amplitude worden vermindert.

#### 3. De golflengte

De golflengte is experimenteel moeilijk te bepalen, omdat deze niet konstant is als functie van de plaats en de tijd. De theorie die tot nu toe gebruikt is gaat uit van een konstante golflengte in plaats en tijd.

#### 4. De snelheid van de golf

Ook deze is waarschijnlijk niet konstant, want het quotiënt van de snelheid en de golflengte, de frequentie, is wel konstant. De golflengte en de snelheid zouden met behulp van 2 anemometers en een opgelegde verstoring bepaald kunnen worden (Schubauer en Skramstadt, 1948)

Samenvattend zou ik het volgende willen stellen:

Het is zeer waarschijnlijk, dat een kunstklep zich door zijn ophanging in een stroming bevindt, die meer gestoord is dan bij een normale klep. Het is dus bijna onvermijdelijk, dat deze stroming instabiel wordt. De frequentie waarmee de snelheid van de stroming fluktueert zal waarschijnlijk in een smalle frequentieband liggen. Deze band zal bepaald worden door de spanning in de vliezen, de snelheid van het bloed in de sinus, de vlieslengte en waarschijnlijk nog andere parameters die hier nog niet aan de orde zijn geweest. De vraag is, of deze frequentieband in het fysiologische gebied ligt. Als dit het geval is, dan is in ieder geval de situatie voor de kunstklep ongunstiger dan voor de normale klep. De stroming is meer gestoord en het snelheidsverschil over de klep is groter. Een van de methoden om stabiel gedrag te krijgen kan misschien zijn, het verschuiven van de frequentieband naar een ander gebied.

#### 5.2 De voortgang

Wat betreft de voortgang van het onderzoek zijn er een aantal goede mogelijkheden te noemen:

##### A. theoretisch

- Het is waarschijnlijk, dat het drukverschil over het vlies tengevolge van de spankracht of een voorspanning een grote invloed kan hebben op de stabiliteit. Daarom is het de moeite waard om te proberen of dit drukverschil in het shear-layer-model is in te passen
- Een tweede uitbreiding is eenvoudige, lineaire stromingsprofielen als uitgangspunt te nemen, waarbij dan de viskositeit in rekening wordt gebracht. Als voorbeeld kan een artikel dienen van R.E.Esch(1957)

die dit heeft gedaan voor de vrije grenslaag. Hij maakte gebruik van het profiel uit paragraaf 3.3.1

- Het is belangrijk om de spatiële groei beter te begrijpen. Uitgangspunt hierbij kunnen de artikelen van M.Gaster (1962) zijn. Hij gaat uit van een reële golfsnelheid en een imaginair golfgetal.

#### B. Experimenteel

- Het is belangrijk om de experimenten die nu zijn gedaan te herhalen en meer kwantitatieve waarde te geven. Verbeteringen kunnen zijn: een spektrale analyse op de snelheidsmetingen, een storing met één enkele golflengte opleggen, de aanstroming verbeteren en de scheidingsplaat tussen de kompartimenten I en II fixeren met een loodrecht schot.

- Het is interessant om de golfsnelheid en de golflengte te meten. Een goede methode wordt gegeven door G.B.Schubauer en H.K.Skramstadt (1948).

- Het is noodzakelijk om gegevens te verwerven over de oscillaties van zowel kunstkleppen als normale kleppen. Dit zal in eerste instantie vooral een literatuurstudie zijn. Met name in literatuur over echocardiografie.

APPENDIX A: DE STELLINGEN VAN RAYLEIGH.

Op grond van de wrijvingsloze storingsdifferentiaalvergelijking, heeft Rayleigh reeds in 1880 twee stellingen geponeerd, waarmee men al zeer snel uitspraken kan doen over de (in)stabiliteit van een stroming, op grond van de vorm van het stromingsprofiel. Uitgaande van het feit dat  $d^2U/dy^2$  continu is geldt:

Stelling I: Een noodzakelijke conditie voor de instabiliteit van een stroming is, dat het stromingsprofiel  $U(y)$  een buigpunt heeft.

(voor het bewijs zie Drazin & Howard, 1960)

In 1950 bewees Fjørtoft een sterkere, noodzakelijke conditie voor instabiliteit. Deze conditie is, dat ergens in de stroming moet gelden:

$$(d^2U/dy^2)(U - U_k) < 0$$

waarbij geldt  $U_k = U(y_k)$  en  $y_k$  is het punt waar geldt:  $d^2U/dy^2 = 0$

In 1935 heeft Tollmien echter al bewezen, dat voor symmetrische snelheidsprofielen in een kanaal en voor grenslagen, stelling 1 een noodzakelijke, maar ook voldoende, voorwaarde voor instabiel gedrag is. Het bovenstaande is duidelijk waarneembaar als men het gedrag bekijkt van stromingen in konvergerende kanalen en divergerende kanalen en bij omstroming van starre lichamen. Verder poneerde Rayleigh nog:

Stelling II: Voor neutrale storingen ( $c_i = 0$ ) in grenslaagprofielen is altijd de voortplantingssnelheid van de golf  $c_r$  kleiner dan de maximale snelheid van de stroming.

De belangrijke consequentie van deze stelling is het feit, dat er altijd een plaats is waar  $U - c = 0$ . Dit betekent, dat als  $d^2U/dy^2 \neq 0$  op die plaats altijd een singulariteit in de Rayleighvergelijking optreedt.

APPENDIX B: DE LAMINAIRE KANAALINSTROMING.

H. Schlichting heeft in 1934 een berekening gepubliceerd, waarmee de laminaire kanaalinstroming beschreven kan worden. Op deze berekening wordt verder niet ingegaan. Wel wordt hier het resultaat gegeven.

De berekening gaat uit van een uniform stromingsprofiel. De stroming gaat tussen twee parallelle, vlakke platen door. In figuur B1 staan een aantal stromingsprofielen getekend op verschillende afstanden  $x$  tot het begin van het kanaal.

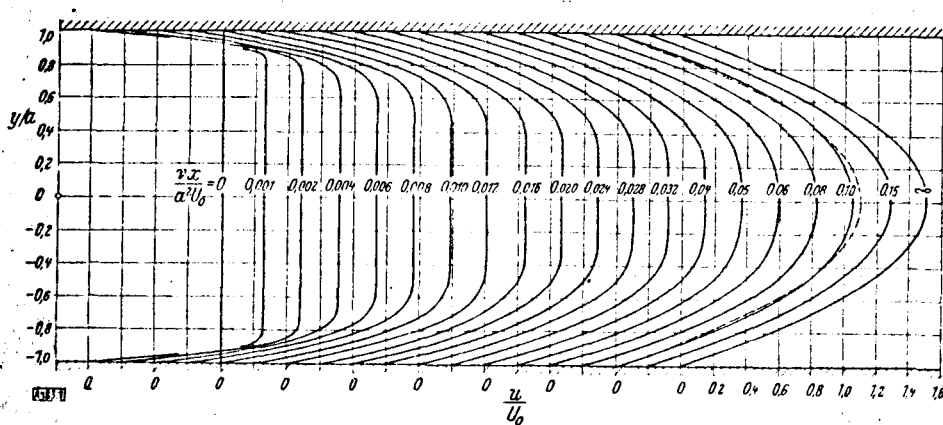


Abb. 1. Die Geschwindigkeitsprofile der laminaren Anlaufströmung im Kanal (gestrichelte Kurve = Poiseuillesche Parabel).

fig. B1

Uit de tabel op de volgende bladzijde is voor elke afstand  $x$  tot het begin van het kanaal de grenslaagdikte  $\delta$  en de snelheid van de hoofdstroming  $U_{\max}$  te berekenen.

Tabelle I.

$\frac{v x}{a^2 U_0} = 0,0005$		$= 0,001$		$= 0,002$		$= 0,004$		$= 0,006$		$= 0,008$	
$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$y/a$	$\frac{u}{U_0}$
1,0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0
0,9911	0,151	0,9874	0,158	0,9821	0,166	0,9747	0,179	0,9690	0,187	0,9642	0,194
0,9821	0,297	0,9747	0,309	0,9642	0,326	0,9495	0,347	0,9380	0,362	0,9284	0,375
0,9732	0,438	0,9621	0,454	0,9464	0,477	0,9242	0,505	0,9070	0,525	0,8925	0,540
0,9642	0,569	0,9494	0,589	0,9285	0,613	0,8989	0,647	0,8760	0,670	0,8568	0,686
0,9553	0,686	0,9368	0,707	0,9106	0,734	0,8736	0,769	0,8450	0,792	0,8210	0,810
0,9464	0,786	0,9242	0,807	0,8927	0,835	0,8485	0,869	0,8140	0,892	0,7850	0,910
0,9374	0,868	0,9115	0,888	0,8748	0,914	0,8232	0,947	0,7830	0,969	0,7490	0,988
0,9285	0,928	0,8989	0,947	0,8570	0,971	0,7980	1,004	0,7520	1,026	0,714	1,043
0,9195	0,971	0,8862	0,990	0,8390	1,013	0,7725	1,045	0,721	1,067	0,678	1,086
0,9150	0,988	0,8799	1,005	0,8301	1,028	0,7600	1,060	0,705	1,085	0,660	1,104
0,9016	1,017	0,8610	1,034	0,8033	1,057	0,722	1,090	0,659	1,117	0,606	1,140
0,8927	1,028	0,8483	1,045	0,7853	1,067	0,697	1,100	0,628	1,127	0,570	1,150
0,866	1,037	0,811	1,053	0,732	1,074	0,621	1,108	0,535	1,134	0,463	1,158
0,821	1,038	0,747	1,054	0,642	1,075	0,495	1,109	0,380	1,136	0,284	1,160
0,600	1,038	0,600	1,054	0,600	1,075	0,400	1,109	0,200	1,136	0,200	1,160
0,400	1,038	0,400	1,054	0,400	1,075	0,200	1,109	0	1,136	0	1,160
0,200	1,038	0,200	1,054	0,200	1,075	0	1,109	0	1,136	0	1,160
0	1,038	0	1,054	0	1,075	0	1,109	0	1,136	0	1,160

Tabelle I (Fortsetzung).

$\frac{v x}{a^2 U_0} = 0,010$		0,012		0,016		0,020	0,024	0,028	0,032	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,150	$\infty$
$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$y/a$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$
1,0	0	1,0	0	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9600	0,200	0,9561	0,226	0,9	0,413	0,387	0,369	0,355	0,346	0,338	0,329	0,321	0,310	0,302	0,292	0,285
0,9200	0,384	0,9122	0,395	0,8	0,731	0,697	0,672	0,653	0,640	0,626	0,611	0,599	0,581	0,568	0,551	0,540
0,8800	0,555	0,8685	0,566	0,7	0,962	0,933	0,911	0,893	0,879	0,863	0,846	0,833	0,811	0,797	0,778	0,765
0,8400	0,701	0,8245	0,715	0,6	1,100	1,087	1,079	1,070	1,062	1,048	1,033	1,020	1,001	0,989	0,971	0,960
0,8000	0,825	0,7810	0,838	0,5	1,197	1,200	1,198	1,194	1,189	1,180	1,171	1,163	1,151	1,143	1,132	1,125
0,7600	0,925	0,737	0,936	0,4	1,234	1,254	1,262	1,264	1,265	1,264	1,264	1,263	1,262	1,261	1,261	1,260
0,720	1,002	0,693	1,014	0,3	1,238	1,260	1,278	1,292	1,301	1,310	1,320	1,327	1,339	1,347	1,358	1,365
0,680	1,059	0,649	1,071	0,2	1,239	1,261	1,279	1,294	1,309	1,330	1,348	1,364	1,388	1,401	1,426	1,440
0,640	1,102	0,605	1,117	0,1	1,239	1,262	1,280	1,295	1,310	1,335	1,360	1,382	1,414	1,436	1,466	1,485
0,620	1,121	0,583	1,139	0	1,239	1,262	1,280	1,295	1,310	1,335	1,363	1,387	1,422	1,446	1,479	1,500
0,560	1,161	0,518	1,181													
0,520	1,172	0,474	1,193													
0,400	1,181	0,342	1,203													
0,200	1,183	0,123	1,206													
0	1,183	0	1,206													



## LITERATUURLIJST

1. Benjamin T.B.                      The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows  
J.Fluid Mech. 16, 1963, 436-450
  
2. Bom N.                              Echocardiology  
Thoraxcentrum Erasmus Universiteit Rotterdam  
M.Nijhof - Den Haag, 1977
  
- (\*) 3. Bradshaw P.                     The effect of initial conditions on the development of a free shear layer  
J.Fluid Mech. 26, 1966, 225-236
  
- (\*) 4. Browand F.K.                    An experimental investigation of the instability of an incompressible, separated shear layer  
J.Fluid Mech. 26, 1966, 281-307
  
5. Drazin P.G.,  
Howard L.N.                         Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid  
Adv. in Appl. Mech. 9, 1966  
Academic Press New York and London
  
6. Esch R.E.                         The stability of a shear layer between parallel streams  
J.Fluid Mech. 3, 1957, 289-303
  
7. Feigenbaum H.                    Echocardiography  
Lea & Febiger, Philadelphia, 1972
  
8. Fjørtoft R.                        Application of integral theorems in deriving criteria of stability of laminar flow and for de baroclinic circular vortex  
Geofys.Publ. 17, 1950, 1-52

9. Gaster M. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability  
J.Fluid Mech. 14, 1962, 222-224
10. Gaster M. The role of spatially growing waves in the theory of hydrodynamic stability  
Prog. in Aeron. Sc.,6, 1962
11. Helmholtz H. On discontinuous movements of fluids  
Phil. Mag. 36, 1868, 337-346
12. Kelvin W. The influence of wind waves in water supposed frictionless  
Phil. Mag. 42, 1872, 368-374
13. Kramer M.O. Boundary-layer stabilisation by distributed damping  
A.S.N.E. Journal, february 1960
- (\*14. Landahl M.T. On the stability of a laminar incompressible boundary-layer over a flexible surface  
J.Fluid Mech. 13, 1962, 609-632
15. Lessen M. On the stability of the free laminar boundary layer between parallel streams  
N.A.C.A. report 979, 1950
16. Lessen M. Ko S.H. Viscous instability of an incompressible fluid half-jet flow  
The phys. of fluids, 9, 1966, 1179-1183
17. Lin C.C. The theory of hydrodynamic stability  
Cambridge University Press,  
London & New York, 1955
18. Lochtenberg B.H. Transition in a separated laminar boundary layer  
Unpublished Aeron. Research Council Note  
19,007, (1957)

19. Pinto E.R. Fine flutterings of the aortic valve as demonstrated by aortic valve echocardiograms  
American Heart Journal 95, 1978, 807-808
20. Prandtl L. Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz  
Z.Angew.Math.Mech. 1, 1921, 431-436
21. Rayleigh J.W.S. On the stability, or instability, of certain fluid motions  
Proc. Lond. Math. Soc. 9, 1880, 57-70
22. Rayleigh J.W.S. The theory of Sound II, chap.XXI  
Dover, New York 1945  
(reprint 2nd. ed. of 1894)
23. Reynolds O. On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels.  
Phil.Trans.Roy.Soc. 174, 1883, 935-982
24. Sato H. Experimental investigation of the transition of a laminar separated layer  
J.Phys.Soc.Japan 11, 1956, 702-709
25. Sato H. Further investigation on the transition of two-dimensional separated layer at subsonic speeds  
J.Phys.Soc.Japan 14, 1959, 1797-1810
26. Schlichting H. Laminare Kanaleinlaufströmung  
Z.Angew.Math.Mech. 14, 1934, 368-373

27. Schlichting H.                    Grenzschrifttheorie  
G.Braun Karlsruhe, 1951
28. Schubauer G.B.                    Laminar boundarylayer oscillations and  
Skramstad H.K.                    transition on a flat plate  
N.A.C.A. Rep. 909 (1948)
29. Squire H.B.                        On the stability for three-dimensional  
disturbances of viscous fluid flow between  
parallel walls  
Proc. of the Royal Soc. A 142, 1933, 621-628
30. v.Steenhoven A.A.                Een hydrodynamische analyse als basis voor  
de constructie van vlieskleprothesen,  
januari 1975  
Afstudeerverslag T.H.Eindhoven
31. Tietjens O.                        Beiträge zur Entstehung der Turbulenz  
Z.Angew.Math.Mech. 5, 1925, 200-217
32. Tollmien W.                        Über die Entstehung der Turbulenz  
Nachr.Ges.Wiss.Göttingen  
Math.Phys.Klasse, 1929
33. Tollmien W.                        Ein allgemeines Kriterium der instabilität  
laminarer Geschwindigkeitsverteilungen  
Nachr.Ges.Wiss.Göttingen,  
Math.Phys.Klasse, 50, 1935, 79-114
34. Vaessen E.                         Bouw van een 3-dimensionaal model van de  
aortaklep en modelstudies aan het sluitings-  
gedrag bij vervormde sinussen.  
Afstudeerverslag T.H.Eindhoven, 1977

De met een (\*) aangegeven referenties zijn niet aangehaald in het verslag, maar veel gebruikt of van belang voor verder onderzoek.

## SYMBOLENLIJST

$U(y)$		; de snelheid van de hoofdstroming
$U_{\max}$	;	; de maximumsnelheid van de hoofdstroming
$U_{\infty}$		; de snelheid van de hoofdstroming in het oneindige
$u' = (u', v')$		; de snelheid van de verstoring
$r = (x, y)$		; de plaatscoördinaat
$p$		; de druk
$\rho$		; de soortelijke massa
$\nu$		; de kinematische viskositeit
$Re = U_k \delta / \nu$		; het getal van Reynolds
$U_k$		; de karakteristieke snelheid
$L$		; de vlieslengte
$T$		; de kracht, waarmee het vlies is opgespannen per lengteeenheid
$m$		; de massa
$\delta$		; de dikte van de grenslaag
$\Psi = (0, 0, \Psi)$		; de stroomfunctie
$c = c_r + ic_i$		; de snelheid van de verstoring
$\alpha$		; het golfgetal van de verstoring
$\lambda$		; de golflengte van de verstoring: $\alpha = 2\pi/\lambda$