

MASTER

Over koherentiefuncties van gedeeltelijk coherente optische golven

Kolk, H.

Award date:
1971

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

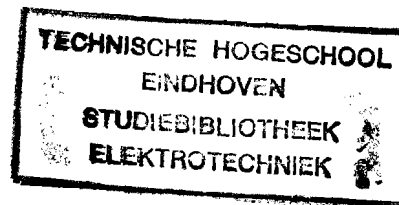
General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

4655

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK



Over coherentiefuncties van
gedeeltelijk coherente optische
golven

door H. Kolk.

Verslag van het afstudeerwerk verricht bij Prof.dr.-ing.
H.J. Butterweck in de groep Theoretische Elektrotechniek B.

309355

ETB-08-1972

september 1971.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

INHOUDSOPGAVE

	blz.
<u>1. Korrelatiefunkties en vermogensspektra.</u>	3
<i>Definities.</i>	
<u>2. Korrelatie en lineaire overdrachtsystemen.</u>	6
2.1 <i>Inleiding.</i>	6
2.2 <i>Noodzakelijke betrekking tussen de vermogens- en kruisvermogensspektra van twee signalen.</i>	7
2.3 <i>Overdrachtsysteem met twee uitgangen en één ingang.</i>	11
2.4 <i>Overdrachtsysteem met twee uitgangen en twee ingangen.</i>	13
2.5 <i>Overdrachtsysteem met n ingangen en n uitgangen.</i>	18
2.6 <i>Een noodzakelijke en voldoende betrekking tussen de vermogens- en kruisvermogensspektra van n signalen.</i>	24
<u>3. Korrelatie en optische golven.</u>	28
3.1 <i>Inleiding.</i>	28
3.2 <i>Een formule voor de voortplanting van de spektrale koherentiefunctie.</i>	29
3.3 <i>Straling door een inkoherente bron.</i>	32
3.4 <i>Inleidende beschouwingen over toegestane en niet-toegestane spektrale koherentiefunkties.</i>	35
3.5 <i>Het theorema van Bochner.</i>	38
3.6 <i>Voorbeelden van toegestane en niet-toegestane spektrale koherentiefunkties.</i>	42
Appendix A.	45
Appendix B.	51
Appendix C.	54
Literatuuropgave.	59

Samenvatting.

In hoofdstuk 1 van dit verslag definiëren we de belangrijkste begrippen die we zullen gebruiken; dit zijn de korrelatiefunkties, de vermogensspektra en de korrelatiegraad. We leiden enkele eigenschappen af, waarbij de nadruk ligt op het verband tussen het vermogensspektrum en de korrelatie.

In hoofdstuk 2 volgen enkele berekeningen over de betrekkingen tussen de korrelaties en vermogensspektra van de ingangs- en uitgangsgrootheden van lineaire overdrachtsystemen. Het resultaat van deze berekeningen is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de relatie tussen de vermogens- en kruisvermogensspektra van een bepaald aantal signalen.

We breiden onze beschouwingen in hoofdstuk 3 uit tot gedeeltelijk koherente optische golven, waarbij we de statistische eigenschappen van het veld vastleggen door de spektrale koherentiefunctie. Voor een zeer bepaalde categorie spektrale koherentiefunkties, namelijk funkties die verschuivingsinvariant zijn, vinden we een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het geoorloofd zijn van dergelijke funkties.

1. Korrelatiefuncties en vermogensspectra.

Definities.

In onze theorie maken we gebruik van het begrip korrelatiefunctie. De kruis-korrelatie van twee signalen $x(t)$ en $y(t)$ is als volgt gedefinieerd:

$$\psi_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)y(t_2)}^{\text{ens}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t_2) p(x, t_1; y, t_2) dx dy,$$

en de autokorrelatie van $x(t)$ als:

$$\psi_{xx}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)}^{\text{ens}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2) p(x, t_1; x, t_2) dx_1 dx_2,$$

het zijn dus tweede orde momenten.

Voor stationaire signalen kunnen we de korrelatiefuncties berekenen uit een tijdgemiddelde; we krijgen dan:

$$\psi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) y_T(t) dt,$$

$$\psi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) x_T(t) dt,$$

waarin de index T de volgende betekenis heeft:

$$x_T(t) = x(t) \quad \text{voor} \quad -T < t < T$$

$$x_T(t) = 0 \quad \text{voor iedere andere } t.$$

Zoals bekend zijn voor stationaire ergodische signalen de resultaten verkregen volgens beide methodes aan elkaar gelijk. Tenzij anders vermeld zijn alle beschouwde signalen van dit type.

Voor complexe signalen worden de formules:

$$\psi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) y_T^*(t) dt,$$

$$\psi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) x_T^*(t) dt.$$

(1)

Opmerking 1

De tweede orde momenten die wij gebruiken zijn zogenaamde centrale momenten; ze hebben dus betrekking op signalen waarvan een eventuele gelijkstroomkomponent afgetrokken is.

Opmerking 2

Beschrijving van processen door tweede orde momenten is alleen volledig bij Gaussische processen. Aangezien veel processen Gaussisch zijn is een theorie, alleen gebaseerd op tweede orde momenten, toch zeer belangrijk.

Bovendien is men in de optika in tweede orde momenten geïnteresseerd, ook al zouden de processen niet Gaussisch zijn, omdat men in het algemeen alleen deze kan meten.

Het vermogensspektrum wordt gedefinieerd als de Fouriergetransformeerde van de autokorrelatie:

$$\psi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Analoog het kruisvermogensspektrum:

$$\psi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Enige belangrijke eigenschappen van deze grootheden zijn:

$$\psi_{xx}(j\omega) \geq 0. \tag{2}$$

$$\psi_{xy}(j\omega) = \psi_{yx}^*(j\omega). \tag{3}$$

In tegenstelling met wat in de literatuur gebruikelijk is definiëren we de korrelatiegraad in het frekwentie- en niet in het tijdgebied:

$$\gamma_{xy}(j\omega) = \frac{\psi_{xy}(j\omega)}{\sqrt{\psi_{xx}(j\omega)} \sqrt{\psi_{yy}(j\omega)}} \tag{4}$$

Het zal blijken dat definitie een betere aansluiting geeft met het gevoelsmatige begrip dat we over korrelatie hebben. In een later stadium zal worden afgeleid dat voor $\gamma_{xy}(j\omega)$ geldt:

$$|\gamma_{xy}(j\omega)| \leq 1 \quad (5)$$

Behalve via Fouriertransformatie uit de korrelatie kan het vermogensspektrum ook op een meer direkte manier worden berekend. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned} \psi_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) y_T^*(t) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} Y_T^*(j\omega) e^{j\omega t} dt d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) Y_T^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

Aannemende dat de limiet en de integraal van plaats verwisseld mogen worden krijgen we:

$$\psi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(j\omega) Y_T^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

zodat

$$\psi_{xy}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(j\omega) Y_T^*(j\omega). \quad (6)$$

Het blijkt dat deze limiet in het algemeen niet bestaat. Een remedie voor deze moeilijkheid is om voor de limietovergang te middelen over een ensemble. De korrekte formule luidt dan:

$$\psi_{xy}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \overline{X_T(j\omega) Y_T^*(j\omega)}^{\text{ens}} \quad (7)$$

Een voorbeeld voor de berekening van het vermogensspektrum volgens beide methodes is te vinden in Appendix A.

Een illustratie van het niet-konvergeren van de limiet in formule (6) is gegeven in Appendix B

2. Korrelatie en lineaire overdrachtsystemen.

2.1 Inleiding.

In dit hoofdstuk zullen we het begrip korrelatie toepassen op overdrachtsystemen met een diskreet aantal in- en uitgangen; eerst op een systeem met twee uitgangen en één of twee ingangen, daarna op een systeem met n uitgangen en n of minder ingangen.

Het resultaat zal zijn een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de betrekking tussen de vermogens- en kruisvermogensspektra van een aantal signalen, ook de synthese van signalen met bepaalde korrelatieeigenschappen zal worden bekeken.

2.2 Een noodzakelijke betrekking tussen de vermogens- en kruisvermogensspektra van twee signalen.

We maken gebruik van een lineair overdrachtsysteem met twee ingangen en één uitgang. (zie fig. 2.2.1). De twee signalen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ waarvan we de betrekking tussen de spektra willen onderzoeken leggen we aan de ingang.

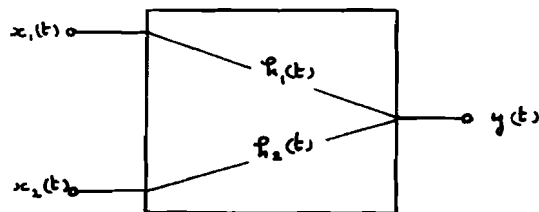


fig. 2.2.1

De redenering is als volgt: menging van de beide signalen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ tot één signaal $y(t)$ moet voor ieder willekeurig overdrachtsysteem tot gevolg hebben dat $\psi_{yy}(j\omega)$ een vermogensspektrum is, met andere woorden $\psi_{yy}(j\omega) \geq 0$ voor iedere ω .

De autokorrelaties aan de ingang noteren we als $\psi_{x_{11}}(t)$ en $\psi_{x_{22}}(t)$, de kruiskorrelaties als $\psi_{x_{12}}(t)$ en $\psi_{x_{21}}(t)$ met als Fouriergetransformeerden de vermogensspektra $\psi_{x_{11}}(j\omega)$ en $\psi_{x_{22}}(j\omega)$ en de kruisvermogensspektra $\psi_{x_{12}}(j\omega)$ en $\psi_{x_{21}}(j\omega)$.

$$\text{Er geldt: } \psi_{x_{12}}(t) = \psi_{x_{21}}(-t) \quad (\text{reële signalen})$$

$$\psi_{x_{12}}(j\omega) = \psi_{x_{21}}^*(j\omega)$$

$$\psi_{x_{11}}(j\omega), \psi_{x_{22}}(j\omega) \geq 0 \text{ voor iedere } \omega.$$

Gebruikmakend van de lineariteit van het systeem:

$$y(t) = x_1(t) * h_1(t) + x_2(t) * h_2(t).$$

Hieruit kunnen we de autokorrelatie $\psi_{yy}(t)$ van $y(t)$ afleiden:

$$\begin{aligned} \psi_{yy}(t) &= \psi_{x_{11}}(t) * h_1(t) * h_1(-t) + \psi_{x_{22}}(t) * h_2(t) * h_2(-t) \\ &+ \psi_{x_{12}}(t) * h_1(t) * h_2(-t) + \psi_{x_{21}}(t) * h_2(t) * h_1(-t). \end{aligned}$$

Met de overdrachtsfuncties $H_1(j\omega)$ en $H_2(j\omega)$ kunnen we voor $\psi_{yy}(j\omega)$ schrijven:

$$\begin{aligned} \psi_{yy}(j\omega) &= \psi_{x_{11}}(j\omega) |H_1(j\omega)|^2 + \psi_{x_{22}}(j\omega) |H_2(j\omega)|^2 + \\ &\psi_{x_{12}}(j\omega) H_1(j\omega) H_2^*(j\omega) + \psi_{x_{21}}(j\omega) H_2(j\omega) H_1^*(j\omega) \\ &= \psi_{x_{11}}(j\omega) |H_1(j\omega)|^2 + \psi_{x_{22}}(j\omega) |H_2(j\omega)|^2 + 2\operatorname{Re}\psi_{x_{12}}(j\omega) H_1(j\omega) H_2^*(j\omega) \end{aligned}$$

Daar we slechts een nodige voorwaarde willen afleiden, kunnen we stellen $H_1(j\omega) = 1$, zodat

$$\psi_{yy}(j\omega) = \psi_{x_{11}}(j\omega) + \psi_{x_{22}}(j\omega) |H_2(j\omega)|^2 + 2\operatorname{Re}\psi_{x_{12}}(j\omega) H_2^*(j\omega),$$

Kies nu $\arg\{H_2(j\omega)\} = \arg\{\psi_{x_{12}}(j\omega)\}$:

$$\psi_{yy}(j\omega) = \psi_{x_{11}}(j\omega) + \psi_{x_{22}}(j\omega) |H_2(j\omega)|^2 + 2|\psi_{x_{12}}(j\omega)| |H_2(j\omega)|.$$

We moeten eisen dat deze vorm voor iedere ω groter dan of gelijk aan nul is.

Anders geschreven:

$$\left\{ \psi_{x_{22}}(j\omega) |H_2(j\omega)| + \frac{|\psi_{x_{12}}(j\omega)|^2}{\psi_{x_{22}}(j\omega)} \right\} + \psi_{x_{11}}(j\omega) - \frac{|\psi_{x_{12}}(j\omega)|^2}{\psi_{x_{22}}(j\omega)} \geq 0$$

Hieraan wordt alleen dan altijd voldaan als

$$|\psi_{x_{12}}(j\omega)|^2 \leq \psi_{x_{11}}(j\omega) \psi_{x_{22}}(j\omega)$$

of

$$\psi_{x_{12}}(\omega) \psi_{x_{21}}(j\omega) \leq \psi_{x_{11}}(j\omega) \psi_{x_{22}}(j\omega)$$

(8)

Later zal blijken dat we met voordeel gebruik kunnen maken van een matrixnotatie. De noodzakelijk voorwaarde (8) luidt dan:

$$\text{de matrix } \bar{\psi}_x(j\omega) = \begin{bmatrix} \psi_{x_{11}}(j\omega) & \psi_{x_{12}}(j\omega) \\ \psi_{x_{21}}(j\omega) & \psi_{x_{22}}(j\omega) \end{bmatrix} \text{ moet}$$

positief semi-definiet zijn. De definitie van dit begrip volgt in hoofdstuk 2.3. $\bar{\psi}_x(j\omega)$ wordt de spektrale dichtheidsmatrix van $x_1(t)$ en $x_2(t)$ genoemd. De vraag of (8) ook een voldoende voorwaarde is zullen we beantwoorden als we de relatie tussen de spektra van n signalen beschouwen.

Gebruikmakend van formule (8) kunnen we een nodige voorwaarde afleiden voor de kruiskorrelatie en de autokorrelaties van twee signalen.

Uit de Fourierbetrekking $\psi_{x_{12}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{x_{12}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ volgt:

$$|\psi_{x_{12}}(t)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{x_{12}}(j\omega)| d\omega \right\}^2.$$

Met (8) wordt dit:

$$|\psi_{x_{12}}(t)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\psi_{x_{22}}(j\omega)} \sqrt{\psi_{x_{22}}(j\omega)} \right]^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{x_{11}}(j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{x_{22}}(j\omega) d\omega$$

waarbij de laatste stap volgt uit de ongelijkheid van Schwarz. De kruiskorrelatie en de autokorrelaties van twee signalen moeten dus voldoen aan:

$$|\psi_{x_{12}}(t)|^2 \leq \psi_{x_{11}}(0) \psi_{x_{22}}(0) \quad (9)$$

N.B. met $\psi_{x_{11}}(0)$ wordt de autokorrelatie voor $t = 0$ bedoeld.

Opmerkingen

1. Uit de gegeven afleiding zien we dat (8) een strengere voorwaarde is dan (9).
2. De afgeleide ongelijkheden zijn analoog aan de voorwaarden en het vermogensspectrum van één signaal:

$$\psi_{x_{11}}(t) \leq \psi_{x_{11}}(0) \quad (A)$$

$$\psi_{x_{11}}(j\omega) \geq 0 \quad (B)$$

Voorwaarde (A) is af te leiden uit (B); het omgekeerde geldt niet.

2.3 Overdrachtsysteem met twee uitgangen en één ingang.

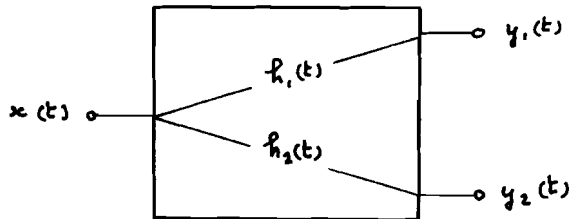


fig. 2.3.1

De autokorrelatie van hetingangssignaal $x(t)$ is $\psi_{xx}(t)$.
De korrelaties van de uitgangssignalen zijn dan:

$$\psi_{y_{11}}(t) = \psi_{xx}(t) * h_1(t) * h_1(-t)$$

$$\psi_{y_{22}}(t) = \psi_{xx}(t) * h_2(t) * h_2(-t)$$

$$\psi_{y_{21}}(t) = \psi_{xx}(t) * h_2(t) * h_1(-t) = \psi_{y_{12}}(-t).$$

In het frekwentiedomein:

$$\psi_{y_{11}}(j\omega) = \psi_{xx}(j\omega) |H_1(j\omega)|^2$$

$$\psi_{y_{22}}(j\omega) = \psi_{xx}(j\omega) |H_2(j\omega)|^2$$

$$\psi_{y_{21}}(j\omega) = \psi_{xx}(j\omega) H_2(j\omega) H_1^*(j\omega) = \psi_{y_{12}}^*(j\omega)$$

Uit het bovenstaande zien we gemakkelijk dat voor de configuratie uit fig. 2.3.1 geldt:

$$\psi_{y_{12}}(j\omega) \psi_{y_{21}}(j\omega) = |\psi_{y_{12}}(j\omega)|^2 = \psi_{y_{11}}(j\omega) \psi_{y_{22}}(j\omega).$$

Hier blijkt direkt het voordeel van de op onze manier gedefinieerde korrelatiegraad. Voor ons gevoel zijn namelijk twee signalen die uit

één signaal worden afgeleid volledig gekorreleerd en dat komt nu dan ook tot uiting doordat:

$$|\gamma_{y_{12}}(j\omega)| = \frac{|\psi_{y_{12}}(j\omega)|}{\sqrt{\psi_{y_{11}}(j\omega)} \sqrt{\psi_{y_{22}}(j\omega)}} = 1.$$

Voor de analoge grootheid gedefinieerd in het tijddomein

$$\gamma_{y_{12}}(\tau) = \frac{\psi_{y_{12}}(\tau)}{\sqrt{\psi_{y_{11}}(0)} \sqrt{\psi_{y_{22}}(0)}}$$

kunnen we hier slechts konkluderen dat $|\gamma_{y_{12}}(\tau)| \leq 1$ en dat slechts voor speciale gevallen het gelijkteken geldt.

Enige voorzichtigheid is geboden als voor $H_1(j\omega)$ en $H_2(j\omega)$ twee niet-overlappende bandfilters worden gekozen zodat $\psi_{y_{11}}(j\omega)$ en $\psi_{y_{22}}(j\omega)$ twee elkaar niet-overlappende spektra zijn. (fig.2.3.2)

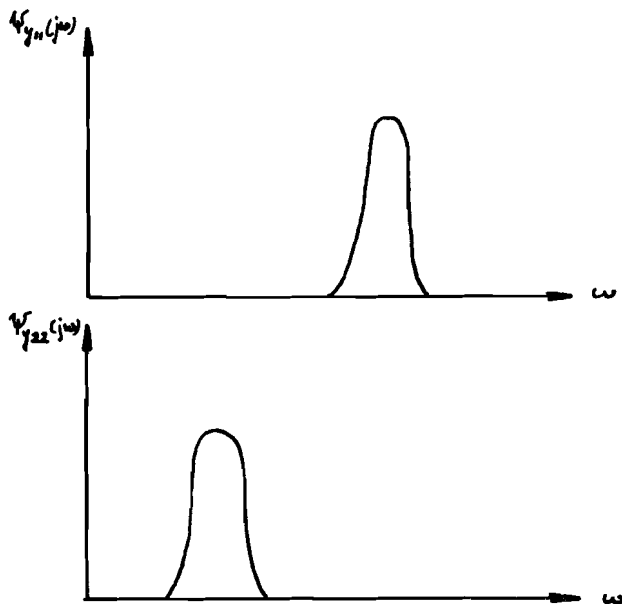


fig. 2.3.2

Nu is òf $\psi_{y_{11}}(j\omega)$ òf $\psi_{y_{22}}(j\omega)$ nul of $\psi_{y_{11}}(j\omega)$ en $\psi_{y_{21}}(j\omega)$ zijn beide nul; $\psi_{y_{12}}(j\omega)$ is dan echter ook nul, zodat $|\gamma_{12}(j\omega)|$ nog steeds gelijk aan één kan zijn.

2.4 Overdrachtsysteem met twee uitgangen en twee ingangen.

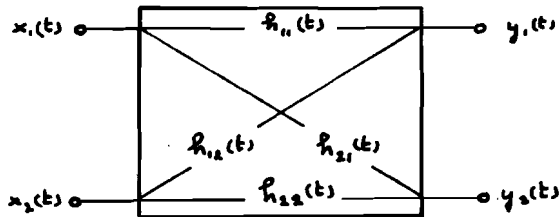


fig. 2.4.1

De tweeingangssignalen in fig. 2.4.1, $x_1(t)$ en $x_2(t)$ zijn ongekorreleerd; de autokorrelaties zijn respectievelijk $\psi_{x_{11}}(t)$ en $\psi_{x_{22}}(t)$. Voor de korrelaties van de uitgangssignalen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ geldt:

$$\psi_{y_{11}}(t) = \psi_{x_{11}}(t) * h_{11}(t) * h_{11}(-t) + \psi_{x_{22}}(t) * h_{12}(t) * h_{12}(-t)$$

$$\psi_{y_{22}}(t) = \psi_{x_{11}}(t) * h_{21}(t) * h_{21}(-t) + \psi_{x_{22}}(t) * h_{22}(t) * h_{22}(-t)$$

$$\begin{aligned} \psi_{y_{12}}(t) &= \psi_{x_{11}}(t) * h_{11}(t) * h_{21}(-t) + \psi_{x_{22}}(t) * h_{12}(t) * h_{22}(-t) \\ &= \psi_{y_{21}}(-t) \end{aligned}$$

In het frekwentiedomein:

$$\psi_{y_{11}}(j\omega) = \psi_{x_{11}}(j\omega) |H_{11}(j\omega)|^2 + \psi_{x_{22}}(j\omega) |H_{12}(j\omega)|^2$$

$$\psi_{y_{22}}(j\omega) = \psi_{x_{11}}(j\omega) |H_{21}(j\omega)|^2 + \psi_{x_{22}}(j\omega) |H_{22}(j\omega)|^2$$

$$\psi_{y_{12}}(j\omega) = \psi_{x_{11}}(j\omega) H_{11}(j\omega) H_{21}^*(j\omega) + \psi_{x_{22}}(j\omega) H_{12}(j\omega) H_{22}^*(j\omega) = \psi_{y_{21}}^*(j\omega)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 |\psi_{y_{12}}(j\omega)|^2 &\leq \{\psi_{x_{11}}(j\omega)|H_{11}(j\omega)||H_{21}^*(j\omega)| + \psi_{x_{22}}(j\omega)|H_{12}(j\omega)||H_{22}^*(j\omega)|\}^2 \quad (A) \\
 &= \psi_{x_{11}}^2(j\omega)|H_{11}(j\omega)|^2|H_{21}^*(j\omega)|^2 + \psi_{x_{22}}^2(j\omega)|H_{12}(j\omega)|^2|H_{22}^*(j\omega)|^2 + \\
 &\quad + 2\psi_{x_{11}}(j\omega)\psi_{x_{22}}(j\omega)|H_{11}(j\omega)||H_{21}^*(j\omega)||H_{12}(j\omega)||H_{22}^*(j\omega)|.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{x_{11}}(j\omega)\psi_{y_{22}}(j\omega) &= \psi_{x_{11}}^2(j\omega)|H_{11}(j\omega)|^2|H_{21}(j\omega)|^2 + \psi_{x_{22}}^2(j\omega)|H_{12}(j\omega)|^2|H_{22}(j\omega)|^2 \\
 &\quad + \psi_{x_{11}}(j\omega)\psi_{x_{22}}(j\omega)\{|H_{11}(j\omega)|^2|H_{22}(j\omega)|^2 + |H_{12}(j\omega)|^2|H_{21}(j\omega)|^2\}
 \end{aligned}$$

Met behulp van $\{|H_{11}(j\omega)||H_{22}(j\omega)| - |H_{12}(j\omega)||H_{21}(j\omega)|\}^2 \geq 0$, (B)

of $|H_{11}(j\omega)|^2|H_{22}(j\omega)|^2 + |H_{12}(j\omega)|^2|H_{21}(j\omega)|^2 \geq$

$$2|H_{11}(j\omega)||H_{22}(j\omega)||H_{12}(j\omega)||H_{21}(j\omega)|,$$

volgt:

$$|\psi_{y_{12}}(j\omega)|^2 = \psi_{y_{21}}(j\omega)\psi_{y_{12}}(j\omega) \leq \psi_{y_{11}}(j\omega)\psi_{y_{22}}(j\omega) \quad (10)$$

Opmerking.

Ongelijkheid (10) gaat over in een gelijkheid als voor (A) en (B) de gelijkttekens van toepassing zijn, dus als

$$|\psi_{y_{12}}(j\omega)| = \psi_{x_{11}}(j\omega)|H_{11}(j\omega)||H_{21}^*(j\omega)| + \psi_{x_{22}}(j\omega)|H_{12}(j\omega)||H_{22}^*(j\omega)| \quad (C)$$

en

$$|H_{11}(j\omega)||H_{22}(j\omega)| = |H_{12}(j\omega)||H_{21}(j\omega)| \quad (D)$$

Wil (C) gelden dan moet $\arg\{H_{11}(j\omega)H_{21}^*(j\omega)\} = \arg\{H_{12}(j\omega)H_{22}^*(j\omega)\}$, oftewel

$$\arg\{H_{11}(j\omega)H_{22}(j\omega)\} = \arg\{H_{12}(j\omega)H_{21}(j\omega)\} \quad (E)$$

(D) en (E) kunnen samengevat worden door te stellen dat de matrix

$$\begin{bmatrix} H_{11}(j\omega) & H_{12}(j\omega) \\ H_{21}(j\omega) & H_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \quad \text{singulier is.}$$

Tussen de overdrachtsfuncties bestaat dus een verband:

$$H_{12}(j\omega) = \alpha(j\omega) H_{11}(j\omega) \quad \text{en}$$

$$H_{22}(j\omega) = \alpha(j\omega) H_{21}(j\omega).$$

Ingevuld geeft dit voor de korrelaties van $y_1(t)$ en $y_2(t)$:

$$\psi_{y_{11}}(j\omega) = |H_{11}(j\omega)|^2 \{ \psi_{x_{11}}(j\omega) + |\alpha|^2 \psi_{x_{22}}(j\omega) \}$$

$$\psi_{y_{22}}(j\omega) = |H_{21}(j\omega)|^2 \{ \psi_{x_{11}}(j\omega) + |\alpha|^2 \psi_{x_{22}}(j\omega) \}$$

$$\psi_{y_{12}}(j\omega) = H_{11}(j\omega)H_{21}(j\omega) \{ \psi_{x_{11}}(j\omega) + |\alpha|^2 \psi_{x_{22}}(j\omega) \} = \psi_{y_{21}}^*(j\omega).$$

We zien nu dat in dit speciale geval het overdrachtsysteem getekend kan worden als in fig. 2.4.2.

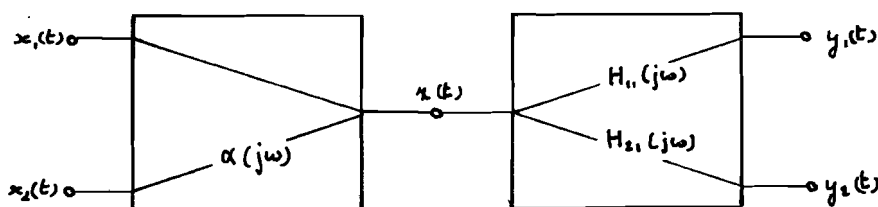


fig. 2.4.2

In feite hebben we dus dezelfde situatie als in fig. 2.3.1.

Uit formule (10) zien we dat in het algemeen de verwantschap tussen de beide uitgangssignalen minder is dan bij het overdrachtsysteem dat beschreven is in het vorige hoofdstuk. Dit komt ook tot uiting in de korrelatiegraad; voor deze grootte geldt nu:

$$|\gamma_{y_{12}}(j\omega)| = \frac{|\psi_{y_{12}}(j\omega)|}{\sqrt{\psi_{y_{11}}(j\omega)} \sqrt{\psi_{y_{22}}(j\omega)}} \leq 1.$$

Tot nu toe hebben we de uitgangskorrelaties berekend bij gegeven ingangskorrelaties en overdrachtsfuncties.

We gaan nu anders te werk en vragen ons af of we uitgangssignalen met bepaalde korrelatieeigenschappen via een overdrachtsysteem kunnen verwezenlijken uit ongekorreleerde signalen. Stellen we de vermogensspectra van de ingangssignalen gelijk aan 1 (dit betekent dat de ingangssignalen witte ruissignalen zijn), dan is de vraag of we $H_{11}(j\omega)$, $H_{12}(j\omega)$, $H_{21}(j\omega)$ en $H_{22}(j\omega)$ zodanig kunnen bepalen dat:

$$\psi_{y_{11}}(j\omega) = |H_{11}(j\omega)|^2 + |H_{12}(j\omega)|^2$$

$$\psi_{y_{22}}(j\omega) = |H_{21}(j\omega)|^2 + |H_{22}(j\omega)|^2$$

$$\psi_{y_{12}}(j\omega) = H_{11}(j\omega) H_{21}^*(j\omega) + H_{12}(j\omega) H_{22}^*(j\omega) = \psi_{y_{21}}^*(j\omega)$$

We kunnen gemakkelijk verifiëren dat we dit ook in de matrixvorm kunnen schrijven:

$$\bar{\psi}_y(j\omega) = \begin{bmatrix} \psi_{y_{11}}(j\omega) & \psi_{y_{12}}(j\omega) \\ \psi_{y_{21}}(j\omega) & \psi_{y_{22}}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(j\omega)H_{12}(j\omega) \\ H_{21}(j\omega)H_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^*(j\omega) & H_{21}^*(j\omega) \\ H_{12}^*(j\omega) & H_{22}^*(j\omega) \end{bmatrix}$$

Verkort geschreven:

$$\bar{\psi}_y(j\omega) = \bar{H}(j\omega) \bar{\psi}_x(j\omega) \bar{H}^{*T}(j\omega)$$

We zullen aannemen dat $\bar{\psi}_y(j\omega)$ positief semi-definiet is.

Later zullen we aantonen dat dit een voldoende voorwaarde is voor het vinden van een matrix $\bar{H}(j\omega)$, voorlopig geven we alleen een voorbeeld.

Stel $\bar{\psi}_y(j\omega) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$; we moeten dus \bar{H} bepalen zodanig dat

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(j\omega) & H_{12}(j\omega) \\ H_{21}(j\omega) & H_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^*(j\omega) & H_{21}^*(j\omega) \\ H_{12}^*(j\omega) & H_{22}^*(j\omega) \end{bmatrix}$$

$\bar{H}^{-1}(j\omega)$, de inverse van $H(j\omega)$, kunnen we berekenen met de uit de matrixalgebra bekende veegprocedure:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \cdot & 1 & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & & \\ 0 & & \cdot & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & & \\ 0 & 1 & \cdot & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{\psi}_x(j\omega) & \cdot \\ \cdot & \bar{H}^{-1}(j\omega) \end{bmatrix} .$$

$$\bar{H}(j\omega) \text{ is dan } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} .$$

In schemavorm ziet het overdrachtsysteem er dus uit als:

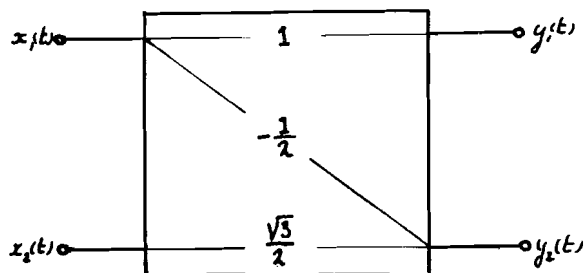


fig. 2.4.3.

2.5 Een overdrachtsysteem met n ingangen en n uitgangen.

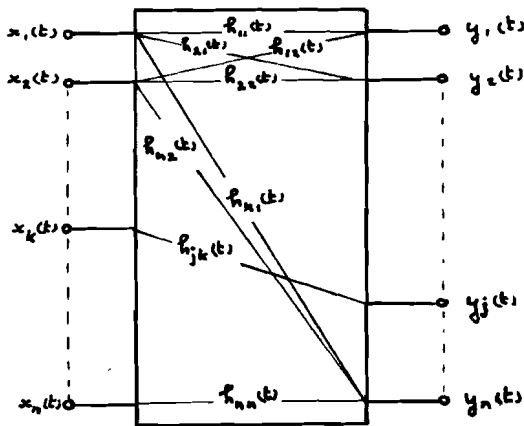


fig. 2.5.1

De korrelatieeigenschappen van de ingangssignalen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ beschrijven we met de korrelatiematrix

$$\bar{\psi}_x(t) = \begin{bmatrix} \psi_{x_{11}}(t) & \psi_{x_{12}}(t) & \dots & \psi_{x_{1n}}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{x_{n1}}(t) & \dots & \dots & \psi_{x_{nn}}(t) \end{bmatrix}$$

Hierin is het element $\psi_{x_{\ell m}}(t)$ de kruiskorrelatie tussen de signalen $x_{\ell}(t)$ en $x_m(t)$.

Op een analoge manier kunnen we uit de matrix $\bar{\psi}_y(t)$ de korrelaties tussen de uitgangssignalen aflezen. De eigenschappen van het lineaire overdrachtsysteem leggen we vast door de impulsresponsies. De notatie is zodanig dat $h_{jk}(t)$ de overdracht beschrijft van ingang k naar uitgang j . Ook hier maken we gebruik van de matrixvorm:

$$\bar{h}(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{n1}(t) & \dots & \dots & h_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

We drukken eerst de uitgangssignalen uit in de ingangssignalen:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= x_1(t) * h_{11}(t) + x_2(t) * h_{12}(t) + \dots + x_n(t) * h_{1n}(t) \\
 y_2(t) &= x_1(t) * h_{21}(t) + x_2(t) * h_{22}(t) + \dots + x_n(t) * h_{2n}(t) \\
 &\vdots \\
 y_n(t) &= x_1(t) * h_{n1}(t) + x_2(t) * h_{n2}(t) + \dots + x_n(t) * h_{nn}(t)
 \end{aligned}$$

Als $\bar{y}(t)$ en $\bar{x}(t)$ respectievelijk de kolomvectoren

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ voorstellen kunnen we dit in matrixvorm}$$

schrijven als:

$$\bar{y}(t) = \bar{h}(t) * \bar{x}(t).$$

Voor de uitgangskorrelaties gelden de betrekkingen:

$$\begin{aligned}
 \psi_{y_{11}}(t) &= \psi_{x_{11}}(t) * h_{11}(t) * h_{11}(-t) + \psi_{x_{12}}(t) * h_{11}(t) * h_{12}(-t) + \psi_{x_{21}}(t) * h_{12}(t) * h_{11}(-t) + \dots \\
 \psi_{y_{12}}(t) &= \psi_{x_{11}}(t) * h_{11}(t) * h_{21}(-t) + \psi_{x_{12}}(t) * h_{11}(t) * h_{22}(-t) + \psi_{x_{21}}(t) * h_{12}(t) * h_{21}(-t) + \dots \\
 &\vdots \\
 \psi_{y_{nn}}(t) &= \psi_{x_{11}}(t) * h_{n1}(t) * h_{n1}(-t) + \psi_{x_{12}}(t) * h_{n1}(t) * h_{n2}(-t) + \psi_{x_{21}}(t) * h_{n2}(t) * h_{n1}(-t) + \dots
 \end{aligned}$$

Uitschrijven leert ons dat dit identiek is met

$$\bar{\psi}_y(t) = \bar{h}(t) * \bar{\psi}_x(t) * \bar{h}^T(-t).$$

In het frekwentiedomein wordt dit:

$$\bar{\psi}_y(j\omega) = \bar{H}(j\omega) \bar{\psi}_x(j\omega) \bar{H}^{*T}(j\omega),$$

waarin:

$$\bar{\psi}_y(j\omega) = \begin{bmatrix} \psi_{y11}(j\omega) & \dots & \psi_{y1n}(j\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{yn1}(j\omega) & \dots & \psi_{ynn}(j\omega) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\psi}_x(j\omega) = \begin{bmatrix} \psi_{x11}(j\omega) & \dots & \psi_{x1n}(j\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{xn1}(j\omega) & \dots & \psi_{xnn}(j\omega) \end{bmatrix} \text{ en}$$

$$\bar{H}(j\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(j\omega) & \dots & H_{1n}(j\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n1}(j\omega) & \dots & H_{nn}(j\omega) \end{bmatrix},$$

de matrix waarin de overdrachtsfuncties genoteerd staan. $\bar{\psi}_x(j\omega)$ en $\bar{\psi}_y(j\omega)$ worden in het vervolg spektrale dichtheidsmatrices genoemd.

We zullen nu het speciale geval beschouwen waarbij de ingangssignalen ongekorreleerd zijn; dit houdt in alle kruiskorrelaties aan de ingang (dat zijn de niet-diagonaaltermen van $\bar{\psi}_x(j\omega)$) gelijk aan nul zijn. $\bar{\psi}_x(j\omega)$ is dus een diagonaalmatrix, bovendien zijn de diagonaaltermen niet-negatief.

Voordat we dieper ingaan op de eigenschappen van de configuratie getekend in fig. 2.5.1 zullen we eerst enige definities en stellingen uit de matrixalgebra geven.

Hermitische matrix.

Een matrix $\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ is Hermitisch als

$a_{ij} = a_{ji}^*$. (\bar{A} moet uiteraard een vierkante matrix zijn). Deze definitie houdt in dat de diagonaaltermen reëel zijn. Een spektrale dichtheidsmatrix voldoet aan deze voorwaarden; zie hiervoor de formules (2) en (3), de diagonaaltermen zijn hier bovendien groter dan of gelijk aan nul.

De rang van een matrix.

De rang van een matrix is r als tenminste één van zijn $r \times r$ onderdeterminanten niet gelijk aan nul is, terwijl iedere $(r+1) \times (r+1)$ onderdeterminant gelijk aan nul is.

De index van een matrix.

De index p van een matrix is gelijk aan het aantal positieve diagonaaltermen als de matrix door transformatie teruggebracht is tot zijn kanonieke vorm.

De dimensie van een matrix geven we aan met n .

Hermitisch kongruent of konjunktief.

Twee Hermitische matrices \bar{A} en \bar{B} met dimensie n worden Hermitisch kongruent genoemd als er een niet-singuliere matrix \bar{P} bestaat zodat

$$\bar{B} = \bar{P} \bar{A} \bar{P}^*$$

Twee stellingen betreffende de laatste definitie:

I. Een Hermitische matrix \bar{A} met rang r is konjunktief aan een kanonieke matrix

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} I_p & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & -I_{r-p} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} .$$

Hierin zijn I_p en I_{r-p} eenheidsmatrices met dimensie p respektievelijk $r-p$; p is de index van \bar{A} , $p-(r-p)$, dat is het aantal positieve min het aantal negatieve diagonaaltermen van \bar{c} , wordt de signatuur van \bar{A} genoemd.

- II. Twee Hermitische matrices met dimensie n zijn dan en alleen dan conjunctief als ze dezelfde rang en index (of dezelfde rang en signatuur) hebben.

Hermitische vorm

Een Hermitische vorm wordt gedefinieerd als

$$a = \bar{X} \bar{A} \bar{X}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j^*, \text{ waarin } \bar{A} \text{ een Hermitische matrix is}$$

en \bar{X} een rijvektor opgebouwd uit de complexe getallen x_1, \dots, x_n .

Positief semi-definiete matrix.

Een Hermitische matrix wordt positief semi-definiet genoemd als de rang en de index aan elkaar gelijk zijn en kleiner zijn dan de dimensie n , dus $r = p < n$. Dit betekent dat de Hermitische vorm

$$a = \bar{X} \bar{A} \bar{X}^* \geq 0.$$

Positief definiete matrix.

Hier is $r = p = n$ en $a = \bar{X} \bar{A} \bar{X}^* > 0$.

Een stelling over positief semi-definiete matrices luidt:

Een matrix is positief semi-definiet als iedere hoofdonderdeterminant niet-negatief is en omgekeerd.

Nu keren we weer terug naar ons probleem.

De spektrale dichtheidsmatrix van de ingangssignalen $\bar{\psi}_x(j\omega)$ is een diagonaalmatrix met niet-negatieve diagonaalelementen.

(zijn alle signalen witte ruissignalen dan zijn de diagonaalelementen voor alle frekwenties positief en konstant). $\bar{\psi}_x(j\omega)$ is dus positief semi-definiet. Is de matrix $\bar{H}(j\omega)$ niet-singulier dan zijn $\bar{\psi}_x(j\omega)$ en $\bar{\psi}_y(j\omega)$ Hermitisch kongruent, immers $\bar{\psi}_y(j\omega) = \bar{H}(j\omega) \bar{\psi}_x(j\omega) \bar{H}^{*T}(j\omega)$, wat overeenkomt met onze definitie betreffende Hermitisch kongruente matrices. De konklusie is dan ook dat $\bar{\psi}_y(j\omega)$ positief semi-definiet is. Later zal blijken dat dit direkt volgt uit een dan afgeleide meer algemene stelling.

2.6 Een noodzakelijke en voldoende betrekking tussen de vermogens- en kruisvermogensspektra van n signalen.

Voor de afleiding van de noodzakelijke betrekking gebruiken we dezelfde redenering als in hoofdstuk 2.2, waar we ons beperkten tot twee signalen.

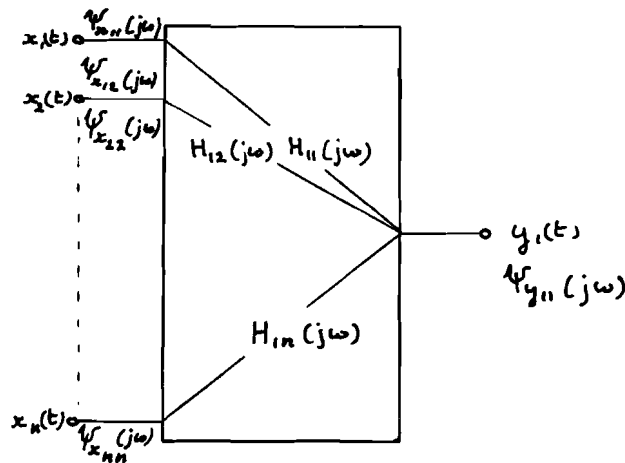


fig. 2.6.1

Onafhankelijk van de overdrachtsfuncties moet steeds gelden

$$\psi_{y_{11}}(j\omega) \geq 0 \text{ voor iedere } \omega.$$

Algemeen geldt $\bar{\psi}_y(j\omega) = \bar{H}(j\omega) \bar{\psi}_x(j\omega) \bar{H}^{*T}(j\omega).$

In het speciale geval van fig. 2.6.1 wordt dit gereduceerd tot:

$$\psi_{y_{11}}(j\omega) = (H_{11}(j\omega), \dots, H_{1n}(j\omega)) \begin{bmatrix} \psi_{x_{11}}(j\omega) & \psi_{x_{12}}(j\omega) & \dots & \psi_{x_{1n}}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{x_{n1}}(j\omega) & \dots & \dots & \psi_{x_{nn}}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^*(j\omega) \\ \vdots \\ H_{1n}^*(j\omega) \end{bmatrix}$$

We herkennen dit als een Hermitische vorm.

Stelling I betreffende Hermitische matrices zegt dat de matrix $\bar{\psi}_x(j\omega)$ konjunktief is aan een kanonieke matrix, dus $\bar{\psi}_x(j\omega) = \bar{B} \bar{C} \bar{B}^{*T}$, waarin \bar{C} de kanonieke matrix en \bar{B} een niet-singuliere matrix is.

$$\begin{aligned} \text{Dus } \psi_{y_{11}}(j\omega) &= (H_{11}(j\omega) \dots H_{1n}(j\omega)) \bar{B} \bar{C} \bar{B}^{*T} \begin{bmatrix} H_{11}^*(j\omega) \\ \vdots \\ H_{1n}^*(j\omega) \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \begin{bmatrix} c_{11} & & & 0 \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^* \\ \vdots \\ a_{1n}^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Anders geschreven:

$$\begin{aligned} \psi_{y_{11}}(j\omega) &= a_{11} a_{11}^* c_{11} + a_{12} a_{12}^* c_{22} + \dots + a_{1n} a_{1n}^* c_{nn} \\ &= |a_{11}|^2 c_{11} + |a_{12}|^2 c_{22} + \dots + |a_{1n}|^2 c_{nn} . \end{aligned}$$

Deze vorm is alleen dan steeds niet-negatief als c_{11}, \dots, c_{nn} niet-negatief zijn. We moeten dus eisen dat de kanonieke matrix \bar{C} , waarvan $\bar{\psi}_x(j\omega)$ konjunktief is, niet-negatieve diagonaalelementen heeft. De rang van \bar{C} is dan gelijk aan de index, zodat \bar{C} (en dus ook $\bar{\psi}_x(j\omega)$) positief semi-definiet moet zijn.

Resumerend:

plaatsen we de vermogens- en de kruisvermogensspectra van n signalen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ in een matrix $\bar{\psi}_x(j\omega)$, de spektrale dichtheidsmatrix, dan is een noodzakelijke voorwaarde:

$\bar{\psi}_x(j\omega)$ is positief semi-definiet.

Het is nu belangrijk te weten of deze voorwaarde ook voldoende is. Deze vraag is afdoende beantwoord door een manier aan te geven waarop signalen, met een spektrale dichtheidsmatrix die aan de voorwaarde voldoet, gesynthetiseerd kunnen worden uit fysisch voorstelbare ongekorreleerde signalen, bijvoorbeeld witte ruissignalen.

We zullen eerst de te realiseren matrix, die we $\bar{\psi}_y(j\omega)$ zullen noemen, aan een nader onderzoek onderwerpen en de eigenschappen hiervan systematisch nagaan.

$$\bar{\psi}_y(j\omega) = \begin{bmatrix} \psi_{y11}(j\omega) & \psi_{y12}(j\omega) & \dots & \psi_{y1n}(j\omega) \\ \vdots & & & \vdots \\ \psi_{yn1}(j\omega) & \dots & \dots & \psi_{ynn}(j\omega) \end{bmatrix}$$

- 1e. $\bar{\psi}_y(j\omega)$ is Hermitisch en positief semi-definiet.
- 2e. Het blijkt dat we ons kunnen beperken tot matrices waarvan de rang r gelijk is aan de dimensie n, dus tot positief definitie matrices.

Dit volgt uit de volgende redenering:

$$\text{Stel } \bar{\psi}_y(j\omega) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Veronderstel dat de rang van deze matrix drie is, bij een dimensie van vier, doordat de derde kolom (en rij) een lineaire combinatie is van de overige kolommen(en rijen).

Door een veegprocedure komen we dan tot de volgende gelijkheid:

$$\bar{\psi}_y(j\omega) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & H_{31}^* & 0 \\ 0 & 1 & H_{32}^* & 0 \\ 0 & 0 & H_{33}^* & 0 \\ 0 & 0 & H_{34}^* & 1 \end{bmatrix}$$

We kunnen dus een spektrale dichtheidsmatrix met dimensie vier en rang drie eenvoudig afleiden uit een andere spektrale dichtheidsmatrix met dimensie drie en rang drie. (zie fig. 2.6.2)

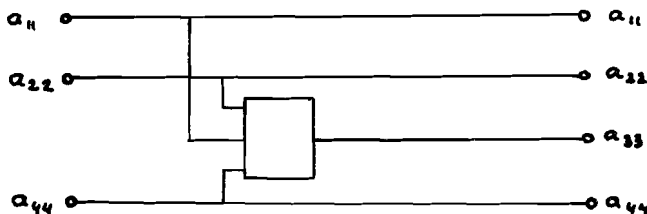


fig. 2.6.2

Konklusie: het is voldoende de synthese te bekijken van een matrix waarvan de rang (en index) gelijk is aan de dimensie, dus van een matrix die positief definitief is; één of meer afhankelijke uitgangen kunnen we later toevoegen.

Bij de synthese maken we gebruik van de stelling: een Hermitische matrix is konjunktief aan een kanonieke matrix; is de matrix positief definitief dan is hij dus konjunktief aan de eenheidsmatrix \bar{I} , dus:

$\bar{\psi}_y(j\omega) = \bar{H}(j\omega)\bar{I}\bar{H}^{*T}(j\omega)$, waarin uit de definitie van de konjunktiviteit volgt dat $\bar{H}(j\omega)$ een niet-singuliere matrix is.

We kunnen dit resultaat als volgt interpreteren:

n signalen met spektrale dichtheidsmatrix $\bar{\psi}_y(j\omega)$, die positief-definitief is, kunnen we met een overdrachtsysteem dat gekarakteriseerd wordt door de overdrachtsmatrix $\bar{H}(j\omega)$ synthetiseren uit n signalen met spektrale dichtheidsmatrix \bar{I} . Dit laatste houdt in dat de ingangssignalen witte ruissignalen zijn met genormeerde vermogensspektra.

Over de realiseerbaarheid van het overdrachtsysteem met matrix $\bar{H}(j\omega)$ kunnen we opmerken dat eventueel aan ieder element uit de matrix $\bar{H}(j\omega)$ een term $e^{-j\phi}$ toegevoegd kan worden (deze term valt bij uitwerking van de matrixvermenigvuldiging weg omdat dan ieder element van \bar{H}^{*T} een term $e^{j\phi}$ bevat). Eventuele niet-kausale elementen in $\bar{H}(j\omega)$ kunnen dan door een tijdvertragende faktor met willekeurig goede benadering veranderd worden in kausale elementen.

Het resultaat van dit hoofdstuk kunnen we samenvatten als:

|| een noodzakelijke en voldoende betrekking tussen de vermogens-
|| en kruisvermogensspektra van een aantal signalen is, dat de
|| spektrale dichtheidsmatrix positief semi-definitief is.

3. Korrelatie en optische golven.

3.1 Inleiding.

We gaan nu het korrelatiebegrip toepassen op een zich in de vrije ruimte uitbreidend optisch veld. Hierbij zullen we ons beperken tot een skalaire theorie.

Vanwege het continue karakter van de optredende grootheden is het zinvol een nieuw begrip in te voeren, dat zowel de korrelatie als functie van de plaats als van de tijd inhoudt, namelijk de door Wolff geïntroduceerde koherentiefunctie.

Hiertoe beschouwen we twee punten P_1 en P_2 in de ruimte met veldsterktes $E(P_1, t)$ en $E(P_2, t)$.

De koherentiefunctie is dan:

$$\psi(P_1, P_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(P_1, t+\tau) E^*(P_2, t) dt;$$

dit is dus een functie van zes plaatscoördinaten en de tijd.

Het zal blijken dat het vaak eenvoudiger is om te werken met de Fouriergetransformeerde van $\psi(P_1, P_2, \tau)$: $\psi(P_1, P_2, j\omega)$, een grootheid die we de spektrale koherentiefunctie zullen noemen.

De in hoofdstuk 2 behandelde voorwaarde voor de spektrale dichtheidsmatrix van een aantal signalen zal in dit hoofdstuk de basis vormen voor beschouwingen over het al dan niet geoorloofd zijn van bepaalde spektrale koherentiefuncties .

3.2 Een formule voor de voortplanting van de spektrale coherentie-
funktie.

We beschouwen een optische golf die zich in de positieve z -richting uitbreidt. De statistische eigenschappen van de belichting in het $z=0$ vlak zijn gegeven in de vorm van de spektrale coherentiefunctie $\psi(P_1^0, P_2^0, j\omega)$. Gevraagd zijn de statistische eigenschappen van de belichting in de rechterhalfruimte.

We gaan uit van een belichting over een begrensd gebied in het $z=0$ vlak en verdelen dit gebied in kleine rechthoekjes $\Delta x^0 \Delta y^0$.

We gebruiken de volgende benaderingen:

- 1e) de veldsterkte over zo'n rechthoekje is konstant.
- 2e) de overdracht van alle punten in zo'n rechthoekje naar een punt in het $z=a$ vlak is hetzelfde.

Deze benaderingen zijn zeker geoorloofd daar we later Δx^0 en Δy^0 infinitesimaal klein maken.

Bekend is dat de straling van een puntvormige bron in het $z=0$ vlak wordt beschreven door de Greensche funktie $h_z(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-jkr}}{r}$, waarin r de afstand tussen bron- en veldpunt is. De bijdrage van een rechthoekje $\Delta x^0 \Delta y^0$ in het vlak $z=0$ tot de veldsterkte in een punt in de rechterhalfruimte kan met de gegeven benaderingen beschreven worden met

$$h_z(r) \Delta x^0 \Delta y^0.$$

In hoofdstuk 2.5 is afgeleid dat voor het kruisvermogensspektrum van de uitgangssignalen van een lineair overdrachtsysteem met n ingangen en twee uitgangen (zie fig. 3.2.1) geldt:

$$\psi_{y_{12}}(j\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n H_{1i}(j\omega) \psi_{x_{ik}}(j\omega) H_{2k}^*(j\omega).$$

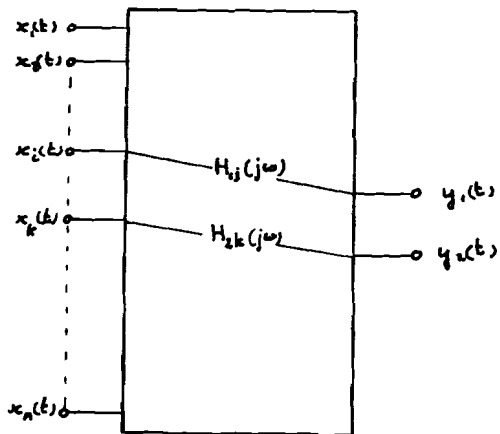


fig. 3.2.1

Deze formule passen we toe op ons probleem (fig. 3.2.2).

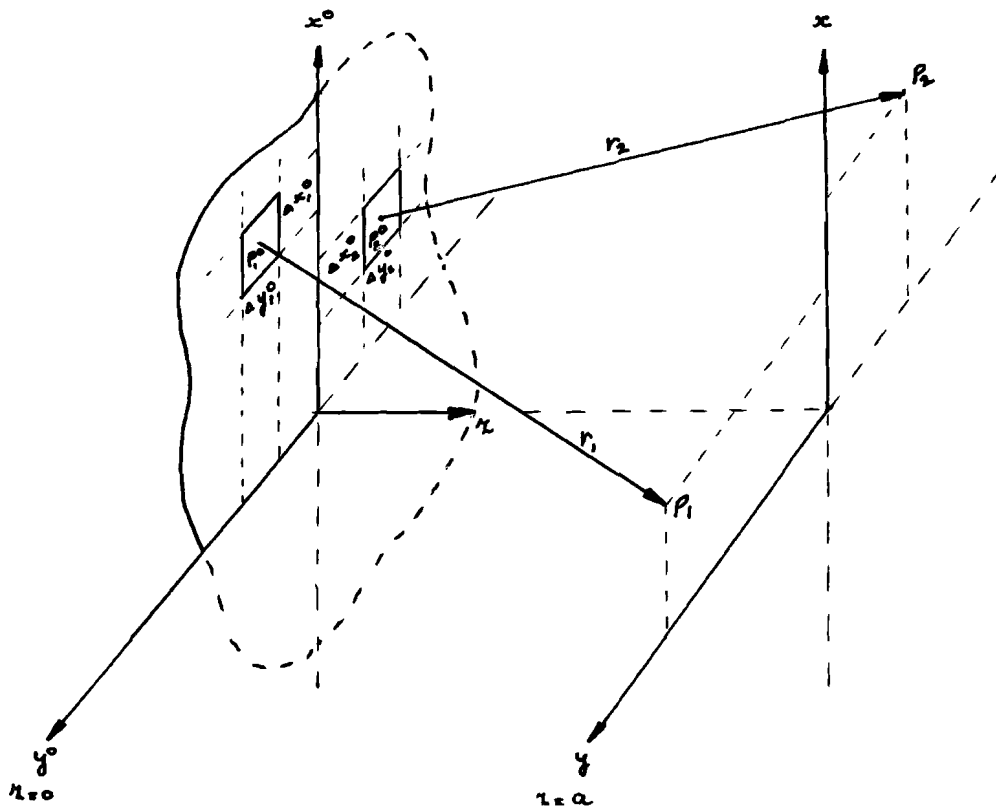


fig. 3.2.2

De uitgangssignalen zijn hier de veldsterktes in de punten P_1 en P_2 , de ingangssignalen $x_i(t)$, $x_k(t)$ de veldsterktes in P_1^0 en P_2^0 in het $z=0$ vlak.

$$\text{Verder } H_{1i}(j\omega) = h_z(r_1) \Delta x_1^0 \Delta y_1^0 = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} \Delta x_1^0 \Delta y_1^0,$$

$$H_{2k}(j\omega) = h_z(r_2) \Delta x_2^0 \Delta y_2^0 = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} \Delta x_2^0 \Delta y_2^0.$$

We krijgen dan:

$$\psi(P_1, P_2, j\omega) = \sum \sum h_z(r_1) h_z^*(r_2) \psi(P_1^0, P_2^0, j\omega) \Delta x_1^0 \Delta y_1^0 \Delta x_2^0 \Delta y_2^0,$$

waarbij de sommatie over alle rechthoekjes $\Delta x^0 \Delta y^0$ moet worden uitgevoerd. De limietovergang $\Delta x^0, \Delta y^0 \rightarrow 0$ geeft tenslotte voor de spektrale coherentiefunctie in het vlak $z=a$:

$$\psi(P_1, P_2, j\omega) = \iiint_{z=0} h_z(r_1) h_z^*(r_2) \psi(P_1^0, P_2^0, j\omega) dx_1^0 dy_1^0 dx_2^0 dy_2^0. \quad (11)$$

3.3. Straling door een inkoherente bron.

We passen nu het in 3.2 gevonden resultaat betreffende de voortplanting van de spektrale coherentiefunctie toe op een cirkelvormige bron met straal R, gelegen in het vlak $z=0$ en die daar inkoherent is. We stellen ons namelijk voor dat de veldsterktes in twee punten totaal onafhankelijk van elkaar zijn; we zouden deze bron dus ruimtelijk inkoherent kunnen noemen. In formulevorm betekent dit dat

$$\psi(P_1^0, P_2^0, j\omega) = A(j\omega) \delta(P_1^0 - P_2^0).$$

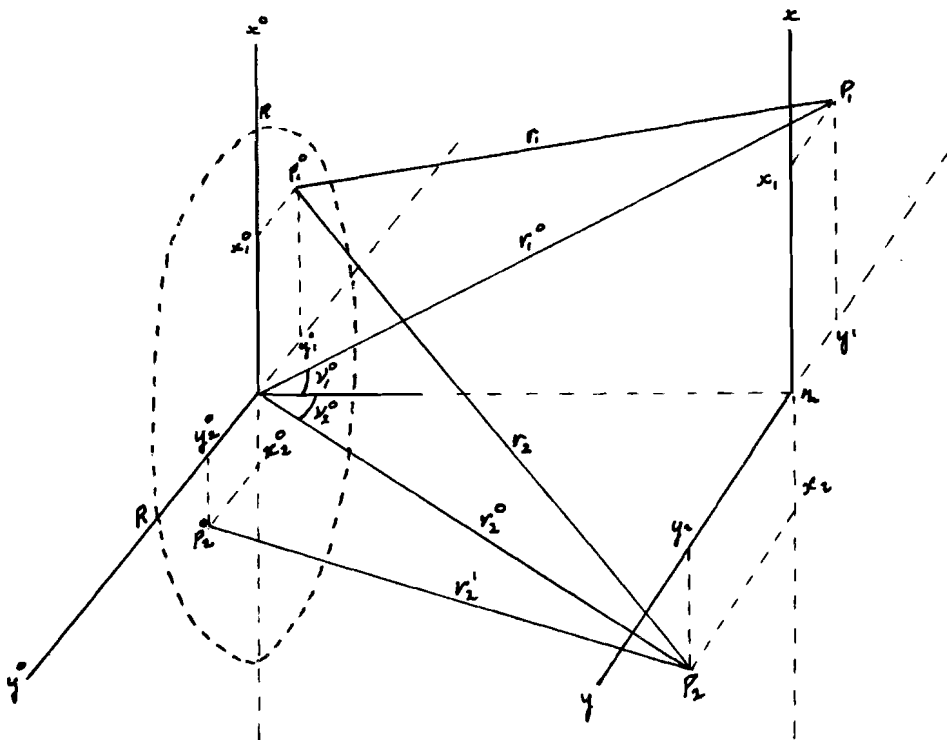


fig. 3.3.1

Formule (11) geeft dan:

$$\psi(P_1, P_2, j\omega) = A(j\omega) \iint_{z=0} h_z(r_1) h_z^*(r_2) dx_1^0 dy_2^0,$$

waarin

$$h_z(r_1) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} \quad \text{en } r_1 = \sqrt{z^2 + (x_1 - x_1^0)^2 + (y_1 - y_1^0)^2} \quad \text{en}$$

$$h_z(r_2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} \quad \text{en } r_2 = \sqrt{z^2 + (x_2 - x_1^0)^2 + (y_2 - y_1^0)^2}.$$

We beperken ons tot punten P_1 en P_2 die ver van de bron zijn gelegen en waar $kr \gg 1$. Is bovendien de afmeting van de bron klein ten opzichte van r_1 en r_2 , dan kunnen we schrijven:

$$h_z(r_1) \approx \frac{-jk}{2\pi r_1^0} e^{-jkr_1 \cos \nu_1^0} \quad \text{en}$$

$$h_z(r_2) \approx \frac{-jk}{2\pi r_2^0} e^{-jkr_2 \cos \nu_2^0}.$$

De integraal wordt dan:

$$\psi(P_1, P_2, j\omega) = A(j\omega) \frac{k^2}{4\pi^2 r_1^0 r_2^0} \cos \nu_1^0 \cos \nu_2^0 \iint_{z=0} e^{-jk(r_1 - r_2)} dx_1^0 dy_1^0.$$

We voeren nu poolcoördinaten in:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \rho_1^0 \cos \phi_1^0 & x_1 &= \rho_1 \cos \phi_1 & x_2 &= \rho_2 \cos \phi_2 \\ y_1^0 &= \rho_1^0 \sin \phi_1^0 & y_1 &= \rho_1 \sin \phi_1 & y_2 &= \rho_2 \sin \phi_2, \end{aligned}$$

zodat

$$r_1 = \sqrt{z^2 + \rho_1^2 + \rho_1^0{}^2 - 2\rho_1 \rho_1^0 \cos(\phi_2 - \phi_1^0)} = z \sqrt{1 + \frac{\rho_1^2 + \rho_1^0{}^2 - 2\rho_1 \rho_1^0 \cos(\phi_1 - \phi_1^0)}{z^2}}$$

$$r_2 = \sqrt{z^2 + \rho_2^2 + \rho_1^0{}^2 - 2\rho_2 \rho_1^0 \cos(\phi_2 - \phi_1^0)} = z \sqrt{1 + \frac{\rho_2^2 + \rho_1^0{}^2 - 2\rho_2 \rho_1^0 \cos(\phi_2 - \phi_1^0)}{z^2}}$$

Voor het verre veld, als $z \gg \rho_1, \rho_2, \rho_1^0$:

$$r_1 - r_2 \approx \frac{1}{2z} \left\{ \rho_1^2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^0 \left[\rho_1 \cos(\phi_1 - \phi_1^0) - \rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1^0) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2z} \left\{ \rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1^0 \rho_{12} \cos(\phi_1^0 - \alpha) \right\}. \quad (\text{zie fig. 3.3.2}).$$

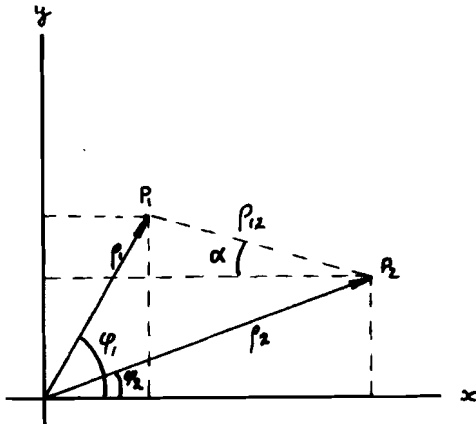


fig. 3.3.2

We krijgen dan:

$$\psi(P_1, P_2, j\omega) = A(j\omega) \frac{k^2}{4\pi^2 r_1^0 r_2^0} \cos v_1^0 \cos v_2^0 e^{-jk \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2z}}.$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-jk \frac{z}{z}} \rho_1^0 \rho_{12} \cos(\phi_1^0 - \alpha) \rho_1^0 d\rho_1^0 d\phi_1^0$$

$$= A(j\omega) \frac{k^2 R^2}{4\pi^2 r_1^0 r_2^0} \cos v_1^0 \cos v_2^0 e^{-jk \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2z}} \frac{J_1\left(\frac{k\rho_{12}R}{z}\right)}{\frac{k\rho_{12}R}{z}} \quad (12)$$

3.4 Inleidende beschouwingen over toegestane en niet-toegestane
spektrale koherentiefuncties.

De behandeling in het vorige hoofdstuk van de straling van een cirkelvormige apertuur met inkoherente belichting is zinvol omdat we weten dat in werkelijkheid een dergelijke situatie voorkomt, namelijk de straling van de zon.

Ook de daar afgeleide spektrale koherentiefunctie als het licht een zekere afstand heeft doorlopen mag als basis worden genomen voor verdere berekeningen. Niet iedere functie voldoet echter als spektrale koherentiefunctie, wat geïllustreerd kan worden aan de hand van de in hoofdstuk 2 afgeleide voorwaarde voor de spektrale dichtheidsmatrix van een aantal signalen.

Beschouwen we namelijk n punten in de ruimte en bepalen we voor ieder paar punten de waarde van de spektrale koherentiefunctie dan moet de matrix waarin deze waarden genoteerd staan positief semi-definiet zijn. Een willekeurig gekozen functie hoeft niet noodzakerlijkerwijs dit resultaat op te leveren.

Als voorbeeld bekijken we eerst een zeer speciaal geval, namelijk dat de spektrale koherentiefunctie $\psi(P_i, P_k, j\omega)$ afhangt van de afstand tussen de punten P_i en P_k , r_{ik} , en bovendien geschreven kan worden als $f(j\omega)g(r_{ik})$. Voor $r_{ik}=0$ moet de functie een vermogensspektrum zijn: dus $f(j\omega)g(0) \geq 0$. Stellen we $g(0) = 1$, dan is $f(j\omega)$ reëel en niet-negatief. Er moet steeds gelden $\psi(P_i, P_k, j\omega) = \psi^*(P_k, P_i, j\omega)$, of $f(j\omega)g(r_{ik}) = f(j\omega)g^*(r_{ki})$, zodat $g(r_{ik})$ een reële functie van r_{ik} is.

De in hoofdstuk 1, formule (4), geïntroduceerde korrelatiegraad, die we in de optika koherentiegraad zullen noemen, is hier voor de punten P_1 en P_2 :

$$\gamma_{12}(j\omega) = \frac{f(j\omega)g(r_{12})}{\sqrt{f(j\omega)} \sqrt{f(j\omega)}} = g(r_{12}).$$

Voor elk paar punten P_1, P_2 moet gelden:

$$\begin{bmatrix} \psi(P_1, P_1, j\omega)\psi(P_1, P_2, j\omega) \\ \psi(P_2, P_1, j\omega)\psi(P_2, P_2, j\omega) \end{bmatrix} = f(j\omega) \begin{bmatrix} 1 & g(r_{12}) \\ g(r_{12}) & 1 \end{bmatrix} = f(j\omega) \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

is positief semi-definiet.

Met $f(j\omega) \geq 0$ wordt de eis: $\begin{bmatrix} 1 & g(r_{12}) \\ g(r_{12}) & 1 \end{bmatrix}$ is

positief semi-definiet, of

$$g^2(r_{12}) = \gamma_{12}^2 \leq 1.$$

Voor een drietal punten P_1, P_2 en P_3 vinden we op dezelfde manier:

$$\begin{bmatrix} 1 & g(r_{12}) & g(r_{13}) \\ g(r_{12}) & 1 & g(r_{23}) \\ g(r_{13}) & g(r_{23}) & 1 \end{bmatrix} \quad \text{moet positief semi-definiet zijn.}$$

Dit houdt in dat:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & g(r_{12}) & g(r_{13}) \\ g(r_{12}) & 1 & g(r_{23}) \\ g(r_{13}) & g(r_{23}) & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & g(r_{12}) \\ g(r_{12}) & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & g(r_{13}) \\ g(r_{13}) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } \det \begin{bmatrix} 1 & g(r_{23}) \\ g(r_{23}) & 1 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Uitgeschreven betekent dit: $g(r_{12}), g(r_{13}), g(r_{23}) \leq 1$ en $g^2(r_{12}) + g^2(r_{13}) + g^2(r_{23}) - 2g(r_{12})g(r_{13})g(r_{23}) \leq 1$.

Wil een functie $f(j\omega)g(r_{ik})$ toelaatbaar zijn dan moet aan bovenstaande voorwaarden zijn voldaan, en bovendien aan analoge voorwaarden als we meer punten bekijken; waarbij het aantal punten onbeperkt kan toenemen.

Deze werkwijze leidt, mogelijk na veel rekenwerk, hoogstens tot uitsluiting van bepaalde functies als speciale koherentiefuncties. We gaan dan ook anders te werk: uitgaande van de eigenschappen van de speciale koherentiefunctie proberen we een dergelijke functie te vinden,

in plaats van, zoals in het voorbeeld gedaan werd, een vrij willekeurige funktie te kiezen, om die daarna aan de voorwaarden te toetsen. We zullen ons daarbij beperken tot funkties die alleen afhangen van het verschil in plaatskoördinaten. Het zal blijken dat we dan met voordeel gebruik kunnen maken van het theorema van Bochner betreffende stationaire stochastische processen, dat we dan ook in het volgende hoofdstuk zullen bespreken.

3.5 Het theorema van Bochner.

Eerst bespreken we een algemene eigenschap van de autokorrelatiefunctie $\psi(t)$ van een stationair stochastisch proces $x(t)$.

We bepalen de verwachtingswaarde van $\left| \sum_{i=1}^n x(t_i) z_i \right|^2$.

We weten dat hier voor iedere n en iedere z een niet-negatieve waarde uitkomt.

$$\begin{aligned}
 E \left| \sum_{i=1}^n x(t_i) z_i \right|^2 &= E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x(t_i) x^*(t_k) z_i z_k^* \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n E [x(t_i) x^*(t_k)] z_i z_k^* = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \psi(t_i, t_k) z_i z_k^* \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \psi(t_i - t_k) z_i z_k^* \geq 0 \tag{13}
 \end{aligned}$$

Een continue functie $\psi(t)$ die voldoet aan $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \psi(t_i - t_k) z_i z_k^* \geq 0$

voor iedere eindige waarde n en voor iedere complexe z , wordt positief semi-definiet genoemd.

(13) kunnen we ook schrijven als:

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \begin{bmatrix} \psi(0) & \dots & \psi(t_1 - t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi(t_n - t_1) & \dots & \psi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^* \\ \vdots \\ z_n^* \end{bmatrix} \geq 0$$

Voor de autokorrelatie geldt dat $\psi(0) \geq 0$ en $\psi(t_i - t_k) = \psi^*(t_k - t_i)$, zodat de matrix

$$\begin{bmatrix} \psi(0) & \dots & \psi(t_1 - t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi(t_n - t_1) & \dots & \psi(0) \end{bmatrix} \text{ Hermitisch is.}$$

Dit houdt in, dat (13) een Hermitische vorm is.

We kunnen de eigenschap van de autokorrelatie $\psi(t)$ van een stationair stochastisch proces dan ook schrijven als:

de Hermitische vorm $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (t_i - t_k) z_i z_k^* \geq 0$ of

wat equivalent hiermee is:

de Hermitische matrix: $\begin{bmatrix} \psi(0) & \dots & \psi(t_1 - t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi(t_n - t_1) & \dots & \psi(0) \end{bmatrix}$ is

positief semi-definiet.

Het theorema van Bochner zegt nu iets over positief semi-definiete functies, en wel:

een functie $\psi(t)$ is dan en alleen dan positief semi-definiet als hij geschreven kan worden als

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dF(\omega),$$

waarin $F(\omega)$ reëel, niet afnemend en begrensd is.

Is $F(\omega)$ differentieerbaar dan is

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} f(\omega) d\omega,$$

waarin $f(\omega)$ reëel en niet-negatief is en $\lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$.

Is $\psi(t)$ de autokorrelatie van een stationair stochastisch proces dan wordt $F(\omega)$ de spektrale verdelingsfunctie en $f(\omega)$ (dat is dus de Fouriergetransfomeerde van $\psi(t)$) de spektrale dichtheid van het proces genoemd.

We zullen het theorema van Bochner uitbreiden tot funkties van twee variabelen; het theorema voor funkties van één variabele kan dan eenvoudig hieruit worden afgeleid.

Gegeven is $\psi(x,y)$ voldoet aan

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \psi(x_i - x_k, y_i - y_k) z_i z_k^* \geq 0 \quad (14)$$

voor iedere eindige waarde van n en ieder complex getal z , zodat $\psi(x,y)$ een positief semi-definiete funktie is. Met $\psi(x_i - x_k, y_i - y_k) = \psi^*(x_k - x_i, y_k - y_i)$ en $\psi(0,0) \geq 0$ houdt dit in dat de matrix

$$\begin{bmatrix} \psi(0,0) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \psi(x_1 - x_n, y_1 - y_n) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \psi(x_n - x_1, y_n - y_1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \psi(0,0) \end{bmatrix}$$

Hermitisch en positief semi-definiet is.

De bewering is nu dat het theorema van Bochner voor een dergelijke funktie $\psi(x,y)$ luidt:

Een funktie $\psi(x,y)$ is dan en alleen dan positief semi-definiet als hij geschreven kan worden als:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{j(ux+vy)} \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u \partial v} \quad (15)$$

waarin $F(u,v)$ reëel, niet afnemend en begrensd is.

Kunnen we de differentiatie uitvoeren dan wordt:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(u,v) e^{j(ux+vy)} du dv, \quad (16)$$

waarin $f(u,v)$, de Fouriergetransformeerde van $\psi(x,y)$, reëel en niet-negatief is en $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u,v) = 0$

Het bewijs dat (14) uit (16) volgt is eenvoudig en verloopt als volgt:

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_k \psi(x_i - x_k, y_i - y_k) z_i z_k^* = \\ & \sum_i \sum_k \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) e^{j\{u(x_i - x_k) + v(y_i - y_k)\}} du dv z_i z_k^* = \\ & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \sum_k e^{j\{u(x_i - x_k) + v(y_i - y_k)\}} z_i z_k^* f(u, v) du dv = \\ & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \sum_k e^{j(ux_i + vy_i)} z_i e^{-j(ux_k + vy_k)} z_k^* f(u, v) du dv = \\ & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i z_i e^{j(ux_i + vy_i)} \sum_k z_k^* e^{-j(ux_k + vy_k)} f(u, v) du dv = \\ & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_i z_i e^{j(ux_i + vy_i)} \right|^2 f(u, v) du dv \geq 0. \end{aligned}$$

Het bewijs in omgekeerde richting is minder eenvoudig; hiervoor wordt verwezen naar Appendix C.

In het volgende hoofdstuk zullen we deze uitbreiding van het theorema van Bochner tot twee dimensies toepassen op ons optisch probleem.

3.6 Voorbeelden van toegestane en niet-toegestane spektrale
koherentiefunkties.

We veronderstellen nu dat de spektrale koherentiefunctie alleen afhankelijk is van het verschil in plaatscoördinaten van de twee beschouwende punten P_i en P_k , die in een vlak $z=a$ gelegen zijn, zodat $\psi(j\omega, P_i, P_k) = \psi(j\omega, x_i - x_k, y_i - y_k)$. Zoals we gezien hebben moet dan de Hermitische matrix

$$\begin{bmatrix} \psi(j\omega, P_1, P_1) & \dots & \psi(j\omega, P_1, P_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi(j\omega, P_n, P_1) & \dots & \psi(j\omega, P_n, P_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(j\omega, 0, 0) & \dots & \psi(j\omega, x_1 - x_n, y_1 - y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi(j\omega, x_n - x_1, y_n - y_1) & \dots & \psi(j\omega, 0, 0) \end{bmatrix}$$

positief semi-definiet zijn voor ieder n-aantal punten en voor iedere waarde van n. In het vorige hoofdstuk hebben we aangegeven dat dit equivalent is met de eis dat $\psi(j\omega, x, y)$ een positief semi-definiete functie is. Het daar afgeleide twee-dimensionale theorema van Bochner geeft ons nu een recept voor het vinden van een dergelijke functie: we nemen een reële en niet-negatieve functie $f(u, v)$ waarvoor geldt $\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} f(u, v) = 0$;

de Fouriergetransformeerde hiervan is een positief semi-definiete functie en dus een geoorloofde spektrale koherentiefunctie.

We beperken onze beschouwing nu verder tot functies die alleen afhangen van de afstand tussen P_i en P_k ; dus $\psi(j\omega, x_i - x_k, y_i - y_k) = \psi(j\omega, r_{ik})$. Dit betekent dat de functie behalve verschuivingsinvariant nu ook cirkelsymmetrisch is. Wat betreft de afhankelijkheid van $j\omega$ merken we op dat voldaan moet worden aan formule (3) die zegt dat verwisseling van beide signalen de toegevoegd complexe waarde van de spektrale koherentiefunctie moet opleveren, dus $\psi(j\omega, P_i, P_k) = \psi^*(j\omega, P_k, P_i)$ of $\psi(j\omega, r_{ik}) = \psi^*(j\omega, r_{ki}) = \psi^*(j\omega, r_{ik})$, zodat ψ een reële functie van ω is. We schrijven dan ook: $\psi(\omega, r_{ik})$.

Zoals bekend gaat bij cirkelsymmetrische functies de tweedimensionale Fouriertransformatie over in de Hankeltransformatie. Uit het theorema van Bochner volgt dan dat een functie $\psi(\omega, r)$ toegelaten is als spektrale koherentiefunctie als hij geschreven kan worden als:

$$\psi(\omega, r) = \int_0^{\infty} \Phi(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho,$$

waarin $\Phi(\rho)$ reëel en niet-negatief is en $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho) = 0$.

Het onderzoek van een spektrale coherentiefunctie op zijn toelaatbaarheid komt dus neer op het toetsen van zijn Hankelgetransformeerde aan de drie voorwaarden. Omgekeerd geeft de Hankelgetransformeerde van een functie die voldoet aan de voorwaarden een geoorloofde spektrale coherentiefunctie.

We geven nu enige voorbeelden van toegestane en niet-toegestane spektrale coherentiefuncties. (de afhankelijkheid van ω wordt buiten beschouwing gelaten).

Toegestaan zijn onder andere:

$\psi(r):$	$\Phi(\rho):$
e^{-r^2}	$\frac{1}{2} e^{-\rho^2/4}$
e^{-r}	$\frac{1}{\sqrt{(1+\rho^2)^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{(1+\rho^2)^3}}$	$e^{-\rho}$
$\frac{e^{-r}}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}$
$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$	$\frac{e^{-\rho}}{\rho}$
$\frac{\sin r}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}} : \rho > 1, 0 : \rho < 1$
$\frac{J_1(r)}{r}$	1 : $0 < \rho < 1$ 0 : $\rho > 1$

Niet toegestaan is bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll} \psi(r): & \Phi(\rho): \\ 1 : 0 < r < 1 & J_1(\rho) \\ 0 : r > 1 & \frac{\quad}{\rho} \end{array}$$

Het theorema van Bochner geeft een fraaie analogie aan tussen stationaire stochastische processen en optische velden die als het ware ruimtelijk stationair zijn doordat de spektrale coherentiefunctie alleen afhangt van de afstand tussen de beschouwende punten.

We geven deze analogie in tabelvorm:

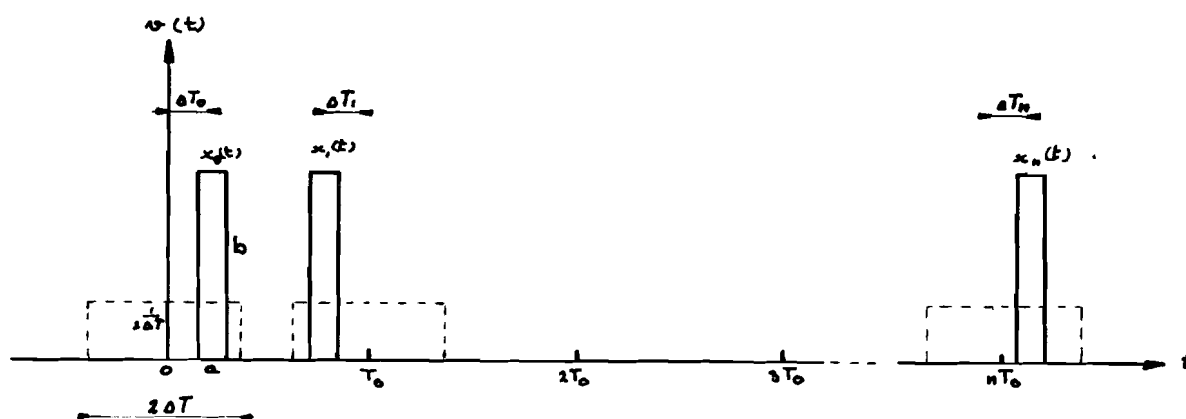
	eigenschap korrelatiefunctie, respektievelijk spektrale koheren- tiefunctie	noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het geoorloofd zijn van de functie.
stationair stochas- tisch proces.	$\psi(t_1, t_2) = \psi(t_1 - t_2)$ $= \psi(\tau)$	$\psi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \geq 0$ $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi(j\omega) = 0$
"statio- nair" optisch veld.	$\psi(j\omega, P_1, P_2) =$ $\psi(j\omega, \bar{r}_1 - \bar{r}_2) =$ $\psi(j\omega, r_{12})$	$\Phi(\rho) = \int_0^{\infty} \psi(j\omega, r_{12}) J_0(\rho r_{12}) r_{12} dr_{12} \geq 0$ $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho) = 0$

Tenslotte merken we op dat spektrale coherentiefuncties die alleen afhankelijk zijn van de afstand tussen twee punten zeker niet de enige toegelaten functies zijn. Zoals we gezien hebben zijn ook functies die afhangen van het verschil in plaatscoördinaten mogelijk als hun Fouriergetransfomeerden aan bepaalde voorwaarden voldoen.

Meer algemene functies kunnen ook toelaatbaar zijn, zoals gebleken is bij de behandeling van de straling van een inkoherente bron in hoofdstuk 3.3.

Appendix A.

We berekenen het vermogensspektrum van een signaal $v(t)$ dat bestaat uit een opeenvolging van smalle pulsen $x_n(t)$. De n^o puls ligt in het tijdsinterval $nT_0 - \Delta T < t < nT_0 + \Delta T$. De kansdichtheid voor het optreden in dit interval is rechthoekig en heeft de waarde $\frac{1}{2\Delta T}$. Het oppervlak van de puls $ab=1$. Er geldt $a \ll \Delta T$.



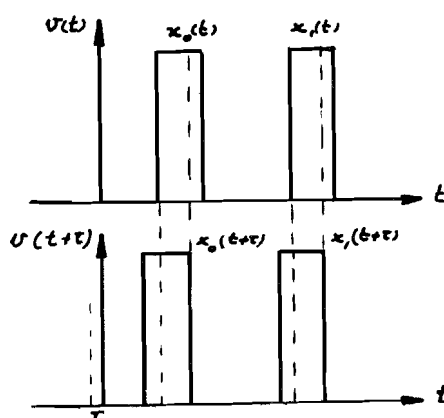
De autokorrelatie $\psi_{vv}(\tau)$.

$$\psi_{vv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} v(t+\tau)v^*(t)dt$$

- $\psi_{vv}(\tau) \neq 0$ voor
- 1) $-a < \tau < a$
 - 2) $nT_0 - 2\Delta T < \tau < nT_0 + 2\Delta T$

$$n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

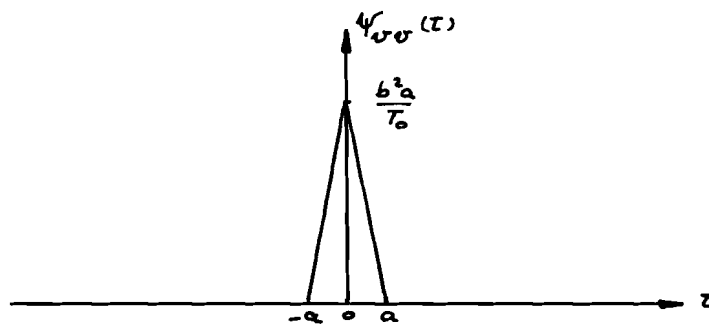
ad 1. $-a < \tau < a$



$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0-\Delta T_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t)$$

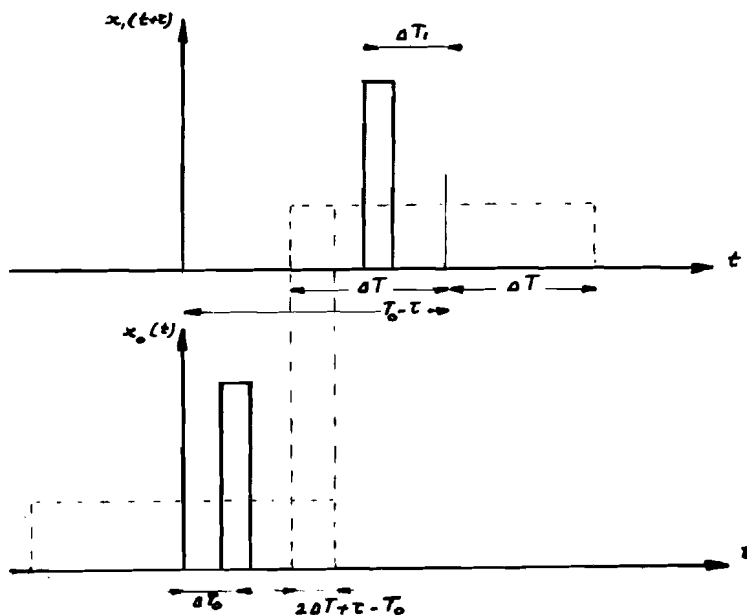
(ΔT_n is een stochastische variabele)

$$\psi_{vv}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \left[N \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t+\tau) x_0(t) dt \right]$$



ad 2. $nT_0 - 2\Delta T < \tau < nT_0 + 2\Delta T$ $n = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$

Omdat iedere puls verschijnt op een willekeurig tijdstip in het interval $2\Delta T$, onafhankelijk van zijn voorganger, zal $\psi_{vv}(\tau)$ voor $|n| \geq 1$ onafhankelijk zijn van n . We nemen voor het gemak $n=1$, dus $T_0 - 2\Delta T < \tau < T_0 + 2\Delta T$.



Overlappingsgebied kansdichtheidfuncties:

$$\tau < T_0 : \tau - T_0 + 2\Delta T$$

$$\tau > T_0 : T_0 - \tau + 2\Delta T$$

De kans dat $x_0(t)$ in het overlappingsgebied valt is:

$$(\tau - T_0 + 2\Delta T) \frac{1}{2\Delta T}, \text{ respektievelijk } (T_0 - \tau + 2\Delta T) \frac{1}{2\Delta T}.$$

De kans dat $x_0(t)$ en $x_1(t+\tau)$ samenvallen: $2a \frac{1}{2\Delta T}$.

Als N zeer groot is wordt het aantal samenvallende impulsen ongeveer:

$$N 2a \left(\frac{1}{2\Delta T} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \tau - T_0 + 2\Delta T \\ \text{of} \\ T_0 - \tau + 2\Delta T \end{array} \right.$$

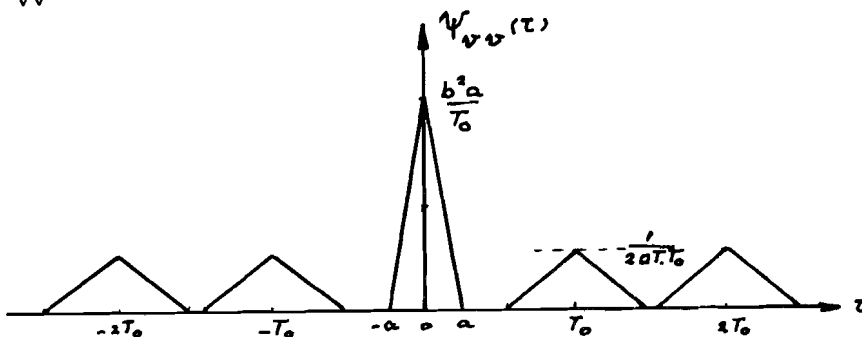
De gemiddelde waarde van $\int_{-\infty}^{\infty} x_{n+1}(t+\tau)x_n(t)dt = \frac{1}{2}b^2a$,

zodat $\psi_{vv}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} N 2a \left(\frac{1}{2\Delta T} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \tau - T_0 + 2\Delta T \\ \text{of} \\ T_0 - \tau + 2\Delta T \end{array} \right. \frac{1}{2}b^2a$.

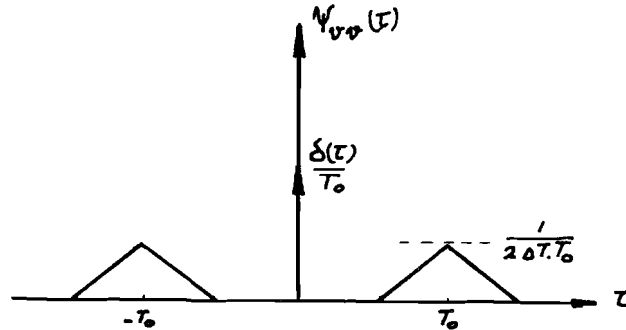
Met $ab = 1$ wordt dit:

$$\psi_{vv}(\tau) = \frac{1}{T_0} \left(\frac{1}{2\Delta T} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \tau - T_0 + 2\Delta T \\ \text{of} \\ T_0 - \tau + 2\Delta T \end{array} \right.$$

$\psi_{vv}(\tau)$ heeft dus de volgende vorm:



Voor een reeks δ -pulsen, dus voor $\lim_{a \rightarrow 0} v(t), ab=1$,
krijgen we:



De Fouriergetransformeerde van $\psi_{vv}(\tau)$ is:

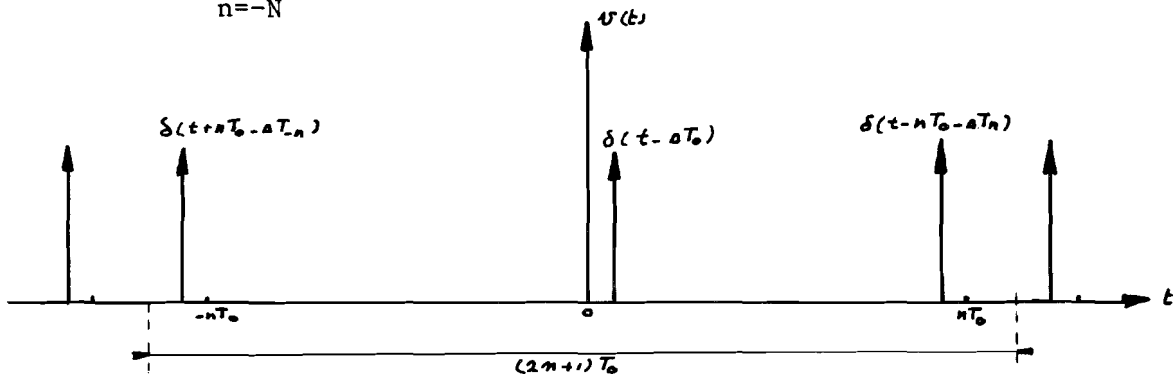
$$\psi_{vv}(j\omega) = \frac{1}{T_0} \left\{ 1 + \left(\frac{\sin \omega \Delta T}{\omega \Delta T} \right)^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_0} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T_0}\right) - 1 \right] \right\}.$$

We gaan nu het vermogenspectrum van een reeks δ -pulsen op de "direkte" manier berekenen.

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0 - \Delta T_n)$$

We bekijken nu dat gedeelte van $v(t)$, $v_T(t)$, bestaande uit $2N+1$ impulsen:

$$v_T(t) = \sum_{n=-N}^N \delta(t - nT_0 - \Delta T_n)$$



We beschouwen $v_T(t)$ als zijnde een lid van een ensemble. De Fouriergetransformeerde is:

$$V_T(j\omega) = \sum_{n=-N}^N e^{-j\omega(nT_0 - \Delta T_n)}$$

Het vermogensspektrum is dan volgens formule (7) :

$$\psi_{VV}(j\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\sum_{n=-N}^N e^{-j\omega(nT_0 - \Delta T_n)} \sum_{m=-N}^N e^{j\omega(mT_0 - \Delta T_m)}}^{\text{ens}}}{(2N+1)T_0} =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N 1 + \sum_{\substack{n=-N \\ m \neq n}}^N \sum_{m=-N}^N e^{j\omega(m-n)T_0} e^{j\omega(\Delta T_n - \Delta T_m)}}^{\text{ens}}}{(2N+1)T_0} .$$

$\psi_{VV}(j\omega)$ is een functie van twee stochastische variabelen ΔT_n en ΔT_m die onafhankelijk zijn. De verwachtingswaarde van een functie van twee stochastisch onafhankelijke variabelen x en y , $f(x,y)=f(x)f(y)$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} p(y) f(y) dy, \text{ zodat}$$

$$\overbrace{e^{j\omega(\Delta T_n - \Delta T_m)}}^{\text{ens}} = \overbrace{e^{j\omega\Delta T_n} e^{-j\omega\Delta T_m}}^{\text{ens}} =$$

$$\int_{-\Delta T}^{\Delta T} \frac{1}{2\Delta T} e^{j\omega\Delta T_n} d\Delta T_n \int_{-\Delta T}^{\Delta T} \frac{1}{2\Delta T} e^{-j\omega\Delta T_m} d\Delta T_m = \left(\frac{\sin \omega\Delta T}{\omega\Delta T} \right)^2 .$$

$$\begin{aligned}
 \text{Dus } \psi_{vv}(j\omega) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N+1 + \left(\frac{\sin\omega\Delta T}{\omega\Delta T}\right)^2 \sum_{n=-N}^N \sum_{\substack{m=-N \\ m \neq n}}^N e^{j\omega(m-n)T_0}}{(2N+1)T_0} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N+1 + \left(\frac{\sin\omega\Delta T}{\omega\Delta T}\right)^2 \left\{ \frac{\sin^2(N+\frac{1}{2})\omega T_0}{\sin^2 \frac{1}{2}\omega T_0} - 2N+1 \right\}}{(2N+1)T_0} \\
 &= \frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_0} \left(\frac{\sin\omega\Delta T}{\omega\Delta T}\right)^2 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_0} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T_0}\right) - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

Beide methodes leveren dus hetzelfde resultaat op.

Opmerking: Het signaal $v(t)$ is een niet-stationair stochastisch signaal.

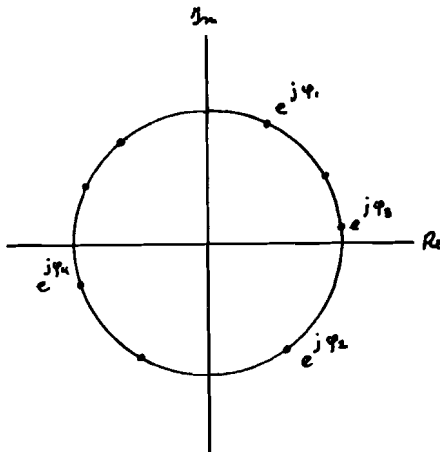
Appendix B.

Om aan te tonen dat we bij de direkte berekening van het vermogensspektrum het gemiddelde over een ensemble moeten nemen voor de limietovergang, voeren we enige berekeningen uit aan een signaal dat bestaat uit een opeenvolging van δ -pulsen en waarvan gegeven is dat voor voldoende grote tijdsintervallen het aantal pulsen per interval nagenoeg konstant is. Om de berekeningen te vereenvoudigen voeren we het volgende model in: we gooien N genummerde pijlen in een interval T en wel zodanig dat zowel de plaats van de pijlen als de nummering van elkaar opeenvolgende pijlen willekeurig is.

Een pijl op de plaats t_n in het interval T komt dan overeen met een δ -puls $\delta(t_n)$. We hebben volgens dit beeld een in de tijd begrensd signaal dat Fouriertransformeerbaar is.

$$x_T(t) = \sum_{n=1}^N \delta(t_n) \quad , \quad X_T(j\omega) = \sum_{n=1}^N e^{j\omega t_n} = \sum_{n=1}^N e^{j\phi_n}$$

Dit is een som van complexe getallen die op de eenheidscirkel liggen.



De ϕ_n 's zijn statistisch onafhankelijk; bovendien is iedere plaats op de cirkel even waarschijnlijk, de kansdichtheidsfunctie over de cirkel is dus rechthoekig.

We bekijken de stochastische variabele

$$f(N) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N e^{j(\phi_m - \phi_n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| e^{j\phi_n} \right|^2 \geq 0$$

$$f(N) = \frac{\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N e^{j\phi_{mn}} \quad \text{met} \quad \phi_{mn} = \phi_m - \phi_n \quad \text{en} \quad \gamma$$

is de dichtheid van de impulsen.

Voor $N \rightarrow \infty$ en $T \rightarrow \infty$ zou $f(N)$ het vermogensspektrum moeten opleveren. We berekenen nu achtereenvolgens de verwachtingswaarde en de variantie van $f(N)$.

1) De verwachtingswaarde.

$$\langle f(N) \rangle = \left\langle \frac{\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N e^{j\phi_{mn}} \right\rangle = \frac{\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \langle e^{j\phi_{mn}} \rangle = \gamma$$

Alleen de termen waarin $m=n$ leveren een bijdrage.

2) De variantie.

$$\langle (f(N) - \langle f(N) \rangle)^2 \rangle = \langle (f(N) - \gamma)^2 \rangle =$$

$$\frac{\gamma^2}{N^2} \left\langle \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N e^{j\phi_{mn}} - N \right)^2 \right\rangle = \frac{\gamma^2}{N^2} \left\langle \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \sum_{n=1}^N e^{j\phi_{mn}} \right)^2 \right\rangle =$$

$$\frac{\gamma^2}{N} \left\langle \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} \sum_{\substack{n \\ i \neq k}} \sum_{i,k} e^{j(\phi_{mn} + \phi_{ik})} \right\rangle = \frac{\gamma^2}{N^2} \sum_{\substack{m \\ m \neq n}} \sum_{\substack{n \\ i \neq k}} \sum_{i,k} \langle e^{j(\phi_{mn} + \phi_{ik})} \rangle$$

Alleen de termen waarvoor $\phi_{mn} + \phi_{ik} = 0$ leveren een bijdrage, dus als $i=n$ en $k=m$.

$$\text{De variantie wordt dan} \quad \frac{1}{N^2} N(N-1)\gamma = \frac{N-1}{N} \gamma.$$

Het resultaat van onze berekeningen kunnen we nu als volgt samenvatten:

de direkte berekening van het vermogensspektrum zonder ensemble-middeling geeft als uitkomst een stochastische variabele waarvan de variantie bij de limietovergang $N \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$ niet naar nul gaat. In feite bestaat de limiet dus niet.

Ensemble-middeling voor de limietovergang levert de korrekte waarde voor $\psi(j\omega)$, namelijk $\psi(j\omega) = \gamma$, een resultaat dat we ook volgens de indirecte methode verkrijgen.

Appendix C.

We moeten bewijzen dat uit
$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \psi(x_i - x_k, y_i - y_k) z_i z_k^* \geq 0$$

volgt:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv$$

met $f(u, v) \geq 0$ en $\lim_{u, v \rightarrow \infty} f(u, v) = 0$.

We bewijzen daartoe eerst de hulpstelling:

|| Als de functie $\psi(x, y)$ begrensd is in het interval $-T < x, y < T$ en $f_T(u, v) = \int_{-T}^T \int_{-T}^T \psi(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy \geq 0$ dan is de functie $f_T(u, v)$ integreerbaar over het hele uv -vlak.

We kunnen $f(u, v)$ in ieder geval integreren over een begrensd gebied.

Stel
$$G(u, v) = \iint_{-u-v}^{u \ v} f_T(t, s) dt ds;$$

$f_T(t, s)$ is niet-negatief, dus $G(u, v)$ is een niet-afnemende functie. Om de hulpstelling te bewijzen moeten we aantonen dat $G(u, v)$ begrensd is als u en v onbeperkt toenemen.

Beschouw nu
$$F(u, v) = \frac{1}{uv} \int_u^{2u} \int_v^{2v} G(a, b) da db.$$

Daar $G(a, b)$ een niet-afnemende functie is geldt:

$$F(u,v) \geq \frac{G(u,v)}{uv} \int_u^{2u} \int_v^{2v} da db = G(u,v)$$

$$G(u,v) = \int_{-u}^u \int_{-v}^v \int_{-T}^T \int_{-T}^T \psi(x,y) e^{-j(tx+sy)} dx dy dt ds$$

$$= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \psi(x,y) \int_{-u}^u \int_{-v}^v e^{jtx} e^{-jys} dt ds dx dy$$

$$= 4 \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{\sin ux}{x} \cdot \frac{\sin yv}{y} \psi(x,y) dx dy$$

$$F(u,v) = \frac{1}{uv} \int_u^{2u} \int_v^{2v} G(a,b) da db$$

$$= \frac{1}{uv} \int_u^{2u} \int_v^{2v} 4 \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{\sin xa}{x} \frac{\sin yb}{y} \psi(x,y) dx dy da db$$

$$= \frac{4}{uv} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \psi(x,y) \left(\frac{\sin^2 xu}{x^2} - \frac{\sin^2 \frac{xu}{2}}{x^2} \right) \left(\frac{\sin^2 yv}{y^2} - \frac{\sin^2 \frac{yv}{2}}{y^2} \right) dx dy$$

Als M het maximum is van $\psi(x,y)$ voor $-T < x,y < T$, dan is

$$\frac{4}{uv} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \psi(x,y) \frac{\sin^2 xu}{x^2} \frac{\sin^2 yv}{y^2} dx dy < 4M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \phi}{\phi^2} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} d\theta = 4M\pi^2. \quad (C1)$$

We kunnen voor de overige drie termen waaruit $F(u,v)$ bestaat identieke betrekkingen opschrijven.

$F(u,v)$ is dus een som en verschil van vier begrensde tweevoudige integralen en is dus zelf ook begrensd.

Aangezien $G(u,v) \leq F(u,v)$ is ook $G(u,v)$ begrensd; hiermee is de hulpstelling bewezen.

Laten we nu aannemen dat $\psi(x,y)$ positief semi-definiet is en beschouwen we

$$f_A(u,v) = \frac{1}{A^2} \iiint_0^A \psi(x_1-x_2, y_1-y_2) e^{-j[u(x_1-x_2)+v(y_1-y_2)]} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

als limiet van $\sum_i \sum_k \psi(x_i-x_k, y_i-y_k) z_i z_k^*$ voor $z_i = \frac{1}{A} e^{-j(ux_i+vy_i)} \Delta x_i \Delta y_i$,

dan volgt $f_A(u,v) \geq 0$.

Stel nu:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = x \\ x_1 + x_2 = z \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{x+z}{2} \\ x_2 = \frac{z-x}{2} \end{array},$$

dan is

$$f_A(u,v) = \int_0^A \int_x^{2A-x} \int_0^A \int_0^A \psi(x, y_1-y_2) e^{-j[ux+v(y_1-y_2)]} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \end{vmatrix} dx dz dy_1 dy_2$$

$$+ \int_{-A}^0 \int_{-x}^{2A+x} \int_0^A \int_0^A \psi(x, y_1-y_2) e^{-j[ux+v(y_1-y_2)]} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \end{vmatrix} dx dz dy_1 dy_2$$

Verdere uitwerking geeft:

$$f_A(u,v) = \int_{-A}^A \int_0^A \int_0^A \psi(x, y_1-y_2) \left(1 - \frac{|x|}{A}\right) e^{-j[ux+v(y_1-y_2)]} dx dy_1 dy_2.$$

Door de substitutie van $y_1-y_2 = y$, $y_1+y_2 = z$ wordt dit tenslotte:

$$f_A(u,v) = \int_{-A}^A \int_{-A}^A \psi(x,y) \left(1 - \frac{|x|}{A}\right) \left(1 - \frac{|y|}{A}\right) e^{-j(ux+vy)} dx dy \geq 0$$

$$\text{Definiëren we: } \phi(x) = 1 - \frac{|x|}{A} \quad |x| < A$$

$$= 0 \quad |x| > A$$

en

$$\phi(y) = 1 - \frac{|y|}{A} \quad |y| < A$$

$$= 0 \quad |y| > A \quad ,$$

dan wordt

$$f_A(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,y) \phi(x) \phi(y) e^{-j(ux+vy)} dx dy \geq 0. \quad (C2)$$

Formule (C2) houdt in dat $f_A(u,v)$ de Fouriergetransformeerde is van $\psi(x,y) \phi(x) \phi(y)$. We mogen de afgeleide hulpstelling op $f_A(u,v)$ toepassen die zegt dat $f_A(u,v)$ over het hele uv -vlak geïntegreerd kan worden; met $f_A(u,v) \geq 0$ betekent dit dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_A(u,v)| du dv \text{ eindig is.}$$

Onder die voorwaarde is de inverse Fouriertransformatie gedefinieerd*, zodat:

$$\psi(x,y) \phi(x) \phi(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(u,v) e^{j(ux+vy)} du dv.$$

Voor iedere eindige x en y is $\lim_{A \rightarrow \infty} \phi(x)$ en $\lim_{A \rightarrow \infty} \phi(y)$ gelijk aan 1, dus

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v) e^{j(ux+vy)} du dv.$$

* Zie hiervoor bijvoorbeeld: "Fourier transforms and the theory of distributions" door J. Arzac. (BJ 6610)

We kunnen gemakkelijk inzien dat de hulpstelling die afgeleid is voor $f_T(u,v)$ ook opgaat voor $f(u,v)$; dit volgt uit het feit dat de ongelijkheid (C1) geldig blijft voor $T \rightarrow \infty$.

$\iint_{-\infty}^{\infty} f(u,v) du dv$ is dus eindig wat met $f(u,v) \geq 0$ betekent dat

$$\lim_{u,v \rightarrow \infty} f(u,v) = 0$$

Resumerend:

is $\psi(x,y)$ een positief semi-definiete funktie dan is hij de Fourier-getransformeerde van een funktie $f(u,v)$ met $f(u,v) \geq 0$ en $\lim_{u,v \rightarrow \infty} f(u,v) = 0$.

LITERATUURPGAVE.

- [1] "Stationary and related stochastic processes".
H. Cramèr, M.R. Leadbetter.
BL 6704.

- [2] "The theory of probability".
B.V. Gnedenko.
BL 6323.

- [3] "Probability, random variables and stochastic processes".
A. Papoulis.
BL 6504.

- [4] "Systems and transforms with applications in optics".
A. Papoulis.
DE 6912.

- [5] "An introduction to the theory of stationary random functions".
A.M. Yaglom .
BL 6204.