

MASTER

Een incoherent polychromatisch beeldbewerkingssysteem op basis van achromatische Fouriertransformatoren

den Brinker, A.C.

Award date:
1983

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

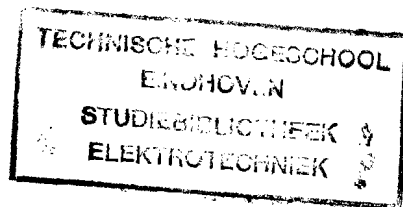
AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK

VAKGROEP Theoretische Elektrotechniek

Een incoherent polychromatisch
beeldbewerkingssysteem op basis
van achromatische Fouriertrans-
formatoren.

B. den Brinker.

ET-12-83.



Verslag van een afstudeeronderzoek
verricht in de vakgroep ET, onder
leiding van ir. M.J. Bastiaans, in de
periode september '82-augustus '83.

Eindhoven, augustus 1983

De afdeling der Elektrotechniek van de Technische Hogeschool Eindhoven
aanvaardt geen verantwoordelijkheid voor de inhoud van Stage- en
Afstudeerverslagen

309345

INHOUDSOPGAVE,

1. Inleiding	blz.2
2. Theoretische beschouwingen	4
2.1. Signaalbeschrijving: de Wigner distributie	4
2.2. De achromatische Fouriertransformator	12
2.3. Filteren met incoherent polychromatisch licht	24
2.4. Herhaling van het filter	29
2.5. Holografie	33
2.6. Filters en computergegenereerde hologrammen	42
2.7. Beeldsubtractie	54
3. Practische uitwerking: de gebouwde filteropstelling	58
3.1. Het maken van hologrammen	58
3.2. De efficiëntie van het hologram m.b.t. de hoek- stand	63
3.3. De gebouwde filteropstelling	65
3.4. De resultaten van de opstellingen zonder filters	72
3.5. Filters, enige kwantitatieve gegevens; filter- opstellingen met filters	83
4. Conclusies	87
5. Literatuur	88
6. Appendices	91

1. INLEIDING.

In de Fourieroptica is al sinds lang de Fouriertransformator bekend. Deze Fouriertransformator is in principe een machtig instrument omdat van een willekeurige lichtverdeling (bv. een dia) de Fouriergetransformeerde naar de plaats verkregen kan worden. Dit gebeurt instantaan, wat het grote voordeel is van de optische methode boven een elektronische transformatie. Het vlak waarin deze Fouriergetransformeerde lichtverdeling optreedt kan als filtervlak gebruikt worden. Hier kunnen ruimtelijke frekwenties uit de Fouriergetransformeerde gehaald worden, dan wel verzwakt worden. Via een tweede transformatie (de terug-transformatie) verkrijgt men dan een gefilterd beeld van de lichtverdeling aan de ingang. Dit geheel aan operaties valt onder de term beeldbewerking.

Bovengenoemde Fouriertransformatoren werken met coherent en monochromatisch licht. In de literatuur zijn onlangs beschrijvingen verschenen van systemen die in hun werking niet beperkt zijn tot één kleur. We noemen deze Fouriertransformatoren daarom achromatisch. In dit afstudeerproject is onderzoek gedaan naar de theoretische achtergronden van zo'n Fouriertransformator. Dit werd gedaan op basis van de Wigner distributie-beschrijving. Tevens zijn zulke transformatoren gebouwd. Verder werd in dit project afgestapt van een systeem werkend met coherent licht. Uit de Wigner distributie blijkt direkt dat voor incoherent licht eenzelfde beschrijving als voor coherent licht geldt, alleen de interpretatie is noodzakelijkerwijs anders. Dit komt tot uiting in de beschrijving van de werking van de filterfuncties. Hetzelfde filterobject heeft in de coherente respectievelijk incoherente beschrijving verschillende eigenschappen.

De vraag rijst waarom een gecompliceerder incoherent polychromatisch beeldbewerkingssysteem gebouwd en onderzocht is, terwijl er bovendien al zeer eenvoudige coherente monochromatische systemen bestaan. Behalve een wetenschappelijke nieuwsgierigheid liggen hier een aantal andere redenen aan ten grondslag.

De mens krijgt circa 90% van zijn informatie via het visuele systeem [34]. Hoewel de informatie geschikt voor beeldbewerking een frac-

tie daarvan is, wordt deze, met oog op de technische vooruitgang en het intreden van meer technische apparatuur, steeds belangrijker.

Het visuele systeem is geëvolueerd op basis van incoherent polychromatisch licht. De overeenkomsten in kleurherkenning tussen de verschillende culturen zijn door deze fysiologische basis zeer sterk [35]. Een ander gevolg is dat we liever naar kleurenplaatjes kijken dan naar zwart-wit beelden. Bovendien kunnen verschillende kleuren een extra bron van informatie zijn.

Verder zijn er specifieke verschillen tussen coherent en incoherent licht. Zo is een incoherent systeem veel minder gevoelig voor optische ruis. Bovendien kan met een eenvoudige (normale) lichtbron gewerkt worden. Als beperkingen voor het gebruik van incoherente optische systemen moet genoemd worden dat de filterfuncties die gerealiseerd kunnen worden altijd een positieve impulsresponsie hebben.

Bij de berekeningen zij opgemerkt dat in principe altijd gerekend moet worden in een vlak: een twee-dimensionale beschrijving in een x- en y-richting. Vaak is de y-richting in de beschrijving weggelaten omdat deze op eendere wijze als de x-richting behandeld kan worden. Het nemen van deze extra variabele kost meer schrijfwerk, leidt tot een onoverzichtelijker geheel, en geeft geen dieper inzicht. In het verslag geldt dan ook "Berge, Flüsse, Täler, Wolken und Himmelfarben dürfen überall dort, wo ich sie unerwähnt lasse, beliebig in die jeweilige Szene eingefügt werden" [36].

Verdere opmerkingen betreffende de notatie: de indices "i" en "o" staan respectievelijk voor in- en uitgang. De "u" als index voor de uitgang kwam niet in aanmerking omdat dit symbool optreedt als frequentievariabele. Het \mathcal{N} teken boven een grootheid geeft een tijdverband aan. Een symbool zonder verdere tekens erboven, betekent niet-tijdafhankelijk, veelal een Fouriergetransformeerde van een tijdafhankelijke grootheid. Het \mathcal{F} teken boven een symbool geeft een Fouriergetransformeerde naar de plaats aan. De integraties zijn van $\int_{-\infty}^{\infty}$ tot $\int_{-\infty}^{\infty}$ tenzij anders vermeld. \ast betekent een convolutie dan wel een geconjugeerde. Het verschil is door de plaatsing van dit teken altijd zonder meer duidelijk. Als laatste: rechte haken [] in de tekst geven een verwijzing naar de literatuurlijst.

2. THEORETISCHE BESCHOUWINGEN.

2.1. Signaalbeschrijving: de Wigner distributie.

In de coherente Fourieroptica nemen we aan dat de optredende grootheid (meestal het elektrische veld \tilde{E}) in een bepaald vlak $\tilde{\varphi}(x, t)$ een harmonische tijdafhankelijkheid vertoont

$$\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi(x) e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

We beschrijven het optredende signaal dan met $\varphi(x)$ of de Fouriergetransformeerde daarvan $\bar{\varphi}(u)$ met

$$\bar{\varphi}(u) = \mathcal{F}\{\varphi(x)\} = \int \varphi(x) e^{-iux} dx \quad (2a)$$

waarbij u een ruimtelijke frekwentie is, uitgedrukt in $[m^{-1}]$. De terugtransformatie wordt gegeven door

$$\tilde{\varphi}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{\varphi}(u)\} = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\varphi}(u) e^{iux} du. \quad (2b)$$

Voor partieel coherent en incoherent licht kunnen we niet werken met een deterministisch signaal $\tilde{\varphi}(x, t)$ omdat er geen starre fase-relatie bestaat tussen de signalen op verschillende plaatsen. We gebruiken stochastische signaalbeschrijvingen [1]: de kruiscorrelatie

$$\tilde{\Gamma}(x_1, x_2; t_1, t_2) = E[\tilde{\varphi}(x_1, t_1) \tilde{\varphi}^*(x_2, t_2)] \quad (3)$$

of het kruisvermogenspectrum

$$\Gamma(x_1, x_2; \omega_1, \omega_2) = \mathcal{F}\{\tilde{\Gamma}(x_1, x_2; t_1, t_2)\} = \iint \tilde{\Gamma}(x_1, x_2; t_1, t_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2. \quad (4)$$

In het verdere verslag nemen we aan dat het optredende signaal tijdstationair is, zodat

$$\tilde{\Gamma}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \tilde{\lambda}(x_1, x_2; t_1 - t_2) \cdot \tilde{\lambda}(x_1, x_2; \tau) \quad (5)$$

met

$$\tau = t_1 - t_2. \quad (6)$$

De kruiscorrelatie is slechts afhankelijk van het tijdsverschil τ . Het kruisvermogenspectrum wordt dan

$$\Gamma(x_1, x_2; \omega_1, \omega_2) = \lambda(x_1, x_2; \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (7)$$

met

$$\lambda(x_1, x_2; \omega) = \mathcal{F}\{\tilde{\lambda}(x_1, x_2; \tau)\} = \int \tilde{\lambda}(x_1, x_2; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (8)$$

Fouriertransformatie van de plaatscoördinaten naar het ruimtelijke frekwentiedomein levert

$$\bar{\lambda}(u_1, u_2; \omega) = \mathcal{F}\{\lambda(x_1, x_2; \omega)\} = \iint \lambda(x_1, x_2; \omega) e^{-i(u_1 x_1 - u_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (9a)$$

$$\lambda(x_1, x_2; \omega) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{\lambda}(u_1, u_2; \omega)\} = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{\lambda}(u_1, u_2; \omega) e^{i(u_1 x_1 - u_2 x_2)} du_1 du_2 \quad (9b)$$

Gemakshalve noteren we vaak

$$\lambda(x_1, x_2; \omega) = \lambda(x_1, x_2) \quad (10)$$

$$\bar{\lambda}(u_1, u_2; \omega) = \bar{\lambda}(u_1, u_2). \quad (11)$$

We voeren nu de Wigner distributie in [2] door $F(x,u)$ te definiëren als

$$F(x,u) = \int \varphi(x + \frac{x'}{2}) \varphi^*(x - \frac{x'}{2}) e^{-iux'} dx' \quad (12)$$

of door de gelijkwaardige definitie

$$F(x,u) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\varphi}(u + \frac{u'}{2}) \bar{\varphi}^*(u - \frac{u'}{2}) e^{iu'x} du' \quad (13)$$

dit voor deterministische signalen $\varphi(x)$. Ook stochastische signalen kunnen met de Wigner distributie beschreven worden volgens

$$F(x,u) = \int \lambda(x + \frac{x'}{2}, x - \frac{x'}{2}) e^{-iux'} dx' \quad (14)$$

respectievelijk

$$F(x,u) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\lambda}(u + \frac{u'}{2}, u - \frac{u'}{2}) e^{iu'x} du' \quad (15)$$

Deze distributies zijn beschrijvingen die liggen "tussen" de beschrijvingen met het kruisvermogenspectrum respectievelijk de dubbele Fouriergetransformeerde van het kruisvermogenspectrum: deze distributie bevat zowel een plaats als een ruimtelijke frekwentie als argument.

Om systemen met een Wigner distributie door te rekenen moet ook een voorstelling van de overdracht van het systeem in termen van de Wigner distributie, alsmede de relatie tussen het in- en uitgangssignaal. Uitgaande van de puntspreidfunctie (P.S.F., andere benamingen: Greense functie, impulsresponsie) van een optisch systeem gerepresenteerd door $g(x,\xi)$ en de bijbehorende in- en uitgangsrelaties

$$\varphi_0(x) = \int g(x,\xi) \varphi_i(\xi) d\xi \quad (16a)$$

$$\bar{\varphi}_0(u) = \int g(u,v) \bar{\varphi}_i(v) dv \quad (16b)$$

met

$$g(u, v) = \mathcal{F}\{g(x, \xi)\} = \frac{1}{2\pi} \iint g(x, \xi) e^{-i(xu - \xi v)} dx d\xi \quad (17a)$$

$$g(x, \xi) = \mathcal{F}^{-1}\{g(u, v)\} = \frac{1}{2\pi} \iint \bar{g}(u, v) e^{i(xu - \xi v)} du dv \quad (17b)$$

volgt dat voor de Wigner distributies aan de in- en uitgang geldt

$$F_0(x, u) = \iint K(x, u, \xi, v) F_i(\xi, v) d\xi dv \quad (18)$$

waarbij F_i resp. F_0 de Wigner distributies zijn behorende bij q_i resp. q_0 en K gegeven wordt door de volgende twee gelijkwaardige relaties

$$K(x, u, \xi, v) = \frac{1}{2\pi} \iint g(x + \frac{x'}{2}, \xi + \frac{\xi'}{2}) g^*(x - \frac{x'}{2}, \xi - \frac{\xi'}{2}) e^{-i(ux' - v\xi')} dx' d\xi' \quad (19a)$$

$$K(x, u, \xi, v) = \frac{1}{2\pi} \iint \bar{g}(u + \frac{u'}{2}, v + \frac{v'}{2}) \bar{g}^*(u - \frac{u'}{2}, v - \frac{v'}{2}) e^{i(u'x - v'\xi)} du' dv' \quad (19b)$$

Relatie (18) geldt ook indien F_i resp. F_0 stochastische signalen beschrijven.

Het grote voordeel van (18) boven (16) is dat (18) enerzijds de overdracht voor zowel coherent, partieel coherent als incoherent licht incorporeert, en anderzijds dat deze relatie in een aantal veel voorkomende gevallen tot een zeer eenvoudige voorstelling leidt. We beschouwen daartoe allereerst de lineaire verliesvrije systemen met een P.S.F. in de vorm

$$g(x, \xi) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi i}} \exp\left\{-i(\alpha x^2 + \beta x \xi + \gamma \xi^2)\right\} \quad (20)$$

met $\beta \neq 0$. Dan volgt

$$K(x, u, \xi, v) = \delta\left(\xi - \left(-\frac{u}{\beta} - \frac{2\alpha x}{\beta}\right)\right) \delta\left(v - (2\gamma \xi + \beta x)\right) \quad (21)$$

en via substitutie in (18)

$$F_0(x, u) = F_i(Ax + Bu, Cx + Du) \quad (22)$$

met

$$A = -2\alpha/\beta, \quad B = -1/\beta \quad (23a, b)$$

$$C = (-4\alpha\gamma + \beta^2)/\beta, \quad D = -2\gamma/\beta. \quad (23c, d)$$

Een voorbeeld hiervan is de Fouriertransformator

$$g(x, \xi) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi i}} \exp\{-i\beta x \xi\} \quad (24)$$

zodat

$$F_0(x, u) = F_i\left(-\frac{u}{\beta}, \beta x\right) \quad (25)$$

dit is: plaats en ruimtelijke frekwentiecoördinaat zijn verwisseld.

De PSF. volgens (20) kent een aantal belangrijke randgevallen. Allereerst is de ideale afbeelding volgens

$$g(x, \xi) = \sqrt{M} \delta(\xi - Mx) \quad (26)$$

met M^{-1} de vergroting een limietgeval van (20)(zie app.1). Ook dit systeem valt te beschrijven met (22) volgens

$$A = M, \quad B = 0 \quad (27a, b)$$

$$C = 0, \quad D = \frac{1}{M}. \quad (27c, d)$$

Vervolgens de systemen volgens (vergelijk (16))

$$\varphi_0(x) = m(x) \varphi_i(x). \quad (28)$$

Voor deze systemen geldt dat de Wigner distributie gegeven wordt door

$$K(x, u, \xi, \nu) = \frac{1}{2\pi} F_m \left(\frac{x+\xi}{2}, u-\nu \right) \delta(x-\xi) \quad (29)$$

met F_m de Wigner distributie van $m(x)$ gedefinieerd volgens (12).

Als voorbeeld nemen we een drietal functies. Allereerst de lens met

$$m(x) = \exp \left\{ -i \frac{k}{2f} x^2 \right\} \quad (30)$$

$$F_m(x, u) = 2\pi \delta \left(u + \frac{k}{f} x \right) \quad (31)$$

$$F_0(x, u) = F_i \left(x, u + \frac{k}{f} x \right). \quad (32)$$

Vervolgens een pupilfunctie

$$m(x) = \text{rect} \left(\frac{x}{X} \right) \quad (33)$$

$$F_m(x, u) = \begin{cases} 4(X-|x|) \text{sinc} \{ \lambda u (X-|x|) \} & , |x| \leq X \\ 0 & , |x| > X \end{cases} \quad (34)$$

$$\text{sinc } a = \frac{\text{sina}}{a} \quad (35)$$

en tenslotte een holografisch raster (voor afleiding zie app.2)

$$m(x) = 1 + \cos(\Lambda x) \quad (36)$$

$$F_m(x, u) = 2\pi \left\{ \delta(u) \left[1 + \frac{1}{2} \cos(2\Lambda x) \right] + \cos(\Lambda x) \left[\delta(u - \frac{\Lambda}{2}) + \delta(u + \frac{\Lambda}{2}) \right] + \frac{1}{4} \left[\delta(u - \Lambda) + \delta(u + \Lambda) \right] \right\} \quad (37)$$

$$F_0(x,u) = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(2\Lambda x) \right\} F_i(x,u) + \cos(\Lambda x) \left\{ F_i(x, u - \frac{\Lambda}{2}) + F_i(x, u + \frac{\Lambda}{2}) \right\} + \frac{1}{4} \left\{ F_i(x, u + \Lambda) + F_i(x, u - \Lambda) \right\}. \quad (38)$$

Als laatste randgeval bekijken we de plaatsinvariante systemen volgens

$$\bar{\varphi}_0(u) = \bar{h}(u) \bar{\varphi}_i(u) \quad (39)$$

Hier wordt (18) een analogon van (29)

$$F_0(x,u) = \int F_h(x-\xi, u) F_i(\xi, u) d\xi \quad (40)$$

met F_h de Wigner distributie van \bar{h} volgens (13).

Als voorbeeld beschouwen we de vrije ruimte

$$\bar{h}(u) = \exp \left\{ -i \frac{\hbar}{2k} u^2 \right\} \quad (41)$$

$$F_0(x,u) = F_i \left(x - \frac{\hbar}{k} u, u \right). \quad (42)$$

Concluderend kunnen we zeggen dat een aantal systemen met ingangsvlak en uitgangsvlak volgens (20), (26), (28) en (33) in de Wigner distributie beschreven kunnen worden volgens de matrixmethode.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (43)$$

Hierbij is ξ de plaats en ν de frekwentie in het ingangsvlak en x resp. u de tegengangers in het uitgangsvlak. A, B, C en D worden gegeven door (23) voor systemen als (20), door (27) voor de ideale afbeelding, door

$$A = D = 1, \quad B = 0, \quad C = \hbar/f \quad (44)$$

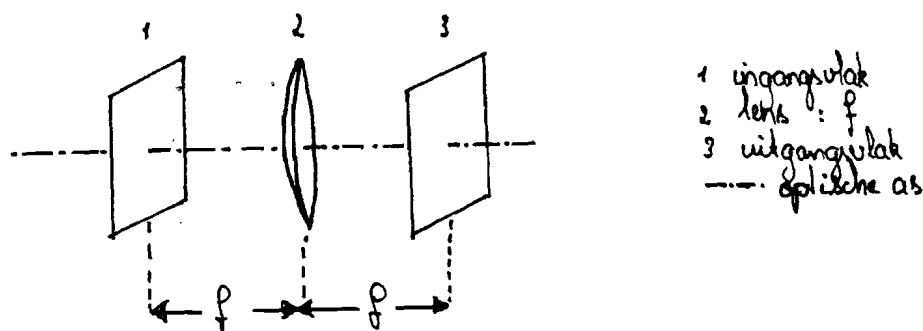
voor de lens met brandpuntsafstand f , en door

$$A = D = 1, B = -\frac{1}{f}, C = 0 \quad (45)$$

voor de vrije ruimte. Deze matrixnotatie is identiek aan die welke gebruikt wordt in de geometrische optica.

2.2. De achromatische Fouriertransformator.

Uit de coherente optica is de Fouriertransformator bekend [3] (zie figuur 1).



Figuur 1. De Fouriertransformator.

Staat in het ingangsvlak het signaal $q_i(x,y)$ dan wordt het uitgangssignaal beschreven door

$$q_o(x,y) = \bar{q}_i\left(\frac{kx}{f}, \frac{ky}{f}\right) \quad (46)$$

waarbij \bar{q}_i de Fouriergetransformeerde van q_i is (analoog aan (2)).

Wordt deze transformator met verschillende kleuren bedreven dan ontstaat in het uitgangsvlak een som van Fouriergetransformeerden van verschillende kleur, waarbij iedere kleur zijn specifieke afmetingen heeft. Het blauw ligt dichters rond de optische as dan het rood. We spreken van kleurschifting.

Deze onevenredige overdracht kan verholpen worden door gebruik te maken van lenzen met een golflengte-afhankelijke brandpuntsafstand. Zulke lenswerking kan verkregen worden met geschikt gemaakte hologrammen. We kunnen dan een Fouriertransformator maken met een (in benadering) golflengte-onafhankelijke schaalfactor [4,5,6] volgens

$$q_0(x,y) = \bar{q}_i \left(\frac{k_0 x}{f}, \frac{k_0 y}{f} \right) \quad (47a)$$

$$F_0(x,u) = F_i \left(-\frac{f}{k_0} u, \frac{k_0}{f} x \right) \quad (47b)$$

Behalve de golflengte-afhankelijkheid van de brandpuntsafstand zijn er nog twee belangrijke verschillen tussen de werking van een holografische lens (=zoneplaatje) en die van een normale lens. De zoneplaatjes die in onze opstelling gebruikt zijn, zijn off-axis hologrammen. De term off-axis slaat op de opnametechniek van deze hologrammen (zie 2.5.Holografie). Het gevolg van deze methode van opnemen is dat zo'n zoneplaatje aan een invallende bundel licht een hoekverdraaiing geeft. In de Wigner distributie komt deze verdraaiing tot uiting door het vervangen van u door $u + u_0$. Immers

$$\begin{aligned} q(x) &\leftrightarrow F(x,u) \\ q(x) e^{-iu_0 x} &\leftrightarrow F(x, u + u_0). \end{aligned} \quad (48)$$

De grootte van deze hoekverdraaiing wordt tijdens de opname vastgelegd. Er geldt

$$u_0 = k_0 \sin \theta_0 \quad (49)$$

waarbij k_0 de opnamekleur is, en θ_0 de hoek tussen de twee bundels waarvan het interferentiepatroon vastgelegd wordt. Vergelijking 48 betekent tevens dat bij gebruik van een zoneplaatje (of meer algemeen: ieder off-axis hologram) met verschillende kleuren, iedere kleur een iets andere verdraaiing θ krijgt volgens

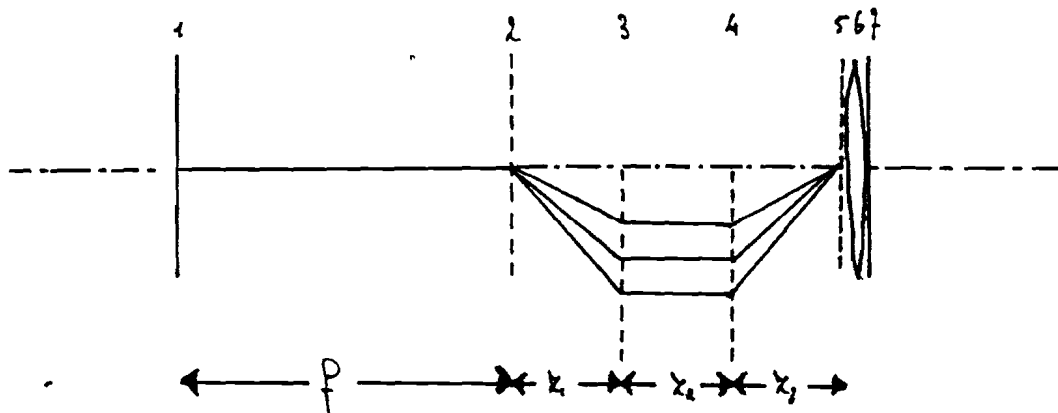
$$\sin \theta = u_0 / k \quad (50)$$

dus $\theta = \theta(k)$.

Een tweede verschil betreft de efficiëntie. Terwijl een lens een rendement van 90 à 95% heeft, halen fasehologrammen bij goede opnames rond de 25%. Dit betekent dat bij gebruik van holografische elementen een ongewenst en bijzonder groot lichtverlies optreedt.

Doordat in de achromatische Fouriertransformator zoneplaatjes gebruikt worden treedt daar de eerder beschreven kleurschifting op. We compenseren deze door gebruik te maken van een raster. Deze rasters werden holografisch vervaardigd en wel zodanig dat het mogelijk is de stralengang na een zoneplaatje terug te buigen naar de optische as, zodat de kleurschifting teniet gedaan wordt.

Als eerste opstelling van een achromatische Fouriertransformator bekijken we figuur 2. Hierbij worden twee rasters gebruikt om de stralen na het zoneplaatje naar de optische as terug te buigen.



Figuur 2. De eerste achromatische Fouriertransformator.

Het systeem bestaat achtereenvolgens uit:

een ingangsvlak: 1

een vrije ruimte ter lengte f

matrixnotatie: $\begin{pmatrix} 1 & -f/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

een convergent zoneplaatje: 2. u_0, k_0 en f_0	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_0/f_0 & 1 \end{pmatrix}$
een vrije ruimte ter lengte x_1 .	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & -x_1/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
een raster: 3. $-u_0, k_0$	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
een vrije ruimte ter lengte x_2 .	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & -x_2/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
een raster: 4. $-u_0, k_0$	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
een vrije ruimte ter lengte x_3 .	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & -x_3/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
een divergent zoneplaatje: 5. $u_0, k_0, -f_0$	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_0/f_0 & 1 \end{pmatrix}$
een convergente lens: 6. f	matrixnotatie	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k/f & 1 \end{pmatrix}$

een uitgangsvlak: 7.

Omdat de gebruikte elementen vrije ruimtes, lenzen en rasters zijn, kan deze gehele opstelling met behulp van de matrixtheorie doorgerekend worden. We voeren hier de eerste stappen ter verduidelijking uit.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_0/f_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k_0}{k} \frac{f_0}{f} & -\frac{f_0}{k} \\ \frac{k_0}{f_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Vervolgens nemen we de verdraaiing in rekening, en vervangen daartoe u_2 door $u_2' + u_0$ zodat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k_0}{k} \frac{f_0}{f} & -\frac{f_0}{k} \\ \frac{k_0}{f_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ u_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{f_0}{k} \\ 1 \end{pmatrix} u_0 \quad (52)$$

Enzovoorts. Nemen we $z_1 = z_3$, en $x_1 + z_2 + z_3 = f$ dan volgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{k_0}{k} \frac{f_0}{f}\right)^2 & -\frac{f_0}{k} \left\{ 2 - \frac{f_0}{f_0} \frac{k_0}{k} \right\} \\ \frac{k_0}{f_0} \left\{ k^2 - k_0 k \frac{f_0}{f} + k^2 \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 \right\} & 1 - \frac{f_0}{f_0} \frac{k_0}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (53)$$

De berekening voor de y-richting levert een identiek resultaat, daar hoeft geen rekening met afbuigingen van de as gehouden te worden.

Stellen we

$$k = k_0 \frac{f}{f_0} (1 + \alpha) \tag{54}$$

waarbij we α de verstemming noemen ten opzichte van de schijnbare opnamekleur $\frac{f}{f_0} k_0$, dan volgt onder verwaarlozing van derde en hogere machten van α dat de overdrachtsmatrix van dit systeem gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{55}$$

met

$$A = -\alpha^2 \tag{56a}$$

$$B = -\frac{f_0}{k_0} (1 - \alpha^2) \tag{56b}$$

$$C = \frac{k_0}{f_0} (1 + \alpha^2) \tag{56c}$$

$$D = \alpha - \alpha^2 \tag{56d}$$

In benadering voldoet deze opstelling aan een achromatische Fourier-transformator met transformatiefactor $\beta = k_0/f_0$ (zie (41)). Voorwaarde voor die benadering is

$$\alpha^2 \ll 1 \tag{57a}$$

$$\alpha^2 |x| \ll \left| \frac{f_0}{k_0} u \right| \tag{57b}$$

Deze laatste eis heeft een enigzins vreemd karakter. Om te zien of aan deze eis voldaan wordt zou voor x de maximale grootte van het ingangssignaal X genomen moeten worden, en voor u een minimale waarde U . Zodra er egale belichtingen optreden ($u = 0$) zou de werking niet meer zijn zoals we wensen. Een probleem dat hier optreedt is dat er zowel beperktheid van de afmetingen van het plaatje, als van de bandbreedte geëist wordt. Deze eisen zijn tegenstrijdig. We zullen dit probleem ook nog in een later hoofdstuk ontmoeten bij de computerhologrammen.

Uit (56) volgt dat we de Fouriertransformator ook hadden kunnen om- draaien: 7gebruiken als ingangsvlak en 1 gebruiken als uitgangsvlak (zie figuur 2). Bovendien hadden we het geheel symmetrisch kunnen ma- ken: nog een lens en een divergent zoneplaatje onmiddelijk achter vlak 1. De reden dat dit beide niet gedaan is wordt gegeven door het feit dat we aannemen dat aan de ingang incoherent licht aanwezig is (zie app.3).

$$\Delta(x_1, x_2) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \delta(x_1 - x_2) \quad (58)$$

$$F_i(x_1, u_1) = P(x_1) \quad (59)$$

Voor F_0 geldt dan

$$F_0(x_2, u_2) = F_i(Ax_2 + Bu_2, (x_2 + Du_2)) = P(Ax_2 + Bu_2) \quad (60)$$

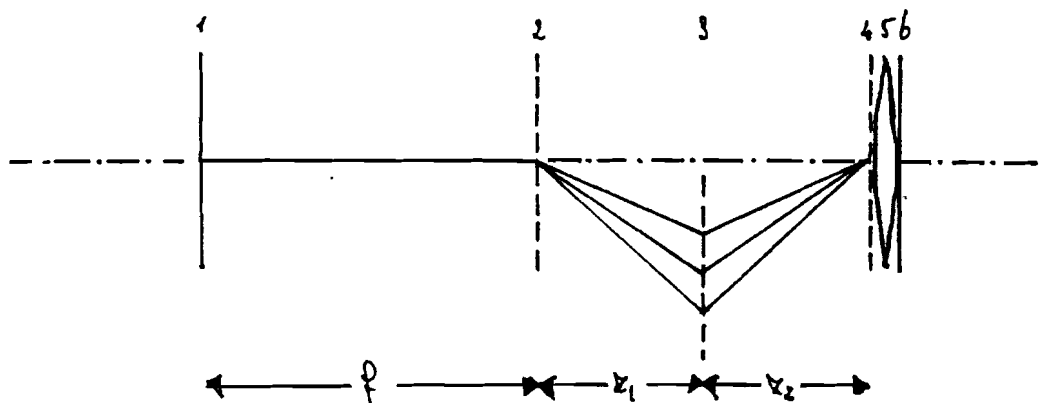
We zien dat slechts A en B van belang zijn. In het geval van 7 als in- gang en 1 als uitgangsvlak wordt A met D verwisseld in (56). Dit zou een grotere fout (nl. een eerste orde fout) in de benadering (60) ge- ven. Het symmetrische geval betekent geen verbetering, slechts D zou een betere benadering van de ideale Fouriertransformator geven. Volgens (60) speelt D geen rol bij incoherente belichting. Practisch zou het ongetwijfeld een verslechtering betekenen; immers meer com- ponenten. Bovendien extra lichtverliezen.

Merk op dat indien de ingang incoherent is de ideale achromatische Fouriergetransformeerde ruimtelijk stationair is;

$$F_0(x_2, u_2) = P\left(-\frac{f_0}{k_0} u_2\right) \quad (61)$$

Uit het voorgaande is duidelijk dat we op gelijke gronden voor een terugtransformatie wél de inverse opstelling gebruiken. Het is eenvou- dig aan te tonen dat dit als geheel een betere overdracht geeft. Dit volgt uit het achterelkaar zetten van de mogelijke combinaties, en te vergelijken bij welke combinatie de totale matrix de kleinste afwijking vertoont ten opzichte van de eenheidsmatrix (zie app.4).

Eenzelfde resultaat als (56) kan verkregen worden in een opstelling waarbij slechts gebruik wordt gemaakt van één raster (zie figuur 3). Hier zijn de twee rasters uit de eerste opstelling als het ware samengevoegd tot één raster, welk dubbel zo hard breekt.



Figuur 3. De tweede achromatische Fouriertransformator.

Deze transformator bestaat achtereenvolgens uit:

- het ingangsvlak: 1
- een vrije ruimte ter lengte f .
- een convergent zoneplaatje: 2. k_0, f_0, u_0 .
- een vrije ruimte ter lengte z_1 .
- een holografisch raster: 3. k_0, u_0
- een vrije ruimte ter lengte z_2 .
- eendivergent zoneplaatje: 4. $k_0, -f_0, u_0$.
- een lens: 5. f
- het uitgangsvlak: 6.

Nu volgt met $z_1 + z_2 = f$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{k_0}{k} \frac{f}{f_0}\right)^2 & -\frac{f}{k} \left(2 - \frac{f_0}{f} \frac{k_0}{k}\right) \\ \frac{k_0}{f_0} \left\{ \frac{k_0^2 - k_0 k \frac{f_0}{f} + k^2 \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}{k_0 k \frac{f_0}{f}} \right\} & 1 - \frac{f_0}{f} \frac{k_0}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} \frac{z_1 u_0 - z_2 u_0'}{k} \left(1 - \frac{f}{f_0} \frac{k_0}{k}\right) \\ \frac{k_0}{f_0} \frac{z_1 u_0 - z_2 u_0'}{k} \end{pmatrix}$$

Dit betekent dat de tweede methode een identiek resultaat geeft als de eerste indien we ervoor zorgen dat

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{u_0'}{u_0} \quad (63)$$

Deze opstelling heeft een aantal voordelen boven de eerste. Er wordt een component minder gebruikt, waardoor we in de praktische opstelling minder fouten kunnen maken. Bovendien treedt er nu minder lichtverlies op. Als laatste treden er een aantal voordelen op bij het maken van de hologrammen, waardoor we de parameters u_0, u_0' en f_0 beter constant kunnen houden over de verschillende opnames (zie 2.5.Holografie).

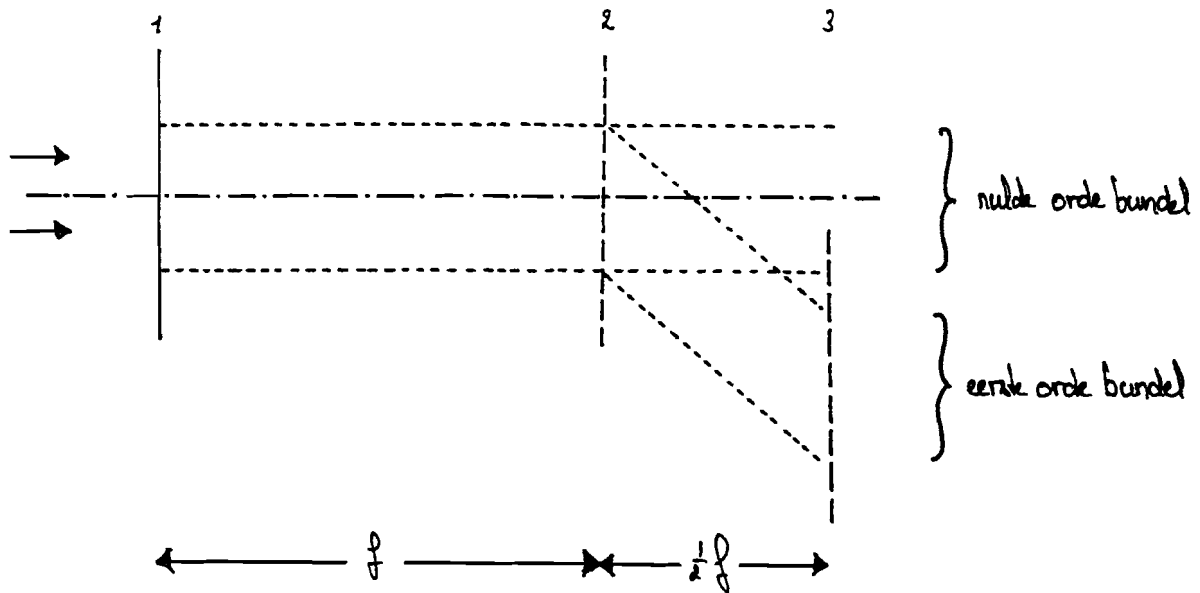
Voorwaarde voor een correcte werking van de twee hierboven beschreven transformatoren is dat in het vlak waar het holografische raster staat de verschillende orde bundels gegenereerd door het zoneplaatje (zie 2.5.Holografie) ruimtelijk gescheiden van elkaar optreden. Slechts dan kan de gewenste brandpuntsafhankelijke lens-werking geselecteerd worden. Dit kan als een filterwerking gezien worden: in het rastervlak wordt de ongewenste informatie geweerd, maar is het anderzijds niet de bedoeling dat er informatie dan wel lichtopbrengst verloren gaat.

We zullen hieronder bekijken waar de eerste orde bundel (=gewenste bundel) op het raster valt en onder welke voorwaarde deze gescheiden optreedt van de nulde orde bundel. Dit levert een eis voor de hoekverdraaiing u_0 . We gaan uit van loodrecht invallende straling en een opstelling zoals in figuur 3. We nemen aan dat $u_0 = u_0'$ zodat $z_1 = z_2 = \frac{1}{2} f_0$, zie figuur 4. Uitgaande van (52) geldt vervolgens

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b_0}{k} \frac{f_0}{f_0} & -\frac{f_0}{k} \\ \frac{b_0}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{f_0}{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{f_0}{k} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Matrix-inverteren en herschrijven geeft

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{f_0}{2k} \frac{b_0}{k} & \frac{f_0}{2k} \left(3 - \frac{f_0}{k} \frac{b_0}{k} \right) \\ -\frac{b_0}{k} & 1 - \frac{1}{2} \frac{b_0}{k} \frac{f_0}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + u_0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{f_0}{k} \\ -1 - \frac{1}{2} \frac{b_0}{k} \frac{f_0}{k} \end{pmatrix} \quad (65)$$



Figuur 4. Plaats van de verschillende bundels in het rastervlak.

Anderzijds stellen we dat de nulde orde bundel het hologram niet "ziet" (zie app.2). Dan geldt hiervoor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \frac{p}{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (66)$$

ofwel geïnverteerd

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \frac{p}{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

De maximale waarde van x_3 van de eerste orde bundel (X_3) wordt gegeven door (65) waarbij k zodanig gekozen moet worden dat het maximum bereikt wordt.

$$X_3 = x_{3max} \leq \left(1 - \frac{3}{2} \frac{p}{h} \frac{k_0}{k_{max}}\right) x_{1max} + \frac{3}{2} \frac{p}{h} \left(3 - \frac{p}{h} \frac{k_0}{k_{max}}\right) u_{1max} - \frac{1}{2} \frac{p}{h} u_0 \quad (68)$$

en evenzo voor de minimale waarde van x_3 van de nulde orde bundel (x_3') gegeven door (66) met

$$x_3' = x_{3 \min 0} = x_{1 \min} + \frac{3}{2} \frac{f}{k_{\max}} u_{1 \min}. \quad (69)$$

We moeten eisen dat $x_3 \leq x_3'$ en nemen aan dat het ingangsbeeld symmetrisch rond de optische as ligt, en dat de invallende straling loodrecht is zodat

$$x_{1 \min} = -x_{1 \max} \quad (70)$$

$$u_{1 \min} = -u_{1 \max} \quad (71)$$

Er volgt dan dat voor u_0 moet gelden

$$u_0 \geq 2 \frac{k_{\max}}{f} \left\{ 2 - \frac{f}{2b_0} \frac{k_0}{k_{\max}} \right\} x_{1 \max} + \left\{ \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \left(3 - \frac{f}{b_0} \frac{k_0}{k_{\max}} \right) + 3 \right\} u_{1 \max}. \quad (72)$$

Omdat de variaties in de intensiteitsfunctie die nog van belang zijn (dit wordt bepaald door het oog) veel kleiner zijn dan de golflengte van het licht geldt

$$\frac{x_{1 \max}}{f} \gg \frac{u_{1 \max}}{k} \quad (73)$$

zodat de schatting voor u_0 gegeven wordt door

$$u_0 \geq \left\{ 4 k_{\max} - \frac{f}{b_0} k_0 \right\} \frac{x_{1 \max}}{f}. \quad (74)$$

Op deze manier moet ook het raster in de terugtransformatie bekeken worden. Hierbij moet rekening gehouden worden met het feit dat eerst een divergent zoneplaatje gepasseerd wordt, en ten tweede dat de aanbrechte filterfunctie voor een aanzienlijke verbreding van het frequentiespectrum kan zorgen.

We berekenen de eis voor u_0 uit de terugtransformator ervan uitgaande dat er géén filter aanwezig is. Voor een berekening met een filter is er in appendix 10 uitgerekend wat er gebeurd indien beeld-

vermenigvuldiging wordt toegepast. We nemen aan dat de eerste Fourier-transformator achromatisch en ideaal is volgens

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_0}{k_0} \\ \frac{k_0}{f_0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Gezien de al eerder gedane aannames van volledige incoherentie en loodrecht invallende straling aan de ingang, zal dit geen fouten introduceren van een essentieel grotere orde.

We bekijken de geïnverteerde tweede Fouriertransformator, zie figuur 5 en vinden

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2k} \\ \frac{k-k_0}{f} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_0}{k}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_9 \\ u_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

zodat voor de eerste orde bundel onder aanname (75) geldt

$$\begin{pmatrix} x_9 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{p_0}{f} \frac{k_0}{k} & \frac{1}{2} \frac{p_0}{k_0} \left(1 + \frac{k_0}{k}\right) \\ -\frac{k_0}{f_0} & -\frac{k-k_0}{k_0} \frac{p_0}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Voor de nulde orde bundel geldt, wederom onder de aanname dat het zoneplaatje niet "gezien" wordt

$$\begin{pmatrix} x_9 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{k_0}{k} \frac{p_0}{f_0} & \frac{1}{2} \frac{p_0}{k_0} \\ -\frac{k_0}{f_0} & -\frac{k}{k_0} \frac{p_0}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

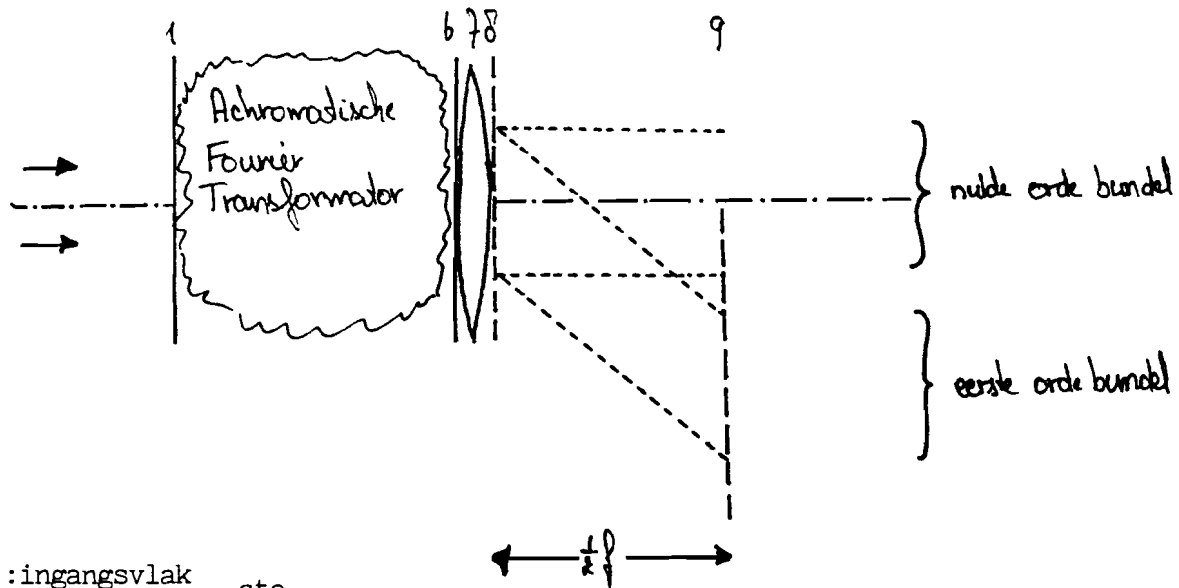
De eis is ook hier dat de maximale waarde van de eerste orde bundel

(X_9) kleiner is dan de minimale waarde van x_9 van de nulde orde bundel

(X_9), opnieuw onder de aannames (70) en (71). Er volgt

$$X_9 = x_{9,max} \leq \frac{1}{2} \frac{p_0}{f} \frac{k_0}{k_{min}} x_{1,max} + \frac{1}{2} \frac{p_0}{k_0} \left(1 + \frac{k_0}{k_{min}}\right) u_{1,max} - \frac{1}{2} \frac{p_0}{k_{max}} u_0 \quad (79)$$

$$X_9' = x_{9,min} = -\frac{k_0}{2k_{min}} \frac{p_0}{f} x_{1,max} - \frac{1}{2} \frac{p_0}{k_0} u_{1,max} \quad (80)$$



- 1:ingangsvlak
- 6:uitgang v.d. 1^{ste} (ideale) transformator
tevens ingang van de tweede transformator
- 7:lens,brandpuntsafstand .
- 8:divergerend zoneplaatje,
- 8-9: vrije ruimte ter lengte .
- 9:holografisch raster

Figur 5. Plaats van de verschillende bundels in het rastervlak.

Als voldoende voorwaarde voor u_0 volgt hieruit

$$u_0 \geq \frac{\alpha_{1,max}}{f} \frac{k_{max}}{k_{min}} \lambda k_0 + \frac{k_{max}}{k_0} \frac{f}{f} \left\{ 2 + \frac{k_0}{k_{min}} \right\} u_{1,max} \quad (81)$$

waarop een schatting met (73) wordt

$$u_0 \geq 2 \frac{k_{max}}{k_{min}} k_0 \frac{\alpha_{1,max}}{f} \quad (82)$$

Indien beide Fouriertransformatoren met dezelfde hologrammen opgebouwd worden moeten we voor u_0 de eis (74) stellen aangezien deze zwaarder is.

2.3. Filteren met incoherent polychromatisch licht.

In het vorige hoofdstuk is afgeleid dat het mogelijk is om een Fouriertransformator te bouwen die in benadering achromatisch is. De volgende stap is om te bepalen wat we aan filters kunnen maken. Daartoe moet allereerst het verband gelegd worden tussen de karakteristiek van het filter en de in- en uitgangssignalen. Dit doen we in dit hoofdstuk.

We werken met partieel coherent dan wel incoherent licht en dus met een correlatiefunctie, of het vermogenspectrum [1]

$$\tilde{\Gamma}(x_1, x_2; t_1, t_2) = E[\tilde{q}(x_1, t_1) \tilde{q}^*(x_2, t_2)] \quad (3)$$

$$\Gamma(x_1, x_2; \omega_1, \omega_2) = \mathcal{N}[\tilde{\Gamma}(x_1, x_2; t_1, t_2)] \quad (4)$$

Uit (16) volgt dat voor een systeem met PSF. $\check{g}(x, \xi; t, \tau)$ geldt

$$\tilde{\Gamma}_u(x_1, x_2; t_1, t_2) = \iiint \check{g}(x_1, \xi_1; t_1, \tau_1) \tilde{\Gamma}_i(\xi_1, \xi_2; \tau_1, \tau_2) \check{g}^*(x_2, \xi_2; t_2, \tau_2) d\xi_1 d\xi_2 d\tau_1 d\tau_2 \quad (83)$$

Dit is de meest algemene vorm. Is het systeem alsook het ingangssignaal tijdstationair dan kunnen we schrijven

$$h_u(x_1, x_2; \omega) = \iint g(x_1, \xi; \omega) h_i(\xi_1, \xi_2; \omega) g^*(x_2, \xi_2; \omega) d\xi_1 d\xi_2 \quad (84)$$

waarbij h samenhangt met $\tilde{\Gamma}$ volgens (8) en (5). Is de PSF. een modulatiefunctie $m(x; \omega)$ volgens

$$g(x, \xi; \omega) = m(x; \omega) \delta(x - \xi) \quad (85)$$

dan wordt (84)

$$\lambda_u(\alpha, \alpha_2; \omega) = m(\alpha, \omega) \lambda_i(\alpha, \alpha_2; \omega) m^*(\alpha_2; \omega) \quad (86)$$

In vele gevallen is slechts de intensiteitsfunctie aan de uitgang van belang. Dit is immers wat het oog waarneemt. In twee specifieke gevallen kunnen de voorgaande vergelijkingen tot een verdere, meer eenvoudige interpretatie herleid worden. We gaan uit van volledig incoherente belichting (zie appendix 3)

$$\lambda_i(\xi, \xi_2; \omega) = p\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}; \omega\right) \delta(\xi_1 - \xi_2) \quad (87)$$

$$\lambda_u(\alpha, \alpha_2; \omega) = \int g(\alpha, \xi; \omega) p(\xi; \omega) g^*(\alpha_2, \xi; \omega) d\xi. \quad (88)$$

De uitgangssintensiteit is te bepalen uit

$$I_u(\alpha) = \lambda_u(\alpha, \alpha; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \int p(\xi; \omega) |g(\alpha, \xi; \omega)|^2 d\xi \right\} d\omega. \quad (89)$$

Voor monochromatische belichting met

$$p(\xi; \omega) = q(\xi; \omega) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (90)$$

volgt met (91) (zie app. 3) nu

$$I_i(\alpha) = \text{konst} \times \int p(\xi; \omega) d\omega \quad (91)$$

$$I_u(\alpha) = \text{konst} \times \int I_i(\xi; \omega_0) |g(\alpha, \xi; \omega_0)|^2 d\xi. \quad (92)$$

Voor een frequentieonafhankelijk filter

$$g(\alpha, \xi; \omega) = g(\alpha, \xi) \quad (93)$$

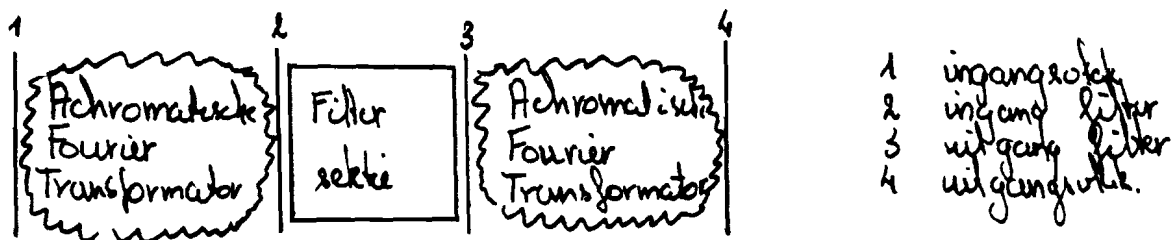
volgt uit (89) door het verwisselen van de integratievolgorde

$$I_u(\alpha) = \text{konst} \times \int I_i(\xi) |g(\alpha, \xi)|^2 d\xi. \quad (94)$$

Dus zowel voor monochromatische belichting als voor een frequentie-onafhankelijke filterfunctie wordt de intensiteit van de ingang gefilterd met het kwadraat van de norm van de PSF..De functie waarmee gefilterd wordt is dus altijd reeel en positief. Dit is een fundamentele beperking van incoherente filtersystemen. Hierdoor hebben alle filterfuncties die gemaakt kunnen worden een laagdoorlaat-karakteristiek en zijn aan de zgn. Lukoszegrenzen gebonden [7].

Deze beperkingen kunnen gedeeltelijk omzeild worden indien we gebruik maken van subtractietechnieken. Dan kunnen we van twee gefilterde functies de verschilfunctie bepalen. Hierdoor treedt een effectieve filterfunctie op die niet noodzakelijkerwijs een laagdoorlaat-karakteristiek heeft, en waarbij in de PSF. negatieve waardes kunnen optreden. We gaan hier later uitvoeriger op in (zie 2.7.Beeldadditie en subtractie).

We zullen nu bekijken wat de eerder afgeleide filterrelaties betekenen voor een filteropstelling met achromatische Fouriertransformatoren zoals geschets in figuur 6.



Figuur 6. De filteropstelling.

We nemen aan dat we gebruik maken van ideale achromatische Fouriertransformatoren, met een transformatieconstante $\beta = k_0 / f_0$, en een filter met een PSF. volgens

$$g(x, \xi; \omega) = m(x; \omega) \delta(x - \xi). \quad (85)$$

Het signaal aan de ingang van het filter $\lambda_2(x_2, \xi_2; \omega)$ wordt dan gegeven door de Fouriergetransformeerde van het ingangssignaal $\lambda_1(x_1, \xi_1; \omega)$ volgens

$$\lambda_2(x_2, \xi_2; \omega) = \bar{\lambda}_1(\beta x_2, \beta \xi_2; \omega) \quad (95)$$

waarbij λ en $\bar{\lambda}$ samenhangen volgens (9). Evenzo geldt

$$\lambda_3(x_4, \xi_4; \omega) = \bar{\lambda}_4(\beta x_4, \beta \xi_4; \omega) \quad (96)$$

zodat (86) nu wordt

$$\bar{\lambda}_4(\beta x_4, \beta \xi_4; \omega) = m(x_4; \omega) m^*(\xi_4; \omega) \bar{\lambda}_1(\beta x_4, \beta \xi_4; \omega) \quad (97)$$

ofwel

$$\bar{\lambda}_4(u_1, u_2; \omega) = m\left(\frac{u_1}{\beta}; \omega\right) m^*\left(\frac{u_2}{\beta}; \omega\right) \bar{\lambda}_1(u_1, u_2; \omega). \quad (98)$$

Indien we de Fouriergetransformeerde van bovenstaande relatie nemen vinden we

$$\lambda_4(x_1, x_2; \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \bar{m}(a; \omega) \bar{m}^*(b; \omega) \lambda\left(x_1 + \frac{a}{\beta}, x_2 + \frac{b}{\beta}; \omega\right) da db \quad (99)$$

met \bar{m} de Fouriergetransformeerde van m volgens (2a). We nemen aan dat het signaal aan de ingang volledig incoherent is (58), waaruit achtereenvolgens volgt

$$\lambda_4(x_1, x_2; \omega) = \frac{\beta}{4\pi^2} \int \bar{m}(b - \beta x_1) \bar{m}^*(b - \beta x_2) \varphi\left(\frac{b}{\beta}; \omega\right) db \quad (100)$$

$$\begin{aligned} I_u(x) &= \lambda_4(x, x; 0) = \frac{\text{const} \beta^2}{4\pi^2} \int |\bar{m}(\beta(a-x))|^2 I_i(a) da \\ &= \frac{\text{const} \beta^2}{4\pi^2} I_i(x) * |\bar{m}(-\beta x)|^2 \end{aligned} \quad (101a)$$

met * het convolutieteken.

De beschrijving van het systeem volgens figuur 6 in de Wignertributievorm volgt uit (47b) en (29)

$$F_4(\alpha_4, u_4) = \frac{1}{2\pi} \int F_m \left(\frac{u_4}{\beta}, -(\beta\alpha_4 - \nu) \right) F_i \left(-\frac{\nu}{\beta}, u \right) d\nu \quad (102)$$

Uitgaande van deze relatie kan de intensiteitsrelatie bepaald worden [8], wederom onder aanname (58) uit

$$I_u(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int I_4(\alpha, \alpha; \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{1}{2\pi} \int F_4(\alpha, u; \omega) du \right\} d\omega \quad (103)$$

Ook nu volgt (101a) en de Fouriergetransformatie daarvan

$$I_u(\alpha) = \frac{\text{const} \beta^2}{4\pi^2} I_i(\alpha) * |\bar{m}|^{-\beta\alpha} \quad (101a)$$

$$\bar{I}_u(u) = \bar{I}_i(u) \left[m\left(\frac{u}{\beta}\right) * m^*\left(-\frac{u}{\beta}\right) \right]. \quad (101b)$$

Deze laatste vergelijking geeft aan dat in een opstelling volgens figuur 6 het intensiteitsspectrum van de ingang gefilterd wordt met de autocorrelatie van de modulatiefunctie. Hieruit volgt dat de plaatsing van het filter in het filtervlak willekeurig is. Verschuiving verandert immers de autocorrelatiefunctie niet.

2.4. Herhaling van het filter.

Aangezien de informatie in incoherent licht redundant is, en we zoals in het vorige hoofdstuk is aangetoond, de plaats van het filter willekeurig kunnen kiezen, is het mogelijk het filter een aantal malen herhaald in het filtervlak te plaatsen. We eisen dat zo'n herhaald filter dezelfde overdracht heeft als een enkel filter. We verwachten dat door herhaling het lichtverlies in het filtervlak beperkt kan worden.

Stel we willen een filterwerking $G_o(\frac{u}{\beta})$ hebben, die gerealiseerd kan worden door een modulatiefunctie $m_o(x)$ waarbij deze functie voldoet aan

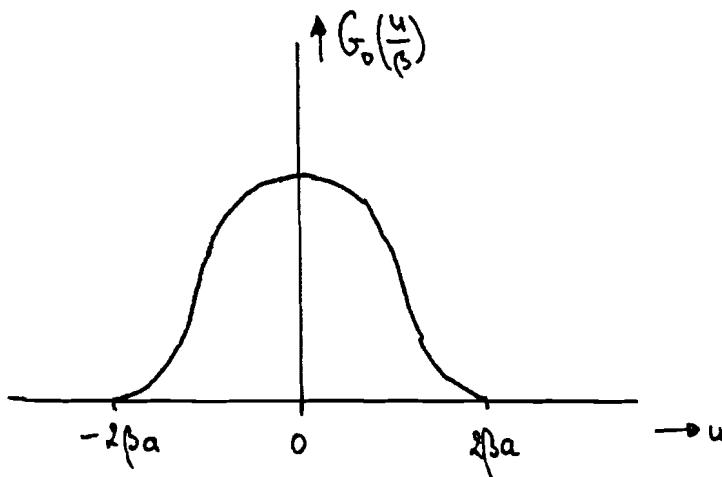
$$m_o(x) = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (103)$$

Het verband tussen $G_o(\frac{u}{\beta})$ en $m_o(x)$ wordt gegeven door de autocorrelatie (zie (101)) zodat

$$G_o\left(\frac{u}{\beta}\right) = \frac{\text{const} \beta}{2\pi} m\left(\frac{u}{\beta}\right) * m^*\left(-\frac{u}{\beta}\right) \quad (104)$$

$$\bar{I}_u(u) = G_o\left(\frac{u}{\beta}\right) \bar{I}_i(u) \quad (105)$$

$$G_o\left(\frac{u}{\beta}\right) = 0 \quad , \quad \text{voor } \left|\frac{u}{\beta}\right| > 2a. \quad (106)$$



Figur 7. Filterkarakteristiek $G_o(\frac{u}{\beta})$.

Herhalen van de modulatiefunctie $m_0(x)$ op afstanden $2b$, waarbij we veronderstellen dat $b > a$ geeft een nieuwe modulatiefunctie $m(x)$ volgens

$$m(x) = \sum_{n=-N}^N m_0(x - 2nb) \quad (107)$$

waarbij het filter $2N+1$ keer herhaald is.

We introduceren vervolgens de functie $G(u/\beta)$ behorende bij de modulatiefunctie $m(x)$, geheel analoog aan (104)

$$\begin{aligned} G\left(\frac{u}{\beta}\right) &= \frac{\text{const} \cdot \beta}{2\pi} \int \sum_{n=-N}^N m_0(x - 2nb + \frac{u}{\beta}) \sum_{i=-N}^N m_0^*(x - 2ib) dx \\ &= \sum_{k=-2N}^{2N} \{2N+1 - |k|\} A_k\left(\frac{u}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (108)$$

met

$$A_k(y) = \int m_0(x - 2kb + y) m_0^*(x) dx \frac{\text{const} \cdot \beta}{2\pi} \quad (109)$$

We merken op dat

$$A_0\left(\frac{u}{\beta}\right) = G_0\left(\frac{u}{\beta}\right) \quad (110)$$

We willen dat de filterwerking G alleen de term A_0 werkzaam is.

De andere termen zijn voor ons ongewenste filtertermen. We schrijven dan ook

$$\bar{I}_u(u) = \{2N+1\} A_0\left(\frac{u}{\beta}\right) \bar{I}_i(u) + \text{Resttermen} \quad (111)$$

en eisen dat deze restterm geen invloed heeft op het uitgangssignaal, dus

$$A_k\left(\frac{u}{\beta}\right) \bar{I}_i(u) \equiv 0 \quad \text{voor } k \neq 0 \quad (112)$$

ofwel

$$A_0 \left(\frac{u}{\beta} - k2b \right) \bar{I}_i(u) \equiv 0 \quad \text{voor } k \neq 0. \quad (113)$$

We nemen aan dat hetingangsspectrum een eindige bandbreedte Ω heeft (zie figuur 8)

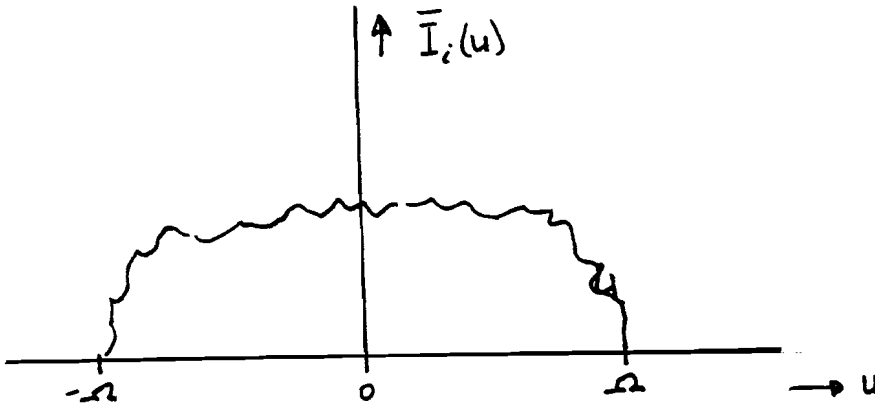
$$\bar{I}_i(u) = 0 \quad \text{voor } |u| > \Omega \quad (114)$$

en dus geeft (113) voor $|u| > \Omega$ direct het gewenste resultaat. Voor $|u| \leq \Omega$ moeten we eisen dat $A_0 \left(\frac{u}{\beta} - k2b \right)$ nul is ofwel met (106)

$$\left| \frac{u}{\beta} - k2b \right| > 2a \quad \text{voor } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2N. \quad (115)$$

Hieraan wordt voldaan indien

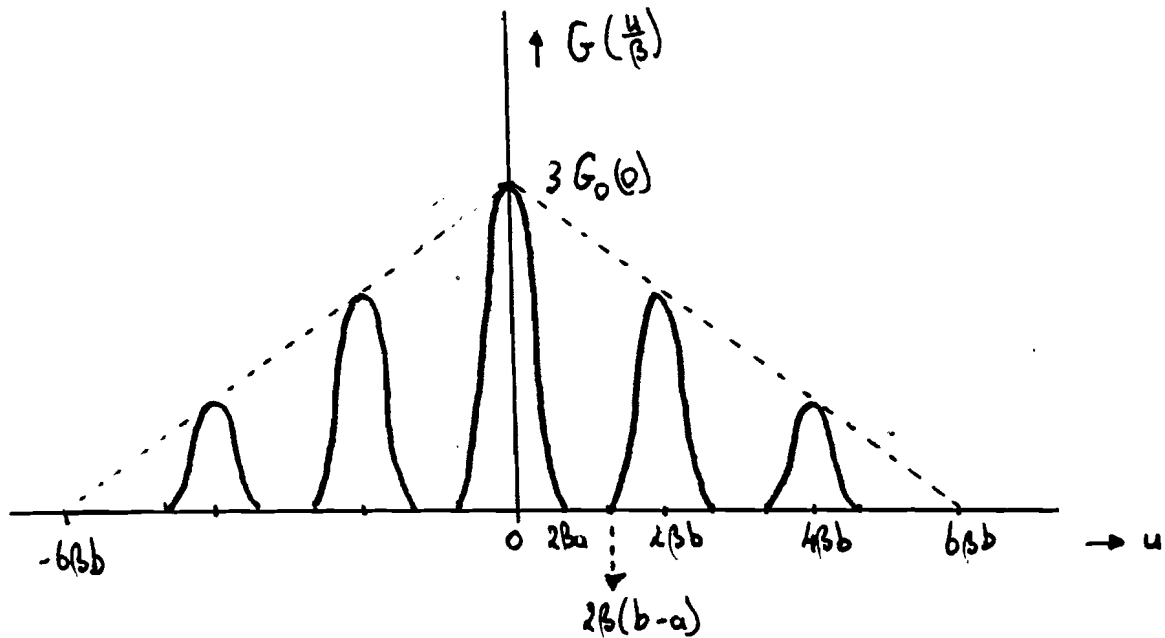
$$b > a + \frac{\Omega}{2\beta} \quad (116)$$



Figuur 8. Spectrum van de ingangs-intensiteitsfunctie.

Samenvattend betekent dit dat door een filterfunctie in het filtervlak te herhalen de lichtopbrengst aan de uitgang evenredig vergroot

wordt met het aantal herhalingen. Voorwaarde is wel dat in het ingangssignaal geen frekwenties u voorkomen die hoger zijn dan $2\beta(b-a)$, dit is evenredig met de afstanden tussen twee filters (zie figuur 9).



Figuur 9. Filterkarakteristiek van een herhaald filter, $N=1$.

In praktijk is het niet zo dat de lichtopbrengst willekeurig groot kan worden door N alsmaar groter te maken. Dit komt doordat de apertuur van de lenzen beperkt is, en doordat er geen volledig incoherent licht aan de ingang aanwezig is. Hierdoor is het signaal in het filtervlak niet plaatsstationair (vergelijk (61)) maar blijft beperkt tot een vlek. Dit houdt in dat N praktisch ook beperkt is. Boven een bepaald aantal heeft het geen zin meer filters herhaald te plaatsen omdat daar dan toch geen licht op valt.

2.5. Holografie.

2.5.1. Het interferentiepatroon.

Een hologram bestaat uit een laagje fotografisch materiaal van een zeer groot oplossend vermogen. In dit fotografische materiaal (emulsie) wordt een maat voor de hoeveelheid elektrische energie die het materiaal tijdens de opname treft, vastgelegd. Stel dat U de energiedichtheid is, dan is hiervoor te schrijven

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} \quad (117)$$

met ϵ de diëlektrische constante en $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ het elektrische veld ter plaatse \vec{r} op tijdstip t .

De gemiddelde waarde van U is

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U dt = \frac{1}{2} \epsilon \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle \quad (118)$$

Voor de intensiteit I_p op een bepaalde plaats geldt

$$I_p = \lambda \langle U \rangle = \frac{1}{2} \lambda \epsilon \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle \quad (119)$$

met λ de snelheid van het licht in het medium. We definiëren een nieuwe intensiteit I . Deze is evenredig met I_p , en heeft het voordeel dat bij toepassing van de complexe rekenwijze een eenvoudig verband bestaat met de complexe amplitudes van de signalen.

$$I = 2 \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle \quad (120)$$

Stellen we dat \vec{E} harmonisch in de tijd is, dan kunnen we de complexe rekenwijze toepassen volgens

$$\vec{E} = \vec{a} \cos(2\pi f t + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{a} e^{i\varphi} e^{i2\pi f t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{A} e^{i2\pi f t} \right\} \quad (121)$$

$$\vec{A} = \vec{a} e^{i\varphi} \quad (122)$$

Hiermee volgt

$$I = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{A} \cdot \vec{A}^* \quad (123)$$

Belichten we de emulsie gedurende een tijd t_e , dan is de energie

$$E = I_p t_e \sim I t_e \quad (124)$$

Voor de transmissie t van een belicht en ontwikkeld hologram geldt dat er naast een constante transmissieterm t_0 een term optreedt die evenredig is met het opgenomen patroon E

$$t = \frac{\text{licht amplitude uitgang}}{\text{licht amplitude ingang}} = t_0 - t_E = t_0 - kI \quad (125)$$

met k een evenredigheidsconstante.

Bij belichting met twee invallende bundels beschreven door de complexe voorstellingen

$$\vec{A}(x,y) e^{iu_1 x} \quad (126a)$$

$$\vec{a}(x,y) e^{iu_2 x} \quad (126b)$$

volgt

$$I = \{ \vec{A} \cdot \vec{A}^* + \vec{a} \cdot \vec{a}^* \} + \vec{A} \cdot \vec{a}^* e^{iu_0 x} + \vec{A}^* \cdot \vec{a} e^{-iu_0 x} \quad (127)$$

met

$$u_0 = u_1 - u_2 \quad (128)$$

2.5.2. De reconstructie-eigenschap.

Gebruiken we een aldus belicht en ontwikkeld hologram door er een bundel licht $\vec{B}(x,y)$ erop te laten vallen, dan ontstaan er een aantal te onderscheiden bundels achter dit hologram:

$$\text{nulde orde bundel : } [t_0 - k_0 \{ \vec{A} \cdot \vec{A}^* + \vec{a} \cdot \vec{a}^* \}] \vec{B}(x,y) \quad (129a)$$

$$\text{eerste orde bundel : } k_1 (\vec{A}^* \cdot \vec{a}) e^{i u_0 x} \vec{B}(x,y) \quad (129b)$$

$$\text{eerste orde geconjugeerde bundel : } k_{1*} (\vec{A} \cdot \vec{a}^*) e^{-i u_0 x} \vec{B}(x,y) \quad (129c)$$

Naast dit drietal ontstaan er nog hogere orde bundels ten gevolge van niet-lineariteiten [9]. Indien u_1, u_2 in (126) dan komen de twee opnamebundels uit verschillende richtingen. In dat geval is u_0 ongelijk aan nul, en gaan de verschillende orde bundels in verschillende richtingen. Men spreekt van "off-axis" hologrammen.

Dat er in (129) verschillende constanten gebruikt worden, terwijl er in (125) slechts een constante k is ingevoerd, stoelt op experimentele waarnemingen. We komen hier later op terug (3.2. De efficiëntie van hologrammen m.b.t. de hoekstand).

Het gebruik van holografische elementen berust veelal op de eigenschap dat een van de opnamebundels gereconstrueerd kan worden. Immers kiezen we

$$\vec{B}(x,y) = \frac{\vec{a}}{(\vec{a} \cdot \vec{A})} e^{i u_0 x} \quad (130)$$

dan wordt de opnamebundel $a(x,y) e^{i u_0 x}$ gereconstrueerd op een constante na. In vele gevallen wordt $\vec{A}(x,y)$ gekozen als een egale vlakke golf $\vec{A}(x,y) = \vec{A}$. In deze bundel zit dan geen informatie. De reconstructie van de andere opnamebundel vindt dan eveneens plaats met een egale vlakke bundel. We noemen $\vec{a}(x,y)$ de informatiedragende golf.

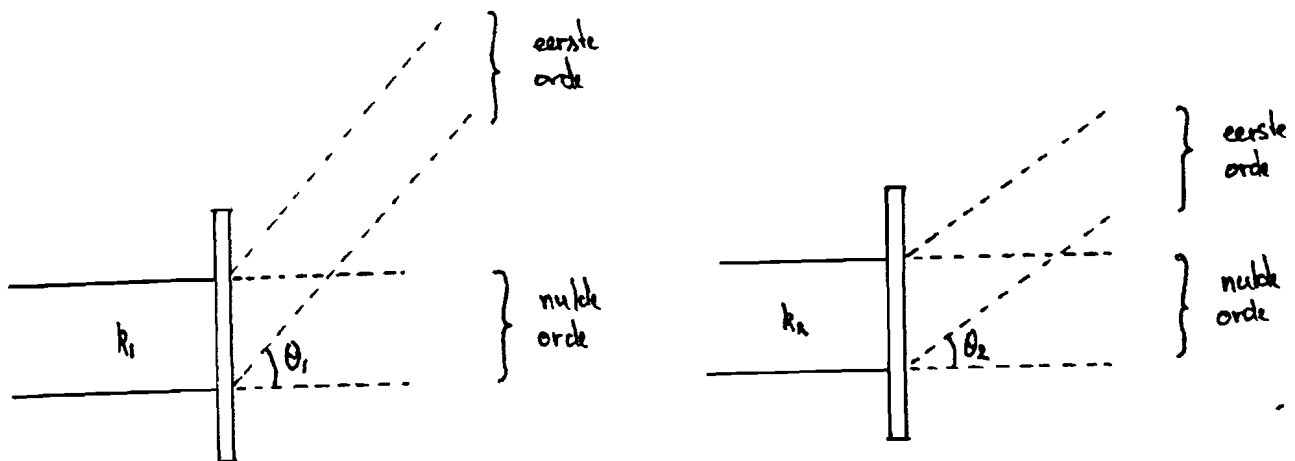
Meestal is de polarisatie-richting van \vec{A} en \vec{a} lineair en gelijk. Dan vervallen alle inproducten tot gewone vermenigvuldigingen.

2.5.3. De kleurschifting.

Wordt een ontwikkeld hologram belicht met een bundel $\vec{E}(x, y)$ van een willekeurige kleur, gekenmerkt door k , dan is de hoek θ die de eerste orde bundel met de nulde orde bundel maakt gegeven door

$$\sin \theta = \frac{u_0}{k} \quad (131)$$

oftewel $\theta = \theta(k)$. Er treedt kleurschifting op: de eerste orde bundel waaiert uiteen in verschillende kleuren van bundels indien met meerdere kleuren het hologram belicht wordt (zie figuur 10).



Figur 10. Kleurschifting.

De verandering van richting als gevolg van het off-axis karakter van de hologrammen is eenvoudig in de Wigner distributie te verwerken, immers

$$\begin{aligned} F(x, u) &\longleftrightarrow f(x) \\ F(x, u - u_0) &\longleftrightarrow f(x) e^{i u_0 x} \end{aligned} \quad (132)$$

met \longleftrightarrow duidend op de Wigner distributierelatie (12).

Voor de berekening van de werking van een hologram kan eerst de werking ten gevolge van $(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})$ in rekening gebracht worden, en dan de kleurschifting volgens (132) of omgekeerd. Dit komt doordat we aanemen dat de werking van een hologram zich in een vlak afspeelt.

2.5.4. Raster en zoneplaatje.

Er zijn twee eenvoudige maar belangrijke vormen van hologrammen. Dit zijn het raster en het zoneplaatje.

Het raster wordt gegeven door

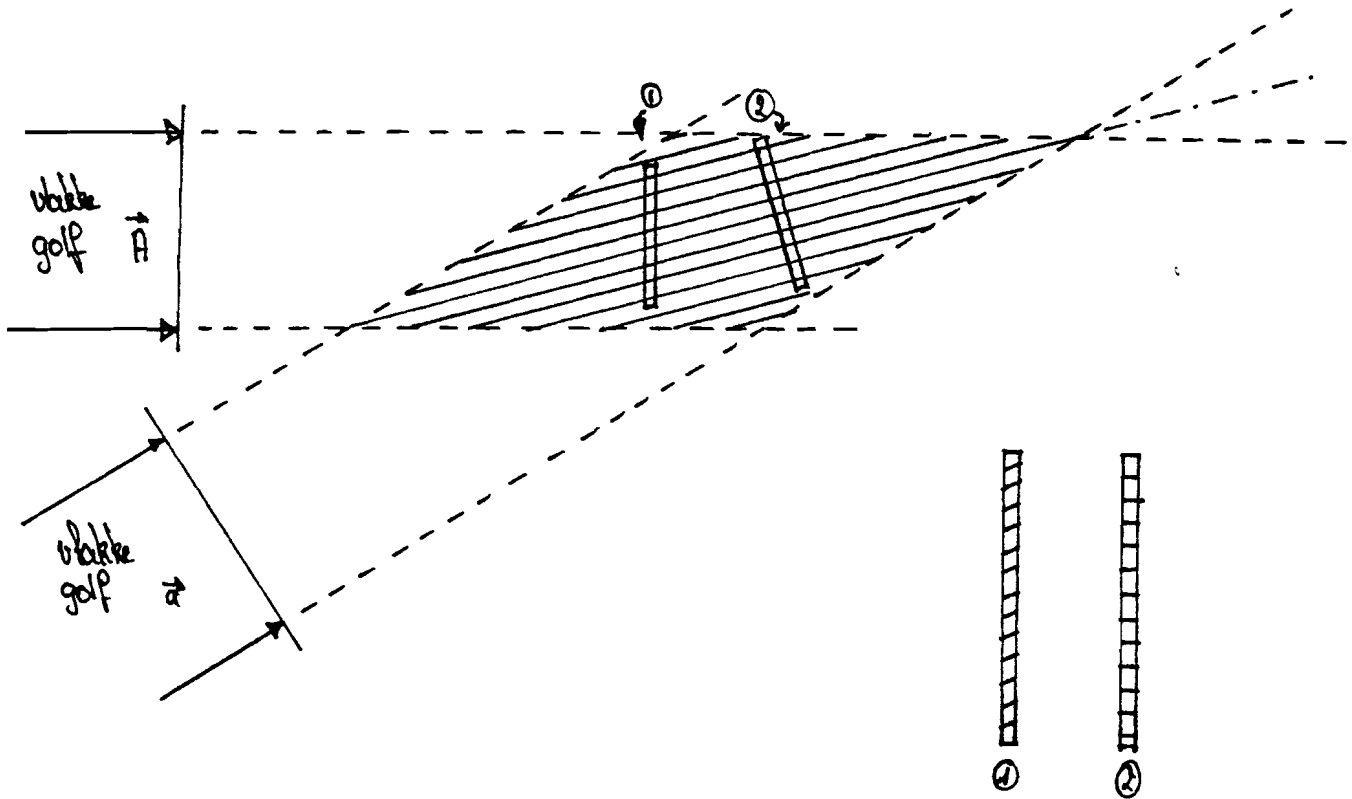
$$\begin{aligned} \vec{A}(x, y) &= \vec{A} \\ \vec{\sigma}(x, y) &= \vec{\sigma} \end{aligned} \quad (133)$$

Figuur 11 geeft een schets van het vastgelegde patroon in de emulsie voor twee standen van het hologram tijdens de opname. ① is loodrecht op de referentiebundel, bij ② maakt het hologram een hoek ψ met de referentiebundel waarbij ψ precies de helft is van de hoek tussen de twee opnamebundels.

Voor u_0 is zowel de hoek tussen de twee bundels alsook de stand van het hologram van belang, want

$$u_0 = u_1 - u_2 = k_0 (\sin \psi_1 - \sin \psi_2) \quad (134)$$

waarbij ψ_1 de hoek is tussen de referentiebundel en het hologram en ψ_2 de hoek tussen de informatiebundel en het hologram (zie figuur



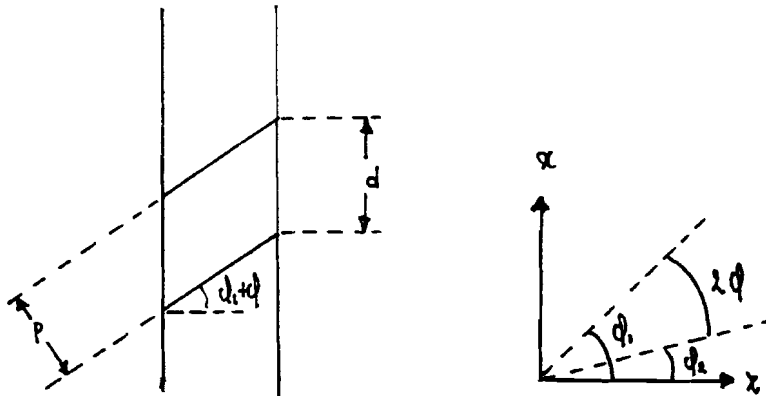
Figur 11. Het interferentiepatroon voor een raster.

12). Er geldt

$$2\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (135)$$

en voor afstanden d tussen de donkerste lijnen in de emulsie, gemeten langs het hologram

$$d = \frac{P}{\cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi \cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2} \quad (136)$$



Figuur 12. Interferentiepatroon en oriëntatie.

Het patroon vastgelegd in de emulsie kan nu, indien we de dikte (de z-richting) van de emulsie verwaarlozen, weergegeven worden door

$$t(x) = 1 + \cos(\Lambda x) \quad (137)$$

$$\Lambda = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \phi_1 - \sin \phi_2) = u_0 \quad (138)$$

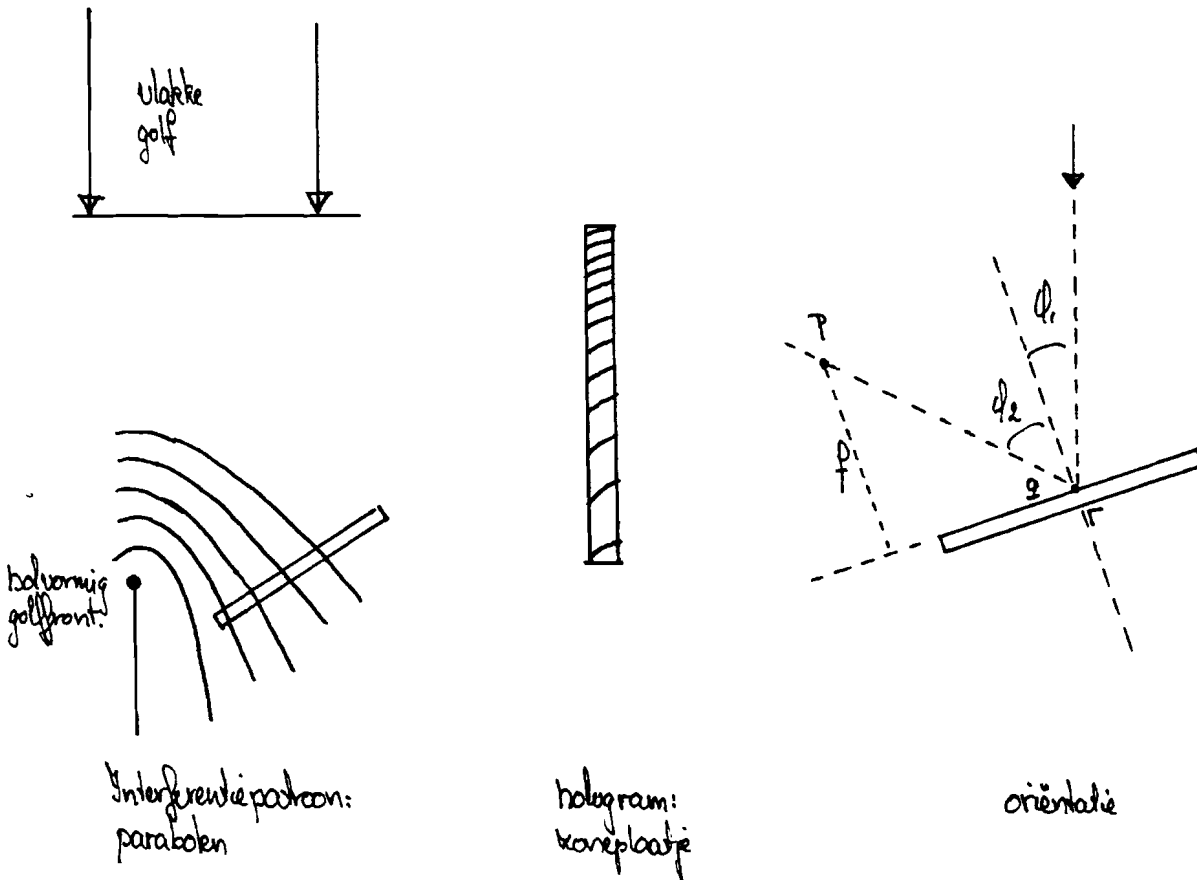
De bijbehorende Wigner distributie is al in een voorbeeld uitgerekend (zie (37)). We zien dat het raster, of althans een term van de werking van het raster ervoor zorgt dat de bundel afgebogen wordt zonder dat de informatie veranderd wordt.

Het zoneplaatje wordt gegeven door

$$\vec{A}(x, y) = \vec{A} \exp \left\{ \pm i \frac{k_0}{2f_0} x^2 \right\} \quad (139)$$

$$\vec{a}(x, y) = \vec{a}$$

Figuur 13 geeft een schets van het vastgelegde patroon in de emulsie. Dit patroon bestaat uit parabolen.



Figuur 13. Interferentiepatroon voor een zoneplaat.

Invullen van (139) in (129b) laat meteen zien wat er gebeurt: het zoneplaatje werkt als een lens. Een loodrecht invallende bundel wordt een convergerende dan wel divergerende bundel. De brandpuntsafstand is kleurafhankelijk volgens

$$\begin{aligned}
 f(\lambda) &= f_0 \frac{b}{\lambda_0} \\
 f(\lambda) &= f_0 \frac{d_0}{\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{140}$$

De matrixbeschrijving in de Wigner distributie kan met enig rekenwerk gevonden worden. Voor een transmissie

$$t(x) = 1 + \cos\left(\frac{k_0}{\lambda f_0} x^2 + u_0 x\right) \quad (141)$$

volgt dat (zie appendix 2)

$$F_z(x, u) = 2\pi \delta(u) + \frac{1}{2} \pi \left[\delta\left(\frac{k_0}{f_0} x + u_0 + u\right) + \delta\left(\frac{k_0}{f_0} x + u_0 - u\right) \right] \\ + 4 \sqrt{\pi} \frac{p_0}{k_0} \cos(2xu) \cos\left[\frac{p_0 u^2}{k_0} + \frac{p_0 u_0^2}{\lambda k_0} - \frac{\pi}{4}\right] + \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{p_0}{k_0}} \cos\left[x \frac{k_0}{f_0} + 2u_0 x - \frac{p_0 u^2}{k_0} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (142)$$

Uit de tweede en derde term volgt de gewenste lenswerking met een matrixbeschrijving

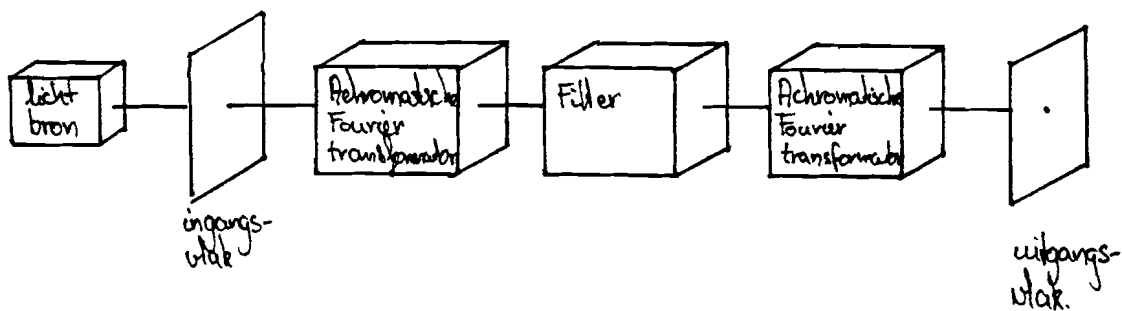
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{k_0}{f_0} & 1 \end{pmatrix} \quad (143)$$

Het plusteken in (143) staat voor de convergerende eerste orde bundel, ontstaan uit de tweede term van (142).

Uit de tekening volgt dat het belangrijk is om q te kennen. De keuze van q dikteert zowel u_0 alsmede de factor p_0/k_0 indien $p-q$ als constante afstand wordt genomen. Hieruit volgt dat de afbuiging van het zoneplaatje in het latere gebruik afhankelijk is van de plaats waarop de bundel valt. De beschrijving van de achromatische transformator gaat eigenlijk alleen maar op voor dit punt q . Dit punt nemen we in de latere filteropstelling zo goed als mogelijk op de optische as, zodat afwijkingen ten opzichte van eerdere berekeningen geminimaliseerd worden.

2.6. Filters en computergegenereerde hologrammen.

Voor een flexibele werking van het filtersysteem (zie figuur 14) is het gewenst dat in de filtersectie ieder mogelijk filter aangebracht kan worden.



Figuur 14. De filteropstelling.

Eenvoudige filters bestaan uit een modulatiefunctie gekenmerkt door

$$g(x, \xi) = m(x) \delta(x - \xi) \quad (85)$$

zodat er gefilterd wordt volgens (101). De realisatie van een willekeurige modulatiefunctie is in vele gevallen slechts holografisch mogelijk. De moeilijkheid ligt dan in het fysisch realiseren van het gewenste golffront $a(x, y)$, benodigd voor het maken van de transmissie $t(x, y)$ zoals gegeven in het hoofdstuk holografie. Deze transmissie is evenredig met de intensiteit volgens

$$I(x, y) = |a|^2 + |A|^2 + a^*(x, y) A e^{i u_0 x} + a(x, y) A^* e^{-i u_0 x} \quad (144)$$

Met de gebruikelijke optische elementen blijft men ruwweg beperkt tot het maken van vlakke, convergente dan wel divergente golffronten. Men realiseerde al vroeg dat het maken van patronen zoals vastgelegd in de emulsie ook via andere wegen mogelijk moet zijn. Indien we een gewenst patroon vergroot door een plotter laten uittekenen, dan kunnen we daarmee, na een fotografische verkleining, en na het vastleggen van deze verkleining in een hologram, precies de gewenste werking het gewenste filter verkrijgen.

Het patroon dat op deze manier vastgelegd kan worden is niet meer afhankelijk van een fysisch te realiseren golffront, maar voldoende is nu een mathematische beschrijving. We stuiten echter bij het maken van zulke hologrammen op andere problemen. Ten eerste is er de beperking van het ruimte-bandbreedteproduct. Dit product ligt voor natuurlijke hologrammen rond de 10^6 en bij een hologram gemaakt op een plotter rond de 10^3 à 10^4 . Een tweede is de lage efficiëntie van deze hologrammen, en als laatste de lage dragerfrequentie.

Onderzocht dient te worden of hologrammen met deze eigenschappen voldoen aan de eisen die gesteld moeten worden aan filters voor de eerder geschetste filteropstelling. Voornaamste probleem hierbij is het ruimte-bandbreedteproduct. Om enig inzicht in de problematiek van computerhologrammen te krijgen, zullen we het productieproces bekijken. Hierin kunnen we de volgende stappen onderscheiden:

- berekenen en coderen van de gewenste informatie
- tekenen van een vergroot hologram
- verkleinen van het geplotte hologram
- controleren van de verkleining op de schaalverandering
- bewerken van het hologram: maken van een natuurlijk hologram met een hogere dragerfrequentie en een grotere efficiëntie.

In dit hoofdstuk zullen we ingaan op de eerste stap: het berekenen en coderen. Later (zie 3.5.) nemen we de andere stappen in beschouwing.

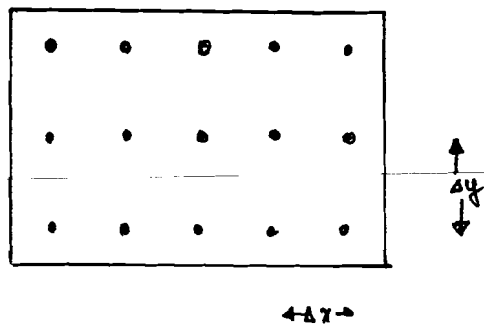
2.6.1. Representatie van het patroon.

Er zijn twee te onderscheiden klassen van computerhogrammen. De eerste berust op het representeren van de informatie in cellen. De tweede vertoont sterke overeenkomsten met interferogrammen.

Bij het eerste type hogrammen wordt uitgegaan van het bemonsteringstheorema. Indien een functie op equidistante afstanden met een frekwentie van minstens tweemaal de maximale frekwentie die in die functie voorkomt, wordt bemonsterd, dan is het mogelijk om het signaal volledig te reconstrueren uit de bemonsterde data. Toegepast op de overdracht van een modulatiefunctie betekent dit dat we slechts de overdracht van $t(x,y)$ op een aantal discrete punten behoeven te kennen (zie figuur 15). Voor de afstanden tussen de bemonsteringspunten moet gelden

$$\frac{1}{\Delta x} \geq 2 \Omega_x \tag{145}$$

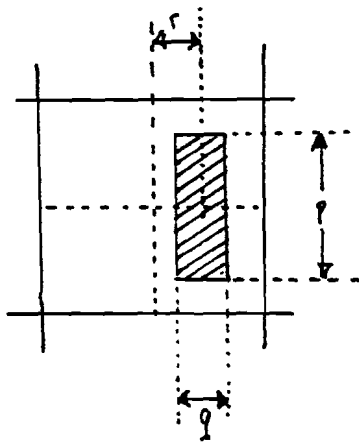
met Ω_x de maximale frekwentie van $t(x,y)$. Idem voor de y-richting.



Figuur 15. De bemonsteringspunten.

We delen nu het vlak van het hogram op in cellen rond de bemonsteringspunten. Binnen deze cellen moet nu de bemonsterde complexe waarde gerepresenteerd worden. Dit kan op verschillende manieren.

Het Lohmann-hologram [10] (detour-phase hologram). In plaats van een deltafunctie die we theoretisch zouden moeten gebruiken bij het representeren van de data, nemen we binnen de cel een apertuur. De grootte van de apertuur maken we evenredig met de amplitude van de bemonsterde waarde. Omdat de uittredende eerste orde bundel schuin het hologramvlak verlaat, kunnen we de apertuur zodanig schuiven dat de fase van de golf in het midden van de apertuur gelijk is aan de fase van het bemonsterde complexe getal.



Figuur 16. Het Lohmann-hologram.

Stel de bemonsterde waarde $A e^{i\phi}$ dan is (zie figuur 16)

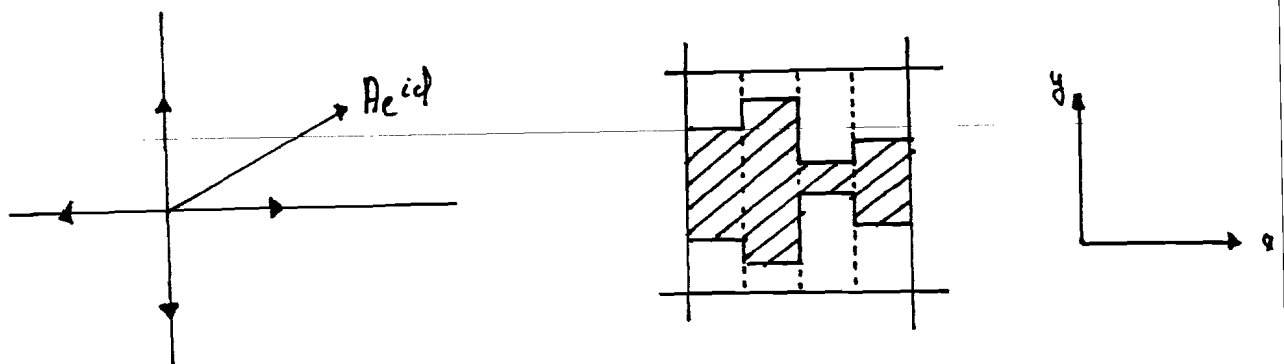
$$\begin{aligned} p \cdot q &\sim A \\ \frac{r}{\Delta x} &= \frac{d}{2\lambda} \end{aligned} \tag{146}$$

Zowel door het gebruik van aperturen, als door het verschuiven daarvan wordt in principe niet meer voldaan aan het bemonsterings-theorema. De benadering van een deltafunctie door een apertuur, en

het feit dat de plotters met een eindig klein increment werken (hetgeen betekent dat de apertuurgrootte p, q gekwantiseerd is) leidt tot een aantal stoortermen. Deze zijn in de literatuur uitgebreid geanalyseerd [11,12].

Lohmann gaf nog een verbetering van deze versie van computerhologrammen. Het midden van de apertuur ligt niet op de plaats waar bemonsterd is. Dit kan verbeterd worden door in de cel die plaats te zoeken waar de fase van de waarde van $t(x,y)$ gelijk is aan de fase van de schuin uitvallende golf. Een mathematische onderbouw voor deze methode is te vinden in [13]. Merk op dat er nog steeds niet equidistant bemonsterd wordt.

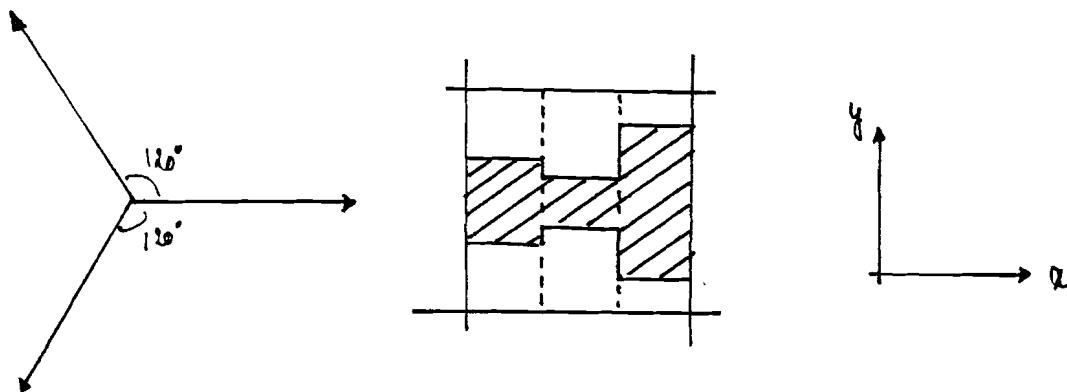
Een tweede manier om computerhologrammen te maken werd door Lee geïntroduceerd [14]. Hij merkte op dat een complexe vector ontbonden kan worden in vier vectoren langs de reële en imaginaire assen. Al deze vier fasen zijn binnen een cel te vinden; de cel wordt in vier gedeeltes onderverdeeld waarbij de grootte van de aperturen de grootte van de amplitudes van de ontbonden vectoren representeert (zie figuur 17). De onderlinge verhoudingen van de vier apertuurgroottes geeft de fase.



Figuur 17. De Lee-hologrammen.

De plaats van de aperturen ligt in dit codeerschema vast. Het bemonsteringstheorema wordt in dit opzicht geen geweld aan gedaan. Wel betekent dit praktisch dat de ruimte-bandbreedte met een factor vier verkleind is ten opzichte van de Lohmann-hologrammen. Dit is een verdere beperking van het toch al beperkte SBWP. (space-bandwidth-product).

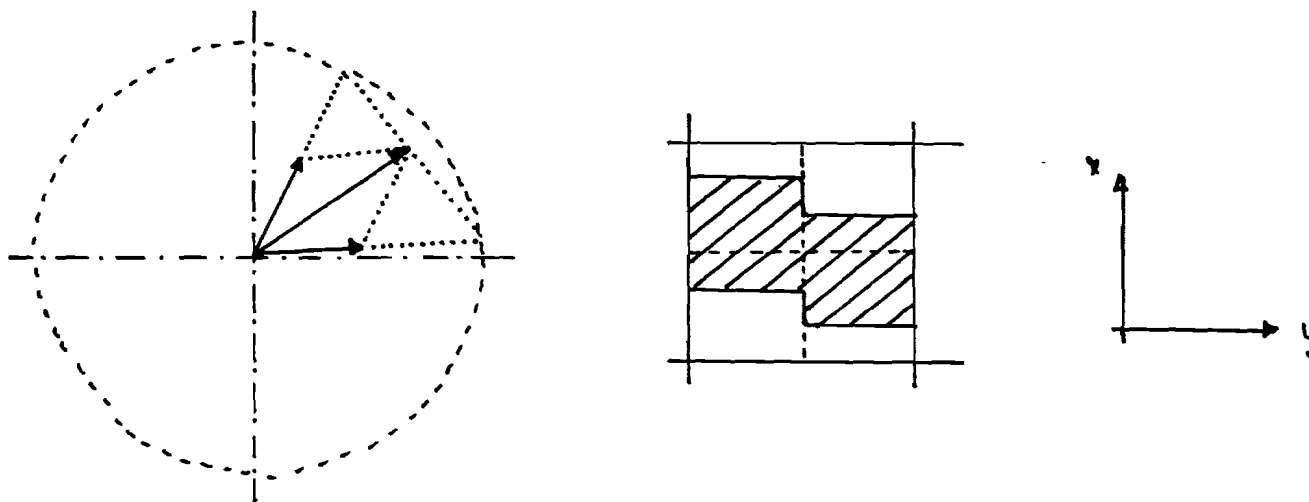
Burckhardt [15] merkte op dat het voldoende is om een complexe vector te ontbinden in drie vectoren, 120° in fase verschoven (zie figuur 18). Dit vergroot het SBWP ten opzichte van dat van de Lee-hologrammen. Ook nu is er geen eenduidige ontbinding van een willekeurige complexe vector.



Figuur 18. Het Burckhardt-hologram.

Nog een ander type is het Hsueh-Sawchuk hologram [6] (dubbel-fase hologram). We gaan uit van te representeren complexe vectoren binnen of op de eenheids cirkel. Deze kunnen ontbonden worden in twee vectoren met norm $\frac{1}{2}$ (zie figuur 19). Van deze twee vectoren behoeft nu

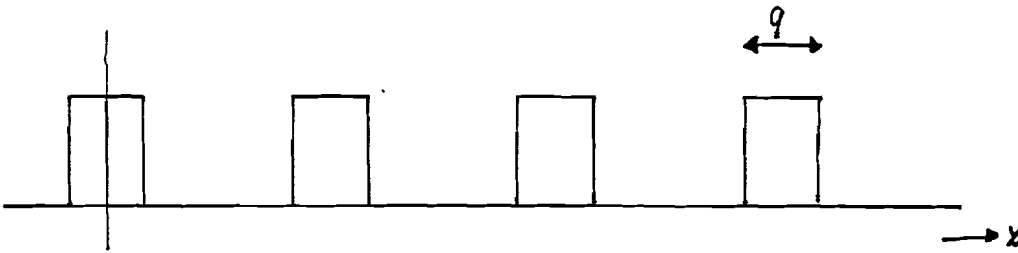
slechts de fase vastgelegd te worden. Dit wordt door verschuiven van de twee aperturen ten opzichte van de middellijn in de cel gedaan.



Figuur 19. De Hsueh-Sawchuk hologrammen.

Bij alle celgeöriënteerde hologrammen treedt zowel diffractie op in de x- als in de y-richting. In de hierboven getekende figuren treedt de gewenste diffractie steeds op in de x-richting.

Het tweede type computerhologrammen vertoont veel overeenkomsten met interferogrammen [17]. Een natuurlijk hologram bestaat uit een stelse van meer dan wel minder licht-doorlatende lijnen. Indien we zo'n patroon op een film vastleggen, onder gebruikmaking van het niet-lineaire gedeelte (clippen), dan ontstaan donkere en lichte lijnen met een groot contrast. Dit effect is te benaderen met een computer door de zwarting in twee nivo's te veronderstellen: geheel licht-doorlatend en geheel licht-absorberend. Dit wordt "hard-clipped" genoemd.



Figuur 20. Reeks pulsen.

We bekijken een reeks pulsen (zie figuur 20). Hiervoor geldt

$$h(x) = \sum_m \frac{\lambda \sin m \pi q}{m \pi} \exp \{ i 2 \pi m x \} \quad (147)$$

Variëren we nu de afstand tussen de pulsen en ook de pulsbreedte door te stellen

$$\begin{aligned} q &= q(x, y) \\ x &= x(x, y) \end{aligned} \quad (148)$$

$$h(x, y) = \sum \frac{\lambda \sin m \pi q(x, y)}{\pi m} \exp \{ i m 2 \pi x(x, y) \}$$

dan hebben we de mogelijkheid om $h(x, y)$ willkeurig te variëren. Kiezen we bv.

$$2 \pi x = u_0 - \varphi(x, y) \quad (149)$$

$$\lambda \sin \{ \pi q(x, y) \} = a(x, y) \quad (150)$$

dan treedt voor $m=1$ het gewenste golffront op $a(x, y)$

Binnen de computerhogrammen zijn nog meer variaties mogelijk. De belangrijkste zijn echter hierboven behandeld. Voor een goed overzicht zie [18] of [19]. Afgezien van de fouten die optreden door de benaderingen in de berekeningen zoals hierboven gedaan, is het grootste probleem het plotten. Willen we een functie vastleggen met beperkte afmetingen, en beperkte bandbreedte

$$t(x,y) = 0 \quad \text{voor } |x| > X, |y| > Y \quad (151)$$

$$T(\sigma,u) = \mathcal{F}\{t(x,y)\} \approx 0 \quad \text{voor } |\sigma| > \Omega_x, |u| > \Omega_y \quad (152)$$

dan hebben we een bepaald ruimte-bandbreedte product nodig ter grootte

$$SBWP = \frac{1}{2\pi} X \Omega_x \quad (153)$$

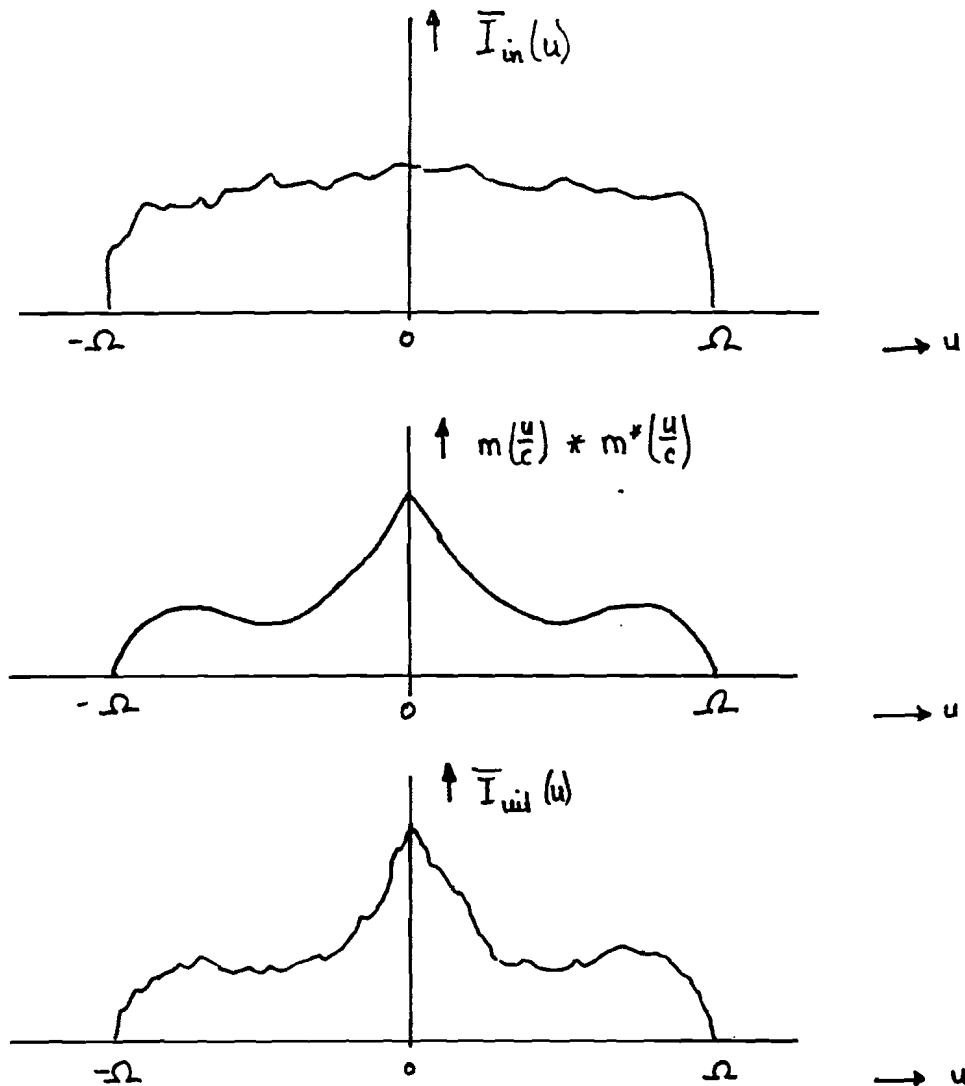
Dit product verandert niet bij vergroting of verkleining van het beeld. Dit betekent dat we altijd een minimaal aantal punten nodig hebben om de functie goed te kunnen benaderen. Dit aantal punten is precies het SBWP.. Voor natuurlijke hogrammen ligt dit product rond 10^6 (afmetingen van het hogram 10cm, frekwentie in het visuele gebied). Voor plotters is dit aanzienlijk kleiner. We gaan hier later op in (3.5.). Allereerst bekijken we het ruimte-bandbreedte product van een modulatiefunctie.

2.6.2. Ruimte-bandbreedte product van een modulatiefunctie $m(x)$.

Voor de algehele overdracht van de filteropstelling geldt

$$\bar{I}_o(u) = \frac{\text{const}}{2\pi} \bar{I}_i(u) \left[m\left(\frac{u}{\beta}\right) * m^*\left(-\frac{u}{\beta}\right) \right] \quad (154)$$

We stellen dat $\bar{I}_i(u) = 0$ voor $|u| > \Omega$ (zie figuur 21).



Figur 21. Frekventiekarakteristieken in de filteropstelling.

i. Ruimtelijke begrenzing van de modulatiefunctie.

Definieer $f(u)$ door

$$f(u) = m\left(\frac{u}{\beta}\right) * m^*\left(-\frac{u}{\beta}\right) \quad (155)$$

ofwel $f(u)$ is de autocorrelatiefunctie van de modulatiefunctie m .

We kunnen $f(u)$ nul stellen voor $|u| > \Omega$. We stellen dat iedere met bovenstaande eigenschappen, gerealiseerd kan worden met een modulatiefunctie $m(\frac{u}{\beta})$ met

$$m\left(\frac{u}{\beta}\right) = 0 \quad \text{voor} \quad |u| > \frac{1}{2}\Omega \quad (156)$$

We voeren y in

$$y = \frac{u}{\beta} \quad (157)$$

waarmee y de ruimtecoördinaat is in het fysische filtervlak. Er geldt dat de maximale waarde Y van y gegeven wordt door

$$Y = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\beta} \quad (158)$$

ii. Frekwentiebegrenzing.

Aannemende dat $m(\frac{u}{\beta})$ continu is, geldt vanwege de convolutieoperatie dat $f(u)$ een differentieerbare functie is (eventueel met uitzondering van de oorsprong). We stellen dat we slechts geïnteresseerd zijn inbegrensde variaties in de filterfunctie $f(u)$ ofwel

$$\frac{d}{du} f(u) \leq \frac{A}{\Omega} \quad (159)$$

waarbij A een dimensieloos getal is, en de genormaliseerde helling in de filterfunctie representeert. De Bernstein ongelijkheid [20] zegt dat indien een functie $g(x)$ met een maximale functiewaarde M en een maximale frekwentie $\frac{1}{\Omega}$, de maximale helling van deze functie gegeven wordt door het product van deze twee waarden en de faktor

$$\left(\frac{d g(x)}{dx}\right)_{\max} = 2\pi \frac{1}{\Omega} M \quad (160)$$

Omgekeerd stellen we dat voor het realiseren van een functie $f(u)$ met een maximale helling A/Ω , we geen frekwenties ω in het frekwentiespectrum $F(\omega)$ nodig hebben die wezenlijk groter zijn dan deze waarde A/Ω (we hebben hierbij $M=1$ genomen). Het frekwentiespectrum is als gebruikelijk gedefinieerd

$$F(x) = \int f(u) e^{-iux} du \quad (161)$$

zodat de faktor e^{-iux} verder niet voorkomt. Omdat

$$F(x) = |\bar{m}(\beta x)|^2 \quad (162)$$

geldt dat het frekwentiespectrum van de modulatiefunctie ook beperkt is volgens

$$\bar{m}(\beta x) = 0 \quad \text{voor } |x| > \frac{A}{\Omega} \quad (163)$$

ofwel

$$\bar{m}(a) = 0 \quad \text{voor } |a| > \frac{\beta A}{\Omega} \quad (164)$$

$$a_{\text{max}} = \frac{\beta A}{\Omega} \quad (165)$$

Het ruimte-bandbreedte product van het filter wordt nu gegeven door

$$\text{SBWP}_{\text{filter}} = \gamma \cdot \frac{a_{\text{max}}}{2\pi} = \frac{A}{4\pi} \quad (166)$$

2.7. Beeldsubtractie.

In een vorig hoofdstuk (2.3) is al afgeleid dat de filterfunctie in de incoherente optica beperkt blijven tot systemen met een niet-negatieve reële impulsresponsie want

$$I_o(x) = \text{konst} \int I_i(\xi) |g(x, \xi)|^2 d\xi \quad (167)$$

met $g(x, \xi)$ de overdrachtsfunctie zoals gebruikt in de coherente systeem-analyse. Indien een methode gevonden kan worden om intensiteiten van elkaar af te trekken, dan kan een veel groter arsenaal aan filterfuncties gerealiseerd worden. Immers stel

$$\bar{I}_{o,1}(u) = F_1(u) \bar{I}_{in}(u) \quad (168)$$

$$\bar{I}_{o,2}(u) = F_2(u) \bar{I}_{in}(u) \quad (169)$$

$$\bar{I}_o(u) = \bar{I}_{o,1}(u) - \bar{I}_{o,2}(u) = \{F_1(u) - F_2(u)\} \bar{I}_{in}(u) \quad (170)$$

$$F_{eff}(u) = F_1(u) - F_2(u) \quad (171)$$

Indien $F_1(u)$ en $F_2(u)$ de Fouriergetransformeerden van niet-negatieve reële impulsresponsies $f_1(x)$ resp. $f_2(x)$ zijn, dan is $f_{eff}(x)$ waarvoor geldt

$$f_{eff}(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (172)$$

niet onderhevig aan de restrictie van niet-negatief zijn.

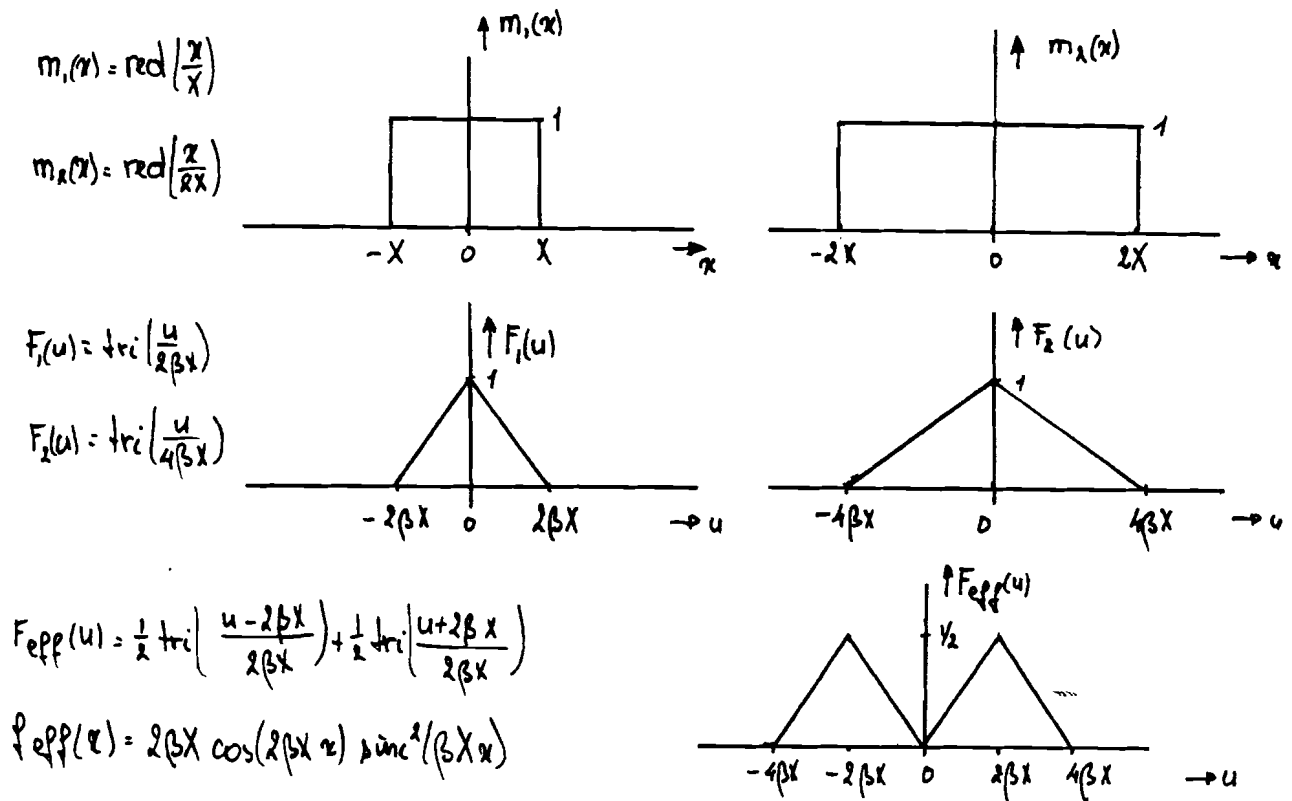
Voor het filtersysteem geldt

$$F_1(u) = m_1 \left(\frac{u}{\beta} \right) * m_1^* \left(-\frac{u}{\beta} \right) \quad , \quad f_1(x) = |m_1(\beta x)|^2 \quad (173)$$

$$F_2(u) = m_2 \left(\frac{u}{\beta} \right) * m_2^* \left(-\frac{u}{\beta} \right) \quad , \quad f_2(x) = |m_2(\beta x)|^2 \quad (174)$$

$$F_{eff}(u) = F_1(u) - F_2(u) \quad , \quad f_{eff}(x) = |m_1(\beta x)|^2 - |m_2(\beta x)|^2 \quad (175)$$

Het is nu mogelijk om filters te maken die geen laagdoorlaat- karakteristiek hebben. Als voorbeeld zie figuur 22.



Figur 22. Effectieve karakteristieken bij beeldsubstractie.

Zo is het mogelijk om iedere reële impulsresponsie te splitsen in twee gedeeltes volgens

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f_+(x) - f_-(x) \\
 f_+(x) &\geq 0 \\
 f_-(x) &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{176}$$

Deze twee impulsresponsies kunnen nu afzonderlijk gerealiseerd worden.

Het eenvoudigst is om voor (176) te nemen

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \quad (177)$$

zie [21], waar dit schema gebruikt wordt om "blur" te verwijderen.

Merk op dat nu de impulsresponsie negatieve gedeeltes mag hebben, de uitgangsimpulsintensiteit ook negatief kan worden. Elektronische subtractie heeft hier geen problemen mee: er kan een "bias" toegevoegd worden, of alle negatieve signalen kunnen nul gemaakt worden. Optisch is dit natuurlijk wél een probleem. Afhankelijk van de methode die gebruikt wordt om een optische subtractie door te voeren, zal dit probleem anders bewerkt worden. Al met al betekent dit dat een simpele vergelijking volgens (178) in zoverre misleidend is, dat er in ieder geval méér aan de hand is.

$$F_{\text{eff}}(u) = F_1(u) - F_2(u) \quad (178)$$

Eisen die aan een beeldsubtractie mechanisme gesteld mogen worden om voor ons interessant te zijn, zijn drieërlei. Gezien de opstelling eisen we een systeem dat werkt met ruimtelijk incoherent en polychromatisch licht. Bovendien stellen we de eis van een real-time werking. Doen we dit laatste niet, dan vervallen veel voordelen van de eerder geschetste filteropstelling ten opzichte van een digitaal beeldverwerkingsysteem.

Over optische optel/aftreksystemen verscheen in 1975 een overzichtsartikel [22]. Hierin stond geen systeem vermeld dat aan bovenstaande drie eisen voldeed. Het aantal publikaties sindsdien op dit gebied is vrij beperkt. Er verscheen een artikel van Yu en Tai [23] dat real-time werkt, maar wel ruimtelijke coherentie vereist. Dit systeem werkt met temporeel incoherent licht, maar de gebruikte bandbreedte is sterk beperkt. Indien de Fouriertransformatoren die in het daar beschreven systeem gebruikt worden, vervangen zouden worden door achromatische Fouriertransformatoren, zou de bandbreedte sterk vergroot worden.

Een vervolgartikel hierop [24] is een systeem beschreven voor ruimtelijk incoherent licht en wederom een real-time mechanisme. Het ruimtelijk incoherente karakter van het licht wordt eerst door een multispleet systeem gecodeerd tot een partieel coherent karakter. De mate van coherentie in een richting kan op deze manier geregeld worden, en is voldoende om een subtractie uit te voeren. Het systeem werd beschreven als een monochromatisch systeem. Door wederom de Fouriertransformatoren in dit systeem te vervangen door achromatische Fouriertransformatoren, moet dit systeem een beeldsubtractie kunnen uitvoeren dat aan de drie gestelde eisen voldoet. Negatieve intensiteitswaarden in het uitgangsbild worden van teken verandert zodat in feite de volgende operatie wordt uitgevoerd

$$I_o(x) = | I_{o,1}(x) - I_{o,2}(x) | \quad (179)$$

Zijn de te subtraheren beelden beide gefilterde versies van hetzelfde ingangsbeeld dan levert dit

$$\bar{I}_o(u) = [F_1(u) - F_2(u)] \bar{I}_{in}(u) * N \left\{ \text{sgn}(f_1(x) - f_2(x)) \right\}. \quad (180)$$

De elektronische subtractiesystemen werken met behulp van camera's. De twee gefilterde beelden worden opgenomen via camera's. Het verschil wordt elektronisch bepaald, en tezamen met een achtergrondsintensiteit op een scherm geprojecteerd. Deze methode levert

$$\bar{I}_o(u) = I_{\text{achtergrond}} \delta(u) + \left\{ F_2(u) - F_1(u) \right\} \bar{I}_{in}(u) \quad (181)$$

De achtergrondsintensiteit wordt zodanig gekozen dat altijd geldt

$$I_u(x) \geq 0 \quad (182)$$

De hybride systemen die aan onze eisen voldoen maken gebruik van het optisch toevoegen van een dragerfrequentie waarop het verschilsignaal aanwezig is. Dit signaal wordt elektronisch uit de andere componenten gefilterd. Dashiell [25] stelde zo'n systeem voor met een reflectief Ronchiraster. Ook werd een systeem voorgesteld dat gebruik maakt van verschillende polarisatierichtingen [26]. Dit systeem werd oorspronkelijk voorgesteld als een coherente subtractietechniek doch werkt ook met incoherente bronnen [27].

3. PRACTISCHE UITWERKING: DE GEBOUWDE FILTEROPSTELLING.

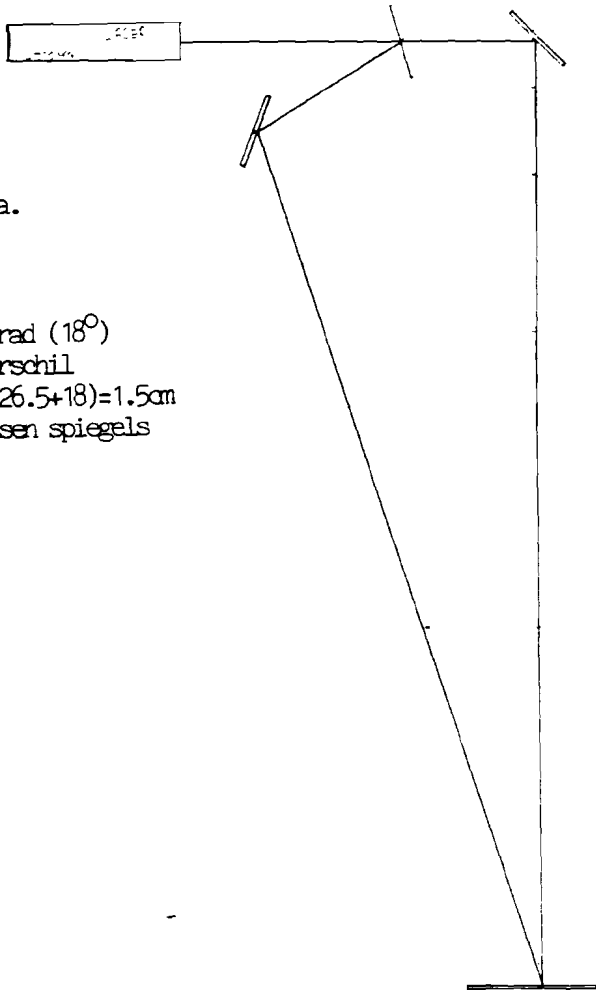
3.1. Het maken van hologrammen.

Voordat de voorgestelde filteropstelling gebouwd kon worden (zie figuur 14), moesten eerst de achromatische Fouriertransformatoren gemaakt worden. Hiervoor moesten zoneplaatjes en rasters gemaakt worden. Afhankelijk van welke achromatische Fouriertransformator we willen bouwen (zie figuur 2 resp.3) moeten andere hologrammen gemaakt worden. We betitelen deze hologrammen met serie I respectievelijk II. De opstellingen voor het maken van deze series zijn te zien in figuren 23 en 24. We willen in het onderstaande nog op een aantal punten wijzen die van belang zijn bij het maken van een opname.

-De coherentie-lengte van de laser. Het weglengteverschil ΔL van de twee opnamebundels mag niet groter zijn dan de voor de laser opgegeven coherentie-lengte. Wordt deze ΔL groter gemaakt, dan treedt geen stabiel interferentiepatroon op door instabiliteiten in de laserbundel. Hoe kleiner het weglengteverschil, des te beter is het interferentiepatroon gedefinieerd.

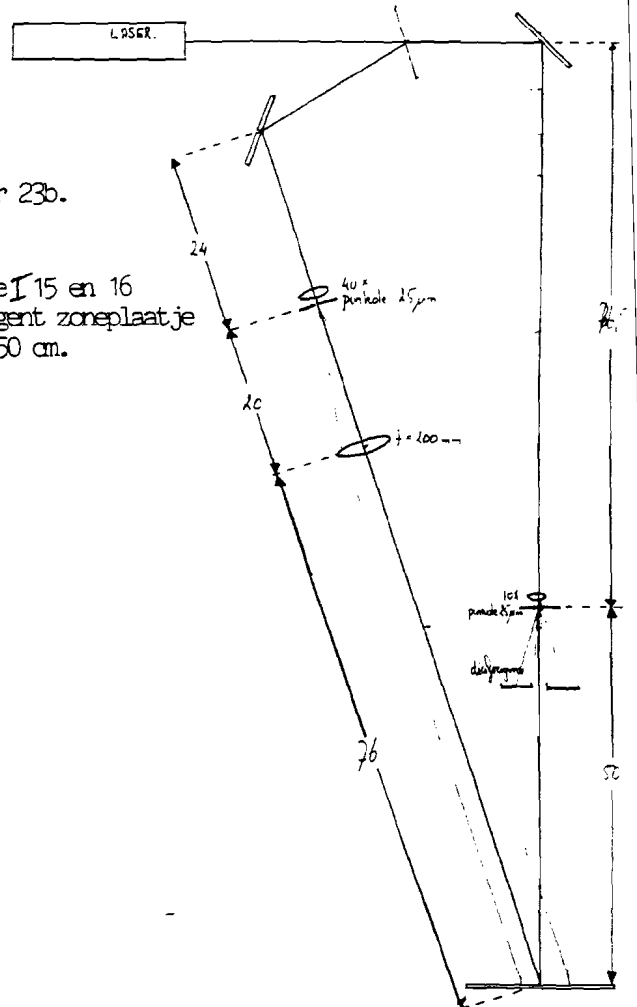
-Ieder onderdeel van de opstelling moet trillingsvrij ten opzichte van elk ander onderdeel staan. In principe worden trillingen ter grootte van de golflengte vastgelegd. Mechanische trillingen van zulke geringe afmetingen in een van de onderdelen van de opname-opstelling kunnen de opname geheel doen mislukken. Hoewel er gebruik wordt gemaakt van een speciaal geconstrueerde tafel, en alle onderdelen met lijm worden vastgezet, vraagt het opnemen van de hologrammen hierdoor toch veel geduld.

-Om de hoek tussen de informatiebundel en de referentiebundel zo constant mogelijk te houden bij het opnemen van de verschillende zoneplaatjes en rasters, zijn er extra voorzorgsmaatregelen genomen. Een constante hoek betekent een constante u_0 (zie(49)). Hierop is het gehele principe van terugbuiging van het licht naar de optische as gebaseerd.



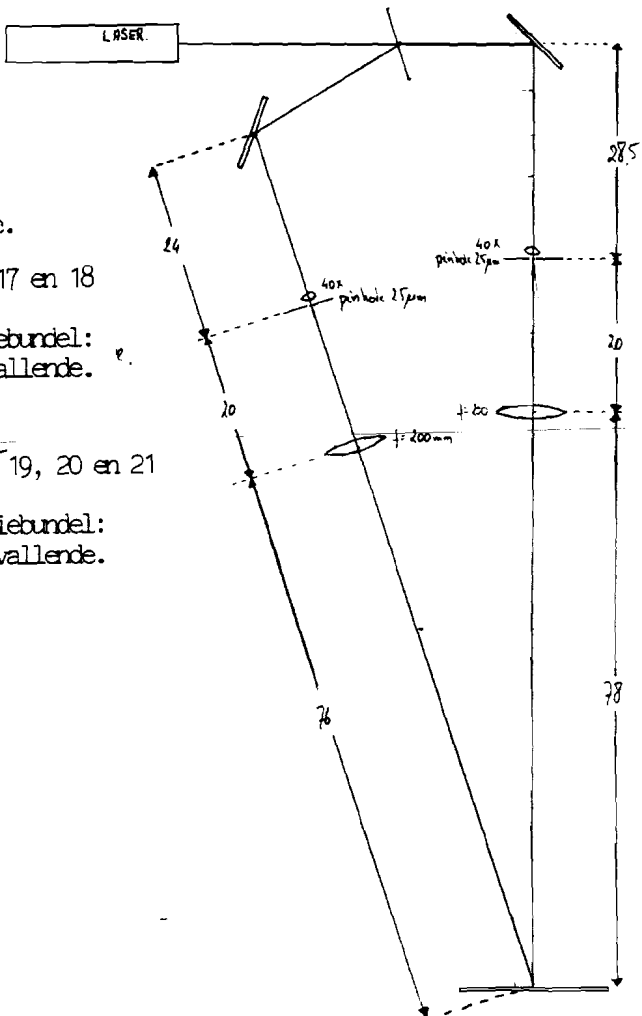
Figur 23a.

$\theta_{\text{pöuv}} = 0.31 \text{ rad (18}^\circ)$
 engteverschil
 $+23) - (126.5 + 18) = 1.5 \text{ cm}$
 and tussen spiegels
 cm.



Figur 23b.

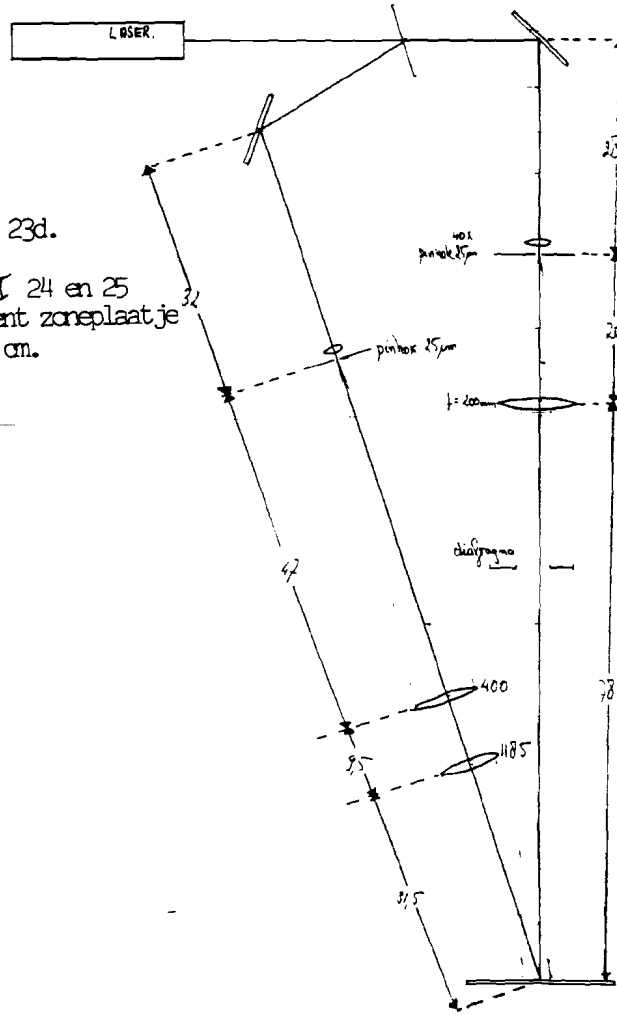
Optrame I 15 en 16
 Divergent zoneplaatje
 $f_0 = 50 \text{ cm}$.



Figur 23c.

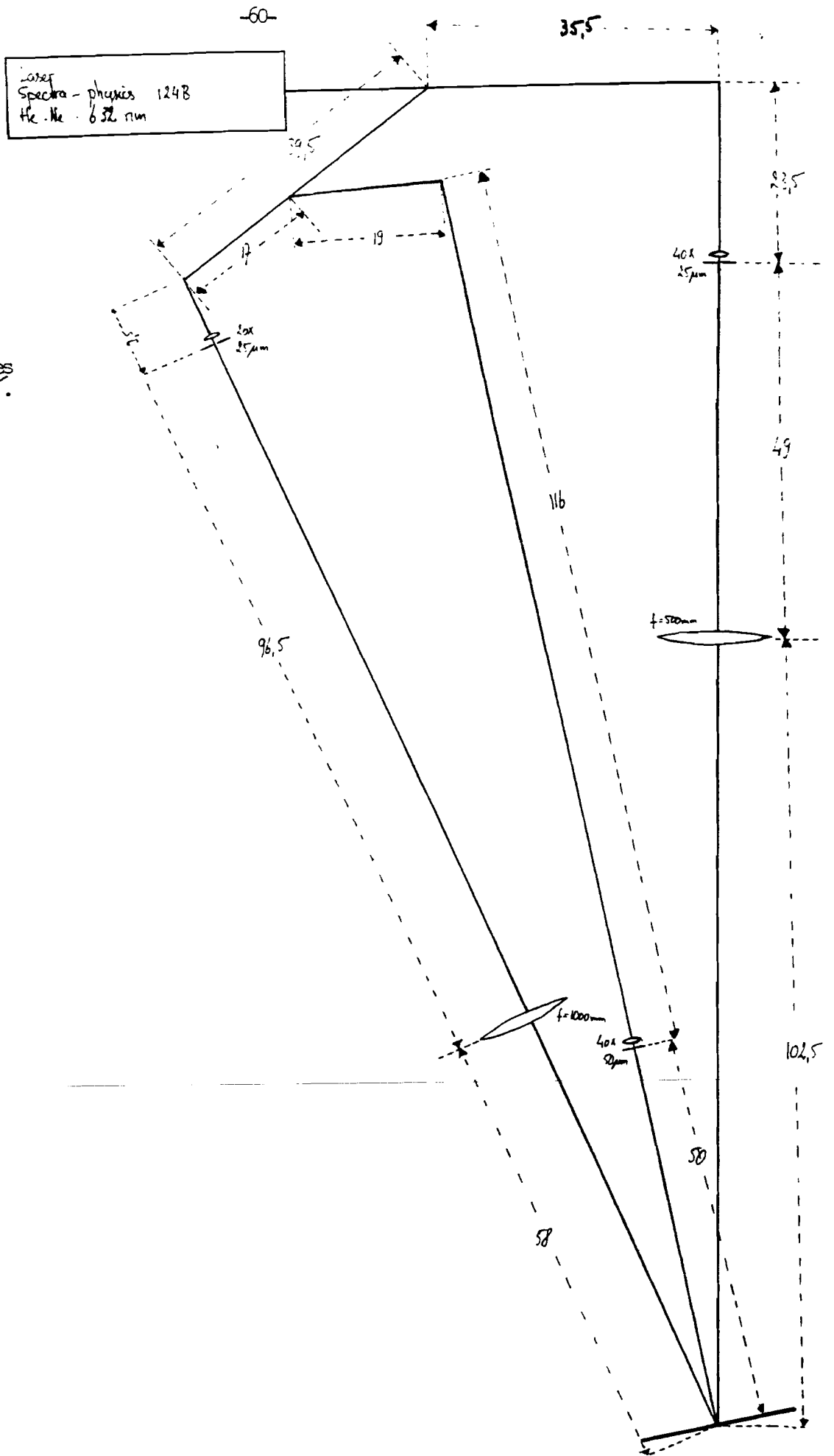
Optrame I 17 en 18
 Convergentiebundel:
 in invallende.

Optrame I 19, 20 en 21
 Convergentiebundel:
 uit invallende.



Figur 23d.

Optrame I 24 en 25
 Convergent zoneplaatje
 $f_0 = 50 \text{ cm}$.



Figur 24.
 Opstelling voor de opnames
 van hologrammen van serie II.

$\theta_1 \approx \theta_2 \approx 0.21 \text{ rad } (12^\circ)$
 wavelengtes v.l.n.r.
 203.5
 207.5
 210.5

In serie **I** zijn de spiegels (zie figuur 23a) in een vaste stand gehouden tijdens de opnames van de rasters en de divergente en convergente zoneplaatjes. De twee dunne laserstralen snijden elkaar op de plaats waar het hologram geplaatst wordt. De glasplaat waartegen het hologram tijdens de opname steunt wordt loodrecht op een van de bundels gesteld. Dit is eenvoudig door reflecties aan de glasplaat te zien.

Tussen de spiegels en de glasplaat worden afwisselend verschillende lenzen geplaatst nodig voor het maken van de gewenste bundels. Deze bundels worden dan rond het eerder opgetekende snijpunt van de twee laserstralen gecenterd. Op deze manier wordt ondanks het dat de opstelling tussen de verschillende opnames verbouwd moet worden, de opnamehoek toch zo constant mogelijk gehouden.

In serie **II** is de opstelling zodanig opgezet dat een zoneplaatje met hoek θ_1 , een tweede met hoek θ_2 gemaakt kan worden én dat tevens een raster opgenomen kan worden met precies een hoek $\theta_1 + \theta_2$. De opstelling hoeft niet verbouwd te worden tussen de verschillende opnames. Fouten veroorzaakt door verbouwen worden zo vermeden.

-Het bruikbare oppervlak van de hologrammen wordt zo groot gekozen als de diameter van de lenzen die de referentiebundel creëren.

In serie **I** is het werkzame oppervlak beperkt tot een cirkel met een doorsnede van 45 mm. Voor opnames 24 en 25 is dit kleiner omdat hierbij gebruik is gemaakt van een covergerende bundel (zie ook opmerking verderop) Voor deze zoneplaatjes geldt dat de doorsnede van het werkzame oppervlak 36 mm bedraagt.

In serie **II** is het werkzame oppervlak het gehele hologram: 4 x 5 inch. De lensdiameter gebruikt bij het maken van de referentiebundels was groter dan de afmetingen van de hologramplaat.

-In praktijk is het werkzame oppervlak kleiner dan de lensdiameter in de referentiebundel, omdat deze bundels niet geheel egaal zijn. Naar buiten toe vermindert de intensiteit. Doordat de belichtingstijd op iedere plek van het hologram gelijk is, worden de randen in feite onderbelicht. (in principe betekent het afnemen van de intensiteit naar de randen van de bundels dat voor de referentiebundels (en idem voor de andere) niet gesteld mag worden dat $\vec{A}(x,y) \cdot \vec{A}$. Is de variatie echter langzaam genoeg dan gaan de afleidingen die daar op berusten nog steeds op).

-Bij het maken van zoneplaatjes wordt liever gebruik gemaakt van divergente dan van een convergente opnamebundel. Beide kunnen immers gebruikt worden voor het maken van hetzelfde plaatje (zie (127) of (142)). De reden dat we liever een divergente bundel gebruiken zijn +de brandpuntsafstand is beter gedefinieerd.

Bij een divergente bundel is het brandpunt een pinhole. De doorsnede van zo'n pinhole is typisch 25 μ m. Bij een convergerende bundel is het brandpunt een vlek van een paar mm in doorsnee, en daardoor is de brandpuntsafstand niet goed te bepalen. Hoewel slechts de verhouding k_o/f_o van belang is, en niet de precieze bepaling van f_o (dit zou immers hetzelfde zijn als een iets andere opnamekleur k_o) is het wel zaak om voor het berekenen van filterfuncties deze verhouding te kennen. Ook berekeningen en foutenanalyses met de verstemming Δ vragen een nauwkeurige bepaling van f_o .

+omdat lenzen een beperkte diameter hebben, en een zekere afstand van het hologram moeten staan om de andere opnamebundel niet te verstoren, wordt het werkzame oppervlak bij een convergente bundel door de kleiner wordende diameter van deze bundel bepaald.

-De intensiteitsverdeling van de opnamebundels in serie I bleek niet egaal te zijn; dit lag aan de gebruikte laser. Een kant van de laserbundel had een lagere intensiteit.

De intensiteitsverdeling van de bundels in serie I werden gemeten met behulp van een lichtgevoelige weerstand, zie hiervoor appendix 6.

-De hologramplaatjes zijn nogal breekbaar. Het beste zou zijn ze na de opname in een houder te plaatsen

-Voor de gebruikte chemicaliën bij het ontwikkelen van de hologrammen zie appendix 7.

-De hologrammen uit serie II zijn tweemaal in een bleekbad geweest. Na het eerste bleekbad kregen ze bij het gebruik last van print-out. Oorzaak daarvan was dat de eerste bleking niet sterk genoeg was geweest.

3.2. De efficiëntie van het hologram m.b.t. de hoekstand.

Bij gebruik van een hologram willen we dat zoveel mogelijk licht in de gewenste bundel gaat. De efficiëntie η van een hologram wordt gedefinieerd door de hoeveelheid licht in de eerste orde bundel gedeeld door de totale hoeveelheid licht aan de ingang van het hologram [28]. Normaliter wordt er bij de beschrijving van het licht achter het hologram geen onderscheid gemaakt tussen k_0 , k_1 en k_{1z} zoals gedaan in (129) doch wordt (127) direct ingevuld in (125). Afwijkingen van deze berekeningen zijn typische volume-effecten [28], en zouden in vele gevallen van ondergeschikt belang zijn. In praktijk bleek dit onjuist.

+Voor $k_1 = k_{1z}$ zou de efficiëntie van de eerste orde en de eerste orde geconjugeerde bundeleven groot zijn. In het algemeen is echter de eerste orde bundel in efficiëntie beter dan de geconjugeerde.

+De efficiëntie zou hoekonafhankelijk moeten zijn. Neem in plaats van een belichting $\vec{B}(x,y)$ nu $\vec{B}(x,y) e^{i4z}$ dan maakt dit voor de intensiteit in de eerste orde bundel geen verschil volgens de berekeningen Experimenteel is dit onjuist: k_1 en k_{1z} zijn duidelijk hoekafhankelijk. Er bleek te gelden

-de efficiëntie van de eerste orde bundel is het grootst indien de invallende bundel $\vec{B}(x,y)$ evenwijdig is aan de referentiebundel $\vec{B}(x,y)$.

-de efficiëntie van de eerste orde geconjugeerde bundel is maximaal indien de invallende belichting $\vec{B}(x,y)$ evenwijdig is aan de informatiebundel $\vec{a}(x,y)$.

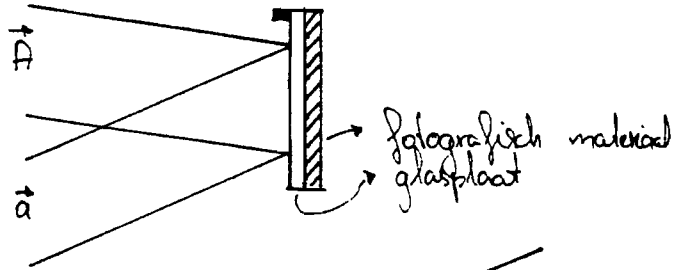
-wordt het hologram achterstevoren bedreven (emulsielaag naar de belichtingsbron toe) dan ligt de situatie precies omgekeerd.

In figuur 25 is in een schets weergegeven wanneer de verschillende orde bundels in efficiëntie maximaal zijn.

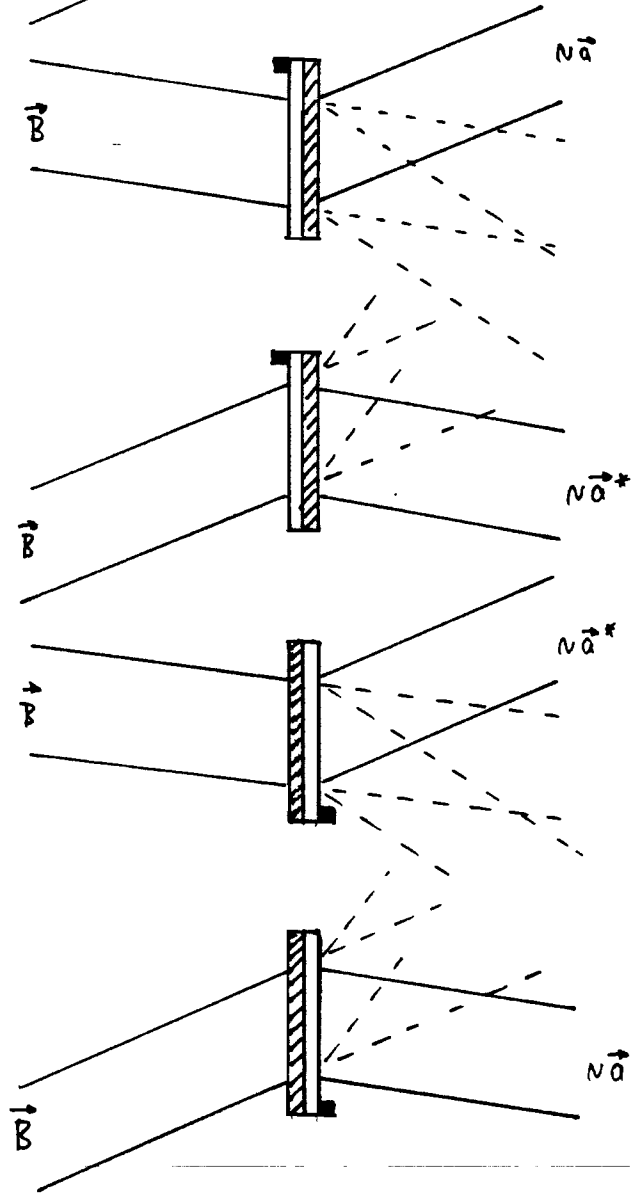
Zowel $\vec{a}(x,y)$ als $\vec{a}^*(x,y)$ kan gereconstrueerd worden met een optimale efficiëntie indien we de stand van het hologram goed kiezen. We gebruiken (zie figuur 25)

- situatie ① voor de \vec{a} informatie bij een belichting $\vec{B} // \vec{B}$
- situatie ② voor de \vec{a} informatie bij een belichting $\vec{B} // \vec{a}$
- situatie ③ voor de \vec{a}^* informatie bij een belichting $\vec{B} // \vec{a}$
- situatie ④ voor de \vec{a}^* informatie bij een belichting $\vec{B} // \vec{B}$.

opname:



gebruik:



Figur 25. Efficiëntie en holograngebruik.

3.3. DE GEBOUWDE FILTEROPSTELLING

Er zijn Fouriertransformatoren gebouwd volgens het principe van figuur 2 en 3, en filteropstellingen volgens figuur 14.

De achromatische Fouriertransformatoren 1 en 2 in figuur 14 zijn niet precies gelijk (zie blz. 17). Transformator 2 is de inversie van de eerste.

In allereerste instantie is het systeem bekeken zonder filters.

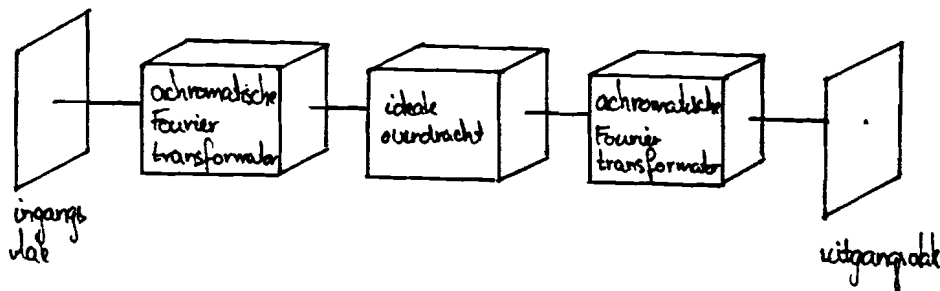
De resultaten hiervan staan in het volgende hoofdstuk 3.4.

Opmerkingen over de opbouw en het afregelen staan in dit hoofdstuk.

Verder in dit hoofdstuk nog een kort gedeelte over de lichtbron.

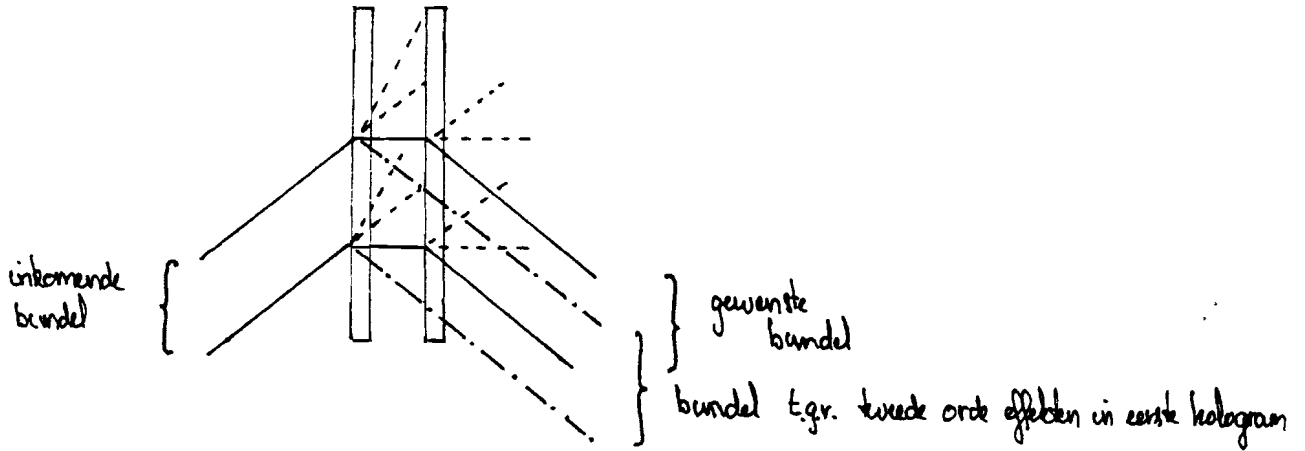
De opstelling zonder filter werd in eerste instantie uit de volgende drie delen opgebouwd:

- 1) een achromatische Fouriertransformator
- 2) een ideaal overdrachtsysteem
- 3) een tweede achromatische Fouriertransformator
(zie figuur 26).



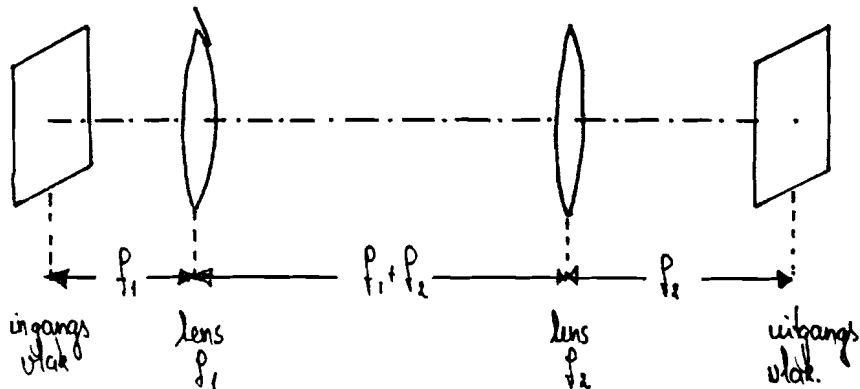
Figuur 26: De proefopstelling

Het ideale systeem werd tussen het uitgangsvlak van A.F.T. 1 eningangsvlak van A.F.T. 2 geplaatst, omdat anders direkt twee hologrammen achter elkaar zouden staan. Dit levert een probleem indien de afbuigingen in de twee A.F.T.'s in dezelfde richting liggen. De gewenste bundel na het tweede zôneplaatje is dan niet meer te scheiden van alle andere optredende bundels. De tweede ordebundel van het eerste divergente zôneplaatje gaat namelijk in precies dezelfde richting als de gewenste bundel (zie figuur 27).



Figuur 27: Samenvallen van verschillende bundels indien twee hologrammen vlak na elkaar staan

In het ideale systeem kan de eerste ordebundel van het eerste divergente zôneplaatje van de andere gescheiden worden. Daardoor treden na het tweede divergente zôneplaatje geen problemen meer op bij het scheiden van de verschillende bundels. Het ideale systeem dient zowel plaats als richtingscomponenten van het licht constant te houden. Dit kan met het onderstaande systeem gedaan worden (zie figuur 28). Dit systeem bestaat uit twee normale Fouriertransformatoren.



Figuur 28: Het ideale systeem

De overdrachtsmatrix van dit systeem wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} -\frac{p_1}{p_2} & 0 \\ 0 & -\frac{p_2}{p_1} \end{pmatrix} \quad (183)$$

en er treedt een vergroting M op met

$$M = -\frac{p_2}{p_1} \quad (184)$$

Het beeld tussen in- en uitgang van het totale systeem krijgt dan de inverse vergroting

$$M_{\text{totaal}} = -\frac{p_1}{p_2} \quad (185)$$

Met dit tussenliggende systeem krijgen we op een afstand $\frac{1}{f}$ na de eerste lens een achromatisch beeld van het ingangsvlak. De overdracht wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} -\frac{p_1}{f} \frac{h}{h_0} & 0 \\ 0 & \frac{p_1}{f} \frac{h_0}{h} \end{pmatrix} \quad (186)$$

indien we de eerste A.F.T. ideaal veronderstellen (zie 47). De vergrotingsfactor M_{kl} is kleurafhankelijk.

$$M_{kl} = -\frac{p_1}{f} \frac{h}{h_0} \quad (187)$$

Indien we de afbuiging van de twee A.F.T.'s verschillend kiezen (bijv. eerst in de x- en vervolgens in de y-richting), kan het ideale systeem uit de opstelling gehaald worden.

Er zijn verschillende opstellingen gebouwd:

1) Met hologrammen uit serie I, en een A.F.T. volgens figuur 2:

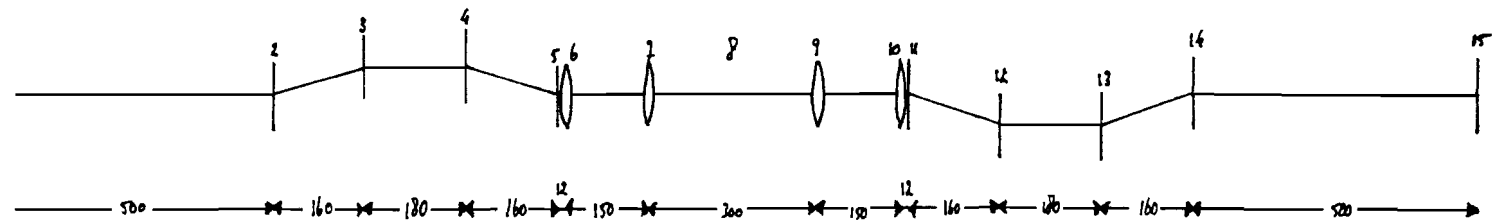
- opstelling a: met lenzen van $F = 500$ mm
- opstelling b: met lenzen van $F = 539$ mm; 22 mm tussen lens en divergent zôneplaatje
- opstelling c: met lenzen van $F = 539$ mm; 5 mm tussen lens en divergent zôneplaatje

Voor de opstellingen zie figuur 29.

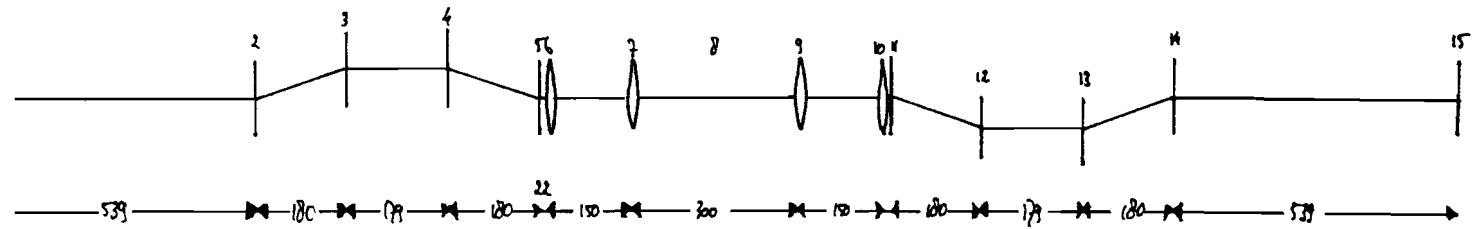
2) Met hologrammen van serie II en A.F.T.'s volgens figuur 3 (zie figuur 30):

- opstelling 20-1 : lenzen $F = 500$ mm; hologrammen onvoldoende gebleekt
- opstelling 26-1 : lenzen $F = 500$ mm; extra bleekbad
- opstelling 27-1a: lenzen $F = 539$ mm; \pm 22 mm tussen lens en divergent zôneplaatje; volgorde in ideale overdrachtssysteem verwisseld t.o.v. 20/26-1
- opstelling 27-1b: lenzen $F = 500$ mm; volgorde in ideale overdrachtssysteem verwisseld t.o.v. 20/26-1
- opstelling 31-1 : lens $F = 250$ mm; geen ideaal overdrachtssysteem.

stelling a.



stelling b.



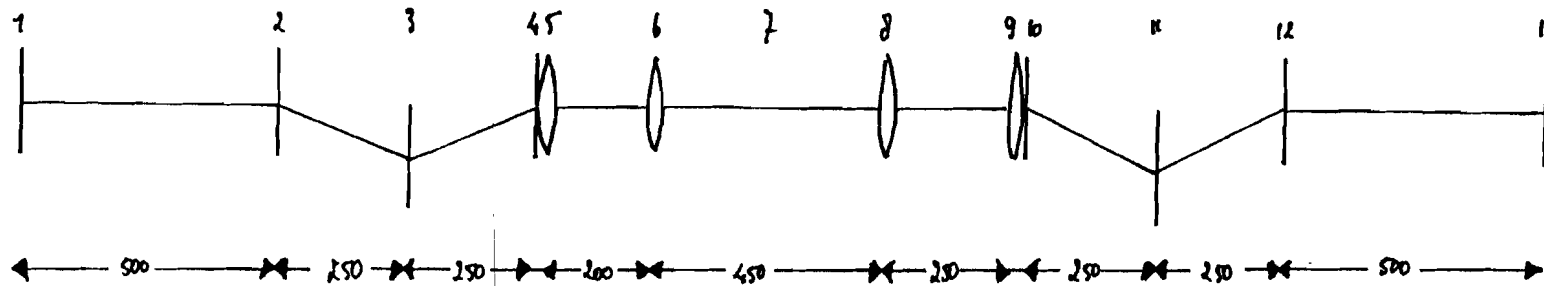
Cijferaanwijzing

- 1 ingangsvlak
- 2 zoneplaatje : 25 glas voren, plakker boven
- 3 raster : 18 glas voren, plakker boven
- 4 raster : 17 glas voren, plakker onder
- 5 zoneplaatje : 24 glas voren, plakker onder
- 7 lens : $f = 150 \text{ mm}$
- 8 chromatisch beeldvlak
- 9 lens : $f = 150 \text{ mm}$
- 11 zoneplaatje : 16 emulsië voren, plakker boven
- 12 raster : 21 emulsië voren, plakker onder
- 13 raster : 19 emulsië voren, plakker onder
- 14 zoneplaatje : 15 emulsië voren, plakker onder
- 15 uitgangsvlak

opstelling a : 6 lens : $f = 500 \text{ mm}$
 10 lens : $f = 500 \text{ mm}$

opstelling b : 6 lens : $f = 539 \text{ mm}$
 10 lens : $f = 539 \text{ mm}$

opstelling c : identiek aan b; afstand tussen
 5 en 6 resp. 10 en 11 is teruggebracht
 van 22 naar 5 mm.



Opstelling 10-1

- 1 uitgangsvlak
- 2 convergent zoneplaatje : nr 3
- 3 raster : nr 7
- 4 divergent zoneplaatje : nr 5
- 7 chromatisch beeldvlak
- 10 divergent zoneplaatje : nr 6
- 11 raster : nr 2
- 12 convergent zoneplaatje : nr 4
- 13 uitgangsvlak.

maten in mm

Opstelling 10-1

- 5 lens $f = 500\text{mm}$
- 6 lens $f = 200\text{mm}$
- 8 lens $f = 200\text{mm}$
- 9 lens $f = 500\text{mm}$

hologrammen omvattende gebied

Opstelling 10-1

- 5 lens $f = 500\text{mm}$
- 6 lens $f = 200\text{mm}$
- 8 lens $f = 200\text{mm}$
- 9 lens $f = 500\text{mm}$

hologrammen voor een breedte van gebied

Opstelling 17-1 A

- 5 lens $f = 539\text{mm}$
- 6 lens $f = 200\text{mm}$
- 8 lens $f = 200\text{mm}$
- 9 lens $f = 539\text{mm}$

$\pm 29\text{mm}$ tussen lens en divergent zoneplaatje

Opstelling 17-1 B

- 5 lens $f = 500\text{mm}$
- 6 lens $f = 200\text{mm}$
- 8 lens $f = 200\text{mm}$
- 9 lens $f = 500\text{mm}$

Figuur 30. Filteropstellingen met hologrammen van serie II.

Opmerkingen bij deze opstellingen:

Voor het convergente respectievelijk divergente zôneplaatje binnen één AFT werden hologrammen gebruikt die op precies dezelfde manier zijn opgenomen. Dit garandeert dat binnen één AFT de constante k_0/f_0 ook precies eenduidig is. De lens en het zôneplaatje kunnen niet precies in één vlak geplaatst worden. Er zit altijd een vrije ruimte tussen deze twee componenten. De fout die hierdoor geïntroduceerd wordt is in appendix 9 uitgewerkt. Dit is gedaan voor het geval de afbuiging in de twee AFT's een verschillende richting hebben. Aan deze opstelling zijn ook metingen gedaan. Hiervoor wordt ook verwezen naar appendix 9.

Bij het bouwen van de opstellingen zoals eerder genoemd, zijn er een aantal punten waarop gelet dient te worden, om te verzekeren dat de onderdelen goed gepositioneerd zijn:

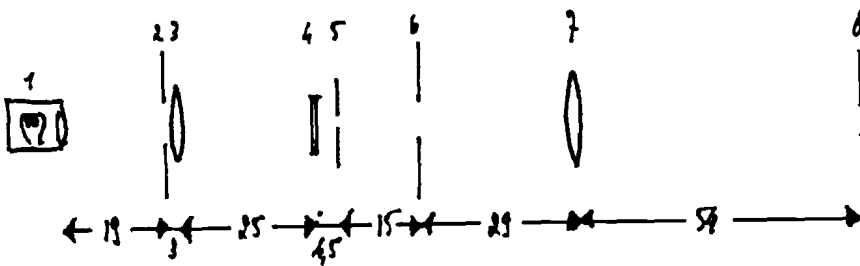
- 1) De hologrammen moeten loodrecht op de optische as staan. Dit kan gedaan worden aan de hand van de optredende reflekties, of bij de rasters, aan de hand van de eerste orde gereflekteerde bundel. Deze methode werkt goed bij de eerste drie à vier hologrammen, daarna is de intensiteit van de reflectie laag.
- 2) De positie van de hologrammen in de x- en y-richting wordt zodanig gekozen dat een zo groot mogelijk deel van de invallende bundel op het midden van het werkzame oppervlak van het hologram valt. Ook hier geldt dat dit bij de eerste hologrammen duidelijk zichtbaar is en bij de achterste slecht zichtbaar.
- 3) De lichtbundel moet achromatisch zijn na het passeren van de rasters en bij aankomst op het vlak van het volgende zôneplaatje. Daar moet deze afgebogen lichtbundel ook precies samenvallen met de nulde orde bundel van het voorafgaande zôneplaatje. Hierop kunnen de rasters in de lengte richting gesteld worden.
- 4) De punten op het hologram van het divergente en convergente zôneplaatje, waar deze de optische as snijden, dient precies gelijk te zijn (zie fig. 13). Dit kan in de eerste transformator gecontroleerd worden door het figuur in het achromatische beeldvlak te bekijken. Bij de tweede transformator is dit mogelijk aan de hand van het uitgangsvlak.
- 5) De plaats van het vlak waar een scherp beeld optreedt na het laatste zôneplaatje, is sterk afhankelijk van de posities van de lenzen in de ideale transformator. Deze worden zodanig verschoven dat het beeld op een afstand van het laatste hologram scherp is.

Uit bovenstaande opmerkingen volgt dat het moeilijk is om de tweede transformator goed af te regelen, vanwege de geringe lichthoeveelheid. Een kwantitatieve analyse van de fout, optredend ten gevolge van het niet exact loodrecht staan van de hologrammen op de optische as, is er niet. Hiertoe zou de overdracht tussen twee schuin staande vlakken berekend moeten worden.

Voor het ingangsvlak is een lichtbron aanwezig. Het licht van een Xenonlamp (voor spectrum van deze lamp zie appendix 5) werd gecoltimeerd met behulp van twee lenzen en een diafragma (zie tek. 30). Op deze wijze werd een lichtbundel verkregen die slechts weinig divergeert: van het achterste scherm (nr. 8) waar de bundel een doorsnede van 4 cm heeft, tot aan het einde van de opstelling waar de bundel een doorsnede van 7 cm heeft, is dit ruim 4 mtr verder. Een verdere bundeling kan verkregen worden door het verkleinen van het diafragma. Dit gaat ten koste van de lichtopbrengst en vergroot de coherentie, wat beide ongewenste effecten zijn. Het matglas plaatje is toegevoegd om door verstrooiing ervoor te zorgen dat in de verdere opstelling nergens het beeld van het filament van de Xenonlamp optreedt.

Cijferaanwijzing

- 1. Xenon lamp
 - 2. Scherm
 - 3. Lens: $f = 400$ mm
 - 4. Matglas
 - 5. Diafragma: $\varnothing \pm 7$ mm
 - 6. Scherm
 - 7. Lens: $f = 400$ mm
 - 8. Scherm: $\varnothing = 40$ mm
- Afstanden in cm.



Figuur 30: De lichtbron

3.4 Resultaten van de opstellingen zonder filters.

3.4.1 De eerste serie opstellingen

Gegeven een lichtverlies van rond de 75% voor ieder hologram en een verlies van rond de 5 à 10% voor iedere lens, heeft een systeem zoals getekend in figuur 29, met 8 hologrammen en 4 lenzen een lichtverzwakking ter grootte

$$\left(\frac{1}{4}\right)^8 (0,9)^4 \approx 10^{-5} \quad (188)$$

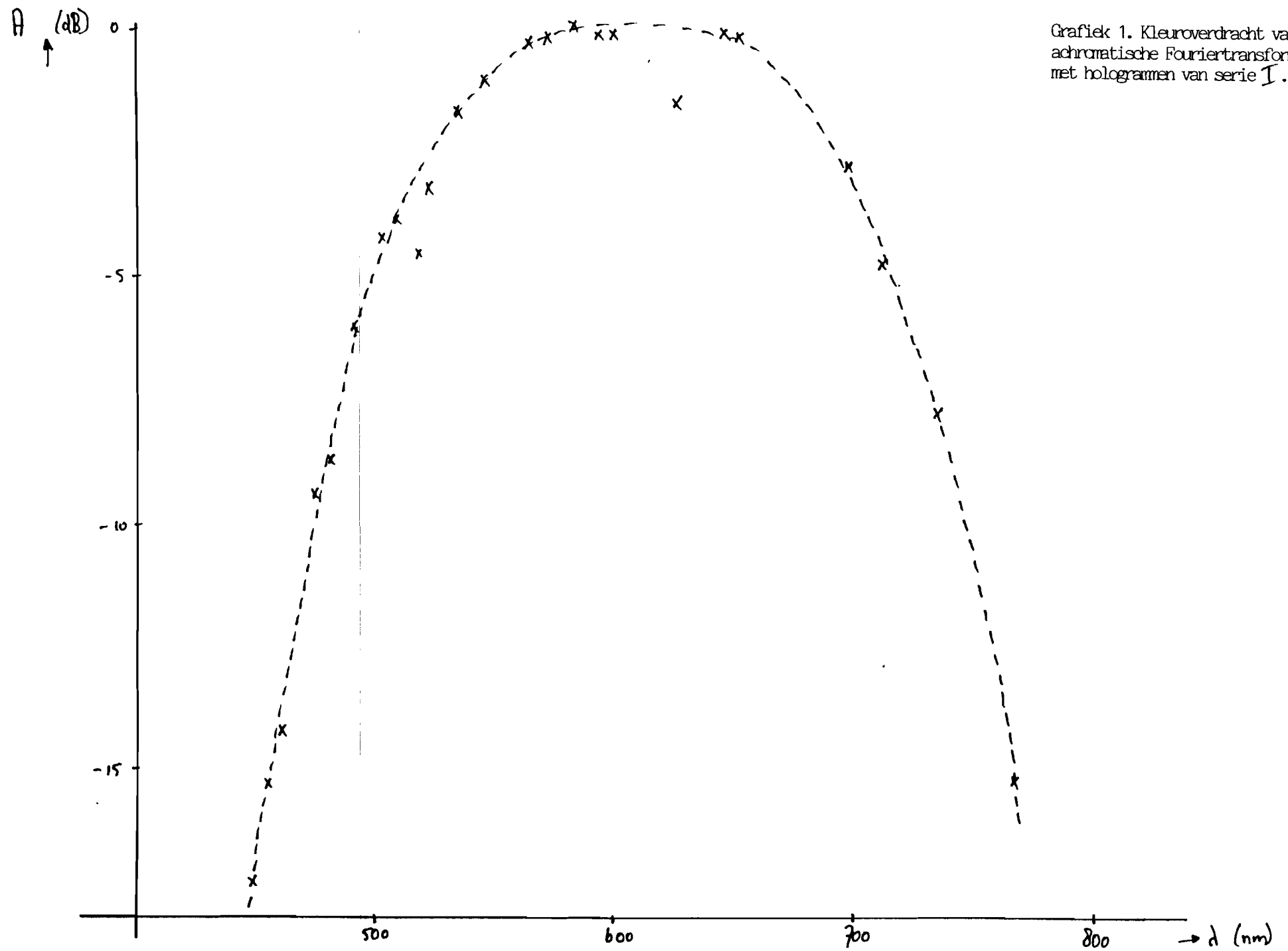
Als eerste resultaat is het dan ook vermeldenswaardig dat met deze opstellingen zonder filter aan de uitgang met behulp van matglas een beeld van de ingang zichtbaar is.

Een tweede direct in het oog springend gegeven (zie foto 1) is dat het uitgangspeild geel van kleur is. Het ingangsspectrum daarentegen mag vlak genoemd worden (zie app. 5 en foto 2). Oorzaken van dit verlies aan kleur zijn

- i. de selektiviteit van de gebruikte hologrammen
- ii. verlies aan kleur tengevolge van de kleurschifting. Hierdoor vallen de aan de randen van het spectrum gelegen kleuren op minder efficiënte delen van de rasters.

Om hiervan kwantitatieve gegevens te verkrijgen is de kleuroverdracht van één enkele achromatische Fouriertransformator bepaald. Voor de meetopstelling en de tabellen zie appendix 8. Hierbij is de relatieve kleurverzwakking A bepaald. Deze is weergegeven in grafiek 1. De verzwakking van de gehele opstelling is dan dubbel zo groot. Om enig idee te geven wat dit kleurverlies betekent voor het oog zijn foto's genomen van

- i. eerste ordebundel van het allereerste (convergente) zoneplaatje (foto 3). Dit is in goede benadering het spectrum van de bron
- ii. de nulde ordebundel van het allerlaatste (convergente) zoneplaatje (foto 4). Dit benadert het spectrum aan de uitgang, en komt overeen met de dubbele grafiek.



Grafiek 1. Kleuroverdracht van de achromatische Fouriertransformator met hologrammen van serie I.

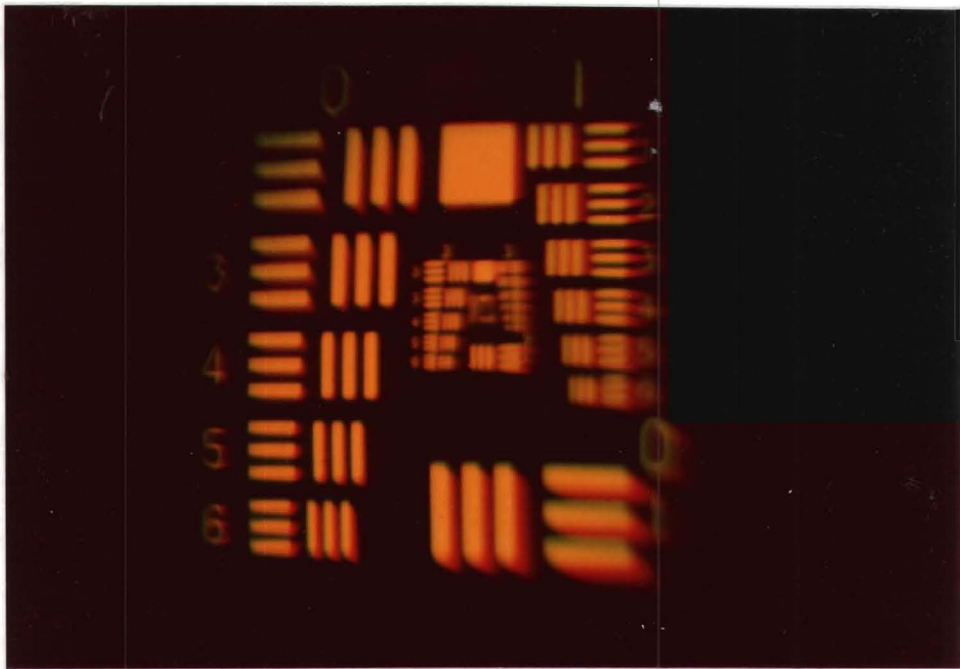


Foto 1. Uitgangsbeeld. Serie I.

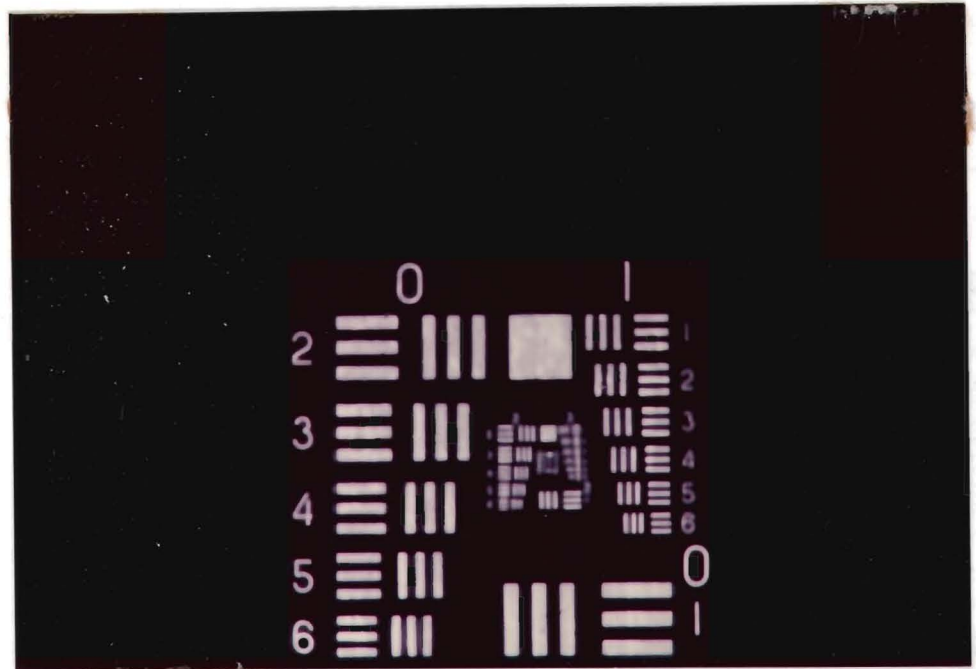


Foto 2. Ingangsbeeld.

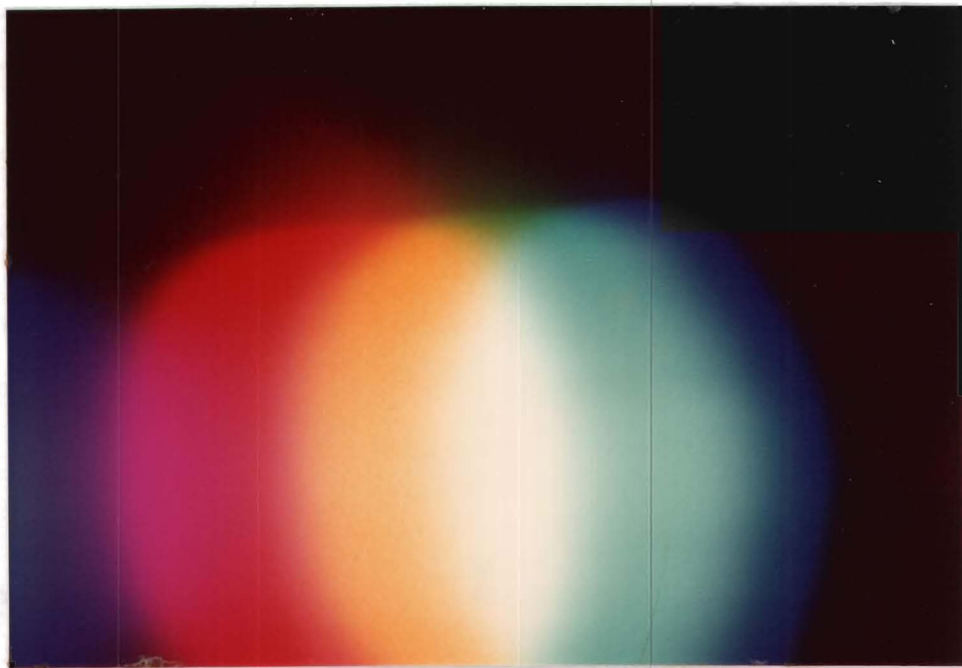


Foto 3. Ingangsspectrum.

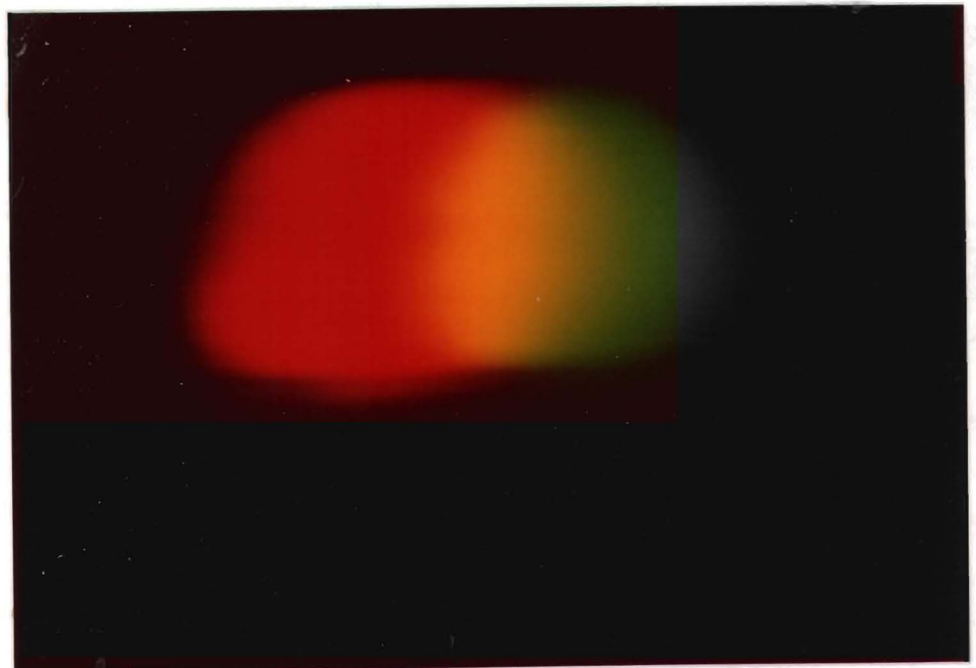


Foto 4. Uitgangsspectrum. Serie I.

Opmerkelijk is de dip in de grafiek rond de opname frekwentie. We komen hier later op terug.

Als gevolg van het feit dat het spectrum aan de uitgang niet het gehele zichtbare gebied omvat, is de optredende maximale versterking max veel kleiner dan oorspronkelijk is aangenomen. Nemen we aan dat we hier met een 3dB punt mogen werken, dan betekent dit dat slechts 540-580 mm zichtbaar is (immers verdubbelde grafiek) en

$$\alpha_{\max} = \frac{90}{26} = 0.14 \quad (189)$$

Dit houdt in dat de transformatoren een zeer goede benadering van de ideale achromatische Fouriertransformatoren zouden moeten zijn (zie (50)).

Er bleken echter ondanks veelvuldig afregelen en afstellen steeds groene en rode randen op de beelden van de proefplaatjes voor te komen (zie foto 1).

De Fouriergetransformeerde van het ingangsbeeld lijkt op het oog plaatsonafhankelijk in intensiteit te zijn, afgezien van de eindige afmetingen. Dit is in overeenstemming met het plaatsstationair karakter zoals berekend (61). Rond de getransformeerde lag een groene rand. Oorzaak hiervan is onduidelijk.

De drie opstellingen a, b en c bleken in bedrijf slechts marginale verschillen te vertonen. Er kan niet van één "beste" gesproken worden. Dit ligt voornamelijk aan het feit dat de lichtintensiteit aan de uitgang zeer laag is. Hierdoor is het uiterst moeilijk om kleuren te beoordelen, en ook om het systeem optimaal af te regelen. Wel kunnen foto's gemaakt worden van de aan de uitgang optredende beelden. Hierbij gebruiken we dan opnames met een zeer lange belichtingstijd. Op deze wijze kunnen de kleuren wel beoordeeld worden. Tevens zou zo het systeem afgeregeld kunnen worden. Afgezien van het feit dat een dergelijke methode tijdrovend is, is het voor een real-time systeem ook niet erg geslaagd.

Als proef op de som op de werking van dit systeem is een raster als filter genomen. Dit houdt in (zie app. 11) bemonsteren in het frequentievlak, dus herhalen in het plaatsdomein. Dit bleek volgens verwachting te werken: geen kleurschifting in het herhaald optredende beeld, dit in tegenstelling tot een opstelling met normale Fouriertransformatoren, zie foto's: 5-8.

(Hierbij is genomen $f = 500$ mm lenzen, en raster met $n = 100$ lijnen/mm)

3.4.2 De tweede serie opstellingen

Gezien de ervaringen met de vorige opstelling werd er allereerst gezocht naar een methode om het lichtverlies binnen de opstelling te beperken. Hiertoe werden de twee rasters gekombineerd tot een, en zoals eerder is afgeleid geeft dit ook de mogelijkheid tot het realiseren van een achromatische Fouriertransformator (zie (62)).

Het probleem is dan om een opstelling voor het maken van hologrammen te vinden waarin een hoek, en de dubbele hoek in te bouwen valt. Die oplossing werd niet gevonden. Wel werd een opstelling gevonden waarin het mogelijk is de zoneplaatjes met twee verschillende hoekafbuigingen, en rasters met precies de som van die twee hoeken te maken (zie fig. 24). De elegantie van de oplossing ligt in het feit dat de opstelling niet verbouwd hoeft te worden voor het maken van de verschillende opnames.

Een verdere verbetering ten opzichte van de eerste serie hologrammen ligt in het feit dat het werkbare oppervlak vergroot is, tot de grootte van de gehele holografische plaat (4x5 inch). Hierdoor hopen we minder last te hebben van randeffekten, en dus meer kleuren (vergelijk foto's 16 en 17 met 3 en 4). Dit betekent tevens een stijging van het rendement van de totale lichtoverdracht.

Na het ontwikkelen van de geproduceerde hologrammen, en het in gebruik nemen in de opstelling, bleek dat de hologrammen niet voldoende gebleekt waren. Er ontstond print-out op de plaatjes, dat wil zeggen dat het fotografische materiaal nog gedeeltelijk actief was, en ten gevolge van de belichting bij het gebruik in de opstelling werkzaam werd. Hierom is een extra bleekbad gebruikt (zie app. 6). Dit bleken had een duidelijke

lijke invloed op de selektiviteit van de hologrammen, zie grafiek 2 en foto's 9 en 10 (meetopstelling: zie app. 8)

Na dit extra bleekproces is gekeken of bij gebruik van andere lenzen (500 resp. 539 mm) de kleuroverdracht veranderde. Dit bleek het geval (zie grafiek 3) maar was minder duidelijk in het waargenomen beeld, vergelijk foto's 10 en 11.

Ook is er geprobeerd het ideale systeem te elimineren, door de afbuiging in de twee AFT. verschillend te kiezen. Omdat het onmogelijk is om de twee hologrammen en de lens in exact hetzelfde vlak te plaatsen, treedt er een positioneringsfout op. Deze uit zich onder ander in het feit dat de plaats waar het beeld scherp is, verandert. Dit is niet meer precies een afstand f na het laatste zoneplaatje. Aan deze fout zijn berekeningen gedaan (zie app. 9). Het beeld wordt kwalitatief niet beter door het weglaten van het ideale overdrachtssysteem.

Bij deze opstellingen bleek in het filtervlak een egale vlek te ontstaan (ruimtelijk stationaire Fouriergetransformeerde) met een blauwe rand.

Ook bij deze opstelling is beeld vermenigvuldiging toegepast. Zie hiervoor foto's 11 t/m 15. Wederom is een raster met $n = 100$ lijnen/mm genomen.

Het ideale systeem uit de eerste serie opstellingen is in deze opstellingen vervangen door lenzen met een groter brandpuntsafstand (vgl. figuur 29 en 30). De reden hiervoor is dat de plaatsing van deze componenten dan minder kritisch wordt (zie app. 10). Echter hoe groter de brandpuntsafstand, des te langer de opstelling. Een ideaal systeem op basis van lenzen incl. $f = 50$ cm betekent een extra lengte van 2 meter voor de totale opstelling.

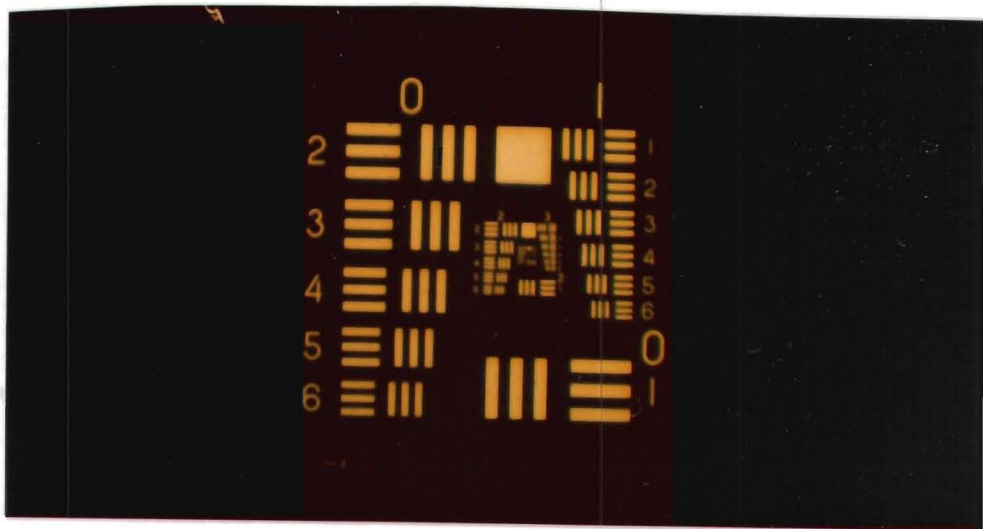


Foto 9. Uitgangsbeeld. Serie II. Onvoldoende gebleekt.

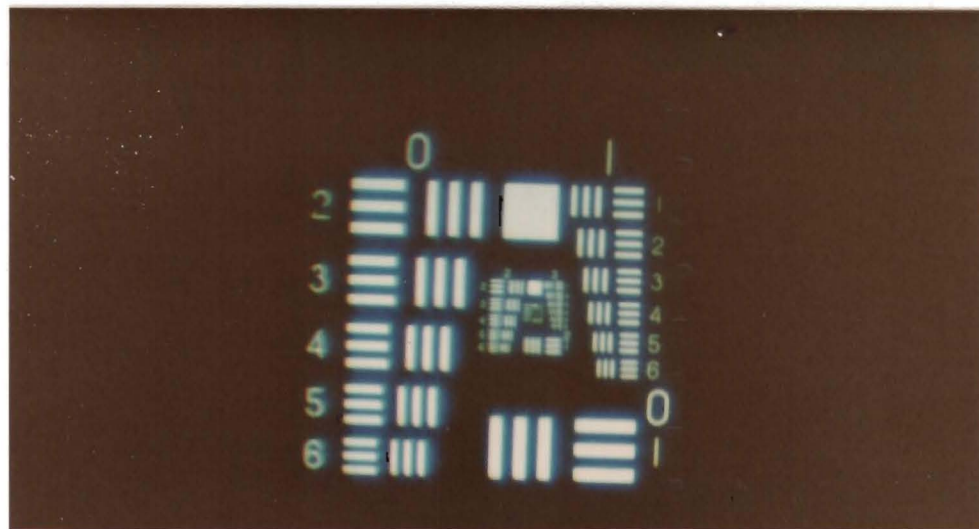


Foto 80. Uitgangsbeeld. Serie II. Extra gebleekt.

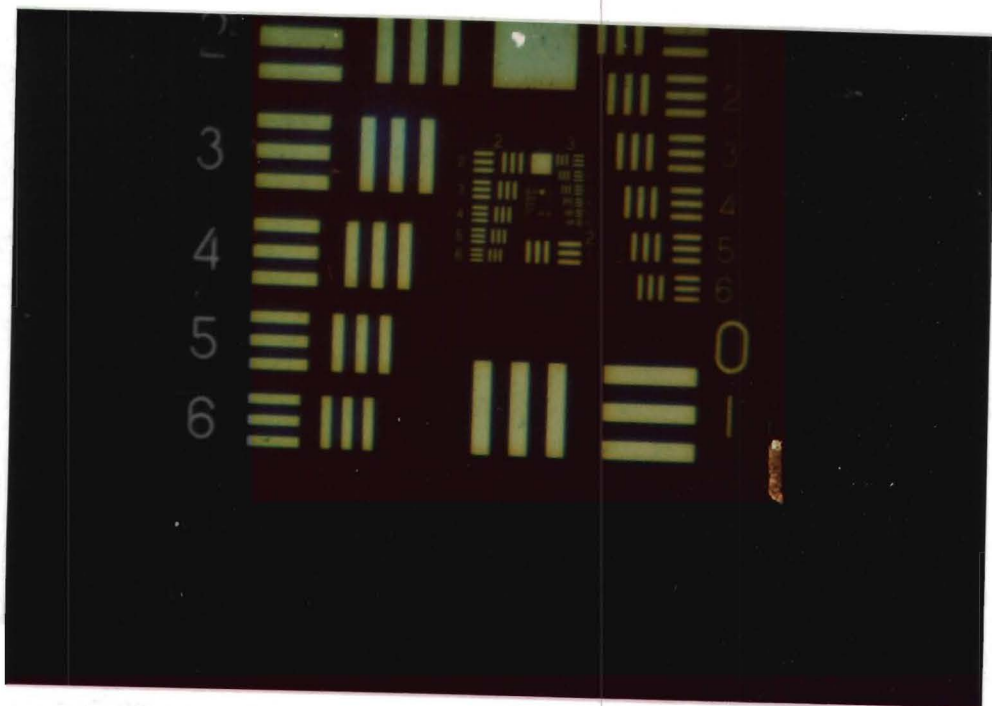
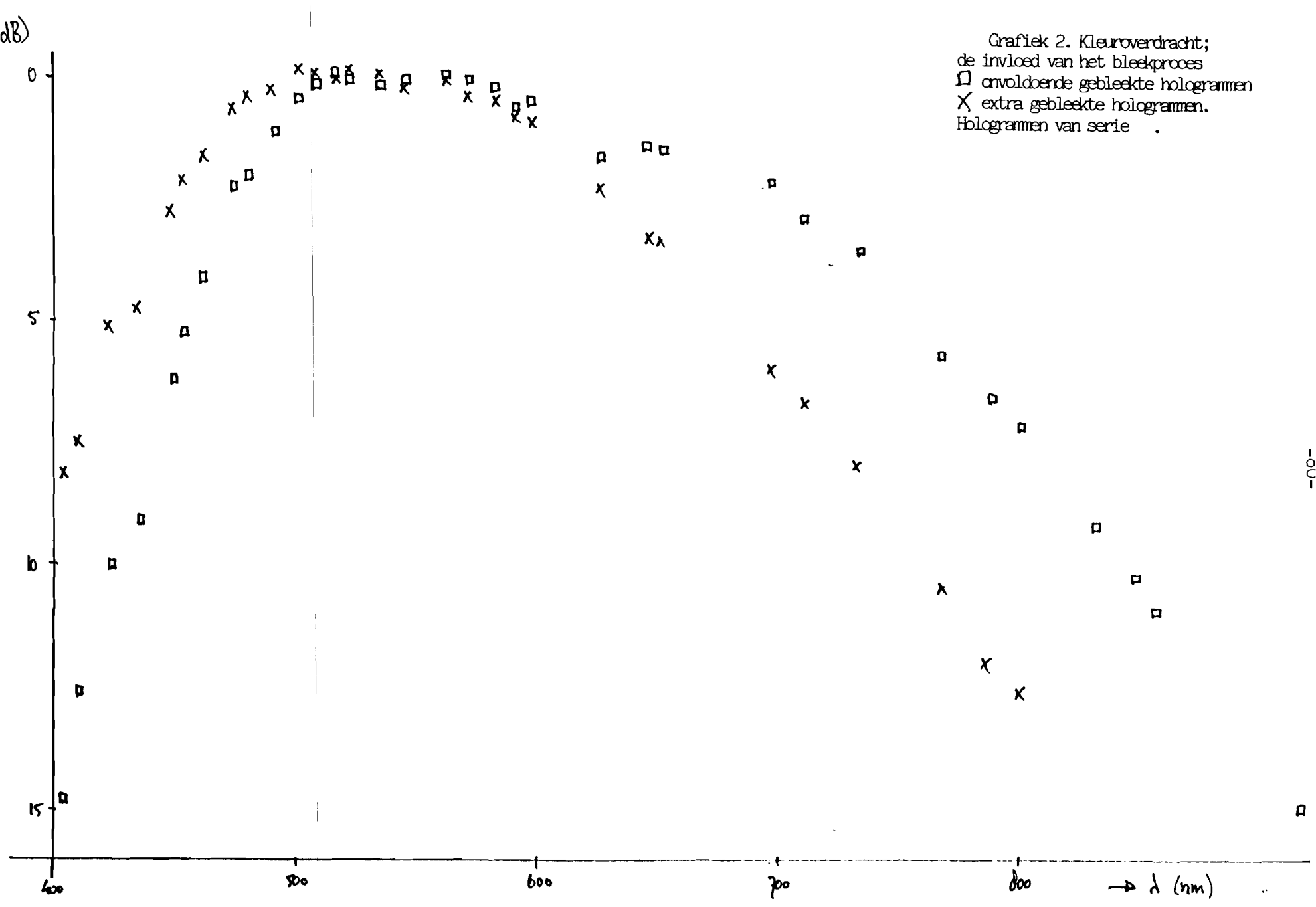


Foto 11. Uitgangsbeeld. Serie II. Extra gebleekt.

A (dB)
↑



Grafiek 2. Kleuroverdracht;
de invloed van het bleekproces
□ onvoldoende gebleekte hologrammen
X extra gebleekte hologrammen.
Hologrammen van serie .

100

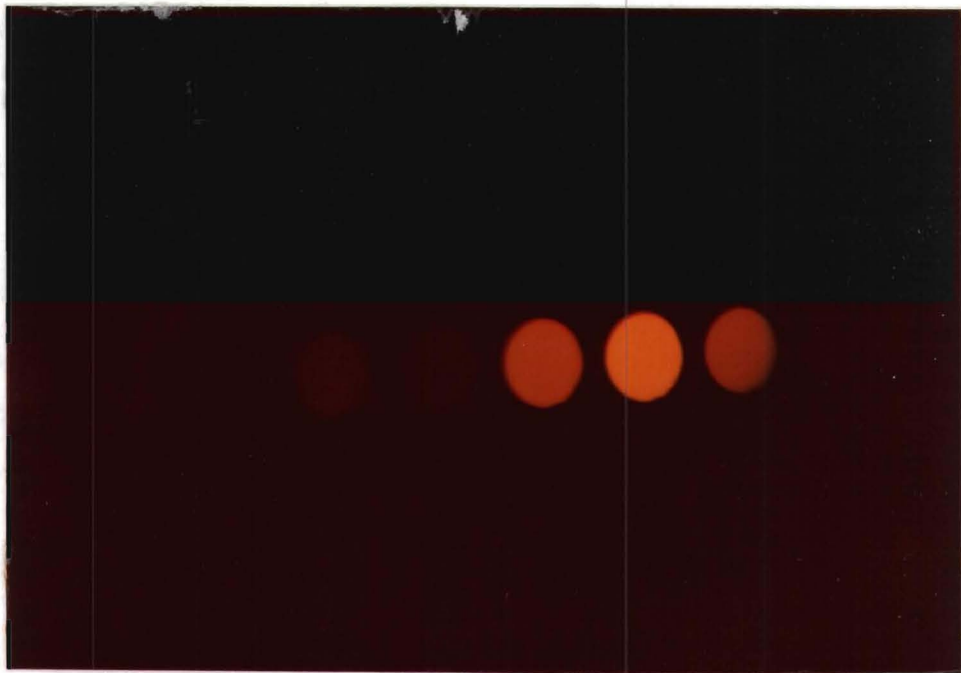


Foto 5. Beeldvermenigvuldiging. Serie I.



Foto 6. Beeldvermenigvuldiging. Normale Fouriertrans.

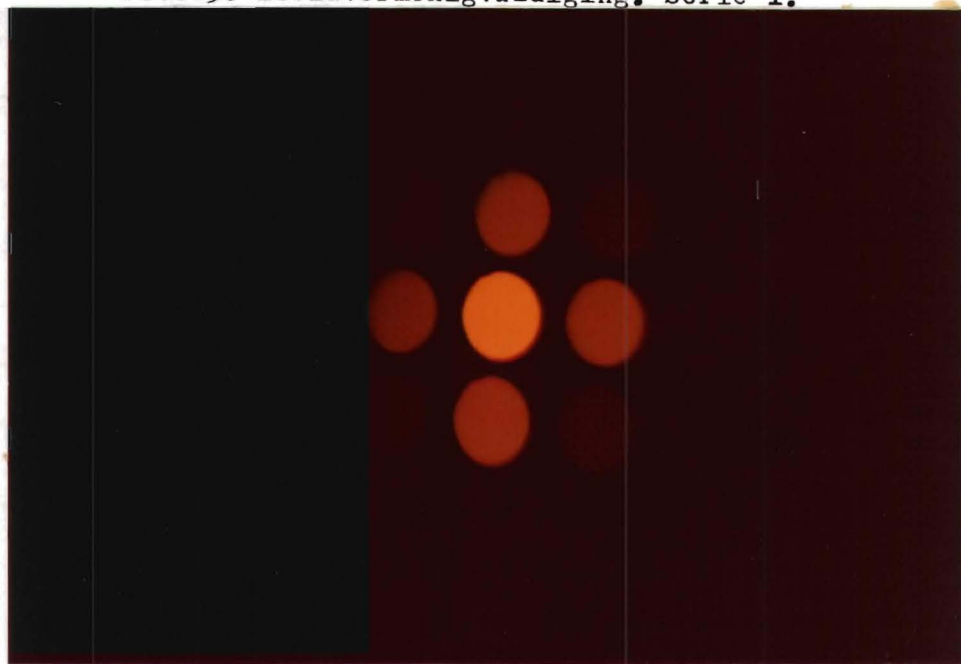


Foto 7. Beeldvermenigvuldiging. Serie I.



Foto 8. Beeldvermenigvuldiging. Normale Fouriertrans.

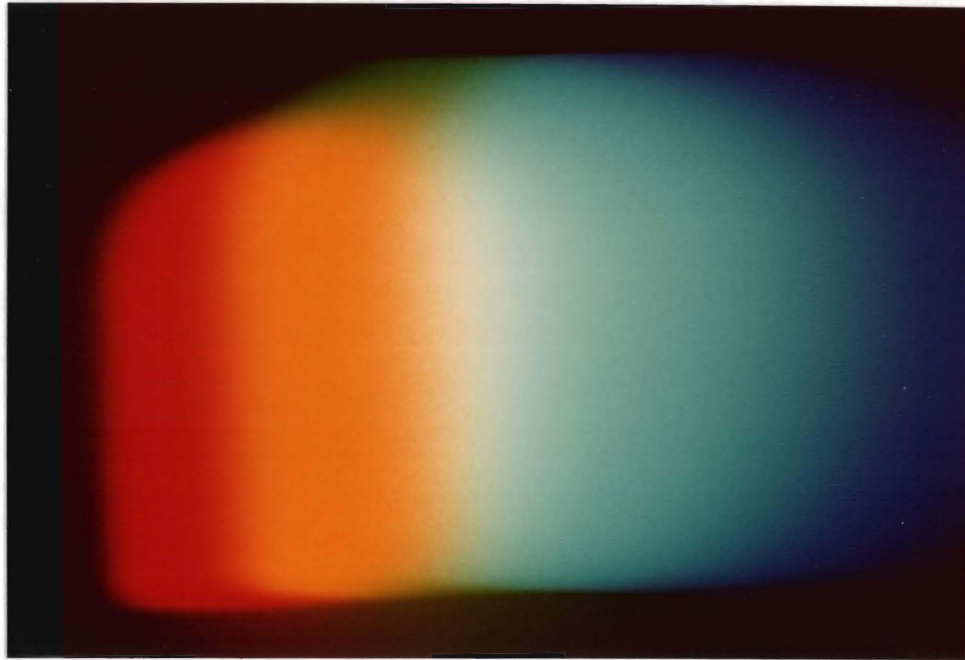


Foto 16. Uitgangsspectrum. Serie II. Onvoldoende gebleekt.

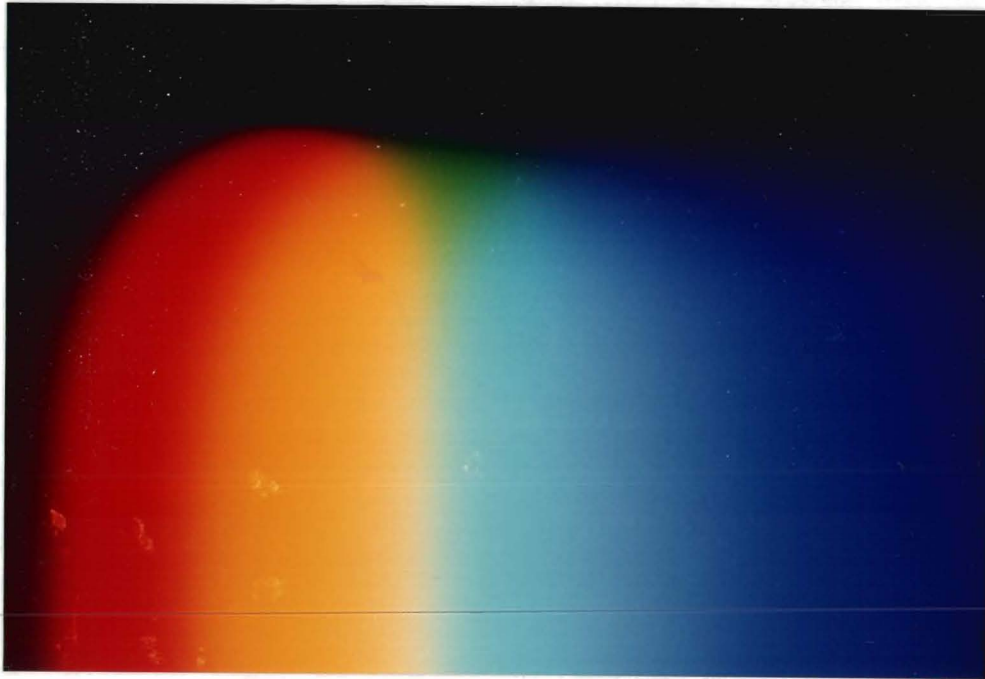


Foto 16. Ingangsspectrum.

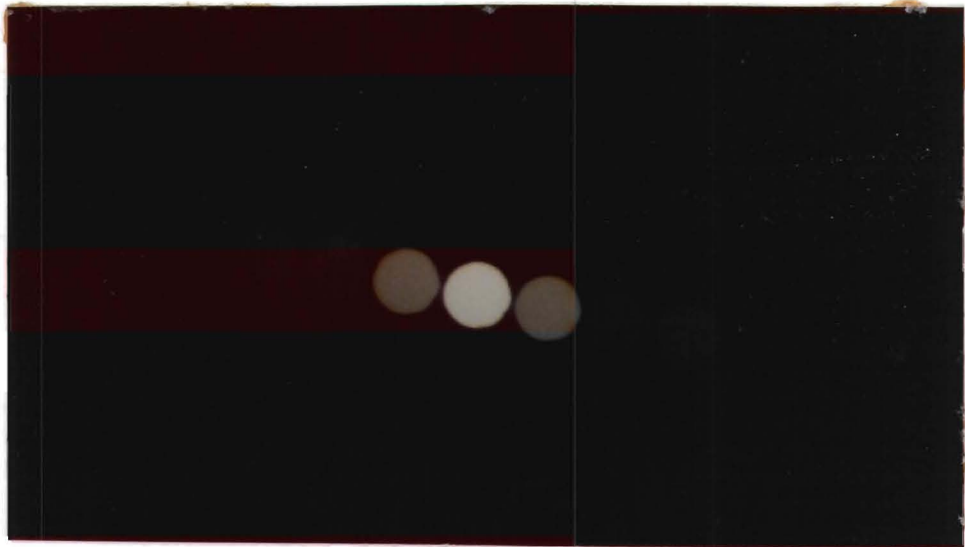


Foto 12. Beeldvermenigvuldiging. Serie II. Extra gebleekt.

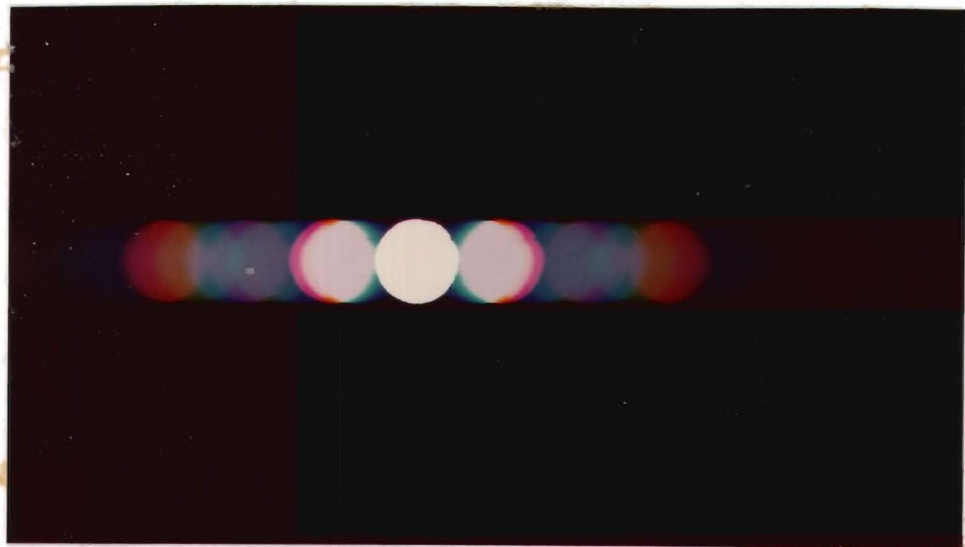


Foto 13. Beeldvermenigvuldiging. Normale Fouriertrans.

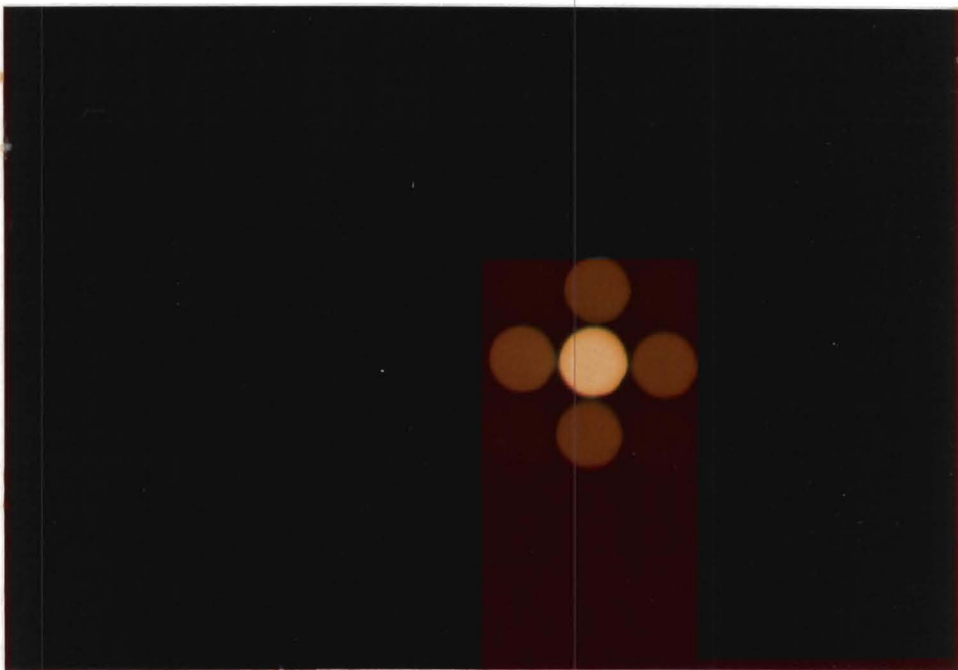


Foto 14. Beeldvermenigvuldiging. Serie II. Onvoldoende gebleekt.

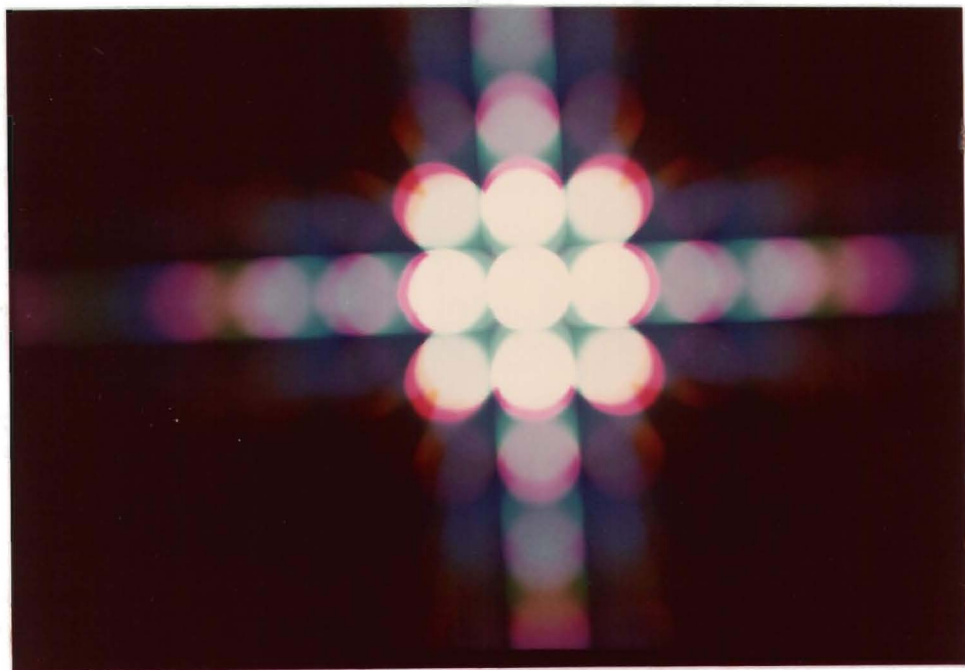
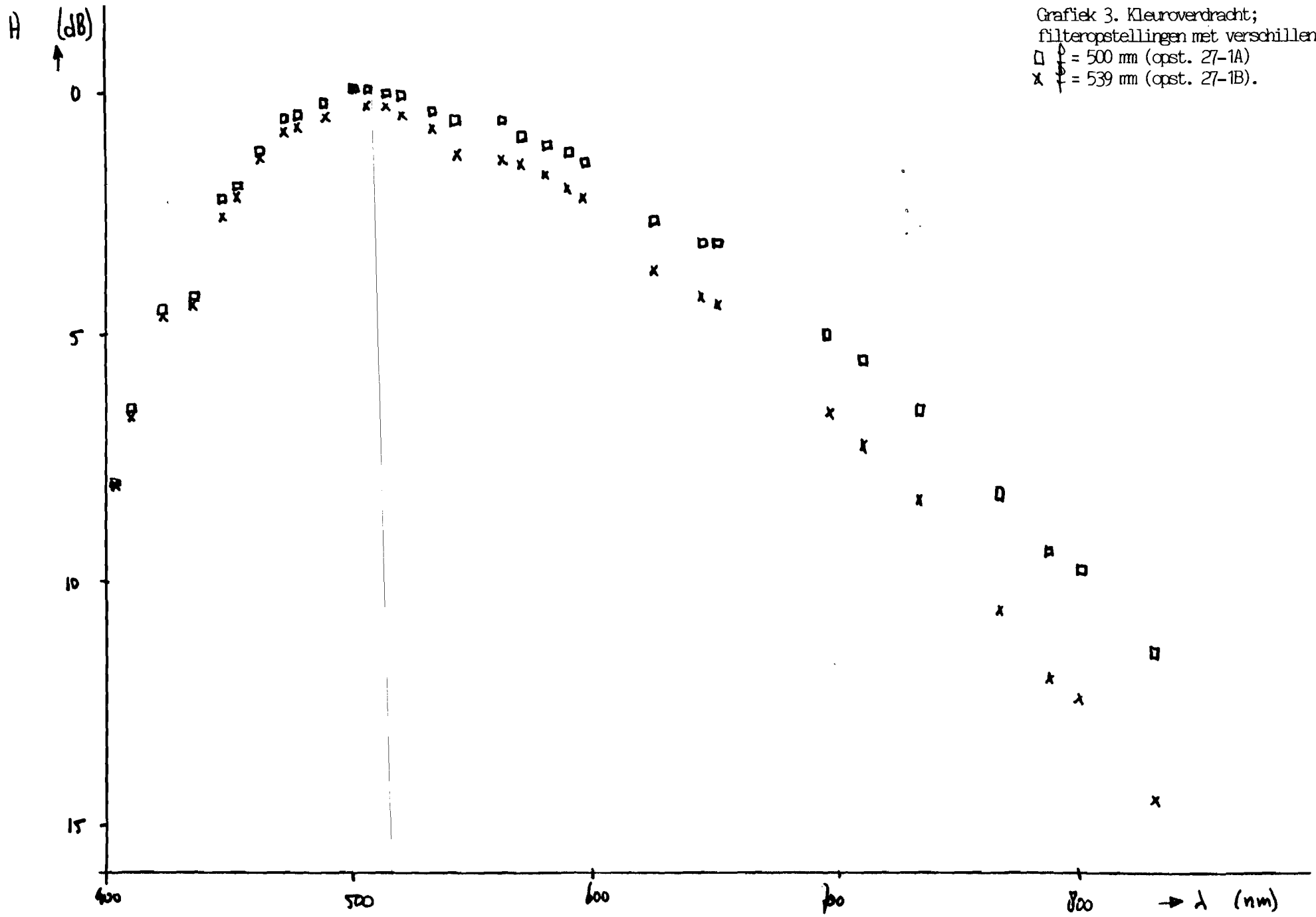


Foto 15. Beeldvermenigvuldiging. Normale Fouriertrans.



Grafiek 3. Kleuroverdracht;
 filteropstellingen met verschillende ϕ .
 □ $\phi = 500$ mm (opst. 27-1A)
 × $\phi = 539$ mm (opst. 27-1B).

3.5. Filters, enige kwantitatieve gegevens; filteropstelling met filters.

We hebben eerder gesteld dat zowel het plaats- als het frekwentiedomein eindig zijn, zodat filters gemaakt mogen worden met deze eigenschappen (zie (151)/(152)). Dit berust op het gegeven dat het oog ook zijn beperkingen kent, zowel in de openingshoek, als in het oplossend vermogen. Als hoogst waarneembare frekwentie geldt een frekwentie van ongeveer 60 lijnen per graad visuele hoek [29]. De omstandigheden waarbij deze frekwentie nog waargenomen kan worden mag extreem genoemd worden. In normale omstandigheden zal deze maximale frekwentie een stuk lager liggen.

We maken hier een schatting voor het SBWP. van het ingangsbeeld. We gaan uit van het proefplaatje zie foto 2. De afmetingen hiervan zijn $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$ cm. Het patroon wordt driemaal in zichzelf herhaald. Het allerhoogste aantal balkjes per afstandseenheid ligt op ongeveer 100 mm^{-1} . Deze balkjes zijn zonder vergroting niet meer zichtbaar. We stellen dit als allerhoogste frekwentie van hetingangssignaal. Het ruimtebandbreedte product van de ingangsfunctie wordt dan gegeven door

$$\text{SBWP}(\text{ingangssignaal}) = 1500$$

Zoals we eerder gezien hebben is het ruimtebandbreedte product van het filter slechts afhankelijk van de genormaliseerde maximale helling die we in het filter willen aanbrengen. Voor filters van enige praktische waarde moet het filter al gauw een SBWP. van rond de 10^3 hebben.

Daar de fouriergetransformeerde slechts plaatsstationair is binnen een vlek van ongeveer $1\frac{1}{2}$ cm in doorsnee, heeft het herhalen van een filter niet veel zin. Gebruiken we (116) en stellen a volgens (158) dan volgt dat

$$b > \frac{\lambda}{\beta} \approx 3 \text{ cm.}$$

Ieder herhaald filter valt buiten het bereik van de getransformeerde.

3.5.1 Apparatuur voor het maken van computerhologrammen.

De verschillende mogelijkheden om computerhologrammen te maken zijn hieronder op een rij gezet:

+Pen en inktplotter: deze methode is beperkt in zijn nauwkeurigheid. 256 × 256 cellen kunnen erop geplot worden [18,19].

+LED en filmrolplotter : binaire en grijstoonhologrammen zijn mogelijk. Nauwkeurigheid tot op 25 μm . Met vlakke plottafels kan de nauwkeurigheid tot op een micron gebracht worden. Grotere hologrammen zijn hierop te maken, 1024 × 1024 cellen.

+Graveren op een vlakke plottafel. Nauwkeurigheid hetzelfde als bij pen en plotter, echter de graveerbeitels zijn in kleinere afmetingen dan de minimale penbreedte voorhande . Op speciaal graveermateriaal leent dit procedé zich goed voor het maken van interferogrammen [31].

+Laserscanning devices: de mogelijkheden van zulke apparaten zijn zeer groot. gerapporteerd zijn hologrammen van 125,000 × 125,000 punten met een increment van 0.633 μm . Bij deze methode wordt direct in fotoresist geschreven [30].

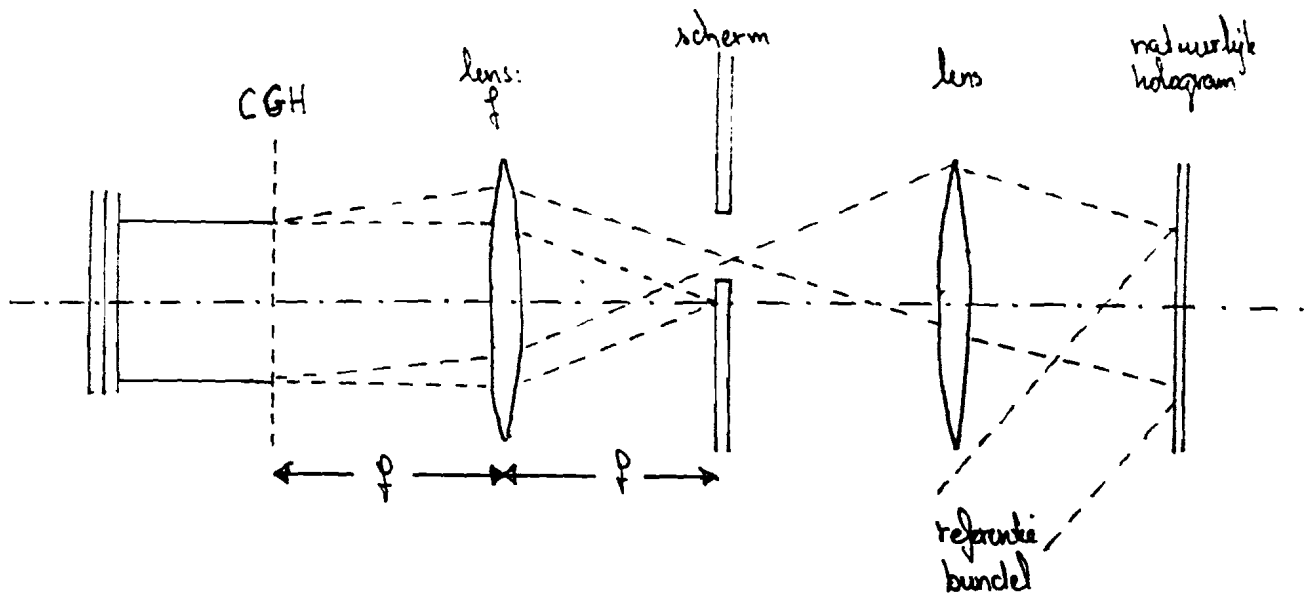
+TV scherm. Aantal punten van een scherm is nog beperkt (4000 × 4000). Wel interessant vanwege de mogelijkheid om grijstoonhologrammen te maken en om direct fotoverkleiningen van het scherm te nemen. Moeilijkheden ontstaan o.a. door de kromming van het scherm.

+Elektronen straal. Hiermee is het mogelijk hologrammen te maken met een SBWP. dat dichtbij het SBWP. komt van een natuurlijk hologram. Dit vereist zeer speciale apparatuur.

De plotgrootte is vaak beperkt. Gebruikelijke groottes gaan tot rond de 1 × 1 meter. Deze grootte is ook nog op normale fotografische manier te verkleinen. Vaak zal zo'n verkleiningsproces een twee- stappen proces zijn. Hierbij moet ook het oplossend vermogen van de verkleiningsinstallatie in de gaten gehouden worden [31].

In vele gevallen is het voordelig van een computerhologram een natuurlijk hologram te maken. Zowel een hogere efficiëntie, als een hogere draaggolffrekwentie kunnen hierdoor verkregen worden [21,32] zie figuur 31. Ook kan voor niet-detour fase hologrammen predistortie toegepast

worden [33]. Hiermee kan in iedere gewenste mate de vervorming ten gevolge van apertuurgroottes gecorrigeerd worden.



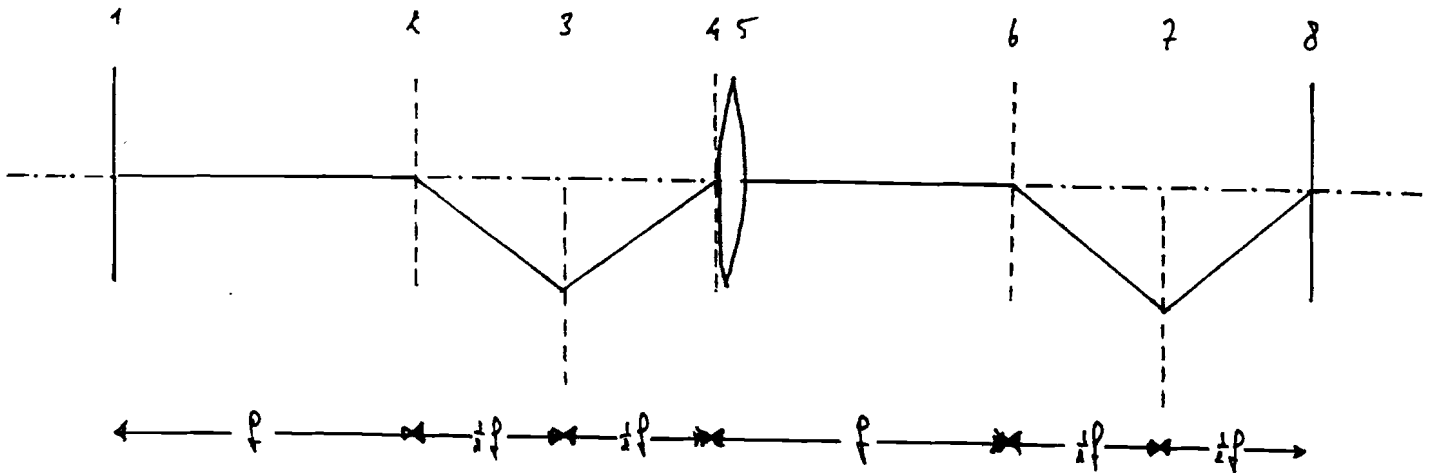
Figuur 31. Het maken van een natuurlijk hologram van een computerhologram.

3.5.2. Opstelling met filters.

Om met de filteropstelling als geheel zo voordelig mogelijk te werken wat betreft licht en kleurverlies, is het wenselijk zo weinig mogelijk hologrammen in de opstelling te gebruiken. Indien we de filters combineren met de twee divergente zoneplaatjes, zijn slechts vijf hologrammen in de totale opstelling nodig. De opstelling dient dan enigzins gewijzigd te worden, zie figuur 32.

Bij het maken van een natuurlijk hologram van een computerhologram wordt in plaats van een referentiebundel (zie figuur 31) een divergerende bundel gebruikt. Hiermee wordt bereikt dat het hologram zowel de filterwerking heeft als de werking van de twee divergente zoneplaatjes. Pro-

blemen hierbij worden veroorzaakt doordat we nu niet meer in staat zijn om de hoeken strikt voor te schrijven zoals we dat deden bij het maken van de hologrammen van serie **II** (zie figuur 24). Dit introduceert fouten waarvan we niet van te voren kunnen zeggen hoe ernstig dat zal blijken. Dit zal experimenteel bepaald moeten worden.



Figuur 32. Filteropstelling met computergenererde hologrammen.

- 1: Ingangsvlak
- 2: Convergent zoneplaatje
- 3: Raster
- 4: Combinatie van filter en divergente zoneplaatjes
- 5: Lens, $\frac{1}{2}f$
- 6: Convergent zoneplaatje
- 7: Raster
- 8: Uitgangsvlak

4. CONCLUSIES.

- +Uit theoretische beschouwingen blijkt het mogelijk met behulp van off-axis zoneplaatjes, een holografisch raster en een lens een Fouriertransformator te bouwen.
- +Deze Fouriertransformator levert in een eerste orde benadering een achromatisch beeld. Fouten treden op evenredig met de afwijkingen ten opzichte van de opnamekleur van de holografische elementen.
- +De gegeven theoretische afleidingen zijn slechts geldig op de optische as. Dit beperkt de afmetingen van het ingangsobject.
- +Met behulp van twee achromatische Fouriertransformatoren kan een incoherent polychromatisch filtersysteem gebouwd worden.
- +De gebouwde filteropstelling bleek in praktijk in goede benadering achromatisch te werken.
- +Het uitgangsspectrum van de filteropstelling is niet evenredig met het ingangsspectrum van het gebruikte licht. Er zijn kleuren die beter door het systeem komen dan andere. Het blekingsproces van de hologrammen heeft hierop een invloed.
- +Als filters kunnen computer gegenereerde hologrammen dienen.
- +In dat geval kunnen filter en divergente zoneplaatjes gecombineerd worden in een hologram. Dit verbetert de lichtopbrengst. Moeilijkheden liggen in de opnametechniek. Deze methode zal experimenteel getest moeten worden.
- +Om de beperkingen van incoherent filteren te omzeilen verdient een filteropstelling met een subtractiesysteem de aandacht.

5. LITERATUUR.

1. A.Papoulis,"Probability,random variables and stochastic processes",
New York: McGraw-Hill,1965.
2. M.J.Bastiaans,"The Wigner distribution function applied to optical signals
and systems",Opt.Commun.25,26 (1978).
3. J.W.Goodman,"Introduction to Fourier optics",
New York: McGraw-Hill,1968.
4. G.Jacobs,"De realisatie van een achromatische Fourier-transformator met
behulp van "off-axis" zoneplaatjes en diffractietralies",
Stageverslag THE,1982.
5. G.M.Morris,"Diffraction theory for an achromatic Fouriertransformation",
Appl.Opt. 20,2017 (1981).
6. R.Ferriere,J.P.Goedgebuer,"A spatially coherent achromatic Fourier-transformer",
Opt Commun. 42,223 (1982).
7. W.Lukosz,"Übertragung nicht-negativer Signale durch lineare Filter",
Optica Acta 9, 335 (1962)
8. M.J.Bastiaans,"The Wigner distribution function of partially coherent light",
Optica Acta 28,1215 (1981).
9. R.J.Collier,C.B.Burckhardt,L.H.Lin,"Optical holography",
New York:Academic Press, 1971.
10. A.W.Lohmann,D.P.Paris,"Binary Fraunhofer holograms, generated by computer",
Appl.Opt. 6,1739 (1967).
11. N.C.Gallagher Jr.,J.A.Bucklew,"Non-detour phase digital holograms:an analysis",
Appl. Opt.19,4266 (1980).
12. J.P.Allebach,"Representation-related errors in binary digital holograms: a
unified analysis", Appl.Opt. 20,290 (1981).
13. J.P.Hugonin,P.Chavel,"A complement to the theory of Lohmann-type computer
holograms",Appl.Opt. 16, 342 (1976).
14. W.-H.Lee,"Sampled Fourier transform hologram generated by computer",
Appl.Opt. 9, 639 (1970).

15. C.B.Burckhardt,"A simplification of Lee's method of generating holograms by computer",Appl.Opt. 9,1949(1970).
16. C.K.Hsueh,A.A.Sawchuk,"Computer-generated double-phase holograms", Appl.Opt. 17, 3874 (1978).
17. W.-H.Lee,"Binary computer generated holograms", Appl.Opt. 18, 3661 (1979).
18. W.-H.Lee,"Computer-generated holograms: techniques and applications", in: E.Wolf,"Progress in Optics XVI",Amsterdam: North-Holland, 1978.
19. W.J.Dallas,"Computer-generated holograms",in: B.R.Frieden,"The computer in optical research,Topics in Applied Physics vol.41", New York: Springer, 1980.
20. A Papoulis,"Signal Analysis", London: McGraw-Hill, 1977.
21. P.Chavel,S.Lowenthal,"A method of incoherent optical image processing using synthetic holograms",J.Opt.Soc.Am. 66, 14 (1976).
22. J.F.Ebersole,"Optical image subtraction", Opt.Eng. 14, 436 (1975).
23. F.T.S.Yu,A.Tai,"Incoherent image addition and subtraction: a technique", Appl.Opt. 18,2705 (1979).
24. S.T.Wu,F.T.S.Yu,"Image subtraction with an encoded extended incoherent source", Appl.Opt. 20, 4082 (1981).
25. S.R.Dashiell, A.W.Lohmann,T.D.Michaelson, Opt. Commun. 8, 105 (1973).
26. S.R.Dashiell, A.W.Lohmann, Opt.Commun. 8, 100 (1973).
27. G.Indebetouw,L.Bernardo,M.Miller,"Real-time incoherent subtraction of irradiance Appl. Opt. 19, 1218 (1980).
28. L.Selymar,D.J.Stone,"Volume holography and volume gratings", London: Academic Press, 1970.
29. T.N.Cornsweet,"Visual Perception", New York: Academic Press, 1970.
30. K.Biedermann,O.Holmgren,"Large-size distortion-free computer-generated holograms in photoresist", Appl.Opt. 16, 2014 (1977).

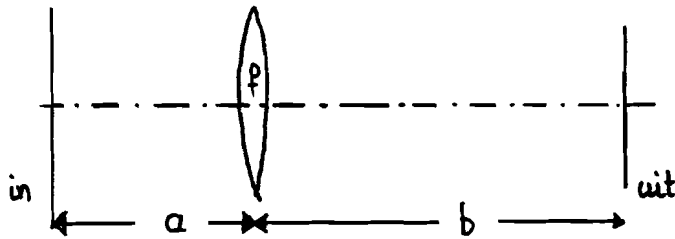
31. R.F.C.Kriens, "Theorie en vervaardiging van de als computerhologram opgevatte binaire Fresnel-zoneplaat", kandidaatsverslag THDelft, 1974.
 32. H.Bartelt, S.K.Case, "High efficiency hybrid computergenerated holograms", Appl.Opt. 21, 2886 (1982).
 33. M.J.Bastiaans, "A generalized sampling theory with applications to computer generated transparencies", J.Opt.Soc.Am. 68, 1658 (1978).
 34. P.A.Vroon, "Bewustzijn, hersenen en gedrag", Baarn:Ambo, 1976.
 35. A.L.Glass, K.J.Holyoak, J.L.Santa, "Cognition", London: Addison-Wesley, 1979.
 36. G.B.Fuchs: "Bericht eines Bremer Stadtmusikanten", Frankfurt am Main: Fischer, 1980.
-

6. APPENDICES.

1. De ideale afbeelding als limietgeval.
2. Berekening van het raster en het zoneplaatje in de Wigner distributie.
3. Over incoherente velden en intensiteiten.
4. De oriëntering van de achromatische Fouriertransformatoren.
5. Spectrum van de Xenonlamp.
6. Intensiteiten bij het opnemen van het zoneplaatje.
7. Chemicaliën.
8. Meting van de kleuroverdracht.
9. Fouten optredend bij twee direct achter elkaar gekoppelde transformatoren.
10. Optimale keuze van de lenzen binnen het ideale systeem.
11. Het raster als filter.

Appendix 1. De ideale afbeelding als limietgeval.

We gaan uit van een systeem van een lens met brandpuntsafstand f , en een vrije ruimte vóór en na de lens ter lengte van a resp. b (zie onderstaande figuur).



Dit systeem heeft een PSF. gegeven door

$$g(\eta, \xi) = \exp \left\{ -i \left(\alpha \eta^2 + \beta \eta \xi + \gamma \xi^2 \right) \right\} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi i}}$$

met
$$\alpha = \frac{k}{2b} \left(\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}} \right)$$

$$\beta = \frac{k}{ab} \left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}} \right)$$

$$\gamma = \frac{k}{2a} \left(\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}} \right)$$

Voor de ideale afbeelding geldt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

zodat α , β en γ en dus ook $g(\eta, \xi)$ niet meer gedefinieerde zijn. We stellen nu

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{f} \epsilon, \quad \text{met } |\epsilon| \ll 1$$

Dan geldt

$$\alpha = \frac{k}{2ab} \left\{ -\frac{a f}{b} \frac{1}{\epsilon} + a \right\}$$

$$\beta = \frac{k f}{ab} \frac{1}{\epsilon}$$

$$\gamma = \frac{k}{2ab} \left\{ -\frac{b f}{a} \frac{1}{\epsilon} + b \right\}$$

$$g_\epsilon(\lambda, \xi) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \exp \left\{ -i \left[\left(-\frac{a}{b} \frac{1}{\epsilon} + \frac{a}{f} \right) \lambda^2 + \frac{a}{\epsilon} \lambda \xi + \left(-\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} + \frac{b}{f} \right) \xi^2 \right] \frac{kf}{2ab} \right\}$$

We moeten nu bewijzen dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(\lambda, \xi) = \sqrt{\pi} \delta \left(\xi - \frac{\lambda}{\pi} \right)$$

met $\pi = \frac{a}{b}$. Dit betekent dat

i. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int g_\epsilon(\lambda, \xi) d\xi = \sqrt{\frac{a}{b}}$

ii. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int g_\epsilon(\lambda, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \varphi\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)$

i. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int g_\epsilon(\lambda, \xi) d\xi =$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab \epsilon}} \exp \left\{ -i \frac{k}{2b} \left(1 - \frac{f}{b\epsilon} \right) \lambda^2 \right\} \int \exp \left\{ -i \left[\frac{k}{2a} \left(1 - \frac{f}{a\epsilon} \right) \xi^2 + \frac{kf}{ab\epsilon} \lambda \xi \right] \right\} d\xi =$$

(voor afleiding deze stap zie verderop)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab \epsilon}} \exp \left\{ -i \frac{k}{2b} \left(1 - \frac{f}{b\epsilon} \lambda^2 \right) \right\} \sqrt{\frac{\pi}{i}} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2a} \left(1 - \frac{f}{a\epsilon} \right)}} \exp \left\{ \frac{i \left(\frac{kf}{ab\epsilon} \lambda \right)^2}{4 \frac{k}{2a} \left(1 - \frac{f}{a\epsilon} \right)} \right\} =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{-f}{b\epsilon \left(1 - \frac{f}{a\epsilon} \right)}} \exp \left(-i \lambda^2 \left\{ \frac{k}{2b} \left(1 - \frac{f}{b\epsilon} \right) - \frac{kf^2}{2ab^2} \frac{1}{\epsilon^2 - \frac{f\epsilon}{a}} \right\} \right) =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{f}{\frac{b}{a} f - b\epsilon}} \exp \left(-i \lambda^2 \frac{kf}{2ab\epsilon} \left\{ \frac{a}{b} \left(\frac{b}{f} \epsilon - 1 \right) + \frac{a}{b} \frac{1}{1 - \frac{f}{a}\epsilon} \right\} \right) =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{f}{\frac{b}{a} f - b\epsilon}} \exp \left(-i \lambda^2 \frac{kf}{2ab\epsilon} \left\{ -\frac{a}{b} + \frac{a}{f} \epsilon + \frac{a}{b} \left(1 + \frac{a}{f} \epsilon + \left(\frac{a}{f} \epsilon \right)^2 + \dots \right) \right\} \right)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{f}{\frac{b}{a} f - b\epsilon}} \exp \left(-i \lambda^2 \frac{kf}{2ab\epsilon} \left\{ \frac{a}{f} + \frac{a^2}{bf} + \text{Rest}(\epsilon) \right\} \right) =$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \exp \left(-i \lambda^2 \frac{kf}{2ab} \left\{ \frac{a}{f} + \frac{a^2}{bf} \right\} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \exp \left(-i \lambda^2 \frac{ka}{2bf} \right).$$

ii. $I = \int g(x, \xi) \left\{ \varphi(\xi) - \varphi\left(\frac{x}{M}\right) \right\} d\xi$ met $M = \frac{b}{a} - \frac{b}{f} \in$

$$I = \int_{-\infty}^{x/M - \delta} g(x, \xi) \left\{ \varphi(\xi) - \varphi\left(\frac{x}{M}\right) \right\} d\xi + \int_{x/M - \delta}^{x/M + \delta} g(x, \xi) \left\{ \varphi(\xi) - \varphi\left(\frac{x}{M}\right) \right\} d\xi + \int_{x/M + \delta}^{\infty} g(x, \xi) \left\{ \varphi(\xi) - \varphi\left(\frac{x}{M}\right) \right\} d\xi.$$

$= I_1 + I_2 + I_3$ met $\alpha \delta \ll 1$.

$$I_1 = 2 \text{Max} \int_{-\infty}^{x/M - \delta} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \exp\left(\frac{-ikf}{2ab}\right) \left\{ \left[-\frac{a}{b} \frac{1}{\epsilon} + \frac{g}{f}\right] x^2 + \frac{2}{\epsilon} x \xi + \left[-\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} + \frac{b}{f}\right] \xi^2 \right\} d\xi =$$

$$= 2 \text{Max} \int_{-\infty}^{-\delta} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \exp\left(\frac{-ikf}{2ab}\right) \left\{ \left(-\frac{a}{b} \frac{1}{\epsilon} + \frac{g}{f}\right) x^2 + \frac{2}{\epsilon} x \left(\eta + \frac{x}{M}\right) + \left[-\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} + \frac{b}{f}\right] \left(\eta + \frac{x}{M}\right)^2 \right\} d\eta$$

$$= 2 \text{Max} \int_{-\infty}^{-\delta} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \exp\left(\frac{-ikf}{2ab}\right) \left\{ x^2 \left[\left(-\frac{a}{b} \frac{1}{\epsilon} + \frac{g}{f}\right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\frac{b}{a} - \frac{b}{f}} \right] + \left[-\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} + \frac{b}{f}\right] \eta^2 \right\} d\eta$$

$$= 2 \text{Max} \int_{-\infty}^{-\gamma} \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \exp\left(\frac{ikf}{2ab} \zeta^2\right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f}}} \exp\left(\frac{-ikf}{2ab} \left\{ x^2 \left[\left(-\frac{a}{b} \frac{1}{\epsilon} + \frac{g}{f}\right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\frac{b}{a} - \frac{b}{f}} \right] \right\} \right)$$

$$= 2 \text{Max} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i b^2 \left(1 - \frac{a}{f} \epsilon\right)}} \int_{-\infty}^{-\gamma} \exp\left(\frac{ikf}{2ab} \zeta^2\right) d\zeta \exp\left(\frac{-ikf}{2ab} \left\{ -\frac{a}{b} \frac{1}{\epsilon} + \frac{g}{f} + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\frac{b}{a} - \frac{b}{f}} \right\} \right)$$

met achtereenvolgens: $\text{Max} = \max \varphi(x)$

$$\eta = \xi - \frac{x}{M}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f}} \xi$$

$$\gamma = \delta \sqrt{\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f}}$$

Voor $\epsilon \rightarrow 0$ geldt $\gamma \rightarrow \infty$ en dus $I_1 \rightarrow 0$.

Idem voor I_3 .

$$I_2 = \int_{x/M - \delta}^{x/M + \delta} g(x, \xi) \left\{ \varphi(\xi) - \varphi\left(\frac{x}{M}\right) \right\} d\xi.$$

Taylorreeks: $\varphi(\xi) - \varphi\left(\frac{x}{M}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} \left(\xi - \frac{x}{M}\right)^n$

$$g(x, s) = \sqrt{\frac{b}{2\pi i}} \exp \left\{ \frac{ikf}{2ab} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f} \right] \left(\zeta - \frac{x}{M} \right)^2 \right\} \exp \left\{ \frac{-ikf}{2ab\epsilon} \left[\frac{1}{f\epsilon} - \frac{b}{a} + \frac{1}{f} - \frac{a}{b\epsilon} \right] \right\}$$

Stel nu $\zeta - \frac{x}{M} = z$

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} \exp \left\{ \frac{ikf}{2ab} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f} \right] s^2 \right\} \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} z^n ds \exp \left\{ \frac{-ikf}{2ab\epsilon} \left[\frac{1}{f\epsilon} - \frac{b}{a} + \frac{1}{f} - \frac{a}{b\epsilon} \right] \right\}$$

Stel $I_{2n} = \int_{-\delta}^{+\delta} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} \exp \left\{ \frac{ikf}{2ab} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f} \right] s^2 \right\} \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} z^n ds, n=1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} * I_{2,1} &= \int_{-\delta}^{+\delta} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} \exp \left\{ \frac{ikf}{2ab} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f} \right] s^2 \right\} s ds \frac{\varphi'\left(\frac{x}{M}\right)}{1!} \\ &= \int_{-\delta}^{+\delta} \text{oneven functie } ds = 0 \quad (\text{Zo ook } I_{2n} = 0 \text{ voor } n=3, 5, 7, \dots) \end{aligned}$$

* We stellen $h(s) = \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} \exp \left(\frac{ikf}{2ab} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f} \right] s^2 \right)$

$$h'(s) = \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} \exp \left(\frac{ikf}{2ab} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f} \right] s^2 \right) 2s \frac{ikf}{2ab} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{\epsilon} - \frac{b}{f} \right]$$

$$= \text{constante} = 2s h(s)$$

$$I_{2n} = \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} \int_{-\delta}^{+\delta} h(s) z^n ds = \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{2} h'(s) z^{n-1} ds = \text{partieel integreren}$$

$$= \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} \left\{ \left[\frac{1}{2} h(s) z^{n-1} \right]_{-\delta}^{+\delta} - \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{2} h(s) (n-1) z^{n-2} ds \right\}$$

De eerste term is nul voor $\delta \rightarrow 0$.

$$|I_{2,0}| \leq \int_{-\delta}^{+\delta} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} ds \varphi\left(\frac{x}{M}\right) = \varphi\left(\frac{x}{M}\right) \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} \cdot 2\delta \rightarrow \text{voor } \delta \rightarrow 0.$$

$$|I_{2n}| \leq 2 \int_0^{\delta} \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} s^n ds \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} = 2 \sqrt{\frac{kf}{2\pi i ab\epsilon}} \left[\frac{1}{n+1} s^{n+1} \right]_0^{\delta} \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x}{M}\right)}{n!} \rightarrow 0 \text{ voor } \delta \rightarrow 0$$

$n=1, 2, \dots$

Uit i en ii volgt dat de limiet van een lensstelsel met $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \rightarrow \frac{1}{f}$ gegeven wordt door een δ -functie met eventueel een fasefactor. Deze fasefactor is in (26) achterwege gelaten omdat in de meeste gevallen naar de intensiteit gekeken wordt. Daarbij is de fase niet van belang.

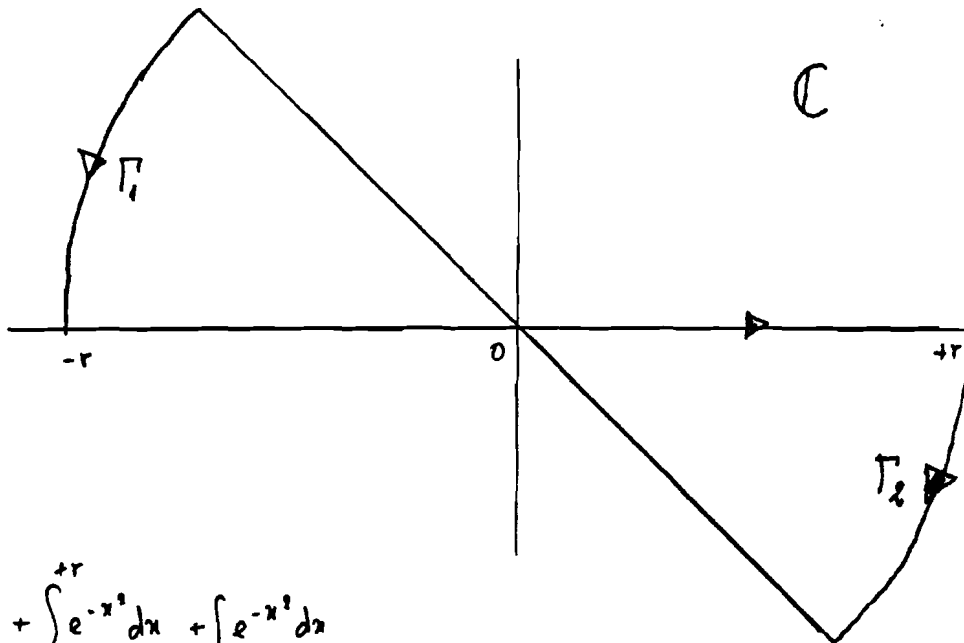
Hulpstelling.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i s^2} ds$$

Substitutie $z = e^{-i \frac{\pi}{4}} x$

We stellen $\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x} (1+i)$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{\pi}{4} x^2} e^{-x^2} dx$$



Contourintegraal

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-i \frac{\pi}{4}} \left[\int_{\Gamma_1} e^{-x^2} dx + \int_{\Gamma_2} e^{-x^2} dx + \int_{\Gamma_3} e^{-x^2} dx \right]$$

Γ_1 en Γ_2 delen van de cirkel met straal r .

Stel $z = r e^{i\alpha}$, $\frac{3}{4}\pi < \alpha < \pi$

$$I_1 = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-r^2 e^{2i\alpha}} r d e^{i\alpha} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} r e^{-r^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)} i e^{i\alpha} d\alpha$$

Integrand gaat naar nul voor $r \rightarrow \infty$ behalve voor $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. Daarom onderzoeken we de norm van I_1 voor $\frac{3}{4}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi + \delta$ met $0 < \delta < 1$.

$$|I_1(\delta)| = \left| \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \delta} r e^{-r^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)} i e^{i\alpha} d\alpha \right|$$

$$\leq \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \delta} r e^{-r^2 \cos 2\alpha} d\alpha \leq A \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \delta} r e^{-r^2 \cos 2\alpha} \sin 2\alpha d\alpha$$

met A een willekeurig getal volgens $A \geq [\sin(2(\frac{3}{4}\pi + \delta))]^{-1} = [\cos(2\delta)]^{-1}$

$$|I_1(\delta)| \leq A \left[\frac{1}{2r} e^{-r^2 \cos 2\alpha} \right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \delta} \rightarrow 0 \text{ voor } r \rightarrow \infty.$$

Dus $I_1(r) \rightarrow 0$ voor $r \rightarrow \infty$ en idem $I_3(r) = \int_{\Gamma_3} e^{-x^2} dx \rightarrow 0$ voor $r \rightarrow \infty$.

$$I_2(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Zodat $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i s^2} ds = e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{i}}$.

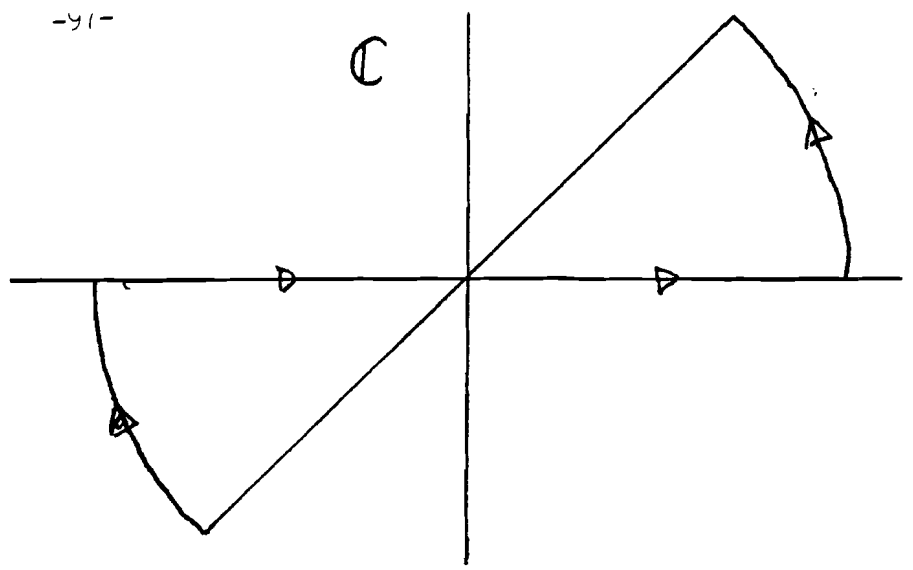
Evenzo behandelen we de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi, \text{ waarbij we}$$

$$\text{substitueren } \xi = e^{i\frac{\pi}{4}} x.$$

We vinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$



Uit bovenstaande integralen is af te leiden dat geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left(\alpha \xi^2 + \beta \xi \right) \right\} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left(-i \frac{\beta^2}{4\alpha} \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Appendix 2. Het raster en het zoneplaatje in de Wigner distributie.

2.1. Het raster.

$$t(x) = 1 + \cos(\lambda x)$$

$$\begin{aligned} F_t(x, u) &= \int t(x + \frac{x'}{2}) t^*(x - \frac{x'}{2}) \exp(-iu x') dx' \\ &= \frac{1}{4} \int \left\{ 2 + \exp(i\lambda(x + \frac{x'}{2})) + \exp(-i\lambda(x + \frac{x'}{2})) \right\} \left\{ 2 + \exp(i\lambda(x - \frac{x'}{2})) + \exp(-i\lambda(x - \frac{x'}{2})) \right\} \exp(iu x) \\ &= \frac{1}{4} \int \left[4 \exp(-iu x') + 2 \exp(i\lambda x) \exp(i x' (\frac{\lambda}{2} - u)) + 2 \exp(-i\lambda x) \exp(-i x' (\frac{\lambda}{2} + u)) \right. \\ &\quad \left. + 2 \exp(i\lambda x) \exp(-i x' (\frac{\lambda}{2} + u)) + 2 \exp(-i\lambda x) \exp(i x' (\frac{\lambda}{2} - u)) + \right. \\ &\quad \left. \exp(i\lambda x) + \exp(-i\lambda x) \right] \exp(-iu x') + \exp(i(\lambda - u)x') + \exp(-i(\lambda + u)x') dx' \\ &= \frac{1}{4} \left[4 \cdot 2\pi \delta(u) + 4 \cos(\lambda x) 2\pi \delta(\frac{\lambda}{2} - u) + 4 \cos(\lambda x) 2\pi \delta(\frac{\lambda}{2} + u) + \right. \\ &\quad \left. \cos(2\lambda x) 2\pi \delta(u) + 2\pi \delta(\lambda - u) + 2\pi \delta(\lambda + u) \right] \\ &= 2\pi \left[1 + \frac{1}{2} \cos(2\lambda x) \right] \delta(u) + 2\pi \cos(\lambda x) \left[\delta(\frac{\lambda}{2} - u) + \delta(\frac{\lambda}{2} + u) \right] + 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\delta(\lambda + u) + \delta(\lambda - u) \right]. \end{aligned}$$

2.2 Het zoneplaatje.

$$t(x) = 1 + \cos(\lambda x^2 + u_0 x) \quad , \quad \lambda = \frac{k_0}{2f_0}$$

$$\begin{aligned} F_t(x, u) &= \frac{1}{4} \int \left\{ 2 + \exp\left\{ i\lambda(x^2 + x x' + \frac{x'^2}{4}) + i u_0(x + \frac{x'}{2}) \right\} + \exp\left\{ -i\lambda(x^2 + x x' + \frac{x'^2}{4}) - i u_0(x + \frac{x'}{2}) \right\} \right\} \\ &\quad \left\{ 2 + \exp\left\{ i\lambda(x^2 - x x' + \frac{x'^2}{4}) + i u_0(x - \frac{x'}{2}) \right\} + \exp\left\{ -i\lambda(x^2 - x x' + \frac{x'^2}{4}) - i u_0(x - \frac{x'}{2}) \right\} \right\} \exp(-iu x') dx' \end{aligned}$$

Dit levert 9 termen tussen integraal- en dx' -teken; achtereenvolgens

$$\begin{aligned} &4 \exp(-iu x') \\ &2 \exp(i\lambda x^2) \exp\left\{ i \frac{1}{4} \lambda x'^2 + i \left(\lambda x + \frac{u_0}{2} - u \right) x' \right\} \exp(i u_0 x) \\ &2 \exp(-i\lambda x^2) \exp\left\{ -i \frac{1}{4} \lambda x'^2 - i \left(\lambda x + \frac{u_0}{2} + u \right) x' \right\} \exp(-i u_0 x) \\ &2 \exp(i\lambda x^2) \exp\left\{ i \frac{1}{4} \lambda x'^2 + i \left(-\lambda x - \frac{u_0}{2} - u \right) x' \right\} \exp(i u_0 x) \\ &2 \exp(-i\lambda x^2) \exp\left\{ -i \frac{1}{4} \lambda x'^2 + i \left(-\lambda x - \frac{u_0}{2} + u \right) x' \right\} \exp(-i u_0 x) \\ &\exp(i\lambda x^2 + i u_0 x) \exp\left(i \left(\lambda \frac{x'^2}{2} - u x' \right) \right) \\ &\exp\left(i \left(\lambda x x' + u_0 x' - u x' \right) \right) \\ &\exp\left(-i \left(\lambda x x' + u_0 x' + u x' \right) \right) \\ &\exp\left(-i \left(\lambda x x' + u_0 x' \right) \right) \exp\left(-i \left(\lambda \frac{x'^2}{2} + u x' \right) \right) \end{aligned}$$

Geïntegreerd worden deze termen nu (zie ook laatste deel app.1)

$$\begin{aligned}
 & 4 \cdot 2\pi \delta(u) \\
 & 2 \cdot \exp(i\lambda x^2) \exp(iu_0 x) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp\left\{-i \frac{(\lambda x + \frac{u_0}{2} - u)^2}{\lambda}\right\} \\
 & 2 \exp(-i\lambda x^2) \exp(-iu_0 x) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp\left\{i \frac{(\lambda x + \frac{u_0}{2} - u)^2}{\lambda}\right\} \\
 & 2 \exp(i\lambda x^2) \exp(iu_0 x) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp\left\{-i \frac{(\lambda x - \frac{u_0}{2} - u)^2}{\lambda}\right\} \\
 & 2 \exp(-i\lambda x^2) \exp(-iu_0 x) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp\left\{i \frac{(\lambda x - \frac{u_0}{2} - u)^2}{\lambda}\right\} \\
 & \exp(i(\lambda 2x^2 + 2u_0 x)) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \exp\left(-i \frac{u^2}{2\lambda}\right) \\
 & 2\pi \delta(\lambda 2x + u_0 + u) \\
 & 2\pi \delta(\lambda 2x + u_0 - u) \\
 & \exp(-i(\lambda 2x^2 + 2u_0 x)) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \exp\left(i \frac{u^2}{2\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

Samennemen van de 2^{de} en 4^{de} term, alsmede de 3^{de} en 5^{de} geeft

$$\begin{aligned}
 & 8\pi \delta(u) + \\
 & \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \exp(i\lambda x^2) \exp(iu_0 x) \exp\left\{-\frac{i}{\lambda} (\lambda x + \frac{u_0}{2} + u)^2\right\} \left[\exp(i2\lambda u) + \exp(-i2\lambda u) \right] + \\
 & \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \exp(-i\lambda x^2) \exp(-iu_0 x) \exp\left\{\frac{i}{\lambda} (\lambda x + \frac{u_0}{2} - u)^2\right\} \left[\exp(i2\lambda u) + \exp(-i2\lambda u) \right] + \\
 & \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left[\exp\left\{i \left(\lambda 2x^2 + 2u_0 x - \frac{u^2}{2\lambda} + \frac{\pi}{4} \right)\right\} + \exp\left\{-i \left(\lambda 2x^2 + 2u_0 x - \frac{u^2}{2\lambda} + \frac{\pi}{4} \right)\right\} \right] \\
 & 2\pi \left[\delta(2\lambda x + u_0 + u) + \delta(2\lambda x + u_0 - u) \right]
 \end{aligned}$$

Opnieuw sorteren en meenemen van de factor $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
 F_E(x, u) = & 2\pi \delta(u) + \frac{1}{2} \pi \left[\delta(2\lambda x + u_0 + u) + \delta(2\lambda x + u_0 - u) \right] + \\
 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \cos(2\lambda u) \cos\left[-\frac{u^2 + \frac{u_0^2}{4}}{\lambda} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \cos\left[\lambda 2x^2 + 2u_0 x - \frac{u^2}{2\lambda} + \frac{\pi}{4} \right]
 \end{aligned}$$

De termen $\delta(2\lambda x + u_0 + u)$ resp. $\delta(2\lambda x + u_0 - u)$ geven de convergente lenswerking van de eerste resp. de divergente werking van de eerste orde geconjugeerde bundel.

Appendix 3. Over incoherente velden en intensiteiten.

De spectrale coherentiegraad μ wordt gedefinieerd door

$$\mu(x_1, x_2; \omega) = \frac{\lambda(x_1, x_2; \omega)}{\sqrt{\lambda(x_1, x_1; \omega) \lambda(x_2, x_2; \omega)}}$$

Een veld wordt incoherent genoemd indien

$$|\mu(x_1, x_2; \omega)| = \begin{cases} 1 & \text{als } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{als } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Omdat dit type veld niet fysisch niet mogelijk is, simpelweg omdat het niet straalt, moeten we principieel altijd met een quasi-incoherent veld werken waarbij we stellen

$$\lambda(x_1, x_2; \omega) = 0 \quad \text{voor } |x_1 - x_2| \geq \Delta x$$

met Δx klein ten opzichte van de karakteristieke afmetingen van het systeem.

Meestal werken we toch met een volledig incoherent veld. We nemen het hier voor het gemak monochromatisch

$$\lambda(x_1, x_2; \omega) = p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \omega\right) \delta(x_1 - x_2) 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Voor de intensiteit geldt

$$I(x) = \tilde{\Gamma}(x, x; 0) = \frac{1}{2\pi} \int \lambda(x, x; \omega) d\omega = p(x; \omega_0) \delta(0) = a$$

Bij dit resultaat de volgende opmerkingen. Allereerst zijn deltafuncties alleen interpreteerbaar binnen een integraal. Ten tweede is de intensiteitsfunctie gedefinieerd als een limiet van de straling binnen een gebied.

We gaan uit van een quasi-homogeen veld

$$\lambda(x_1, x_2; \omega) = p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \omega\right) \Delta(x_1 - x_2)$$

waarbij de Δ -functie een smalle op de δ -functie gelijkende functie is. Toepassen van coördinatentransformatie en uitgaan van de definitie van intensiteit in een punt als limiet over een oppervlak, geeft

$$I(x) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \iint_A p\left(\frac{x_1' + x_2'}{2} + x; \omega_0\right) \Delta(x_1' - x_2') dx_1' dx_2'$$

waarbij A het begrensd gebied is waarover x_1 en x_2 geïntegreerd worden.
Een volgende coördinatentransformatie geeft

$$\frac{x_1' + x_2'}{2} = x_3$$

$$x_1' - x_2' = x_4$$

$$I(x) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \iint_A P(x_3 + x; \omega_0) \Delta(x_4) dx_3 dx_4$$

We stellen dat Δ zodanig smal is dat A zodanig gekozen kan worden dat we voor $P(x_3 + x; \omega_0)$ mogen stellen dat

$$P(x_3 + x; \omega) \approx P(x; \omega_0)$$

en tevens dat het integratieoppervlak A zo gekozen is dat onafhankelijke integratiegrenzen voor x_3 en x_4 bestaan. Dan

$$I(x) = P(x; \omega_0) \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{B} \int_{|x_4| < B} \Delta(x_4) dx_4$$

hetgeen in woorden betekent dat de intensiteit in een punt evenredig is met $P(x; \omega_0)$. Voor niet monochromatische belichting geldt dat de intensiteit $I(x)$ evenredig is met de integraal van ω over p :

$$I(x) = \int P(x; \omega) d\omega \times \text{constante.}$$

Appendix 4. Oriëntering van de achromatische Fouriertransformatoren.

Gegeven zijn de Fouriertransformatoren zoals uitgedrukt in (49) en (50)

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \underline{E}_1 \begin{pmatrix} q_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= -d^2 \\ B &= -\frac{f_0}{k_0} (1-d^2) \\ C &= \frac{k_0}{f_0} (1+d^2) \\ D &= d-d^2 \end{aligned}$$

of de inverse gegeven door

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \underline{E}_2 \begin{pmatrix} q_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Zetten we twee transformatoren achter elkaar dan zijn daartoe vier mogelijkheden. We stellen

$$\underline{E}_3 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

met \underline{E}_3 een combinatie van twee achromatische Fouriertransformatoren.

\underline{E}_3 moet zo goed mogelijk de eenheidsmatrix benaderen.

Geval 1: $\underline{E}_3 = \underline{E}_1 \underline{E}_1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A_1 &= -1 + f(d^2) \\ B_1 &= -\frac{f_0}{k_0} (d - 2d^2) \\ C_1 &= \frac{k_0}{f_0} (d - 2d^2) \\ D_1 &= -1 + d^2 \end{aligned}$$

Geval 2: $\underline{E}_3 = \underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A_1 &= -1 + f(d^2) \\ B_1 &= 2d^2 f_0/k_0 \\ C_1 &= 2 \frac{k_0}{f_0} (d-d^2) \\ D_1 &= -1 + f(d^2) \end{aligned}$$

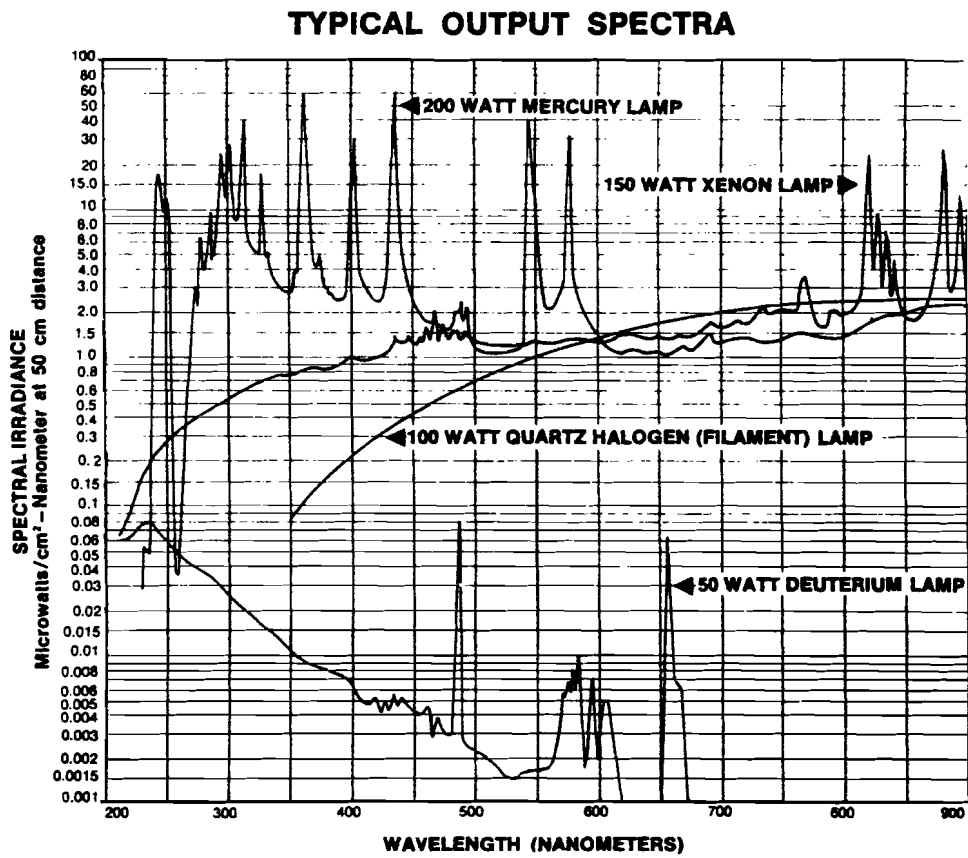
$$\begin{aligned} \text{Geval 3: } \underline{E}_3 &= \underline{E}_2 \cdot \underline{E}_2 & \Rightarrow A_1 &= -1 + d^2 \\ & & B_1 &= -\frac{f_0}{k_0} (k + d^2) \\ & & C_1 &= \frac{k_0}{f_0} (k - 2d^2) \\ & & D_1 &= -1 + f(k^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Geval 4: } \underline{E}_3 &= \underline{E}_2 \cdot \underline{E}_1 & \Rightarrow A_1 &= -1 + f(d^2) \\ & & B_1 &= 2 \frac{k_0}{f_0} (k - d^2) \\ & & C_1 &= -2 \frac{k_0}{f_0} d^2 \\ & & D_1 &= -1 + f(k^2) \end{aligned}$$

Gevallen 1 en 3 geven minder goede resultaten dan 2 en 4. Deze laatste zijn gelijkwaardig. Geval 2 wordt gekozen als optimale realisatie omdat aan de ingang van het systeem incoherent licht aanwezig is (zie (b')).

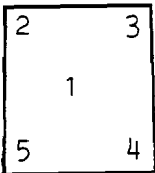
Appendix 5. Spectrum van de Xenonlamp.

In de opstelling voor de lichtbron (zie figuur 31) is gebruik gemaakt van een Oriel 150W Xenon-lamp.



Appendix 6. Intensiteiten bij het opnemen van het zoneplaatje.

De intensiteiten zijn gemeten m.b.v. een lichtgevoelige weerstand. Er stonden geen verzwakkers in de bundels (zie figuur 24). De plaatsen op het hologram waar gemeten werd liggen als op onderstaande tekening; glas naar voren gericht. Waarden in $k\Omega \times 100$.

	referentie bundel	referentie bundel (2x beam-spl.)	divergente bundel	
	plaats			
	1	0.08	0.07	0.08
	2	0.27	0.12	0.10
	3	0.23	0.15	0.12
	4	0.12	0.24	0.12
	5	0.12	0.14	0.12

De belichtingstijden waren:

voor serie II : 1 t/m 3: $\frac{1}{2}$ sec.

4 t/m 9: 1sec.

voor serie I : $\frac{1}{8}$ sec.

Het midden van de opname lag voor serie II op 5.6^{cm} omhoog en op 5.6^{cm} naar links van de hoek rechtsonder, glaskant naar voren. Alle nummer-etiketten zijn op de glaszijde rechtsboven geplakt.

Appendix 7. Chemicaliën.

Voor het ontwikkelen en het bleken van de hologrammen werden de volgende stappen genomen.

2 min: oplossing van gelijke volumedelen van de volgende twee oplossingen:

10 gr. $C_6H_6O_3$ in 1 ltr. gedestilleerd water

60 gr. Na_2CO_3 in 1 ltr. gedestilleerd water

2 min: spoelen in handwarm water

2 min: omkeerbleek

2 min: spoelen in handwarm water

enkele minuten in een zeepsopbad.

Bij de tweede serie hologrammen werd een extra bleekbad gebruikt, omdat de omkeerbleek niet sterk genoeg gewerkt had. Deze tweede bleek bestond uit:

1 min: oplossing van

1 gr. $KMnO_4$ in 1 ltr. gedestilleerd water

3 ml. geconc. H_2SO_4 in 1 ltr. gedestilleerd water

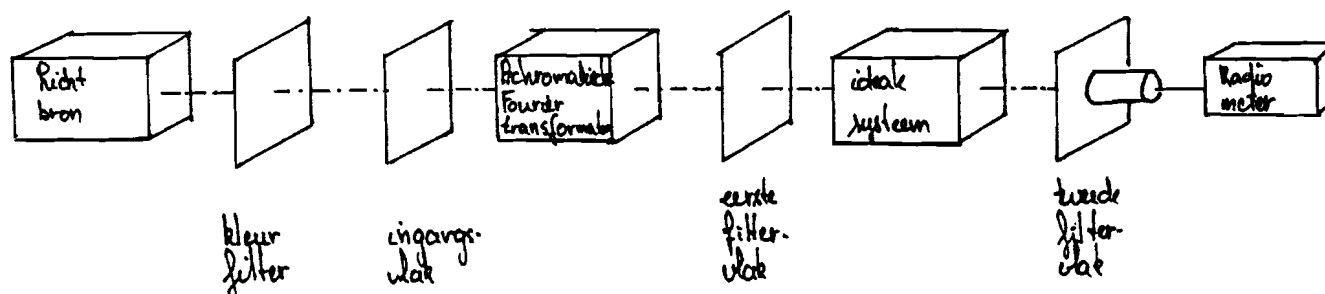
(bleekbad)

1 min: oplossing van 10 gr. Na_2SO_3 in 1 ltr. gedestilleerd water

(clearing bad)

2 min: spoelen in handwarm water

Appendix 8. Meting van de kleuroverdracht.



De meetopstelling (zie figuur hierboven):

Ingangsvlak: een pupil.

Voor een pupil ϕ 11 mm valt alle inkomende straling op de meter. Voor grotere pupillen is de aan de ingang gemeten hoeveelheid licht evenredig met het inkomende totaal.

Uitgangsvlak: het tweede Fouriervlak.

In het eerste filtervlak is het niet mogelijk te meten: hier zijn drie bundels aanwezig.

In de opstelling met 4 hologrammen werd gemeten met aan de ingang een pupil van 11 resp. 18 mm. Resultaten zijn (nagenoeg) hetzelfde.

M.b.v. lenzen kan een verkleind of vergroot Fouriervlak gemaakt worden (zie(184)). Verkleind is beter omdat dan het gehele lichtvlak op de meetkop valt, en de oneverdigheid in oppervlak t.g.v. tweede orde verstervingseffekten geëlimineerd zijn.

Gebruikte meter: EG+G, Radiometer/photometer model 550.

Gebruikte filters: Balzer B-20 kleurfilters.

Meetmethode: Er werd afwisselend bij een bepaalde kleur in het ingangsvlak en in het tweede Fouriervlak de hoeveelheid licht gemeten en hieruit de verzwakking voor desbetreffende kleur.

Tabel 1. Kleuroverdracht.

Opstelling met een Fouriertransformator met nologrammen van serie I.

λ nm	ingang $\mu\text{W}/\text{cm}^2$	uitgang $10^{-2} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	rel. verfz. dB	uitgang $10^{-2} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	rel. verfz. dB	
424	40.8			.91	21.7	
436	46.2	.71	19.9	1.65	19.7	
449	46.0	1.28	17.4	2.83	17.3	
454	75.0	3.42	15.2	7.30	15.3	
461	45.3	2.71	14.0	5.76	14.2	
474	59.2	10.6	9.3	22.5	9.4	
480	50.1	10.7	8.5	22.6	8.7	
491	71.8	27.7	6.9	59.1	6.0	
502	34.5	20.6	4.0	43.4	4.2	
508	66.0	41.8	3.8	89.0	3.9	
516	{ 51.8	29.2	4.7 { 4.3	62.2	4.5 { 4.4	
	{ 52.1	29.2		63.8		{ 4.3
	{ 50.5	21.3		56.1		{ 4.7
522	{ 39.8	43.0	3.6 { 1.5	91.0	3.2 { 1.6	
	{ 67.1	43.0		93.2		{ 3.8
	{ 64.5	27.2		82.0		{ 4.2
535	37.6	40.2	1.5	85.1	1.7	
545	46.3	56.0	1.0	120	1.1	
564	45.9	66.6	0.2	142	0.3	
571	47.0	68.5	0.2	148	0.2	
582	56.5	85.0	0.0	185	0.0	
593	28.6	41.0	0.2	90.8	0.2	
597	44.9	65.6	0.2	142	0.2	
626	{ 50.8	62.4	1.5 { 0.9	131	1.6 { 1.1	
	{ 64.6	65.8		151		{ 1.5
	{ 62.8	58.0		122		{ 2.3
645	41.3	59.4	0.2	127	0.3	
652	27.8	39.6	0.3	85.5	0.3	
698	43.6	35.3	2.7	74.8	2.9	
712	33.0	16.5	4.8	36.5	4.8	
735	64.8	15.0	8.2	34.5	7.9	
768	34.8	1.50	15.5	3.55	15.3	
788	38.0	0.59	19.9	1.44	19.4	
801	31.8			0.51	23.1	

Eerste uitgang-kolom: pupil ϕ 11mm in ingangsvlak
 Tweede uitgangskolom: pupil ϕ 18 mm in ingangsvlak.

Tabel 2. Meetgegevens kleuroverdracht. Invloed van het bleken.
 Fouriertransformator en ideaal systeem volgens opstelling 20-1
 resp. 26-1.

λ nm	ingang	uitgang	rel. verzw.	ingang	uitgang	rel. verzw.
	$10^{-1} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	$10^{-3} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	dB	$10^{-1} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	$10^{-2} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	dB
404	321	13.5	14.8	351	12.48	8.2
410	530	36.6	12.6	684	28.8	7.5
424	490	62.2	10.0	583	42.5	5.1
436	581	87.5	9.2	675	52.4	4.8
449	550	165	6.2	656	80.0	2.8
454	865	322	5.3	1050	148	2.2
461	535	255	4.2	630	100	1.7
474	740	552	2.3	870	172	0.7
480	585	451	2.1	700	142	0.5
491	878	843	1.2	1045	222	0.4
502	423	470	0.5	488	114	0.0
508	795	950	0.2	932	215	0.1
516	498	620	0.0	568	131	0.1
522	583	715	0.1	715	169	0.0
535	448	523	0.3	531	121	0.1
545	545	652	0.2	638	136	0.4
564	556	679	0.1	633	137	0.2
571	565	680	0.2	655	135	0.6
582	700	795	0.4	794	155	0.7
591	354	373	0.8	409	77	1.0
597	549	600	0.6	621	112	1.1
620	594	490	1.8	680	89	2.5
645	533	468	1.6	589	62	3.5
652	350	300	1.7	390	39.7	3.6
698	559	405	2.4	610	35.4	6.1
712	415	258	3.1	470	22.3	6.9
735	672	455	3.8	940	33.7	8.2
768	465	151	5.9	510	103	10.6
788	530	142	6.7	560	8.1	12.1
801	440	102	7.3	470	5.9	12.7
832	539	797	9.3	5790	39.7	15.3
849	350	41	10.3	380	2.0	16.5
858	155	156	11.0	1660	7.2	17.3
918	2560	105	14.9	2670	4.9	21.1

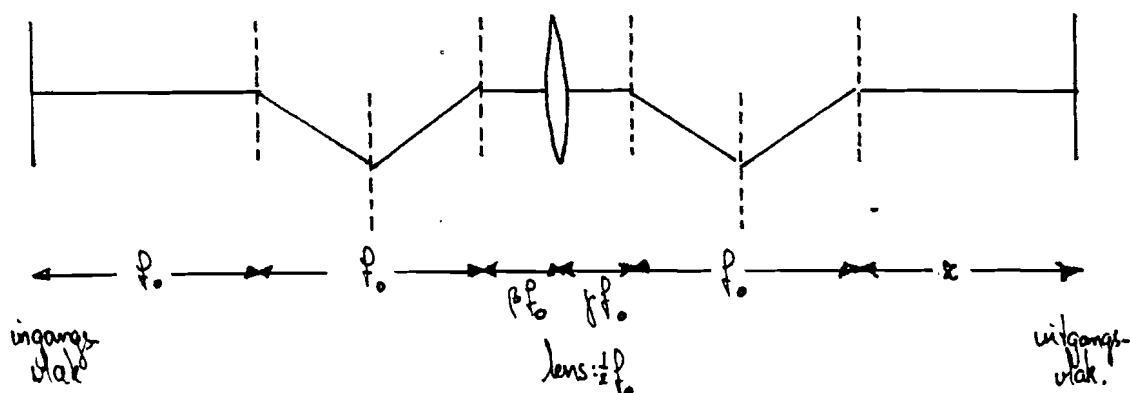
Tabel 3. Meetgegevens kleuroverdracht. Invloed van de keuze van de brandpuntsafstand f in de achromatische Fouriertransformator. Opstelling volgens 27-1A resp. 27-1B. Ingangsvlak: pupil ϕ 25 mm.

λ nm	27-1A			27-1B		
	ingang $10^{-1} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	uitgang $10^{-2} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	rel. verz. dB	ingang $10^{-1} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	uitgang $10^{-2} \mu\text{W}/\text{cm}^2$	rel. verz. dB
404	359	26.4	8.0	387	24.5	8.0
410	610	63.7	6.6	660	58.6	6.5
424	570	95.4	4.6	618	86.5	4.5
436	662	114.6	4.4	688	104.4	4.2
449	641	177.7	2.6	673	161.5	2.2
454	998	290	2.2	1090	275	2.0
461	622	214	1.4	662	196	1.3
474	860	334	0.9	915	315	0.6
480	676	269	0.8	731	261	0.5
491	1010	420	0.6	1096	404	0.3
502	486	213	0.0	519	206	0.0
508	926	405	0.4	995	392	0.0
516	563	244	0.4	604	237	0.1
522	712	297	0.6	756	288	0.2
535	527	206	0.9	563	202	0.5
545	649	225	1.4	680	224	0.8
564	645	221	1.5	671	220	0.8
571	670	222	1.6	701	223	1.0
582	820	258	1.8	860	260	1.2
591	422	124	2.1	440	127	1.4
597	633	177	2.1	668	183	1.6
626	695	140	3.8	720	151	2.8
645	608	108	4.3	637	121	3.2
652	415	70	4.5	424	80	3.2
698	630	64	6.7	663	81.5	5.1
712	473	41	7.4	490	53.6	5.6
735	969	66	8.5	1010	86.2	6.7
768	520	21	10.7	535	31.8	8.3
788	580	17	12.1	600	26.9	9.5
801	490	13.3	12.5	500	20.5	9.9
832	5910	99.9	14.5	6100	169	11.6
849	390	48.0	15.9	400	8.7	12.6
858	1690	17.8	16.6	1750	32.4	13.3
918	2770	11.3	20.8	2810	24.8	16.5

Appendix 9. Fouten optredend bij twee direct achter elkaar geschakelde transformatorer

Doordat de twee divergente zoneplaatjes en de lens niet in een vlak geplaatst kunnen worden treden er fouten op ten gevolge van het introduceren van vrije ruimtes tussen deze componenten. Ook de volgorde van de elementen wordt nu belangrijk. Er zijn drie varianten mogelijk. Voor alle drie zullen we de plaats uitrekenen waar een scherp beeld optreedt voor de opnamekleur λ_0 .

Eerste variant.



$$\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

Voor de B-coëfficiënt vinden we

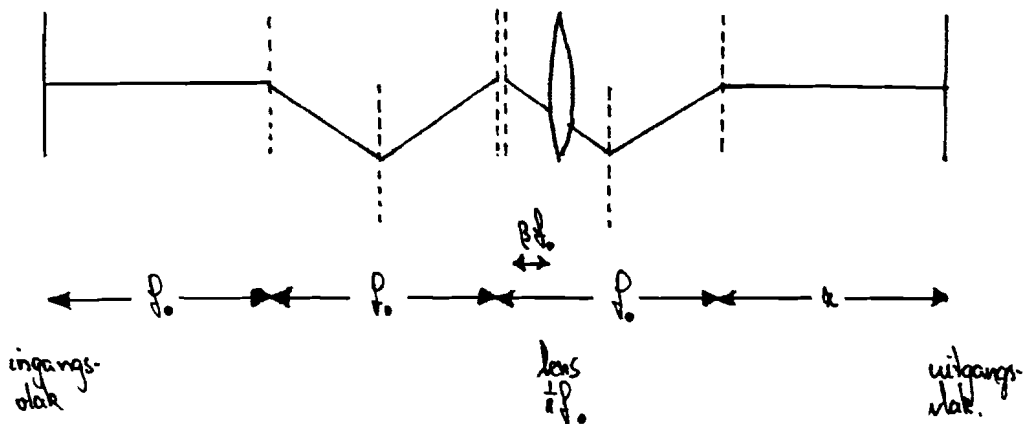
$$B = (1 + 2\beta) \frac{p_0}{k_0} - \frac{p_0}{k_0} \left\{ \gamma(1 + 2\beta) + 1 + \beta - 2\gamma \right\} \left\{ 2 - \frac{z}{f} \right\}$$

Eis voor een scherp beeld: $B=0$ ofwel bij verwaarlozing van tweede orde en hogere fouten

$$\frac{z}{f} = 1 - \gamma - \beta_0$$

Met praktisch $\gamma = \beta$. De fout $\beta + \gamma$ wordt direct teruggevonden in de afwijking van de plaats waar het beeld scherp is.

Tweede variant.



Hier geldt voor de B -coëfficiënt

$$B = -4\beta \frac{x}{k_0} + \left(1 - \frac{z}{f_0}\right) \left\{ 1 - b\beta + 4\beta^2 \right\} \frac{p_0}{k_0}$$

Wederom eisen we $B=0$ zodat

$$\frac{z}{f_0} = \frac{1 + b\beta + 4\beta^2}{1 + 10\beta - 4\beta^2} \approx 1 - 4\beta$$

Derde variant.

Deze opstelling is identiek aan de tweede variant met dien verstande dat ingangs- en uitgangsvlak verwisseld zijn. Er volgt nu

$$B = -(2\beta - 1) \frac{x}{k_0} - \frac{p_0}{k_0} \left\{ 1 - b\beta \right\}$$

ofwel

$$\frac{z}{f_0} = -\frac{1 - b\beta}{2\beta - 1} \approx 1 - 4\beta.$$

Opmerking De gegeven foutenanalyse onder de tweede en derde variant gaan slechts op voor een richting. Voor een van de twee richtingen moet er namelijk rekening mee worden gehouden dat de op de lens inkomende straling niet loodrecht op het vlak van de lens staat.

Opmerking. De eerste variant geeft de kleinste fout. Gezien de hierboven gemaakte opmerking is deze opstelling het aantrekkelijkst. Beide richtingen worden hier identiek behandeld.

Metingen.

De gebruikte lens van 250 mm heeft een bolle en een vlakke kant. De oriëntatie van deze lens was van invloed op de meting.

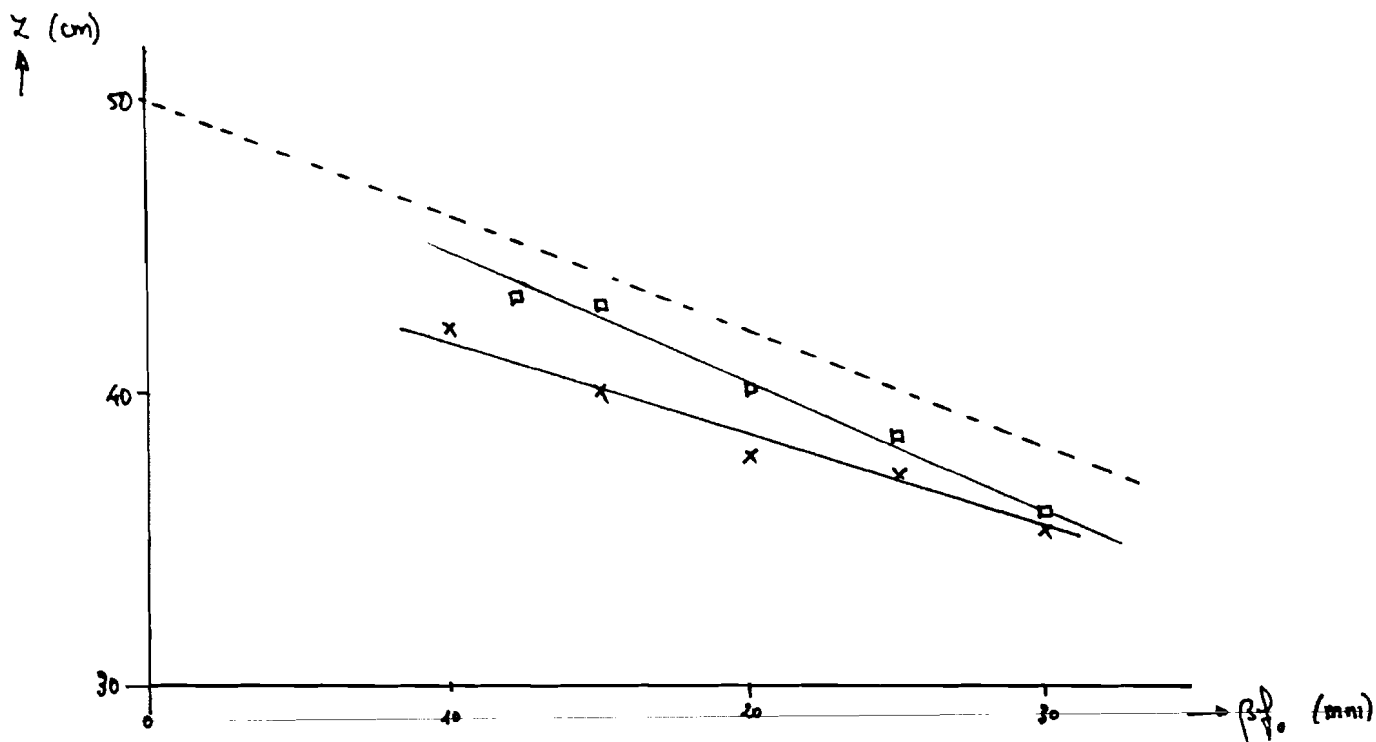
Meting aan de tweede variant.

vlakke kant van de lens
naar het midden gericht X

ρf_0 (mm)	x (cm)
10	42
15	40
20	38
25	37
30	35.5

bolle kant van de lens
naar het midden gericht □

ρf_0 (mm)	x (cm)
12	43.5
15	43
20	40
25	39
30	36



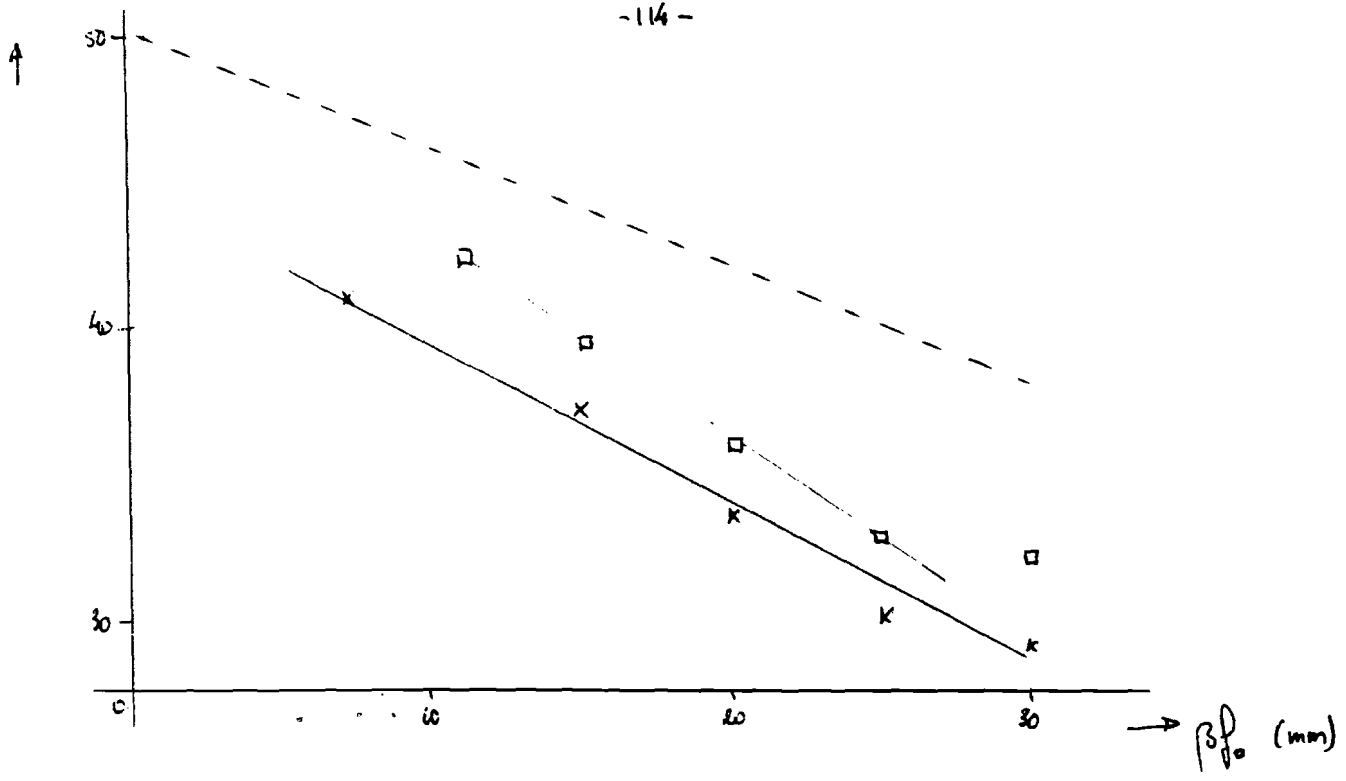
Meting aan de derde variant

vlakke kant van de lens
naar het midden gericht X

ρf_0 (mm)	x (cm)
7	41
15	37
20	33.5
25	30.5
30	29

bolle kant van de lens
naar het midden gericht □

ρf_0 (mm)	x (cm)
11	42.5
15	39.5
20	36
25	33
30	niet scherp te krijgen.



Appendix 10. Optimale keuze van de lenzen binnen het ideale systeem.

Gezien het feit dat met twee lenzen, en een systeem volgens figuur 28, de overdracht wordt gegeven door de eenheidsmatrix, is er geen voorkeur voor een bepaalde lensgrootte (slechts de verhouding f_1/f_2 is belangrijk). Een foutenanalyse geeft aan dat er wel betere en slechtere mogelijkheden zijn.

Voor een systeem bestaande uit een vrije ruimte ter lengte a , een lens met brandpuntsafstand f en een vrije ruimte ter lengte b , is de overdracht gegeven met

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{f} & -\frac{b}{k} \left(1 - \frac{a}{f}\right) - \frac{a}{k} \\ \frac{k}{f} & 1 - \frac{b}{f} \end{pmatrix}$$

stellen we nu

$$\begin{aligned} a &= f + \beta \\ b &= f + \gamma \end{aligned}$$

dan wordt deze matrix in eerste orde benadering

$$\begin{pmatrix} -\beta/f & -\beta/k \\ k/f & -\gamma/f \end{pmatrix}$$

waarbij aangenomen is

$$\begin{aligned} |\beta/f| &\ll 1 \\ |\gamma/f| &\ll 1 \end{aligned}$$

Voor twee zulke systemen na elkaar met f_1, β_1 en γ_1 resp. f_2, β_2 en γ_2 wordt de overdracht

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \beta_2}{f_1 f_2} - \frac{\beta_1}{f_2} & \left(-\beta_1 \frac{\beta_2}{f_1} - \gamma_2 \frac{f_1}{f_2}\right) \frac{1}{k} \\ k \left(\frac{\beta_2 - \gamma_1}{f_2 f_1}\right) & -\frac{\beta_2}{f_1} + \frac{\gamma_1 f_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix}$$

Omdat de fout bij het opstellen van de Fouriertransformatoren steeds even groot gesteld mag worden dwz.

$$\beta_1 \approx \beta_2 \approx \gamma_1 \approx \gamma_2$$

volgt dat de fout geminimaliseerd wordt voor $f_1 = f_2$.

Zetten we een achromatische Fouriertransformator voor dit systeem, en de inverse erachter dan is de totale overdracht

$$\begin{pmatrix} A_{tot} & B_{tot} \\ C_{tot} & D_{tot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{k} \\ -\frac{k\gamma}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix}$$

waarbij tweede orde fouten verwaarloosd zijn, en gesteld is

$$\beta = \beta_1 + \gamma_2$$

$$\gamma = \beta_2 - \gamma_1$$

Er volgt nu

$$A_{\text{tot}} = AD - BD \frac{kY}{f_2} + AC \frac{B}{k} + BC$$

$$B_{\text{tot}} = 2AB - B^2 \frac{kY}{f_2} + A^2 \frac{A}{k}$$

$$C_{\text{tot}} = 2CD - D^2 \frac{kY}{f_2} + C^2 \frac{A}{k}$$

$$D_{\text{tot}} = AD - BD \frac{kY}{f_2} + AC \frac{B}{k} + BC$$

Onder verwaarlozing van alle hogere termen dan λ , $\frac{B}{f}$ en $\frac{Y}{f}$ volgt

$$A_{\text{tot}} = -1 \approx -\frac{k_0 Y^2}{f_2^2}$$

$$B_{\text{tot}} = -\left(\frac{D_0}{k_0}\right)^2 \left(\frac{k_0 Y}{f_2^2}\right)$$

$$C_{\text{tot}} = 2 \frac{k_0}{f_2} \lambda + \left(\frac{k_0}{f_2}\right)^2 \frac{B}{k_0}$$

$$D_{\text{tot}} = A_{\text{tot}}$$

Conclusie: hoe groter $\frac{D}{f}$, des te kleiner de fout optredend in de totale overdracht.

Appendix 11. Beeldvermenigvuldiging met een raster.

Raster: modulatiefunctie $m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X \delta(x - nX)$
 Fouriergetransformeerde $\bar{m}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X \exp(inXu)$
 Hulpstelling $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikx) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k)$

$$\bar{m}(u) = X \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(inXu) = 2\pi X \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(Xu - 2\pi n)$$

Overdrachtsfunctie in de Wigner distributie volgens (28)

$$\begin{aligned} F_m(x, u) &= \frac{1}{2\pi} \int \sum_n X \exp\{inX(u + \frac{u'}{2})\} \sum_m 2\pi X \delta(X(u - \frac{u'}{2}) - 2\pi m) \exp\{iu'x\} du' \\ &= X \sum_n \sum_m \exp\{inX(u + u - \frac{2\pi m}{X})\} \exp\{ix2(u - \frac{2\pi m}{X})\} \\ &= X \sum_n \sum_m 2\pi \delta(X(2u - \frac{2\pi m}{X}) - 2\pi n) \exp(2iuX) \exp(-4\pi i \frac{mX}{X}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_o(x, u) &= \iint K(x, \xi, u, v) F_i(\xi, v) d\xi dv = \iint \frac{1}{2\pi} F_m(\frac{x+\xi}{2}, u-v) F_i(\xi, v) \delta(x-\xi) d\xi dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int F_m(x, u-v) F_i(x, v) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int F_i(x, v) 2\pi X \sum_n \sum_m \delta(X(2u-2v - \frac{2\pi m}{X})) \exp(2i(u-v)x) \exp\{-4\pi i \frac{mX}{X}\} dv \\ &= \sum_n \sum_m F_i(x, u - \frac{\pi(n+m)}{X}) \exp\{2iuX\} \exp\{-4\pi i \frac{mX}{X}\} \exp\{-2ix(u - \frac{\pi(n+m)}{X})\} \\ &= \sum_n \sum_m F_i(x, u - \frac{\pi(n+m)}{X}) \exp\{2\pi i \frac{(n-m)x}{X}\} \\ &= \sum_k \sum_l F_i(x, u - \frac{k\pi}{X}) \exp(2\pi i \frac{lX}{X}) \\ &= \sum_k \sum_l F_i(x, u - \frac{k\pi}{X}) 2\pi \delta(2\pi \frac{x}{X} - 2\pi l) \\ &= \sum_k \sum_l F_i(x, u - \frac{k\pi}{X}) \delta(\frac{x}{X} - l) \end{aligned}$$

Dit betekent dat de functie op discrete punten bemonsterd wordt en dat op deze punten de lichtstralen in een aantal discrete richtingen afgebogen worden.

Voor de filteropstelling worden frekwentie- en plaatscomponenten verwisseld. (Zie figuur 6)

$$F_2(x_2, u_2) = F_1\left(-\frac{1}{\beta} u_2, \beta x_2\right)$$

$$\begin{aligned} F_3(x_3, u_3) &= \sum_k F_2\left(x_3, u_3 - \frac{k\pi}{\lambda}\right) \sum_l \delta\left(\frac{x_3}{\lambda} - l\right) \\ &= \sum_k F_1\left(-\frac{1}{\beta}\left(u_3 - \frac{k\pi}{\lambda}\right), \beta x_3\right) \sum_l \delta\left(\frac{x_3}{\lambda} - l\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(x_4, u_4) &= F_3\left(\frac{1}{\beta} u_4, -\beta x_4\right) \\ &= \sum_k F_1\left(-\frac{1}{\beta}\left(-\beta x_4 - \frac{k\pi}{\lambda}\right), \beta \frac{1}{\beta} u_4\right) \sum_l \delta\left(\frac{u_4}{\beta \lambda} - l\right) \\ &= \sum_k F_1\left(x_4 + \frac{k\pi}{\beta \lambda}, u_4\right) \sum_l \delta\left(\frac{u_4}{\beta \lambda} - l\right) \end{aligned}$$

Dit is: het beeld wordt herhaald op afstanden $\frac{\pi}{\beta \lambda}$, en alle frekwenties anders dan $l\beta \lambda$ ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) worden eruit gefilterd.

Stel d de afstand tussen twee herhaalde beelden

$$d = \frac{\pi}{\beta \lambda}$$

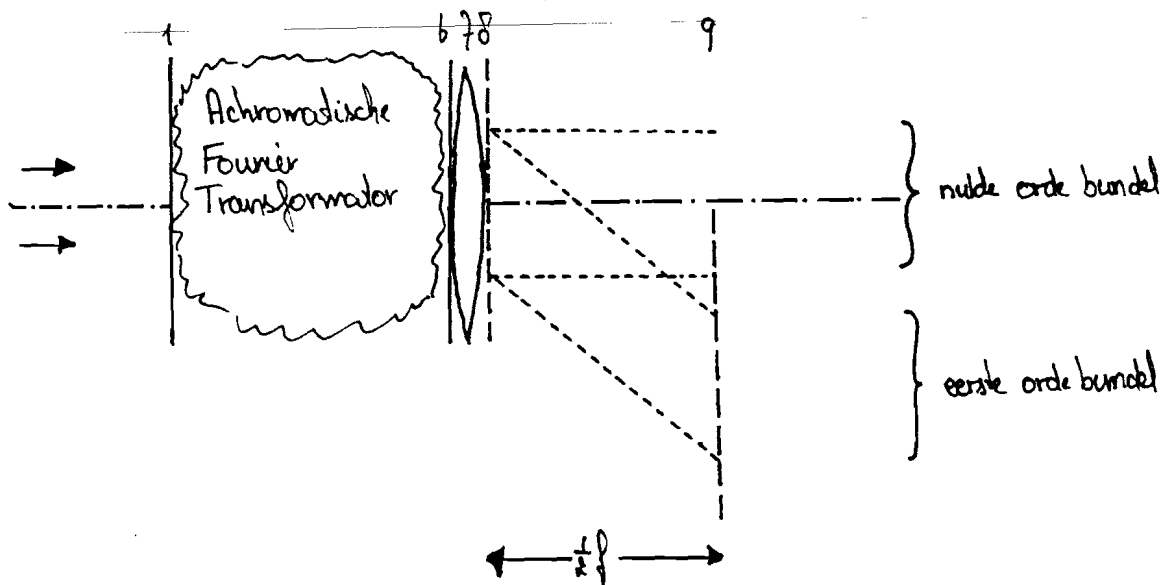
Om niet overlappende beelden te krijgen moet gelden

$$\text{ofwel } d = 2x_{\text{max}} \quad \text{ofwel } x_{\text{min}} = \frac{f_0 \pi}{2k_0 x_{\text{max}}} = \frac{f_0 \lambda_0}{4x_{\text{max}}} = \frac{1}{2} \frac{f_0}{D} \lambda_0$$

met D de diameter van het ingangspaatje. Het aantal lijnen $\#l$ per mm wordt dan

$$\#l = 10^{-3} \frac{2D}{f_0} \frac{1}{\lambda_0}$$

Hoekverdraaiing in de tweede AFT. bij een raster als filterfunctie.



ingang $F_1(x_1, u_1)$

Voor filter $F'_b(x'_b, u'_b) = F_1(-\frac{1}{\beta} u'_b, \beta x'_b)$

Na filter $F_b(x_b, u_b) = \sum_k F_1(-\frac{1}{\beta} (u_b - \frac{k\pi}{X}), \beta x_b) \sum_l \delta(\frac{x_b}{X} - l)$

+ eerste orde bundel+

$$\begin{pmatrix} x_b \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k-k_0}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ u_g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_g \\ u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{f}{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_b \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{f}{2k} \\ \frac{k-k_0}{f} & \frac{k_0-k}{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$F_g(x_g, u_g) = F_b(x_g - \frac{f}{2k} u_g, \frac{k-k_0}{f} x_g + \frac{k_0-k}{2k} u_g + u_0)$$

$$= \sum_j F_1(-\frac{1}{\beta} (\frac{k-k_0}{f} x_g + \frac{k_0-k}{2k} u_g + u_0 - \frac{j\pi}{X}), \beta (x_g - \frac{f}{2k} u_g)) \sum_l \delta(\frac{x_g - \frac{f}{2k} u_g}{X} - l)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta} \frac{k-k_0}{f} & -\frac{1}{\beta} \frac{k_0-k}{2k} \\ \beta & -\beta \frac{f}{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ u_g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta} (u_0 - \frac{j\pi}{X}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_g \\ u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \frac{f}{2k} & \frac{1}{\beta} \frac{k_0+k}{2k} \\ -\beta & -\frac{1}{\beta} \frac{k-k_0}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{f}{2k} (u_0 - \frac{j\pi}{X}) \\ -(u_0 - \frac{j\pi}{X}) \end{pmatrix}$$

$$x_g = -\beta \frac{f}{2k} x_1 + \frac{1}{\beta} \frac{k_0+k}{2k} u_1 - \frac{f}{2k} (u_0 - \frac{j\pi}{X})$$

Stel u_0 positief; $x_{g,max} = X_g$

$$X_g = -\frac{f}{2k} u_0 + \beta \frac{f}{2k} x_{1,max} + \frac{1}{\beta} \frac{k_0+k}{2k} \Omega + j \frac{\pi}{X} \frac{f}{2k}$$

+nulde orde bundel+

$$\begin{pmatrix} x_b \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{f}{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{f}{2k} \\ \frac{k}{f} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ u_g \end{pmatrix}$$

$$F_g(x_g, u_g) = F_b(x_g - \frac{f}{2k} u_g, \frac{k}{f} x_g + \frac{1}{2} u_g)$$

$$= \sum_j F_1(-\frac{1}{\beta} (\frac{k}{f} x_g + \frac{1}{2} u_g - \frac{j\pi}{X}), \beta (x_g - \frac{f}{2k} u_g)) \sum_l \delta(\frac{x_g - \frac{f}{2k} u_g}{X} - l)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{k}{f} & -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \\ \beta & -\beta \frac{f}{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_g \\ u_g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} \frac{j\pi}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_g \\ u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \frac{f}{2k} & \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \\ -\beta & -\frac{1}{\beta} \frac{k}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{f}{2k} \frac{j\pi}{\lambda} \\ \frac{j\pi}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$X_g' = X_{g, \min} = -\beta \frac{f}{2k} X_{1, \max} - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \Omega - \frac{f}{2k} \frac{j\pi}{\lambda}$$

We eisen $X_g' \geq X_g$ voor alle k .

$$-\beta \frac{f}{2k_{\min}} X_{1, \max} - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \Omega - \frac{f}{2k_{\min}} \frac{j\pi}{\lambda} \geq -\frac{f}{2k_{\max}} u_0 + \beta \frac{f}{2k_{\min}} X_{1, \max} + \frac{1}{\beta} \frac{k_0 + k_{\max}}{2k_{\min}} \Omega + j \frac{\pi}{\lambda} \frac{f}{2k_{\min}}$$

$$\frac{f}{2k_{\max}} u_0 \geq \beta \frac{f}{k_{\min}} X_{1, \max} + \frac{1}{2\beta} \frac{k_{\max} + k_0 + k_{\min}}{k_{\min}} \Omega + \frac{f}{k_{\min}} \frac{j\pi}{\lambda}$$

Stellen we

$$u_0 \gg \Omega$$

$$X \approx \frac{1}{\beta} \frac{f_0}{k_0} \frac{\pi}{X_{1, \max}}$$

dan volgt

$$u_0 \geq 2\beta \frac{k_{\max}}{k_{\min}} a_{1, \max} + 2j \frac{f}{k_{\min}} \frac{2k_0 a_{1, \max}}{f_0} \frac{k_{\max}}{f}$$

$$2\beta a_{1, \max} \left\{ \frac{k_{\max}}{k_{\min}} + 2j \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right\} = 2\beta a_{1, \max} \frac{k_{\max}}{k_{\min}} (1 + 2j)$$

Voor $j=2$ volgt hieruit

$$u_0 \geq 10 \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \frac{a_{1, \max}}{\frac{f}{k_0}} k_0$$

hetgeen een veel strengere eis is dan (69). In principe geldt deze eis slechts voor de tweede achromatische Fouriertransformator.