# Een vergelijkend onderzoek naar vier parametervrije k-steekproeventoetsen

de Boo, T.M.

*Award date:*
1973

AFSTUDEERVERSLAG

# Een vergelijkend onderzoek naar vier parametervrije k-steekproeventoetsen

door

Th.M. de Boo

Afstudeerhoogleraar: Prof.dr. R. Doornbos

juni 1973

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Inhoudsopgave.

# I. Inleiding.

## 1.1. Algemene achtergrond.

In dit verslag worden vier parametervrije k-steekproeventoetsen met elkaar vergeleken. Een parametervrije toets is een toets waarvan de verdeling van de toetsingsgrootheid onder $H_0$ niet afhangt van de vorm van de verdelingen waaruit de steekproeven worden getrokken. Onze $H_0$ is: $F_i(x) = F(x)$, $i = 1,\dots,k$, waarbij $F_i(x)$ de verdelingsfunctie is van de verdeling waaruit de i-de steekproef wordt getrokken. Een speciale vorm van een parametervrije toets is de zg. rangtoets. De toetsingsgrootheid van zo'n toets is gebaseerd op rangnummers, die aan de waarnemingen worden toegekend. We onderscheiden twee soorten rangtoetsen:

a) Toetsen, waarbij alle waarnemingen, bestaande uit de k steekproeven, als één geheel worden behandeld, d.w.z. de rangnummertoekenning gebeurt onafhankelijk van de steekproef waaruit een waarneming komt.
b) Toetsen, die gebaseerd zijn op het paarsgewijs vergelijken van de k steekproeven.

Van de toetsen die wij gaan vergelijken behoren er twee tot groep a), nl. de toets van Kruskal-Wallis (toetsingsgrootheid $\underline{H}$) en de toets van Mood-Brown (toetsingsgrootheid $\underline{M}$); de andere twee behoren tot de groep b), nl. de toets van Steel (toetsingsgrootheid $\underline{R}$) en de toets van Terpstra (toetsingsgrootheid $\underline{Q}$).
We hebben de volgende alternatieven beschouwd:

$H_1$: $F_i(x) = F(x)$, $i = 1,\dots,k-1$; $F_k(x) = F(x-a)$; $a > 0$.

$H_2$: $F_i(x) = F(x)$, $i = 1,\dots,k-2$; $F_{k-1}(x) = F_k(x) = F(x-a)$; $a > 0$.

$H_3$: $F_1(x) = F(x+a)$; $F_i(x) = F(x)$, $i = 2,\dots,k-1$; $F_k(x) = F(x-a)$; $a > 0$.

De algemene voorwaarden, waar we gedurende het gehele onderzoek vanuit zijn gegaan, zijn:
De verdelingsfuncties $F(x)$ en $F_i(x)$, $i = 1,\dots,k$, zijn continu en de k aselecte steekproeven zijn onafhankelijk.

## 1.2. Samenvatting van de inhoud.

Hoofdstuk II geeft de procedures van de toetsen van Kruskal-Wallis, Mood-Brown, Steel en Terpstra. In hoofdstuk III wordt onderzocht wat bekend is van de exacte en asymptotische verdelingen van $\underline{H}$, $\underline{M}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ onder $H_0$, $H_1$, $H_2$ en $H_3$. De verdeling van $\underline{M}$ onder $H_0$ wordt bepaald in de gevallen $k = 5$, $n_i = 3(1)5$, waarbij $n_i$ de steekproefgrootte van de i-de steekproef is. De verdelingen van $\underline{M}$ en $\underline{R}$ onder $H_1$, $H_2$ en $H_3$ worden gegeven voor $k = 5$, $n_i = 5$ als de verschuiving a extreem is. Kritieke gebieden en bijbehorende onbetrouwbaarheden worden gegeven, voor het geval $k = 5$, $n_i = 5$. In hoofdstuk IV wordt het onderscheidingsvermogen van de vier toetsen berekend voor het geval $k = 5$, $n_i = 5$, bij de in hoofdstuk III gevonden onbetrouwbaarheden, onder $H_1$, $H_2$ en $H_3$, voor $F(x) \sim$ uniform op $[0,1]$ en $F(x) \sim N(0,1)$ en bij verschillende verschuivingen a. Van een speciale tabel worden 95%-onbetrouwbaarheidsintervallen voor het onderscheidingsvermogen gegeven.
Hoofdstuk V behandelt het doen van simultane uitspraken bij de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel. In het geval $k = 5$, $n_i = 5$ worden tabellen gegeven met aantallen significante kontrasten, in dezelfde gevallen als in hoofdstuk IV (op kleine verschillen na). Tot slot wordt het onderscheidingsvermogen van de speciale uitschietertoets van Doornbos-Prins onder $H_1$ vergeleken met dat van de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel als $k = n_i = 5$.
In hoofdstuk VI wordt onderzocht onder welke voorwaarden de vier toetsen asymptotisch onderscheidend (consistent) zijn. Een voldoende voorwaarde wordt afgeleid, waaronder de toets van Mood-Brown - en een nodige en voldoende voorwaarde waaronder de toets van Steel - asymptotisch onderscheidend is.
Hoofdstuk VII geeft een samenvatting der resultaten en hoofdstuk VIII tenslotte bevat tabellen.

## 1.3. Gebruikte notaties en afkortingen.

$\underline{x}_{ij}$ : j-de waarneming uit de i-de steekproef.

$n_i$ : grootte van de i-de steekproef (= n indien alle $n_i$ gelijk zijn).

k : aantal steekproeven.

$F_i(x)$ : continue verdelingsfunctie, waaruit de i-de steekproef wordt getrokken.

N : totaal aantal waarnemingen (= $\sum_{i=1}^{k} n_i$).

$\alpha$ : onbetrouwbaarheid.

O.V. : onderscheidingsvermogen.

$\widehat{O.V.}$ : schatting van het onderscheidingsvermogen.

#(...): het aantal keren, dat (...).

s.k. : significant(e) kontrast(en).

# II. Toetsprocedures.

## 2.1. Inleiding.

In dit hoofdstuk geven we een korte beschrijving van de toetsen van Kruskal-Wallis, Mood-Brown, Steel en Terpstra.
Laat de verzameling $\{\underline{x}_{ij} \mid i = 1,\dots,k;\ j = 1,\dots,n_i\}$ k onafhankelijke steekproeven voorstellen, die bestaan uit resp. $n_1,\dots,n_k$ onafhankelijke waarnemingen. Zij $F_i(x)$ de continue verdelingsfunctie van de i-de steekproef en laat N gedefinieerd zijn door $N := \sum_{i=1}^{k} n_i$.

## 2.2. Procedure van Kruskal-Wallis ([6], [8]).

Rangschik de N waarnemingen van de kleinste tot de grootste. Ken rangnummer 1 toe aan de kleinste, rangnummer 2 aan de op één na kleinste en zo verder in opklimmende volgorde. Zij nu $\underline{R}_{ij}$ het rangnummer van $\underline{x}_{ij}$. Definieer:

$$\underline{R}_i := \sum_{j=1}^{n_i} \underline{R}_{ij} \ ; \quad \bar{\underline{R}}_i := \frac{1}{n_i} \underline{R}_i \ ; \quad \bar{R} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \bar{\underline{R}}_i = \frac{N+1}{2} \ .$$

De toetsingsgrootheid van Kruskal-Wallis is dan:

$$\underline{H} = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{\underline{R}}_i - \bar{R})^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{\underline{R}}_i^2 - 3(N+1) \ .$$

Het kritieke gebied van de toets is van de vorm $\{H > h_\alpha\}$.

## 2.3. Procedure van Mood-Brown ([9]).

De rangschikking en rangnummering van de waarnemingen geschiedt op dezelfde manier als bij de toets van Kruskal-Wallis.
Definieer b door:

$$b := \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{als N even is} \\ \frac{1}{2}(N-1) & \text{als N oneven is} \end{cases}$$

en zij $m_i$ het aantal rangnummers van de i-de steekproef, kleiner dan $b + \frac{1}{2}$.
Dan is de toetsingsgrootheid van Mood-Brown:

$$\underline{M} = \frac{N(N-1)}{b(N-b)} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \left(\underline{m}_i - \frac{bn_i}{N}\right)^2 .$$

Het kritieke gebied van deze toets is van de vorm $\{M > m_\alpha\}$.

Opmerking. In het oorspronkelijke artikel is $m_i$ het aantal waarnemingen van de i-de steekproef, kleiner dan de steekproefmediaan van de gecombineerde k steekproeven. Onze definitie benadrukt het rangtoets-aspekt van deze zogenaamde mediaantoets.

2.4. Procedure van Steel ([11], [7]).

Beschouw de $\binom{k}{2}$ paren (i,j) met i < j, voorstellende de steekproeven i en j en volg voor ieder van deze paren de volgende subprocedure:

Rangschik de waarnemingen van de gecombineerde 2 steekproeven van de kleinste tot de grootste en ken rangnummers toe, beginnend met 1 en zo verder oplopend.

Zij $\underline{r}_{i_k}$ het rangnummer van de k-de waarneming uit de i-de steekproef.

Definieer nu: $\underline{r}_{i,j} := \sum_k \underline{r}_{i_k}$ en $\underline{r}^*_{i,j} := \max(\underline{r}_{i,j}, \underline{r}_{j,i})$.

De toetsingsgrootheid van Steel's toets is dan:

$$\underline{R} = \max_{\substack{(i,j)\\ i<j}} \underline{r}^*_{i,j} .$$

Ook het kritieke gebied van deze toets is van de vorm $\{R > r_\alpha\}$.

2.5. Procedure van Terpstra ([12]).

Evenals Steel beschouwt Terpstra de $\binom{k}{2}$ paren (i,j) met i < j, voorstellende de steekproeven i en j.

Voor ieder van die paren worden de volgende twee variabelen berekend:

$$\underline{U}_{i,j} := \tfrac{1}{2} \sum_{k,\ell} \operatorname{sgn}(\underline{x}_{ik} - \underline{x}_{j\ell}) \qquad (k = 1,\ldots,n_i;\ \ell = 1,\ldots,n_j)$$

en

$$\underline{U}_i := \sum_j \underline{U}_{i,j} .$$

# III. Verdelingen.

## 3.1. Inleiding.

In dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de verdelingen van de grootheden $\underline{H}$, $\underline{M}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ onder de nulhypothese $H_0$: $F_i(x) = F(x)$, $i = 1,\ldots,k$, en onder drie bepaalde alternatieve hypothesen $H_1$, $H_2$ en $H_3$, die we nu eerst zullen aanduiden:

$$(3.1)\quad \begin{cases} H_1\colon\ F_i(x) = F(x);\ i = 1,\ldots,k-1;\ F_k(x) = F(x-a);\ a > 0. \\ H_2\colon\ F_i(x) = F(x);\ i = 1,\ldots,k-2;\ F_{k-1}(x) = F_k(x) = F(x-a);\ a > 0. \\ H_3\colon\ F_i(x) = F(x);\ i = 2,\ldots,k-1;\ F_1(x) = F(x+a);\ F_k(x) = F(x-a);\ a > 0. \end{cases}$$

In § 3.2 zullen we nagaan wat bekend is over de verdelingen en hun asymptotisch gedrag onder $H_0$ en we zullen de exacte verdeling van $\underline{M}$ onder $H_0$ berekenen in de gevallen $k = 5$, $n_i = 3(1)5$, $i = 1,\ldots,5$.

Er is niets bekend over de verdelingen onder de alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$, maar we zullen in § 3.3 wel de exacte verdeling van $\underline{M}$ en $\underline{R}$ berekenen onder deze alternatieven, indien de verschuiving extreem wordt ("$a \to \infty$") en als $k = 5$, $n_i = 5$, $i = 1,\ldots,5$.

Tenslotte zullen we, weer in het geval dat $k = 5$, $n_i = 5$, in § 3.4 voor ieder van de grootheden $\underline{H}$, $\underline{M}$, $\underline{R}$, en $\underline{Q}$ een kritiek gebied met een daarbij behorende onbetrouwbaarheid bepalen, waarvan we in het volgende hoofdstuk gebruik zullen maken.

## 3.2. Verdelingen en asymptotische verdelingen onder $H_0$.

3.2.1. Indien alle $F_i$'s gelijk zijn, kunnen we de gecombineerde k steekproeven beschouwen als één steekproef, getrokken uit een populatie met continue verdelingsfunctie F. Na rangnummering der waarnemingen hebben we dan een ordening van de getallen 1 t/m N. Het is duidelijk dat er in totaal N! mogelijke ordeningen bestaan, ieder met gelijke kans op realisatie. Om nu de verdelingen van $\underline{H}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ te vinden moeten we in principe de waarden H, R en Q bij ieder van die ordeningen berekenen. Als N niet al te klein is, kost dit enorm veel rekenwerk, zelfs al kunnen we uit symmetrie-overwegingen dit werk in meer of

mindere mate beperken. Waarschijnlijk is dit de reden, dat er niet veel tabellen van deze verdelingen beschikbaar zijn.
Kruskal en Wallis [6] hebben de (rechter)staart van de verdeling van $\underline{H}$ getabelleerd in de gevallen $k = 3$, $n_i = 1(1)5$, $i = 1,2,3$. Steel [11] geeft tabellen voor de verdeling van $\underline{R}$ in de gevallen $k = 3$, $n_i = n(1)4$ en de (linker)staart van de verdelingen $k = 3$, $n = 5,6$. (De linkerstaart omdat Steel als toetsingsgrootheid gebruikt:

$$\underline{R} = \min_{\substack{i,j \\ i<j}} \{\min(\underline{r}_{i,j}, \underline{r}_{j,i})\} .)$$

Van Terpstra's $\underline{Q}$ is geen enkele verdeling getabelleerd. Hetzelfde geldt voor Mood-Brown's $\underline{M}$, maar Mood [9] geeft wel de dichtheidsfunctie $g(m_1,m_2,\ldots,m_k) = P(\underline{m}_1 = m_1,\ \underline{m}_2 = m_2,\ \ldots,\ \underline{m}_k = m_k)$, en wel

$$(3.2) \qquad g(m_1,m_2,\ldots,m_k) = \begin{cases} \dfrac{\prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{m_i}}{\binom{N}{b}} & \text{als } \sum_{i=1}^{k} m_i = b \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Bij gegeven $n_i$'s kunnen we eerst b bepalen, waarna we al díe combinaties $(m_1,\ldots,m_k)$ zoeken, waarvoor $\sum_{i=1}^{k} m_i = b$. Voor die combinaties kunnen we dan de waarde M van $\underline{M}$ berekenen en $P(\underline{M} = M;H_0)$ volgt dan direkt.
Op deze wijze hebben we de verdeling van M getabelleerd voor $k = 5$, $n_i = 3(1)5$, $i = 1,\ldots,5$, en de resultaten staan vermeld in hoofdstuk VIII.

### 3.2.2. Asymptotische verdelingen.

De asymptotische verdeling van een statistische grootheid is van belang om te kunnen nagaan voor welke waarden van $n_i$ deze verdeling de werkelijke verdeling "goed genoeg" benadert. Dat bespaart dan, in het geval dat de asymptotische verdeling een bekende (getabelleerde) verdeling is, een hoop rekenwerk.
Indien we nu als algemene voorwaarde stellen, dat $\forall_i\ \frac{n_i}{N} \to k_i \in \mathbb{R}$ als $N \to \infty$, dan geldt:

a) $\underline{H}$ is asymptotisch verdeeld als $\chi^2$ met $k-1$ vrijheidsgraden (Kruskal [5]). Kruskal en Wallis [6] bevelen aan deze $\chi^2$-benadering te gebruiken, indien $\forall_i\ n_i \geq 5$ (zie ook 3.4.b).

b) $\underline{M}$ is asymptotisch verdeeld als $\chi^2$ met $k-1$ vrijheidsgraden (Mood-Brown [9]). Mood en Brown veronderstelden dat, indien $\forall_i\ n \geq 5$, deze $\chi^2$-verdeling een goede benadering zou zijn. Hun veronderstelling was te optimistisch, wat mag blijken uit tabel 3.1, waar de exacte verdeling van $\underline{M}$ voor $k = 5$, $n_i = 5$, vergeleken wordt met de $\chi_4^2$-verdeling.

Tabel 3.1. Vergelijking van exacte verdeling van $\underline{M}$ onder $H_0$ voor $k = 5$, $n_i = 5$ met $\chi_4^2$-benadering.

| Waarden M van $\underline{M}$ | $P(\underline{M} \leq M;H_0)$ | $P(\chi_4^2 \leq M)$ |
|---|---|---|
| 0.924 | 0.192297 | - |
| 2.462 | 0.432667 | - |
| 4.000 | 0.721112 | - |
| 5.539 | 0.802838 | - |
| 7.077 | 0.915813 | 0.86 |
| 8.616 | 0.959079 | 0.928 |
| 10.154 | 0.985039 | 0.962 |
| 11.693 | 0.993212 | 0.980 |
| 13.231 | 0.998981 | 0.989 |
| 14.770 | 0.999221 | 0.9947 |
| 16.308 | 0.999798 | 0.9973 |
| 17.847 | 0.999942 | 0.9987 |
| 19.385 | 1.000000 | 0.9993 |

De $\chi_4^2$-verdeling heeft een duidelijk dikkere staart. We hebben niet onderzocht vanaf welke waarden van de $n_i$'s de $\chi^2$-benadering wél goed is.

c) De asymptotische verdeling van $\underline{R}$ is nog niet bekend, maar Miller [7] heeft een grote-steekproeven benadering gevonden, in het geval dat alle steekproeven van dezelfde grootte zijn ($\forall_i\ n_i = n$). Met behulp daarvan heeft hij de kritieke waarden van $\underline{R}$ getabelleerd voor $\alpha = 0.05$ en $\alpha = 0.01$ en voor $k = 2(1)10$; $n = 6(1)20, 25(5)50, 100$.

d) De asymptotische verdeling van $\underline{Q}$ is vermoedelijk een $\chi^2$-verdeling met $\binom{k}{2}$ vrijheidsgraden (Terpstra [12]). Het is niet bekend, vanaf welke waarden van de $n_i$'s deze benadering goed is.

## 3.3. Verdelingen onder $H_1$, $H_2$ en $H_3$.

Er is niets bekend over verdelingen, noch over asymptotische verdelingen van $\underline{H}$, $\underline{M}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ onder de (verschuivings)alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$ (zie (3.1)). We gaan nu onderzoeken wat er gebeurt indien de verschuiving(en) extreem wordt (worden). Notatie: "$a \to \infty$". (We gebruiken deze notatie om aan te geven dat het niet in alle gevallen nodig is dat $a \to \infty$ (bijv. als $F(x)$ uniform verdeeld is).)

a) Onder $H_1$ zullen nu alle waarnemingen van de k-de steekproef groter zijn dan de overige, hetgeen inhoudt dat we voor de bepaling van de verdeling van $\underline{H}$ en $\underline{Q}$ slechts de mogelijke ordeningen van de rangnummers 1 t/m $(N - n_k)$ hoeven te bepalen.

De dichtheidsfunctie $g_1$ van Mood (zie (3.2)) wordt nu:

$$(3.3) \qquad g_1(m_1,\dots,m_k;H_1;\text{"}a\to\infty\text{"}) = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}\binom{n_i}{m_i}\cdot 1}{\binom{N-n_k}{b}} & \text{als } (N-n_k) \geq b \text{ en } \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i = b \\[2ex] 1 \quad \text{als } (N-n_k) < b,\ m_i = n_i \ (i=1,\dots,k-1) & \\ \qquad\qquad \text{en } \Sigma\, m_i = b & \\[1ex] 0 \quad \text{anders} & \end{cases}$$

(b gedefinieerd volgens § 2.3).

Ten aanzien van Steel's $\underline{R}$ beschouwen we alleen het geval dat alle steekproeven even groot zijn ($n_i = n$, $i = 1,\dots,k$). De maximale waarde van R (zie § 2.4) is dan $\frac{1}{2}n(3n+1)$. Het zal duidelijk zijn dat, als "$a \to \infty$", geldt: $P(\underline{R} = \frac{1}{2}n(3n+1)) = 1$.

We beschouwen nu het geval $k = 5$, $n_i = 5$, $i = 1,\dots,5$.

De verdelingen van $\underline{H}$ en $\underline{Q}$ hebben we niet bepaald (te veel werk).

De verdeling van $\underline{M}$ werd met behulp van (3.3) op dezelfde manier als onder $H_0$ bepaald (zie § 3.2.1) en volgt hierna.

Tabel 3.2. Verdeling van $\underline{M}$ onder $H_1$ als $k = 5$, $n_i = 5$ en "$a \to \infty$".

| Waarde M van $\underline{M}$ | $P(\underline{M} \leq M; H_1; "a \to \infty")$ |
|---|---|
| 5.539 | 0.079384 |
| 7.077 | 0.555688 |
| 8.616 | 0.674764 |
| 10.154 | 0.889101 |
| 11.693 | 0.936731 |
| 13.231 | 0.984361 |
| 14.770 | 0.988331 |
| 16.308 | 0.997857 |
| 17.847 | 0.999047 |
| 19.385 | 1.000000 |

Over de verdeling van $\underline{R}$ merken we op dat de maximale waarde van R in dit geval 40 is en, zoals we hierboven zagen, geldt $P(\underline{R} = 40) = 1$.

b) Onder $H_2$ zijn alle waarnemingen van de $(k-1)$-de en k-de steekproef groter dan de overige. Voor de bepaling van de verdeling van $\underline{H}$ en $\underline{Q}$ geldt, dat we alle combinaties van de mogelijke ordeningen van de rangnummers 1 t/m $(N - n_{k-1} - n_k)$ en de mogelijke ordeningen van de rangnummers $(N - n_{k-1} - n_k + 1)$ t/m N moeten bepalen.
De dichtheidsfunctie $g_2$ van Mood wordt nu:

$$(3.4) \qquad g_2(m_1,\dots,m_k;H_2;"a\to\infty") = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{k-2} \binom{n_i}{m_i} \cdot 1 \cdot 1}{\binom{N - n_{k-1} - n_k}{b}} & \text{als } (N - n_{k-1} - n_k) \geq b \text{ en } \sum\limits_{i=1}^{k-2} m_i = b \\ 1 & \text{als } (N - n_{k-1} - n_k) < b,\ m_i = n_i \\ & (i = 1,\dots,k-2) \text{ en } \Sigma\, m_i = b \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Voor de verdeling van $\underline{R}$ geldt weer (als $\forall_i\ n_i = n$): $P(\underline{R} = \frac{n}{2}(3n+1)) = 1$.
We bekijken weer het geval $k = 5$, $n_i = 5$, $i = 1,\dots,5$.
De verdelingen van $\underline{H}$ en $\underline{Q}$ hebben we niet bepaald.
De verdeling van $\underline{M}$ werd m.b.v. (3.4) bepaald en volgt hierna.

Tabel 3.3. Verdeling van $\underline{M}$ onder $H_2$ als $k = 5$, $n_i = 5$ en "$a \to \infty$".

| Waarde M van $\underline{M}$ | $P(\underline{M} \le M; H_2; "a \to \infty")$ |
|---|---|
| 14.770 | 0.274725 |
| 16.308 | 0.934066 |
| 19.385 | 1.000000 |

Voor Steel's $\underline{R}$ geldt: $P(\underline{R} = 40) = 1$.

c) Onder $H_3$ geldt, dat alle waarnemingen van de 1e steekproef kleiner - en alle waarnemingen van de k-de steekproef groter zijn dat de overige. Voor de verdeling van $\underline{H}$ en $\underline{Q}$ hebben we de mogelijke ordeningen van de rangnummers $(n_1 + 1)$ t/m $(N - n_k)$ nodig.
De dichtheidsfunctie $g_3$ van Mood wordt:

$$(3.5) \qquad g_3(m_1,\ldots,m_k;H_3;"a \to \infty") = \begin{cases} \dfrac{1\cdot \prod\limits_{i=2}^{k-1} \binom{n_i}{m_i} \cdot 1}{\binom{N - n_1 - n_k}{b - n_1}} & \text{als } (N - n_k) \ge b,\ b > n_1 \text{ en } \sum\limits_{i=2}^{k-1} m_i = b - n_1 \\ 1 & \text{als } (N - n_k) < b,\ m_i = n_i \\ & (i = 1,\ldots,k-1) \text{ en } \Sigma\, m_i = b \\ & \text{en als } (N - n_k) \ge b,\ b \le n_1,\ m_i = 0 \\ & (i = 2,\ldots,k) \text{ en } m_1 = b \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Voor Steel's toetsingsgrootheid geldt weer: $P(\underline{R} = \frac{n}{2}(3n + 1)) = 1$ als $n_i = n$.
Laten we nogmaals het geval $k = 5$, $n_i = 5$ beschouwen.
De verdelingen van $\underline{H}$ en $\underline{Q}$ hebben we niet berekend.
De verdeling van $\underline{M}$ volgt m.b.v. (3.5) hierna.

Tabel 3.4. Verdeling van $\underline{M}$ onder $H_3$ als $k = 5$, $n_i = 5$ en "$a \to \infty$".

| Waarde M van $\underline{M}$ | $P(\underline{M} \leq M;H_3;$"$a \to \infty$"$)$ |
|---|---|
| 10.154 | 0.466200 |
| 11.693 | 0.699301 |
| 13.231 | 0.932401 |
| 16.308 | 0.979021 |
| 17.847 | 0.990676 |
| 19.385 | 1.000000 |

En voor $\underline{R}$ geldt weer: $P(\underline{R} = 40) = 1$.

## 3.4. Bepaling van onbetrouwbaarheden en kritieke waarden voor $k = 5$, $n_i = 5$.

In hoofdstuk IV gaan we voor een aantal gevallen het onderscheidingsvermogen van de vier toetsen uitrekenen. Om de toetsen met elkaar te kunnen vergelijken is het nodig dat ze dezelfde onbetrouwbaarheid hebben; wij kiezen $\alpha = 0.05$. In deze paragraaf zullen we nagaan in hoeverre we die onbetrouwbaarheid kunnen bereiken.

a) Mood-Brown.

Omdat alleen de verdeling van $\underline{M}$ voor $k = 5$, $n_i = 5$ bekend is, ligt het voor de hand om eerst deze verdeling te bekijken.
Uit tabel 3.1 volgt, dat er gééن waarde M bestaat, waarvoor geldt dat $P(\underline{M} \geq M;H_0) = 0.05$. De twee dichtstbij gelegen waarden zijn 8.616 (met $P(\underline{M} \geq 8.616;H_0) = 0.084187$) en 10.154 (met $P(\underline{M} \geq 10.154;H_0) = 0.040921$). Om nu toch een onbetrouwbaarheid van 0.05 te bereiken gebruiken we een gerandomiseerde M-toets en wel de volgende:
Indien $M \geq 10.154$: verwerp $H_0$ en
indien $M = 8.616$: verwerp $H_0$ met kans w, waarbij w wordt gevonden uit:
$w.P(\underline{M} = 8.616) + P(\underline{M} \geq 10.154) = 0.05 \Rightarrow w = 0.2098445$.
In het volgende hoofdstuk zullen we deze toets met onbetrouwbaarheid 0.05 ook gebruiken.
Aangezien we van $\underline{H}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ de verdelingen niet kennen, moeten we m.b.v. een schatting $\hat{\alpha}$ een onbetrouwbaarheid van 0.05 zo dicht mogelijk zien te benaderen, m.a.w. we moeten een waarde $k_\alpha$ zien te vinden zodanig dat bijv. $\hat{P}(\underline{H} > k_\alpha) = \hat{\alpha}$ dichtbij 0.05 ligt. We doen dit m.b.v. een simulatieprocedure

op een computer als volgt: stel dat we in totaal L simulaties uitvoeren, dan telt de computer het aantal keren (onder $H_0$) dat bijv. $\underline{H}$ $k_\alpha$ overschrijdt. Stel dat dat aantal $\ell$ is. Dan is $\underline{\hat{\alpha}} = \underline{\ell}/L$ een zuivere schatter voor de overschrijdingskans $\alpha$ van $k_\alpha$, immers $\underline{\ell}$ is binomiaal verdeeld met als parameters L en $\alpha$ en dus geldt $\mathcal{E}(\underline{\ell}/L) = \alpha$.

b) Kruskal-Wallis.

Als waarde voor $k_\alpha$ zouden we het grootste 5% punt van de $\chi_4^2$-verdeling kunnen nemen (zie § 3.2.2.a), maar we kunnen aan de hand van de bestaande tabel van de verdeling van $\underline{H}$ voor $k = 3$, $n_i = 5$ (Owen [13]) eerst kijken hoe goed de $\chi_2^2$-benadering is. (Dit heeft zin omdat in ons geval $k = 5$, $n_i = 5$, de steekproefgroottes ook alle 5 zijn.) Uit die vergelijking blijkt dan, dat de staart van de $\chi_2^2$-verdeling dikker is dan die van de $\underline{H}$ verdeling (bijv. $P(\underline{H} > 5.66;H_0) = 0.049$ en $P(\chi_2^2 > 5.6) = 0.6081$). Als waarden voor $k_\alpha$ hebben we toen genomen waarden die in de buurt van het 6% punt van de $\chi_4^2$-verdeling liggen.

Resultaat (aantal simulaties 5000):

| $k_\alpha$ | $\hat{\alpha} = \hat{P}(\underline{H} > k_\alpha;H_0)$ | $P(\chi_4^2 > k_\alpha)$ |
|---|---|---|
| 9.0 | 0.0448 | 0.0611 |
| 8.9 | 0.0514 | - |
| 8.8 | 0.0574 | 0.0663 |

Uitgaande van deze gegevens hebben we als definitieve waarde voor $k_\alpha$ genomen 8.915 en bij 25000 simulaties leverde dat als resultaat: $\hat{P}(\underline{H} > 8.915;H_0) =$ $= 0.051$. Een 95% betrouwbaarheidsinterval om $P(\underline{H} > 8.915;H_0)$ wordt dan: $0.048 \le P(\underline{H} > 8.915) \le 0.054$.

c) Steel.

In § 3.3.a zagen we al dat de maximale waarde van R 40 is. Op een totaal aantal simulaties van 25000 bleek toen, dat $\hat{P}(\underline{R} = 40;H_0) = 0.063$. Een 95% betrouwbaarheidsinterval om $P(\underline{R} = 40;H_0)$ wordt dan: $0.060 \le P(\underline{R} = 40;H_0) \le$ $\le 0.066$.

We ontkomen er niet aan, dat in dit geval ($k = n_i = 5$) de onbetrouwbaarheid van Steels toets groter is dan die van Mood-Brown, Kruskal-Wallis en Terpstra (zie d).

d) Terpstra's toets: Een voorlopige eerste schatting (we hebben onder $H_0$ 1000 waarden van Q door de computer laten uitrekenen) bracht aan het licht dat de kritieke grens van de verdeling van $\underline{Q}$ bij $\alpha = 0.05$ rond Q = 22 moest liggen. We hebben toen 25000 maal gesimuleerd en dit waren de resultaten:

| $k_\alpha$ | $\hat{\alpha} = \hat{P}(\underline{Q} \geq k_\alpha;H_0)$ |
|---|---|
| 21.6 | 0.05344 |
| 21.7 | 0.05240 |
| 21.8 | 0.05120 |
| 21.9 | 0.05088 |
| 22.0 | 0.05020 |
| 22.1 | 0.04968 |
| 22.2 | 0.04844 |
| 22.3 | 0.04800 |
| 22.4 | 0.04700 |

Gevolg: we nemen $k_\alpha = 22$; met een 95% betrouwbaarheidsinterval om $P(\underline{Q} \geq 22;H_0)$ krijgen we dan: $0.047 \leq P(\underline{Q} \geq 22;H_0) \leq 0.053$.
We merken nog op, dat de $\chi^2_{10}$-benadering voor de verdeling van $\underline{Q}$ in dit geval ($k = 5$, $n_i = 5$) in de staart slecht is, want het grootste 5% punt van de $\chi^2_{10}$-verdeling is 18.307.

# IV. Onderscheidingsvermogen

## 4.1. Inleiding.

Onder het onderscheidingsvermogen (O.V.) van een toets bij een gegeven alternatief $H_a$ en bij gegeven onbetrouwbaarheid $\alpha$ verstaat men: $P_\alpha(H_0$ wordt verworpen; $H_a$ geldt). Het O.V. is dus een functie van het alternatief $H_a$ en van $\alpha$. Zo zal een toets die gevoelig is voor kleine afwijkingen van $H_0$ een groter O.V. voor die afwijkingen hebben dan een toets die daar niet zo gevoelig voor is. Verder zal het duidelijk zijn dat het O.V. als functie van $\alpha$ monotoon niet-dalend is.
Indien nu bij onbetrouwbaarheid $\alpha$ het kritieke gebied van bijv. $\underline{H}$ $\{H > h_\alpha\}$ is, dan is het O.V. van de toets van Kruskal-Wallis voor alternatief $H_1$: $P(\underline{H} > h_\alpha; H_1)$.

## 4.2. Het O.V. van de toetsen van Kruskal-Wallis, Mood-Brown, Steel en Terpstra voor de alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$ in het geval $k = 5$, $n_i = 5$ $(i = 1,\dots,5)$.

We willen nu het O.V. van deze toetsen in de gegeven gevallen met elkaar gaan vergelijken. Daartoe is in principe noodzakelijk dat de vier toetsprocedures een zelfde onbetrouwbaarheid hebben, hier $\alpha = 0.05$. Dit is praktisch onmogelijk, omdat we in § 3.4 al gevonden hadden, dat in ons geval de minimale onbetrouwbaarheid bij Steel 0.063 is. We hebben echter gemeend, dat de verschillen in onbetrouwbaarheid dermate klein zijn dat vergelijken van de vier toetsen toch nuttig zou zijn.
De schattingen $\widehat{O.V.}$ voor het onderscheidingsvermogen O.V. zijn aldus uitgerekend bij de volgende onbetrouwbaarheden:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Voor de toets van Kruskal-Wallis:} & \alpha = 0.051\\ \text{Voor de toets van Mood-Brown} & : \alpha = 0.05\\ \text{Voor de toets van Steel} & : \alpha = 0.063\\ \text{Voor de toets van Terpstra} & : \alpha = 0.050\end{array}\right\}\ \text{zie 3.4.}$$

<u>Opmerking</u>. Theoretisch is het wel mogelijk een onbetrouwbaarheid van 0.05 voor de toets van Steel te bereiken, nl. door met kans 50/63 $H_0$ te verwerpen als $R = 40$. De onbetrouwbaarheid is dan $\frac{50}{63} P(\underline{R} = 40; H_0) = 0.050$ (zie 3.4). Dit is echter niet verstandig, omdat dan ook het O.V. met een factor $\frac{50}{63}$ verkleind wordt (en dus bijv. nooit één kan worden).

Het $\widehat{O.V.}$ is in alle gevallen door middel van simulaties op een computer berekend voor de alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$ (zie (3.1)) in het geval $k = 5$, $n_i = 5$ en:

1e. Als $F(x) \sim$ uniform op $[0,1]$, $a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$.

2e. Als $F(x) \sim N(0,1)$, $a = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$.

Zij nu A het totale aantal simulaties in een simulatieblok, dan is de zuivere schatting $\widehat{O.V.}$ voor het O.V. als volgt berekend:

Voor de toets van Kruskal-Wallis: $\widehat{O.V.} = \frac{1}{A}\{\#\,(H > 8.915)\}$.

Voor de toets van Mood-Brown : $\widehat{O.V.} = \frac{1}{A}\{w.(\#\,(M = 8.616)) + \#(M \geq 10.154)\}$.

Voor de toets van Steel : $\widehat{O.V.} = \frac{1}{A}\{\#\,(R = 40)\}$.

Voor de toets van Terpstra : $\widehat{O.V.} = \frac{1}{A}\{\#\,(Q \geq 22)\}$.

Ieder simulatieblok omvat 5000 simulaties.
De resultaten staan vermeld in de tabellen 4.1 t/m 4.6.
We kunnen nog enkele theoretische uitspraken doen over het O.V. van de toetsen van Mood-Brown en Steel in het geval "$a \to \infty$". Omdat in dat geval de verdelingen van $\underline{M}$ en $\underline{R}$ onder $H_1$, $H_2$ en $H_3$ bekend zijn (zie 3.3) kunnen we de verschillende O.V.'s direkt berekenen, nl.

Onder $H_1$; Mood-Brown: $O.V_1(M) = w{\cdot}P(\underline{M} = 8.616) + P(\underline{M} \geq 10.154)$
$= 0.3502$ (m.b.v. tabel 3.2)
Steel : $O.V_1(R) = P(\underline{R} = 40) = 1$
} zie tabel 4.1 en 4.2

Onder $H_2$; Mood Brown: $O.V_2(M) = 0.w + 1 = 1$ (m.b.v. tabel 3.3)
Steel : $O.V_2(R) = 1$
} zie tabel 4.3 en 4.4

Onder $H_3$; Mood-Brown: $O.V_3(M) = 0.w + 1 = 1$ (m.b.v. tabel 3.4)
Steel : $O.V_3(R) = 1$
} zie tabel 4.5 en 4.6

Tabel 4.1. Onderscheidingsvermogens als k = $n_i$ = 5, F(x) uniform op [0,1] verdeeld is onder alternatief $H_1$.

| a = / Toets van | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kruskal-Wallis | 0.065 | 0.121 | 0.221 | 0.357 | 0.538 | 0.900 | 0.999 |
| Mood-Brown | 0.059 | 0.079 | 0.119 | 0.184 | 0.257 | 0.354 | 0.352 |
| Steel | 0.076 | 0.102 | 0.171 | 0.286 | 0.453 | 0.831 | 0.996 |
| Terpstra | 0.052 | 0.069 | 0.110 | 0.170 | 0.252 | 0.449 | 0.603 |

Tabel 4.2. Onderscheidingsvermogens als k = $n_i$ = 5, F(x) ~ N(0,1) onder alternatief $H_1$.

| a = / Toets van | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kruskal-Wallis | 0.057 | 0.065 | 0.086 | 0.226 | 0.489 | 0.756 |
| Mood-Brown | 0.049 | 0.061 | 0.075 | 0.151 | 0.235 | 0.298 |
| Steel | 0.064 | 0.077 | 0.097 | 0.224 | 0.451 | 0.679 |
| Terpstra | 0.052 | 0.054 | 0.070 | 0.129 | 0.244 | 0.369 |

Tabel 4.3. Onderscheidingsvermogens als k = $n_i$ = 5, F(x) is uniform verdeeld op [0,1], onder $H_2$.

| a = / Toets van | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kruskal-Wallis | 0.074 | 0.161 | 0.337 | 0.593 | 0.822 | 0.994 | 1.000 |
| Mood-Brown | 0.061 | 0.098 | 0.182 | 0.319 | 0.528 | 0.923 | 0.999 |
| Steel | 0.069 | 0.117 | 0.210 | 0.350 | 0.529 | 0.881 | 0.998 |
| Terpstra | 0.057 | 0.084 | 0.148 | 0.248 | 0.385 | 0.691 | 0.851 |

Tabel 4.4. Onderscheidingsvermogens als k = $n_i$ = 5, F(x) ~ N(0,1) onder $H_2$.

| a = / Toets van | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kruskal-Wallis | 0.051 | 0.073 | 0.121 | 0.361 | 0.741 | 0.949 |
| Mood-Brown | 0.056 | 0.062 | 0.100 | 0.272 | 0.559 | 0.835 |
| Steel | 0.061 | 0.093 | 0.114 | 0.297 | 0.558 | 0.811 |
| Terpstra | 0.046 | 0.056 | 0.074 | 0.179 | 0.382 | 0.582 |

Tabel 4.5. Onderscheidingsvermogens als $k = n_i = 5$, $F(x)$ is uniform verdeeld op $[0,1]$, onder $H_3$.

| Toets van \ a = | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kruskal-Wallis | 0.097 | 0.254 | 0.531 | 0.831 | 0.979 | 1.000 | 1.000 |
| Mood-Brown | 0.068 | 0.131 | 0.285 | 0.543 | 0.812 | 0.990 | 1.000 |
| Steel | 0.085 | 0.180 | 0.397 | 0.745 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| Terpstra | 0.061 | 0.114 | 0.243 | 0.476 | 0.751 | 0.994 | 1.000 |

Tabel 4.6. Onderscheidingsvermogens als $k = n_i = 5$, $F(x) \sim N(0,1)$, onder $H_3$.

| Toets van \ a = | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kruskal-Wallis | 0.055 | 0.079 | 0.161 | 0.571 | 0.906 | 0.994 |
| Mood-Brown | 0.054 | 0.078 | 0.124 | 0.358 | 0.645 | 0.849 |
| Steel | 0.065 | 0.091 | 0.166 | 0.474 | 0.820 | 0.965 |
| Terpstra | 0.055 | 0.064 | 0.096 | 0.299 | 0.693 | 0.937 |

Voorlopige conclusies:

Onder $H_1$: Voor het verwerpen van $H_0$ is Kruskal-Wallis het meest onderscheidend. Steel is goede tweede. (Dat het O.V. van Steel voor lage waarden van a iets groter is dan dat van Kruskal-Wallis wijten we aan de grotere onbetrouwbaarheid van Steel.) Dat Mood-Brown slecht is hadden we al aangetoond. Hetzelfde lijkt het geval te zijn bij Terpstra: we hebben dit echter niet verder onderzocht.

Onder $H_2$: Ook hier is Kruskal-Wallis veruit de beste toets. Steel en Mood-Brown ontlopen elkaar niet veel, maar wederom lijkt de steekproefgrootte zo klein dat Terpstra geen goede resultaten kan behalen.

Onder $H_3$: Kruskal-Wallis geeft weer de beste resultaten te zien, gevolgd door Steel. Mood-Brown en Terpstra zijn duidelijk slechter, maar ontlopen elkaar niet veel. Voor kleine verschuivingen is Mood-Brown iets beter, voor grotere Terpstra.

## 4.3. Betrouwbaarheidsintervallen voor het O.V.

Om een indruk te krijgen van de betrouwbaarheid van onze schatting van het O.V. geven we tot slot van dit hoofdstuk betrouwbaarheidsintervallen voor het O.V. We hebben gekozen dit te doen voor tabel 4.3. Voor de toetsen van Kruskal-Wallis, Steel en Terpstra geldt, dat we als schatting voor het O.V. gebruiken: $\widehat{O.V.} = \frac{1}{A}\{\# (X \geq k_\alpha)\}$, waarbij X de toetsingsgrootheid, $k_\alpha$ de kritieke waarde bij onbetrouwbaarheid $\alpha$ en A het totale aantal simulaties is, hier: A = 5000. Nu is $\widehat{O.V.}$ een binomiaal verdeelde grootheid met parameters O.V. en 5000. We kunnen deze verdeling benaderen door een normale verdeling, nl. door $N(O.V., \frac{O.V.(1 - O.V.)}{5000})$. Het 95% betrouwbaarheidsinterval voor het O.V. wordt dan:

$$\widehat{O.V.} - 1.96\sqrt{\frac{\widehat{O.V.}(1 - \widehat{O.V.})}{5000}} \leq O.V. \leq \widehat{O.V.} + 1.96\sqrt{\frac{\widehat{O.V.}(1 - \widehat{O.V.})}{5000}} .$$

Voor de toets van Mood-Brown gebruiken we als schatting: $\widehat{O.V.} = \frac{1}{A}\{wn_1 + n_2\}$ met $n_1 = \# (M = 8.616)$ en $n_2 = \# (M \geq 10.154)$.

$\frac{n_1}{5000}$ en $\frac{n_2}{5000}$ zijn dan binomiaal verdeelde grootheden met parameters 5000 en resp. $p_1 = P(\underline{M} = 8.616;$ alternatief $H_a)$ en $p_2 = P(\underline{M} \geq 10.154;$ alternatief $H_a)$ ($H_a = H_1, H_2$ of $H_3$). We benaderen deze verdelingen door respectievelijk $N(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{5000})$ en $N(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{5000})$. $\underline{\widehat{O.V.}}$ is dan de som van 2 onafhankelijke, normaal verdeelde grootheden en is dus weer normaal verdeeld en wel:

$$\underline{\widehat{O.V.}} \sim N(wp_1 + p_2, \frac{1}{5000}[w^2p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)])$$

en het 95% betrouwbaarheidsinterval voor het O.V. wordt dan:

$$\frac{wn_1 + n_2}{5000} - \frac{1.96}{5000}\sqrt{w^2n_1(1 - \frac{n_1}{5000}) + n_2(1 - \frac{n_2}{5000})} \leq O.V. \leq$$

$$\leq \frac{wn_1 + n_2}{5000} + \frac{1.96}{5000}\sqrt{w^2n_1(1 - \frac{n_1}{5000}) + n_2(1 - \frac{n_2}{5000})} .$$

De 95% betrouwbaarheidsintervallen voor het onderscheidingsvermogen zijn in alle voorkomende gevallen van tabel 4.3 berekend en de resultaten staan vermeld in tabel 4.7.

Tabel 4.7. 95% betrouwbaarheidsintervallen voor het onderscheidingsvermogen van de toetsen van Kruskal-Wallis, Mood-Brown, Steel en Terpstra als $k = n_i = 5$, $F(x) \sim$ uniform op [0,1], onder $H_2$.

| a \ Toets van | Kruskal Wallis | Mood-Brown | Steel | Terpstra |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | [0.067,0.081] | [0.055,0.067] | [0.062,0.076] | [0.051,0.063] |
| 0.2 | [0.051,0.171] | [0.090,0.106] | [0.108,0.126] | [0.076,0.092] |
| 0.3 | [0.324,0.350] | [0.172,0.192] | [0.199,0.221] | [0.138,0.158] |
| 0.4 | [0.579,0.607] | [0.306,0.332] | [0.337,0.363] | [0.236,0.260] |
| 0.5 | [0.811,0.833] | [0.514,0.542] | [0.515,0.543] | [0.372,0.398] |
| 0.7 | [0.992,0.996] | [0.916,0.931] | [0.872,0.890] | [0.678,0.704] |
| 0.9 | - | [0.9986,0.9994] | [0.997,0.999] | [0.841,0.861] |

# V. Over simultane uitspraken.

## 5.1. Inleiding.

Indien we nogmaals de resultaten van hoofdstuk IV bekijken (zie tabellen 4.1 t/m 4.6), zien we dat alleen het O.V. van de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel naar één nadert voor ieder der alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$, indien a groot wordt. Beide toetsen zijn dus voor grote verschuivingen goed onderscheidend wat het verwerpen van $H_0$ betreft. In dit hoofdstuk zullen we nu deze twee toetsen verdergaand vergelijken.

In 5.2 zullen we voor de toets van Kruskal-Wallis (zie 2.2) onderzoeken of we - indien $H_0$ wordt verworpen - iets kunnen zeggen over welke kontrasten significant worden. (Onder een kontrast verstaan we een uitdrukking van de vorm $|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \underline{\bar{R}}_i|$ met $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$.) Verder zullen we voor het geval dat "$a \to \infty$" en $\forall_i\ n_i = n$, minimale steekproefgroottes bepalen, waarvoor de eerder gegeven kontrasten significant kunnen worden.

In 5.3 zullen we voor de toets van Steel (zie 2.4) onderzoeken - indien $H_0$ wordt verworpen - welke van de grootheden $\underline{r}^*_{i,j}$ significant worden onder $H_1$, $H_2$ en $H_3$.

In 5.4 tenslotte zullen we de speciale uitschietertoets van Doornbos-Prins [14] vergelijken met de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel, d.m.v. het vergelijken van het O.V. van de toetsen onder $H_1$, in het geval $k = 5$, $n_i = 5$.

## 5.2. Toets van Kruskal-Wallis (zie 2.2).

We gaan er vanuit dat $H_0$ wordt verworpen met onbetrouwbaarheid $\alpha$ als $H > h_\alpha$. Miller [8] toont dan aan dat de $\binom{k}{2}$ ongelijkheden:

$$(5.1) \qquad |\underline{\bar{R}}_i - \underline{\bar{R}}_j| \leq \sqrt{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

onder $H_0$ simultaan gelden met kans $> (1-\alpha)$.

Hij bewijst dit m.b.v. het volgende lemma, dat wij ook zullen gebruiken:

Lemma. Indien $c > 0$, geldt $|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i| \leq c(\sum_{i=1}^{k} a_i^2)^{\frac{1}{2}}$ voor alle $(a_1,\ldots,a_k)$ dan en slechts dan als $\sum_{i=1}^{k} y_i^2 \leq c^2$.

5.2.1. Kontrasten, behorend bij alternatief $H_1$ (zie (3.1)).

Behalve de kontrasten (5.1) die we op significantie gaan onderzoeken, kunnen we nog een kontrast opstellen, waarin het verschil tussen de groep van de eerste (k - 1) verdelingen en de k-de verdeling tot uiting komt, nl. het kontrast $|\underline{\bar{R}}_k - \frac{1}{(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \underline{\bar{R}}_i|$. Op het eerste gezicht lijkt het wel wat geflatteerd om ook dit kontrast op significantie te onderzoeken, omdat we immers weten dat we de k-de verdeling (naar rechts) hebben verschoven. Het grote voordeel echter van simultane uitspraken bij Kruskal-Wallis is, dat ze alle tegelijk gelden met kans > $(1-\alpha)$ (we zullen dit nog bewijzen) en dat houdt in dat we, nadat $H_0$ is verworpen, elk willekeurig kontrast nog op significantie kunnen onderzoeken, binnen onbetrouwbaarheid $\alpha$. Praktisch houdt dat dan in, dat, als we aan de hand van de waarnemingen vermoeden dat de k-de verdeling is verschoven (en bij grote a kan dat gebeuren), we alsnog het betreffende kontrast op significantie kunnen onderzoeken, zonder de onbetrouwbaarheid $\alpha$ te overschrijden. We zullen nu voor het gegeven kontrast een ongelijkheid onder $H_0$ afleiden.

Onder $H_0$ geldt:

$$(5.2) \qquad |\underline{\bar{R}}_k - \frac{1}{(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \underline{\bar{R}}_i| \le \sqrt{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12} \{\frac{1}{(k-1)^2} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k}\}} ,$$

simultaan met (5.1), met kans > $(1-\alpha)$.

Bewijs. Onder $H_0$ geldt $\underline{H} \le h_\alpha$ met kans > $(1-\alpha)$, ofwel

$$\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} (\underline{\bar{R}}_i - \bar{R})^2 \le h_\alpha \quad \text{(zie 2.2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (\underline{\bar{R}}_i - \bar{R})^2 \le \frac{h_\alpha N(N+1)}{12} .$$

Neem nu in het lemma van Miller: $\underline{y}_i = \sqrt{n_i}(\underline{\bar{R}}_i - \bar{R})$ en $c^2 = \frac{h_\alpha N(N+1)}{12}$, dan volgt $\sum_{i=1}^{k} \underline{y}_i^2 \le c^2$ en met $a_i = \frac{-1}{(k-1)\sqrt{n_i}}$, $i = 1,\dots,k-1$; $a_k = \frac{1}{\sqrt{n_k}}$, volgt het gestelde.

Omdat $\underline{H} \le h_\alpha$ met kans $>(1-\alpha)$ optrad en we slechts een beperkte keuze gedaan hebben uit alle mogelijke $(a_1,\dots,a_k)$ (nl. die combinaties die (5.1) en (5.2) opleverden), is de kans op (5.1) en (5.2) ook $>(1-\alpha)$. □

### 5.2.2. Kontrasten bij alternatief $H_2$ (zie (3.1)).

Van alle kontrasten (5.1) zijn hier van belang de kontrasten $|\bar{\underline{R}}_i - \bar{\underline{R}}_{k-1}|$, $|\bar{\underline{R}}_i - \bar{\underline{R}}_k|$, $i = 1,\dots,k-2$. Ook nu kunnen we weer speciale kontrasten opstellen en wel kontrasten die resp. het verschil aangeven tussen:

- de groep van de eerste $(k-2)$ verdelingen en de $(k-1)$-de verdeling;
- de groep van de eerste $(k-2)$ verdelingen en de $k$-de verdeling, en
- de groep van de eerste $(k-2)$ verdelingen en de groep van de laatste 2 verdelingen.

We geven nu die kontrasten en de ongelijkheden waar ze (onder $H_0$) aan voldoen.

Onder $H_0$ gelden de volgende ongelijkheden

$$(5.3)\qquad |\bar{\underline{R}}_{k-1} - \frac{1}{k-2}\sum_{i=1}^{k-2} \bar{\underline{R}}_i| \le \{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12}[\frac{1}{(k-2)^2}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{k-1}}]\}^{\frac{1}{2}},$$

$$(5.4)\qquad |\bar{\underline{R}}_{k} - \frac{1}{k-2}\sum_{i=1}^{k-2} \bar{\underline{R}}_i| \le \{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12}[\frac{1}{(k-2)^2}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{k}}]\}^{\frac{1}{2}},$$

$$(5.5)\qquad |\tfrac{1}{2}(\bar{\underline{R}}_{k-1} + \bar{\underline{R}}_k) - \frac{1}{k-2}\sum_{i=1}^{k-2} \bar{\underline{R}}_i| \le$$

$$\le \{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12}[\frac{1}{(k-2)^2}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{n_i} + \tfrac{1}{4}(\frac{1}{n_{k-1}} + \frac{1}{n_k})]\}^{\frac{1}{2}}$$

simultaan met (5.1) (en (5.2)) en met kans $>(1-\alpha)$.

Bewijs. Analoog aan het bewijs voor (5.2), met $\underline{y}_i$ en $c^2$ hetzelfde en:

voor (5.3): $a_i = \dfrac{-1}{(k-2)\sqrt{n_i}}$, $i = 1,\dots,k-2$; $a_{k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n_{k-1}}}$; $a_k = 0$;

voor (5.4): $a_i = \dfrac{-1}{(k-2)\sqrt{n_i}}$, $i = 1,\dots,k-2$; $a_{k-1} = 0$; $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{n_k}}$;

voor (5.5): $a_i = \dfrac{-1}{(k-2)\sqrt{n_i}}$, $i = 1,\ldots,k-2$; $a_{k-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{n_{k-1}}}$ ; $a_k = \dfrac{1}{2\sqrt{n_k}}$ . □

5.2.3. Kontrasten bij alternatief $H_3$ (zie (3.1)).

Van de kontrasten (5.1) onderzoeken we nu de significantie van $|\bar{R}_i - \bar{R}_1|$, $|\bar{R}_k - \bar{R}_i|$, $i = 2,\ldots,k-1$ en van $|\bar{R}_1 - \bar{R}_k|$. Het kontrast (5.4) onderzoeken we ook, plus nog de hieronder te definiëren kontrasten (5.6) en (5.7).

Onder $H_0$ gelden de volgende ongelijkheden:

(5.6) $$|\bar{R}_1 - \frac{1}{k-2}\sum_{i=2}^{k-1}\bar{R}_i| \le \left\{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12}\left[\frac{1}{(k-2)^2}\sum_{i=2}^{k-1}\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_1}\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

(5.7) $$|\tfrac{1}{2}(\bar{R}_1 + \bar{R}_k) - \frac{1}{k-2}\sum_{i=2}^{k-1}\bar{R}_i| \le$$

$$\le \left\{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12}\left[\frac{1}{(k-2)^2}\sum_{i=2}^{k-1}\frac{1}{n_i} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_k}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

simultaan met (5.1) t/m (5.5) en met kans > $(1-\alpha)$.

Bewijs. Analoog aan het bewijs voor (5.2) met $y_i$ en $c^2$ hetzelfde, en:

voor (5.6): $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n_1}}$ ; $a_i = \dfrac{-1}{(k-2)\sqrt{n_i}}$, $i = 2,\ldots,k-1$; $a_k = 0$;

voor (5.7): $a_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{n_1}}$ ; $a_i = \dfrac{-1}{(k-2)\sqrt{n_i}}$, $i = 2,\ldots,k-1$; $a_k = \dfrac{1}{2\sqrt{n_k}}$ . □

We hebben de beschreven kontrasten d.m.v. simulaties op significantie onderzocht in de volgende gevallen ($k = 5$, $n_i = 5$, $i = 1,\ldots,5$; $\alpha = 0.051$; $h_\alpha = 8.915$ (zie 3.4)):

Onder $H_1$ en $H_2$: $F \sim$ uniform op [0,1]; a = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9;
$F \sim N(0,1)$; a = 1.0, 1.5, 2.0;

Onder $H_3$ : $F \sim$ uniform op [0,1]; a = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7;
$F \sim N(0,1)$; a = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0.

Ieder simulatieblok bevatte 2000 simulaties.
De resultaten staan vermeld in de tabellen 5.2.1 t/m 5.2.6.

### 5.2.4. Berekening van de minimale steekproefgroottes waarvoor de gegeven kontrasten significant kunnen worden, als "$a \to \infty$" en $\forall_i \; n_i = n$.

We beschouwen voor de rest van deze paragraaf weer het geval van extreme verschuiving, dus "$a \to \infty$".
Voor het geval dat alle steekproeven van gelijke grootte zijn (waaronder het geval $k = 5$, $n_i = 5$), zeg n, kunnen we de minimale waarde van n berekenen, waarvoor de verschillende kontrasten significant kunnen worden.

#### 5.2.4.a. Alternatief $H_1$.

Kontrasten (5.1). We zouden graag zien dat alle $(k-1)$ kontrasten $|\bar{\underline{R}}_i - \bar{\underline{R}}_k|$, $i = 1,\dots,k-1$, significant worden. Welnu, onder $H_1$ en met "$a \to \infty$" geldt, dat $\bar{R}_k = (k-1)n + \frac{1}{2}(n+1)$ en ook: $\mathcal{E}\bar{\underline{R}}_i = \frac{1}{2}[(k-1)n+1]$. Dan geldt: $|\bar{R}_k - \mathcal{E}\bar{\underline{R}}_i| =$ $= \frac{1}{2}kn$ en een nodige voorwaarde opdat alle $(k-1)$ kontrasten significant worden is dus:

$$\tfrac{1}{2}kn > \sqrt{\frac{1}{12}\, h_\alpha\, kn(kn+1)\,\frac{2}{n}} \qquad \text{(zie (5.1))},$$

immers als $\exists_i\; \bar{\underline{R}}_i < \mathcal{E}\bar{\underline{R}}_i \Rightarrow \exists_j\; \bar{\underline{R}}_j > \mathcal{E}\bar{\underline{R}}_i$ omdat $\sum_1^{k-1} \bar{\underline{R}}_i =$ konstant.
Indien we nu de nodige voorwaarde verder uitwerken, krijgen we:

$$\frac{1}{4}k^2n^2 > \frac{1}{6}h_\alpha k(kn+1) \Rightarrow kn^2 - \frac{2}{3}h_\alpha kn - \frac{2}{3}h_\alpha > 0 \Rightarrow$$

$$n > \frac{1}{3}h_\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{h_\alpha\left(\frac{4}{9}h_\alpha + \frac{8}{3k}\right)} \tag{5.8}$$

In het geval $k = 5$, $n = 5$, $h_\alpha = 8.915$, krijgen we dan $n > 6.137 \Rightarrow n \geq 7$.
Het is dus theoretisch niet mogelijk in dit geval vier significante kontrasten te vinden (zie tabel 5.2.1 en 5.2.2).

Kontrast (5.2). Voor "$a \to \infty$" geldt: $\bar{R}_k = (k-1)n + \frac{1}{2}(n+1)$ en $\frac{1}{(k-1)}\sum_{i=1}^{k-1} \bar{\underline{R}}_i =$ $= \frac{1}{2}[(k-1)n+1]$. Nodige voorwaarde voor significantie:

$$\tfrac{1}{2}kn > \sqrt{\frac{1}{12}\, h_\alpha kn(kn+1)\left\{\frac{1}{(k-1)n} + \frac{1}{n}\right\}} \Rightarrow$$

$$(5.9) \qquad \underline{\underline{n > \frac{1}{6} h_\alpha \left(\frac{k}{k-1}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{h_\alpha \left(\frac{1}{9} h_\alpha \frac{k^2}{(k-1)^2} + \frac{4}{3(k-1)}\right)}}} \, .$$

Voor het geval k = 5, n = 5 is $h_\alpha$ = 8.915 en wordt de nodige voorwaarde $n > 3.905 \Rightarrow \underline{n \geq 4}$. Theoretisch kan dit kontrast dus significant worden (zie tabel 5.2.1 en 5.2.2).

5.2.4.b. Alternatief $H_2$.

Kontrasten (5.1). We willen graag dat de drie kontrasten $|\bar{\underline{R}}_i - \bar{\underline{R}}_{k-1}|$, $i = 1,\ldots,k-2$ en de drie kontrasten $|\bar{\underline{R}}_i - \bar{\underline{R}}_k|$, $i = 1,\ldots,k-2$, alle significant worden. Welnu, $\mathcal{E}\bar{\underline{R}}_{k-1} = \mathcal{E}\bar{\underline{R}}_k = (k-2)n + \frac{1}{2}(2n+1)$ en $\mathcal{E}\bar{\underline{R}}_i = \frac{1}{2}[(k-2)n+1]$, $i = 1,2,3$. Dus $\mathcal{E}(\bar{\underline{R}}_{k-1} - \bar{\underline{R}}_i) = \mathcal{E}(\bar{\underline{R}}_k - \bar{\underline{R}}_i) = \frac{1}{2}kn$.

Nodige voorwaarde: $\frac{1}{2}kn > \sqrt{\frac{1}{12} h_\alpha kn(kn+1) \frac{2}{n}}$ . Dit levert weer (5.8).

In het geval k = 5, n = 5, $h_\alpha$ = 8.915 levert dit weer $\underline{\underline{n \geq 7}}$ (zie tabel 5.2.3 en 5.2.4).

Kontrast (5.3). $\mathcal{E}(\bar{\underline{R}}_{k-1}) = (k-2)n + \frac{1}{2}(2n+1)$; $\frac{1}{(k-2)} \sum_{i=1}^{k-2} \bar{\underline{R}}_i = \frac{1}{2}[(k-2)n+1]$.

Nodige voorwaarde voor significantie van dit kontrast is dus

$$\tfrac{1}{2}kn > \sqrt{\frac{1}{12} h_\alpha kn(kn+1) \frac{k-1}{k-2} \frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$(5.10) \qquad \underline{\underline{n > \frac{1}{6} h_\alpha \left(\frac{k-1}{k-2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{h_\alpha \left\{\frac{1}{9} h_\alpha \left(\frac{k-1}{k-2}\right)^2 + \frac{4}{3} \frac{(k-1)}{k(k-2)}\right\}}}} \, .$$

Voor k = 5, n = 5, $h_\alpha$ = 8.915 levert dit $n > 4.153 \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 5}}$. Dit kontrast kan dus significant worden (zie tabel 5.2.3 en 5.2.4).

Kontrast (5.4). Levert exact dezelfde voorwaarde op als kontrast (5.3).

Kontrast (5.5). Er geldt: $\frac{1}{2}(\bar{\underline{R}}_{k-1} + \bar{\underline{R}}_k) = (k-2)n + \frac{1}{2}(2n+1)$; $\frac{1}{k-2} \sum_{1}^{k-2} \bar{\underline{R}}_i = \frac{1}{2}[(k-2)n+1]$. Nodige voorwaarde:

$$\tfrac{1}{2}kn > \sqrt{\frac{1}{12} h_\alpha kn(kn+1) \frac{k}{(k-2)n}} \Rightarrow$$

$$(5.11)\qquad \underline{\underline{n > \frac{1}{12}\, h_\alpha \left(\frac{k}{k-2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{h_\alpha \left\{\frac{1}{36}\, h_\alpha \left(\frac{k}{k-2}\right)^2 + \frac{2}{3(k-2)}\right\}}}}\ .$$

Voor $k = 5$, $n = 5$, $h_\alpha = 8.915$ levert dit $n > 2.662 \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 3}}$. Dit kontrast kan dus significant worden (zie tabel 5.2.3 en 5.2.4).

5.2.4.c. Alternatief $H_3$.

Kontrasten (5.1). We gaan weer kijken of we alle kontrasten $|\bar{R}_1 - \underline{\bar{R}}_i|$ en $|\bar{R}_k - \underline{\bar{R}}_i|$, $i = 2,\ldots,k-1$, simultaan significant kunnen krijgen.
Er geldt: $\bar{R}_1 = \frac{1}{2}(n+1)$, $\bar{R}_k = (k-1)n + \frac{1}{2}(n+1)$, $\mathcal{E}\underline{\bar{R}}_i = \frac{1}{2}(kn+1)$, $i = 2,\ldots,k-1$.
En $\mathcal{E}\underline{\bar{R}}_i - \bar{R}_1 = \bar{R}_k - \mathcal{E}\underline{\bar{R}}_i = \frac{1}{2}(k-1)n$ zodat we als nodige voorwaarde krijgen:

$$\tfrac{1}{2}(k-1)n > \sqrt{\frac{1}{12}\, h_\alpha kn(kn+1)\, \frac{2}{n}} \Rightarrow$$

$$(5.12)\qquad \underline{\underline{n > \frac{1}{3}\, h_\alpha \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{h_\alpha \left\{\frac{4}{9}\, h_\alpha \left(\frac{k}{k-1}\right)^4 + \frac{8}{3}\, \frac{k}{(k-1)^2}\right\}}}}\ .$$

In het geval $k = n = 5$, $h_\alpha = 8.915$ wordt dat: $n > 9.482 \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 10}}$.

Voor het speciale kontrast $\bar{R}_k - \bar{R}_1 = (k-1)n$ geldt als voorwaarde (op analoge wijze afgeleid):

$$(5.13)\qquad \underline{\underline{n > \frac{1}{12}\, h_\alpha \frac{k^2}{(k-1)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{h_\alpha \left\{\frac{1}{36}\, h_\alpha \left(\frac{k}{k-1}\right)^4 + \frac{2}{3}\, \frac{k}{(k-1)^2}\right\}}}}\ .$$

Voor het geval $k = n = 5$, $h_\alpha = 8.915$ wordt dat $n > 2.507 \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 3}}$ (zie tabel 5.2.5 en 5.2.6).

Kontrast (5.4). $\bar{R}_k = (k-1)n + \frac{1}{2}(n+1)$ en $\frac{1}{(k-2)} \sum_{2}^{k-2} \underline{\bar{R}}_i = \frac{1}{2}(kn+1)$, zodat:

$$\tfrac{1}{2}(k-1)n > \sqrt{\frac{1}{12}\, h_\alpha N(N+1) \left\{\frac{k-1}{(k-2)n}\right\}} \Rightarrow$$

$$(5.14)\qquad \underline{\underline{n > \frac{1}{6}\, h_\alpha \frac{k^2}{(k-1)(k-2)} + \frac{1}{2}\sqrt{h_\alpha \left\{\frac{1}{9}\, h_\alpha \frac{k^4}{(k-1)^2(k-2)^2} + \frac{4k}{3(k-1)(k-2)}\right\}}}}\ .$$

Voor $k = n = 5$, $h_\alpha = 8.915$ wordt dit: $n > 6.385 \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 7}}$ (zie tabel 5.1.5 en 5.1.6).

<u>Kontrast (5.6)</u>. Dit kontrast levert exact hetzelfde resultaat als voor kontrast (5.4).

<u>Kontrast (5.7)</u>. $\frac{1}{2}(\bar{R}_1 + \bar{R}_k) = \frac{1}{2}(k-1)n + \frac{1}{2}(n+1)$; $\frac{1}{k-2}\sum_{2}^{k-2} \bar{R}_i = \frac{1}{2}(kn+1)$.

Dus: $\frac{1}{2}(\bar{R}_1 + \bar{R}_k) - \frac{1}{k-2}\sum_{2}^{k-2} \bar{R}_i = 0$. Nodige voorwaarde:

$$(5.15) \qquad 0 > \sqrt{\frac{h_\alpha N(N+1)}{12}\left[\frac{1}{(k-2)^2}\sum_{i=2}^{k-1}\frac{1}{n_i} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_k}\right)\right]} .$$

Voor geen enkele n (zie tabel 5.2.5 en 5.2.6).

---

<u>Tabel 5.2.1</u>. Significante kontrasten (s.k.) van de toets van Kruskal-Wallis bij alternatief $H_1$; $k = n_i = 5$; $F(x) \sim$ uniform op $[0,1]$; aantal simulaties = = 2000.

| a | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 444 | 742 | 1114 | 1827 | 1999 |
| # (Géén s.k. $\lvert\bar{R}_i - \bar{R}_5\rvert$, $i = 1,\ldots,4$) | 293 | 410 | 559 | 603 | 325 |
| # (Eén " " " ) | 145 | 301 | 492 | 1026 | 1245 |
| # (Twee " " " ) | 6 | 31 | 63 | 198 | 422 |
| # (Drie " " " ) | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| # (Vier " " " ) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # ($\lvert\bar{R}_5 - \frac{1}{4}\sum_{1}^{4}\bar{R}_i\rvert$ is significant) | 83 | 266 | 534 | 1494 | 1996 |

Tabel 5.2.2. Significante kontrasten (s.k.) van de toets van Kruskal-Wallis bij alternatief $H_1$; $k = n_i = 5$; $F(x) \sim N(0,1)$; aantal simulaties = 2000.

| a | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 472 | 956 | 1472 |
| # (Géén s.k. $\lvert\bar{R}_i - \bar{R}_5\rvert$, $i = 1,\ldots,4$) | 293 | 476 | 594 |
| # (Eén " " " ) | 168 | 433 | 747 |
| # (Twee " " " ) | 11 | 47 | 130 |
| # (Drie " " " ) | 0 | 0 | 1 |
| # (Vier " " " ) | 0 | 0 | 0 |
| # ($\lvert\bar{R}_5 - \frac{1}{4}\sum_1^4 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 110 | 459 | 969 |

Tabel 5.2.3. Significante kontrasten (s.k.) van de toets van Kruskal-Wallis bij alternatief $H_2$; $k = n_i = 5$; $F(x) \sim$ uniform op [0,1]; aantal simulaties = = 2000.

| a | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 663 | 1227 | 1630 | 1985 | 2000 |
| # (Géén s.k. $\lvert\bar{R}_4 - \bar{R}_i\rvert$ of $\lvert\bar{R}_5 - \bar{R}_i\rvert$, $i = 1,2,3$) | 462 | 776 | 945 | 748 | 324 |
| # (Eén " " " " " ) | 179 | 383 | 536 | 744 | 688 |
| # (Twee " " " " " ) | 22 | 66 | 145 | 474 | 917 |
| # (Drie " " " " " ) | 0 | 2 | 4 | 17 | 58 |
| # (Vier " " " " " ) | 0 | 0 | 0 | 2 | 13 |
| # (Vijf " " " " " ) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # ($\lvert\bar{R}_4 - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 80 | 233 | 412 | 1067 | 1666 |
| # ($\lvert\bar{R}_5 - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\rvert$ " " ) | 76 | 232 | 462 | 1103 | 1668 |
| # ($\lvert\frac{1}{2}(\bar{R}_4 + \bar{R}_5) - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 255 | 779 | 1322 | 1953 | 2000 |

Tabel 5.2.4. Significante kontrasten (s.k.) van de toets van Kruskal-Wallis bij alternatief $H_2$; $k = n_i = 5$; $F(x) \sim N(0,1)$; aantal simulaties = 2000.

| a | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 722 | 1467 | 1899 |
| # (Géén s.k. $\lvert\bar{R}_4 - \bar{R}_i\rvert$ of $\lvert\bar{R}_5 - \bar{R}_i\rvert$, $i = 1,2,3$) | 476 | 911 | 931 |
| # (Eén " " " " " ) | 218 | 435 | 630 |
| # (Twee " " " " " ) | 27 | 119 | 322 |
| # (Drie " " " " " ) | 1 | 2 | 15 |
| # (Vier " " " " " ) | 0 | 0 | 1 |
| # (Vijf " " " " " ) | 0 | 0 | 0 |
| # ($\lvert\bar{R}_4 - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 102 | 331 | 729 |
| # ($\lvert\bar{R}_5 - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\rvert$ " " ) | 92 | 329 | 769 |
| # ($\lvert\frac{1}{2}(\bar{R}_4 + \bar{R}_5) - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 316 | 1076 | 1730 |

Tabel 5.2.5. Significante kontrasten (s.k.) van de toets van Kruskal-Wallis bij alternatief $H_3$; $k = n_i = 5$; $F(x) \sim$ uniform op [0,1]; aantal simulaties = = 2000.

| a | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 491 | 1022 | 1658 | 1956 | 2000 |
| # (Géén s.k. $\lvert\bar{R}_1-\bar{R}_i\rvert$ of $\lvert\bar{R}_5-\bar{R}_i\rvert$, $i=2,3,4$ of $\lvert\bar{R}_1-\bar{R}_5\rvert$) | 300 | 460 | 383 | 126 | 0 |
| # (Eén " " " " " " " ) | 179 | 522 | 1187 | 1686 | 1881 |
| # (Twee " " " " " " " ) | 12 | 40 | 87 | 142 | 118 |
| # (Drie " " " " " " " ) | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| # (Vier " " " " " " " ) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # ($\lvert\bar{R}_1 - \frac{1}{3}\sum_2^4 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 10 | 17 | 23 | 9 | 0 |
| # ($\lvert\bar{R}_5 - \frac{1}{3}\sum_2^4 \bar{R}_i\rvert$ " " ) | 8 | 13 | 27 | 16 | 0 |
| # ($\lvert\frac{1}{2}(\bar{R}_1 + \bar{R}_5) - \frac{1}{3}\sum_2^4 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tabel 5.2.6. Significante kontrasten (s.k.) van de toets van Kruskal-Wallis bij alternatief $H_3$; $k = n_i = 5$; $F(x) \sim N(0,1)$; aantal simulaties = 2000.

| a | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 322 | 1123 | 1827 | 1995 |
| # (Géén s.k. $\lvert\bar{R}_1-\bar{R}_i\rvert$ of $\lvert\bar{R}_5-\bar{R}_i\rvert$, i=2,3,4 of $\lvert\bar{R}_1-\bar{R}_5\rvert$) | 208 | 477 | 209 | 26 |
| # (Eén " " " " " " " ) | 106 | 594 | 1476 | 1802 |
| # (Twee " " " " " " " ) | 8 | 52 | 142 | 163 |
| # (Drie " " " " " " " ) | 0 | 0 | 0 | 4 |
| # (Vier " " " " " " " ) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # ($\lvert\bar{R}_1 - \frac{1}{3}\sum_2^4 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 8 | 16 | 17 | 4 |
| # ($\lvert\bar{R}_5 - \frac{1}{3}\sum_2^4 \bar{R}_i\rvert$ " " ) | 9 | 23 | 9 | 16 |
| # ($\lvert\frac{1}{2}(\bar{R}_1 + \bar{R}_5) - \sum_2^4 \bar{R}_i\rvert$ is significant) | 2 | 0 | 0 | 0 |

We geven wat opmerkingen over het verkregen cijfermateriaal.

a) Alternatief $H_1$ (tabellen 5.1.1 en 5.1.2).
Met behulp van kontrasten $\lvert\bar{R}_i - \bar{R}_5\rvert$ zijn we niet goed in staat om $F_5(x)$ als uitschieter aan te wijzen (zie ook (5.8)). Opvallend is het grote aantal verwerpingen van $H_0$ zónder dat er een significant kontrast $\lvert\bar{R}_i - \bar{R}_5\rvert$ optreedt, zelfs bij grote verschuivingen. Het kontrast $\lvert\bar{R}_5 - \frac{1}{4}\sum_1^4 \bar{R}_i\rvert$ komt, vooral bij grotere verschuivingen, goed naar voren.

b) Alternatief $H_2$ (tabellen 5.1.3 en 5.1.4).
Ook hier geven de kontrasten $\lvert\bar{R}_i - \bar{R}_4\rvert$ en $\lvert\bar{R}_i - \bar{R}_5\rvert$ niet veel inzicht in de verschuivingen van $\bar{R}_4$ en $\bar{R}_5$. De kontrasten $\left\lvert {\bar{R}_4 \atop \bar{R}_5} - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\right\rvert$ komen bij grotere verschuivingen redelijk naar voren, en dat geldt in hoge mate voor het kontrast $\lvert\frac{1}{2}(\bar{R}_4 + \bar{R}_5) - \frac{1}{3}\sum_1^3 \bar{R}_i\rvert$.

c) Alternatief $H_3$ (tabellen 5.1.5 en 5.1.6).
Het hoge aantal keren met één significant verschil wordt in hoofdzaak veroorzaakt door het kontrast $\lvert\bar{R}_1 - \bar{R}_5\rvert$ (zie ook (5.13)).

## 5.3. Toets van Steel.

Indien $H_0$ wordt verworpen als $R \geq r_\alpha$, dan verklaart Steels toets al die $\underline{r}^*_{i,j}$ significant (zie 2.4) waarvoor geldt dat $\underline{r}^*_{i,j} \geq r_\alpha$.
Onder $H_1$ zijn we dan geïnteresseerd in de $\underline{r}^*_{i,5}$ ($i = 1,\ldots,4$).
Onder $H_2$ onderzoeken we de significantie van $\underline{r}^*_{i,4}$ en $\underline{r}^*_{i,5}$ ($i = 1,2,3$). (Tijdens het simulatieproces wordt ook $\underline{r}^*_{4,5}$ onderzocht.)
Onder $H_3$ tenslotte bekijken we de $\underline{r}^*_{1,i}$, $\underline{r}^*_{5,i}$ ($i = 2,3,4$) en $\underline{r}^*_{1,5}$.
Bovenstaande $\underline{r}^*_{i,j}$'s zijn door middel van simulaties op significantie onderzocht in de volgende gevallen: $k = 5$, $n_i = 5$, $\alpha = 0.063$.

Onder $H_1$ en $H_2$: $F \sim$ uniform op $[0,1]$; $a = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$
$F \sim N(0,1)$ ; $a = 1.0, 1.5, 2.0$.

Onder $H_3$ : $F \sim$ uniform op $[0,1]$; $a = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$;
$F \sim N(0,1)$ ; $a = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$.

Ieder simulatieblok bevatte 2000 simulaties.
$r_\alpha = 40$ (zie 3.4).
Resultaten worden gegeven in de volgende tabellen.

Tabel 5.3.1. Significante $r^*_{i,j}$'s van de toets van Steel onder alternatief $H_1$; $k = 5$, $n_i = 5$; $F(x) \sim$ uniform op $[0,1]$; aantal simulaties = 2000.

| a | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 335 | 553 | 911 | 1655 | 1996 |
| # (Géén significante $r^*_{i,5}$, $i = 1,\ldots,4$) | 44 | 24 | 9 | 0 | 0 |
| # (Eén " " " ) | 196 | 356 | 525 | 498 | 53 |
| # (Twee " " " ) | 59 | 95 | 198 | 419 | 139 |
| # (Drie " " " ) | 25 | 44 | 74 | 251 | 276 |
| # (Vier " " " ) | 11 | 34 | 105 | 487 | 1528 |

Tabel 5.3.2. Significante $r^*_{i,j}$'s van de toets van Steel bij alternatief $H_1$; $k = 5$, $n_i = 5$; $F(x) \sim N(0,1)$; aantal simulaties = 2000.

| a | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 434 | 867 | 1385 |
| # (Géén significante $r^*_{i,5}$, $i = 1,\dots,4$) | 35 | 20 | 9 |
| # (Eén " " " ) | 256 | 428 | 428 |
| # (Twee " " " ) | 100 | 252 | 417 |
| # (Drie " " " ) | 32 | 122 | 333 |
| # (Vier " " " ) | 11 | 45 | 198 |

Tabel 5.3.3. Significante $r^*_{i,j}$'s van de toets van Steel bij alternatief $H_2$; $k = 5$, $n_i = 5$; $F(x) \sim$ uniform op $[0,1]$; aantal simulaties = 2000.

| a | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 448 | 699 | 1051 | 1751 | 1996 |
| # (Géén significante $r^*_{i,4}$ of $r_{i,5}$, $i=1,2,3$ of $r_{4,5}$) | 21 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| # (Eén " " " " " " " ) | 243 | 293 | 295 | 128 | 3 |
| # (Twee " " " " " " " ) | 126 | 245 | 404 | 340 | 32 |
| # (Drie " " " " " " " ) | 46 | 100 | 207 | 430 | 44 |
| # (Vier " " " " " " " ) | 10 | 47 | 110 | 441 | 217 |
| # (Vijf " " " " " " " ) | 2 | 9 | 21 | 230 | 433 |
| # (Zes " " " " " " " ) | 0 | 0 | 13 | 182 | 1252 |
| # (Zeven " " " " " " " ) | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 |

Tabel 5.3.4. Significante $r^*_{i,j}$'s van de toets van Steel bij alternatief $H_2$; $k = 5$, $n_i = 5$; $F(x) \sim N(0,1)$; aantal simulaties = 2000.

| a | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 614 | 1113 | 1608 |
| # (Géén significante $r^*_{i,4}$ of $r^*_{i,5}$, $i = 1,2,3$ of $r^*_{4,5}$) | 18 | 2 | 2 |
| # (Eén " " " " " " " ) | 332 | 405 | 325 |
| # (Twee " " " " " " " ) | 181 | 395 | 433 |
| # (Drie " " " " " " " ) | 66 | 168 | 382 |
| # (Vier " " " " " " " ) | 13 | 104 | 278 |
| # (Vijf " " " " " " " ) | 4 | 27 | 98 |
| # (Zes " " " " " " " ) | 0 | 12 | 90 |
| # (Zeven " " " " " " " ) | 0 | 0 | 0 |

Tabel 5.3.5. Significante $r^*_{i,j}$'s van de toets van Steel bij alternatief $H_3$; $k = 5$, $n_i = 5$; $F(x) \sim$ uniform op $[0,1]$; aantal simulaties = 2000.

| a | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 368 | 793 | 1508 | 2000 | 2000 |
| # (Géén significante $r^*_{1,i}$ of $r^*_{i,5}$, $i=2,3,4$ of $r^*_{1,5}$) | 19 | 11 | 1 | 0 | 0 |
| # (Eén " " " " " " " ) | 244 | 445 | 786 | 752 | 102 |
| # (Twee " " " " " " " ) | 73 | 222 | 423 | 629 | 268 |
| # (Drie " " " " " " " ) | 26 | 68 | 174 | 282 | 378 |
| # (Vier " " " " " " " ) | 6 | 46 | 102 | 240 | 500 |
| # (Vijf " " " " " " " ) | 0 | 0 | 13 | 68 | 401 |
| # (Zes " " " " " " " ) | 0 | 1 | 5 | 20 | 210 |
| # (Zeven " " " " " " " ) | 0 | 0 | 4 | 9 | 141 |

Tabel 5.3.6. Significante $r^*_{i,j}$'s van de toets van Steel bij alternatief $H_3$; $k = 5$, $n_i = 5$; $F(x) \sim N(0,1)$; aantal simulaties = 2000.

| a | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|
| # (Verwerping van $H_0$) | 328 | 959 | 1630 | 1943 |
| # (Géén significante $r^*_{1,i}$ of $r^*_{i,5}$, i = 2,3,4 of $r^*_{1,5}$) | 25 | 8 | 2 | 0 |
| # (Eén " " " " " " " ) | 207 | 451 | 444 | 205 |
| # (Twee " " " " " " " ) | 72 | 301 | 501 | 388 |
| # (Drie " " " " " " " ) | 22 | 144 | 387 | 482 |
| # (Vier " " " " " " " ) | 2 | 48 | 217 | 472 |
| # (Vijf " " " " " " " ) | 0 | 6 | 58 | 250 |
| # (Zes " " " " " " " ) | 0 | 1 | 15 | 109 |
| # (Zeven " " " " " " " ) | 0 | 0 | 6 | 37 |

We geven weer wat opmerkingen over het verkregen cijfermateriaal.
Zowel bij alternatief $H_1$ (tabellen 5.3.1 en 5.3.2) als bij alternatief $H_2$ (tabellen 5.3.3 en 5.3.4) zien we aan de resultaten dat voor grote verschuivingen Steel's toets de juiste (verschoven) verdeling aanwijst (hoewel voor het geval $F(x) \sim N(0,1)$ het resultaat beduidend slechter is).
Bij alternatief $H_3$ (tabellen 5.3.5 en 5.3.6) komt dit niet zo goed naar voren. In tabel 5.3.5 zien we verder dat $H_0$ vanaf $a = 0.5$ in alle gevallen wordt verworpen, maar tevens dat dan nog niet alle (zeven) kontrasten significant geworden zijn (dat is pas het geval als $a > 1$).

## 5.4. Vergelijking van de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel met een uitschietertoets (van Doornbos-Prins).

Zoals wij (in 5.2.1 t/m 5.2.3) speciale kontrasten hebben gemaakt om een uitschietende verdeling op te sporen, zo is het ook mogelijk om speciale toetsen te ontwerpen die bijzonder onderscheidend zijn als één van de verdelingen een uitschieter is. Eén zo'n toets is die van Doornbos-Prins [14]. De toetsprocedure zullen we hier nu niet beschrijven; we willen alleen het O.V. van deze toets in het geval $k = 5$, $n_i = 5$, $\alpha = 0.05$, $H_1$, vergelijken met het O.V. van de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel.

Resultaten staan in de volgende tabellen: [1)]

Tabel 5.4.1. Onderscheidingsvermogens in het geval $k = n_i = 5$ onder $H_1$; $F(x) \sim$ uniform op $[0,1]$.

| a / Toets | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Doornbos-Prins | 0.070 | 0.142 | 0.283 | 0.497 | 0.700 | 0.983 | 1.000 |
| Kruskal-Wallis | 0.065 | 0.121 | 0.221 | 0.357 | 0.538 | 0.900 | 0.999 |
| Steel | 0.076 | 0.102 | 0.171 | 0.286 | 0.453 | 0.831 | 0.996 |

Tabel 5.4.2. Onderscheidingsvermogens in het geval $k = n_i = 5$, onder $H_1$; $F(x) \sim N(0,1)$.

| a / Toets | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Doornbos-Prins | 0.047 | - | 0.119 | 0.320 | 0.666 | 0.893 |
| Kruskal-Wallis | 0.057 | 0.065 | 0.086 | 0.226 | 0.489 | 0.756 |
| Steel | 0.064 | 0.077 | 0.097 | 0.224 | 0.451 | 0.679 |

Uit beide tabellen blijkt, dat de toets van Doornbos-Prins de beste is. Zo zien we, dat een toets die speciaal is opgesteld om een uitschieter te lokaliseren een groter O.V. kan hebben in het geval dat er een uitschieter is dan een algemene toets. Ter vergelijking: een kontrast dat speciaal is gemaakt om een uitschieter te lokaliseren (zie (5.2)) kan - in het geval dat er een uitschieter is - vaker significant zijn dan een algemeen kontrast (zie (5.1) en tabel 5.2.1 en 5.2.2).

Samenvattend kunnen we dit hoofdstuk besluiten met te stellen dat voor het doen van simultane uitspraken de toets van Steel i.h.a. beter is dan die van Kruskal-Wallis (in de onderzochte gevallen). Voor de toets van Kruskal-Wallis geldt echter nog, dat we aan de hand van de waarnemingen kontrasten kunnen opstellen, die goede resultaten geven. Tenslotte bleek dat het O.V. van de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel onder $H_1$ niet opgewassen bleek te zijn tegen het O.V. van een speciale uitschietertoets (hier die van Doornbos-Prins).

[1)] De berekeningen voor het O.V. van de toets van Doornbos-Prins zijn hoofdzakelijk uitgevoerd in [2]. We danken Doornbos en Senden voor het welwillend ter beschikking stellen van aanvullend cijfermateriaal.

# VI. Het asymptotisch onderscheidingsvermogen.

## 6.1. Inleiding.

Veronderstel dat we een toets hebben met toetsingsgrootheid X en dat we $H_0$ verwerpen met onbetrouwbaarheid $\alpha$ als $X \geq x_\alpha(N)$. We noemen deze toets dan asymptotisch onderscheidend (consistent) voor een gegeven alternatief $H_a$, als

$$(6.1) \qquad \forall_{\alpha \in (0,1)} \lim_{N\to\infty} P(\underline{X} \geq x_\alpha(N);\, H_a) = 1 .$$

We zullen onderzoeken onder welke voorwaarde(n) onze toetsen asymptotisch onderscheidend zijn. Daartoe geven we eerst enkele algemene voorwaarden:

(6.2) Alle $\underline{x}_{ij}$'s zijn onderling onafhankelijk en de alternatieve verdelingsfunctie $F_i$ van $\underline{x}_{ij}$ is continu.

$\forall_i \; n_i/N = \nu_i + o(N^{-\frac{1}{2}}),\; \nu_i > 0$ indien $N \to \infty$.

## 6.2. Toets van Kruskal-Wallis.

Kruskal [5] bewijst de volgende:

Stelling. Onder de voorwaarden (6.2) is de toets van Kruskal-Wallis asymptotisch onderscheidend voor een gegeven alternatief $\{F_1,\ldots,F_k\}$, dan en slechts dan indien er een i is, waarvoor $\sum_{j=1}^{k} \nu_j \, P\{\underline{y}_i > \underline{y}_j\} \neq \frac{1}{2}$, waarbij P genomen is onder het alternatief en waarbij de $\underline{y}_i$'s k onafhankelijke stochastische grootheden zijn met verdelingsfuncties $F_i$ (voor de $\nu_i$'s zie (6.2)).

Met behulp van deze stelling toont Kruskal verder aan, dat zijn toets asymtotisch onderscheidend is voor alternatieven van de vorm $\{F_i(x) = F(x-\theta_i);\; \exists_{(i,j)}\; \theta_i \neq \theta_j\}$ en daaruit kunnen wij concluderen dat deze toets asymptotisch onderscheidend is voor onze alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$ (zie (3.1)).

## 6.3. Toets van Mood-Brown.

Zij $M_i$ de mediaan van de i-de (alternatieve) verdeling. Zij $G(x)$ de verdelingsfunctie van de gemengde verdeling (d.w.z. $G(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} F_i(x)$), $g(x)$ zijn dichtheidsfunctie en zij $M_p$ de mediaan van de gemengde verdeling.

(6.3) Laat $\forall_i$ $F_i$ monotoon stijgen in een omgeving van $M_i$ en zij $g(M_p) \neq 0$. Dan geldt de volgende

Stelling. Onder de voorwaarden (6.2) en (6.3) geldt dat de toets van Mood-Brown asymptotisch onderscheidend is voor elk alternatief, waarbij niet alle medianen $M_i$ samenvallen.

Bewijs. We moeten bewijzen dat $\forall_{\alpha\in(0,1)} \lim_{N\to\infty} P(\underline{M} \geq m_\alpha(N)) = 1$, maar omdat $m_\alpha(N)$ voor gegeven $\alpha$ als limiet het grootste $100.\alpha$-procents punt van de $\chi^2_{k-1}$-verdeling heeft, is het voldoende te bewijzen dat $\forall_{t\geq 0} \lim_{N\to\infty} P(\underline{M} > t) = 1$. We kunnen M schrijven als (zie 2.3)

$$\begin{cases} M = \dfrac{4N}{N+1} \sum\limits_{i=1}^{k} u_i^2 & \text{met } u_i = \dfrac{1}{\sqrt{n_i}} (m_i - \tfrac{1}{2}n_i(1-\tfrac{1}{N})) \text{ als N oneven is,} \\ M = \dfrac{4(N-1)}{N} \sum\limits_{i=1}^{k} v_i^2 & \text{met } v_i = \dfrac{1}{\sqrt{n_i}} (m_i - \tfrac{1}{2}n_i) \text{ als N even is.} \end{cases}$$

Stel nu, dat $M_1 \neq M_p$ en wel $M_1 < M_p$ (zonder beperking mogelijk). Definieer:

$$c := \tfrac{1}{2}(M_p + M_1)$$

$$\underline{z}_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{als } \underline{x}_{ij} < c \\ 0 & \text{als } \underline{x}_{ij} \geq c \end{cases} \qquad i = 1,\dots,k;\ j = 1,\dots,n_i\ .$$

$$\forall_i: \{\underline{m}_i^c := \sum_{j=1}^{n_i} \underline{z}_{ij};\ \underline{u}_i^c := \frac{1}{\sqrt{n_i}} (\underline{m}_i^c - \tfrac{1}{2}n_i(1-\tfrac{1}{N}));\ \underline{v}_i^c := \frac{1}{\sqrt{n_i}} (\underline{m}_i^c - \tfrac{1}{2}n_i)\}\ .$$

Het verdere verloop van het bewijs valt nu in drie delen te splitsen:

(i) We bewijzen: $\forall_{t\geq 0} \{\lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1^c > t) = \lim_{N\to\infty} P(\underline{v}_1^c > t) = 1\}$.

(ii) We bewijzen: $\lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1 \geq \underline{u}_1^c) = \lim_{N\to\infty} P(\underline{v}_1 \geq \underline{v}_1^c) = 1$ (m.b.v. een hulpstelling).

(iii) Tenslotte: $\forall_{t\geq 0} \lim_{N\to\infty} P(\underline{M} > t) = 1$.

(i) Definieer: $\forall_i \; p_i^c := P(\underline{x}_{ij} < c)$ onder het gegeven alternatief. Dan geldt:

$$\mathcal{E}\underline{m}_1^c = \sum_{j=1}^{n_1} \mathcal{E}\underline{z}_{1j} = n_1 p_1^c$$

$$\text{var } \underline{m}_1^c = \sum_j \text{var } \underline{z}_{1j} + \sum_{i\neq j} \text{covar}(\underline{z}_{1i}, \underline{z}_{1j})$$

$$= \sum_j \text{var } \underline{z}_{1j} \text{ , wegens onderlinge obafhankelijkheid van } z_{1i} \text{ en } z_1$$

$$= n_1 p_1^c (1 - p_1^c) \text{ .}$$

Vervolgens:

$$\mathcal{E}\underline{u}_1^c = \frac{1}{\sqrt{n_1}} (\mathcal{E}\underline{m}_1^c - \tfrac{1}{2} n_1 (1 - \tfrac{1}{N})) = \sqrt{n_1}(p_1^c - \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{N}))$$

en

$$\mathcal{E}\underline{v}_1^c = \sqrt{n_1}(p_1^c - \tfrac{1}{2}) \text{ ,}$$

en dus (zie (6.2)):

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}\underline{u}_1^c = \lim_{N\to\infty} \mathcal{E}\underline{v}_1^c = \begin{cases} +\infty & \text{als } p_1^c > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{als } p_1^c = \frac{1}{2} \\ -\infty & \text{als } p_1^c < \frac{1}{2} \text{ .} \end{cases}$$

Verder: $\text{var } \underline{u}_1^c = \text{var } \underline{v}_1^c = \frac{1}{n_1} \text{ var } \underline{m}_1^c = p_1^c(1 - p_1^c)$, dus begrensd. In ons geval geldt $p_1^c > \frac{1}{2}$, immers $P(\underline{x}_{1j} < M_1) = \frac{1}{2}$ en uit $c > M_1$ volgt, met (6.3): $p_1^c = P(\underline{x}_{1j} < c) > \frac{1}{2}$ (stel $p_1^c \neq 1$). Uit $\lim_{N\to\infty} \underline{u}_1^c = +\infty$ volgt:

$$\forall_{t\geq 0} \; \forall_{k>0, k\in\mathbb{R}} \; \exists_{N_0 \in \mathbb{N}t} \; \forall_{N>N_0} \quad a_N := \frac{\mathcal{E}\underline{u}_1^c - t}{\sigma_{\underline{u}_1^c}} > k$$

en dus $\forall_{t\geq 0} \lim_{N\to\infty} a_N = +\infty$. Nu passen we de ongelijkheid van Chebyshev toe:

$$\forall_{t\geq 0} \forall_{N>N_0} \{P(\underline{u}_1^c > t) \geq P(|\mathcal{E}\underline{u}_1^c - \underline{u}_1^c| \leq a_N \sigma_{\underline{u}_1^c}) \geq 1 - \frac{1}{a_N^2}\}$$

en dus

(6.4) $\forall_{t\geq 0} \lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1^c > t) = 1$ (en analoog $\forall_{t\geq 0} \lim_{N\to\infty} P(\underline{v}_1^c > t) = 1$).

(ii) Om te bewijzen dat $\lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1 \geq \underline{u}_1^c) = 1$ en $\lim_{N\to\infty} P(\underline{v}_1 \geq \underline{v}_1^c) = 1$ maken we gebruik van de volgende

<u>Hulpstelling</u>. Zij $\underline{M}_G$ de <u>steekproef</u>mediaan van een aselecte steekproef ter grootte N uit de verdeling $G(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} F_i(x)$ en $\underline{M}_s$ de <u>steekproef</u>mediaan van de k gecombineerde steekproeven. Dan geldt:

a) $\forall_{\varepsilon>0} \lim_{N\to\infty} P(|\underline{M}_G - M_p| \leq \varepsilon) = 1$ en

b) $\forall_{\varepsilon>0}[\lim_{N\to\infty} P(|\underline{M}_s - M_p| \leq \varepsilon) = 1]$ .

<u>Bewijs</u>.

a) Kendall [4] toont aan dat de variantie van $\underline{M}_G$ asymptotisch gelijk is aan $\frac{1}{4Ng^2(M_p)}$ $(g(M_p) \neq 0$; zie (6.3)).
Gumbel [3] toont aan dat de m-de orderstatistic $\underline{g}_m$ asymptotisch normaal verdeeld is, indien $\frac{m}{N+1} = \frac{1}{2} \pm O(\frac{1}{N})$, met $\mathcal{E}(\underline{g}_m)$ op te lossen uit: $G(\mathcal{E}\underline{g}_m) = \frac{m}{N+1}$ .
Indien nu N oneven is, zeg $N = 2r - 1$, dan is $\underline{M}_G = \underline{g}_r$ en indien $N = 2r$, dan is $\underline{M}_G = \frac{1}{2}(\underline{g}_r + \underline{g}_{r+1})$.
In beide gevallen geldt: $\lim_{N\to\infty} G(\mathcal{E}\underline{M}_G) = G(\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}\underline{M}_G) = \frac{1}{2} = G(M_p)$ en er volgt: $\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}\underline{M}_G = M_p$.
Hieruit volgt:

(6.5) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_1} \forall_{N>N_1} |\mathcal{E}\underline{M}_G - M_p| < \frac{1}{2}\varepsilon$ .

Ook geldt:

(6.6) $|\underline{M}_G - M_p| \leq |\underline{M}_G - \mathcal{E}\underline{M}_G| + |\mathcal{E}\underline{M}_G - M_p|$

$$(6.5) \text{ en } (6.6) \Rightarrow \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N_1}\, \forall_{N>N_1} \{|\, M_G - M_p| - \tfrac{1}{2}\varepsilon < |M_G - \mathcal{E}\underline{M}_G|\} \,.$$

Nu gebruiken we weer Chebyshev's ongelijkheid:

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N_1}\, \forall_{N>N_1} \{P(|\underline{M}_G - M_p| - \tfrac{1}{2}\varepsilon \le \tfrac{1}{2}\varepsilon) \ge P(|\underline{M}_G - \mathcal{E}\underline{M}_G| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{\varepsilon^2\, N g^2(M_p)}\} \,,$$

en dus

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{N\to\infty} P(|\underline{M}_G - M_p| \le \varepsilon) = 1 \,. \qquad \square$$

b) Zij $\{\underline{y}_i \mid i = 1,\ldots,N\}$ een aselecte steekproef ter grootte N uit G. Definieer:

$$\forall_{\varepsilon>0}\; p := P(\underline{y}_i < M_p - \varepsilon) \,, \quad i = 1,\ldots,N, \quad \text{en} \quad \underline{Y} := \#(\underline{y}_i < M_p - \varepsilon) \,,$$

dan is $\underline{Y}$ binomiaal verdeeld met parameters N en p.
Definieer voor de k gecombineerde steekproeven (trekkingen $\underline{x}_{ij}$, $i = 1,\ldots,k$; $j = 1,\ldots,n_i$):

$$\forall_{\varepsilon>0}\; p_i := P(\underline{x}_{ij} < M_p - \varepsilon) \,, \quad j = 1,\ldots,n_i$$

$$\underline{x}_i := \#(\underline{x}_{ij} < M_p - \varepsilon)$$

en

$$\underline{X} := \sum_{i=1}^{k} \underline{x}_i \,.$$

Dan is $\underline{x}_i$ binomiaal verdeeld met parameters $n_i$ en $p_i$ en $\underline{X}$ is de som van k onafhankelijke, binomiaal verdeelde grootheden.
Het verband tussen p en de $p_i$'s is: $p = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i p_i}{N}$ en verder zien we dat $p < \frac{1}{2}$ (zie ook (6.3)).
De verwachting en variantie van $\underline{Y}$ en $\underline{X}$ zijn:

$$\mathcal{E}\underline{Y} = Np = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{E}\underline{x}_i = \mathcal{E}\underline{X}$$

en

$$\text{var } \underline{Y} = Np(1-p) = Np - Np^2 \,,$$

$$\text{var } \underline{X} = \sum_{i=1}^{k} \text{var } \underline{x}_i = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i (1-p_i) = \sum_i n_i p_i - \sum_i n_i p_i^2 = Np - \sum_i n_i p_i^2 \le \text{var } \underline{Y} \,,$$

immers:

$$(\sum_i \sqrt{n_i}\,\sqrt{n_i}\,p_i)^2 \le \sum_i (\sqrt{n_i})^2 \sum_i (\sqrt{n_i}\,p_i)^2 \quad \text{(Cauchy-Schwartz)}$$

$$\Rightarrow (\sum_i n_i p_i)^2 \le \sum_i n_i \sum_i n_i p_i^2 \Rightarrow Np^2 \le \sum_i n_i p_i^2 .$$

Asymptotisch zijn nu zowel $\underline{X}$ als $\underline{Y}$ normaal verdeeld, met $\mu = Np$ en $\sigma^2$ resp. $(Np - \sum_i n_i p_i^2)$ en $(Np - Np^2)$.

Met $p < \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = Np < \frac{1}{2}N$ volgt dan:

$$\forall_{\varepsilon>0} \{\lim_{N\to\infty} P(\underline{M}_s < M_p - \varepsilon) = \lim_{N\to\infty} P(\underline{X} > \tfrac{1}{2}N) \le \lim_{N\to\infty} P(\underline{Y} > \tfrac{1}{2}N) = \lim_{N\to\infty} P(\underline{M}_G < M_p - \varepsilon)\} .$$

Op analoge wijze volgt:

$$\forall_{\varepsilon>0} \{\lim_{N\to\infty} P(\underline{M}_s > M_p + \varepsilon) \le \lim_{N\to\infty} P(\underline{M}_G > M_p + \varepsilon)\}$$

en dus

$$\forall_{\varepsilon>0} \{\lim_{N\to\infty} P(|\underline{M}_s - M_p| \le \varepsilon) \ge \lim_{N\to\infty} P(|\underline{M}_G - M_p| \le \varepsilon) = 1\} . \qquad \square$$

Gevolg:

(6.7) $$\forall_{\delta\in(0,1)} \exists_{N_2} \forall_{N>N_2} P(|\underline{M}_s - M_p| \le M_p - c) > 1 - \delta .$$

Omdat $m_1^c$ een niet-dalende functie van c is en $u_1^c$ en $v_1^c$ niet-dalende functies van $m_1^c$ zijn, geldt:

$$M_s \ge c \Rightarrow m_1 \ge m_1^c \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1 \ge u_1^c \\ v_1 \ge v_1^c \end{array}\right. \text{ en dus } \left.\begin{array}{l} P(\underline{u}_1 \ge \underline{u}_1^c) \\ P(\underline{v}_1 \ge \underline{v}_1^c) \end{array}\right\} \ge P(\underline{M}_s \ge c) .$$

Met (6.7) volgt nu

$$\forall_{\delta\in(0,1)} \exists_{N_2} \forall_{N>N_2} \{P(\underline{u}_1 \ge \underline{u}_1^c) \ge P(\underline{M}_s \ge c) \ge P(|\underline{M}_s - M_p| \le M_p - c) > 1 - \delta\}$$

en dus

(6.8) $$\lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1 \ge \underline{u}_1^c) = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{N\to\infty} P(\underline{v}_1 \ge \underline{v}_1^c) = 1 .$$

(iii) We hadden al (zie (6.4)): $\forall_{t\geq 0}\ \{\lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1^c > t) = 1$ en $\lim_{N\to\infty} P(\underline{v}_1^c > t) = 1\}$.

Zij nu $A := \{(u_1,u_1^c) \mid u_1^c > t\}$; $B := \{(u_1,u_1^c) \mid u_1 \geq u_1^c\}$;
$C := \{(u_1,u_1^c) \mid u_1 > t\}$, dan volgt: $A \cap B \subset C$ ofwel $\bar{C} \subset \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, dus $P(\bar{C}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ en $\lim_{N\to\infty} P(\bar{C}) \leq \lim_{N\to\infty} P(\bar{A}) + \lim_{N\to\infty} P(\bar{B})$ en dus ((6.4) en (6.8)) $\lim_{N\to\infty} P(\bar{C}) = 0$. Gevolg:

$$\forall_{t\geq 0}\ \{\lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1 > t) = 1 \text{ en } \lim_{N\to\infty} P(\underline{v}_1 > t) = 1\}$$

$$\forall_{t\geq 0}\ \{\lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1 > t) = 1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_1^2 > t) = 1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall_{t\geq 0}\ \{\exists_i \lim_{N\to\infty} P(\underline{u}_i^2 > t) = 1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} P(\sum_{i=1}^{k} \underline{u}_i^2 > t) = 1\} \\ \qquad\qquad \text{en analoog } \lim_{N\to\infty} P(\sum_{i=1}^{k} \underline{v}_i^2 > t) = 1) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\forall_{t\geq 0}\ \lim_{N\to\infty} P(\underline{M} > t) = 1\ .$$ □

Het is duidelijk dat onder onze alternatieve hypothesen $H_1$, $H_2$ en $H_3$ de medianen van de (alternatieve) verdelingen $F_1,\ldots,F_k$ niet samenvallen en dus dat de toets van Mood-Brown asymptotisch onderscheidend is voor deze alternatieven.

## 6.4. Toets van Steel.

We willen weten onder welke alternatieven $H_a$ geldt:

$$\forall_{\alpha\in(0,1)}\ \lim_{N\to\infty} P(\underline{R} \geq r_\alpha(N);\ H_a) = 1 \quad \text{(zie 2.4).}$$

(6.9) We beperken ons tot het geval dat alle steekproeven van grootte n zijn.

Stel nu dat $\underline{y}_i$ een trekking is uit de i-de en $\underline{y}_j$ een trekking uit de j-de verdeling, dan geldt de volgende

Stelling. Onder de voorwaarden (6.2) en (6.9) geldt, dat de toets van Steel dan en slechts dan asymptotisch onderscheidend is, als voor het gegeven alternatief $H_a$ geldt dat voor minstens één paar (i,j) ($i < j$, $i = 1,\dots,k-1$, $j = 2,\dots,k$) geldt: $p := P(\underline{y}_i > \underline{y}_j;\ H_a) \neq \frac{1}{2}$.

Bewijs. De grootheid $\underline{r}_{i,j}$ van Steel is een toetsingsgrootheid behorend bij Wilcoxon's twee-steekproeventoets. (Er zijn meer manieren om Wilcoxon's toetsingsgrootheid aan te geven.) Steel's grootheid $r^*_{i,j}$ is dan een toetsingsgrootheid behorend bij de tweezijdige Wilcoxontoets (te weten: verwerp $H_0'$: $F_i(x) = F_j(x)$ met onbetrouwbaarheid $\alpha$, als $r^*_{i,j} \geq r_{\alpha,n,n}$).
Van Dantzig [1] heeft nu aangetoond dat deze toets dan en slechts dan asymptotisch onderscheidend voor alternatief $H_a$ is, als geldt:
$p_{ij} = P(\underline{y}_i > \underline{y}_j;\ H_a) \neq \frac{1}{2}$ (onder voorwaarde (6.2)).
Terugkerend naar de k-steekproeventoets van Steel gaan we nu het bewijs naar twee kanten afmaken.

$\Longrightarrow$

Stel dat $(\ell,m)$ een paar is waarvoor $p_{\ell m} \neq \frac{1}{2}$. Dan geldt volgens Van Dantzig:

$$(6.10) \qquad \forall_{\alpha\in(0,1)} \lim_{n\to\infty} P(\underline{r}^*_{\ell,m} \geq r_{\alpha,n,n};\ p_{\ell m} \neq \tfrac{1}{2}) = 1 \ .$$

De toetsingsgrootheid van Steel is $\underline{R} = \max_{i,j} \underline{r}^*_{i,j}$ (kritiek gebied: $\{R \geq r_\alpha(N)\}$).
Stel nu $s = r_{\alpha/\binom{k}{2},n,n}$ dan geldt onder $H_0$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall_i \forall_{j>i}\ P(\underline{r}^*_{i,j} \geq s) \leq \dfrac{\alpha}{\binom{k}{2}} \quad \text{en dus } P(\underline{R} \geq s;\ H_0) \leq \alpha \ . \\[2ex] \text{Nu is } r_\alpha(N) \text{ de kleinste waarde van } R \text{ waarvoor } P(\underline{R} \geq r_\alpha(N);\ H_0) \leq \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow s \geq r_\alpha(N)$$

Vervolgens kijken we weer naar het alternatief $H_a$:

$$\begin{aligned} \forall_{\alpha\in(0,1)} \{\lim_{N\to\infty} P(\underline{R} \geq r_\alpha(N);\ H_a) &\geq \lim_{N\to\infty} P(\underline{R} \geq s;\ H_a) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\underline{r}^*_{1,2} \geq s \vee \dots \vee \underline{r}^*_{\ell,m} \geq s \vee \dots \vee \underline{r}^*_{k-1,k} \geq s;\ H_a) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} P(\underline{r}^*_{\ell,m} \geq s;\ H_a) = 1 \text{ wegens } (6.10)\} \ . \end{aligned}$$

<=

Gegeven is nu dat $p_{ij} = \frac{1}{2}$ $(i = 1,\ldots,k-1,\ j = 2,\ldots,k,\ j > i)$. We moeten nu bewijzen:

$$\exists_{\alpha_0}\ \forall_{\alpha<\alpha_0}\ \lim_{N\to\infty} P(\underline{R} \geq r_\alpha(N);\ p_{ij} = \tfrac{1}{2}) \neq 1 \ .$$

Welnu, uit de stelling van Van Dantzig volgt:

$$\forall_{(i,j)}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\alpha_0}\ \forall_{\alpha<\alpha_0}\ \lim_{n\to\infty} P(\underline{r}^*_{i,j} \geq r_{\alpha,n,n};\ p_{ij} = \tfrac{1}{2}) < \varepsilon \ .$$

Bepaal nu díe $\alpha_0$ waarvoor

$$\forall_{(i,j)}\ \lim_{n\to\infty} P(\underline{r}^*_{i,j} \geq r_{\alpha_0,n,n};\ p_{ij} = \tfrac{1}{2}) < \frac{1}{\binom{k}{2}} \ . \tag{6.11}$$

Nu geldt $\lim\limits_{n\to\infty} r_{\alpha,n,n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} r_\alpha(N)$, immers:

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} P(\underline{R} \geq r_\alpha(N);\ H_0) = \lim_{n\to\infty} P(\underline{r}^*_{i,j} \geq r_{\alpha,n,n};\ H_0) \leq \lim_{n\to\infty} P(\underline{R} \geq r_{\alpha,n,n};\ H_0) \ ,$$

en dan volgt:

$$\forall_{\alpha\leq\alpha_0}\ \lim_{N\to\infty} P(\underline{R} \geq r_\alpha(N);\ \forall_{(i,j)}\ p_{ij} = \tfrac{1}{2}) \leq \lim_{N\to\infty} P(\underline{R} \geq r_{\alpha,n,n};\ \forall_{(i,j)}\ p_{ij} = \tfrac{1}{2})$$

$$\leq \sum_{(i,j)} \lim_{n\to\infty} P(\underline{r}^*_{i,j} \geq r_{\alpha,n,n};\ p_{ij} = \tfrac{1}{2}) < 1 \text{ wegens (6.11)} \qquad \square$$

Het is duidelijk dat ook Steel's toets asymptotisch onderscheidend is voor translatie-alternatieven en dus voor onze $H_1$, $H_2$ en $H_3$.

## 6.5. Toets van Terpstra.

Voor welke alternatieven de toets van Terpstra asymptotisch onderscheidend is, is niet bekend en we hebben hierover niets onderzocht.

## VII. Samenvatting der resultaten en conclusies.

7.1. Dit verslag omvat de resultaten van een onderzoek naar verschillende eigenschappen van vier parametervrije k-steekproeventoetsen, te weten de toets van Kruskal-Wallis (toetsingsgrootheid $\underline{H}$), de toets van Mood-Brown (toetsingsgrootheid $\underline{M}$), de toets van Steel (toetsingsgrootheid $\underline{R}$) en de toets van Terpstra (toetsingsgrootheid $\underline{Q}$). Het onderzoek omvatte:

a) Het onderzoek naar de verdelingen en asymptotische verdelingen van $\underline{H}$, $\underline{M}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ onder de nulhypothese:

$H_0$: $F_i(x) = F(x)$, $i = 1,\dots,k$ en onder de alternatieve hypothesen:

$H_1$: $F_i(x) = F(x)$; $i = 1,\dots,k-1$; $F_k(x) = F(x-a)$; $a > 0$;

$H_2$: $F_i(x) = F(x)$; $i = 1,\dots,k-2$; $F_{k-1}(x) = F_k(x) = F(x-a)$; $a > 0$;

$H_3$: $F_1(x) = F(x+a)$; $F_i(x) = F(x)$; $i = 2,\dots,k-1$; $F_k(x) = F(x-a)$; $a > 0$.

b) Het vergelijken van het onderscheidingsvermogen van de vier toetsen onder de alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$ in bepaalde gevallen, bij $k = 5$, $n_i = 5$ ($n_i$ = grootte van de i-de steekproef).

c) Het doen van simultane uitspraken bij de toetsen van Kruskal-Wallis en Steel.

d) Het onderzoeken voor welke alternatieven de toetsen van Kruskal-Wallis, Mood-Brown en Steel asymptotisch onderscheidend (consistent) zijn.

Algemene resultaten worden nu per hoofdstuk gegeven.

7.2. In hoofdstuk III hebben we onderzocht wat bekend was over de verdelingen van $\underline{H}$, $\underline{M}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ onder $H_0$, $H_1$, $H_2$ en $H_3$. Het bleek dat onder $H_0$ de verdelingen van $\underline{H}$ en $\underline{R}$ voor $k = 3$ en kleine $n_i$'s getabelleerd waren; noch van de verdeling van $\underline{Q}$, noch van die van $\underline{M}$ was iets getabelleerd. Voor M hebben wij de verdelingen bepaald in de gevallen $k = 5$, $n_i = 3(1)5$ (zie hoofdstuk VIII). De asymptotische verdelingen onder $H_0$ zijn bekend voor $\underline{H}$ en $\underline{M}$; voor $\underline{R}$ is een grote-steekproevenbenadering gevonden en voor $\underline{Q}$ bestaat een vermoeden omtrent de aard van de asymptotische verdeling. Noch over verdelingen, noch over asymptotische verdelingen onder $H_1$, $H_2$ of $H_3$ is iets bekend. We hebben de verdeling van $\underline{M}$ en $\underline{R}$ bepaald in het geval "$a \to \infty$" en uitgerekend voor

$k = 5$, $n_i = 5$. Tot slot van dit hoofdstuk hebben we onbetrouwbaarheden en kritieke waarden bepaald voor ieder van de verdelingen $\underline{H}$, $\underline{M}$, $\underline{R}$ en $\underline{Q}$ in het geval $k = 5$, $n_i = 5$.

7.3. In hoofdstuk IV hebben we, m.b.v. de hierboven genoemde kritieke waarden, schattingen van het onderscheidingsvermogen bepaald, voor ieder van de vier toetsen, in het geval dat $k = n_i = 5$, onder de alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$, bij twee verdelingen $F(x)$ (uniform en normaal) en bij verschillende groottes van a (de verschuivingsafstand). Daarbij bleek, dat de toets van Kruskal-Wallis in dat geval ($k = n_i = 5$) duidelijk de beste was. De toets van Steel is ook goed. De toets van Mood-Brown is vooral onder $H_1$ erg slecht, maar theoretisch toonden we aan dat dat kwam door de te kleine steekproefgroottes. De toets van Terpstra tenslotte, bleek zowel onder $H_1$ als onder $H_2$ slecht te zijn; we hebben niet onderzocht waarom. In de laatste paragraaf hebben we voor een speciaal alternatief ($H_2$; $F(x) \sim$ uniform) een tabel opgesteld met 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor het onderscheidingsvermogen.

7.4. Hoofdstuk V behandelde simultane uitspraken bij de toets van Kruskal-Wallis en Steel. Bij de toets van Kruskal-Wallis hebben we voor ieder van de alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$ passende kontrasten opgesteld en ongelijkheden afgeleid waaraan ze onder $H_0$ simultaan voldoen met kans $> (1-\alpha)$. We hebben formules gegeven voor de minimale steekproefgroottes, waarvoor de gegeven kontrasten significant kunnen worden, in het geval $\forall_i\ n_i = n$ en "$a \to \infty$". M.b.v. een computer hebben we in een aantal gevallen gesimuleerd en tabellen opgesteld voor de aantallen significante kontrasten. De gevallen zijn dezelfde (op kleine verschuivingen na) als waarvoor we het O.V. hebben berekend in hoofdstuk IV. In dezelfde gevallen hebben we onderzocht welke $\underline{r}^*_{i,j}$'s van Steel (zie 2.4) significant werden en ook die waarden hebben we getabelleerd. Vergelijkenderwijs concludeerden we dat de toets van Steel i.h.a. beter is voor het doen van simultane uitspraken dan die van Kruskal-Wallis (in het geval $k = 5$, $n_i = 5$). In de laatste paragraaf hebben we het O.V. van de twee bovenstaande toetsen onder $\mathbf{H}_1$ vergeleken met het O.V. van de speciale uitschietertoets van Doornbos-Prins en we constateerden dat deze laatste een groter O.V. heeft.

7.5. In hoofdstuk VI introduceerden we het begrip asymptotisch onderscheidend. We zagen dat Kruskal een nodige en voldoende voorwaarde heeft gevonden, waaronder de toets van Kruskal-Wallis asymptotisch onderscheidend is. We hebben bewezen dat - onder bepaalde voorwaarden - de toets van Mood-Brown asymptotisch onderscheidend is voor elk alternatief, waarbij niet alle populatiemedianen $M_i$ samenvallen. Voor de toets van Steel hebben we een stelling bewezen, waarin een nodige en voldoende voorwaarde staat, waaronder deze toets asymptotisch onderscheidend is. Verder hebben we nog geconstateerd dat voor ieder van de alternatieven $H_1$, $H_2$ en $H_3$ de toetsen van Kruskal-Wallis, Mood-Brown en Steel asymptotisch onderscheidend zijn. We hebben niet onderzocht voor welke alternatieven de toets van Terpstra asymptotisch onderscheidend is.

## VIII. Tabellen

Tabellen voor de verdelingen van Mood's toetsingsgrootheid $\underline{M}$ onder $H_0$ in de gevallen $k = 5$; $n_i = 3(1)5$, $i = 1,\ldots,5$.

| Steekproef-groottes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 1.500 | 0.377622 |
| | 4.000 | 0.692308 |
| (3,3,3,3,3) | 6.500 | 0.944056 |
| | 9.000 | 0.986014 |
| | 11.500 | 1.000000 |
| | 1.250 | 0.226573 |
| | 2.188 | 0.427972 |
| | 3.750 | 0.528671 |
| | 4.688 | 0.730070 |
| | 5.000 | 0.742657 |
| (3,3,3,3,4) | 6.250 | 0.843356 |
| | 7.188 | 0.910489 |
| | 7.500 | 0.960839 |
| | 9.688 | 0.983217 |
| | 10.000 | 0.991608 |
| | 11.250 | 0.994405 |
| | 12.500 | 1.000000 |

| Steekproef-groottes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 0.889 | 0.119951 |
| | 1.834 | 0.333196 |
| | 2.778 | 0.457589 |
| | 3.408 | 0.497573 |
| | 4.352 | 0.657507 |
| | 4.667 | 0.670835 |
| | 5.297 | 0.759687 |
| | 5.389 | 0.786343 |
| | 5.612 | 0.795228 |
| | 5.926 | 0.821884 |
| (3,3,3,4,4) | 6.871 | 0.857425 |
| | 7.186 | 0.897408 |
| | 7.815 | 0.927026 |
| | 8.130 | 0.962567 |
| | 8.445 | 0.969231 |
| | 9.389 | 0.975154 |
| | 9.704 | 0.979597 |
| | 10.334 | 0.981571 |
| | 10.649 | 0.993418 |
| | 10.963 | 0.995639 |
| | 12.223 | 0.997120 |
| | 13.167 | 0.998108 |
| | 13.482 | 0.999959 |
| | 16.000 | 1.000000 |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 0.630 | 0.079967 |
| | 1.575 | 0.239901 |
| | 2.519 | 0.453147 |
| | 3.463 | 0.524229 |
| | 4.093 | 0.630851 |
| | 5.038 | 0.701933 |
| | 5.352 | 0.755245 |
| | 5.667 | 0.764130 |
| | 5.982 | 0.811518 |
| (3,3,4,4,4) | 6.297 | 0.847059 |
| | 6.926 | 0.873715 |
| | 7.556 | 0.897408 |
| | 7.871 | 0.932949 |
| | 8.186 | 0.946277 |
| | 8.500 | 0.948910 |
| | 8.815 | 0.972604 |
| | 9.130 | 0.981489 |
| | 10.389 | 0.987413 |
| | 11.334 | 0.991362 |
| | 11.649 | 0.997285 |
| | 13.223 | 0.998766 |
| | 14.167 | 0.999260 |
| | 14.482 | 1.000000 |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 0.267 | 0.042088 |
| | 1.217 | 0.154322 |
| | 2.167 | 0.378791 |
| | 3.117 | 0.528437 |
| | 3.750 | 0.565849 |
| | 4.067 | 0.615731 |
| | 4.700 | 0.653143 |
| | 5.017 | 0.709260 |
| | 5.650 | 0.759142 |
| | 5.967 | 0.833965 |
| (3,4,4,4,4) | 6.600 | 0.854403 |
| | 6.917 | 0.887657 |
| | 7.550 | 0.906363 |
| | 7.867 | 0.920392 |
| | 8.500 | 0.945333 |
| | 8.817 | 0.964039 |
| | 9.450 | 0.975124 |
| | 9.767 | 0.987594 |
| | 11.350 | 0.993830 |
| | 12.300 | 0.996947 |
| | 12.617 | 0.998506 |
| | 14.200 | 0.999286 |
| | 15.150 | 0.999805 |
| | 15.467 | 1.000000 |

| Steekproef grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 1.134 | 0.199918 |
| | 2.078 | 0.377622 |
| | 2.645 | 0.410942 |
| | 3.589 | 0.477581 |
| | 3.652 | 0.544220 |
| | 4.597 | 0.677499 |
| | 4.912 | 0.688606 |
| | 5.163 | 0.755245 |
| | 6.108 | 0.799671 |
| | 6.171 | 0.844097 |
| | 6.423 | 0.860757 |
| (3,3,3,4,5) | 6.612 | 0.865200 |
| | 7.115 | 0.894817 |
| | 7.430 | 0.928137 |
| | 8.186 | 0.934800 |
| | 8.626 | 0.957014 |
| | 8.941 | 0.962567 |
| | 9.130 | 0.971452 |
| | 9.445 | 0.974784 |
| | 9.634 | 0.979720 |
| | 9.949 | 0.983422 |
| | 10.200 | 0.987125 |
| | 10.704 | 0.989346 |
| | 11.460 | 0.994899 |
| | 11.649 | 0.996380 |
| | 11.963 | 0.997491 |
| | 12.467 | 0.998725 |
| | 14.167 | 0.999218 |
| | 14.482 | 0.999959 |
| | 17.000 | 1.000000 |

| Steekproef-grootte s $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | P($\underline{M}$ ≤ M) | M | P($\underline{M}$ ≤ M) |
|---|---|---|---|---|
| | 0.774 | 0.105220 | 9.134 | 0.963433 |
| | 1.724 | 0.292277 | 9.260 | 0.966031 |
| | 2.674 | 0.401394 | 9.577 | 0.976423 |
| | 2.294 | 0.418931 | 9.641 | 0.977722 |
| | 3.244 | 0.489077 | 9.767 | 0.980840 |
| | 3.307 | 0.512460 | 9.894 | 0.981814 |
| | 4.194 | 0.551430 | 10.084 | 0.984931 |
| | 4.257 | 0.644959 | 10.400 | 0.985321 |
| | 4.574 | 0.656650 | 10.590 | 0.988785 |
| | 4.827 | 0.680032 | 10.907 | 0.990084 |
| | 5.207 | 0.731992 | 11.160 | 0.992033 |
| (3,3,4,4,5) | 5.524 | 0.763169 | 11.350 | 0.992552 |
| | 5.777 | 0.794345 | 11.667 | 0.993332 |
| | 5.840 | 0.802139 | 12.110 | 0.994631 |
| | 6.094 | 0.819676 | 12.300 | 0.995324 |
| | 6.284 | 0.824352 | 12.427 | 0.996947 |
| | 6.727 | 0.850332 | 12.617 | 0.998506 |
| | 6.790 | 0.860724 | 12.934 | 0.998604 |
| | 7.044 | 0.876313 | 13.440 | 0.999145 |
| | 7.107 | 0.899695 | 14.200 | 0.999405 |
| | 7.234 | 0.904371 | 14.960 | 0.999459 |
| | 7.740 | 0.913031 | 15.150 | 0.999719 |
| | 7.867 | 0.915369 | 15.467 | 0.999978 |
| | 8.057 | 0.936154 | 18.000 | 1.000000 |
| | 8.311 | 0.943948 | | |
| | 8.374 | 0.949793 | | |
| | 8.627 | 0.953690 | | |
| | 8.817 | 0.959926 | | |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | P($\underline{M}$ ≤ M) | M | P($\underline{M}$ ≤ M) |
|---|---|---|---|---|
| | 0.507 | 0.070147 | 8.107 | 0.937842 |
| | 1.457 | 0.210440 | 8.550 | 0.942519 |
| | 2.407 | 0.397497 | 8.740 | 0.952911 |
| | 2.977 | 0.467644 | 8.867 | 0.956418 |
| | 3.357 | 0.529996 | 9.057 | 0.964212 |
| | 3.927 | 0.576761 | 9.310 | 0.972006 |
| | 3.990 | 0.623525 | 9.817 | 0.976683 |
| | 4.560 | 0.635216 | 10.260 | 0.981879 |
| | 4.877 | 0.666392 | 10.450 | 0.983957 |
| (3,4,4,4,5) | 4.940 | 0.697569 | 10.577 | 0.987854 |
| | 5.257 | 0.744333 | 10.767 | 0.990972 |
| | 5.827 | 0.761870 | 11.590 | 0.993570 |
| | 5.890 | 0.782654 | 12.160 | 0.995518 |
| | 6.207 | 0.813830 | 12.350 | 0.997077 |
| | 6.460 | 0.845006 | 13.110 | 0.997727 |
| | 6.777 | 0.868389 | 13.300 | 0.998246 |
| | 6.840 | 0.880080 | 13.427 | 0.998733 |
| | 6.967 | 0.889433 | 13.617 | 0.999123 |
| | 7.410 | 0.892897 | 14.440 | 0.999448 |
| | 7.727 | 0.908485 | 15.200 | 0.999643 |
| | 7.790 | 0.924073 | 16.150 | 0.999903 |
| | 7.917 | 0.926151 | 16.467 | 1.000000 |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | P($\underline{M}$ ≤ M) | M | P($\underline{M}$ ≤ M) |
|---|---|---|---|---|
| | 1.014 | 0.175366 | 9.057 | 0.963270 |
| | 1.964 | 0.331248 | 9.120 | 0.967330 |
| | 2.534 | 0.389703 | 9.374 | 0.973175 |
| | 3.484 | 0.506614 | 9.627 | 0.977072 |
| | 3.547 | 0.545584 | 9.880 | 0.978155 |
| | 4.054 | 0.574812 | 10.134 | 0.979324 |
| | 4.497 | 0.652753 | 10.387 | 0.984195 |
| | 4.814 | 0.662495 | 10.577 | 0.986793 |
| | 5.004 | 0.681981 | 10.640 | 0.988092 |
| (3,3,4,5,5) | 5.067 | 0.759921 | 10.894 | 0.989067 |
| | 6.017 | 0.811882 | 11.084 | 0.989846 |
| | 6.080 | 0.824872 | 11.400 | 0.993094 |
| | 6.334 | 0.854099 | 11.590 | 0.993960 |
| | 6.524 | 0.861894 | 11.907 | 0.995259 |
| | 7.030 | 0.870554 | 12.160 | 0.996070 |
| | 7.094 | 0.876399 | 13.110 | 0.997370 |
| | 7.347 | 0.895884 | 13.427 | 0.998669 |
| | 7.537 | 0.915369 | 13.617 | 0.999188 |
| | 7.854 | 0.917805 | 14.440 | 0.999621 |
| | 8.044 | 0.925599 | 15.200 | 0.999751 |
| | 8.107 | 0.933393 | 15.960 | 0.999859 |
| | 8.550 | 0.946383 | 16.467 | 0.999989 |
| | 8.867 | 0.952878 | 19.000 | 1.000000 |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0.655 | 0.091859 | 9.310 | 0.960603 |
| | 1.610 | 0.255163 | 9.501 | 0.969675 |
| | 2.182 | 0.285782 | 9.691 | 0.972397 |
| | 2.564 | 0.381043 | 9.819 | 0.974711 |
| | 3.137 | 0.503521 | 10.010 | 0.980154 |
| | 3.201 | 0.513728 | 10.073 | 0.982706 |
| | 3.710 | 0.529038 | 10.264 | 0.984067 |
| | 4.010 | 0.597081 | 10.582 | 0.985087 |
| | 4.155 | 0.637907 | 10.773 | 0.985904 |
| | 4.473 | 0.648113 | 10.837 | 0.986471 |
| | 4.664 | 0.668527 | 11.028 | 0.988172 |
| (3,4,4,5,5) | 4.728 | 0.688940 | 11.219 | 0.989986 |
| | 5.110 | 0.711621 | 11.346 | 0.991049 |
| | 5.428 | 0.738838 | 11.537 | 0.993091 |
| | 5.619 | 0.755849 | 11.600 | 0.993771 |
| | 5.682 | 0.783066 | 11.728 | 0.994316 |
| | 6.000 | 0.793273 | 12.364 | 0.995733 |
| | 6.001 | 0.813686 | 12.555 | 0.997094 |
| | 6.191 | 0.821851 | 12.873 | 0.997264 |
| | 6.637 | 0.844532 | 13.128 | 0.997945 |
| | 6.764 | 0.847594 | 13.319 | 0.998217 |
| | 6.955 | 0.874811 | 13.891 | 0.998288 |
| | 7.019 | 0.885018 | 14.082 | 0.998968 |
| | 7.146 | 0.893183 | 14.273 | 0.999059 |
| | 7.210 | 0.903390 | 14.400 | 0.999399 |
| | 7.528 | 0.905941 | 14.591 | 0.999535 |
| | 7.719 | 0.914107 | 15.419 | 0.999762 |
| | 7.782 | 0.916148 | 16.182 | 0.999830 |
| | 7.973 | 0.925250 | 16.946 | 0.999887 |
| | 8.164 | 0.928622 | 17.137 | 0.999955 |
| | 8.291 | 0.933726 | 17.455 | 0.999997 |
| | 8.482 | 0.940530 | 20.000 | 1.000000 |
| | 8.546 | 0.943932 | | |
| | 8.673 | 0.948015 | | |
| | 8.737 | 0.953458 | | |
| | 9.055 | 0.959582 | | |

| Steekproef-grootte<br>$(n_2,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | P($\underline{M} \le M$) | M | P($\underline{M} \le M$) |
|---|---|---|---|---|
| | 0.891 | 0.153098 | 9.291 | 0.965579 |
| | 1.846 | 0.289184 | 9.482 | 0.968130 |
| | 2.419 | 0.365733 | 9.546 | 0.973233 |
| | 3.373 | 0.518831 | 10.055 | 0.976295 |
| | 3.437 | 0.535842 | 10.310 | 0.982674 |
| | 3.946 | 0.612391 | 10.500 | 0.986077 |
| | 4.391 | 0.646412 | 10.819 | 0.988628 |
| | 4.710 | 0.654918 | 11.010 | 0.990670 |
| | 4.901 | 0.705950 | 11.837 | 0.991520 |
| | 4.964 | 0.756983 | 12.028 | 0.994072 |
| | 5.919 | 0.791005 | 12.346 | 0.995348 |
| (3,4,5,5,5) | 6.237 | 0.829279 | 12.537 | 0.996368 |
| | 6.428 | 0.852244 | 13.364 | 0.998069 |
| | 7.000 | 0.867554 | 13.555 | 0.998750 |
| | 7.255 | 0.876059 | 14.128 | 0.999260 |
| | 7.446 | 0.901575 | 14.891 | 0.999473 |
| | 7.764 | 0.907954 | 15.400 | 0.999728 |
| | 7.955 | 0.928367 | 16.419 | 0.999898 |
| | 8.019 | 0.939850 | 17.946 | 0.999940 |
| | 8.528 | 0.943677 | 18.137 | 0.999974 |
| | 8.782 | 0.947930 | 18.455 | 1.000000 |
| | 8.973 | 0.954734 | | |

| Steekproef-grootteS $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 1.393 | 0.333196 |
| | 2.904 | 0.416495 |
| | 3.912 | 0.638626 |
| | 5.423 | 0.771904 |
| | 5.926 | 0.775237 |
| | 6.430 | 0.908515 |
| (3,3,3,3,5) | 7.941 | 0.941834 |
| | 8.445 | 0.959605 |
| | 8.949 | 0.974414 |
| | 10.460 | 0.989223 |
| | 10.963 | 0.995886 |
| | 11.467 | 0.998355 |
| | 13.482 | 0.999835 |
| | 16.000 | 1.000000 |

| Steekproef-groottes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 1.280 | 0.292277 |
| | 2.800 | 0.438416 |
| | 3.814 | 0.584555 |
| | 4.320 | 0.628396 |
| | 5.334 | 0.803763 |
| | 5.840 | 0.809608 |
| | 6.347 | 0.868064 |
| | 6.854 | 0.889985 |
| | 7.360 | 0.901676 |
| (3,3,3,5,5) | 7.867 | 0.930903 |
| | 8.374 | 0.954286 |
| | 8.880 | 0.957533 |
| | 9.387 | 0.972147 |
| | 9.894 | 0.980915 |
| | 10.400 | 0.989164 |
| | 10.907 | 0.995100 |
| | 12.427 | 0.997932 |
| | 12.934 | 0.998517 |
| | 13.440 | 0.999166 |
| | 14.960 | 0.999599 |
| | 15.467 | 0.999989 |
| | 18.000 | 1.000000 |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| (3,3,5,5,5) | 1.164 | 0.255163 |
| | 2.691 | 0.446535 |
| | 3.710 | 0.531589 |
| | 4.219 | 0.646412 |
| | 5.237 | 0.799509 |
| | 5.746 | 0.816733 |
| | 6.255 | 0.833744 |
| | 6.764 | 0.872018 |
| | 7.273 | 0.902638 |
| | 7.782 | 0.915396 |
| | 8.291 | 0.948567 |
| | 8.800 | 0.954308 |
| | 9.310 | 0.967066 |
| | 9.819 | 0.982376 |
| | 10.328 | 0.986969 |
| | 10.837 | 0.989521 |
| | 11.346 | 0.993348 |
| | 11.855 | 0.994113 |
| | 12.364 | 0.996665 |
| | 12.873 | 0.997688 |
| | 13.891 | 0.998336 |
| | 14.400 | 0.999557 |
| | 15.419 | 0.999897 |
| | 16.946 | 0.999940 |
| | 17.455 | 0.999991 |
| | 20.000 | 1.000000 |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| (3,5,5,5,5) | 1.045 | 0.211881 |
| | 2.578 | 0.443761 |
| | 3.600 | 0.480741 |
| | 4.112 | 0.680434 |
| | 5.134 | 0.769186 |
| | 5.645 | 0.811344 |
| | 6.667 | 0.844626 |
| | 7.178 | 0.906198 |
| | 8.200 | 0.940219 |
| | 8.712 | 0.960189 |
| | 9.734 | 0.973502 |
| | 10.245 | 0.984817 |
| | 11.267 | 0.991474 |
| | 11.778 | 0.994136 |
| | 12.800 | 0.996503 |
| | 13.312 | 0.997834 |
| | 14.334 | 0.999609 |
| | 15.867 | 0.999720 |
| | 16.378 | 0.999854 |
| | 17.400 | 0.999942 |
| | 18.934 | 0.999987 |
| | 19.445 | 1.000000 |

| Steekproef-grootte s $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \le M)$ |
|---|---|---|
| (4,4,4,4,4) | 0.000 | 0.042088 |
| | 1.900 | 0.416203 |
| | 3.800 | 0.665613 |
| | 5.700 | 0.852670 |
| | 7.600 | 0.931477 |
| | 9.500 | 0.993830 |
| | 13.300 | 0.999026 |
| | 15.200 | 1.000000 |
| (5,5,5,5,5) | 0.924 | 0.192297 |
| | 2.462 | 0.432667 |
| | 4.000 | 0.721112 |
| | 5.539 | 0.802838 |
| | 7.077 | 0.915813 |
| | 8.616 | 0.959079 |
| | 10.154 | 0.985039 |
| | 11.693 | 0.993212 |
| | 13.231 | 0.998981 |
| | 14.770 | 0.999221 |
| | 16.308 | 0.999798 |
| | 17.847 | 0.999942 |
| | 19.385 | 1.000000 |

| Steekproef-grootte s $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \le M)$ |
|---|---|---|
| (4,4,4,4,5) | 0.146 | 0.036743 |
| | 1.100 | 0.134726 |
| | 2.055 | 0.330691 |
| | 2.628 | 0.379682 |
| | 3.010 | 0.510326 |
| | 3.582 | 0.559317 |
| | 3.964 | 0.602865 |
| | 4.537 | 0.668186 |
| | 4.919 | 0.717178 |
| | 5.491 | 0.743941 |
| | 5.873 | 0.809263 |
| | 6.446 | 0.833759 |
| | 6.637 | 0.843557 |
| | 6.828 | 0.872589 |
| | 7.400 | 0.905250 |
| | 7.591 | 0.909604 |
| | 7.782 | 0.921852 |
| | 8.355 | 0.936368 |
| | 8.546 | 0.941721 |
| | 8.737 | 0.958051 |
| | 9.500 | 0.962950 |
| | 9.691 | 0.973837 |
| | 10.264 | 0.982003 |
| | 10.455 | 0.988535 |
| | 11.219 | 0.992617 |
| | 11.410 | 0.994795 |
| | 12.555 | 0.996156 |
| | 13.128 | 0.997176 |
| | 13.319 | 0.997993 |
| | 14.082 | 0.998673 |
| | 14.273 | 0.999490 |
| | 15.419 | 0.999660 |
| | 16.182 | 0.999864 |
| | 17.137 | 1.000000 |

| Steekproef-grootttes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | P($\underline{M}$ ≤ M) | M | P($\underline{M}$ ≤ M) |
|---|---|---|---|---|
| | 0.382 | 0.061239 | 8.973 | 0.952948 |
| | 1.337 | 0.183717 | 9.164 | 0.959752 |
| | 2.291 | 0.347021 | 9.355 | 0.965196 |
| | 2.864 | 0.469500 | 9.546 | 0.965808 |
| | 3.246 | 0.523934 | 9.737 | 0.973973 |
| | 3.437 | 0.539244 | 10.500 | 0.980778 |
| | 3.819 | 0.620896 | 10.691 | 0.986221 |
| | 4.773 | 0.675331 | 11.073 | 0.988773 |
| | 5.155 | 0.716157 | 11.264 | 0.992855 |
| (4,4,4,5,5) | 5.346 | 0.756983 | 11.455 | 0.994488 |
| | 5.728 | 0.787602 | 12.028 | 0.995339 |
| | 6.110 | 0.814820 | 12.219 | 0.996700 |
| | 6.300 | 0.819356 | 13.364 | 0.997550 |
| | 6.682 | 0.860182 | 13.555 | 0.998231 |
| | 6.873 | 0.876513 | 14.128 | 0.998741 |
| | 7.446 | 0.888760 | 15.082 | 0.999422 |
| | 7.637 | 0.915978 | 15.273 | 0.999694 |
| | 7.823 | 0.919607 | 16.419 | 0.999864 |
| | 8.019 | 0.929813 | 17.182 | 0.999966 |
| | 8.210 | 0.940020 | 18.137 | 1.000000 |
| | 8.782 | 0.946144 | | |

| Steekproef-groottes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | P($\underline{M}$ ≤ M) | M | P($\underline{M}$ ≤ M) |
|---|---|---|---|---|
| (4,4,5,5,5) | 0.534 | 0.079877 | 10.117 | 0.979204 |
| | 1.492 | 0.221881 | 10.500 | 0.981866 |
| | 2.067 | 0.261819 | 10.692 | 0.983996 |
| | 2.450 | 0.344655 | 11.267 | 0.986770 |
| | 3.025 | 0.504409 | 11.459 | 0.992095 |
| | 3.600 | 0.544347 | 11.650 | 0.993515 |
| | 3.984 | 0.633100 | 12.034 | 0.994846 |
| | 4.367 | 0.641975 | 12.225 | 0.995911 |
| | 4.559 | 0.695226 | 12.800 | 0.996226 |
| | 5.325 | 0.718893 | 12.992 | 0.997557 |
| | 5.517 | 0.763270 | 13.184 | 0.997912 |
| | 5.900 | 0.803208 | 14.334 | 0.998800 |
| | 6.092 | 0.827171 | 14.525 | 0.999155 |
| | 6.667 | 0.835159 | 15.100 | 0.999421 |
| | 6.859 | 0.870660 | 15.867 | 0.999532 |
| | 7.050 | 0.885748 | 16.059 | 0.999798 |
| | 7.434 | 0.892404 | 16.250 | 0.999834 |
| | 7.625 | 0.913705 | 17.400 | 0.999945 |
| | 8.200 | 0.920139 | 18.167 | 0.999971 |
| | 8.392 | 0.937890 | 18.934 | 0.999982 |
| | 8.584 | 0.948540 | 19.125 | 1.000000 |
| | 8.967 | 0.959856 | | |
| | 9.159 | 0.962518 | | |
| | 9.734 | 0.966335 | | |
| | 9.925 | 0.975654 | | |

| Steekproef grootes $(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)$ | M | $P(\underline{M} \leq M)$ |
|---|---|---|
| | 0.767 | 0.133128 |
| | 1.725 | 0.251465 |
| | 2.300 | 0.340217 |
| | 3.259 | 0.517722 |
| | 3.834 | 0.650850 |
| | 4.600 | 0.658246 |
| | 4.792 | 0.746998 |
| | 6.134 | 0.791374 |
| | 6.325 | 0.847584 |
| | 6.900 | 0.882530 |
| | 7.667 | 0.893624 |
| (4,5,5,5,5) | 7.859 | 0.929125 |
| | 8.434 | 0.942438 |
| | 9.200 | 0.962407 |
| | 9.392 | 0.971283 |
| | 9.967 | 0.976608 |
| | 10.734 | 0.981045 |
| | 10.925 | 0.989033 |
| | 12.267 | 0.993471 |
| | 12.459 | 0.997021 |
| | 13.034 | 0.998352 |
| | 13.800 | 0.998722 |
| | 15.334 | 0.999609 |
| | 16.867 | 0.999720 |
| | 17.059 | 0.999898 |
| | 18.400 | 0.999987 |
| | 19.167 | 1.000000 |

Literatuurverwijzingen.


[1] Van Dantzig, D.: On the consistency and power of Wilcoxon's two-sample test. Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. A 54, 1951, pp. 1-8.

[2] Doornbos, R., Senden, W.L.M.M.: Comparison of two nonparametric k-sample slippage tests. Statistica Neerlandica, 26, 1972, no. 3, pp. 145H-154H.

[3] Gumbel, E.J.: Statistics of extremes. Columbia University Press, 1960, § 2.1.4.

[4] Kendall, M.G., Stuart, A.: The advanced theory of statistics, Vol. I, Charles Griffin & Company Ltd, 1958, pp. 236-237.

[5] Kruskal, W.H.: Nonparametric test for the several sample problem. Annals of Math. Stat. 23, 1954, pp. 505-512.

[6] Kruskal, W.H., Wallis, W.A.: Use of ranks in one criterion analysis of variance. J. Am. Stat. Ass. 47, 1952, pp. 584-621.

[7] Miller, R.G.: Simultaneous statistical inference. McGraw-Hill, 1966, § 4.4.

[8] Miller, R.G.: Simultaneous statistical inference. McGraw-Hill, 1966, § 4.6.

[9] Mood, A.M.: Introduction to the theory of statistics; First edition. McGraw-Hill, 1950, § 16.5.

[10] Mood, A.M., Graybill, F.A.: Introduction to the theory of statistics; second edition. McGraw-Hill, 1963, § 16.6.

[11] Steel, R.G.D.: A rank sum test for comparing all pairs of treatments. Technometrics 2, 1960, pp. 197-207.

[12] Terpstra, T.J.: A nonparametric test for the problem of k-samples. Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. 57, 1954, pp. 505-512.

[13] Owen, D.B.: Handbook of statistical tables. Addison-Wesley, 1962, pp. 420-422.

[14] Doornbos, R., Prins, H.J.: On slippage tests I, II and III. Indagationes Mathematicae 20, 1958, pp. 38-55 en 438-447.

<u>Errata</u>

| pag. | Omschrijving | Verbetering |
|---|---|---|
| 2.1 | § 2.2, regel 4 | ... $\bar{R} := \frac{N+1}{2}$ . |
| 4.5 | § 4.3, regel 7 | ... Nu is $\underline{\widehat{O.V.}} * A$ een binomiaal ... |
| | § 4.3, regel 14 | $\underline{n}_1$ en $\underline{n}_2$ zijn dan ... |
| 4.6 | Tabel 4.7 | |
| | a = 0.2; Kruskal-Wallis | [0.151,0.171] |
| 6.1 | § 6.1, regel 1 | ... met toetsingsgrootheid $\underline{X}$ en dat ... |
| | Formule (6.2) | $\forall_i \; n_i/N = \nu_i, \; \nu_i > 0$ indien $N \to \infty$. |
| 6.3 | Op één na laatste regel | ... Uit $\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}\underline{u}_1^c = +\infty$ volgt: |