

MASTER

De foutenkans van digitale optische transmissiesystemen

Wouda, K.J.

Award date:
1978

[Link to publication](#)

Disclaimer

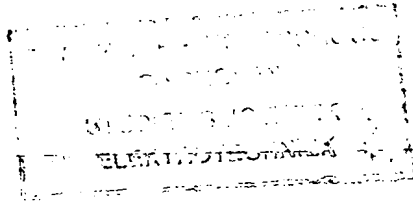
This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

3091 bse



DE FOUTENKANS VAN DIGITALE
OPTISCHE TRANSMISSIESYSTEMEN

K.J. Wouda

Afstudeerverslag

Afd. Elektrotechniek, vakgroep EC

Lector ir. J. v.d. Plaats

Begeleider dr.ir. W.C. v. Etten

Periode oktober 1977 - juni 1978

KORTE INHOUD

Getracht wordt, vanuit een op praktische omstandigheden geënte theorie, de foutenkans van digitale glasvezelsystemen te voorspellen.

Van de avalanche fotodiode zal de theoretische statistische beschrijving aan de praktijk worden getoetst; hiertoe is een meetopstelling ontwikkeld.

Van een 40 Mb/s systeem worden foutenkans-voorspellingen vergeleken met meetresultaten.

1.	Inleiding	1
2.	De APD	3
2.1	Werking en algemene eigenschappen	3
2.2	De ruis aan de uitgang van de APD	7
2.3	Metingen aan een APD	11
2.3.1	De optische kant van de meetopstelling	11
2.3.2	Homogeniteitsmeting	11
2.3.3	De meting van de versterking	13
2.3.4	De meting van de k-waarde	15
2.3.5	De meting van de ruisverdelingsfunctie	19
2.3.5.1	Randvoorwaarden bij de meting	19
2.3.5.2	De meetapparatuur	21
2.3.5.3	Een meting met belichting	28
2.4	De theoretische statistiek van de APD	33
2.4.1	De vermenigvuldigingskansen van McIntyre	33
2.4.2	De karakteristieke functie van Personick	34
2.4.3	Benaderingen van de kansdichtheid	46
2.5	De vergelijking van de meting en de theorie	51
3.	De foutenkansen van optische systemen	53
3.1	De berekeningsmethoden	53
3.1.1	De Gaussische benadering	53
3.1.2	Statistische simulatiemethode	55
3.1.3	De methode gebaseerd op integratieformule van Gauss	56
3.1.4	Discrete Fourier transformatiemethode	57

3.2	Afleiding en uitwerking van de gebruikte methode	58
3.2.1	De karakteristieke functie aan de uitgang van een filter	59
3.2.2	De opzet van de berekening	64
3.2.3	De berekening van $\lambda(t)$ en $h(t)$	71
3.2.4	Een benaderende berekeningsmethode	71
3.3	Berekeningen aan systemen	72
3.3.1	"Raised cosine"-systeem	72
3.3.2	"Integrate and dump" systeem	86
4.	Conclusies en slotopmerkingen	89

1. INLEIDING

Sedert enkele jaren dient zich de glasvezel aan als serieuze concurrent van de coaxiale kabel als medium voor de overdracht van digitale informatie.

Praktische toepassing van nieuwe technieken is meestal niet tegengehouden door het al dan niet aanwezig zijn van gezonde theoretische bases voor die technieken. Voor de systemen, die gebruik maken van elektrisch geleidende kabels, is sinds enige tijd een ruim pakket theorie beschikbaar.

Deze theorie blijkt, desnoods geïmplementeerd op een rekenmachine, de foutenkans van systemen adequaat te kunnen voorspellen. In sommige gevallen, kan men nog verder gaan door een rekenmachine systeemp parameters te laten produceren, die de foutenkans minimaliseren. Bovendien zijn een aantal beschouwingen beschikbaar, die een, onder bepaalde voorwaarden, optimale detectie-strategie opleveren.

De genoemde theorie blijkt over het algemeen ongeschikt te zijn voor toepassing op glasvezeltransmissie; de voornaamste reden hiervan is, dat de ruisparameters afhankelijk worden van de signaalsterkte in tegenstelling tot "klassieke" systemen.

Een tweede punt is, dat bijna alle praktische systemen voor optische transmissie gebruik maken van een bijna ideale versterker: een "Avalanche Photo Diode", in het vervolg aan te duiden met APD.

De APD maakt het mogelijk een zodanig lage energie te detecteren, dat, bij de gebruikte optische frequentie, het aantal fotonen "telbaar" wordt. Het gevolg is, dat de ruis niet meer kan worden beschreven met een Gaussische kansdichtheidsfunctie.

Een moeilijkheid, die nauwkeurige berekeningen aan klassieke systemen lange tijd heeft tegengehouden, de verwerking van intersymbool interferentie, lijkt bij glasvezelsystemen vooralsnog van aanmerkelijk minder belang te zijn. Een glasvezelsysteem, wat gebruik maakt van basis bandmodulatie van de lichtbron heeft namelijk in eerste benadering een vlakke overdrachtskarakteristiek, in tegenstelling tot de elektrisch geleidende kabel, waar de demping (in dB) evenredig verloopt met de wortel uit de frequentie. Een demping tot ca. 80 dB bij de Nyquist-frequentie kan bij een coaxiale kabel worden geëgaliseerd door deze wetmatigheid; benaderings- en realisatiefouten kunnen dan echter intersymbool interferentie veroorzaken, die zich over tientallen bitintervallen kan uitstrekken. Waar bij een glasvezelsysteem enige frequentie-afhankelijke demping optreedt als gevolg van dispersie zal deze veel kleiner moeten zijn, omdat een wetmatigheid of enige voorspelbaarheid schijnt te ontbreken. De impulsresponse, die dan bij een praktisch systeem wordt gevonden strekt zich over slechts enkele bit intervallen uit.

Als te beschouwen geëgaliseerde spectrum ligt het voor de hand het praktisch (ook voor optische systemen) veel gebruikte "raised cosine" spectrum te kiezen. Een tweede interessante keuze is een ontvanger, die is uitgerust met een zogenaamd "integrate and dump" filter. Beide zullen in hoofdstuk 3 ter sprake komen. De foutenkans van optische systemen wordt in sterke mate beïnvloed door het stochastische gedrag van de APD. Er is voldoende theorie van dat gedrag beschikbaar; wat betreft directe metingen daaraan is tot nu toe weinig gepubliceerd. In hoofdstuk 2 zal de theorie en metingen worden besproken, tevens zal een ter zake ontwikkelde meetopstelling worden beschreven.

2. DE APD

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de Avalanche Photo Diode. Eerst komen de werking en enkele algemene eigenschappen aan de orde, vervolgens wordt het gebruikte model voor de ruis besproken. Daarna wordt een belangrijk deel gewijd aan metingen met als belangrijkste onderdeel de meting van de kansfunctie aan de uitgang van de APD. Vervolgens wordt gesproken over de theoretische kansdichtheidsfuncties en tenslotte worden theorie en metingen met elkaar vergeleken.

2.1. Werking en algemene eigenschappen

Een APD is qua werking te scheiden in twee delen. Ten eerste een fotodiode: een gesperde p-n overgang, waarin fotonen worden omgezet in gat-elektron paren, die door het sperveld uit elkaar worden getrokken. Ten tweede is er een avalanche gebied in de diode, waar de veldsterkte zo hoog is, dat ladingsdragers een kinetische energie kunnen opbouwen, die hoog genoeg is om ioniserende botsingen te veroorzaken. Bij dergelijke botsingen komen nieuwe ladingsdragers vrij, die bijdragen aan de stroom door de diode en uiteraard weer nieuwe botsingen kunnen veroorzaken. Om te zorgen, dat weinig fotonen verloren gaan, moet een materiaal worden genomen, dat goed absorbeert bij de gebruikte golflengte (bijv. de GaAs golflengte van ca. 850 nm). De materiaalkeuze wordt echter ook sterk beïnvloed door de extra ruis die het avalanche proces met zich meebrengt; uit theoretische beschouwingen [1] blijkt, dat de extra ruis minimaal is als slechts één type ladingsdrager ioniserende

botsingen veroorzaakt.

Silicium blijkt deze laatste voorwaarde vrij dicht te benaderen. De absorptiecoëfficiënt bij 850 nm is lager dan men zich zou wensen; men kan echter toch een goed kwantumrendement bereiken door het depletiegebied dik te maken met behulp van een bijna intrinsiek gebied aan één kant van het avalanche gebied. Men maakt dus de combinatie van een p-i-n diode en een avalanche diode.

Het zo juist genoemde kwantumrendement is een belangrijke parameter van een fotodiode in het algemeen; hiermee wordt aangeduid de fractie van het aantal opvallende fotonen, die gemiddeld in niet recombinerende gat-elektronparen wordt omgezet. Men verliest fotonen ten eerste door reflectie aan het oppervlak van de diode en ten tweede door absorptie buiten het depletiegebied. Van deze laatsten kan een gedeelte nog door diffusie in het depletiegebied terechtkomen; dit moet echter zoveel mogelijk worden voorkomen daar diffusieverschijnselen veel trager verlopen dan driftverschijnselen. De reflectie kan tot een minimum worden beperkt, door voor de betreffende golflengte een goede antireflexcoating aan te brengen.

De APD zal dus bij belichting en onder een aangelegde sperspanning een uitwendig meetbare fotostroom vertonen, die de som is van de absorptiestroom (meestal aangeduid met primaire fotostroom) en de vermenigvuldigde fotostroom.

De APD versterking wordt gedefinieerd als de verhouding tussen de uitwendige of secundaire fotostroom en de primaire fotostroom.

In formule-vorm:

$$I_p = \frac{P\lambda}{hc} \eta q \quad (1)$$

en:

$$I_s = M I_p \quad (2)$$

Hierin is:

- I_p : primaire fotostroom (gemiddeld)
- P : optisch vermogen (gemiddeld)
- λ : golflengte van het opvallende licht
- h : constante van Planck = $6.626 \cdot 10^{-24} \text{ Js}$
- c : lichtsnelheid in vacuum = $2.998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
- η : kwantumrendement (gemiddeld)
- q : elektronlading = $1.609 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- I_s : secundaire of uitwendige fotostroom (gemiddeld)
- M : APD versterking (gemiddeld)

Hierin is verder M een functie van de veldsterkte in het avalanche gebied en dus van de sperspanning. Bij praktische diodes blijkt het kwantumrendement ook spanningsafhankelijk te zijn doordat bij lager wordende spanning de dikte van de depletie laag terugloopt. Een globale vorm van de karakteristiek I_s als functie van de sperspanning bij constant vermogen is in fig. 1 gegeven. Hierin is V_D de spanning waarbij volledige depletie wordt bereikt.

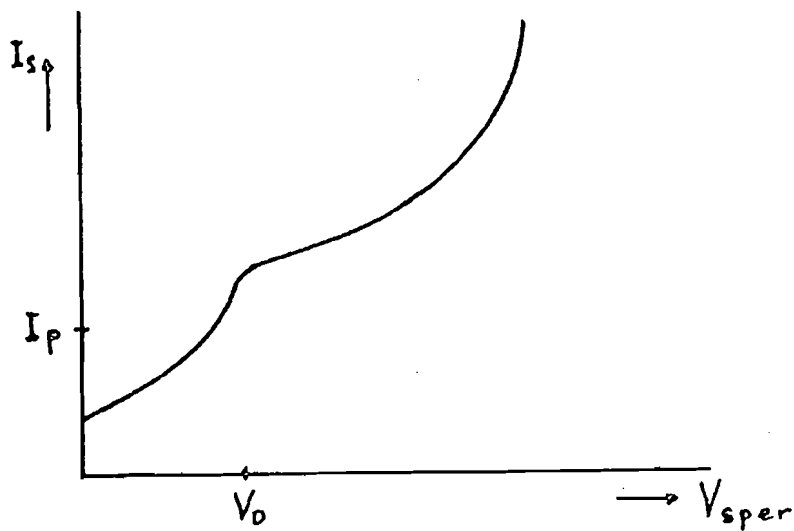


Fig. 1. De secundaire fotostroom als functie van de sperspanning.

Behalve een fotostroom vertoont een APD ook de met een p-n overgang inherente lekstroom; bij een fotodiode wordt deze meestal donkerstroom genoemd. Bij een APD treedt de complicatie op dat een gedeelte van de donkerstroom wel en een gedeelte niet aan de vermenigvuldiging meedoet.

Globaal kan de lekstroom dus worden gescheiden in een constante en in een vermenigvuldigde (spanningsafhankelijke) component:

$$I_d = I_{ds} + M I_{db} \quad (3)$$

De indices s en b zijn afkomstig van het enigszins onzorgvuldige onderscheid tussen "surface" en "bulk" lekstroom. Hoewel zelfs na vermenigvuldiging het kleinste, zal de bulk lekstroom meestal de belangrijkste rol spelen in het ruisgebeuren.

De responstijden van een APD worden bepaald door de dikte van de depletielaag en de driftsnelheid, die daarin optreedt; het avalanche proces kan over het algemeen als oneindig snel worden beschouwd.

2.2. De ruis aan de uitgang van de APD

In het proces, dat de uitgangsstroom van de APD moet beschrijven, kunnen twee stochastische invloeden worden onderscheiden. Ten eerste is er het discrete stochastische karakter van het opvallende licht; ten tweede is met het botsingsproces inherent, dat niet iedere ladingdrager, die bij het avalanche gebied aankomt, dezelfde vermenigvuldiging zal ondergaan. Over het algemeen wordt aangenomen, dat de aankomst van primaire ladingdragers bij het avalanche gebied kan worden beschreven met een Poisson impulsproces (fig. 2). Hoewel een bewijs moeilijk te geven is, zijn een drietal argumenten aan te dragen, die een plausibel verband leggen met de definities van een Poisson proces.

- a. De demping van een glasvezel is in wezen een stochastisch proces, dat gemiddeld bijv. één op de tienduizend fotonen doorlaat. Dit "random" doorlaten elimineert al een groot deel van afhankelijkheid tussen kort opeenvolgende fotonen, die mogelijk aan het begin van de vezel aanwezig zou kunnen zijn.
- b. De onderling verschillende driftwegen, die ladingdragers moeten doorlopen naar gelang hun absorptiediepte, zorgt voor een stochastische vertragingproces, dat iedere ladingdrager moet ondergaan, voor hij bij het avalanche gebied aankomt.

c. Op fysische gronden, is het onmogelijk dat ladingdragers zich in "clusters" bewegen.



Fig. 2a. De aankomst van lading bij het avalanche gebied.

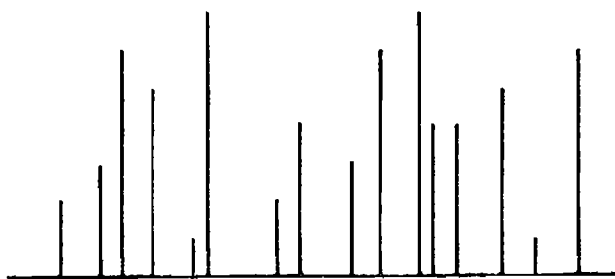


Fig. 2b. De stroom van de APD na vermenigvuldiging.

Omdat men aanneemt, dat de vermenigvuldiging oneindig snel plaatsvindt, kan men de uitgangsstroom van de APD modelleren met een gegeneraliseerd Poisson impuls proces (fig. 2b). De hoogte van iedere impuls geeft de versterking aan, die de overeenkomstige primaire ladingdrager ondervindt. Van het stochastische karakter van de uitgangsstroom, dan wel de versterking zijn een aantal eigenschappen theoretisch afgeleid.

McIntyre [1] heeft de variantie van de uitgangsstroom berekend; Personick [2] geeft de karakteristieke functie van de versterking die een primaire ladingdrager ondervindt.

McIntyre [3] tenslotte heeft formules geproduceerd*) voor de kansdichtheidsfunctie van de versterking. Bij de afleiding van al deze eigenschappen heeft men steeds moeten aannemen, dat de kans voor een gat om een ioniserende botsing te veroorzaken, een constante k maal zo groot is als de kans, dat een elektron een ioniserende botsing heeft. Uit metingen aan silicium-avalanche diodes is echter gebleken, dat k voor dat materiaal niet constant is, maar een functie is van de veldsterkte in het avalanche gebied en daarmee ook plaatsafhankelijk is [4].

De constant aangenomen k blijkt steeds als parameter in de genoemde formules te voorschijn te komen. Hier kan dat worden geïllustreerd met de door McIntyre [1] afgeleide variantie van de stroom. Deze blijkt evenredig te zijn met het tweede moment van de versterking die een primaire ladingdrager ondervindt:

$$\overline{m^2} = M^2 \left(2(1-k) + kM - \frac{1-k}{M} \right) \quad (4)$$

m is de stochastische versterking, M is de gemiddelde versterking ($= \overline{m}$) en k is de genoemde verhouding van de ionisatiecoëfficiënten van gaten respectievelijk elektronen. In de afleiding van (4) is bovendien aangenomen dat (vrijwel) alle ladingdragers, die het avalanche gebied binnengaan van het type zijn met de grootste ionisatie kans (voor silicium: elektronen).

*) Deze formules zijn door McIntyre met redeneringen gesynthetiseerd; naderhand zijn ze wel in overeenstemming gebracht met de karakteristieke functie van Personick. Zie eventueel [6].

De factor:

$$F = 2 (1-k) + k M - \frac{1-k}{M} \quad (5)$$

wordt vaak aangeduid met "excess noise factor" om aan te geven, dat die factor de vergroting van het ruisvermogen aangeeft ten opzichte van een diode met deterministische versterking. F blijkt minimaal te zijn als k minimaal gemaakt kan worden.

Een tweede vooronderstelling, die bij de afleiding van alle formules gebruikt is, maar die in de praktijk nooit perfect verwezenlijkt kan worden, is de volgende: gaande over het belichte oppervlak moeten eigenschappen als kwantumrendement en vooral versterking niet veranderen.

Een voor de hand liggende benadering in het algemeen voor een dergelijk geval is, aan te nemen dat de $k = \text{constant}$ veronderstelling geldig is en te trachten metingen te verrichten die dit rechtvaardigen.

Enige metingen aan kansdichtheid van de uitgangsstroom van een APD zijn beschreven door Conradi [5]. Hoewel de resultaten bijzonder goed lijken, zijn een paar bezwaren aan te voeren, die herhaling van de metingen onder andere omstandigheden wenselijk maken:

- a. alle metingen zijn bij 77°K uitgevoerd
- b. de invloed van de versterkerruis is met weinig steekhoudende argumenten verwaarloosd
- c. de invloed van de impulsrespons van de versterker wordt niet of niet op duidelijke wijze in rekening gebracht
- d. de aard van de metingen is zodanig, dat slechts één kant van de kansdichtheid wordt gemeten.

Metingen aan de variantie van de uitgangsstroom zijn wel in voldoende mate bekend en gedragen zich alle goed volgens de $k = \text{constant}$ benadering. Het blijkt

zelfs, dat deze metingen de enige bruikbare methode bieden om aan een getalwaarde voor k te komen; men kent over het algemeen noch het veldsterkte verloop in het avalanche gebied noch de ionisatiecoëfficiënten voldoende nauwkeurig om daar een ("gemiddelde") waarde voor k uit te destilleren.

2.3. Metingen aan een APD

2.3.1. De optische kant van de meetopstelling

De noodzakelijke homogeniteitsmeting heeft een belangrijke invloed gehad op de opbouw van de meetopstelling; dit in verband met de daarvoor vereiste kleine afmetingen van de lichtvlek.

Als lichtbron is gebruikt een laserdiode (Laser Diode Labs LCW-5), die echter uitsluitend beneden zijn startstroom is bedreven. De lichtvlek van deze diode is met een positieve lens afgebeeld op een "pinhole" van 0.5 mm. De "pinhole" wordt op zijn beurt met behulp van een 20x microscoop objectief op het gevoelige oppervlak van de fotodiode afgebeeld. De afstand tussen de pinhole en het objectief is ca. 20 cm, zodat de bereikte verkleining ca. 16x is. Op grond hiervan wordt de lichtvlek op 30 μ m diameter geschat.

De APD is in dwarsrichting met een micromanipulator verplaatsbaar, zodat de APD t.o.v. de lichtvlek kan worden verschoven.

De APD is zodanig opgesteld, dat hij kan worden vervangen door een gecalibreerde PIN fotodiode om het optisch vermogen te kunnen meten.

2.3.2. Homogeniteitsmeting

De APD gelijkstroom is bij drie verschillende waarden van de sperspanning gemeten als functie van de plaats op het oppervlak. Bij elke meting is voor de donker-

stroom gecorrigeerd.

De zo gemeten gevoeligheid over het oppervlak is in figuur 3 gegeven. Om de invloed van hogere versterking beter te kunnen beoordelen zijn alle krommes ongeveer op dezelfde hoogte genormeerd. Bij elke kromme is de versterking globaal aangegeven.

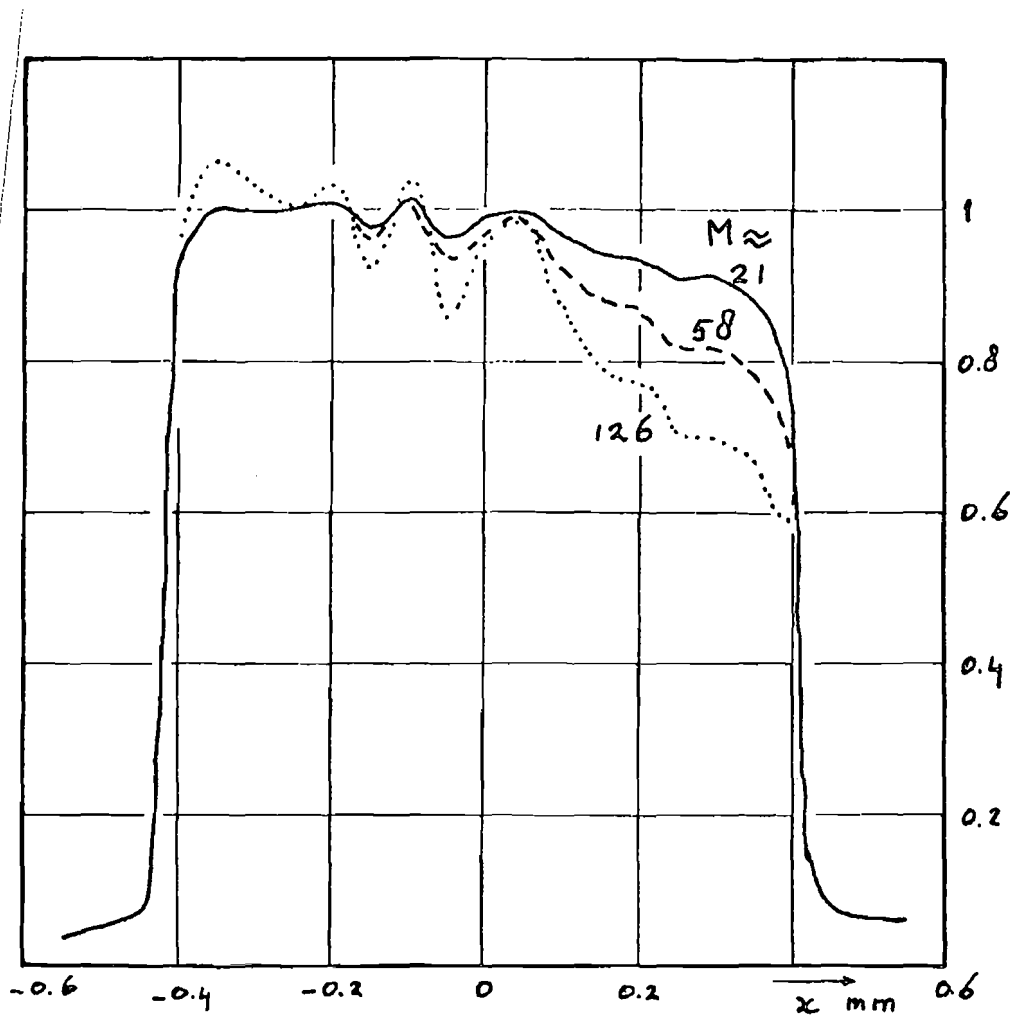


Fig. 3. De relatieve gevoeligheid over het oppervlak.

RCA CA30817 No D148

De afval van de gevoeligheid aan de randen komt goed overeen met de geschatte spotgrootte van ca. 30 μm . De restresponse buiten het gevoelige gebied wordt

waarschijnlijk veroorzaakt doordat een gedeelte van het licht door achtereenvolgens spiegeling op de fotodiode en op het microscoop objectief in het gevoelige gebied terechtkomt. De homogeniteit ziet er verder voldoende goed uit, zeker als naderhand gewerkt wordt met dezelfde spot en men een maximum zoekt ongeveer in het midden van de diode.

2.3.3. De meting van de versterking

De gemiddelde waarde van de versterking van de APD is gemeten met behulp van een geijkte diode, die tijdelijk de plaats van de APD heeft ingenomen. Verder is aangenomen, dat het opgegeven kwantumrendement van 85% bij ca. 850 nm juist is; gezien de dikte van de depletielaag van de gebruikte diode (ca. 100 μm) en de kwaliteit van de antireflex coating kunnen hier weinig fouten mee worden gemaakt. Met deze waarde van kwantumrendement en het gemeten vermogen kan de primaire fotostroom worden berekend met (1). Een directe meting van de primaire fotostroom is onmogelijk, omdat bij lage sperspanning, waar men mag aannemen, dat de avalanche-versterking één is, de depletielaag van de diode niet zijn volledige dikte heeft.

Pas bij vrij hoge spanning strekt deze laag zich door de gehele dikte van de diode uit; dan is echter ook de avalanche-versterking al sterk toegenomen.

De resultaten van de meting zijn in tabel 1 en fig. 4 weergegeven.

In de grafiek is goed te zien, dat pas bij 130 Volt sperspanning de depletielaag zijn definitieve dikte krijgt; de versterking is daar al ca. 18x.

V	M
90	1.7
100	2.8
110	5.4
120	10.7
130	16.9
140	19.2
150	21.2
160	22.9
170	25.0
180	26.8
190	29.0
200	31.5
210	34.4
220	37.9
230	41.8
240	47.0
250	52.8
260	60.6
269	70.4
274	76.3
279	83.5
284	91.8
289	101.4
293	113.1
298	127.0
303	146.4
307	167.2
311	199.1
313	219.4

Tabel 1. De APD versterking als functie van de sperspanning.

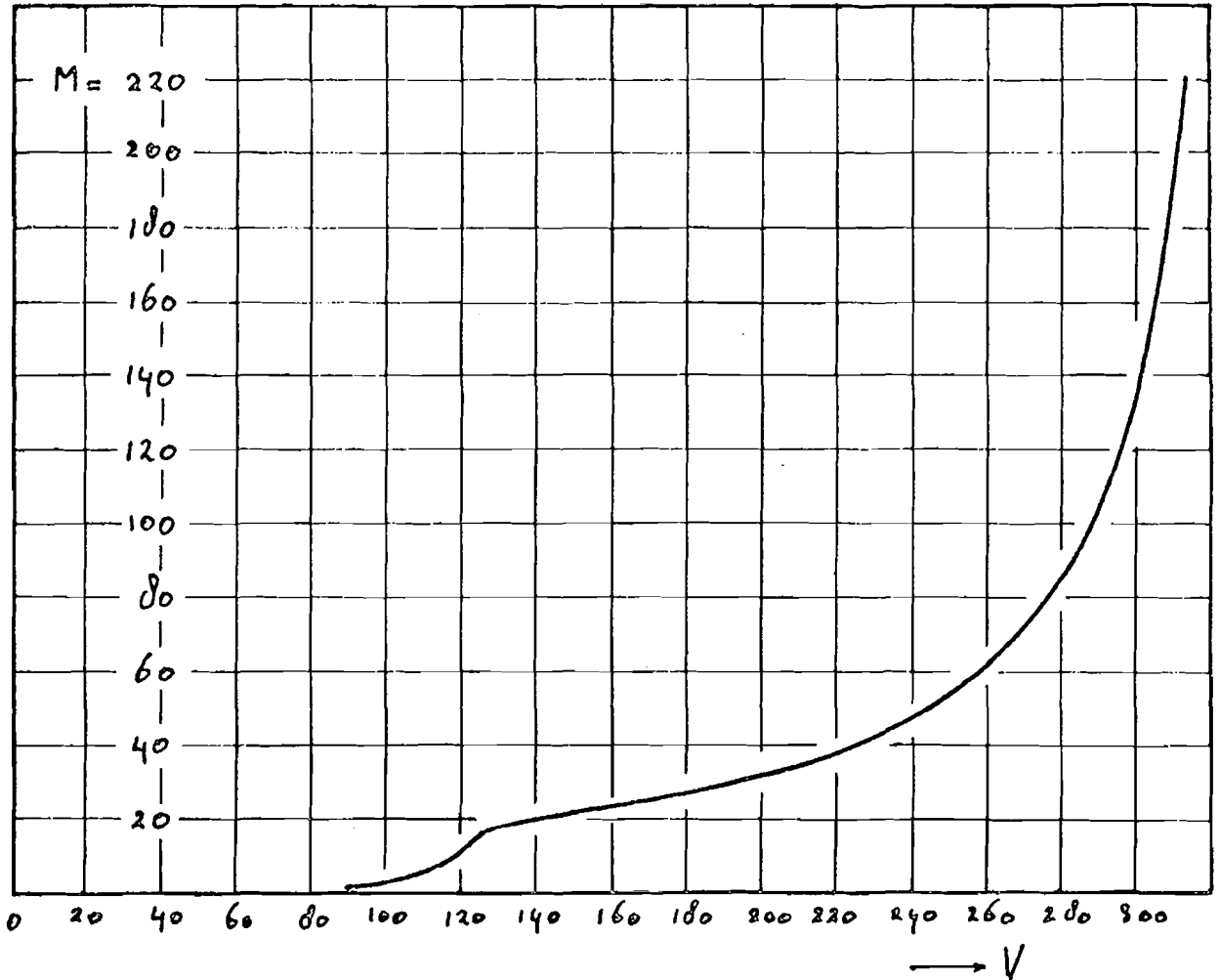


Fig. 4. De APD versterking als functie van de sperspanning.

2.3.4. Meting van de k-waarde

Voor de meting van de getalwaarde van ruisparameter k van de RCA-APD is gebruik gemaakt van een voorversterker die is ontworpen voor de metingen aan de kansverdeling van de uitgangsstroom; deze versterker wordt bij die metingen beschreven. Van belang is hier, dat de versterking groot genoeg is om een 50Ω systeem te kunnen sturen zonder dat het ruisniveau door andere

elementen, dan de ingangstrap wordt bepaald.

De meetmethode berust op het feit, dat voor kleine waarde van k , het door de diode geleverde ruisvermogen kan worden geschreven (zie eventueel [1]):

$$P_n = 2q I_p M^2 (2 + kM) B R, \quad (6)$$

$$M > 10 \quad k \ll 1$$

Hierin is I_p de gemiddelde primaire fotostroom, B de ruis bandbreedte van het meetsysteem en R de belastingsweerstand van de diode. (Het ruisvermogen van een diode zonder avalanche-versterking zou hier zijn:

$$P_n' = 2q I B R$$

de "shot noise").

Na een versterker met versterking A kan men over de ingangswaarde van een effectieve waarde voltmeter meten:

$$V^2 = 2q I_p M^2 (2 + kM) B R \left(\frac{A}{50}\right)^2 + V_v^2 \quad (7)$$

Hierin is V_v de gemeten spanning zonder belichting, dus de invloed van de versterkerruis en de ruis ten gevolge van de donkerstroom.

Men kan een aantal irrelevante constanten in een constante C onderbrengen:

$$V^2 = C M^2 (2 + kM) + V_v^2 \quad (8)$$

Als men nu meetpunten van

$$Y = \frac{V^2 - V_v^2}{M^2} \quad (9)$$

uitzet als functie van M, dienen de punten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Deze rechte snijdt de y-as op de hoogte 2C; uit de helling kan dan k worden afgeleid.

In tabel 2 zijn de meetresultaten met de volgens (9) berekende punten gegeven; de grafische constructie is in figuur 5 uitgevoerd.

M	$v^2, (mV)^2$	$v_v^2, (mV)^2$	Y
19.3	26.2	16.6	1.103
28.9	35.5	16.8	1.171
38.6	46.8	16.9	1.278
48.2	59.2	17	1.384
57.8	72.8	17.2	1.498
67.5	87.1	17.5	1.598
77.1	102	18	1.696
86.8	117.5	18.5	1.787
96.4	134.5	19	1.908
106	152	19.5	2.022
115.7	169	20	2.104
125.3	187.5	21	2.211
135.0	206	21.5	2.304
144.6	224	22.5	2.376

Tabel 2. k-meting.

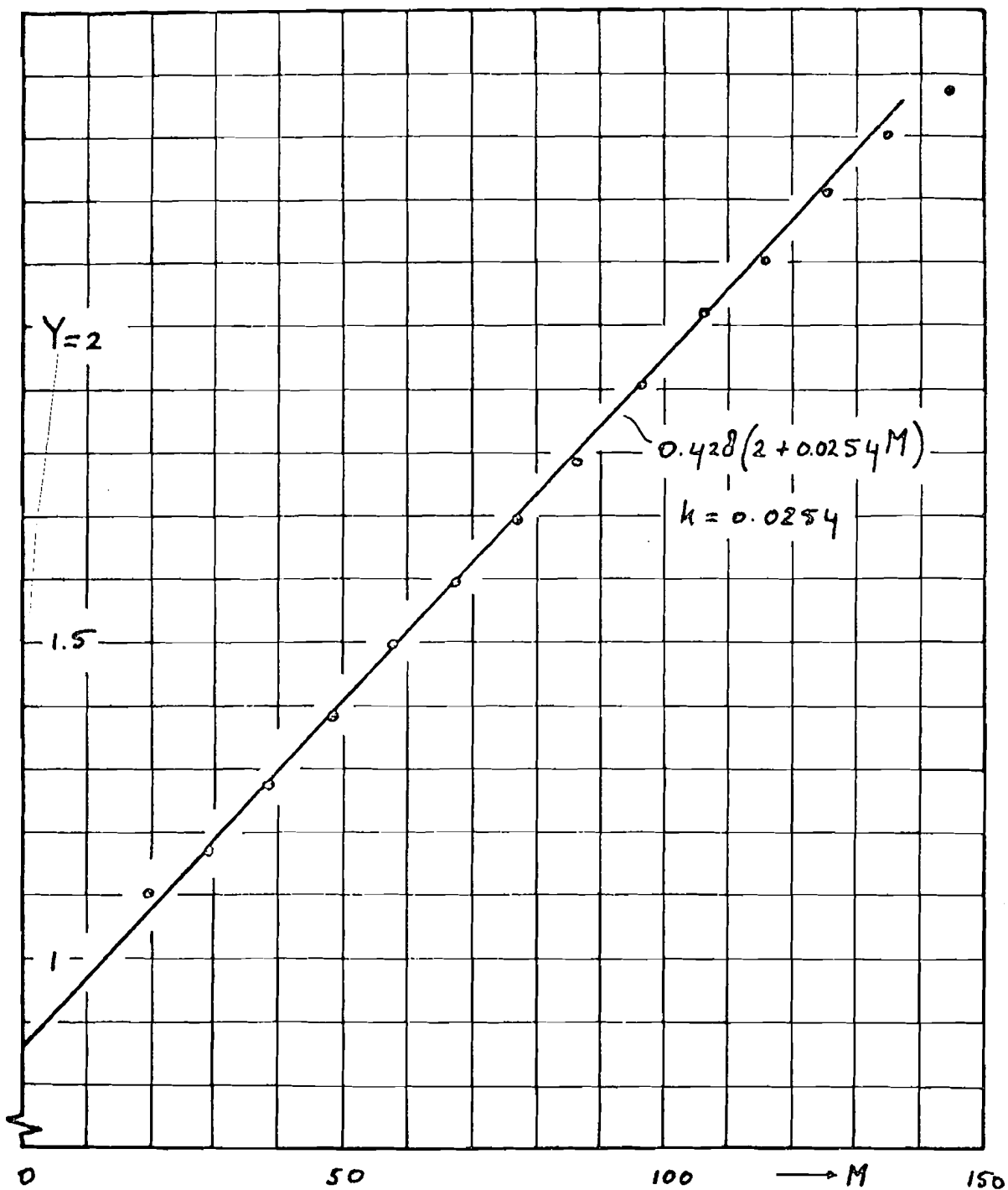


Fig. 5. De k-meting.

Uit de grafiek blijkt, dat de meetpunten over een relatief groot gebied goed op een rechte lijn liggen;

dit geeft al enigszins een rechtvaardiging van de $k = \text{constant}$ veronderstelling. De gemeten waarde $k = 0,0254$ duidt er op, dat de diode vrij goed is.

2.3.5. De meting van de ruisverdelingsfunctie

2.3.5.1. Randvoorwaarden bij de meting

In hoofdstuk 3 zal worden afgeleid, dat de karakteristieke functie van het uitgangssignaal van een lineair filter, dat na de APD is geschakeld, kan worden gegeven door:

$$\phi_v(\omega, t) = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \{ \phi_m(h(t-\tau)\omega) - 1 \} d\tau} \quad (10)$$

Hierin is $\lambda(t)$ de parameter van het inhomogene Poisson proces, waarmee de primaire elektronenstroom kan worden beschreven (men krijgt dus gemiddeld $\lambda(t) \Delta t$ primaire elektronen in een klein interval Δt binnen), $\phi_m(\omega)$ is de karakteristieke functie van de stochastische versterking, die elk primair elektron in de APD ondergaat en $h(t)$ is de impuls response van het genoemde lineaire filter. Hoewel deze formule vrij algemeen is en veel situaties kan beschrijven, is het voor de opzet van een meetsysteem van belang, deze formule zoveel mogelijk te vereenvoudigen door een verstandige, maar realiseerbare keuze van $\lambda(t)$ en $h(t)$.

Vooreerst ligt het voor de hand een ongemoduleerde lichtbron te kiezen, waardoor $\lambda(t)$ constant wordt. Men kan de integraal in de exponent elimineren door voor $h(t)$ een rechthoekpuls te kiezen.

Men neemt dus:

$$\lambda(t) = \lambda \quad (11)$$

en:

$$\begin{aligned} h(t) &= h \quad \text{voor } t < 0, t > T \\ &= 0 \quad \text{voor } 0 < t < T \end{aligned} \quad (12)$$

Dan is:

$$\phi_v(\omega, t) = \phi_v(\omega) = e^{\lambda T \{ \Phi_m(\omega h) - 1 \}} \quad (13)$$

Het hier gebruikte filter staat ook bekend onder de naam "integrate and dump" filter.

Een dergelijk filter accumuleert ieder ingangssignaal, wat in de afgelopen periode T is binnen gekomen en vertoont overeenkomst met een lineaire teller.

Voor het uitgangssignaal kan worden geschreven:

$$\begin{aligned} v_u(t) &= v_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-\tau) h(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t-T}^t v_i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

Uit de karakteristieke functie gegeven door (13) kan men afleiden, dat bij de meting λT (het gemiddelde aantal primaire elektronen in interval T) zo klein mogelijk moet worden gekozen. Men kan die karakteristieke functie namelijk schrijven als:

$$\phi_v(\omega) = \left(e^{\Phi_m(\omega h) - 1} \right)^{\lambda T} \quad (15)$$

In het kansdichtheidsdomain stelt dit een λT -voudige convolutie voor; van welke kansdichtheid men ook uitgaat, als λT groot is, benadert het resultaat altijd een

Gaussische dichtheid. Men kan in dat geval het speciale karakter van de APD versterking niet meer terugvinden. Voor λT kan ook een globale ondergrens worden bepaald, die verband houdt met het meevermenigvuldigde deel van de lekstroom MI_{db} . Het deel van de primaire elektronen, wat door lekstroom wordt veroorzaakt, kan men aanduiden met λ_d . Dit deel moet klein zijn t.o.v. λ en wel om twee redenen: de eerste is, dat λ_d moeilijk meetbaar is, de tweede reden is, dat geen enkele garantie bestaat, dat de lekstroom in een homogeen avalanche gebied ontstaat.

Uit een meting van de spanningsafhankelijkheid van de lekstroom van de gebruikte diode volgt $\lambda_d \approx 2.8 \cdot 10^8$ primaire elektronen/sec., zodat λ groter is gekozen dan $3 \cdot 10^9$ primaire paren per seconde.

Uit de eis, dat λT redelijk klein moet blijven volgt nu een waarde voor T. Voor T is gekozen 25 ns; deze keuze hangt ook samen met de realiseerbaarheid van een versterker voor hiermee overeenkomende frequenties. Omdat het wenselijk is, dat de standaarddeviatie van de versterkerruis kleiner is, dan die van de te meten ruis wordt men ook nog enigszins begrensd in de minimale versterking van de APD bij de meting.

2.3.5.2. De opbouw van de meetapparatuur.

In fig. 6 is een globaal blokschema van de elektrische kant van de meetapparatuur voor de meting van de kansverdelingsfunctie gegeven.

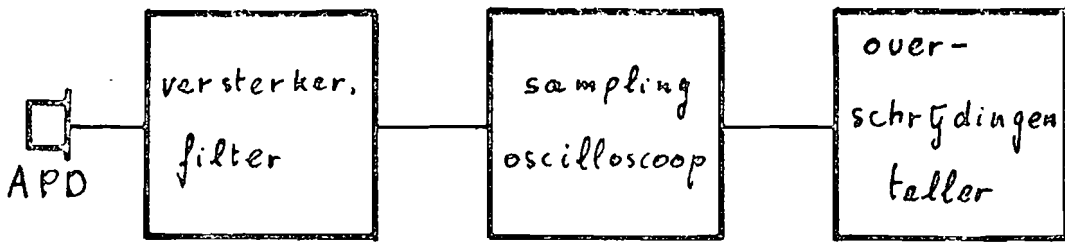


Fig. 6. De apparatuur voor de meting van de verdelingsfunctie.

De optische opstelling is dezelfde als gebruikt is voor de meting van de homogeniteit van de diode. Van de elektrische kant zal nu een meer gedetailleerde beschrijving worden gegeven; een schema van de APD voeding, de voorversterker en filter is in fig. 7 te vinden.

De APD is samen met een voorversterker op een printplaat gemonteerd, welke geplaatst is op de optische bank, waarop ook de laser, pinhole en lenzen zijn gemonteerd. Voor deze opbouw is gekozen, omdat het hoge impedantieniveau van de voorversterker, wat van belang is voor een lage versterkerruis, een capaciteitsarme verbinding met de APD noodzakelijk maakt.

De APD wordt gevoed vanuit een regelbare gelijkspanningsbron, waarvan de spanning met een digitale voltmeter wordt afgelezen; als de stroom een bepaalde waarde overschrijdt, is een correctie op die spanningsaflezing nodig in verband met spanningsval over enkele serieweerstanden in het voedingscircuit van de APD. De stroom door de APD wordt gemeten via een paar weerstanden; deze weerstanden zorgen voor een (voor wisselspanning) belastingloze aansluiting van de stroommetingen moeten een voldoende hoge waarde hebben om een niet noemenswaardige bijdrage aan de versterkerruis te leveren.

De ingangstrap van de versterker heeft een integrerende impulsresponse; in de eerste plaats heeft een dergelijk versterkertype een lage ruisbijdrage ten tweede wordt op deze manier alvast een deel van het "integrate and dump" filter gerealiseerd. De ingangsstroom wordt geïntegreerd over de intrinsieke basis-collectorcapaciteit C_f van de eerste transistor. De hiervoor benodigde spanningsversterking wordt verkregen door een hoge collectorbelastingsimpedantie; welke voor hoge frequenties een capacitief karakter heeft.

De collectorspanning is dan:

$$V_c = \frac{1}{C_f} \int_{-\infty}^t i_{APD} d\tau \quad (16)$$

De twee emittervolgers zijn noodzakelijk om te zorgen dat de belasting die de volgende versterkertrap oplevert, niet terugwerkt op de collectorimpedantie van de eerste transistor. De uitgangsspanning van deze eerste versterker wordt, duchtig ontkoppeld, via een hoge serie weerstand teruggevoerd naar de basis van de ingangstransistor; dit geeft een gelijkspannings-tegenkoppeling, die voor een goede instelling van de transistoren zorgt. Door deze tegenkoppeling krijgt de ondergrens in (16) een betrekkelijk karakter. Verdere versterking wordt geleverd door een twee transistorversterker met een voldoende vlakke frequentie karakteristiek. Deze versterker heeft twee equivalente uitgangen, die naar weerszijden van een verschilversterker gaan, de ene echter met een grotere lengte coaxkabel, dan de andere. Op deze manier wordt het "dump" gedeelte van het filter gerealiseerd. Aan de hand van figuur 8 kan dit nader duidelijk worden gemaakt.

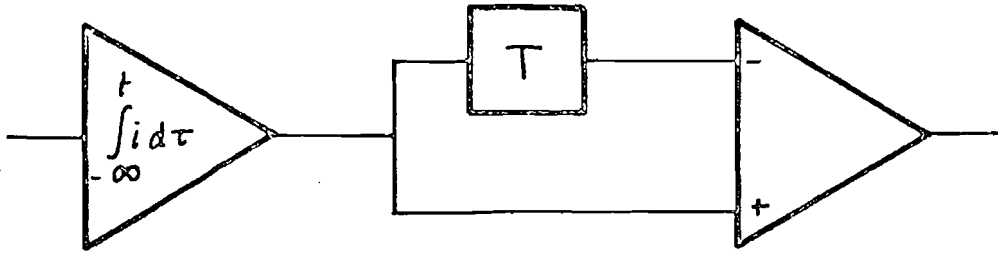


Fig. 8. Het "integrate and dump" filter.

Het uitgangssignaal van dit systeem is kennelijk:

$$v = \int_{-\infty}^t i dt - \int_{-\infty}^{t-T} i dt = \int_{t-T}^t i dt \quad (17)$$

Dit blijkt in overeenstemming te zijn met (14).

De extra vertraging van 25 ns wordt bereikt met ca. 5 meter coax kabel.

De uitgangsspanning van de verschilversterker wordt verder versterkt met een brede bandversterker (type Keithley 104) en vervolgens aangeboden aan een "sampling oscilloscope". Om te zorgen, dat de oscilloscoop altijd in een plezierig gebied van zijn ingangsgevoeligheid werkt, is een stappenverzwakker opgenomen. De oscilloscoop neemt monsters van het ruissignaal en stelt ieder monster enige tijd aan een uitgang beschikbaar en wordt dus gebruikt als snelle "sample and hold" schakeling. Om deze functie goed te kunnen vervullen, moet van de oscilloscoop de "sampling loop gain" op één worden afgeregeld. Bij de gebruikte Tektronix 3S2/3T2 kan dat op het frontpaneel met de knop "dot response" worden uitgevoerd; voor de procedure wordt verder naar de handleiding verwezen.

Het door de oscilloscoop voor het nemen van de monsters

opgewekte kloksignaal wordt ook gebruikt voor de verdere verwerking in de overschrijdingenteller. Deze bestaat uit een, gedeeltelijk logische, schakeling, figuur 9, die een puls afgeeft, elke keer als het monster positief dan wel negatief is, afhankelijk van de stand van een schakelaar.

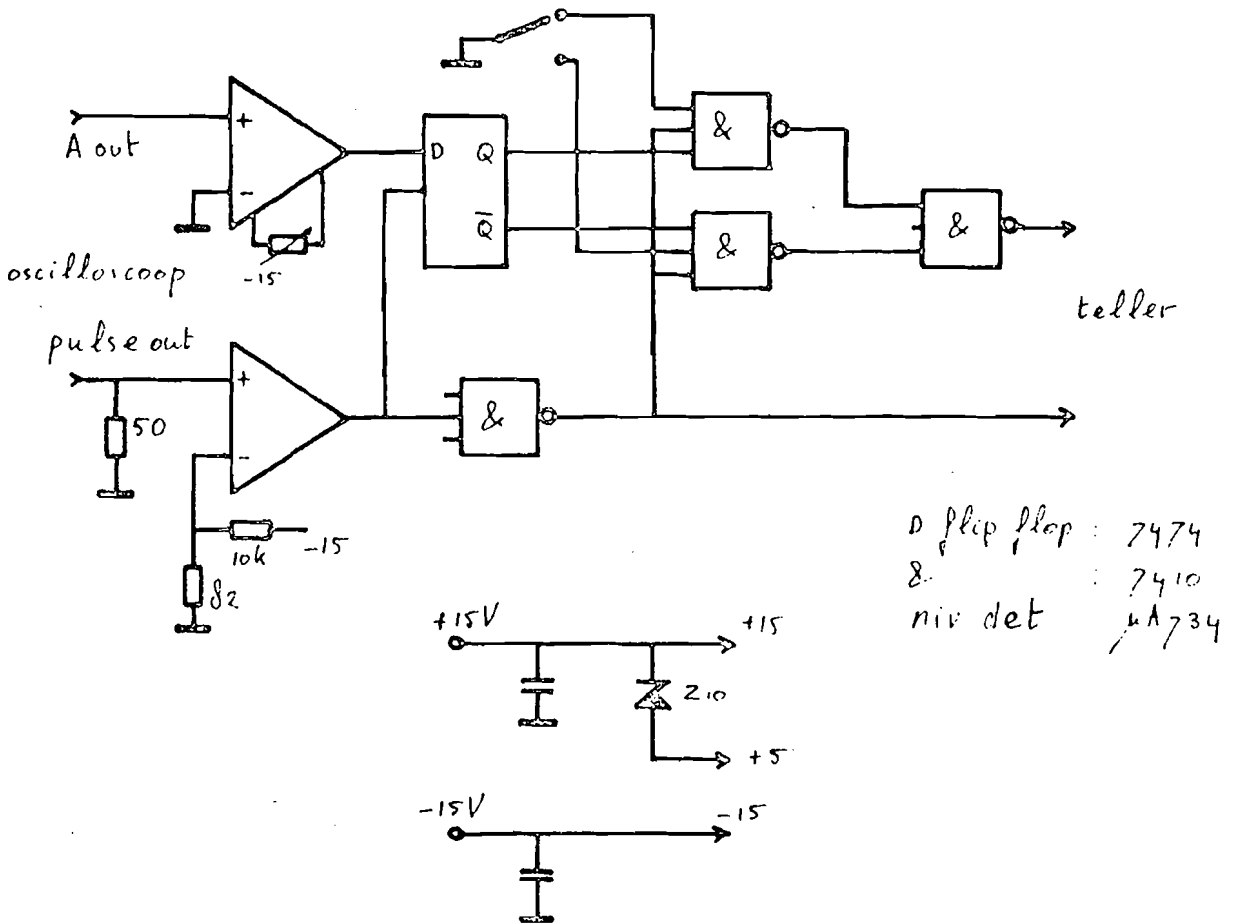


Fig. 9. De overschrijdingenteller.

De zo gevormde (stochastische) pulsreeks wordt door een teller vergeleken met de monsterfrequentie van de oscilloscoop; de teller (GR 1192) is hiertoe in de stand "ratio" geschakeld. Om een verdelingsfunctie op te nemen, wordt de offsetspanning van de oscilloscoop stap voor stap verschoven

en bij iedere spanning wordt de tellerstand genoteerd. Om de verdelingsfunctie te kunnen uitdrukken in aantal secundaire elektronen, dient men te weten, welke bijdrage één gat-elektron-paar aan de uitgangsspanning levert. Dit is gemeten door via een hoge weerstand een stroompuls aan te sluiten op de voorversterker; de in- en uitgangsspanning zoals men die dan ziet, zijn in fig. 10 getekend.

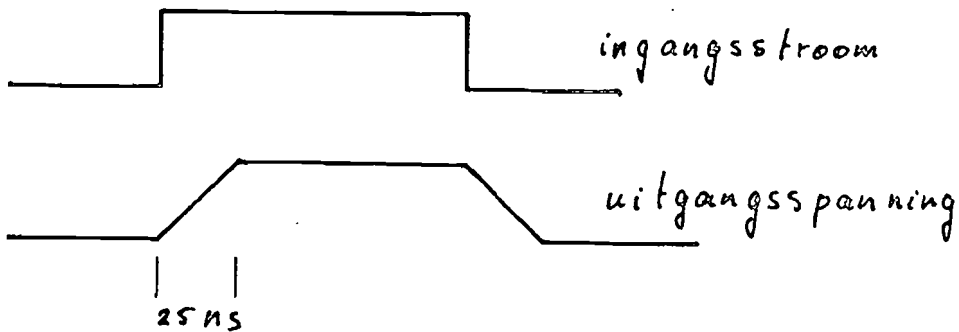


Fig. 10. De overdrachtsmeting.

De helling in de uitgangsspanning bij een bepaalde stroompuls is een maat voor de overdracht; gevonden werd: $5.15 \text{ V}/\mu\text{A}$ in 25 ns . Hieruit volgt, dat elk secundair gat elektron paar, wat in de voorgaande 25 ns is binnengekomen, een bijdrage geeft van $33 \mu\text{V}$ aan de uitgangsspanning.

Om de werking van de gehele apparatuur te controleren, werd de verdelingsfunctie van de versterkerruis gemeten. De resultaten komen goed overeen met een Gaussische verdeling die qua standaarddeviatie zo goed mogelijk passend bij de meetresultaten is gekozen (tabel 3).

uitg. spann. (V)	P_{gemeten}	P_{Gauss} $\sigma = 35.02 \text{ mV}$
-0.2	0.00000	0.00000
-0.16	0.00011	0.00009
-0.12	0.00450	0.00410
-0.08	0.06700	0.06500
-0.04	0.35500	0.35100
0	0.77600	0.77400
0.04	0.97050	0.97000
0.08	0.99860	0.99870
0.12	0.99995	0.99998
0.16	1.00000	1.00000

Tabel 3. De versterkerruisverdelingsfunctie.

Als de zo gevonden Gaussische standaarddeviatie teruggerekend wordt naar de ingang komt men op 1016 secundaire paren gemiddeld in de periode van 25 ns.

2.3.5.3. Een meting met belichting

Aan de beschikbare APD (RCA type 30817, nr. D148) is een verdelingsfunctie opgemeten, bij een versterking van 100 en een primaire fotostroom van 1 nA. Dit geeft gemiddeld 155 primaire gat-elektron-paren in de periode van 25 ns; samen met de primaire paren die in donker condities werden geschat, komt men op totaal gemiddeld 162 paren.

Met de gemeten waarde van k kan de standaarddeviatie op het aantal secundaire elektronen worden berekend

met een uit (6) afgeleide formule:

$$\sigma_s = M \sqrt{\bar{p}} (2 + k M) \quad (18)$$

Met $\bar{p} = 162$, $k = 0.0254$ en $M = 100$: vindt men $\sigma_s \approx 2700$.

Dit betekent, dat de versterkerruis ($\sigma \approx 1000$ paren) redelijk klein is, maar niet verwaarloosbaar zal zijn ten opzichte van de ruis uit de belichte APD.

De meetpunten van de verdelingsfunctie van de uitgangsspanning van het meetsysteem zijn in tabel 4 gegeven.

V	P
0.14	0.00000
0.13	0.00002
0.12	0.00006
0.11	0.00018
0.10	0.00055
0.09	0.00170
0.08	0.00430
0.07	0.01120
0.06	0.02900
0.05	0.05850
0.04	0.11800
0.03	0.21300
0.02	0.35300
0.01	0.51600
0.00	0.68200
-0.01	0.82000
-0.02	0.91600
-0.03	0.96930
-0.04	0.99080
-0.05	0.99800
-0.06	0.99970
-0.07	0.99996
-0.08	1.00000

Tabel 4. De verdelingsfunctie naar V.

V	$P_{\Delta v}$
0.14	0.00002
0.13	0.00004
0.12	0.00012
0.11	0.00037
0.10	0.00115
0.09	0.00260
0.08	0.00690
0.07	0.0178
0.06	0.0295
0.05	0.0595
0.04	0.0950
0.03	0.140
0.02	0.163
0.01	0.166
0.00	0.138
-0.01	0.096
-0.02	0.0533
-0.03	0.0215
-0.04	0.0072
-0.05	0.0017
-0.06	0.00026
-0.07	0.00004

Tabel 5. "Histogram".

In tabel 5 is de verdelingsfunctie omgerekend, maar de kans dat de uitgangsspanning tussen twee meetpunten ligt; er wordt hier dus een histogramvorm gegeven. Van dit "histogram" is het gemiddelde berekend en alle waarden zijn omgerekend naar aantallen secundaire elektronen waarbij het gemiddelde zodanig is opgeschoven, dat het overeenkomt met het gemiddelde aantal, dat volgt uit

$$\bar{s} = M \bar{p} \tag{19}$$

Met $M = 100$ en $\bar{p} = 162$: $\bar{s} = 16200$.

Dit is in tabel 6 verwerkt, waarbij de kanswaarden zijn omgerekend naar een kansdichtheid. In fig. 11 is deze kansdichtheid getekend.

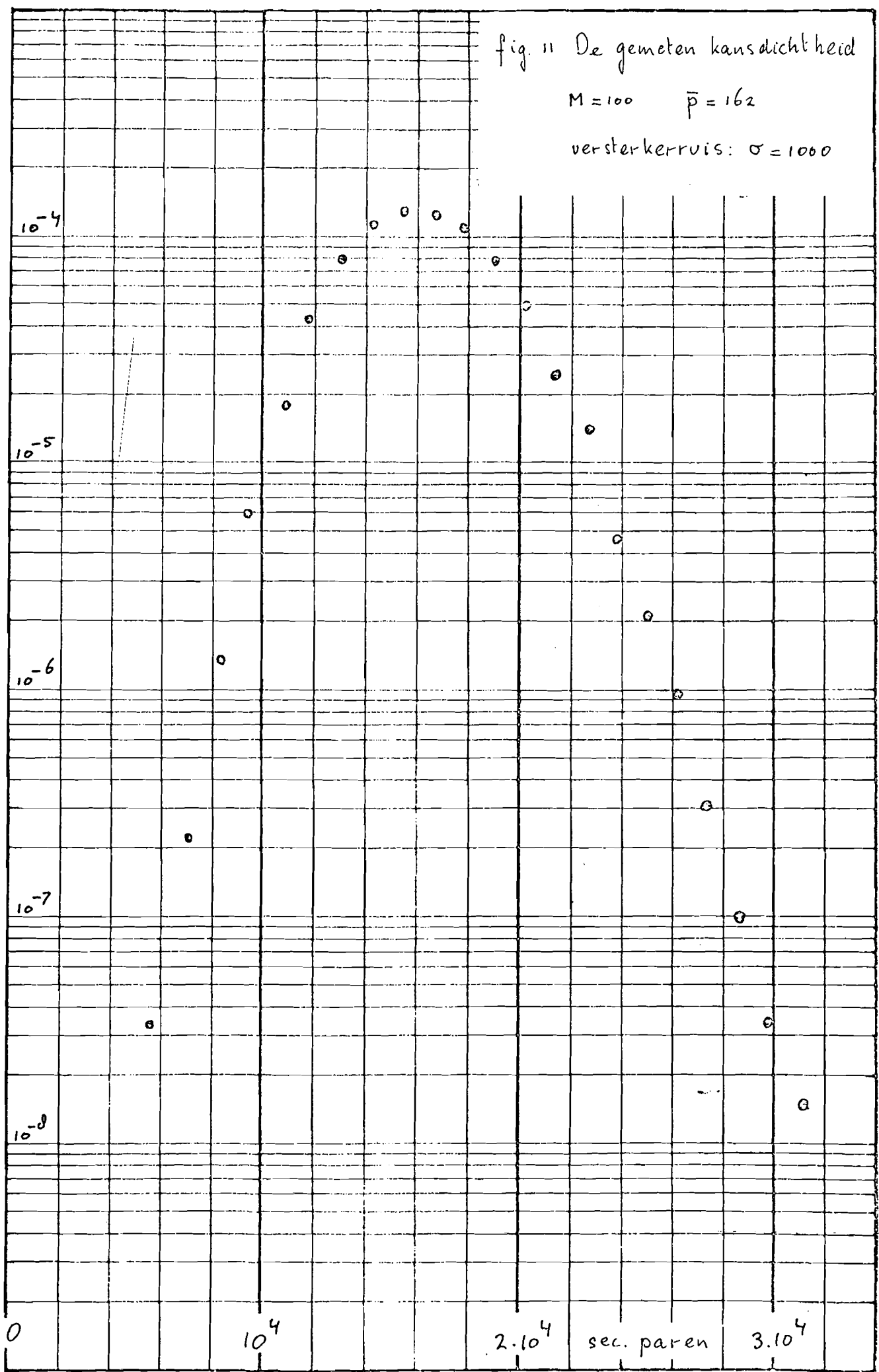
s	p(s)
5727	3.316 10^{-8}
6933	2.155 10^{-7}
8140	1.409 10^{-6}
9346	5.968 10^{-6}
10553	1.782 10^{-5}
11759	4.418 10^{-5}
12965	7.958 10^{-5}
14172	1.144 10^{-4}
15378	1.376 10^{-4}
16585	1.351 10^{-4}
17791	1.160 10^{-4}
18997	7.875 10^{-5}
20204	4.932 10^{-5}
21410	2.445 10^{-5}
22616	1.475 10^{-5}
23823	5.720 10^{-6}
25029	2.155 10^{-6}
26236	9.533 10^{-7}
27442	3.067 10^{-7}
28648	9.947 10^{-8}
29855	3.316 10^{-8}
31061	1.658 10^{-8}

Tabel 6. De gemeten kansdichtheid op het aantal secundaire paren.

fig. 11 De gemeten kansdichtheid

$M = 100$ $\bar{p} = 162$

versterkerruis: $\sigma = 1000$



2.4. De theoretische statistiek van de APD

In de literatuur zijn een aantal pogingen gedaan om het statistische gedrag van de avalanche versterking te beschrijven. Hiervan zullen de belangrijkste worden genoemd.

2.4.1. De vermenigvuldigingskans van McIntyre

In [3] komt McIntyre via een aantal inductieve redeneringen op een formule voor de vermenigvuldigingskans van een APD. Zijn resultaat kan worden geschreven als de kans op s secundaire gat-elektron paren, als precies p elektronen het avalanche gebied binnengaan:

$$P(s|p) = \frac{p \Gamma\left(\frac{s}{1-k}\right)}{(p+k(s-p)) (s-p)! \Gamma\left(\frac{p+k(s-p)}{1-k}\right)} \cdot \alpha^p (\alpha^k - \alpha)^{s-p} \quad (20)$$

waarin
$$\alpha = \left(\frac{1-k}{M} + k\right)^{\frac{1}{1-k}} \quad (21)$$

en (x) de gammafunctie voorstelt.

De formule is gebaseerd op een structuur, die ontstaat, als men achtereenvolgens één, twee, drie en vier ioniserende botsingen aanneemt en is dus niet mathematisch bewezen. Aangezien aangenomen wordt, dat het aantal primaire p niet vast is, maar Poisson verdeeld, vindt men voor de kans op een bepaald aantal secundaire met

\bar{p} primaire:

$$P(s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{p}} (\bar{p})^p}{p!} \cdot P(s|p) \quad (22)$$

De volledige kansfunctie van s vindt men als men deze formule uitrekent voor $s = 0, 1, \dots$.

(22) beschrijft de kans aan de uitgang van een "integrate and dump" filter, waarbij de belichting constant is. De zeer complexe structuur duidt erop, dat het zelfs met een rekenmachine veel tijd zal vergen een volledige kansfunctie voor één geval door te rekenen. Het is duidelijk, dat een minder complex alternatief wenselijk is.

2.4.2. De karakteristieke functie van Personick

Personick [2] heeft een vergelijking afgeleid voor de karakteristieke functie van de versterking die een primaire elektron ondervindt in het avalanche gebied van de APD. Een tekortkoming van deze vergelijking is, dat hij niet in expliciete vorm geschreven kan worden; zoals zal blijken, is dit bezwaar niet onoverkomelijk als een rekenmachine ingeschakeld kan worden.

De vergelijking zal nu worden afgeleid, in grote lijnen volgens [2]; enkele lacunes, die daar optreden zullen hier worden aangevuld.

De afleiding begint vrij algemeen met de veronderstelling, dat men de karakteristieke functie wenst af te leiden van het totaal aantal paren s , dat het gevolg is van de injectie van één paar op de positie x in het avalanche gebied, inclusief dat eerste paar.

Gezien de definitie van de karakteristieke functie [13]:

$$\phi_s(\omega, x) = \sum_{s=1}^{\infty} P(s, x) e^{j\omega s} \quad (23)$$

(De sommatie begint hier bij één omdat men er van uitgaat dat er in ieder geval het geïnjecteerde paar zal zijn).

Voor de verdere uitwerking verdeelt men het avalanchegebied in L intervallen, ieder ter grootte $\frac{W}{L}$; W is de afmeting van het avalanche gebied gezien in de richting van het aangelegde veld (fig. 12).

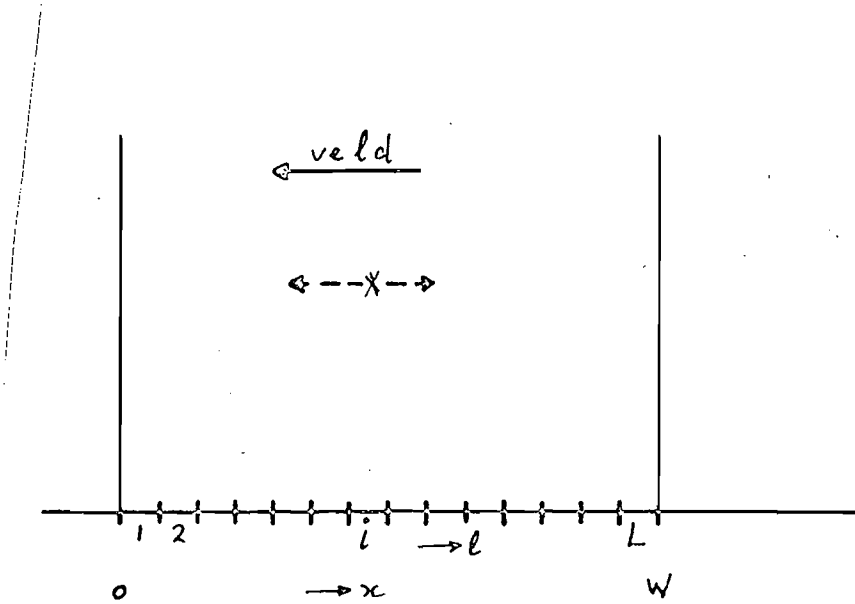


Fig. 12. Het avalanche gebied.

Het initiële paar ontstaat in interval i en is voor $i > 0$ geen primair paar; het elektron doorloopt vervolgens onder invloed van het veld de intervallen $l > i$, het gat de intervallen $l < i$. De intervallen zijn zo klein gekozen, dat de ladingdragers in ieder interval geen of één ioniserende botsing hebben. Als een botsing in interval l plaatsvindt, komt een nieuw avalanche proces op gang, waarvan men het totaal aantal paren, dat daardoor ontstaat, op s_l stelt.

Het totaal aantal paren, dat een gevolg is van het ene initiële paar is nu:

$$S = 1 + \sum_{l=1}^L s_l \quad (24)$$

Omdat alle ioniserende botsingen van een ladingsdrager worden aangenomen onafhankelijk te verlopen, geldt, met een bekende eigenschap betreffende de som van onafhankelijke variabelen (convolutie theorema [13] blz. 159) voor de karakteristieke functie:

$$\phi_s(\omega, x) = e^{j\omega \frac{L}{\pi}} \prod_{l=1}^L \phi_{s_l}(\omega) \quad (25)$$

waarin de factor $e^{j\omega}$ kan worden geïnterpreteerd als de karakteristieke functie van het geïnjecteerde (deterministische) paar.

Uit (25) volgt direkt:

$$\ln \phi_s(\omega, x) = j\omega + \sum_{l=1}^L \ln \phi_{s_l}(\omega) \quad (26)$$

Voor de kansfunctie van s_1 geldt, opgesplitst naar elektronen resp. gaten:

elektronen $l > i$:

$$P(s_l = 0) = 1 - \alpha(x') \Delta x'$$

$$P(s_l = s > 0) = \alpha(x') \Delta x' P(s, x') \quad (27)$$

gaten $l < i$:

$$P(s_l = 0) = 1 - \beta(x') \Delta x'$$

$$P(s_l = s > 0) = \beta(x') \Delta x' P(s, x')$$

$\alpha(x)$ is de kans per eenheid van lengte, dat een elektron een ioniserende botsing heeft op de positie x ; $\beta(x)$ is de overeenkomstige kans voor gaten. x' wordt aangenomen in het midden van interval l te liggen;

(27) geeft weer, dat daar de botsingen onafhankelijk verlopen, de kans op $s_1 = s > 0$ gelijk is aan de kans op een ionisatie in interval 1 maal de kans, dat het avalanche proces, wat daarop volgt, s paren tengevolge heeft, inclusief het in 1 ontstane paar. Het moge duidelijk zijn, dat $P(s, x')$ weer gelijk is aan de kans dat een op positie x' geïnjecteerd initieel paar s paren ten gevolge heeft, zodoende het recursieve karakter van het proces aangevende. Met de definitie van de karakteristieke functie vindt men uit (27):

elektronen:

$$\begin{aligned} \ln \phi_{sp}(\omega) &= \ln \sum_{s=0}^{\infty} P(s_1=s) e^{j\omega s} \\ &= \ln \left\{ 1 - \alpha(x') \Delta x' + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha(x') \Delta x' P(s, x') e^{j\omega s} \right\} \\ &= \ln \left\{ 1 - \alpha(x') \Delta x' + \alpha(x') \Delta x' \phi_s(\omega, x') \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

gaten :

$$\ln \phi_{sp}(\omega) = \ln \left\{ 1 - \beta(x') \Delta x' + \beta(x') \Delta x' \phi_s(\omega, x') \right\}$$

Voor $\Delta x'$ voldoende klein geldt met de benadering van de natuurlijke logaritmie:

elektronen:

$$\ln \phi_{sp}(\omega) = \alpha(x') (\phi_s(\omega, x') - 1) \Delta x'$$

gaten :

$$\ln \phi_{sp}(\omega) = \beta(x') (\phi_s(\omega, x') - 1) \Delta x'$$

(29)

Dit ingevuld in (26), met $\Delta x'$ infinitesimaal klein:

$$\ln \phi_s(\omega, x) = j\omega + \int_0^x \beta(x') (\phi_s(\omega, x') - 1) dx' + \int_x^W \alpha(x') (\phi_s(\omega, x') - 1) dx' \quad (30)$$

Dit is een integraal vergelijking, waaruit men kan trachten $\phi_s(\omega, x)$ op te lossen. Daartoe wordt (30) eerst gedifferentieerd:

$$\frac{1}{\phi_s(\omega, x)} \frac{d\phi_s(\omega, x)}{dx} = (\beta(x) - \alpha(x)) (\phi_s(\omega, x) - 1) \quad (31)$$

Om de oplossing van deze differentiaal vergelijking overzichtelijker te maken, wordt (31) geschreven als:

$$\frac{1}{y} y' = g(x) y - g(x) \quad (32)$$

met

$$y = \phi_s(\omega, x) \quad \text{en} \quad g(x) = \beta(x) - \alpha(x) \quad (33)$$

(32) stelt een differentiaalvergelijking van Bernouilli voor en kan worden geschreven als:

$$\frac{1}{y^2} y' + \frac{1}{y} g(x) = g(x) \quad (34)$$

of:

$$\left(\frac{1}{y}\right)' - \frac{1}{y} g(x) = -g(x) \quad (35)$$

Dit is een lineaire differentiaalvergelijking, waarvan de homogene vergelijking

$$\left(\frac{1}{y}\right)' - \frac{1}{y} g(x) = 0 \quad (36)$$

als oplossing heeft:

$$\left(\frac{1}{y}\right)_h = C e^{\int_0^x g(x') dx'} \quad (37)$$

De ondergrens van de integraal in de exponent is arbitrair en is hier gelijk aan nul gekozen omdat $g(x)$ nul is, voor $x < 0$.

Met een simpele inspectie vindt men een particuliere oplossing van 35:

$$\left(\frac{1}{y}\right)_p = 1 \quad (38)$$

Zodat de algemene oplossing is:

$$\frac{1}{y} = 1 + C e^{\int_0^x g(x') dx'} \quad (39)$$

Dan:

$$y = \frac{1}{1 + C e^{\int_0^x g(x') dx'}} \quad (40)$$

C kan worden uitgedrukt in een randvoorwaarde:

$$y(0) = \frac{1}{1 + C} \quad (41)$$

omgeschreven:

$$C = \frac{1}{y(0)} - 1 \quad (42)$$

Als in (40) substitutie 33 ongedaan wordt gemaakt levert dat op:

$$\phi_s(\omega, x) = \frac{1}{1 + C e^{\int_0^x (\beta(x') - \alpha(x')) dx'}} \quad (43)$$

met

$$C = \frac{1}{\phi_s(\omega, 0)} - 1 \quad (44)$$

(43) ingevuld in (30) levert op:

$$\begin{aligned} \ln \phi_s(\omega, x) = & j\omega + \\ & + \int_0^x \beta(x') \left(\frac{1}{1 + C e^{\int_0^{x'} (\beta(x'') - \alpha(x'')) dx''}} - 1 \right) dx' + \\ & + \int_x^W \alpha(x') \left(\frac{1}{1 + C e^{\int_0^{x'} (\beta(x'') - \alpha(x'')) dx''}} - 1 \right) dx'. \quad (45) \end{aligned}$$

Voor $x = 0$:

$$\begin{aligned} \ln \phi_s(\omega, 0) = & j\omega + \\ & + \int_0^W \alpha(x') \left(\frac{1}{1 + C e^{\int_0^{x'} (\beta(x'') - \alpha(x'')) dx''}} - 1 \right) dx' \quad (46) \end{aligned}$$

Met de aanname, dat overal geldt:

$$\beta(x) = k \alpha(x) \quad (47)$$

wordt (46):

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega + \int_0^W \alpha(x') \left(\frac{1}{1 + C e^{(k-1) \int_0^{x'} \alpha(x'') dx''}} - 1 \right) dx' \quad (48)$$

(48) kan worden herleid tot:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - \int_0^W \alpha(x') dx' + \int \frac{1}{1 + C e^{(k-1) \int_0^{x'} \alpha(x'') dx''}} d \left(\int_0^{x'} \alpha(x'') dx'' \right) \quad (49)$$

(hierin is in de laatste term de grens tijdelijk weggelaten).

Men kan substitueren:

$$\int_0^{x'} \alpha(x'') dx'' = z(x') \quad (50)$$

waardoor (49) kan worden herschreven:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - z(W) + \int \frac{1}{1 + C e^{(k-1)z}} dz \quad (51)$$

Een oplossing van de integraal wordt gevonden door te

schrijven:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - z(W) + \int \frac{e^{(1-k)z}}{e^{(1-k)z} + C} dz \quad (52)$$

dan:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - z(W) + \frac{1}{1-k} \int \frac{1}{e^{(1-k)z} + C} d e^{(1-k)z} \quad (53)$$

met als oplossing:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - z(W) + \frac{1}{1-k} \ln(e^{(1-k)z} + C) \quad (54)$$

De substitutie (50) ongedaan gemaakt:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - z(W) + \left[\frac{1}{1-k} \ln(e^{(1-k) \int_0^x \alpha(x') dx' + C} \right]_{x'=0}^W \quad (55)$$

Als men de grenzen invult en tegelijkertijd substitueert:

$$\int_0^W \alpha(x') dx' = \delta \quad (56)$$

dan is

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - \delta + \frac{1}{1-k} \ln \frac{e^{(1-k)\delta} + C}{1+C} \quad (57)$$

Met (44):

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega - \delta + \frac{1}{1-k} \ln \left(\phi_s(\omega, 0) (e^{(1-k)\delta} - 1) + 1 \right) \quad (58)$$

oftewel:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega + \frac{1}{1-k} \ln \left(\phi_s(\omega, 0) (1 - e^{(k-1)\delta}) + e^{(k-1)\delta} \right) \quad (59)$$

Men kan nog substitueren voor de constante:

$$e^{(k-1)\delta} = a \quad (60)$$

Dan is tenslotte:

$$\ln \phi_s(\omega, 0) = j\omega + \frac{1}{1-k} \ln \left(\phi_s(\omega, 0) (1-a) + a \right) \quad (61)$$

(61) is een impliciete formule voor de karakteristieke functie van het totaal aantal gat elektron paren, wat ontstaat door injectie van een elektron op $x = -0$. Als men aanneemt, dat slechts elektronen het avalanche gebied binnentreden, dan is $\phi_s(\omega, 0)$ de karakteristieke functie van de versterking, die ieder van die elektronen ondervindt; voorwaarde $x = 0$ kan dan vervallen:

$$\ln \phi_m(\omega) = j\omega + \frac{1}{1-k} \ln \left(\phi_m(\omega) (1-a) + a \right) \quad (62)$$

Hoewel deze vergelijking niet expliciet kan worden geschreven, kunnen, mede ter controle, wel enkele momenten worden afgeleid met het momenten theorema [13] blz 157.

Voor $\omega = 0$ vindt men in (62) het nulde moment:

$$\phi_m(0) = 1 \quad (63)$$

hetgeen voor een karakteristieke functie altijd moet gelden. Door (62) éénmaal te differentiëren, vindt men:

$$\frac{1}{\phi_m(\omega)} \phi_m'(\omega) = j + \frac{1}{1-k} \frac{(1-a)}{(1-a)\phi_m(\omega) + a} \phi_m'(\omega) \quad (64)$$

Voor $\omega = 0$ en met (63):

$$\phi_m'(0) = \frac{1-k}{a-k} j \quad (65)$$

en dit moet gelijk zijn aan j maal de gemiddelde versterking M , waardoor men a kan uitdrukken in M en k :

$$a = k + \frac{1-k}{M} \quad (66)$$

Om het tweede moment te vinden, kan men (64) nogmaals differentiëren:

$$\frac{-1}{\phi_m^2(\omega)} \left(\phi_m'(\omega) \right)^2 + \frac{1}{\phi_m(\omega)} \phi_m''(\omega) =$$

$$\frac{1}{1-k} \left(\frac{-(1-a)^2 (\phi_m'(\omega))^2}{((1-a)\phi_m(\omega) + a)^2} + \frac{(1-a)\phi_m''(\omega)}{(1-a)\phi_m(\omega) + a} \right) \quad (67)$$

Voor $\omega = 0$ en met de reeds gevonden resultaten:

$$\phi_m''(0) = M^3 \left(\frac{(1-k)^2}{1-k} - 1 \right) \quad (68)$$

Met (66):

$$\phi_m''(0) = -M^2 \left(2(1-k) + kM - \frac{1-k}{M} \right) \quad (69)$$

Hetgeen betekent voor de variantie m:

$$\overline{m^2} = M \left(2(1-k) + kM - \frac{1-k}{M} \right) \quad (70)$$

(70) komt overeen met de door McIntyre afgeleide betrekkingen [1].

Door Mazo en Salz [6] is bewezen, dat de impliciete formule (62) overeenkomt met de door McIntyre geponeerde vermenigvuldigingskans (20).

Uit de karakteristieke functie aan de uitgang van een "integrate and dump" filter:

$$\phi_v(\omega) = e^{\lambda T (\phi_m(\omega h) - 1)} \quad (13)$$

blijkt, dat men veel meer aan de karakteristieke functie van m heeft, dan aan de kansdichtheidsfunctie zelf.

Men kan namelijk de uitgangsspanning van het filter weer in een kansdichtheid geven door zijn karakteristieke functie te transformeren met behulp van discrete Fourier transformatie^{*}); men heeft dan van $\phi_m(\omega)$ een discreet aantal waarden nodig, die op equidistante waarden van

*) Men krijgt dan niet de echte kansdichtheid, maar een willekeurig groot aantal monsters daarvan.

dienen te worden berekend. Dit discreet aantal waarden kan worden verkregen door (62) numeriek op te lossen voor de genoemde waarden van ω . In vele gevallen kan het oplossen van een impliciete vergelijking tot problemen leiden, als men niet in staat is, een goede schatting van de oplossing te geven. Bij de onderhavige vergelijking is echter steeds de vorige oplossing een zeer goede schatting van de volgende, als men kleine stappen laat maken vanaf $\omega = 0$; bovendien is de exacte oplossing beschikbaar voor $\omega = 0$.

Voor het beoordelen van de meetresultaten is een Algol programma geschreven, dat de oplossingen van ϕ_m bepaalt en de transformatie van (13) uitvoert. Dit programma maakt gebruik van een standaardprocedure van de Burroughs B7700 van de Technische Hogeschool voor het oplossen van complexe functies. Ongeveer vier iteraties waren steeds voldoende om relatieve nauwkeurigheden van ca. 10^{-10} te bereiken; vermeld kan nog worden, dat alle voor (13) benodigde oplossingen zeer dicht bij één liggen, omdat de factor $\lambda T (\approx 162)$ ervoor zorgt, dat $|\phi_v|$ sterk afneemt zodra $|\phi_m|$ van één gaat afwijken. Om de versterkerruis te verantwoorden, wordt, vóór de transformatie, ϕ_v nog vermenigvuldigd met een Gaussische karakteristieke functie. De transformatie wordt tenslotte berekend met een standaard FFT procedure van de B7700.

2.4.3. Benaderingen van de kansdichtheid

De kansdichtheid aan de uitgang van het "integrate and dump" filter kan worden benaderd door functies die aanzienlijk eenvoudiger zijn, dan (22); er zullen twee benaderingen worden besproken.

De eerste is afkomstig van Webb, McIntyre en Conradi [7] en heeft de vorm van een scheve Gaussische kans-

dichtheid:

$$p(s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\left(1 + \frac{s-\bar{s}}{\lambda \sigma_s}\right)^{3/2}} e^{-\frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma_s^2 \left(1 + \frac{s-\bar{s}}{\lambda \sigma_s}\right)}} \quad (71)$$

Dit is dus de kansdichtheid op het aantal secundaire paren, waarin

$$\bar{s} = \bar{p} M \quad (72)$$

$$\sigma_s = \sqrt{F \bar{p} M} \quad (73)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{F \bar{p}}{F-1}} \quad (74)$$

en (75)

$$F = 2(1-k) + kM + \frac{1-k}{M}$$

(71) wordt in [7] niet afgeleid, maar geponeerd, en er is ook elders geen afleiding gevonden; omdat echter inmiddels technieken zijn beschreven om de exacte kansdichtheid te berekenen, kan men (71) op zijn nauwkeurigheid onderzoeken, hetgeen ook voor de tweede benadering geldt.

Deze tweede benadering komt tot stand, door aan te nemen, dat het aantal gat-elektron paren aan de uitgang van de APD Poisson verdeeld is, evenals aan de ingang. Aan de uitgang moet men echter een parameter kiezen zodanig, dat de standaarddeviatie voldoet aan (73). Om tegelijkertijd het gemiddelde op $\bar{p} M$ te laten vallen kan men een M' en een \bar{p}' invoeren die worden gedefinieerd volgens:

$$F \bar{p} M^2 = \bar{p}' M'^2 \quad (76)$$

en

$$\bar{p} M = \bar{p}' M' \quad (77)$$

Dit kan worden omgerekend naar:

$$M' = M F \quad (78)$$

$$\bar{p}' = \frac{\bar{p}}{F}$$

Men vergroot dus de vermenigvuldiging en verkleint het gemiddelde aantal primaire paren evenredig. De met \bar{p}' berekende Poisson verdeling wordt met M' lineair uitgebreid waardoor de kansfunctie van het aantal uitgangsparen wordt gevonden. Bij de berekening kan de complicatie optreden, dat men de Poisson kans wenst te berekenen voor niet gehele waarden van de variabele $p' = s/M'$. Dit probleem kan worden omzeild door de Poisson kansfunctie continu te maken:

$$p(p') = e^{-\bar{p}'} \frac{(\bar{p}')^p}{\Gamma(p'+1)} \quad (79)$$

welke nog wel genormaliseerd dient te worden op oppervlakte één.

In fig. 13 en fig. 14 zijn resp. de benadering van Webb, McIntyre en Conradi en de Poisson benadering vergeleken met de kansdichtheid, die berekend is uit de karakteristieke functie.

Van de benaderingen is duidelijk die van Webb, McIntyre en Conradi het beste; de Poisson benadering is echter ook redelijk goed. Aan het laatste kan nog de volgende theoretisch gerichtte beschouwing worden gekoppeld.

Voor een puur Poisson signaal heeft Bar David [8] een optimale lineaire detector geformuleerd; deze detector is uiteraard niet zonder meer optimaal aan de uitgang van de APD. Echter nu de kansdichtheidsfunctie na de APD nog goed met een Poisson functie kan worden benaderd zal het filter van Bar David ook in dit geval weinig van

fig. 13 theor. kansdichth.

— uit kar. functie

+ + W.M.C. ben.

$M=100$ $k=0.0254$ $\bar{p}=162$

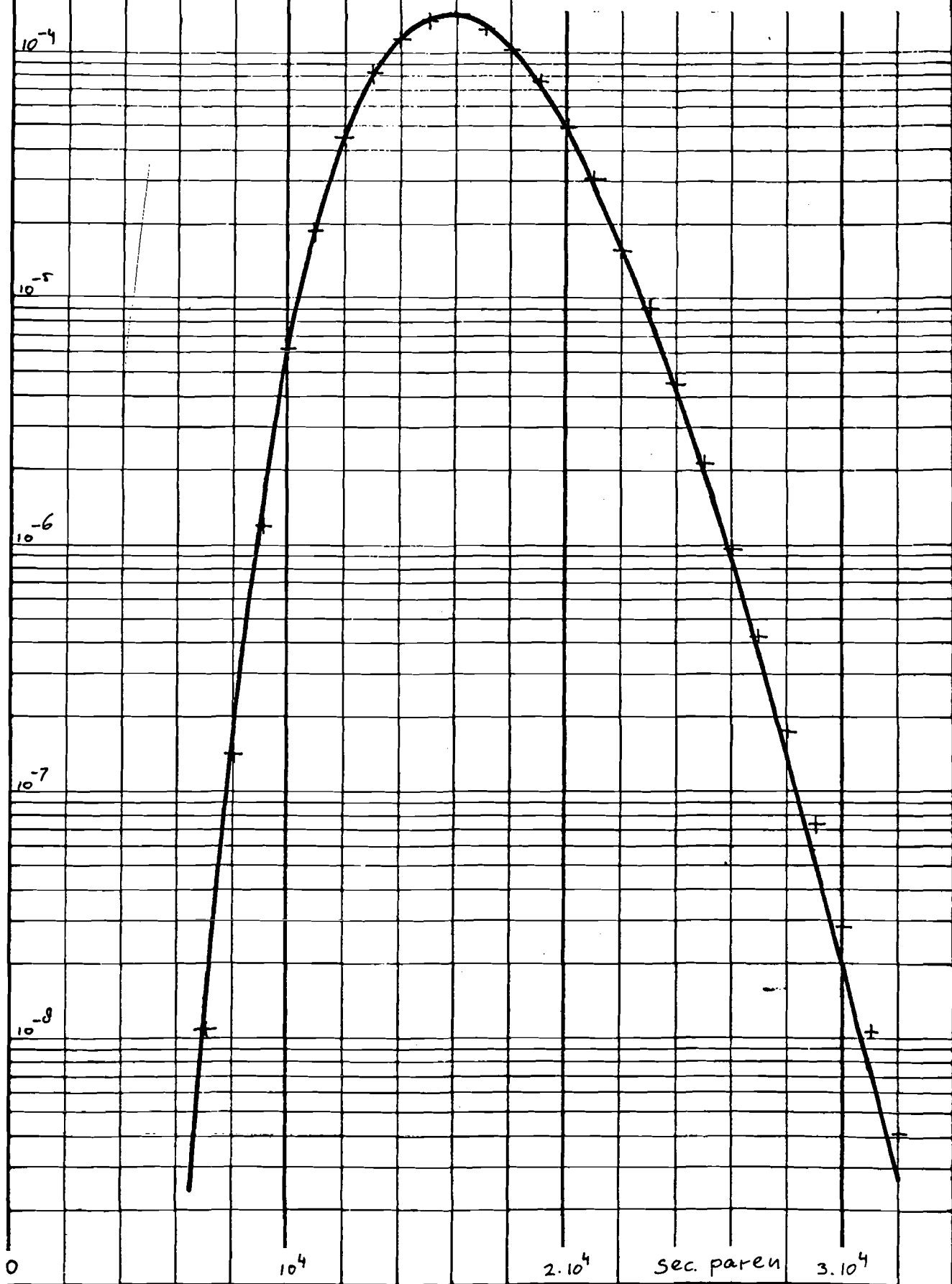
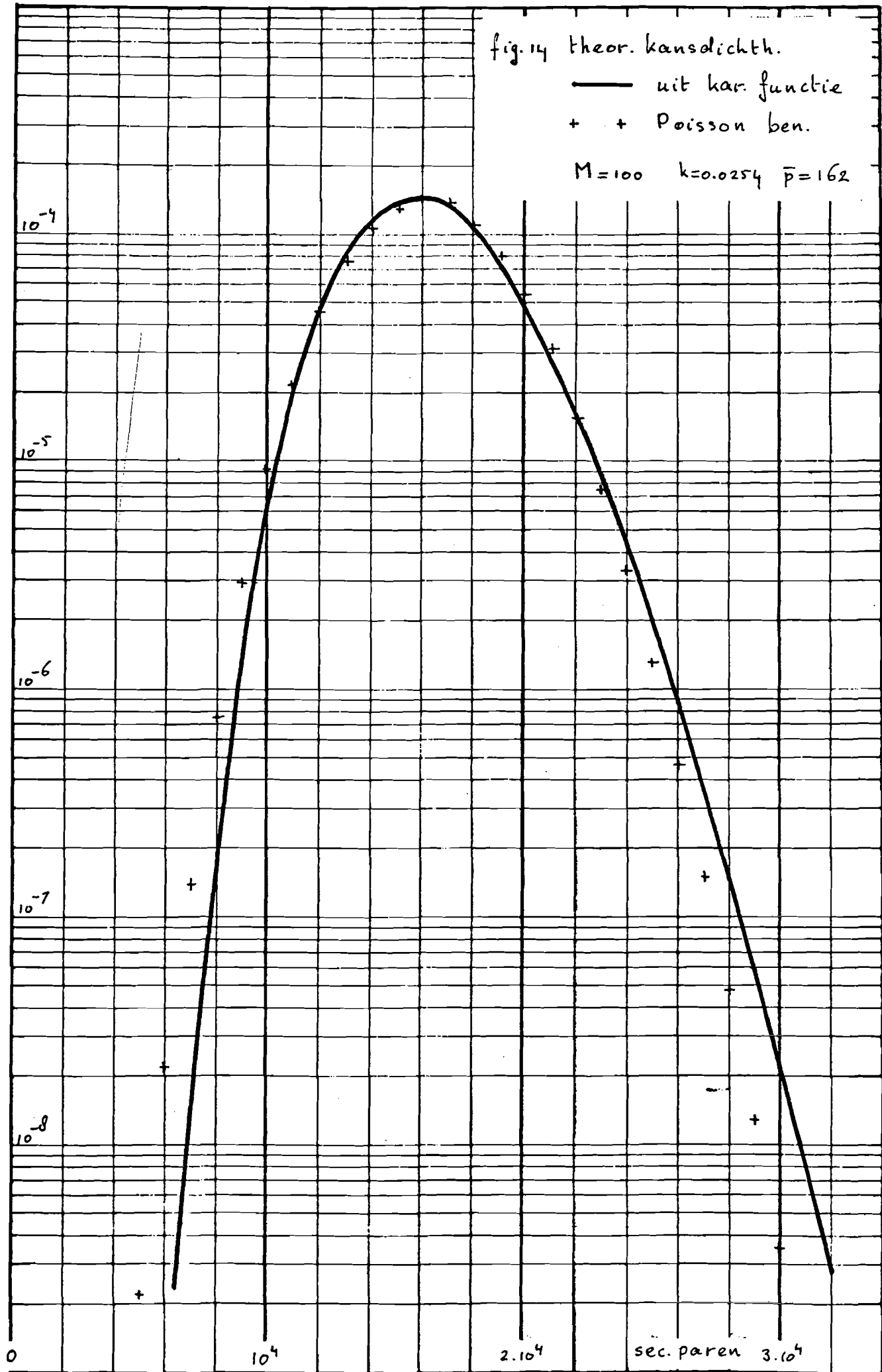


fig. 14 theor. kansdichth.

— uit kar. functie

+ + Poisson ben.

$$M=100 \quad k=0.0254 \quad \bar{p}=162$$



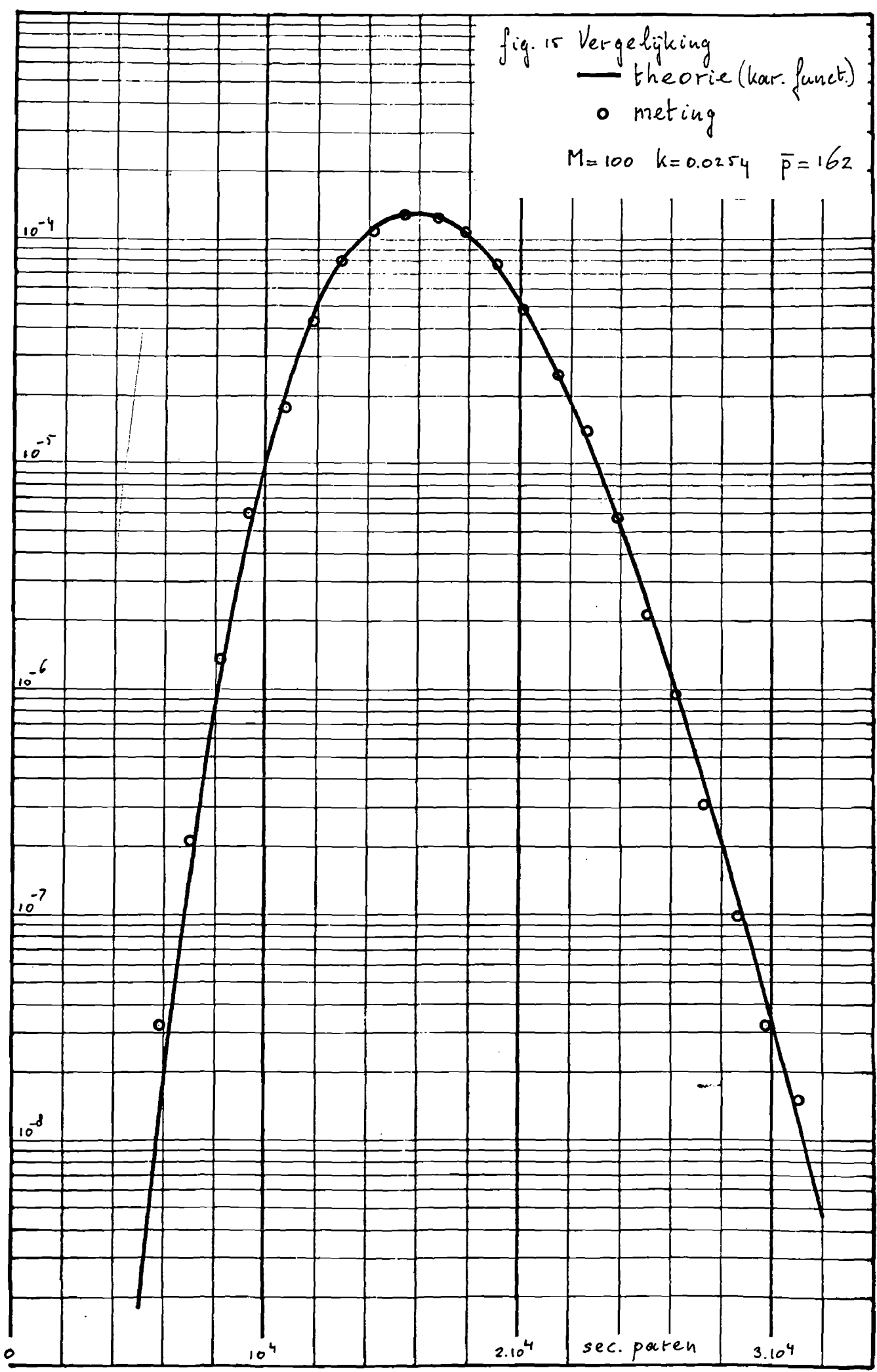
het optimum afwijken, de filter parameters behoeven echter aanpassing in verband met het kunstmatig verlaagde aantal primaire paren.

2.5. De vergelijking van de meting met de theorie

In fig. 15 is de kansfunctie uitgezet, die uit de karakteristieke functie is berekend, met de parameters die bij de meting zijn gebruikt. Bovendien zijn in dezelfde figuur de meetpunten getekend.

De resultaten zijn zodanig, dat de theorie vooralsnog als effectieve beschrijving van de APD statistiek mag worden beschouwd; een meer uitgebreide meting aan meer APD's en onder andere omstandigheden is echter wenselijk.

fig. 15 Vergelijking
— theorie (kar. funct.)
o meting
 $M=100$ $k=0.0254$ $\bar{p}=162$



3. DE FOUTENKANS VAN DIGITALE OPTISCHE SYSTEMEN

3.1. De berekeningsmethode

Gezien de mogelijkheden om de statistiek van het uitgangssignaal van de APD theoretisch te beschrijven, mag worden verwacht, dat de berekening van de foutenkans van systemen verder weinig problemen zal opleveren. Merkwaardig genoeg is deze conclusie niet in tot nu toe verschenen literatuur terug te vinden. Er bestaat een vrij groot aantal mogelijkheden om de foutenkans te berekenen dan wel te benaderen, maar kennelijk stuit elke mogelijkheid op één of meerdere bezwaren. Zonder volledig te zijn zullen een aantal mogelijkheden worden besproken.

3.1.1. De Gaussische benadering

Personick [9] heeft een berekeningsmethode aangegeven, die de foutenkans voorspelt uit een Gaussische benadering van de te conditionele kansdichtheid aan de uitgang van een filter. Hierbij wordt aangenomen, dat alle belendende bits een "worst case" situatie opleveren; die situatie is slechts op eenvoudige wijze in een bitpatroon te vertalen als er geen intersymbool interferentie is en daar wordt in [9] dan ook van uitgegaan. Dezelfde methode kan echter ook worden geperfectioneerd door de kansdichtheid voor een nul en een één te berekenen, middelend over alle combinaties van enige naastliggende bits; op deze manier kan men ook intersymboolinterferentie aan.

Een Gaussische kansdichtheid is een tekortschietend model tot aangetoond kan worden, dat de berekende resultaten voldoende nauwkeurig zijn, hetgeen de beschikbaarheid van "exacte" rekenmethode verlangt. Gezien het feit, dat zelfs een (geperfectioneerde) Gaussische benadering de beschikbaarheid van een reken-

machine vereist, zal men waarschijnlijk met evenveel moeite een nauwkeuriger methode kunnen gebruiken. Een punt, waarbij een Gaussische benadering nog wel enigszins vruchtbaar kan zijn, is bij de afleiding van een vuistregel voor het bepalen van een optimale APD versterking. Bij een Gaussische verdeling weet men namelijk zeker, dat de foutenkans geoptimaliseerd wordt door minimalisatie van ruis-sigitaal vermogensverhouding.

Men kan bijvoorbeeld minimaliseren, de verhouding van het gemiddelde ruisvermogen en het signaalvermogen aan de uitgang van de APD:

$$\frac{R}{S} = \frac{\frac{1}{2}(I_{p_0}(2+kM)M^2 + I_{eq})2qB + \frac{1}{2}(I_{p_1}(2+kM)M^2 + I_{eq})2qB}{(I_{p_1} - I_{p_0})^2 M^2} \quad (80)$$

- met I_p = primaire fotostroom (voor "0" en "1")
 I_{eq} = equivalente ruis gelijkstroombron van de versterker
 B = ruis bandbreedte van de versterker

Als men aanneemt, dat de primaire fotostroom voor een "0" een fractie ϵ bedraagt van die van een "1", dan

$$\frac{R}{S} = C \left((1 + \epsilon)(2+kM) + \frac{2}{M^2} \frac{I_{eq}}{I_{p_1}} \right) \quad (81)$$

waarin C niet van M afhangt.

Uit (81) vindt men door differentiëren een optimale M:

$$M_{opt} = \sqrt{\frac{4}{k(1+\epsilon)} \frac{I_{eq}}{I_{p_1}}} \quad (82)$$

Personick [9] heeft ook een dergelijk optimum afgeleid, maar gaat uit van een onjuiste formule van de variantie

van de versterking:

$$\overline{m^2} = M^2 M^x \quad (83)$$

Optima gevonden met (82) zullen naderhand worden vergeleken met optima gevonden uit foutenkansberekeningen.

3.1.2. Statistische simulatiemethode

Statistische simulatie is een in de netwerkanalyse veel toegepaste methode om de kansdichtheid van een grootheid globaal te bepalen, en blijkt qua concept vrij goed aan te sluiten bij het beslissingsproces van digitale transmissie. De methode kan worden gebruikt, als een uitgangsgrootheid kan worden geschreven als de (gewogen) som van een aantal ingangsgrootheden, terwijl van die ingangsgrootheden de kansdichtheden bekend zijn. Men neemt dan "random" zodanige combinaties van de ingangsgrootheden, dat de betreffende kansdichtheden worden gerealiseerd, en berekent bij elke combinatie de uitgangsgrootheid. Op die manier kan men van de uitgangsgrootheid een histogram samenstellen en/of een overschrijdingskans berekenen. De toepassing op optische communicatie berust op het benaderen van de convolutieintegraal, die het uitgangssignaal van het filter beschrijft, met een eindige sommatie:

$$v(t_j) = \sum_i h(t_i) s_{\Delta}(t_j - t_i) \quad (84)$$

$s_{\Delta}(t_j - t_i)$ is het aantal secundaire paren, dat in interval $t_j - t_i$ ter grootte Δt het filter aanstoot. Alle s_{Δ} zijn stochastische variabelen, waarvan de kans op s exemplaren door (22) en (20) wordt gegeven.

Een complicatie bij de toepassing op foutkansberekeningen is, dat men overschrijdingskansen in de orde van 10^{-9} moet kunnen berekenen; om op een behoorlijke nauwkeurigheid te kunnen rekenen zal men in het simulatieproces meer dan honderd overschrijdingen moeten signaleren, zodat men minstens 10^{11} combinaties van hetingangssignaal zal moeten onderzoeken. Een methode om dit enorme aantal enigszins te beperken wordt beschreven door Balaban [10]; hij gebruikt voor de kansdichtheden aan de ingang echter benadering (71), waarschijnlijk om de rekentijd te verminderen.

3.1.3. De methode gebaseerd op de integratieformule van Gauss

Men kan de conditionele foutenkans (bijv. voor een nul) schrijven als:

$$P(e | 0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z_0}{\sigma \sqrt{2}} \right) \quad (85)$$

is de standaarddeviatie van de Gaussische component van de ruis, z_0 is de realisatie van een stochastische variabele, waarin alle overige ruis, de intersymboolinterferentie en de (vaste) beslissingsdrempel vertegenwoordigd zijn.

De gemiddelde foutenkans voor een nul is dan:

$$P(e | 0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z_0) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z_0}{\sigma \sqrt{2}} \right) dz_0 \quad (86)$$

Dit kan worden geschreven als:

$$P(e | 0) = \int \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z_0}{\sigma \sqrt{2}} \right) dF(z_0) \quad (87)$$

$F(z_0)$ is nu de verdelingsfunctie van z_0 .

Deze integraal blijkt numeriek berekend te kunnen worden met de integratieformule van Gauss (Gaussian Quadrature Rule) [11]. De bij de berekening benodigde steunpunten kunnen worden ontleend aan de momenten van z_0 . De invloed van het bitpatroon op de ruis aan de uitgang van de fotodiode wordt in [11] doorberekend in twee gevallen:

"worst case": alle overige bits "1"

"best case" : alle overige bits "0".

De intersymboolinterferentie wordt echter wel volledig verantwoord.

De methode heeft een nauwkeurigheid, die toeneemt met het aantal steunpunten cq. het aantal momenten, wat men meeneemt; het rekenwerk neemt daarmee echter ook sterk toe.

3.1.4. Discrete Fourier transformatiemethode

Volgens de definitie is de karakteristieke functie van een stochastische variabele de Fourier getransformeerde van de kansdichtheidsfunctie

$$\phi(\omega) = E(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{j\omega x} dx \quad (88)$$

en visa versa. Benaderingen van de kansdichtheidsfunctie uit de karakteristieke functie kan men verkrijgen met behulp van discrete Fourier transformatie. Procedures voor efficiënte berekening van deze transformatie zijn op veel wetenschappelijke rekenmachines beschikbaar onder de naam "fast Fourier transform" (fft).

De toepassing van de transformatie kan worden toegelicht aan de hand van (84). $V(t_j)$ is in (84) de som van een groot aantal onderling onafhankelijke stochastische

variabelen. Het convolutie theorema [13] blz. 159 zegt, dat de karakteristieke functie van $V(t_j)$ kan worden gevonden door het produkt van de karakteristieke functies $s_{\Delta}(t_i - t_j)$ te vormen. De fast Fourier transform zou kunnen worden gebruikt om alle s_{Δ} te transformeren en om de kansdichtheid van v te berekenen uit zijn karakteristieke functie.

In de literatuur (bijv. [10]) wordt de transformatiemethode meestal verworpen omdat de som van een groot aantal getallen met modulus dicht bij één kans van bijv. 10^{-9} moet opleveren; iets wat vrij grote relatieve fouten oplevert. Deze fouten zijn gekoppeld met de machinenauwkeurigheid en het aantal significante cijfers. In de praktijk is echter gebleken, dat bij een machine nauwkeurigheid van 10^{-11} foutenkansen van 10^{-9} met goede nauwkeurigheid berekend kunnen worden. Vergroten van de nauwkeurigheid is altijd nog mogelijk, door met dubbele precisie te gaan werken; de daarvoor benodigde f.f.t. procedures zijn echter meestal niet standaard beschikbaar.

De hier beschreven methode lijkt voldoende nauwkeurigheid aan een vrij eenvoudige implementatie te koppelen en is daarom gekozen als basis voor de berekeningen.

3.2. Afleiding en uitwerking van de berekeningsmethode

Het blijkt niet noodzakelijk te zijn de kansdichtheden s_{Δ} te berekenen en te transformeren; men kan de karakteristieke functies van s_{Δ} direct berekenen. De wiskundige basis hiervan zal in 3.2.1. worden gegeven; de benodigde programmatuur wordt in 3.2.2. uitgewerkt. Deze berekening wordt aangeduid met "exacte" methode in tegenstelling tot een "benaderende" methode, die in 3.2.4. aan de orde komt.

3.2.1. De karakteristieke functie aan de uitgang van een filter

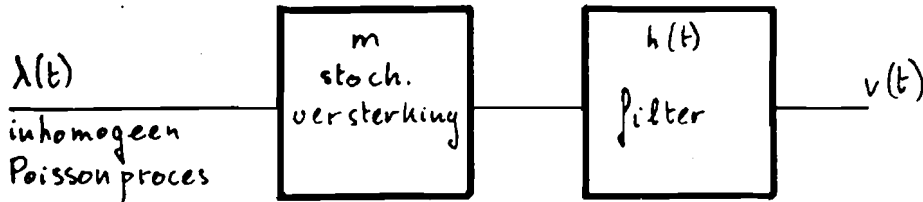


fig. 16. Het model van APD en filter.

Voor de berekening van de karakteristieke functie $\Phi_V(\omega, t)$ wordt de tijd t verdeeld in gelijke intervallen ter grootte Δt .

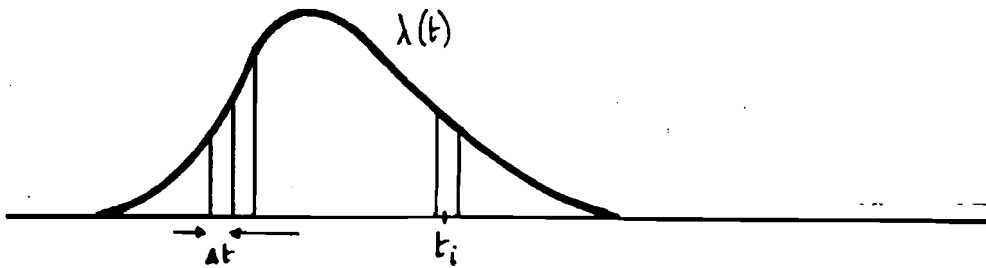


fig. 17. $\lambda(t)$ opgesplitst in intervallen.

Als p_i het aantal primaire elektronen is, dat in interval i het avalanche gebied binnenkomt, dan geldt, als Δt voldoende klein is:

$$\bar{p}_i \approx \lambda(t_i) \Delta t \tag{89}$$

en voor de kans op p_i paren:

$$P(p_i) = e^{-\lambda(t_i)\Delta t} \frac{(\lambda(t_i)\Delta t)^{p_i}}{p_i!} \quad (90)$$

Het aantal secundaire paren s_i in interval i voldoet dan aan de kans:

$$P(s_i) = \sum_{p_i=0}^{\infty} P(p_i) P(s_i | p_i) \quad (91)$$

In de conditionele kans $P(s_i | p_i)$ is s_i steeds het totaal aantal secundaire paren, wat ontstaat door onafhankelijk verlopende vermenigvuldigingsprocessen. Men kan daardoor schrijven op grond van het convolutie-theorema [13] blz. 159 .

$$P(s_i) = \sum_{p_i=0}^{\infty} P(p_i) \left[P_1(x) * P_2(x) * \dots * P_{p_i}(x) \right]_{x=s_i} \quad (92)$$

waarin:

$$P_1(x) = P_2(x) = \dots = P_{p_i}(x) = P_m(x)$$

de kans, dat een primair paar x secundaire ten gevolge heeft. In (92) is de convolutie niet op een integraal gebaseerd, maar, in verband met het discrete karakter, op een oneindige som.

De Fourier getransformeerde van (92) is de karakteristieke functie van s_i :

$$\phi_{s_i}(\omega) = \sum_{p_i=0}^{\infty} P(p_i) \left(\phi_m(\omega) \right)^{p_i} \quad (93)$$

Voor een APD is ϕ_m in 2.4.2. afgeleid (62).
Men kan (93) schrijven als:

$$\phi_{S_i}(\omega) = \sum_{p_i=0}^{\infty} P(p_i) e^{j p_i (-j \psi_m(\omega))} \quad (94)$$

Met:

$$\psi_m(\omega) = \ln \phi_m(\omega) \quad (95)$$

(94) kan worden gezien als een karakteristieke functie met als variabele:

$$-j \psi_m(\omega)$$

Dus:

$$\phi_{S_i}(\omega) = \phi_{p_i}(-j \psi_m(\omega)) \quad (96)$$

Een Poisson verdeling heeft als karakteristieke functie:

$$\phi_k(\omega) = e^{\bar{k}} (e^{j\omega} - 1) \quad (97)$$

zodat geldt:

$$\begin{aligned} \phi_{S_i}(\omega) &= e^{\lambda(t_i) \Delta t} (e^{\psi_m(\omega)} - 1) \\ &= e^{\lambda(t_i) \Delta t} (\phi_m(\omega) - 1) \end{aligned} \quad (98)$$

Het uitgangssignaal van het filter kan bij benadering worden geschreven als:

$$v(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v_i(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i h(t-t_i) \quad (99)$$

$v_i(t)$ is die component van $v(t)$, die door de secundaire elektronen in interval i wordt veroorzaakt.

ϕ_{s_i} is gegeven door (98).

Uit een regel betreffende Fourier transformaties kan worden afgeleid [13] blz. 153, 154, dat als bij $p(x)$ $\phi_x(\omega)$ hoort, dat dan bij $p(ax)$ karakteristieke functie $\phi(a\omega)$ hoort; dit toegepast geeft:

$$\begin{aligned} \phi_{v_i}(\omega, t) &= \phi_{s_i}(\omega h(t-t_i)) \\ &= e^{\lambda(t_i)\Delta t \{ \phi_m(\omega h(t-t_i)) - 1 \}} \end{aligned} \quad (100)$$

en

$$\begin{aligned} \psi_{v_i}(\omega, t) &= \ln \phi_{v_i}(\omega, t) \\ &= \lambda(t_i)\Delta t \{ \phi_m(\omega h(t-t_i)) - 1 \} \end{aligned} \quad (101)$$

(99) stelt de som voor van een aantal onafhankelijke stochastische variabelen; men kan daarop het convolutie theorema toepassen [13] blz. 159, met (101):

$$\psi_v(\omega, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_{v_i}(\omega, t) \quad (102)$$

en:

$$\Psi_V(\omega, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\lambda(t_i) \{ \phi_m(\omega h(t-t_i)) - 1 \} \Delta t \right) \quad (103)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ geeft:

$$\Psi_V(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \{ \phi_m(\omega h(t-\tau)) - 1 \} d\tau \quad (104)$$

en tenslotte:

$$\phi_V(\omega, t) = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \{ \phi_m(\omega h(t-\tau)) - 1 \} d\tau} \quad (105)$$

hetgeen de gezochte karakteristieke functie is.

Uit (105) kan nog worden afgeleid:

$$\frac{d\phi_V(\omega, t)}{d\omega} = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \{ \phi_m(\omega h(t-\tau)) - 1 \} d\tau} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \phi_m'(\omega h(t-\tau)) h(t-\tau) d\tau \quad (106)$$

en

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_V(\omega, t)}{d\omega^2} = & e^{-\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \{ \phi_m(\omega h(t-\tau)) - 1 \} d\tau} \cdot \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \phi_m''(\omega h(t-\tau)) h^2(t-\tau) d\tau + \\ & + \frac{d\phi_V(\omega, t)}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \phi_m'(\omega h(t-\tau)) h(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (107)$$

Op grond van het momenten theorema [13] blz. 157 vindt men uit (106) en (107) voor $\omega = 0$ respectievelijk:

$$\bar{v}(t) = M \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^2(t) = & \bar{m}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) h^2(t-\tau) d\tau + \\ & + \left\{ M \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) h(t-\tau) d\tau \right\}^2 \end{aligned} \quad (109)$$

Voor de variantie van $v(t)$ vindt men dan:

$$\bar{v}^2(t) - \bar{v}^2(t) = \bar{m}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) h^2(t-\tau) d\tau \quad (110)$$

(110) is in overeenstemming met de formules van McIntyre voor de spectrale dichtheid van het ruisvermogen aan de uitgang van de APD bij constante belichting [1]. Ook blijkt hieruit, dat de variantie van het uitgangssignaal van het filter evenredig te zijn met het tweede moment van de APD versterking, zoals reeds eerder is vermeld.

3.2.2. De opzet van de berekening

Met (105) is dus een formule verkregen voor de karakteristieke functie van het gefilterde APD signaal; bij een digitaal transmissiesysteem kan men voor $\lambda(t)$ schrijven:

$$\lambda(t) = \sum a_n \lambda_1(t-nT) + \lambda_0 \quad (111)$$

$$a_n \in \{0, 1\}$$

$\lambda_1(t)$, het ingangssignaal voor een enkele "1" zal zich hierbij over een beperkt aantal bitintervallen ter grootte T uitstrekken, zoals reeds in de inleiding is gesteld. In vrijwel alle systemen, zal dan ook de bijbehorende impulsresponse van het filter $h(t)$ een begrensd karakter hebben. Men mag bovendien aannemen, dat $\lambda(t)$ en $h(t)$ een zodanige vorm hebben, dat men ze mag opdelen in een eindig aantal intervallen, waarbinnen ze constant mogen worden verondersteld. In een computerberekening kan het benodigde aantal intervallen desnoods empirisch worden bepaald. Men kan dan voor (105) schrijven:

$$\phi_v(\omega, t_b) = e^{\sum_j \lambda(t_j) \Delta t \{ \phi_m(\omega h(t_b - t_j)) - 1 \}} \quad (112)$$

t_b geeft hierin aan, dat men de karakteristieke functie slechts op het beslissingstijdstip behoeft te weten.

In (112) loopt j over de intervallen ter grootte Δt waarin $h(t_b - t_j)$ significant van nul verschilt.

In verband met de toe te passen discrete Fourier-transformatie is men niet geïnteresseerd in de waarde van de karakteristieke functie voor elke ω , doch slechts in de waarde van een aantal equidistante punten van ω :

$$\phi_v(k \Delta \omega, t_b) = e^{\sum_j \lambda(t_j) \{ \phi_m(k \Delta \omega h(t_b - t_j)) - 1 \} \Delta t} \quad (113)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Uit (113) blijkt, dat men voor iedere j de karakteristieke functie $\phi_m(\omega')$ op dient te lossen voor

$$\omega' = k \Delta \omega h(t_b - t_j), \quad k = 0, 1, \dots$$

In 2.4.2. is al gesproken over de numerieke oplossing van de impliciete vergelijking van ϕ_m ; omdat daar het doel was vergelijken van de kansdichtheid met meetresultaten, was een standaardprocedure voor het oplossen van complexe functies voldoende nauwkeurig. Voor het berekenen van foutkansen dient de nauwkeurigheid echter veel beter te zijn; gebleken is, dat de eerder gebruikte standaardprocedure bij grote nauwkeurigheidseis intern door nul trachtte te delen bij het berekenen van de oplossing. Er is daarom een geheel andere oplossingsmethode uitgewerkt. De karakteristieke functie van de versterking (62) kan daartoe worden geschreven als:

$$F(\phi_m) = \ln \phi_m(\omega) - \frac{1}{1-k} \ln((1-a)\phi_m + a) - j\omega \quad (114)$$

waarvan nulpunten moeten worden bepaald.

Met ϕ_m geschreven als:

$$\phi_m = \rho e^{j\varphi} \quad (115)$$

kan men (114) splitsen in een reëel en een imaginair deel:

$$F_r(\rho, \varphi) = \ln \rho - \frac{1}{2(1-k)} \ln \left\{ ((1-a)\rho \cos \varphi + a)^2 + ((1-a)\rho \sin \varphi)^2 \right\} \quad (116)$$

$$F_i(\rho, \varphi) = \varphi - \frac{1}{1-k} \ln \arctan \frac{(1-a)\rho \sin \varphi}{(1-a)\rho \cos \varphi + a} - \omega \quad (117)$$

Er is een procedure geschreven, die het reële stelsel (116), (117) oplost met behulp van de iteratieve methode van Newton-Raphson voor het oplossen van simultane niet-lineaire vergelijkingen [12] blz. 319-320 . Ondanks het feit, dat de procedure in "double precision" werkt, zijn vier iteraties altijd voldoende geweest om een relatieve nauwkeurigheid van 10^{-15} te bereiken. Een grotere nauwkeurigheid heeft geen zin, omdat alle andere berekeningen in "single precision" zijn uitgevoerd.

De met deze procedure gevonden oplossingen van kunnen in (113) worden ingevuld waardoor alle benodigde waarden van ϕ_v kunnen worden berekend. Deze moet echter nog met een Gaussische karakteristieke functie worden vermenigvuldigd om de versterkerruis te verantwoorden. Doordat steeds $h(t)$ op een oppervlakte één is genormeerd, kan de standaarddeviatie van de versterkerruis in een aantal secundaire elektronen worden gespecificeerd; hiermee wordt dan wel de fout gemaakt, dat bij een gewijzigde vorm van $h(t)$, de versterkerruis niet wordt gewijzigd. Een schatting van de versterkerruis kan in iedere situatie worden meegegeven; deze enigszins onjuiste oplossing is gekozen, omdat bij een meer exacte oplossing de spectrale verdeling van de versterkerruis bekend moet zijn. Bovendien is bij gebruik van een APD, de fout ten gevolge van een mis-schatting niet extreem groot.

Tot zover is de karakteristieke functie gevonden bij een bepaalde $\lambda(t)$ en $h(t)$, die zich eventueel uitstrekken over een aantal bitintervallen; de kansdichtheidsfunctie kan vervolgens met de f.f.t.-worden berekend. Deze kansdichtheidsfunctie wordt voor twee bitpatronen berekend; een één resp. nul in het interval waar de beslissing wordt genomen en een vast patroon in de naastliggende bitintervallen.

Om direct een schatting van de foutenkans te kunnen maken, zijn de conditionele kansfuncties discreet

berekend, zodanig, dat ze tot één sommeren.

Een voorbeeld van de berekende functies is in fig. 18 gegeven.

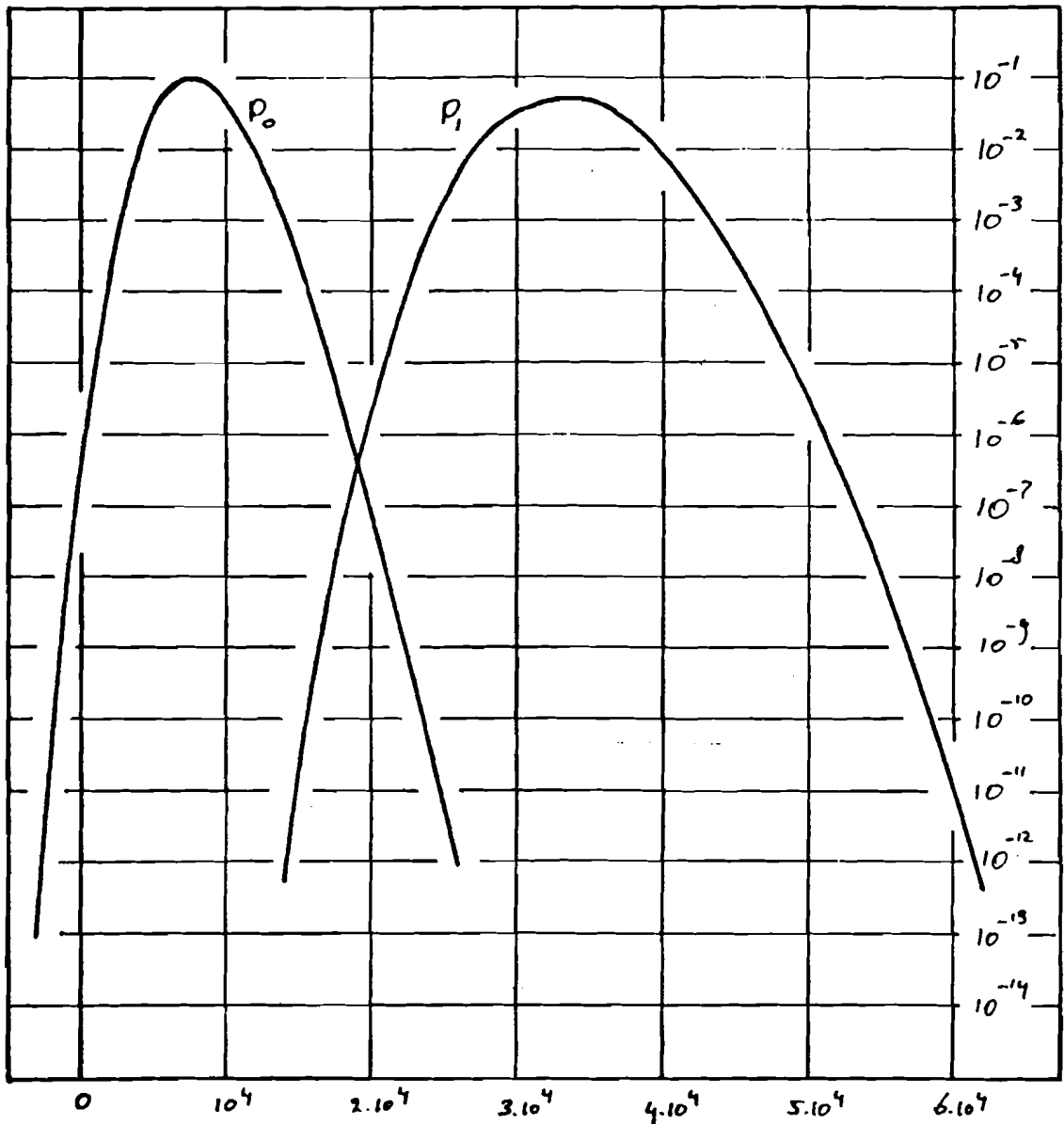


Fig. 18. Een voorbeeld van een berekende conditionele kans.

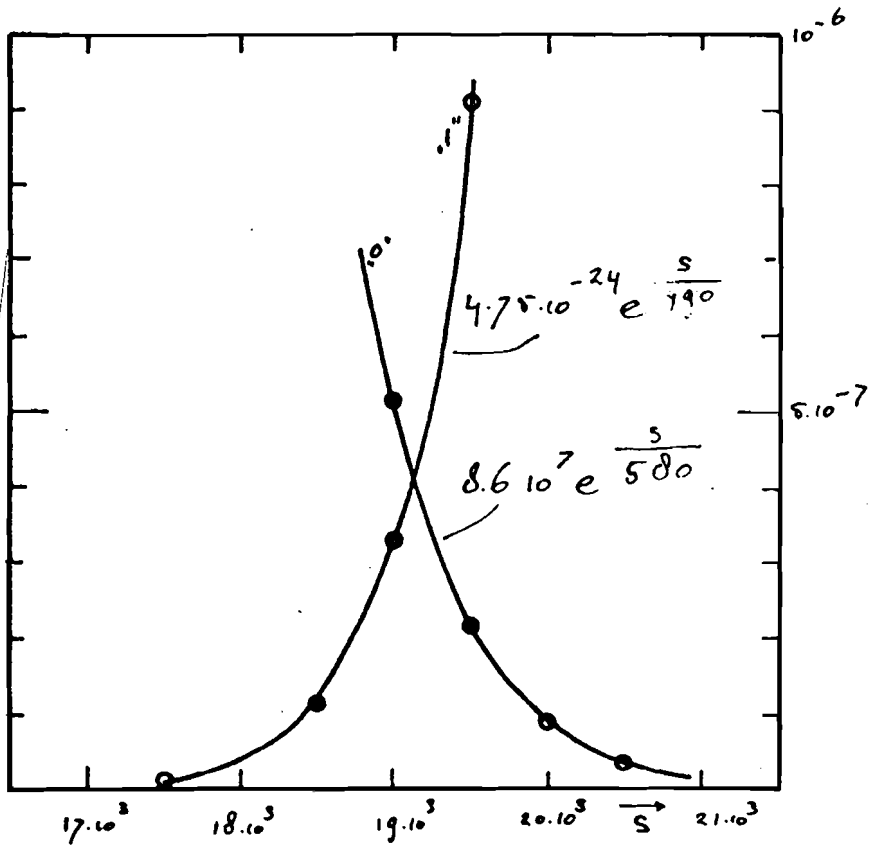
Dit voorbeeld betreft een 41.242 Mb/s systeem, wat naderhand nog uitgebreider aan de orde zal komen; vermeld kan worden, dat in dit en de meeste andere gevallen de resultaten niet meer significant veranderden, als per bitperiode 7 intervallen werden genomen in formule (113).

Voor de f.f.t. bleken 128 intervallen voldoende te zijn; dit vrij lage aantal kan mogelijk worden verklaard uit het feit, dat kansdichtheden zowel als karakteristieke functies vrij "gladde" functies zijn, die zich niet periodiek voortzetten.

Uit de kansfuncties wordt door het programma de optimale drempel en de foutenkans berekend, door rond het punt, waar ze elkaar "kruisen" ze te benaderen door een exponentiële functie, die exact voldoet aan twee punten dichtbij het kruispunt. Uit fig. 19, welke een uitvergroting van het kruispunt van fig. 18 is, blijkt, dat met een dergelijke benadering weinig fouten gemaakt kunnen worden.

Van de benaderingen wordt het snijpunt bepaald: de optimale drempel; de fractie van het oppervlak voorbij de drempel kan voor beide functies ook eenvoudig uit de exponentiële benaderingen worden gevonden.

De foutenkans is steeds berekend onder de condities, dat beide binaire symbolen in het interval waar de beslissing wordt genomen, even waarschijnlijk zijn.



o berekende punten

• " " , waarop de exponentiële benadering is gebaseerd.

berekende drempel: $s = 19118$

" foutkans: $4.5 \cdot 10^{-7}$

Fig. 19. De gebruikte benadering.

3.2.3. De berekening van $\lambda(t)$ en $h(t)$

Om een aantal praktische situaties in de theorie te kunnen inpassen, zijn een paar programma's geschreven die $\lambda(t)$ en $h(t)$ kunnen berekenen.

$\lambda(t)$ kan bijv. worden berekend, in de situatie, dat de impuls response en de ingangspuls bekend zijn; de berekening komt tot stand door convolutie.

Een tweede programma berekent $h(t)$ in de situatie, dat men een bepaald spectrum wenst, bijvoorbeeld een raised cosine spectrum; het programma gaat uit van een $\lambda(t)$ die direct of door het eerste programma wordt gegeven.

In beide programma's komt de berekening tot stand met behulp van de fast Fourier transform, waardoor de resultaten in tijd discrete vorm beschikbaar komen.

3.2.4. Een benaderende berekeningsmethode

De berekeningsmethode gebaseerd op formule (113) levert in veel gevallen een dusdanig lange rekentijd op, dat het wenselijk wordt een snellere methode ter beschikking te hebben. Bijvoorbeeld kost een berekening met zeven intervallen per bitperiode, vier bitintervallen en 128 stappen in de discrete Fourier transformatie een rekentijd op van ca. één minuut; in dit geval moet de karakteristieke vergelijking ruim zeventuizend maal worden opgelost, zodat mag worden aangenomen, dat daardoor de rekentijd wordt bepaald.

In 2.4.3. zijn benaderingen beschreven van de kansdichtheid aan de uitgang van de APD, die eigenlijk alleen van toepassing zijn op het signaal aan de uitgang van een "integrate and dump" filter. Er zijn echter met behulp van één van deze benaderingen (de formule van Webb, McIntyre en Conradi (71) berekeningen uitgevoerd, waarbij de resultaten steeds gecontroleerd konden

worden met exacte berekeningen. De in (71) benodigde gemiddelde waarde en variantie zijn berekend met (108) en (110), waarbij de integratie evenals (113) berekend is in intervallen.

De zo gevonden kansdichtheden worden geconvolveerd met een Gaussische dichtheid. De foutenkans wordt weer op dezelfde manier berekend, als in 3.2.2. is beschreven.

Door steekproefsgewijze vergelijking met de "exacte" methode is gebleken, dat de voorspelde foutenkans en optimale drempel steeds goed overeenkwamen, nadat in formule (71) de "scheefheidsparameter" λ een factor 1,5 was vergroot t.o.v. (74). De rekentijden bleken met de benadering ca. een factor 50 à 100 lager te zijn, dan met de exacte methode. Waar rekentijd geen probleem is, is natuurlijk de exacte methode te prefereren, maar in de te vermelden resultaten is steeds de benadering gebruikt.

De sterk verbeterde rekentijd is benut door de foutenkans te berekenen middellend over alle combinaties van een aantal naburige bits. Bovendien is een voorziening ingebouwd om deze foutenkans te berekenen voor een aantal waarden van de APD versterking, zodat een optimum kan worden bepaald.

3.3. Berekeningen aan systemen

3.3.1. "Raised cosine" systeem

Berekeningen zijn uitgevoerd aan een 41.242 Mb/s transmissiesysteem met een lijnsnelheid van 41.242 Mbit/s deze snelheid ontstaat als men een systeem voor 34 Mb transmissie uitrust met een 5B/6B code omzetter. Van een dergelijk systeem is bij Philips Natuurkundig Laboratorium (Projecten Centrum Geldrop) een proefopstelling beschikbaar geweest, waar ten behoeve van dit afstudeerwerk enige metingen verricht konden worden,

terwijl meetresultaten van de foutenkans als functie van het optische vermogen beschikbaar waren. Het systeem is uitgerust met een laserdiode als bron, die echter op een relatief laag uitgangsvermogen is ingesteld, hetgeen twee gevolgen heeft. Ten eerste is de "extinction ratio" (de vermogensverhouding van een "0" ten opzichte van een "1") relatief laag: 0.237; ten tweede is de spectrale breedte aanzienlijk (fig. 20), zodat waarschijnlijk enige kleurdispersie optreedt.

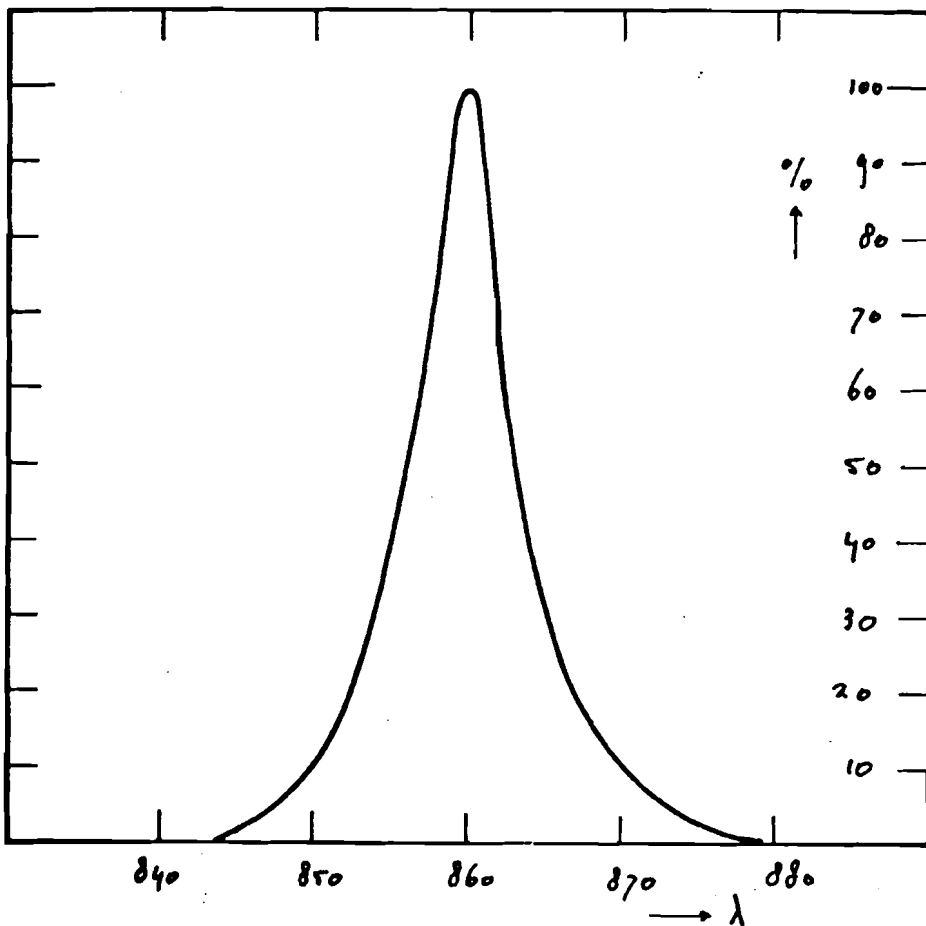


Fig. 20. De spectrale verdeling van het zendvermogen.

In de opstelling wordt gebruik gemaakt van een kabel,

waarvan de vezels zodanig zijn gekoppeld, dat van zender naar ontvanger een traject van 7.6 km ontstaat. De kabel bevat gegradeerde index vezel; aangenomen wordt, dat de kleurdispersie 60 ps/km/nm spectrale breedte van bron bedraagt. Met het spectrum van de bron is de dispersie ca. 3.2 ns; mode dispersie wordt dan verder verwaarloosd. De ontvanger is uitgerust met een APD, waarvan de parameters door meting zijn vastgesteld: kwantumrendement 52%, k-waarde 0,0208. Met een basisstroommeting van de eerste trap van de ontvanger is de versterkerruis geschat op een standaarddeviatie van 800 secundaire gat elektron paren in de bitperiode. De ontvanger is uitgerust met een vierde orde filter, wat ontworpen is om uitgaande van de ontvangen pulsform een "full raised cosine" spectrum op te leveren voor de beslissingsschakeling.

De gegevens van de proefopstelling zijn zo goed mogelijk in de berekening verwerkt. Voor $\lambda(t)$ en $h(t)$ zijn echter berekende functies genomen; $\lambda(t)$ is opgebouwd uit elementaire responsies op een geïsoleerde "1":

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \sum b_n \lambda_1(t - nT)$$

b_n is het symbool in bitinterval n , T is de bit periode. $\lambda_1(t)$ wordt gevonden door de convolutie van een rechthoek puls met de impulsresponse van de bronvezel-APD combinatie uit te voeren. De impulsresponse wordt aangenomen volledig bepaald te zijn door de spectrale verdeling van het zendvermogen en de (lineaire) kleurdispersie van 60 ps/km/nm en is dan gelijkvormig met die spectrale verdeling (fig. 20). Op 50% van de hoogte is de dispersie dan 3.2 ns voor 7.6 km.

In het programma voor de foutkansberekeningen zijn een aantal waarden van de APD versterking in beschouwing genomen om een optimum te kunnen bepalen.

Een voorbeeld van het verloop van de foutenkans als functie van de APD versterking is in fig. 21 gegeven.

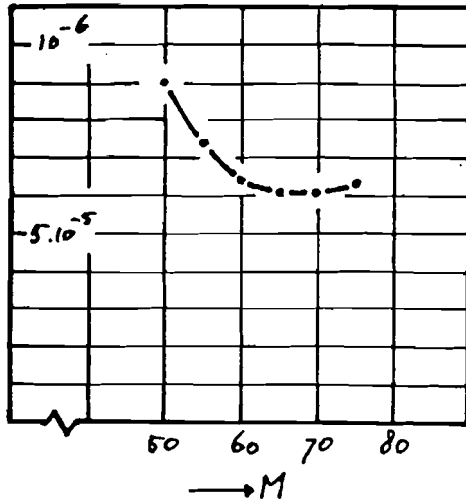


Fig. 21. De foutenkans als functie van de APD versterking.

De foutenkans bij optimale versterking voor een aantal waarden van het ingangsvermogen is in tabel 7 gegeven met bijbehorende waarden van de optimale beslissingsdrempel (in procenten van de afstand tussen het gemiddelde één niveau en het gemiddelde nulniveau op het beslissingstijdstip). Het ontvangen vermogen van een "1", P_1 , wordt gedefinieerd als het piekvermogen van de rechthoekpuls die ontvangen wordt als er geen dispersie is (fig. 22). De dispersie wordt geacht de energie in de puls niet te veranderen, doch slechts uit te smeren; de gearceerde oppervlakte in fig. 22 blijft dus constant.

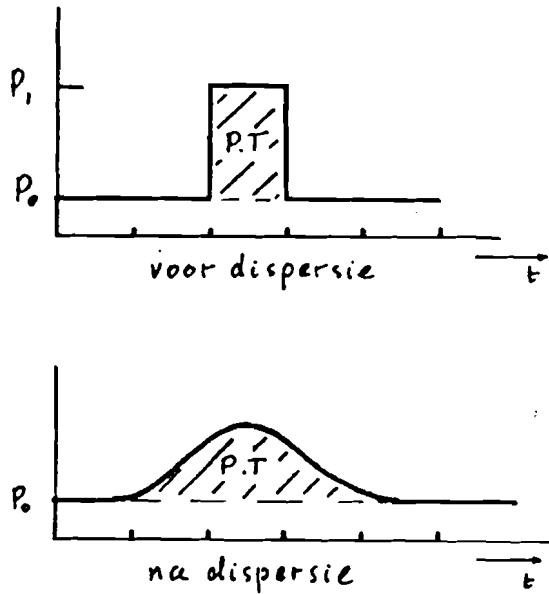
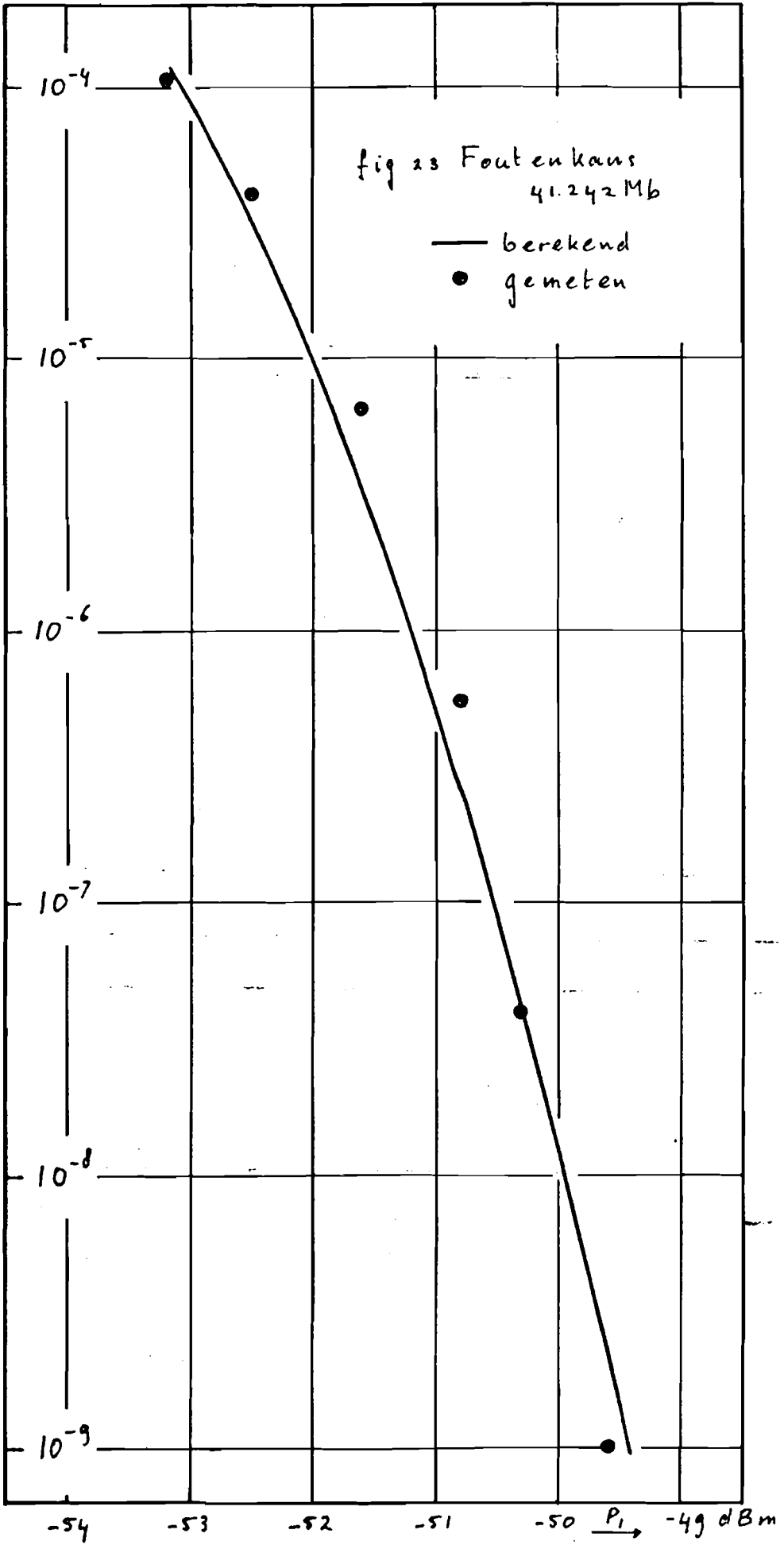


Fig. 22. De definitie van het vermogen in een "1".

P_1		foutkans	M_{opt}	drempel
dBm	nW	$P(e)$		%
-52.8	5.22	$6.1 \cdot 10^{-5}$	68	43
-51.8	6.57	$5.6 \cdot 10^{-6}$	63	43
-50.8	8.27	$2.7 \cdot 10^{-7}$	58	44
-49.8	10.4	$5.4 \cdot 10^{-9}$	55	44

Tabel 7

In fig. 23 is de berekende foutkans als functie van het vermogen uitgezet; bovendien zijn in dezelfde figuur de aan proefopstelling gemeten waarden aangegeven. In



dit geval lijkt de theorie een bijzonder goede voorspelling te geven van de praktijk; er dient hierbij te worden opgemerkt, dat enige fouten, die in de praktijk aanwezig zijn (nog) niet in de theorie verwerkt zijn zoals: dynamische tolerantie in de beslissingsdrempel, jitter in de klokextractieschakeling extra ruis door het niet perfecte filter etc.

Om een indruk te krijgen in hoeverre een in 3.1.1. genoemde vuistregel voor het bepalen van de optimale APD versterking (82) voldoet aan de resultaten uit de foutenkansberekening is in tabel 8 een vergelijking gemaakt voor de vier vermogens van tabel 7.

P_1	M_{opt}	M_{opt}
nW	(82)	
5.22	71	68
6.57	65	63
8.27	61	58
10.4	56	55

Tabel 8

De optimale versterking wordt dus door de vuistregel vrij goed voorspeld in deze gevallen. Uit het vrij flauwe verloop van fig. 21 blijkt, dat de fout weinig gevaar oplevert.

Aan dit type ontvanger zijn verder nog enige berekeningen uitgevoerd, met parameters, die bij metingen moeilijk kunnen worden gesimuleerd, maar waarvan men de invloed op de gevoeligheid wel dient te weten.

Als eerste is in dit kader berekend de invloed van een grotere dispersie; de vorm van de fiber impuls response is hierbij dezelfde gelaten als in fig. 20, voor de

breedte is genomen respectievelijk 0, 3.2, 6.4, 9.6 en 12.8 ns op 50% van de hoogte. Bij elke waarde is het filter $h(t)$ aangepast om weer de oorspronkelijke Nyquist vorm te krijgen.

De resultaten van de berekening zijn in tabel 9 t/m 13 te vinden.

M \ P ₁	-52.8	-51.8	-50.8	-49.8	dBm
	5.22	6.57	8.27	10.4	nW
40	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$5.4 \cdot 10^{-9}$	
45	$1 \cdot 10^{-4}$	$6.9 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-9}$	
50	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	
55	$5.3 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$	
60	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	
65	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$	
70	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$	
75	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$	
80	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$6.2 \cdot 10^{-9}$	

Tabel 9. De foutenkans bij geëgaliseerde dispersie van 0 ns.

M \ P ₁	-52.8	-51.8	-50.8	-44.8	dBm
	5.22	6.57	8.27	10.4	nW
45				6.9.10 ⁻⁹	
50	9.10 ⁻⁵	7.3.10 ⁻⁶	3.1.10 ⁻⁷	5.6.10 ⁻⁹	
55	7.4.10 ⁻⁵	6.1.10 ⁻⁶	2.7.10 ⁻⁷	5.4.10 ⁻⁹	
60	6.4.10 ⁻⁵	5.6.10 ⁻⁶	2.7.10 ⁻⁷	5.9.10 ⁻⁹	
65	6.1.10 ⁻⁵	5.6.10 ⁻⁶	2.9.10 ⁻⁷	7.10 ⁻⁹	
70	6.1.10 ⁻⁵	5.9.10 ⁻⁶	3.2.10 ⁻⁷		
75	6.3.10 ⁻⁵		3.8.10 ⁻⁷		
80			4.6.10 ⁻⁷		

Tabel 10. De foutenkans bij geëgaliseerde dispersie van 3.2 ns.

M \ P ₁	-52.8	-51.8	-30.8	-49.8	-48.8	dBm
	5.22	6.57	8.27	10.4	13.0	nW
40					1.1.10 ⁻⁹	
45				6.1.10 ⁻⁸	9.3.10 ⁻¹⁰	
50		2.5.10 ⁻⁵	1.7.10 ⁻⁶	5.6.10 ⁻⁸	9.5.10 ⁻¹⁰	
55	1.9.10 ⁻⁴	2.2.10 ⁻⁵	1.6.10 ⁻⁶	5.9.10 ⁻⁸	1.1.10 ⁻⁹	
60	1.7.10 ⁻⁴	2.2.10 ⁻⁵	1.7.10 ⁻⁶	6.7.10 ⁻⁸		
65	1.7.10 ⁻⁴	2.3.10 ⁻⁵	1.8.10 ⁻⁶	8.1.10 ⁻⁸		
70	1.8.10 ⁻⁴	2.4.10 ⁻⁵	2.1.10 ⁻⁶			
75	1.9.10 ⁻⁴					

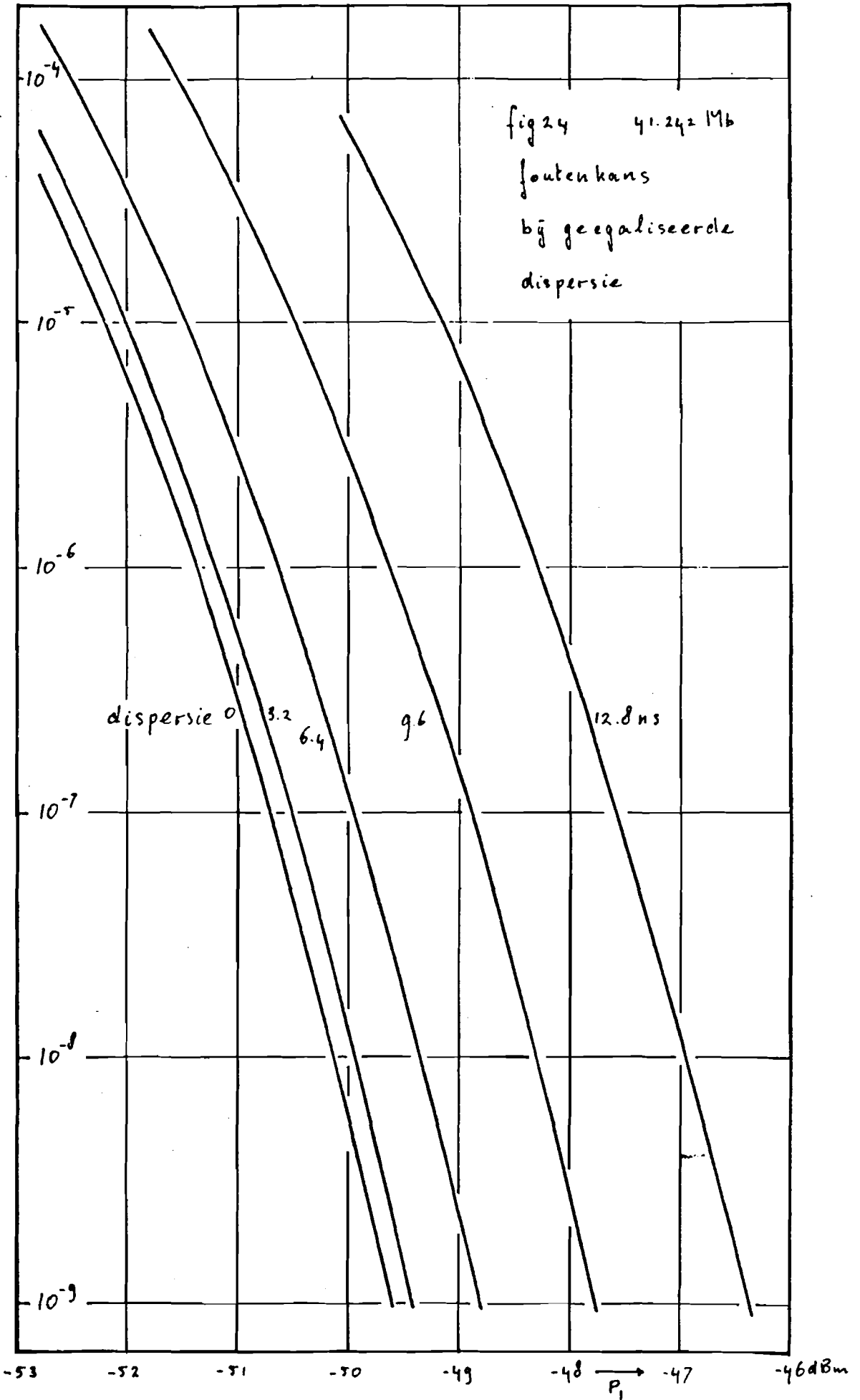
Tabel 11. De foutenkans bij geëgaliseerde dispersie van 6.4 ns.

M \ P ₁	-51.8	-50.8	-49.8	-48.8	-47.8	dBm
	6.57	8.27	10.4	13	16.5	nW
40	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	
45	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$7.3 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	
50	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$8.3 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	
55	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-9}$	
60	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	
65	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$4.8 \cdot 10^{-9}$	
70	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$8.4 \cdot 10^{-9}$	
75	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	

Tabel 12. De foutenkans bij geëgaliseerde dispersie van 9.6 ns.

M \ P ₁	-50.8	-49.8	-48.8	-47.8	-46.8	dBm
	8.27	10.4	13	16.5	20.8	nW
10			$2 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	
15			$1.1 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	
20			$1.8 \cdot 10^{-5}$	$8.4 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	
25			$7.1 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$	$7.5 \cdot 10^{-9}$	
30			$4.6 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$5.9 \cdot 10^{-9}$	
35			$4 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$6.3 \cdot 10^{-9}$	
40	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$7.9 \cdot 10^{-9}$	
45	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	
50	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$5.4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$	
55	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-5}$				
60	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$				
65	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-5}$				
70	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$8.6 \cdot 10^{-5}$				
75	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$				
80	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$				

Tabel 13. De foutenkans bij geëgaliseerde dispersie van 12.8 ns.



De foutenkans bij optimale APD versterking is in fig. 24 uitgezet als functie van het vermogen, voor de diverse waarden van de dispersie.

In fig. 25 is het benodigde extra vermogen (in dB) gegeven als functie van de dispersie, om een foutenkans van 10^{-9} te bereiken; om deze figuur ook voor andere bitsnelheden geschikt te maken, is de relatieve dispersie uitgezet, de verhouding van de 50% breedte en de bitperiode. In fig. 26 is hetzelfde uitgezet als functie van de 6 dB bandbreedte, in frakties van de Nyquist-frequentie.

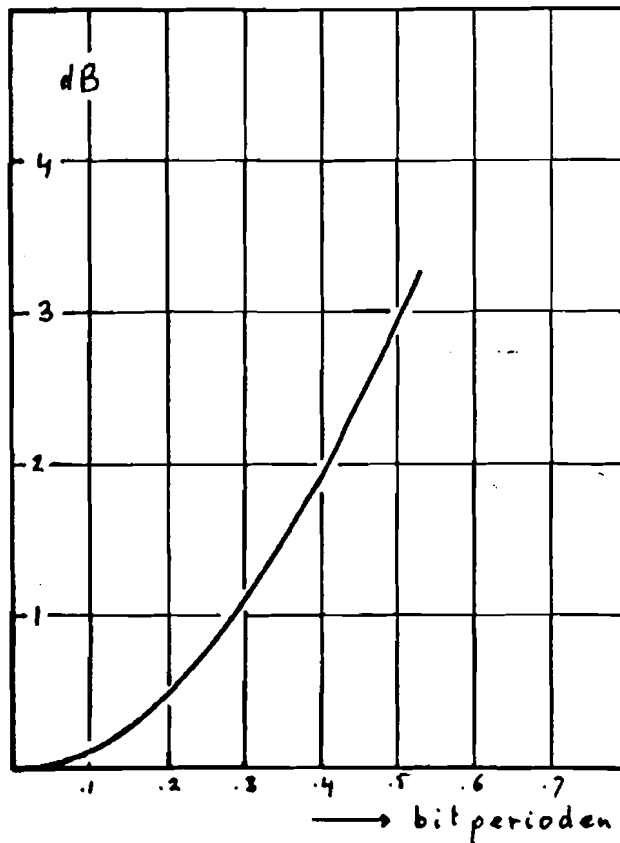


Fig. 25. Het verlies in gevoeligheid voor 10^{-9} foutenkans als functie van de relatieve dispersie (geëgaliseerd).

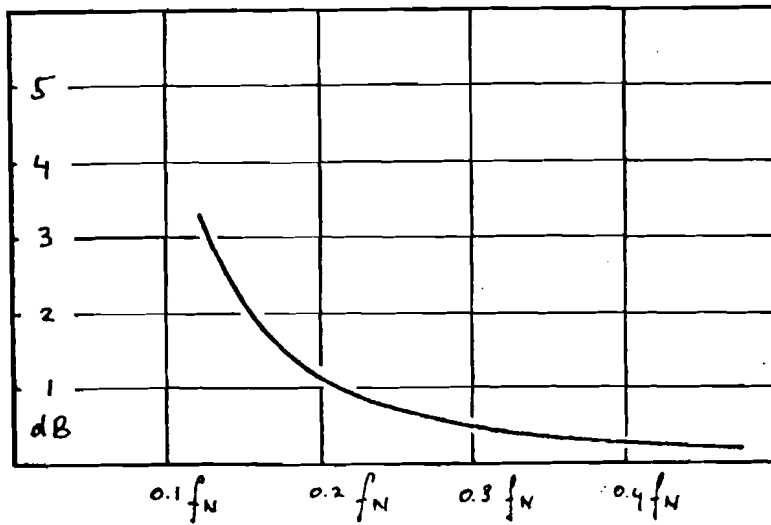


Fig. 26. Het verlies in gevoeligheid voor 10^{-9} foutenkans als functie van de 6 dB bandbreedte (geëgaliseerd).

Er zijn nog een aantal berekeningen uitgevoerd, voor dezelfde waarden van de dispersie, maar met een vast filter, nl. het filter wat berekend is voor 3.2 ns dispersie. Het extra benodigde vermogen voor deze situatie is uitgezet in fig. 27 samen met de eerder berekende getallen voor het volledig geëgaliseerde systeem.

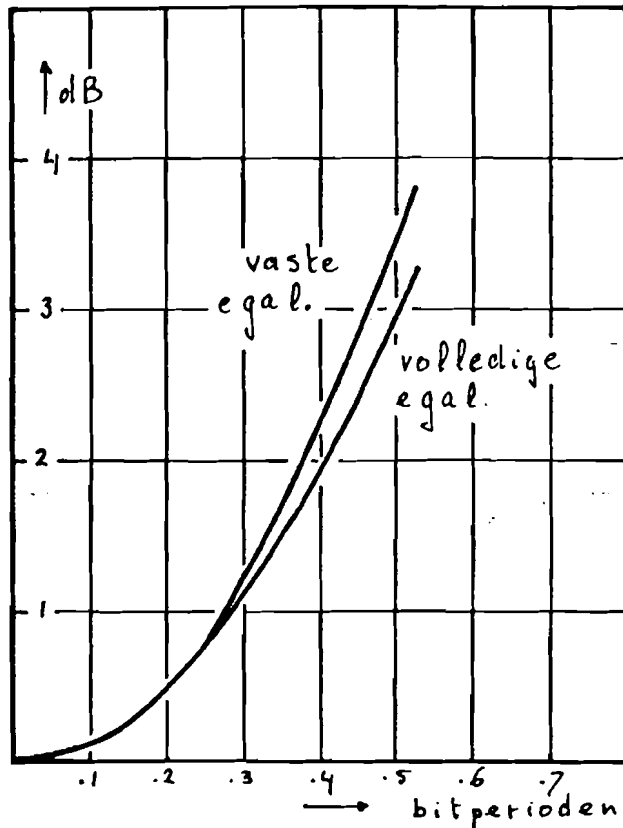


Fig. 27. Het verlies in gevoeligheid voor 10^{-9} foutenkans; vergelijking egalisatievormen.

Het is opmerkelijk, dat zelfs bij vrij grote dispersie een goede egalisatie slechts 0.5 dB vermogenswinst oplevert. Als laatste punt betreffende "raised cosine" systemen is onderzocht, wat de invloed van de k-waarde van de fotodiode op de gevoeligheid is. Uitgaande van een nominale waarde van 0.0208 is de winst (resp. het verlies) in gevoeligheid berekend voor 10^{-9} foutenkans. Het resultaat is in tabel 14 gegeven.

k	k	winst
0.0166	-20%	0.25 dB
0.0208	0%	0 dB
0.0250	+20%	-0.25 dB

Tabel 14. De winst in gevoeligheid bij variatie van k.

Men kan uit deze getallen bijvoorbeeld concluderen, dat een verbetering van het kwantumrendement van 6% gepaard mag gaan met een verslechtering van de k-waarde van 20% bij de gegeven situatie.

3.3.2. "Integrate and dump" systeem

Een ontvanger uitgerust met een "integrate and dump" filter heeft onder sommige omstandigheden interessante eigenschappen.

Van een dergelijk filter is de impulsresponse in fig. 28 gegeven en is eerder in (12) geformuleerd.

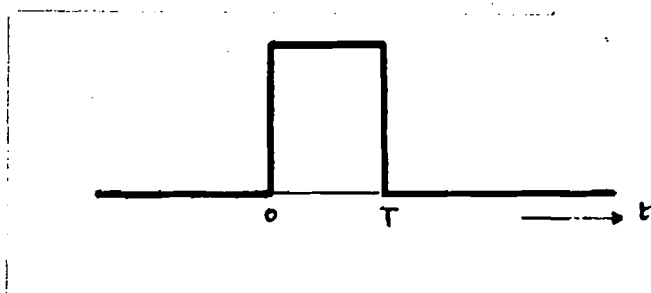


Fig. 28. "Integrate and dump" filter, impulsresponse.

Als de ontvangen puls eveneens een rechthoekpuls is met breedte T , dan is dit filter optimaal wat de foutenkans betreft; er zullen twee argumenten worden aangevoerd, die dit plausibel maken. Ten eerste moet

de breedte van de impulsresponse zeker tot T begrensd zijn, daar men anders onnodig intersymboolinterferentie introduceert. Ten tweede, zou het filter binnen die begrensde periode niet vlak zijn, dan zou aan verschillende fracties van de ingangspuls een ander gewicht worden toegekend; dit is onlogisch omdat zowel het signaal als de ruis stationair zijn binnen een bitinterval. Het optimale karakter wordt natuurlijk verstoord als er dispersie op de transmissieweg optreedt; de foutenkans met dit filter is berekend met dispersie, die dezelfde is genomen als beschouwd bij het raised cosine systeem. De eigenschappen van de bron en de APD en de versterker-ruis zijn ook dezelfde gelaten om de resultaten van beide systemen te kunnen vergelijken. Het extra vermogen voor 10^{-9} foutenkans als functie van de relatieve dispersie is in fig. 29 uitgezet, voor zo-

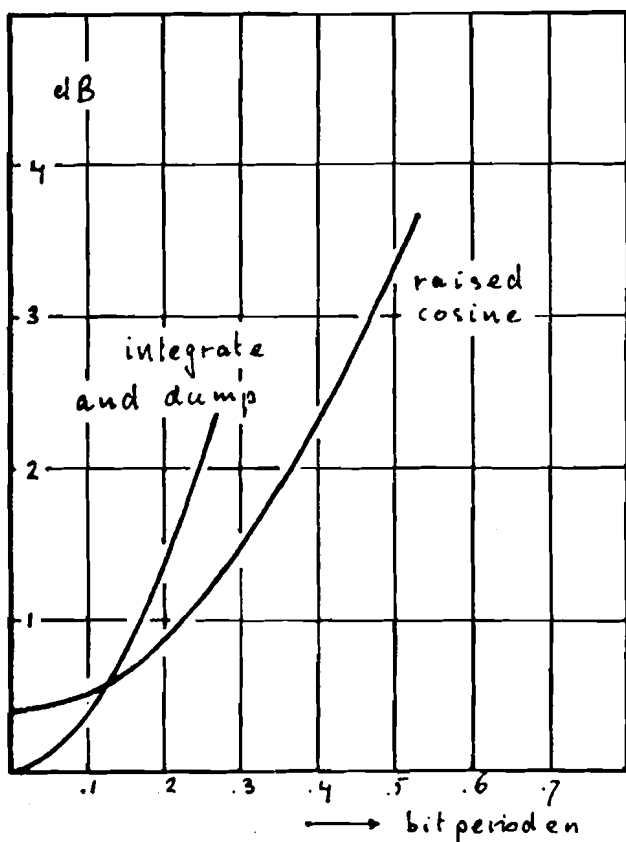


Fig. 29. "Integrate and dump" en "raised cosine" vergeleken.

wel het geëgaliseerde "raised cosine" systeem als voor het "integrate and dump" systeem; als referentie is genomen het optimale geval: het "integrate and dump" principe zonder dispersie.

Zoals blijkt uit de figuur is het "integrate and dump" systeem zonder enige dispersie slechts 0.4 dB beter dan het "raised cosine" geëgaliseerde systeem. Het blijkt bovendien, dat het "integrate and dump" systeem extreem gevoelig is voor dispersie, zodat voorlopig mag worden geconcludeerd, dat "raised cosine" egalisatie ook voor optische communicatie een bijzonder goede keuze is.

4. CONCLUSIES EN SLOTOPMERKINGEN

Een meetopstelling is ontwikkeld en beschreven, die het mogelijk maakt de statistiek van het uitgangssignaal van een avalanche fotodiode (APD) te meten. Met metingen is gestaafd, dat een mathematisch model van de stochastische versterking van de APD deze statistiek goed voorspelt. Uitgaande van het genoemde model is een computerprogramma ontworpen, wat de foutenkans van digitale optische transmissiesystemen met vrij goede betrouwbaarheid kan voorspellen, zij het ten koste van vrij grote rekentijden. Een tweede programma, gebaseerd op een benadering van de statistiek van het signaal na een filter, levert minder maar toch voldoende nauwkeurige resultaten echter met een aanzienlijke besparing in rekentijd ten opzichte van het eerste programma. Met deze programma's is aan een aantal relevant geachte systemen gerekend.

Bijvoorbeeld is de invloed van dispersie op het detecteerbare vermogen (bij een bepaalde foutenkans) onderzocht, waarbij het gebruik van "raised cosine" en van "integrate and dump" filtering is verondersteld. Gebleken is, dat "integrate and dump" filtering zonder dispersie een slechts 0.4 dB gevoeliger ontvanger oplevert, die veel sneller verslechterd bij enige dispersie, dan een ontvanger met een "raised cosine" filter.

Bij een ontvanger met "raised cosine" filtering is onderzocht hoeveel gevoeligheid verloren gaat als de door dispersie veroorzaakte afhankelijke demping niet wordt geëgaliseerd. Dit verlies blijkt op te lopen tot slechts 0.5 dB bij een dispersie van ongeveer een halve bit-periode.

Van een 41.242 Mbit/s systeem zijn aan een proefopstelling gemeten resultaten vergeleken met berekeningen; de overeenkomst is opmerkelijk.

In het algemeen lijkt de conclusie gerechtvaardigd, dat bij het systeemontwerp een computerprogramma zoals beschreven nuttig gebruikt kan worden om de invloed van parametervariatie op de werking te voorspellen; er kunnen hierbij situaties aan de orde komen, die bij metingen bijzonder moeilijk te creëren zijn of waarvan de invloed moeilijk te meten is.

Verantwoording

Tijdens mijn afstudeerwerk heb ik dankbaar gebruik gemaakt van resultaten en adviezen van de Project Groep Optische Communicatie, Philips Natuurkundig Laboratorium, Projecten Centrum Geldrop.

Bij het meten van enkele fotodioden was hulp van J. Joosten van het Philips Natuurkundig Laboratorium Waalre onontbeerlijk.

Bovendien ben ik mijn werkgever, Philips Telecommunicatie Industrie B.V., erkentelijk, dat zij heeft bijgedragen aan het formuleren van een opdracht waarop ik kon afstuderen en mij in de gelegenheid heeft gesteld die opdracht uit te voeren.

Eindhoven, 30 juni 1978

LITERATUUR

- [1] R.J. McIntyre
Multiplication noise in uniform avalanche diodes.
IEEE Transactions on Electron Devices.
Vol. ED-13, No. 1, January 1966, pp. 164-168.
- [2] S.D. Personick
Statistics of a general class of avalanche
detectors with application to optical communication.
The Bell System Technical Journal
Vol. 50, No. 10, December 1971, pp. 3075-3095.
- [3] R.J. McIntyre
The distribution of gains in uniformly multiplying
avalanche photodiodes: theory.
IEEE Transactions on Electron Devices
Vol. ED-19, No. 6, June 1972, pp. 703-713.
- [4] C.A. Lee, R.A. Logan, R.L. Batdorf, J.J. Kleimack
and W. Weigmann
Ionization rates for holes and electrons in silicon.
Physics Review
Vol. 34, May 1964, pp. A761-A773.
- [5] J. Conradi
The distribution of gains in uniformly multiplying
avalanche photodiodes: experimental.
IEEE Transactions on Electron Devices
Vol. ED-19, No. 6, June 1972, pp. 713-718.
- [6] J.E. Mazo, J. Salz
On optical communication via direct detection of
light pulses
The Bell System Technical Journal
Vol. 55, No. 3, March 1973, pp. 347-369.

- [7] P.P. Webb, R.J. McIntyre and J. Conradi
Properties of avalanche photodiodes.
R.C.A. Review
Vol. 35, June 1974, pp. 234-278.
- [8] J. Bar-David
Communication under the Poisson regime.
IEEE Transactions on Information Theory.
Vol. IT-15, No. 1, January 1969, pp. 31-37.
- [9] S.D. Personick
Receiver design for digital fiber optic communication systems, I.
The Bell System Technical Journal
Vol. 52, No. 6, August 1973, pp. 843-874.
- [10] P. Balaban
Statistical evaluation of the fiberguide repeater using importance sampling.
The Bell System Technical Journal
Vol. 55, No. 6, July-August 1976, pp. 745-766.
- [11] R. Dogliotti, A. Guardincerri, A. Luvison, G. Pirani
Valutazione dell'effetto del rumore quantico nella trasmissione numerica su fibra ottica.
CSELT Rapporti Technici
Vol. 4, No. 3, settembre 1976, pp. 141-152.
- [12] B. Carnahan, H.A. Luther, J.O. Wikes
Applied numerical methods.
New York: John Wiley and Sons Inc., 1969.
- [13] A. Papoulis
Probability, random variables and stochastic processes.
New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.