MASTER

Decompositie van schakelfuncties m.b.v. Boole matrixvergelijkingen

Poyck, M.A.M.

Award date:
1984

Decompositie van schakelfuncties m.b.v. Boole matrixvergelijkingen

M.A.M. Poyck

Verslag van het afstudeerwerk
gedaan binnen de vakgroep
Digitale Systemen in de periode
van 1.8.77 t/m oktober 1978
o.l.v. Prof. ir. A. Heetman
en Ir. C.P.J. Schnabel

Inhoudsopgave :

Samenvatting :

Het afstudeerwerk betreft het berekenen van de eventuele oplossingen (R_{ji}) van de Boole matrixvergelijking : $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ m.b.v. APL\700(A Programming Language). Dit is in APL mogelijk m.b.v. één statement.

De Boole matrixvergelijkingen zijn toegepast om na te gaan of een decompositie van een schakelfunctie mogelijk is. Er is een programma geschreven om na te gaan of er een of twee variabelen van een schakelfunctie afgesplitst kunnen worden. Dit programma vormt de basis van een programma waarmee we nagaan of een willekeurige functie van twee of drie variabelen gerealiseerd kan worden met één bouwsteen met vier inputs en een output. Als dit mogelijk is dan geeft dit programma een listing van de aansluitingen van de variabelen op de inputs van de bouwsteen. Als toepassing is voor deze bouwsteen een pneumistor gekozen, die dient voor het schakelen van luchtvermogens. Hij vormt het hoofdelement van de Dreloba serie.

Tot slot zijn er drie artikelen bestudeerd die nauw verband houden met de moderne synthese van een combinatorisch netwerk. Van deze artikelen is een samenvatting in dit verslag opgenomen.

Trefwoorden:

Boole matrixvergelijking
Decompositie
ULM
APL/700
Boomnetwerk
Combinatorisch

Hoofdstuk 1 : Het berekenen van de eventuele oplossingen van de Boole matrixvergelijking $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ m.b.v. APL(A Programming Language).

1.1 Inleiding :

Voor het algemene netwerk waarop de Boole matrixvergelijking $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ van toepassing is, zie fig. 1.1.

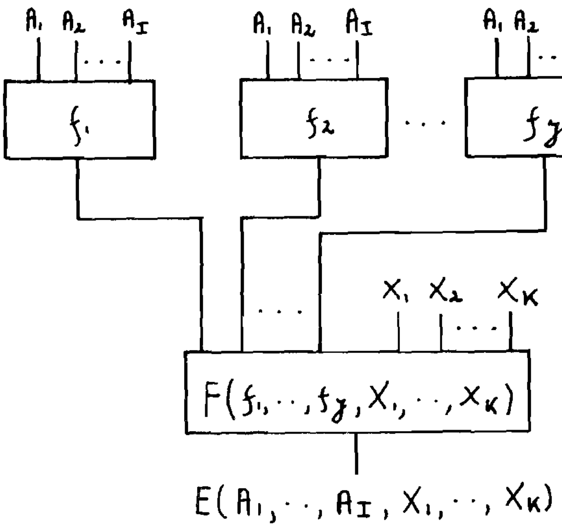


fig. 1.1 : Het algemene netwerk waarop de Boole matrix-vergelijking van toepassing is.

We gaan nu na hoe de matrices (E_{ki}), (F_{kj}) en (R_{ji}) ontstaan:

- De outputfunctie E hangt af van de variabelen A_1, ... , A_I en X_1, ... , X_K. We kunnen deze functie in de vorm van een Boole matrix weergeven(alle elementen van deze matrix zijn dus 0 of 1):

  $$(E_{ki}) = \begin{pmatrix} E_{00} & \cdots & E_{0i} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{k0} & \cdots & E_{ki} \end{pmatrix}$$

  De rijen van (E_{ki}) horen bij een basis gevormd uit de variabelen X_1, ... ,X_K. (E_{ki}) bevat 2^K rijen. De kolommen van (E_{ki}) horen bij een basis gevormd uit de variabelen A_1, ... ,A_I. (E_{ki}) bevat 2^I kolommen.

v.b.1.1 : Stel $E(X_1,X_2,A_1,A_2,A_3)=A_1A_2+X_1\bar{A}_2A_3+X_2(A_1\bar{A}_3+A_2)$

$$(E_{ki})=\begin{array}{r} \bar{X}_2\left(\begin{array}{l}\bar{X}_1\\ X_1\end{array}\right. \\ X_2\left(\begin{array}{l}\vdots\\ \vdots\end{array}\right. \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underbrace{\bar{A}_1\ A_1}_{\bar{A}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{A_2}\ \cdot}_{\bar{A}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \qquad\qquad}_{A_3}$$

- De bouwsteen F heeft een outputfunctie F die afhangt van de inputs $f_1, \ldots ,f_J$ en $X_1, \ldots ,X_K$. Deze afhankelijkheid kunnen we in een matrix (F_{kj}) weergeven :

  $$(F_{kj})= \begin{pmatrix} F_{00} & \cdots & F_{0j} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{k0} & \cdots & F_{kj} \end{pmatrix}$$

  (F_{kj}) bevat 2^K rijen en 2^J kolommen. Bij de rijen hoort een basis gevormd uit de variabelen $X_1, \ldots ,X_K$ en bij de kolommen een basis gevormd uit $f_1, \ldots , f_J$.

v.b.1.2 : Stel $F(f_1,f_2,f_3,X_1,X_2)=\bar{f}_1f_3+X_1f_1\bar{f}_2+X_2f_2\bar{f}_3$

$$(F_{kj})=\begin{array}{r} \bar{X}_2\left(\begin{array}{l}\bar{X}_1\\ X_1\end{array}\right. \\ X_2\left(\begin{array}{l}\vdots\\ \vdots\end{array}\right. \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underbrace{\bar{f}_1\ f_1}_{\bar{f}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{f_2}\ \cdot}_{\bar{f}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \qquad\qquad}_{f_3}$$

- De matrix (R_{ji}) geeft het verband aan tussen de variabelen $A_1, \ldots ,A_I$ en de functies $f_1, \ldots ,f_J$.

v.b.1.3 : Stel $\left.\begin{array}{l} f_1=A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_3 \\ f_2=\bar{A}_1A_2+A_1\bar{A}_3 \\ f_3=A_1A_3+\bar{A}_2A_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

A_1	0	1	0	1	0	1	0	1
A_2	0	0	1	1	0	0	1	1
A_3	0	0	0	0	1	1	1	1
f_1	0	1	0	0	1	1	1	0
f_2	0	1	1	1	0	0	1	0
f_3	0	0	0	1	1	1	0	1

$\Downarrow$

$$(R_{ji}) = \begin{array}{ccc|cccccccc}
\bar{f}_3 & \bar{f}_2 & \bar{f}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & f_2 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
f_3 & \vdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & \bar{A}_1 & A_1 & \cdots & & & & & \\
 & & & \bar{A}_2 & & A_2 & & \cdots & & & \\
 & & & & \bar{A}_3 & & & & A_3 & &
\end{array}$$

Dus om (R_{ji}) te bepalen uit de gegeven functies f_1, f_2 en f_3 berekenen we eerst in een tabel de waarden van f_1, f_2 en f_3 t.o.v. de basis gevormd uit A_1, A_2 en A_3. Merk op dat (R_{ji}) in elke kolom precies één 1 heeft staan.

1.2 Het berekenen van de eventuele oplossingen (R_{ji}) van de Boole matrixvergelijking $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$.

De operatie $\otimes$ betekent dat, bij het berekenen van $(F_{kj}) \otimes (R_{ji})$, de operaties logische optelling en vermenigvuldiging gebruikt worden.

v.b.1.4 : $(1\ 0) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) = 1 \vee 0 = 1$

Een belangrijke eigenschap van de oplossingen (R_{ji}) is dat ze unitair zijn d.w.z. dat in elke kolom van (R_{ji}) precies één 1 staat. Een unitaire matrix wordt ook wel een semipermutatiematrix genoemd omdat bij vermenigvuldiging van (F_{kj}) met een unitaire matrix (R_{ji}) de kolommen van (F_{kj}) gepermuteerd worden.

v.b.1.5 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Met behulp van de volgende methode worden in drie stappen alle eventuele unitaire oplossingen (R_{ji}) van $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ bepaald:

1. Vind de unitaire matrices (R_{ji}) die voldoen aan $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) \rightarrow (E_{ki})$. I
2. Vind de unitaire matrices (R_{ji}) die voldoen aan $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) \leftarrow (E_{ki})$. II
3. Vind die unitaire matrices die zowel aan implicatie I als aan implicatie II voldoen. Dit zijn unitaire oplossingen van $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$.

ad 1 : Allereerst bepalen we de matrix $(R_{ji})_a$ die aan implicatie I voldoet én die zo min mogelijk nullen bevat. Alle gevraagde unitaire oplossingen (R_{ji}) van implicatie I voldoen dan aan $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_a$. Bij de bepaling van $(R_{ji})_a$ gaan we de noodzakelijke nullen opsporen :

$$\begin{pmatrix} F_{00} & \cdots & F_{0j} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{k0} & \cdots & F_{kj} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} R_{00} & \cdots & R_{0i} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{j0} & \cdots & R_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{00} & \cdots & E_{0i} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{k0} & \cdots & E_{ki} \end{pmatrix}$$

R_{ji} moet nul zijn als er een k is waarvoor $F_{kj}=1$ en $E_{ki}=0 \Leftrightarrow \overline{R}_{ji} = \sum_k F_{kj} . E_{ki} \Leftrightarrow (\overline{R_{ji}})_a = (F_{jk}) \otimes (\overline{E_{ki}})$

dus $(R_{ji})_a = \overline{(F_{jk}) \otimes (\overline{E_{ki}})}$

v.b.1.6 : $(E_{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $(F_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(R_{ji})_a = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \otimes \begin{pmatrix} \overline{0 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(F_{kj}) \otimes (R_{ji})_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Omdat $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ is implicatie I waar. Alle unitaire matrices (R_{ji}) die aan implicatie I en aan $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_a$ voldoen zijn :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ad 2: Implicatie II schrijven we allereerst in een andere vorm : $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) \leftarrow (E_{ki}) \Leftrightarrow$

$$\overline{(F_{kj}) \otimes (R_{ji})} \rightarrow (\overline{E_{ki}}) \Leftrightarrow$$

$$(\overline{F_{kj}}) \otimes (R_{ji}) \rightarrow (\overline{E_{ki}})$$

De laatste gelijkwaardigheid is als volgt te verklaren: (R_{ji}) is een semipermutatiematrix. Bij $\overline{(F_{kj}) \otimes (R_{ji})}$ worden de kolommen van (F_{kj}) eerst gepermuteerd en daarna gecomplementeerd terwijl bij het uitwerken van $(\overline{F_{kj}}) \otimes (R_{ji})$ deze volgorde juist omgekeerd is. Omdat de volgorde van permuteren en complementeren van kolommen er niet toe doet is $\overline{(F_{kj}) \otimes (R_{ji})} = (\overline{F_{kj}}) \otimes (R_{ji})$.

We bepalen nu weer de matrix $(R_{ji})_b$ die zo min mogelijk nullen bevat en waarvoor geldt :

$$(\overline{F_{kj}}) \otimes (R_{ji})_b \rightarrow (\overline{E_{ki}}).$$

Omdat $(R_{ji})_b$ zoveel mogelijk enen bevat, voldoen alle unitaire matrices (R_{ji}) aan $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_b$ als ze ook voldoen aan $(\overline{F_{kj}}) \otimes (R_{ji}) \rightarrow (\overline{E_{ki}})$.

Bij de bepaling van $(R_{ji})_b$ gaan we de noodzakelijke nullen opsporen van (R_{ji}) in de vergelijking :

$$\begin{pmatrix} \overline{F_{00}} & \cdots & \overline{F_{0j}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{F_{k0}} & \cdots & \overline{F_{kj}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} R_{00} & \cdots & R_{0i} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{j0} & \cdots & R_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{E_{00}} & \cdots & \overline{E_{0i}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{E_{k0}} & \cdots & \overline{E_{ki}} \end{pmatrix}$$

R_{ji} moet nul zijn als er een k is waarvoor $\overline{F_{kj}}=1$ en $\overline{E_{ki}}=0 \Leftrightarrow \overline{R_{ji}} = \sum_k \overline{F_{kj}}.E_{ki} \Leftrightarrow (\overline{R_{ji}})_b = (\overline{F_{jk}}) \otimes (E_{ki})$

dus $(R_{ji})_b = \overline{(\overline{F_{jk}}) \otimes (E_{ki})}$

v.b. 1.7 : $(E_{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $(F_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(R_{ji})_b = \overline{(\overline{F_{jk}}) \otimes (E_{ki})} = \overline{(\overline{F_{kj}})^T \otimes (E_{ki})} =$$

$$\overline{\overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{F_{kj}}) \otimes (R_{ji})_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Omdat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, is aan $(\overline{F_{kj}}) \otimes (R_{ji})_b \rightarrow (\overline{E_{ki}})$ voldaan. De unitaire matrices (R_{ji}) die aan $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_b$ voldoen zijn :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Voor elk van deze matrices geldt dat implicatie II waar is.

ad 3: a. Als we $(R_{ji})_a$ en $(R_{ji})_b$ berekend hebben en we bepalen de unitaire matrices (R_{ji}) die voldoen aan zowel $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_a$ als $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_b$ dan hebben we alle unitaire oplossingen (R_{ji}) van de matrixvergelijking $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ gevonden.

v.b. 1.8 :

Als $(E_{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $(F_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dan $(R_{ji})_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $(R_{ji})_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (zie v.b.1.6 en 1.7)

De unitaire matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ voldoen aan beide voorwaarden $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_a$ en $(R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_b$ en zij zijn dus de oplossingen van $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$

b. Er bestaat ook een kortere manier om, zonder $(R_{ji})_a$ en $(R_{ji})_b$ te berekenen, de unitaire oplossingen (R_{ji}) van $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ te bepalen:
Voor de unitaire oplossingen (R_{ji}) van $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ moeten we eisen :

$$\left.\begin{matrix} (R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_a \text{ en} \\ (R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_b \end{matrix}\right\} \Rightarrow (R_{ji}) \rightarrow (R_{ji})_a \cdot (R_{ji})_b$$

Het produkt $(R_{ji})_a \cdot (R_{ji})_b$ stellen we (S_{ji}) en we gaan na hoe (S_{ji}) afhangt van (F_{kj}) en (E_{ki}):

$$(S_{ji}) = (R_{ji})_a \cdot (R_{ji})_b = \overline{(F_{jk}) \otimes (\overline{E_{ki}})} \cdot \overline{(\overline{F_{jk}}) \otimes (E_{ki})}$$

$$S_{ji} = \overline{\sum_k F_{kj} \cdot \overline{E_{ki}}} \cdot \overline{\sum_k \overline{F_{kj}} \cdot E_{ki}} = \prod_k (\overline{F_{kj}} + E_{ki}) \cdot \prod_k (F_{kj} + \overline{E_{ki}}) =$$
$$= \prod_k (\overline{F_{kj}} \cdot \overline{E_{ki}} + F_{kj} \cdot E_{ki}) = \prod_k (F_{kj} = E_{ki}) .$$

Dus $S_{ji} = 1$ als kolom j van (F_{kj}) gelijk is aan kolom kolom i van (E_{ki}). Elke unitaire matrix (R_{ji}) waarvoor geldt $(R_{ji}) \rightarrow (S_{ji})$ is een oplossing van $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$.

v.b.1.9 : $$\left.\begin{array}{l}(F_{kj}) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ (E_{ki}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\} \quad (S_{ji}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

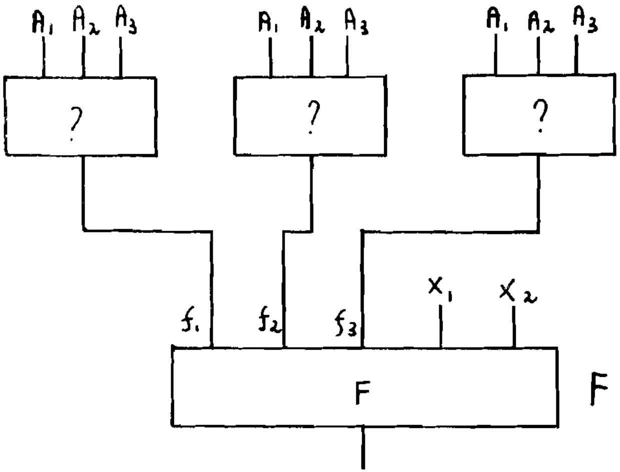
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ zijn de unitaire matrices (R_{ji})

die voldoen aan $(R_{ji}) \rightarrow (S_{ji})$ en dat zijn dus oplossingen van $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \otimes (R_{ji}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Drie equivalente voorwaarden voor het bestaan van een unitaire oplossing (R_{ji}) van de matrixvergelijking $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ zijn dat :

1. elke kolom van (E_{ki}) in (F_{kj}) voorkomt.
2. zowel $(R_{ji})_a$ als $(R_{ji})_b$ in elke kolom minstens één 1 bevatten.
3. (S_{ji}) in elke kolom minstens één 1 bevat.

v.b.1.10 : Als we willen nagaan of onderstaande realisatie van functie E met bouwsteen F mogelijk is, lossen we (R_{ji}) op uit de matrixvergelijking $(F_{kj}) \otimes (R_{ji}) = (E_{ki})$ waarbij (F_{kj}) en (E_{ki}) gegeven zijn in v.b. 1.1 en 1.2. De unitaire opl. matrices $(R_{ji})_u$ voldoen aan $(R_{ji})_u \rightarrow (R_{ji})$ waarbij (R_{ji}) in v.b.1.3 gegeven is.



$F = \bar{f}_1 f_3 + X_1 f_1 \bar{f}_2 + X_2 f_2 \bar{f}_3$

$E = A_1 A_2 + X_1 \bar{A}_2 A_3 + X_2 (A_1 \bar{A}_3 + A_2)$

Een van de mogelijke unitaire oplossingen $(R_{ji})_u$ is :

$$(R_{ji})_u=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uit Bovenstaande $(R_{ji})_u$ volgt :

A_1	0	1	0	1	0	1	0	1
A_2	0	0	1	1	0	0	1	1
A_3	0	0	0	0	1	1	1	1
f_1	0	1	0	0	1	1	1	0
f_2	0	1	1	1	0	0	1	0
f_3	0	0	0	0	1	1	1	1

dus : $f_1=A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_3$

$f_2=\bar{A}_1A_2+A_1\bar{A}_3$

$f_3=A_1A_2+\bar{A}_2A_3$

1.3. Het berekenen van de eventuele oplossingen (R_{ji}) van de Boole matrixvergelijking $(F_{kj})\otimes(R_{ji})=(E_{ki})$ m.b.v. een programma in APL.

We willen allereerst matrix $(S_{ji})=(R_{ji})_a\cdot(R_{ji})_b$ berekenen. Omdat $S_{ji}=\prod_{k}(F_{kj}=E_{ki})$ is $S_{ji}=1$ als de j-de kolom van (F_{kj}) precies gelijk is aan de i-de kolom van (E_{ki}). Anders is $S_{ji}=0$. We maken gebruik van het inprodukt van twee matrices en met de statement `S←(⍉F)∧.=E` maken we matrix S. Matrix F wordt eerst getransponeerd omdat bij het bovenstaande inprodukt de gelijkheid getoetst wordt van een rij van ⍉F met een kolom van E (Dit is gelijkwaardig met het toetsen van de gelijkheid van een kolom van F met een kolom van E).

Een voorwaarde voor het bestaan van een unitaire oplossing (R_{ji}) is dat in (S_{ji}) in elke kolom minstens één 1 voorkomt. Deze voorwaarde kunnen we ook vertalen door te zeggen dat elke kolom van (E_{ki}) gelijk moet zijn aan een kolom van (F_{kj}).

In APL luidt deze voorwaarde : B←∧/∨/[1]S.
Van matrix S worden eerst in iedere kolom de elementen logisch opgeteld en de elementen van de zo ontstane rij worden logisch vermenigvuldigd. Als B=1 dan is er minstens één unitaire oplossing (R_{ji}) en als B=0 dan is er geen unitaire oplossing.

v.b.1.11: $(F_{kj})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ en $(E_{ki})=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$

Uit S←(⍉F)∧.=E volgt $(S_{ji})=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$S_{31}=0$ omdat kolom 3 van F niet gelijk is aan kolom 1 van E.

∨/[1]S= 1 1

B←∧/∨/[1]S = 1

Er zijn twee unitaire oplossingen (R_{ji}) namelijk :

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$

Hoofdstuk 2 : Literatuuronderzoek naar Boolean Matrix Equations in Logic Design.

M.b.v. de computer is in de Inspec-file en in de Science Citations Index file naar artikelen gezocht die verband houden met het onderwerp : "Boolean Matrix Equations in Logic Design". De resultaten van dit onderzoek staan hieronder vermeld:

From the Inspec-file since 1971:

part 1:	(boolean OR switching OR logic) AND (decomposition OR network synthesis OR digital AND matrix)	184	abstacts
part 2:	boolean AND matrix AND equation	6	"
part 3:	(switching OR logic) AND matrix AND equation	11	"
part 4:	matrix AND digital AND equation	46	"
part 5:	boolean AND switching AND matrix AND equation	2	"

From the Science Citations Index file since mid 1972 :

part 6:	cited author : Brown, F.M.	12	citations
part 7:	author : Brown, F.M.	7	references
part 8:	(synthesis OR design) AND (switching OR boolean OR digital) AND decomposition	1	"
part 9:	(synthesis OR design) AND (switching OR digital OR boolean) AND equation	1	"
part 10:	(switching OR boolean OR digital OR logic) AND decomposition	9	"
part 11:	(switching OR boolean OR digital OR logic) AND matrix	17	"

Na bestudering van de abstracts blijkt er geen artikel te zijn dat heel nauw verband houdt met het gegeven onderwerp. Wel zijn er artikelen gevonden die meer inzicht hebben gegeven in de moderne synthese van combinatorische netwerken:

1. Matrix Method of Synthesis of Combinational Schemes and Logic Convertors for Finite Automata. S.M. Achasova and O.L. Bandman. (Eng. Cyber.,Vol. 13, 1975, pag. 76).
2. On Identification of Redundancy and Symmetry of Switching Functions. S.S. Yau and Y.S. Tang. (IEEE Transactions on Computers, Dec. 1971, pag. 1609).
3. A Numerical Expansion Technique and its Application to Minimal Multiplexer Logic Circuits. T.F. Tabloski and F.J. Mowle. (IEEE transactions on Computers, july 1976, pag. 684).

Van de artikelen 1 en 2 volgt nu een samenvatting. Artikel 3 wordt in hoofdstuk 5 behandeld.

ad 1: 1.1 Inleiding :

De technologie van Large Integrated Circuits (LIC) heeft de ontwikkeling van het ontwerp van digitale schakelingen beinvloed :

- De realisatiekosten van een ontwerp worden door het bezette oppervlakte van het kristal bepaald. Ging men vroeger het gebruik van transistoren vanwege de hoge kosten zoveel mogelijk uit de weg; tegenwoordig vertaalt men een schakeling in transistoren omdat deze op het IC de minste plaats innemen.
- De ontwerpkosten overschrijden nu soms zelfs de realisatiekosten van het ontwerp.

1.2 Matrixrepresentatie van logische functies :

Gegeven is een verzameling logische functies $F=\{f_1, \ldots ,f_p\}$ waarbij f_i in de disjunctieve normaalvorm gegeven is.

v.b.2.1 : $f_1=\overline{X}_1X_2X_3+\overline{X}_1\overline{X}_2+X_1X_2$

$f_2=X_1X_2+\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$

Stel $Q=\{q_1, \ldots ,q_4\}$ met $q_1=\overline{X}_1X_2X_3$; $q_2=\overline{X}_1\overline{X}_2$; $q_3=X_1X_2$ en $q_4=\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$.

$$M_1 = \begin{array}{c|cccccc|} q_1 & & 1 & 1 & & 1 & \\ q_2 & & 1 & & 1 & & \\ q_3 & 1 & & 1 & & & \\ q_4 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & X_1 & \overline{X}_1 & X_2 & \overline{X}_2 & X_3 & \overline{X}_3 \end{array} \qquad M_2 = \begin{array}{c|cc|} q_1 & 1 & \\ q_2 & 1 & \\ q_3 & 1 & 1 \\ q_4 & & 1 \\ & f_1 & f_2 \end{array}$$

$$F = \overline{(M_1 . \overline{X})}^{T} . M_2 = \overline{\begin{pmatrix} & 1 & 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & & \\ 1 & & 1 & & & \\ & 1 & & 1 & & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ X_1 \\ \overline{X}_2 \\ X_2 \\ \overline{X}_3 \\ X_3 \end{pmatrix}}^{T} . \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & \\ 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} =$$

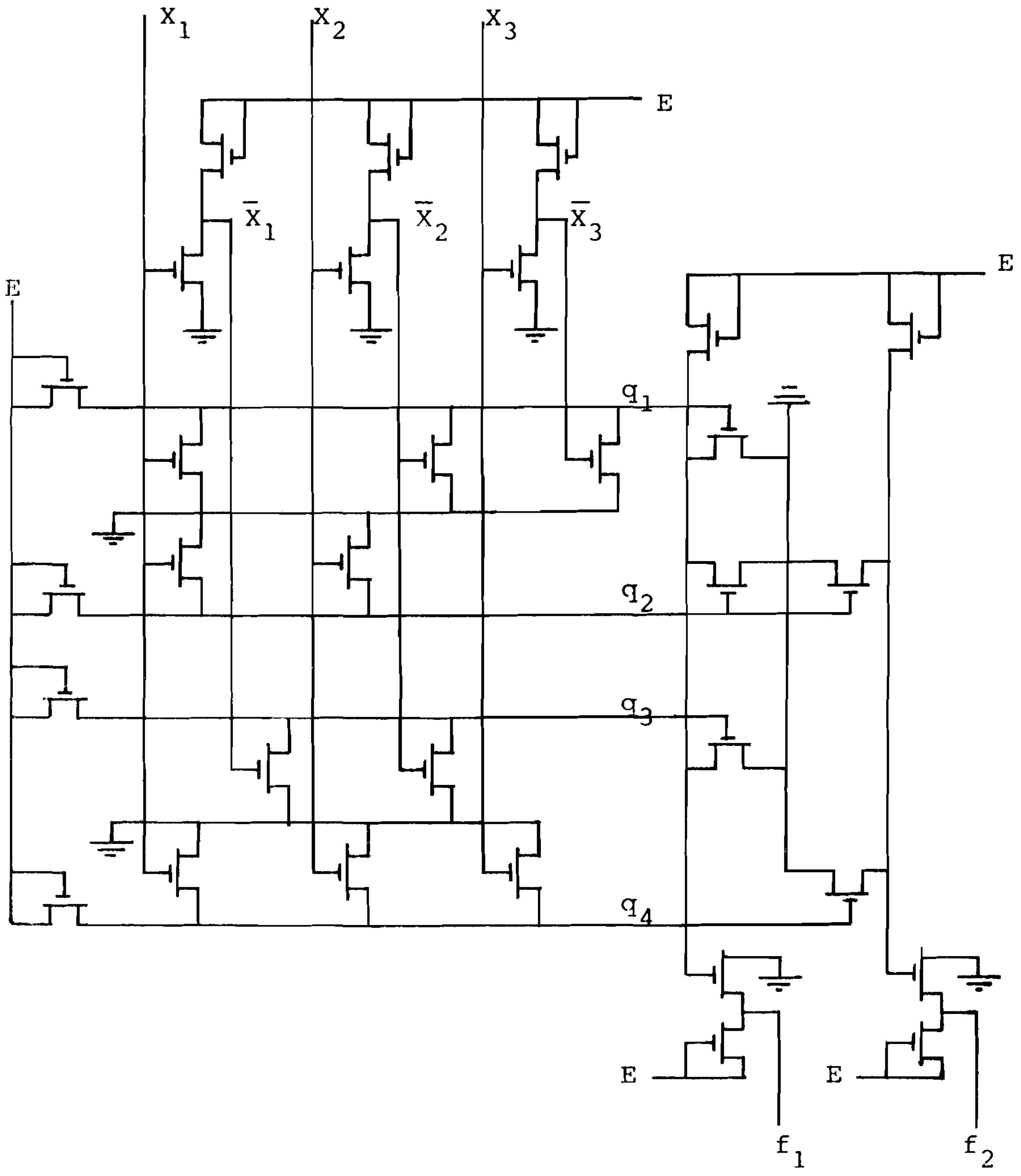
$$= \overline{\begin{pmatrix} X_1+\overline{X}_2+\overline{X}_3 \\ X_1+X_2 \\ \overline{X}_1+\overline{X}_2 \\ X_1+X_2+X_3 \end{pmatrix}} . \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & \\ 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} = (\overline{X}_1X_2X_3 \ \overline{X}_1\overline{X}_2 \ X_1X_2 \ \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3) . \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & \\ 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\overline{X}_1X_2X_3+\overline{X}_1\overline{X}_2+X_1X_2, X_1X_2+\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3)$$

Vector X is zo gekozen dat na vermenigvuldiging van X met een rij i van de matrix M_1 de gecomplementeerde q_i ontstaat.

De operatie "matrixvermenigvuldiging" komt overeen met de voorstelling van een functie in de OR-NOT basis en daarom vindt de realisatie van F plaats in de vorm van een parallelschakeling van transistoren, waarvan de posities bepaald worden door de verdeling van enen in M_1 en M_2. Deze matrices moeten beschouwd worden als een formele tabellering van het basiscircuit.

Als de matrices M_1 en M_2 bekend zijn, kunnen we gemakkelijk het basiscircuit schetsen :

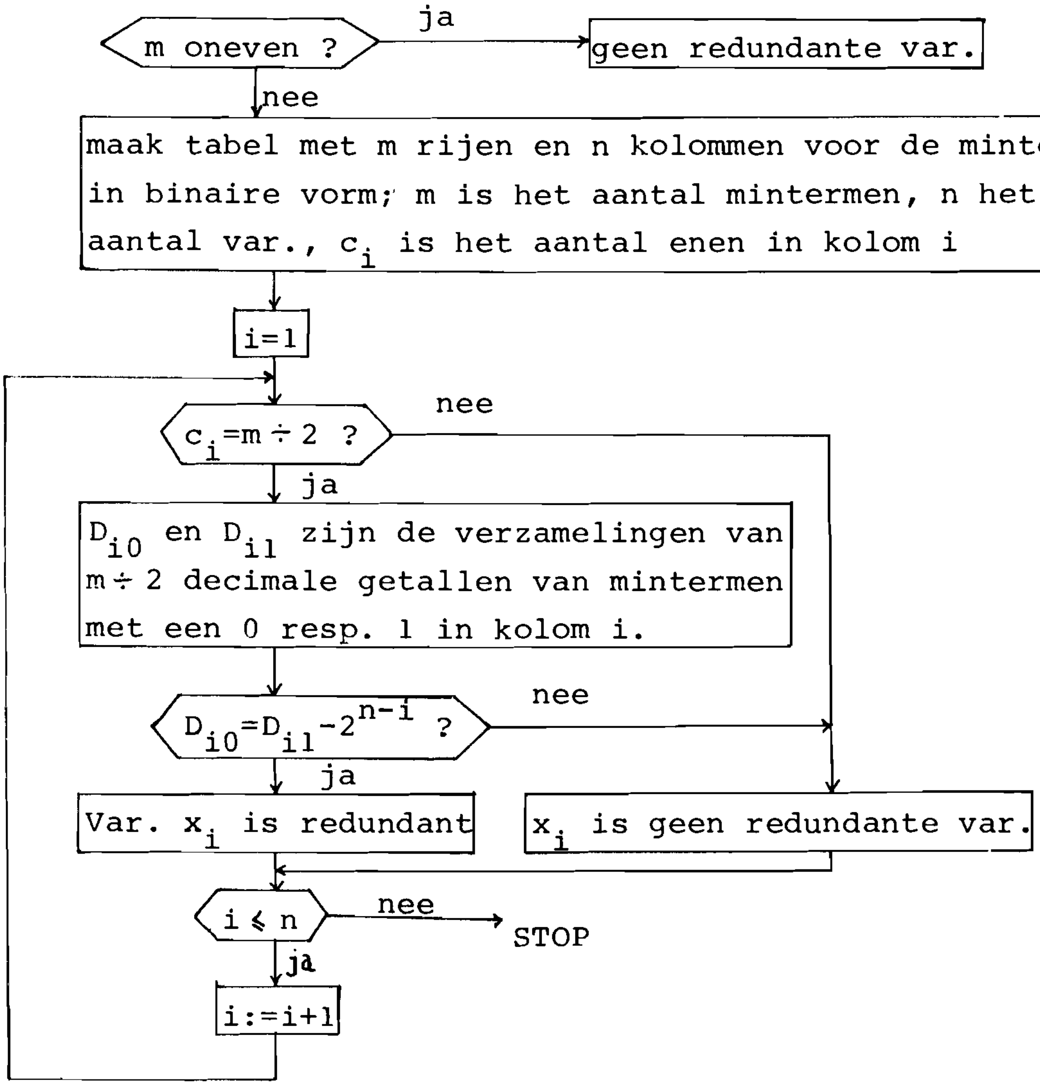


Het gebruik van matrix methoden verkleint het benodigde kristaloppervlak met een factor 6 vergeleken bij traditionele methoden.

ad 2: Een algoritme voor de identificatie van alle redundante variabelen van een schakelfunctie (2.1) en
een algoritme voor de identificatie van hun symmetrieën (totale of gedeeltelijke) (2.2).

Deze algoritmen zijn gebaseerd op de manipulatie van de binaire en decimale vorm van de mintermen in een schakelfunctie.

2.1 : Een variabele x_i van een functie $f(x_1, \ldots ,x_i, \ldots ,x_n)$ is redundant als $f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)=$
$f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$.
Het algoritme is:



Zie v.b.2.2 ter illustratie van het algoritme voor het identificeren van redundante variabelen.

v.b.2.2: Stel $f(x_1, \dots ,x_6)= \Sigma(1,3,17,19,37,39,53,55)$. Variabele x_1 heeft de hoogste prioriteit en de mintermen(in decimale vorm) lopen van 0 tot 2^6-1.

min-							x_1		x_2		x_3		x_5	
term	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	D_{10}	$D_{11}-32$	D_{20}	$D_{21}-16$	D_{40}	$D_{41}-4$	D_{50}	$D_{51}-2$
1	0	0	0	0	0	1	1		1		1		1	
3	0	0	0	0	1	1	3		3		3			2
17	0	1	0	0	0	1	17			1	17		17	
19	0	1	0	0	1	1	19			3	19	33		17
37	1	0	0	1	0	1		5	37			35	37	
39	1	0	0	1	1	1		7	39			49		37
53	1	1	0	1	0	1		21		37		51	53	
55	1	1	0	1	1	1		23		39				53
c_i	4	4	0	4	4	8								

Omdat $D_{20}=D_{21}-32$ en $D_{50}=D_{51}-2$ zijn de var. x_2 en x_5 redundant.

ad 2.2 : Een algoritme voor de identificatie van totale of gedeeltelijke symmetrie van een schakelfunctie.

Een schakelfunctie $f(x_1,..,x_i,..,x_j,..,x_n)$ noemen we symmetrisch m.b.t. $x_i^{p_i}$ en $x_j^{p_j}$ als :

$$f(x_1,..,x_i^{p_i},..,x_j^{p_j},..,x_n)=f(x_1,..,x_j^{p_j},..,x_i^{p_i},..,x_n) \quad (1)$$

waarbij $p_k=0$ of 1, $x_k^0=x_k$ en $x_k^1=\overline{x}_k$.

Het al dan niet symmetrisch zijn van f m.b.t. $x_i^{p_i}$ en $x_j^{p_j}$ noteren we in het vervolg met $f:x_i^{p_i} \sim x_j^{p_j}$ resp. $f:x_i^{p_i} \not\sim x_j^{p_j}$.

Een schakelfunctie heet "totaal symmetrisch of gewoon symmetrisch als voor elk tweetal x_i en x_j geldt dat $f:x_i \sim x_j$ of $f:x_i \sim \overline{x}_j$ waarbij $i \neq j$ en $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Met andere woorden $f(x_1,\ldots,x_n)$ is totaal symmetrisch als er een verzameling $\{p_1,\ldots,p_n\}$ bestaat zodat $f(x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n})$ onveranderd blijft ondanks welke permutatie van $x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n}$ dan ook. Een totaal symmetrische functie $f(x_1,\ldots x_n)$ kan gespecificeerd worden door een verzameling verschillende getallen $A=\{a_1,\ldots,a_q\}$,waarbij $0 \leqslant a_h \leqslant n$ en $h \in \{1,\ldots,q\}$, zodat $f(x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n})$ dan en slechts dan gelijk is aan 1 als de binaire vorm van elke minterm van $f(x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n})$ precies a_h enen bevat. De totale symmetrie van $f(x_1,\ldots,x_n)$ kan daarom genoteerd worden met $S_A(x_1^{p_1},\ldots,x_n^{p_n})$.

Een schakelfunctie heet partieel symmetrisch als $f:x_i \sim x_j$ of $f:x_i \sim \overline{x}_j$ geldt voor enkele i's en j's waarbij $i \neq j$ en $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Enkele eigenschappen van een symmetrische functie zijn:

1. Stelling: Een schakelfunctie $f(x_1,\ldots,x_n)$ is symmetrisch m.b.t. $x_i^{p_i}$ en $x_j^{p_j}$ dan en slechts dan als $f(x_1,\ldots,x_{i-1},p_i,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},1-p_j,x_{j+1},\ldots,x_n)=$

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},1-p_i,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},p_j,x_{j+1},\ldots,x_n)$$

waarbij $p_k=0$ of 1 , $x_k^0=x_k$ en $x_k^1=\overline{x}_k$. (2)

Bewijs: We expanderen $f(x_1,\ldots,x_n)$ naar de variabelen x_i en x_j:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\overline{x}_i\overline{x}_jR_0+\overline{x}_ix_jR_1+x_i\overline{x}_jR_2+x_ix_jR_3 \qquad (3)$$

met $R_0=f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)$

$R_1=f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},1,x_{j+1},\ldots,x_n)$

$R_2=f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)$

$R_3=f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},1,x_{j+1},\ldots,x_n)$

p_i en p_j kunnen vier waardecombinaties aannemen die we na elkaar zullen bekijken:

- $p_i=p_j=0$ of 1. Vergelijking (2) is gelijkwaardig met $R_1=R_2$. Omdat $R_1=R_2$ geldt $f{:}x_i\wedge' x_j$ of $f{:}\overline{x}_i\sim\overline{x}_j$.
- $p_i=\overline{p}_j=0$ of $p_i=\overline{p}_j=1$. Vergelijking (2) is gelijkwaardig met $R_0=R_3$. Omdat $R_0=R_3$ geldt $f{:}x_i\sim\overline{x}_j$ of $f{:}\overline{x}_i\sim x_j$.

2. Een schakelfunctie $f(x_1,\ldots x_n)$ is totaal symmetrisch dan en slechts dan als $\overline{f}(x_1,\ldots,x_n)$ totaal symmetrisch is.

   Dit is vrij gemakkelijk in te zien als we de expansie van $\overline{f}(x_1,\ldots,x_n)$ naar x_i en x_j bekijken:

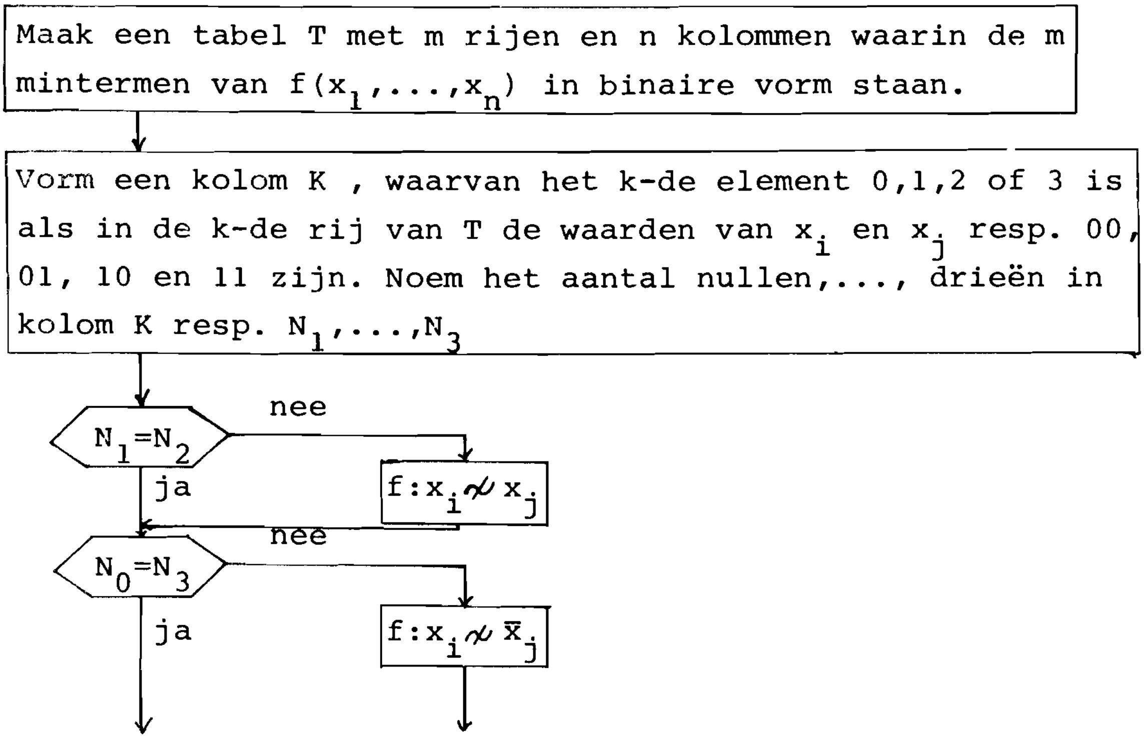
   $\overline{f}(x_1,\ldots,x_n)=\overline{x}_i\overline{x}_j\overline{R}_0+\overline{x}_ix_j\overline{R}_1+x_i\overline{x}_j\overline{R}_2+x_ix_j\overline{R}_3$

Uit de bovenstaande eigenschappen volgt :

Als $f{:}x_i^{p_i}\sim x_j^{p_j}$ en $p_i=p_j$ dan $R_1=R_2$.

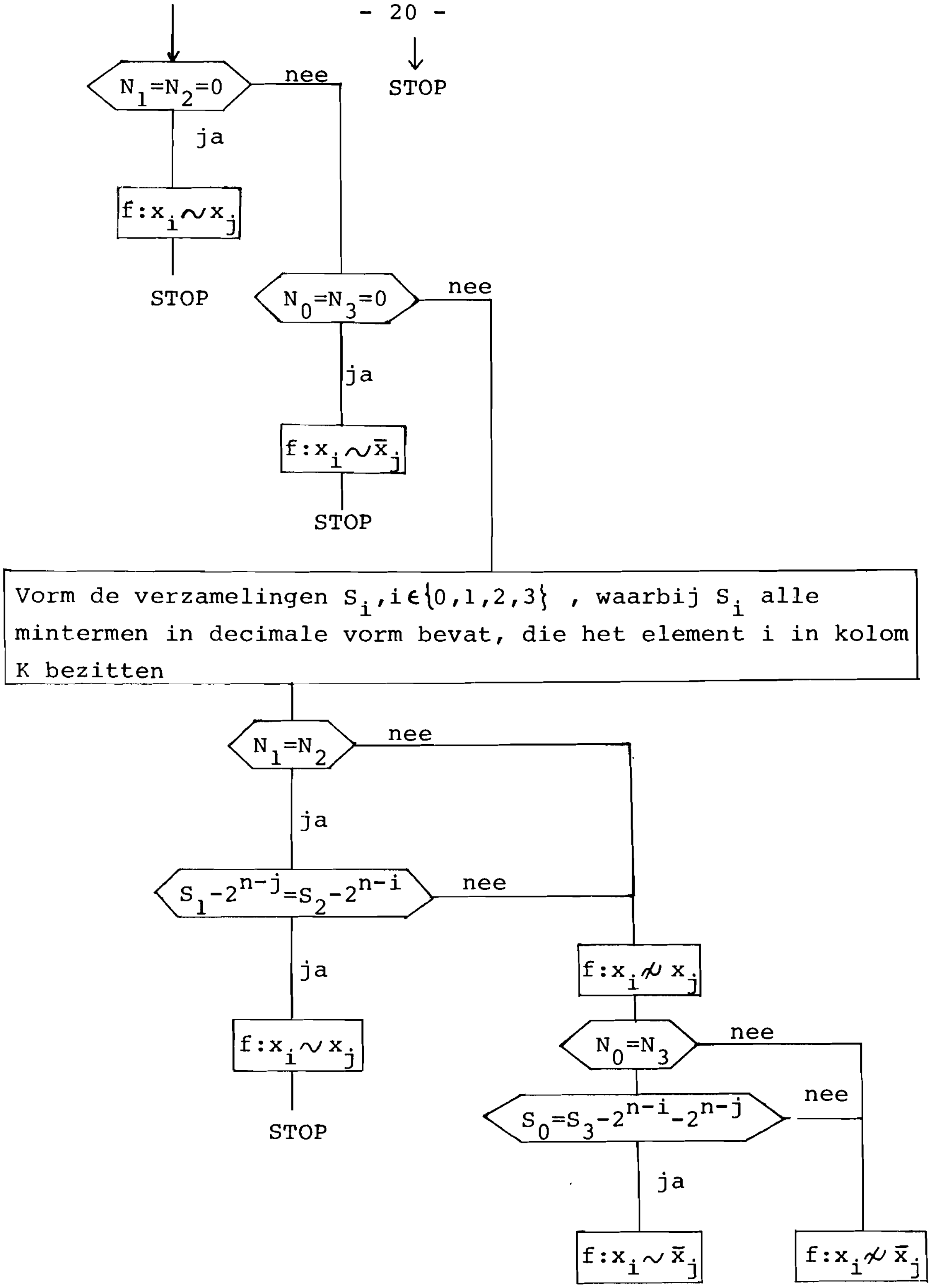
Als $f{:}x_i^{p_i}\sim x_j^{p_j}$ en $p_i\neq p_j$ dan $R_o=R_3$.

Het volgende algoritme test de symmetrie tussen elk tweetal variabelen $x_i^{p_i}$ en $x_j^{p_j}$ van een schakelfunctie $f(x_1,\ldots,x_n)$:



Maak een tabel T met m rijen en n kolommen waarin de m mintermen van $f(x_1,\ldots,x_n)$ in binaire vorm staan.

Vorm een kolom K , waarvan het k-de element 0,1,2 of 3 is als in de k-de rij van T de waarden van x_i en x_j resp. 00, 01, 10 en 11 zijn. Noem het aantal nullen,..., drieën in kolom K resp. $N_1,\ldots,N_3$



Zie v.b. 2.3 ter illustratie van het bovenstaande algoritme.

v.b.2.3 :Van de functie $f(x_1,...,x_5)= \Sigma(2,5,9,12,13,15,16,18,19,22,26,29)$ gaan we na of $f:x_1 \sim x_2$ of $f:x_1 \sim \bar{x}_2$. Variabele x_1 heeft de hoogste prioriteit.

Min-term	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	K	S_1-8	S_2-16	S_0	S_3-24
2	0	0	0	1	0	0			2	
5	0	0	1	0	1	1			5	
9	0	1	0	0	1	1	1			
12	0	1	1	0	0	1	3			
13	0	1	1	0	1	1	4			
15	0	1	1	1	1	1	7			
16	1	0	0	0	0	2		0		
18	1	0	0	1	0	2		2		
19	1	0	0	1	1	2		3		
22	1	0	1	1	0	2		6		
26	1	1	0	1	0	3				2
29	1	1	1	0	1	3				5

$S_0=\{2,5\}$

$S_1=\{9,12,13,15\} \Rightarrow S_1-2^{n-j}=S_1-2^{5-2}=\{1,3,4,7\}$

$S_2=\{16,18,19,22\} \Rightarrow S_2-2^{n-i}=S_2-2^{5-1}=\{0,2,3,6\}$

$S_3=\{26,29\} \Rightarrow S_3-2^{n-i}-2^{n-j}=S_3-24=\{2,5\}$

$$\left.\begin{array}{l} N_1=N_2\neq 0 \\ S_1-8\neq S_2-16 \end{array}\right\} \quad f:x_1 \not\sim x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} N_0=N_3\neq 0 \\ S_0=S_3-24 \end{array}\right\} \quad f:x_1 \sim \bar{x}_2$$

Het algoritme voor het identificeren van alle symmetrische paren en een eventuele totale symmetrie van een schakelfunctie bevat de volgende drie stappen:

1. Elimineer alle redundante variabelen van de schakelfunctie Noem de gereduceerde functie $f(x_1,...,x_n)$

2. Test van de volgende paren volgens bovenstaand algoritme hun symmetrie : $(x_1,x_2^{p_2}),(x_1,x_3^{p_3}),\ \dots\ ,(x_1,x_n^{p_n}),$

$$\begin{array}{l}(x_2,x_3^{p_3}),\ \dots\ ,(x_2,x_n^{p_n}),\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad(x_{n-1},x_n^{p_n}).\end{array}$$

Zodra we zien dat $f{:}x_i\sim x_j$ of $f{:}x_i\sim \bar{x}_j$, $i<j$, kunnen we alle paren elimineren die x_j of $x_j^{p_j}$ bevatten omdat de relatie "symmetrie" transitief is. Dit wil zeggen: Als $f{:}x_i\sim x_j$ en $f{:}x_j\sim x_k$ dan $f{:}x_i\sim x_k$. Dus als we weten $f{:}x_i\sim x_j$ en we testen $f{:}x_i\sim x_k$ dan weten we ook de symmetrie tussen x_j en x_k. Als alle paren getest of geëlimineerd zijn, hebben we alle variabelen verdeeld in groepen, zó, dat alle variabelen of hun complementen in dezelfde groep symmetrisch zijn en alle variabelen of hun complementen in verschillende groepen niet symmetrisch zijn.

3. Als in stap 2 slechts één groep gevonden wordt die de hele verzameling variabelen bevat dan is $f(x_1,\dots,x_n)$ totaal symmetrisch. Dan geldt: $f{:}x_1\sim x_j$ of $f{:}x_1\sim\bar{x}_j$, $j=2,3,\dots,n$. Er bestaat dus een verzameling $\{p_1=0,p_2,\dots,p_n\}$ zodat $f{:}x_1\sim x_2^{p_2}\sim\dots\sim x_n^{p_n}$. Tot slot bepalen we van $f(x_1,\dots,x_n)$ de symmetrische vorm $S_A(x_1,x_2^{p_2},\dots,x_n^{p_n})$.

v.b.2.4 :Zie de functie van v.b.2.3. Er zijn geen redundante variabelen. Bij het testen van de paren op hun symmetrie vinden we : $x_1\sim\bar{x}_2$(zie v.b.2.3), $x_1\sim\bar{x}_3$, $x_1\sim x_4$, $x_1\sim\bar{x}_5$. Dus de functie is totaal symmetrisch en er geldt : $f{:}x_1\sim\bar{x}_2\sim\bar{x}_3\sim x_4\sim\bar{x}_5$
Voor het bepalen van de verzameling A bepalen we de tabel T', die de mintermen van $f(x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,x_4,\bar{x}_5)$ bevat in binaire vorm.

tabel T'

Minterm	x_1	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	x_4	$\bar{x}_5$
2	0	1	1	1	1
5	0	1	0	0	0
9	0	0	1	0	0
12	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0
15	0	0	0	1	0
16	1	1	1	0	1
18	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	0
22	1	1	0	1	1
26	1	0	1	1	1
29	1	0	0	0	0

A is de verzameling van de sommen van de nullen en enen van elke minterm uit tabel T'. Dus $A=\{0,1,4,5\}$

Dus: $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=S_{0,1,4,5}(x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,x_4,\bar{x}_5)$

Hoofdstuk 3 : De algemene opbouw van een combinatorisch netwerk met gebruikmaking van ULM's, matrixvergelijkingen en programma's in APL.

3.1 Inleiding :

We gaan uit van een schakelfunctie $E(x_1, \ldots ,x_n)$ die we willen realiseren met een bouwsteen van één bepaald type (ULM). We kiezen een bouwsteen met één output en M inputs waarvan de outputfunctie $F(y_1, \ldots ,y_M)$ is. Om gebruik te kunnen maken van matrixvergelijkingen bij dit realisatieprobleem is het noodzakelijk na te gaan of er een variabele x_i van E af te splitsen is (i=1,...,N). In dit geval verkrijgen we de realisatie van E volgens fig. 3.1.

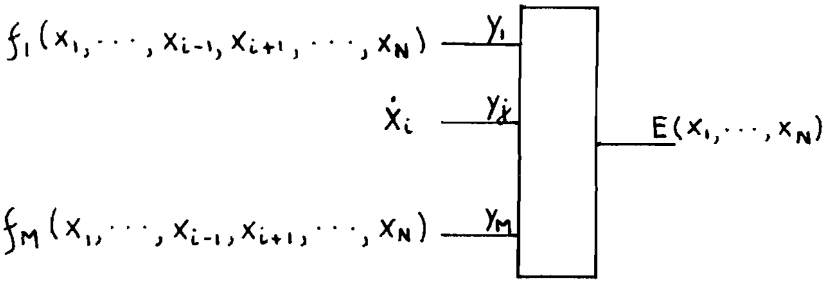


fig.3.1 : De realisatie van E met bouwsteen F als een var. x_i afgesplitst is ($\dot{x}_i$ is x_i of $\bar{x}_i$).

Of er een input y_j van bouwsteen F is waarop we de afgesplitste variabele x_i of $\bar{x}_i$ kunnen aansluiten, zodat aan de output de functie E beschikbaar is, onderzoeken we door een matrixvergelijking op te lossen (j=1,...,M). Als één variabele af te splitsen is, onderzoeken we of een tweede variabele af te splitsen is. Dit wil zeggen: We onderzoeken of naast de variabele x_i een tweede variabele x_l afgesplitst kan worden zodat $y_j=\dot{x}_i$ en $y_k=\dot{x}_l$. De functie E kan nu volgens fig.3.2 gevormd worden (i,l=1,...,N en i≠l ; $\dot{x}_i$ is x_i of $\bar{x}_i$)

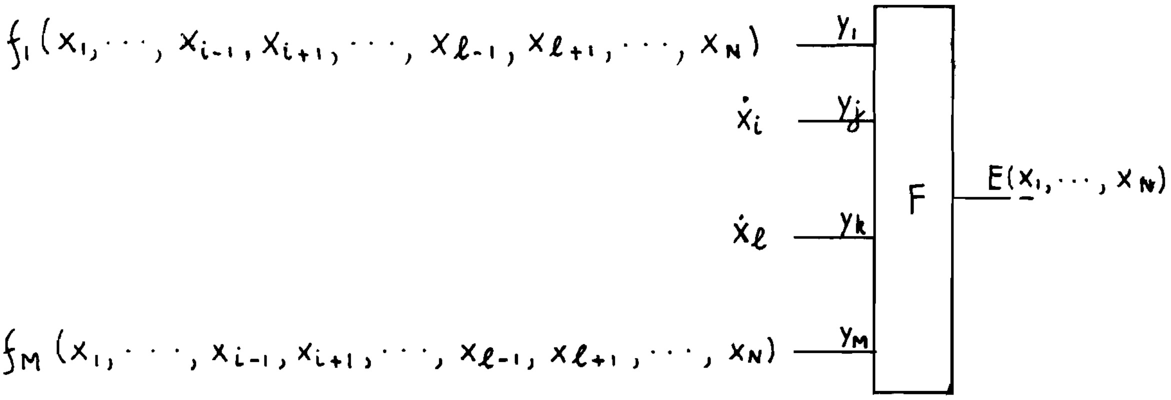


fig. 3.2: De realisatie van de functie E met bouwsteen F waarbij twee variabelen x_i en x_l afgesplitst zijn.

N.B. Er is een programma om na te gaan of er één variabele afgesplitst kan worden maar bij het programma om na te gaan of er twee variabelen afgesplitst kunnen worden, wordt niet eerst na gegaan of er één afgesplitst kan worden.

3.2 Het afsplitsen van één variabele van een schakelfunctie .

3.2.1 Theorie:

Gegeven zijn een functie $E(x_1, \ldots ,x_N)$ en een bouwsteen $F(y_1, \ldots ,y_M)$. We gaan na voor welke waarden van i en j een variabele x_i afgesplitst kan worden zodat $y_j=x_i$ of $y_j=\bar{x}_i$. Op de overige inputs dienen functies aangesloten te worden die niet afhangen van x_i. Om later met Boole matrices te kunnen rekenen, schrijven we de functies F en E als Boole vectoren t.o.v. de basis van de inputs $y_1,\ldots,y_M$ resp. de basis van de variabelen $x_1,\ldots,x_N$.

v.b.3.1 : Stel $E(x_1,x_2,x_3)=x_3+x_1x_2$
of $E= \Sigma(4,5,6,7,8)$ als we de 8 mogelijke mintermen nummeren van 1 t/m 8.

of E= 0 0 0 1 1 1 1 1

$$\underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\ x_1}_{\bar{x}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{x_2\ \cdot}}_{\bar{x}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}_{x_3}$$

Bij elke 0 of 1 in de laatste notatie van E hoort dus een waarde van x_1, x_2 en x_3.

Stel $F(y_1,y_2,y_3,y_4)=\bar{y}_4(\bar{y}_3(\bar{y}_2+y_1)+y_3y_2\bar{y}_1)+$
$y_4(\bar{y}_3(\bar{y}_2+\bar{y}_1)+y_3(\bar{y}_2+y_1)$.

of F= $\lesssim$(1,2,4,7,9,10,11,13,14,16)

of F= 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\bar{y}_1\ y_1}_{\bar{y}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{y_2\ \cdot}}_{\bar{y}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}_{y_3\ \cdot\ \cdot}}_{\bar{y}_4}\ \underbrace{\cdot}_{y_4}$$

Vervolgens wordt de functie E geëxpandeerd naar een variabele x_i. Uit de Boole vector E ontstaat dan een Boole matrix als we alle nullen en enen, die bij x_i behoren in de eerste en die bij $\bar{x}_i$ behoren in de tweede rij plaatsen

v.b.3.2 : Stel E= 0 0 0 1 1 1 1 1

$$\underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\ x_1}_{\bar{x}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{x_2\ \cdot}}_{\bar{x}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}_{x_3}$$

Als we E naar x_3 expanderen komen de eerste vier elementen van de Boole vector E in rij 1 en de laatste vier elementen in rij 2. E als matrix ziet er dan als volgt uit:

$$E=\begin{array}{cc} \begin{matrix}\bar{x}_3\\ x_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\ 1&1&1& \end{pmatrix}\\ & \begin{matrix}\bar{x}_1 & x_1 & \cdots\\ \bar{x}_2 & & x_2\end{matrix}\end{array}$$

De functie $E(x_1, \ldots, x_N)$ expanderen we naar elk van de variabelen $x_1,\ldots,x_N$. Zo ontstaan N matrices met 2 rijen en 2^{N-1} kolommen, welke de eerste zijn van een array EA met 2N matrices waarin matrix N+i ontstaat uit matrix i door het verwisselen van de rijen. De functie $f(y_1, \ldots, y_M)$ expanderen we naar elk van de inputs $y_1,\ldots,y_M$. Zo ontstaan M matrices die we gaan verenigen in het array FA.

v.b.3.3 : Stel E= 0 0 0 1 1 1 1 1 en

$\underbrace{\bar{x}_1\ x_1}\ \underbrace{.\ .\ .}$

$\underbrace{\bar{x}_2\quad x_2}\ .\ .\ \underbrace{\qquad}$

$\bar{x}_3 \qquad x_3$

F= 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1

$\underbrace{\bar{y}_1\ y_1}\ \underbrace{.\ .\ .}$

$\underbrace{\bar{y}_2\quad y_2}\ \underbrace{\qquad}$

$\underbrace{\bar{y}_3\qquad y_3}\ .\ .\ \underbrace{\qquad\qquad}$

$\bar{y}_4 \qquad\qquad y_4$

$$EA= \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_1 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ x_2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{x}_3 \\ x_3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \bar{x}_1 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x_2 \\ \bar{x}_2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x_3 \\ \bar{x}_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$FA= \begin{array}{c} \bar{y}_1 \\ y_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{y}_2 \\ y_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{y}_3 \\ y_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{y}_4 \\ y_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Om de waarden van i en j te vinden zodat onderstaande realisatie van de functie E met bouwsteen F mogelijk is, berekenen we de oplossingen R van de matrixvergelijking $FA(j) \otimes R=EA(i)$ ($FA(j)$ is de j-de matrix van array FA en $EA(i)$ de i-de matrix van array EA). Het bestaan van unitaire oplossingen van de matrixvergelijking $FA(j) \otimes R=EA(i)$ is gelijkwaardig met het bestaan van een realisatie van E volgens fig.3.1. Als de matrixvergelijking een unitaire oplossing R bezit dan kan y_j aangesloten worden op x_i als $i \leqslant N$ en op $\bar{x}_{i-N}$ als $i>N$. Dit betekent dat we zo de variabele x_{imodN} af kunnen splitsen.

v.b.3.4 : Stel $E=0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$ en

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\ x_1}_{\bar{x}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{x_2}}_{\bar{x}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{x_3}}$$

$F=1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\bar{y}_1\ y_1}_{\bar{y}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{y_2}}_{\bar{y}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{y_3}}_{\bar{y}_4}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{y_4}}$$

We onderzoeken nu of $E(x_1,x_2,x_3)$ gerealiseerd kan worden volgens fig.3.3.

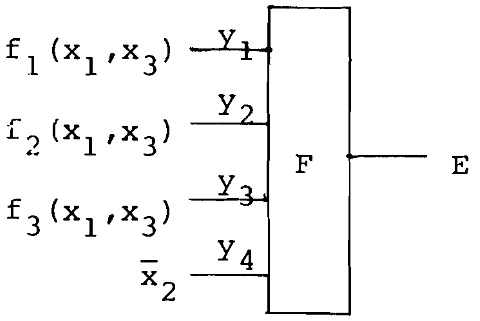


fig.3.3 : Realisatie van $E(x_1,x_2,x_3)$ als var. x_2 afgesplitst is en $y_4=\bar{x}_2$.

De var. x_2 is van E afgesplitst en $y_4=\bar{x}_2$.

We lossen R op uit : FA(4)$\otimes$ R=EA(5). Verklaring: Bij de eerste rijen van Fa(4) en EA(5) behoren $\bar{y}_4$ en x_2 ($\bar{y}_4=x_2 \Longleftrightarrow y_4=\bar{x}_2$). De unitaire oplossingen R van de matrixvergelijking FA(4)$\otimes$ R=EA(5) voldoen aan R$\rightarrow$S waarbij matrix S bepaald wordt door: $S_{ji}=1$ als kolom j van matrix FA(4) gelijk is aan rij i van matrix EA(5). $(S_{ji}=\prod_k(FA_{kj}(4)=EA_{ki}(5)))$ $S_{ji}=0$ in alle andere gevallen.

$$FA(4)=\begin{array}{c}\bar{y}_4\\y_4\end{array}\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$EA(5)=\begin{array}{c}x_2\\\bar{x}_2\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$(S_{ji})=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Omdat matrix S niet in alle kolommen een 1 heeft, zijn er geen unitaire oplossingen R van de matrixvergelijking FA(4)$\otimes$ R=EA(5). De functie E kan dus niet gerealiseerd worden met bouwsteen F als $y_4=\bar{x}_2$ en $y_i=f_i(x_1,x_3)$,i=1,2,3 (volgens fig.3.3).

Uitgaande van de functie $E(x_1, \ldots ,x_N)$ en de bouwsteen $f(y_1, \ldots ,y_M)$ zijn er 2NxM manieren om x_i of $\bar{x}_i$ op y_j aan te sluiten zodat variabele x_i afgesplitst kan worden van de functie $E(x_1, \ldots ,x_N)$ (i=1,...,N en j=1,...,M).
We lossen de bijbehorende 2NxM matrixvergelijkingen op en in een tabel met M rijen en 2N kolommen geven we met een 0 of 1 aan of bij de aansluiting $y_j=x_i$ of $y_j=\bar{x}_i$ de variabele x_i resp. niet of wel afgesplitst wordt.

3.2.2 Programma's in APL voor het afsplitsen van een var. van een schakelfunctie.

In deze paragraaf worden vijf programma's besproken : PAREN1 , G AR V, G ARH V, EV P en OV P.

De programma's OV(Oneven Vector) en EV(Even Vector) geven als output een vector met resp. oneven en even getallen van 1,...,P. OV en EV worden gebruikt in de programma's AR(ARray) en ARH(ARray Helft). Het programma AR wordt gebruikt voor het vormen van het array EA. V is de vector bestaande uit decimale getallen die de mintermen zijn van de functie E. G stelt het aantal variabelen N van E voor.
In het programma ARH wordt het array FA gevormd. Dit programma is volkomen identiek aan het eerste gedeelte van het programma AR. AR en ARH worden gebruikt in het programma PAREN1.
In PAREN1 wordt bepaald voor welke waarden van i en j de variabele x_i van $E(x_1, \ldots ,x_N)$ afgesplitst kan worden.
Dit houdt twee dingen in:

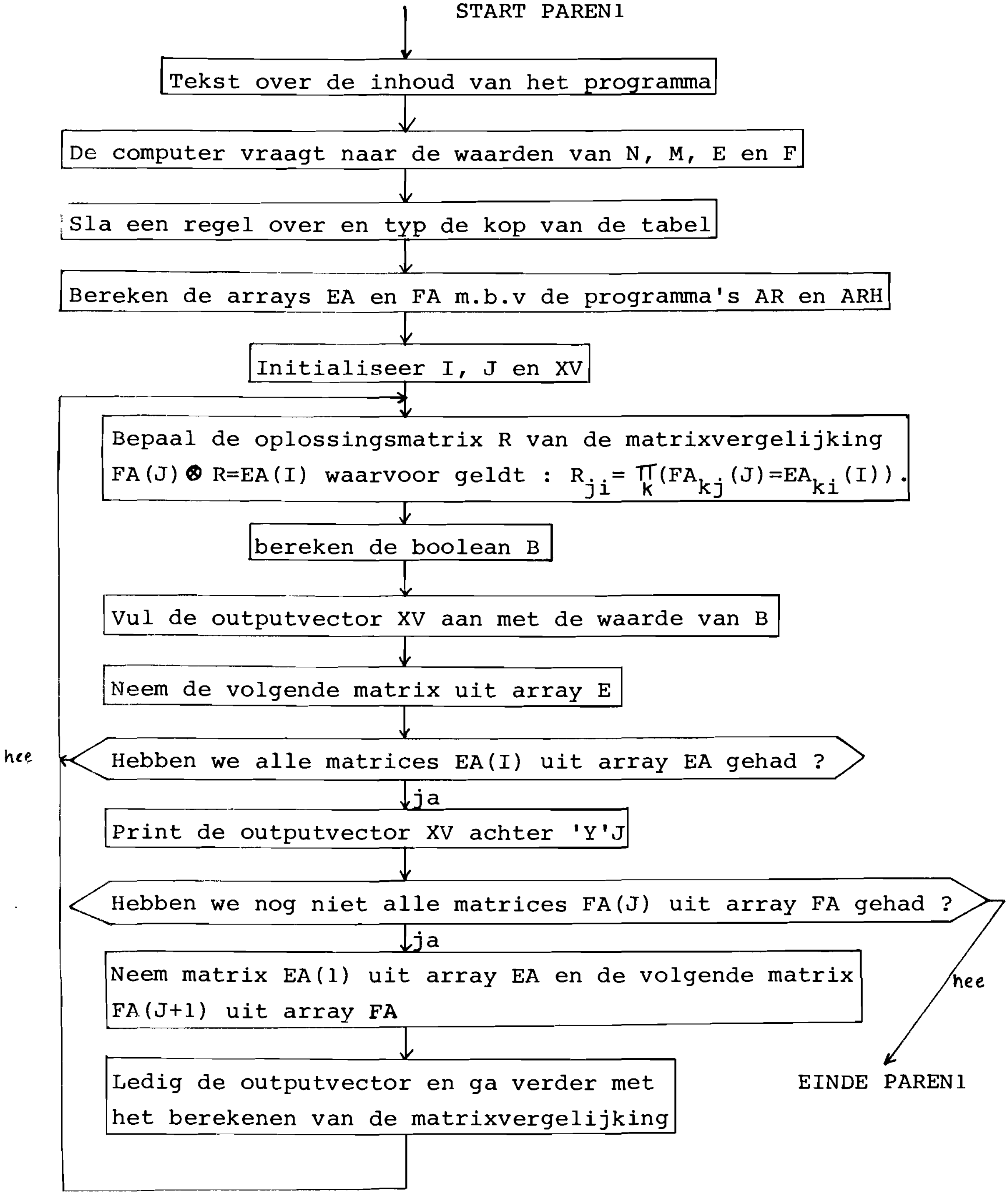
1. $y_j=x_i$ of $y_j=\overline{x}_i$ $(j=1,\ldots,M$ en $i=1,\ldots,N)$
2. Op de overige inputs y_k van de bouwsteen $F(y_1, \ldots ,y_M)$ kunnen functies aangesloten worden die niet afhangen van x_i $(k=1,\ldots,M$ en $k\neq j)$.

De programma's PAREN1, G AR V, G ARH V, EV P en OV P en hun resultaten worden nu gedetailleerd besproken:

Het programma PAREN1:

In het programma PAREN1 worden de waarden berekend van i en j bij de realisatie volgens fig.3.1 van de functie $E(x_1,\ldots,x_N)$ met bouwsteen $F(y_1,\ldots,y_M)$ waarbij de variabele x_i afgesplitst is. Bij het aanroepen van PAREN1 wordt gevraagd naar de waarde van N,M en naar de mintermen, als decimale getallen, van de functie E en F. Deze getallen mogen de waarden aannemen tussen 1 en resp. 2^N en 2^M. Het resultaat van PAREN1 is een tabel met M rijen en 2N kolommen. Bij de M rijen horen de resp. inputs $y_1,\ldots,y_M$ en bij de 2N kolommen horen de resp. variabelen $x_1,\ldots,x_N,\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_N$. Elk element T_{ji} van de tabel T is 0 of 1. Als $T_{ji}=1$ en $i\leq N$ dan kan x_i op y_j aangesloten worden en als $i>N$ dan kan $\overline{x}_i(=Nx_i)$ op y_j aangesloten worden. Als $T_{ji}=0$ dan zijn deze aansluitingen niet mogelijk mits we E volgens fig.3.1 willen realiseren.

Blokschema van programma PAREN1:



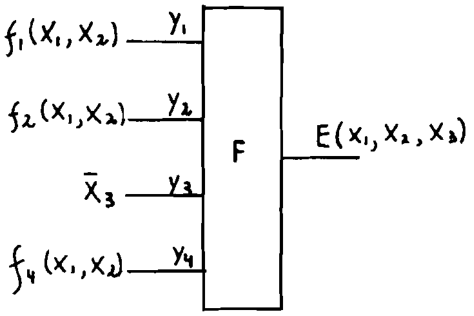
Listing van het programma PAREN1:

```
     ∇ PAREN1;I;J;B
[1]    'M.B.V. DEZE FUNCTIE WORDT BEPAALD VOOR WELKE WAARDEN'
[2]    'VAN I EN J DE VARIABELE X(I) VAN E(X1,...,XN) AFGESPLITST'
[3]    'KAN WORDEN . DIT HOUDT TWEE DINGEN IN :'
[4]    '1.  Y(J)=X(I) OF Y(J)=NX(I) , J=1,...,M EN I=1,...,N'
[5]    '2.  OF DE OVERIGE INPUTS Y(K) , K=1,...,M EN K≠J, KUNNEN '
[6]    '    FUNCTIES AANGESLOTEN WORDEN DIE NIET AFHANGEN VAN X(I).'
[7]    ''
[8]    'TYP HET AANTAL VARIABELEN VAN DE FUNCTIE E IN'
[9]    N←⎕
[10]   'TYP HET AANTAL INPUTS VAN DE BOUWSTEEN F IN'
[11]   M←⎕
[12]   'TYP DE MINTERMEN , ALS DECIMALE GETALLEN , VAN E IN'
[13]   E←⎕
[14]   'TYP DE MINTERMEN , ALS DECIMALE GETALLEN , VAN F IN'
[15]   F←⎕
[16]   ''
[17]   'MOGELIJKE AANSLUITINGEN VAN X(I) OF NX(I) OF Y(J):'
[18]   '      X1  X2 ... X';N;' NX1 NX2 ... NX';N
[19]   EA←N AR E
[20]   FA←M ARN F
[21]   J←1⍝  J IS DE TELLER VAN DE INPUTS VAN DE GEGEVEN BOUWSTEEN F
[22]   I←1⍝  I IS DE TELLER VAN DE VAR. VAN DE TE REALISEREN FUNCTIE E
[23]   XV←⍳0⍝  XV IS DE OUTPUTVECTOR
[24]  BER:R←(⍉FA[J;;])∧.=EA[I;;]
[25]   B←∧/∨/[1]R
[26]   XV←XV,B
[27]   I←I+1
[28]   →(×I−2×N)⌽BER,PRINT,BER
[29]  PRINT:'Y';J;'     ';XV
[30]   →(×J−M)⌽0,0,VR⍝  ALS J<M GA DAN NAAR DE VOLGENDE REGEL(VR)
[31]  VR:I←1
[32]   J←J+1
[33]   XV←⍳0
[34]   →BER
     ∇
```

Resultaten van PAREN1:

```
      PAREN1
M.B.V. DEZE FUNCTIE WORDT BEPAALD VOOR WELKE WAARDEN
VAN I EN J DE VARIABELE X(I) VAN E(X1,...,XN) AFGESPLITST
KAN WORDEN . DIT HOUDT TWEE DINGEN IN :
1.   Y(J)=X(I) OF Y(J)=NX(I) , J=1,...,M EN I=1,...,N
2.   OF DE OVERIGE INPUTS Y(K) , K=1,...,M EN K≠J, KUNNEN
     FUNCTIES AANGESLOTEN WORDEN DIE NIET AFHANGEN VAN X(I).

TYP HET AANTAL VARIABELEN VAN DE FUNCTIE E IN
⎕:
      3
TYP HET AANTAL INPUTS VAN DE BOUWSTEEN F IN
⎕:
      4
TYP DE MINTERMEN , ALS DECIMALE GETALLEN , VAN E IN
⎕:
      4 5 6 7 8
TYP DE MINTERMEN , ALS DECIMALE GETALLEN , VAN F IN
⎕:
      1 2 4 7 9 10 11 13 14 16

MOGELIJKE AANSLUITINGEN VAN X(I) OF NX(I) OF Y(J):
      X1  X2 ... X3 NX1 NX2 ... NX3
Y1    1   1   1   1   1   1
Y2    1   1   1   1   1   1
Y3    0   0   1   0   0   1
Y4    0   0   1   0   0   1
```

In de bovenstaande tabel kunnen we lezen dat in de derde rij en de zesde kolom een 1 staat. Deze 1 betekent dat de volgende realisatie van $E(x_1,x_2,x_3)$ mogelijk is:

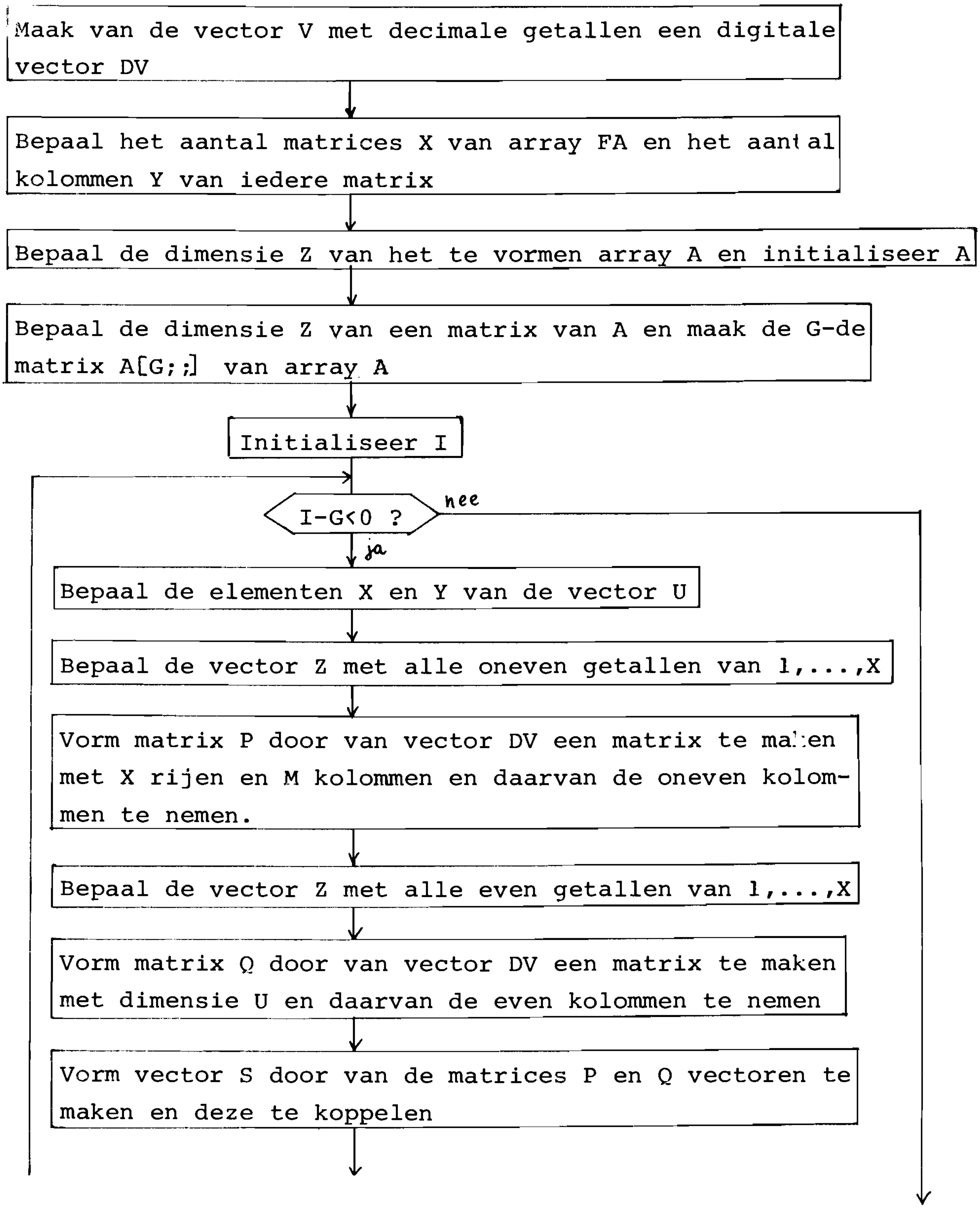


We kunnen de functies f_1,f_2 en f_4 bepalen maar dit stellen we uit want we proberen eerst(in het tweede gedeelte van dit hoofdstuk) twee var. i.p.v. één van E af te splitsen.

Het programma G AR V:

In het programma PAREN1 wordt gebruik gemaakt van de arrays FA en EA. Array FA maken we m.b.v. het programma **ARH en** array EA m.b.v. het programma AR.

Blokschema van AR: (We gaan uit van een functie V van G var.)



Maak van de vector V met decimale getallen een digitale vector DV

Bepaal het aantal matrices X van array FA en het aantal kolommen Y van iedere matrix

Bepaal de dimensie Z van het te vormen array A en initialiseer A

Bepaal de dimensie Z van een matrix van A en maak de G-de matrix A[G;;] van array A

Initialiseer I

I-G<0 ?

Bepaal de elementen X en Y van de vector U

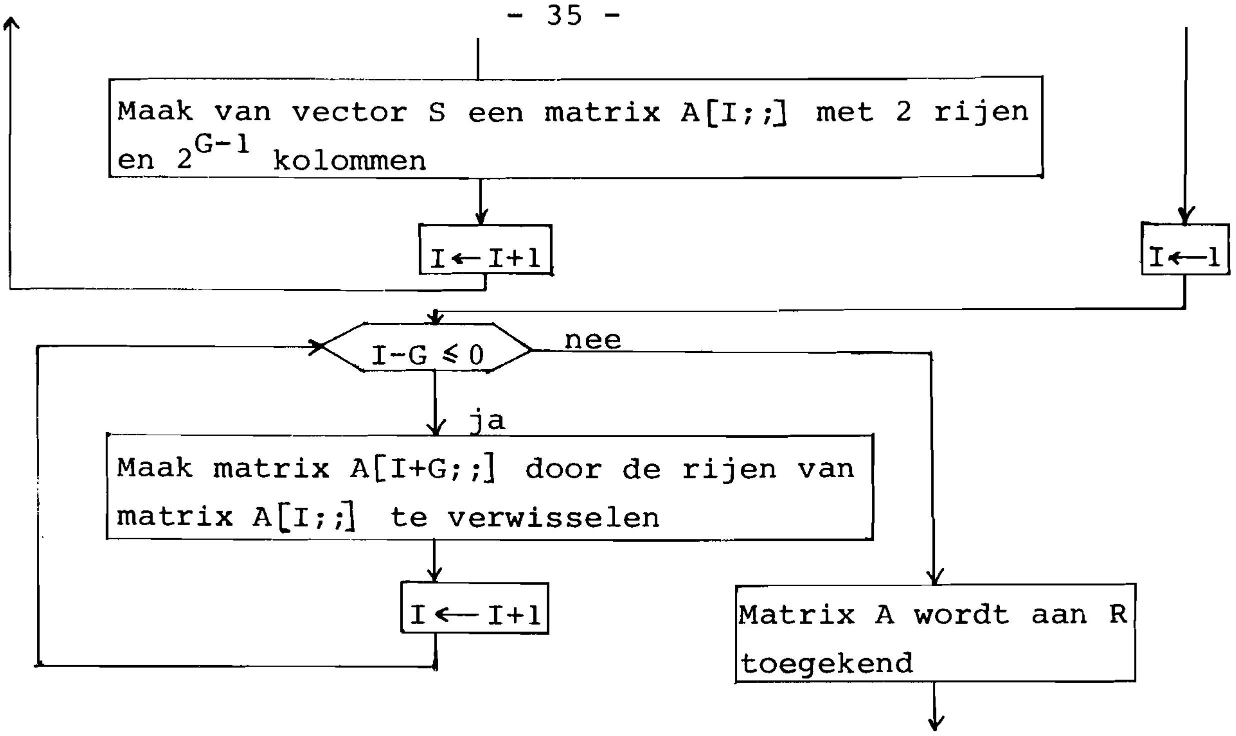
Bepaal de vector Z met alle oneven getallen van 1,...,X

Vorm matrix P door van vector DV een matrix te maken met X rijen en M kolommen en daarvan de oneven kolommen te nemen.

Bepaal de vector Z met alle even getallen van 1,...,X

Vorm matrix Q door van vector DV een matrix te maken met dimensie U en daarvan de even kolommen te nemen

Vorm vector S door van de matrices P en Q vectoren te maken en deze te koppelen



Listing van G AR V:

```
      ∇ R←G AR V;X;Y;Z;A;I;U;P;Q;S
[1]     DV←(⍳2*G)∊V
[2]     X←2×G
[3]     Y←2*G−1
[4]     Z←(,X),2,,Y
[5]     A←Z⍴0
[6]     Z←2,Y
[7]     A[G;;]←Z⍴DV
[8]     I←1
[9]    LOOP:→(×I−G)⌽NUL,0,KNUL
[10]   KNUL:X←2*1+G−I
[11]    Y←2*I−1
[12]    U←(,X),,Y
[13]    Z←OV  2*1+G−I
[14]    P←(U⍴DV)[Z;]
[15]    Z←EV  2*1+G−I
[16]    Q←(U⍴DV)[Z;]
[17]    S←(,P),,Q
[18]    U←2*G−1
[19]    Z←2,,U
[20]    A[I;;]←Z⍴S
[21]    I←I+1
[22]    →LOOP
[23]   NUL:I←1
[24]   NLOOP:→(×I−G)⌽DO,RE,DO
[25]   DO:A[I+G;;]←⊖A[I;;]
[26]    I←I+1
[27]    →NLOOP
[28]   RE:R←A
[29]    →0
      ∇
```

Resultaten van het programma G AR V:

```
        V←1  2  3  5  6  7
        G←3
          G  AR  V
1  1  1  1
1  0  1  0

1  1  1  1
1  0  1  0

1  1  1  0
1  1  1  0

1  0  1  0
1  1  1  1

1  0  1  0
1  1  1  1

1  1  1  0
1  1  1  0


        G←4
        V←1  2  4  5  7  9  12

        G  AR  V
1  0  1  1  1  0  0  0
1  1  0  0  0  1  0  0

1  1  1  0  1  0  0  0
0  1  1  0  0  1  0  0

1  1  0  1  1  0  0  1
1  0  1  0  0  0  0  0

1  1  0  1  1  0  1  0
1  0  0  1  0  0  0  0

1  1  0  0  0  1  0  0
1  0  1  1  1  0  0  0

0  1  1  0  0  1  0  0
1  1  1  0  1  0  0  0

1  0  1  0  0  0  0  0
1  1  0  1  1  0  0  1

1  0  0  1  0  0  0  0
1  1  0  1  1  0  1  0
```

Toelichting:

Als $V=\{1,2,3,5,6,7\}$ en $G=3$ dan is DV= 1 1 1 0 1 1 1 0 en $V(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1+\bar{x}_2$. Bij de rijen van de eerste matrix behoort de basis van de var. x_1 en bij de kolommen de basis van de var. x_2 en x_3. Dit kunnen we als volgt weergeven :

$$\begin{array}{ccccc} \bar{x}_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\bar{x}_2 \quad x_2}_{\bar{x}_3}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\quad\dots\quad}_{x_3}} \end{array}$$

Bij de rijen van de tweede resp. derde matrix behoren de bases van de var. x_2 en x_3. De (3+i)-de matrix ontstaat uit de i-de matrix door het verwisselen van rijen(i=1,2,3).

Als $V=\{1,2,4,5,7,9,12\}$ en $G=4$ dan geldt :

DV=1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0

en $V(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_4\bar{x}_3\{\bar{x}_2+x_1)+$

$+\bar{x}_4x_3\bar{x}_1+x_4\bar{x}_3(\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1x_2)$.

```
         G←5
         V←1 2 3 6 8 9 11 14 21 30 31 32

         G AR V
1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1
1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1

1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1
1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1

1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1

1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0
1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1

1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1

1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1
1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1

1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1

0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1
1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1
1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0

0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1
1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0
```

Als $V=\{1,2,3,6,8,9,11,14,21,30,31,32\}$ en $G=5$ dan geldt

DV=1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1

en $V(x_1,\dots,x_5)=\overline{x}_5(\overline{x}_4(\overline{x}_3(\overline{x}_1+\overline{x}_2)+x_3x_1)+x_4(\overline{x}_3\overline{x}_1+x_3\overline{x}_2x_1))+$

$$+x_5(\overline{x}_4x_3\overline{x}_2\overline{x}_1+x_4x_3(x_1+x_2))$$

Het programma G ARH V :

ARH dient voor het vormen van array FA. ARH is gelijk aan het eerste gedeelte van AR. Als we G en V voor ARH en AR hetzelfde nemen dan is de output van G ARH V gelijk aan de eerste G matrices van programma G AR V.

Listing van G ARH V :

```
     ∇ R←G ARH V;Y;Z;A;I;L;U;O;P;Q;S
[1]    DV←(⍳2*G)∊V
[2]    Y←2*G−1
[3]    Z←G,2,Y
[4]    A←Z⍴0
[5]    Z←2,Y
[6]    A[G;;]←Z⍴DV
[7]    I←1
[8]   LOOP:→(×I−G)⌽OUT,0,KNUL
[9]   KNUL:K←2*1+G−I
[10]   L←2*I−1
[11]   U←K,L
[12]   O←OV K
[13]   P←(U⍴DV)[O;]
[14]   O←EV K
[15]   Q←(U⍴DV)[O;]
[16]   S←(,P),,Q
[17]   A[I;;]←Z⍴S
[18]   I←I+1
[19]   →LOOP
[20]  OUT:R←A
[21]   →0
     ∇
```

Resultaten van G ARH V :

```
      G←3
      V←1 2 3 5 6 7

      G ARH V
1  1  1  1
1  0  1  0

1  1  1  1
1  0  1  0

1  1  1  0
1  1  1  0
```

```
      G←4
      V←1 2 4 5 7 9 12

      G ARH V
1  0  1  1  1  0  0  0
1  1  0  0  0  1  0  0

1  1  1  0  1  0  0  0
0  1  1  0  0  1  0  0

1  1  0  1  1  0  0  1
1  0  1  0  0  0  0  0

1  1  0  1  1  0  1  0
1  0  0  1  0  0  0  0
```

```
        G←5
        V←1  2  3  6  8  9  11  14  21  30  31  32

        G  ARH  V
1   1   0   0   1   1   0   0   0   0   1   0   0   0   0   1
1   0   1   1   0   0   1   0   0   0   0   0   0   0   1   1

1   1   0   1   1   0   0   1   0   0   1   0   0   0   0   1
1   0   0   1   1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   1   1

1   1   1   0   1   0   1   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   1   0   1   0   1   0   0   1   0   0   0   0   1   1   1

1   1   1   0   0   1   0   1   0   0   0   0   1   0   0   0
1   0   1   0   0   1   0   0   0   0   0   0   0   1   1   1

1   1   1   0   0   1   0   1   1   0   1   0   0   1   0   0
0   0   0   0   1   0   0   0   0   0   0   0   0   1   1   1
```

De programma's EV P en OV P:

EV P en OV P , waarbij P een natuurlijk getal is , bestaan slechts uit één statement. Zij worden gebruikt in de programma's G ARH V en G AR V.

Listing en resultaten van EV P en OV P :

```
      ∇ R←OV P
[1]     R←(2|⍳P)/⍳P
[2]     ⍝ OV IS DE VECTOR MET ONEVEN GETALLEN VAN 1,...,P
      ∇
        OV 7
1   3   5   7
        OV 8
1   3   5   7


      ∇ R←EV P
[1]     R←(0=2|⍳P)/⍳P
[2]     ⍝ EV IS DE VECTOR MET EVEN GETALLEN VAM 1,...,P
      ∇
        EV 16
2   4   6   8   10   12   14   16
        EV 13
2   4   6   8   10   12
```

3.2.3. Discussie:

Bij het controleren van de resultaten van PAREN1 kunnen we opmerken dat, als matrix FA(J) de vier verschillende kolommen $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$, $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$, $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ bevat, rij J van de tabel slechts enen bevat.

Het zou zinvol zijn, voordat we het programma PAREN1 starten, na te gaan of de functie $E(x_1,...,x_N)$ redundante variabelen bevat. Deze zijn gemakkelijk te detekteren als we met het programma N AR E array EA hebben gevormd. (Als namelijk matrix EA(I) twee identieke rijen bevat, dan is variabele x_I redundant (I=1,...,N))

v.b.3.5 : Als $E=\{1,2,3,5,6,7\}$ en N=3 dan

$$EA= \begin{array}{c}\bar{x}_1\\x_1\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{x}_2\\x_2\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{x}_3\\x_3\end{array}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}x_1\\\bar{x}_1\end{array}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

.

.

.

Omdat EA(3) twee gelijke rijen bevat is variabele x_3 redundant. We kunnen functie E nu vereenvoudigen tot $E=\{1,2,3\}$ en N=2

Voor het uitvoeren van het programma PAREN1 moet $E(x_1,...,x_N)$ een functie zijn van minimaal één var. en bouwsteen $F(y_1,...,y_M)$ minimaal één input bevatten.

We hebben de beperkingen van PAREN1 onderzocht en gevonden dat de uitvoering van PAREN1 ongeveer 10 minuten duurt als N=6 en M=10 of N=M=7. Als N=3 en M=10 bedraagt deze tijd ongeveer 5 seconden.

3.3 Het afsplitsen van twee variabelen van een schakelfunctie

3.3.1 Theorie :

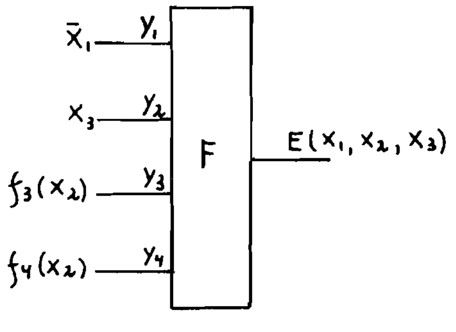
We gaan uit van een functie $E(x_1,...,x_N)$ die we willen realiseren met een bouwsteen $F(y_1,...,y_M)$. Als er twee variabelen van E afgesplitst kunnen worden wil dat zeggen dat een realisatie van E volgens fig. 3.2 mogelijk is. In matrixtaal betekent deze realisatie dat we de functie F expanderen naar de variabelen y_j en y_k en de functie E expanderen naar de variabelen $\dot{x}_i$ en $\dot{x}_l$ ($\dot{x}_i$ is x_i of $\bar{x}_l$). Door deze expansies zijn de matrices FM en EM uit resp. F en E ontstaan die beiden vier rijen bevatten. Als de matrixvergelijking $FM \otimes R = EM$ tenminste een unitaire oplossing R heeft dan is de realisatie van E volgens fig.3.2 mogelijk.

v.b. 3.6 : $E=\{4,5,6,7,8\} \Longleftrightarrow E(x_1,x_2,x_3)=x_3+x_1x_2 \Longleftrightarrow E=0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$

$F=\{2\ 3\ 4\ 7\ 8\ 10\ 12\ 14\ 15\ 16\} \Longleftrightarrow$

$F=\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$

We vragen ons af of de onderstaande realisatie van E mogelijk is.



Hiertoe expanderen we E naar de variabelen x_3 en $\bar{x}_1$:

$E=\bar{x}_3x_1(x_2) + \bar{x}_3\bar{x}_1(0) + x_3x_1(1) + x_3\bar{x}_1(1)$

Deze expansie kunnen we ook in de volgende Boole matrix EM uitdrukken :

$$EM = \begin{array}{cc|cc} \bar{x}_3 & x_1 & 0 & 1 \\ & \bar{x}_1 & 0 & 0 \\ x_3 & \vdots & 1 & 1 \\ & \vdots & 1 & 1 \\ \hline & & \bar{x}_2 & x_2 \end{array}$$

Bij de rijen van EM hoort dus de basis van de variabelen x_3 en $\bar{x}_1$ en bij de kolommen de basis van de resterende variabele x_2. Net zo expanderen we F naar de variabelen y_2 en y_1:

$$F = \bar{y}_2\bar{y}_1(0) + \bar{y}_2 y_1(\bar{y}_3+y_4) + y_2\bar{y}_1(y_3+\bar{y}_4) + y_2 y_1(1)$$

In een matrix FM uitgedrukt wordt dit :

$$FM = \begin{array}{cc|cccc} \bar{y}_2 & \bar{y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & y_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ y_2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & \underbrace{\bar{y}_3 \quad y_3}_{\bar{y}_4} & & \underbrace{\quad \cdots \quad}_{y_4} & \end{array}$$

Als de matrixvergelijking $FM \otimes R = EM$ tenminste een unitaire oplossing R heeft is bovenstaande realisatie mogelijk. We weten dat alle unitaire oplossingen voldoen aan $R \rightarrow S$ waarbij matrix S als volgt berekend wordt : $S_{ji} = \prod_k (FM_{jk} = EM_{ki})$ of te wel $S_{ji} = 1$ als de j-de kolom van FM gelijk is aan de i-de kolom van EM. Anders is $S_{ji} = 0$.

$$\text{Dus } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Omdat matrix S in de tweede kolom geen 1 bevat, bestaat er geen unitaire oplossing R en de bovenstaande realisatie van E is niet mogelijk.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen we twee variabelen van $E(x_1,...,x_N)$ afsplitsen zodat de realisatie van E volens fig.3.2 mogelijk is ? Op $\binom{M}{2}$ manieren kunnen we twee inputs y_j en y_k uit de M aanwezige inputs kiezen. Op 2N manieren kunnen we x_i of $\overline{x}_i$ $(i=1,...,N)$ kiezen om aan te sluiten op y_j (de var. x_i is nu afgesplitst). Er zijn 2N-2 mogelijkheden om x_l of $\overline{x}_l$ $(l=1,...,i-1,i+1,...,N)$ aan te sluiten op y_k. Het totale aantal mogelijke aansluitingen is dus: $\binom{M}{2}.2N.(2N-2)= 2N(N-1)M(M-1)$.

Dit betekent dat als we onderzoeken of $E(x_1,...,x_N)$ m.b.v. $F(y_1,...,y_M)$ volgens fig.3.2 gerealiseerd kan worden we maximaal $2N(N-1)M(M-1)$ matrixvergelijkingen hoeven op te lossen.

We creeren nu twee arrays FAA en EAA die resp. $M(M-1)$ en $2N(N-1)$ matrices bevatten. Het vormen van FAA kunnen we splitsen in de volgende M stappen :

stap 1 : Maak 1 matrix waarin geldt dat de basis van de variabelen y_2 en y_1 bij de vier rijen behoort.

stap 2 : Maak 2 matrices waarvoor geldt dat bij hun resp. rijen de bases van de variabelen y_3 en y_1 resp. 2 horen.

.

.

.

stap M-1 : Maak M-1 matrices waarvoor geldt dat bij hun resp. rijen de bases van de variabelen y_M en y_1 resp. ...M-1 horen.

stap M : Matrix $FAA(1/2M(M-1)+j)$ ontstaat uit matrix $FAA(j)$ door het verwisselen van de tweede en derde rij. Dit betekent dat als de basis van y_a en y_b bij de rijen van $FAA(j)$ behoort, de basis van y_b en y_a behoort bij de rijen van $FAA(1/2M(M-1)+j)$. $(j=1,...,1/2M(M-1))$

v.b.3.7 : Stel $F=\{2,3,4,7,8,10,12,14,15,16\}$

$$F=0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\bar{y}_1\ y_1}_{\bar{y}_2}\ \underbrace{\cdots}_{y_2}}_{\bar{y}_3}\ \underbrace{\cdots}_{y_3}}_{\bar{y}_4}\ \underbrace{\cdots}_{y_4}}$$

$$EAA=\overset{①}{\begin{array}{r}\bar{y}_2\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ y_1\end{pmatrix}\\ y_2\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{④}{\begin{array}{r}\bar{y}_4\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ y_1\end{pmatrix}\\ y_4\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑦}{\begin{array}{r}\bar{y}_1\begin{pmatrix}\bar{y}_2\\ y_2\end{pmatrix}\\ y_1\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑩}{\begin{array}{r}\bar{y}_1\begin{pmatrix}\bar{y}_4\\ y_4\end{pmatrix}\\ y_1\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}$$

$$\overset{②}{\begin{array}{r}\bar{y}_3\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ y_1\end{pmatrix}\\ y_3\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑤}{\begin{array}{r}\bar{y}_4\begin{pmatrix}\bar{y}_2\\ y_2\end{pmatrix}\\ y_4\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑧}{\begin{array}{r}\bar{y}_1\begin{pmatrix}\bar{y}_3\\ y_3\end{pmatrix}\\ y_1\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑪}{\begin{array}{r}\bar{y}_2\begin{pmatrix}\bar{y}_4\\ y_4\end{pmatrix}\\ y_2\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}}$$

$$\overset{③}{\begin{array}{r}\bar{y}_3\begin{pmatrix}\bar{y}_2\\ y_2\end{pmatrix}\\ y_3\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑥}{\begin{array}{r}\bar{y}_4\begin{pmatrix}\bar{y}_3\\ y_3\end{pmatrix}\\ y_4\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑨}{\begin{array}{r}\bar{y}_2\begin{pmatrix}\bar{y}_3\\ y_3\end{pmatrix}\\ y_2\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}\quad \overset{⑫}{\begin{array}{r}\bar{y}_3\begin{pmatrix}\bar{y}_4\\ y_4\end{pmatrix}\\ y_3\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}}$$

Matrix EAA kunnen we maken in N+2 stappen waarbij de eerste N-1 stappen hetzelfde verlopen als de eerste M-1 bij het creeren van FAA. De laatste drie stappen, waarin $C=1/2N(N-1)$ en $i=1,\ldots,C$, zijn:

stap N : Matrix EAA(C+i) ontstaat uit matrix EAA(i) door het verwisselen van de eerste en tweede rij en van de derde en vierde rij.

stap N+1 : Matrix EAA(2C+i) ontstaat uit matrix EAA(i) door het verwisselen van de eerste en tweede rij en de derde en vierde rij.

stap N+2 : Matrix EAA(3C+i) ontstaat uit matrix EAA(i) door de volgende transformatie van rijen : Rij a+1 van matrix EAA(i) wordt rij (4-a) van matrix EAA(3C+i) (a=0,1,2,3).

v.b.3.8 : Stel $E=\{4,5,6,7,8\}$

$$E=\underbrace{\underbrace{\underbrace{0}_{\bar{x}_1}\;\underbrace{0}_{x_1}}_{\bar{x}_2}\;\underbrace{0\;\;1}_{x_2}}_{\bar{x}_3}\;\;\underbrace{1\;\;1\;\;1\;\;1}_{x_3}$$

$$EAA=\overset{①}{\begin{array}{cc}\bar{x}_2 & \bar{x}_1\\ & x_1\\ x_2 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}}\quad\overset{④}{\begin{array}{cc}\bar{x}_2 & x_1\\ & \bar{x}_1\\ x_2 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑦}{\begin{array}{cc}x_2 & \bar{x}_1\\ & x_1\\ \bar{x}_2 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑩}{\begin{array}{cc}x_2 & x_1\\ & \bar{x}_1\\ \bar{x}_2 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}}$$

$$\overset{②}{\begin{array}{cc}\bar{x}_3 & \bar{x}_1\\ & x_1\\ x_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑤}{\begin{array}{cc}\bar{x}_3 & x_1\\ & \bar{x}_1\\ x_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\\1&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑧}{\begin{array}{cc}x_3 & \bar{x}_1\\ & x_1\\ \bar{x}_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑪}{\begin{array}{cc}x_3 & x_1\\ & \bar{x}_1\\ \bar{x}_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}}$$

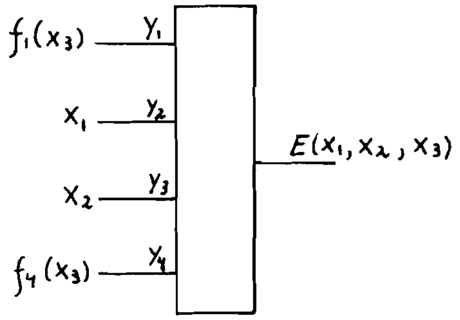
$$\overset{③}{\begin{array}{cc}\bar{x}_3 & \bar{x}_2\\ & x_2\\ x_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑥}{\begin{array}{cc}\bar{x}_3 & x_2\\ & \bar{x}_2\\ x_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\\1&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑨}{\begin{array}{cc}x_3 & \bar{x}_2\\ & x_2\\ \bar{x}_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}}\quad\overset{⑫}{\begin{array}{cc}x_3 & x_2\\ & \bar{x}_2\\ \bar{x}_3 & \vdots\\ & \end{array}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}}$$

Als we de functie E uit v.b.3.8 willen maken met bouwsteen F uit v.b.3.7 volgens fig.3.2 dan dient de matrixvergelijking $FAA(j)\otimes R=EAA(i)$ een unitaire oplossing R te hebben voor tenminste één i en één j ($i=1,\ldots,2N(N-1)$ en $j=1,\ldots,M(M-1)$). Dan kunnen we bepalen , door het vergelijken van de basis van FAA(j) met die van EAA(i) , welke variabelen op welke inputs aangesloten dienen te worden.

v.b.3.9 : Zie v.b.3.7 en v.b.3.8 voor EAA en FAA. De matrixvergelijking $FAA(3)\otimes R=EAA(1)$ heeft een unitaire oplossing $R=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Daarom kunnen er twee variabelen van E afgesplitst worden. De basis van FAA(3) is y_3 en y_2 en die van EAA(1) is x_2 en x_1. De aansluitingen zijn nu : $y_3=x_2$ en $y_2=x_1$.

De variabelen x_1 en x_2 zijn dus van E afgesplitst en E is met F volgens onderstaand volgens onderstaand schema te realiseren.



De functies $f_1(x_3)$ en $f_4(x_3)$ kunnen we m.b.v matrix R bepalen maar dit gebeurt pas in hoofstuk 4.

3.3.2 Programma's in APL voor het afsplitsen van twee variabelen van een schakelfunctie.

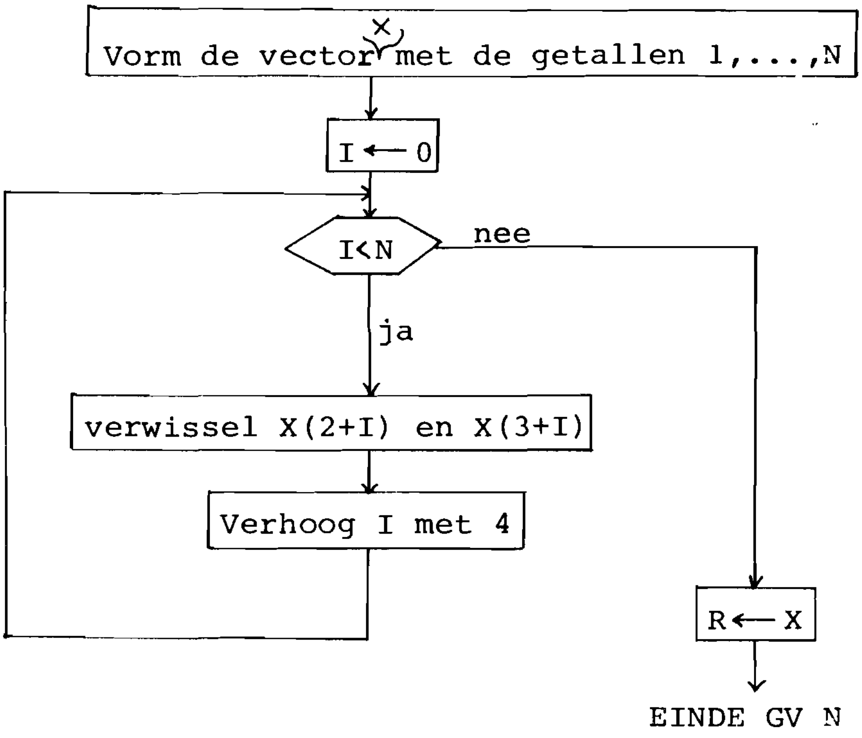
In deze paragraaf worden vijf programma's besproken : PAREN2 , M AARF F, N AARE E , M MAFAA3 AA en GV N.
Het programma PAREN2 geeft als output óf de twee aansluitingen $y_j=x_i$ en $y_k=x_l$ óf de tekst "kan niet" als er geen twee variabelen van $E(x_1,...,x_N)$ afgesplitst kunnen worden. Voor het starten van PAREN2 moeten de functies $E(x_1,...,x_N)$ en $F(y_1,...,y_M)$ en de waarden van N en M bekend zijn. In PAREN2 worden eerst de arrays EAA en FAA gevormd m.b.v. resp. de programma's N AARE E en M AARF F.
Het programma M MAFAA3 AA (MAak FAA) wordt in de twee laatsgenoemde programma's gebruikt voor het vormen van een matrix van array EAA of FAA. De waarden van G en I moeten voor het starten van MAFAA3 bekend zijn. Zij zijn resp. de hoogste en laagste waarde van dië variabelen waarvan de basis bij de rijen van de gevormde matrix behoort. Als b.v. een matrix van EAA gevormd wordt dan luidt het aanroepen van MAFAA3 :
N MAFAA3 EA waarbij N en EA gedefinieerd moeten zijn.
Het programma GV N(Gekke Vector) wordt in M MAFAA3 AA aange-

roepen en maakt een vector waarin de getallen 1,...,N in een bepaalde volgorde voorkomen. Dit wordt later besproken.

Er volgt nu een gedetailleerde beschrijving van de blokschema's , listingen en resultaten van de genoemde vijf programma's.

Het programma GV N :

Blokschema:



Listing:

```
      ∇ R←GV N;X;I
[1]     X←⍳N
[2]     I←0
[3]   LOOP:→(×I−N)⌽OUT,0,VERA
[4]   VERA:X[2+I]←X[3+I]
[5]     X[3+I]←X[2+I]−1
[6]     I←I+4
[7]     →LOOP
[8]   OUT:R←X
[9]     →0
      ∇
```

Resultaten:

```
      GV 4
1  3  2  4

      GV 8
1  3  2  4  5  7  6  8

      GV 16
1  3  2  4  5  7  6  8  9  11  10  12  13  15  14  16
```

Het programma M MAFAA3 AA :

Als we b.v. van array FAA de eerste 1/2N(N-1) matrices willen maken dan kunnen we dit splitsen in de volgende M-1 stappen :

1. Bij stap 1 maken we de matrices waarvan de basis, behorende bij de rijen, bestaat uit de variabelen x_M en x_I (I=1,2,..., M-1). Deze matrices kunnen we maken m.b.v. de statement :

   `(2*2  2*M-2⍴FA[I;;])[GV  2*2;]`

   Dit betekent : Neem de I-de matrix uit array FA en verander de vorm ervan zodanig dat er vier rijen en 2^{M-2} kolommen ontstaan. Van deze laatste matrix verwisselen we tenslotte nog de tweede en derde rij.

v.b. 3.10 : Stel M=4 en F=$\{2,3,4,7,8,10,12,14,15,16\}$
G en I zijn de indices van de variabelen die bij de rijen behoren. G=4 en I=1,2 of 3. De volgende groep matrices wordt gevormd :

$$\begin{array}{c} \bar{x}_4\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ x_1\end{pmatrix} \\ \underset{\uparrow}{x_4}\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\end{pmatrix}\!\!\!\!\!\!\underset{\uparrow}{} \end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \bar{x}_4\begin{pmatrix}\bar{x}_2\\ x_2\end{pmatrix} \\ \underset{\uparrow}{x_4}\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\end{pmatrix}\!\!\!\!\!\!\underset{\uparrow}{} \end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \bar{x}_4\begin{pmatrix}\bar{x}_3\\ x_3\end{pmatrix} \\ \underset{\uparrow}{x_4}\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\end{pmatrix}\!\!\!\!\!\!\underset{\uparrow}{} \end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

G=4 I=1 G=4 I=2 G=4 I=3

2. Bij stap 2 maken we matrices waarvan de bases , behorende bij de rijen, bestaan uit de variabelen x_{M-1} en x_I (I=1,2,... M-2). Deze matrices kunnen we maken m.b.v. de volgende statement :

```
(2*2 2*M-2ρ(2*3 2*M-3ρ FA[I;;])[GV 2*3;])[GV 2*2;]
```

v.b.3.11 : Als M=4 en F={2,3,4,7,8,10,12,14,15,16}
dan bestaat de groep matrices uit :

$$\begin{array}{cc|cccc} \bar{x}_3 & \bar{x}_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & & & & \\ G=3 & I=1 & & & & \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{cc|cccc} \bar{x}_3 & \bar{x}_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & x_2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & & & & \\ G=3 & I=2 & & & & \end{array}$$

⋮

M-1. Bij stap M-1 maken we 1 matrix waarvan de basis van x_2 en x_1 bij de rijen hoort. Deze matrix maken m.b.v. de statement :

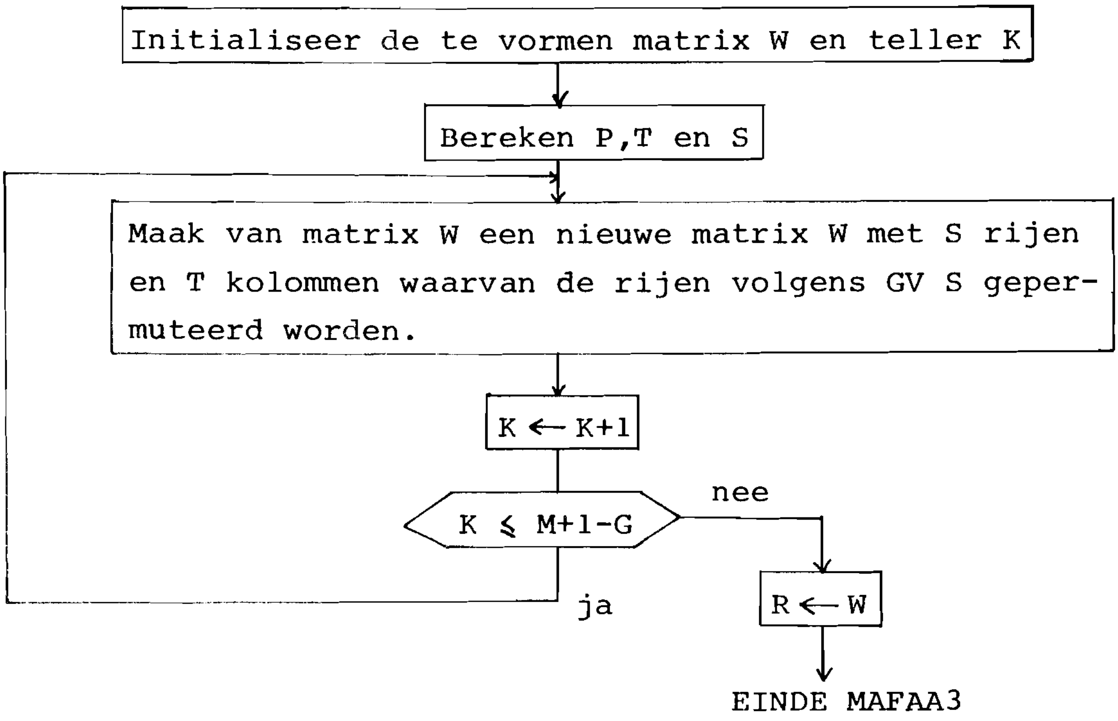
```
 som is M        som is M            som is M
(2*2 2*M-2ρ(2*3 2*M-3ρ(···(2*M 2*0ρ FA[I;;])[GV 2*M;] ···
      +1            +1
                                  ···)[GV 2*3;])[GV 2*2]
                                                 -1
```

v.b.3.12 : Als M=4 en F={2,3,4,7,8,10,12,14,15,16}
dan vormen we met de laatst genoemde statement de volgende matrix :

$$\begin{array}{cc|cccc} \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & & & & \\ G=2 & I=1 & & & & \end{array}$$

Bovengenoemde statements worden in MAFAA3 uitgewerkt voor die waarden van G en I waarvoor geldt : G>I en I,G=1,...,M. Het verlagen van G van M tot 2 en het bij elke G aanroepen van G-1 maal MAFAA3 (voor I=1,...,G-1) gebeurt in de programma's AARE of AARF.

Blokschema van MAFAA3:



Listing van MAFAA3:

```
    ∇ R←M MAFAA3 AA
[1]    W←AA[I;;]
[2]    K←1
[3]   LOOP:P←G+K−3
[4]    T←2*P
[5]    S←2*M−P
[6]    W←((S,T)⍴W)[GV S;]
[7]    K←K+1
[8]    →(×K−M+1−G)⌽LOOP,VR,LOOP
[9]   VR:R←W
[10]   →0
    ∇
```

Resultaten van MAFAA3 :

```
      M
4
      F
2  3  4  7  8  10  12  14  15  16
      FA←M ARH F

      FA
0  1  0  1  0  0  0  1
1  1  0  1  1  1  1  1

0  1  0  0  0  1  0  1
1  1  1  1  0  1  1  1

0  1  1  1  0  1  0  1
0  0  1  1  0  1  1  1

0  1  1  1  0  0  1  1
0  1  0  1  0  1  1  1

      G←2
      I←1                               G←4
      M MAFAA3 FA                       I←2
0  0  0  0                              M MAFAA3 FA
1  0  1  1                        0  1  0  0
1  1  0  1                        1  1  1  1
1  1  1  1                        0  1  0  1
                                  0  1  1  1

      G←3
      I←1                               G←4
      M MAFAA3 FA                       I←3
0  1  0  0                              M MAFAA3 FA
1  1  1  1                        0  1  1  1
0  1  0  1                        0  0  1  1
0  1  1  1                        0  1  0  1
                                  0  1  1  1
```

Het programma M AARF F :

M.b.v. M AARF F wordt het array FAA gevormd. Stel G en I zijn de indices van de grootste resp. kleinste variabele van de basis die bij de rijen hoort van een matrix van FAA. We vragen ons nu af hoe we de matrices, die door M MAFAA FA gevormd zijn, in FAA zullen opbergen, afhankelijk van de waarden van G en I. Als we de matrices op willen bergen zoals in v.b.3.7 is gebeurd dan gaat dat als volgt :

Bercken a=1/2(G-1)(G-2) + I.
De matrix, die door M MAFAA3 FA gevormd wordt, komt te staan op plaats a in array FAA. Behalve het creeren van array FAA wordt in M AARF F ook een matrix VARF(VARiabelen F) **gevormd.** In rij a van VARF staan de waarden van G en I waarvoor geldt dat de basis van de variabelen x_G en x_I bij de rijen van matrix FAA[a;;] hoort(a=1,...,1/2M(M-1)).

v.b.3.13 : Stel VARF[9;] =2 3 (dit is de negende rij van VARF) dan geldt :

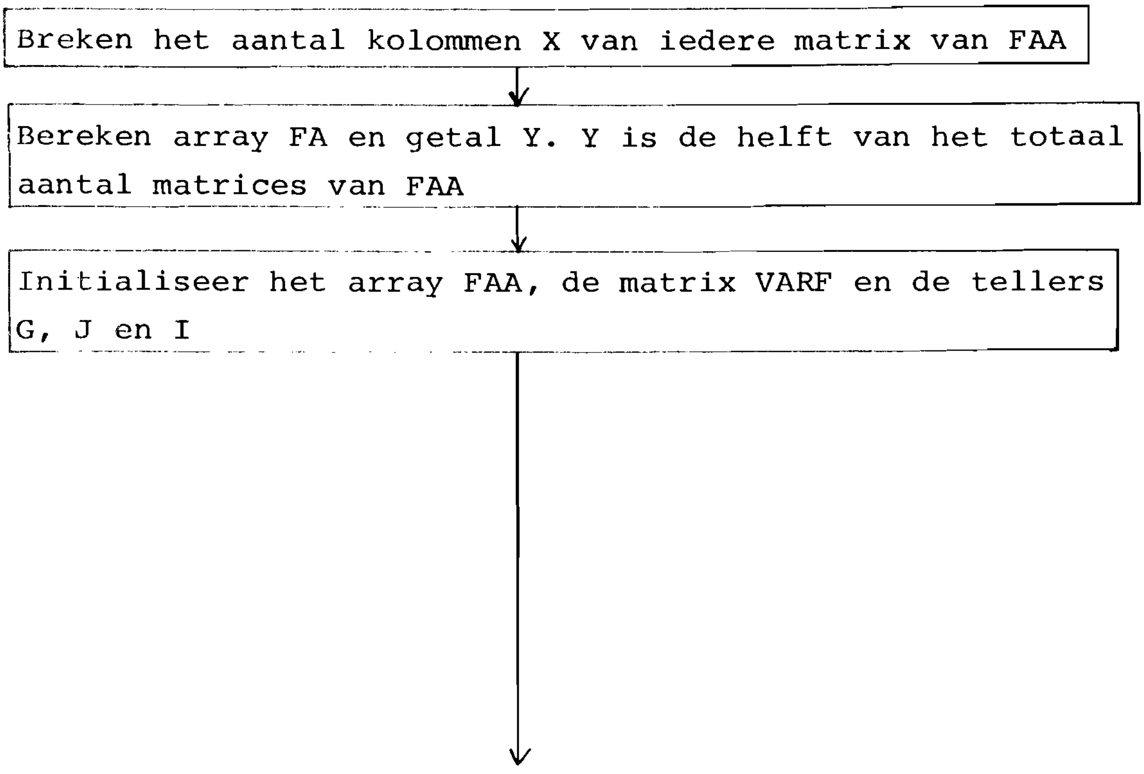
$\bar{y}_2$ hoort bij rij 1 en 2 van FAA[9;;]

y_2 hoort bij rij 3 en 4 van FAA[9;;]

$\bar{y}_3$ hoort bij rij 1 en 3 van FAA[9;;]

y_3 hoort bij rij 2 en 4 van FAA[9;;]

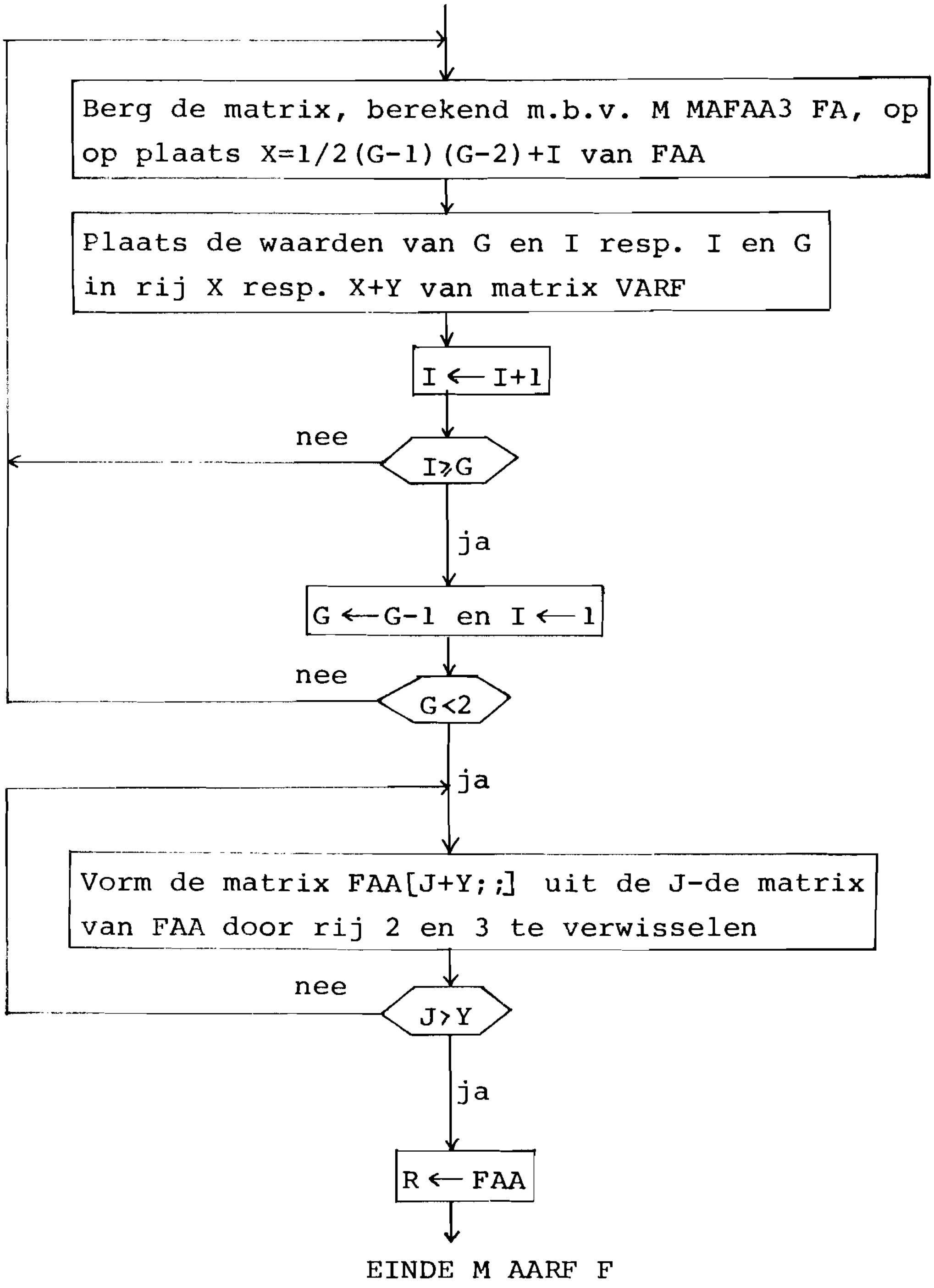
Blokschema_van_M_AARF F:



Breken het aantal kolommen X van iedere matrix van FAA

Bereken array FA en getal Y. Y is de helft van het totaal aantal matrices van FAA

Initialiseer het array FAA, de matrix VARF en de tellers G, J en I


Berg de matrix, berekend m.b.v. M MAFAA3 FA, op op plaats X=1/2(G-1)(G-2)+I van FAA
Plaats de waarden van G en I resp. I en G in rij X resp. X+Y van matrix VARF
I ← I+1
nee
I≥G
ja
G ←G-1 en I ← 1
nee
G<2
ja
Vorm de matrix FAA[J+Y;;] uit de J-de matrix van FAA door rij 2 en 3 te verwisselen
nee
J>Y
ja
R ← FAA
EINDE M AARF F

Listing van M AARF F :

```
      ∇ R←M AARF F;X;Y;G;I;J
[1]     X←2*M−2
[2]     FA←M ARH F
[3]     Y←(M×M−1)÷2
[4]     FAA←((2×Y),4,X)⍴0
[5]     VARF←((2×Y),2)⍴0
[6]     G←M
[7]     I←J←1
[8]   LOOF1:X←(((G−1)×G−2)÷2)+I
[9]     FAA[X;;]←M MAFAA3 FA
[10]    VARF[X;]←G,I
[11]    VARF[X+Y;]←I,G
[12]    I←I+1
[13]    →(×I−G)⌽VR,0,LOOF1
[14]  VR:G←G−1
[15]    I←1
[16]    →(×G−2)⌽LOOF1,LOOF1,LOOF2
[17]  LOOF2:FAA[J+Y;;]←(FAA[J;;])[1 3 2 4;]
[18]    J←J+1
[19]    →(×J−Y)⌽LOOF2,OUT,LOOF2
[20]  OUT:R←FAA
[21]    →0
      ∇
```

Resultaten van M AARF F :

```
      M←3
      F←4 5 6 7 8
      R←M AARF F
      R
0 1
0 1
0 1
1 1

0 0
0 1
1 1
1 1

0 0
0 1
1 1
1 1
```

```
0 1
0 1
0 1
1 1

0 0
1 1
0 1
1 1

0 0
1 1
0 1
1 1

      VARF
2 1
3 1
3 2
1 2
1 3
2 3
```

```
     M←4
     F←2 3 4 7 8 10 12 14 15 16

     M AARF F
0  0  0  0
1  0  1  1
1  1  0  1
1  1  1  1

0  1  0  0
1  1  1  1           0  1  0  0
0  1  0  1           0  1  0  1
0  1  1  1           1  1  1  1
                     0  1  1  1
0  1  0  1
1  1  0  1           0  1  1  1
0  0  0  1           0  1  0  1
1  1  1  1           0  0  1  1
                     0  1  1  1
0  1  0  1
1  1  0  1               VARF
0  0  0  1           2  1
1  1  1  1           3  1
                     3  2
0  1  0  0           4  1
1  1  1  1           4  2
0  1  0  1           4  3
0  1  1  1           1  2
                     1  3
0  1  1  1           2  3
0  0  1  1           1  4
0  1  0  1           2  4
0  1  1  1           3  4

0  0  0  0
1  1  0  1
1  0  1  1
1  1  1  1

0  1  0  0
0  1  0  1
1  1  1  1
0  1  1  1

0  1  0  1
0  0  0  1
1  1  0  1
1  1  1  1

0  1  0  1
0  0  0  1
1  1  0  1
1  1  1  1
```

M.b.v. deze resultaten kunnen we array FAA van v.b.3.7 reconstrueren.

Het programma N AARE E :

M.b.v. dit programma wordt het array EAA gemaakt. Ook wordt er een matrix VARE gevormd met 2N(N-1) rijen en 4 kolommen. In rij B van VARE(VARiabelen E) staan in de eerste en derde kolom de indices van de variabelen, waarvan de basis hoort bij de rijen van matrix EAA(B); (B=1,...,2N(N-1)). In kolom 2 , rij B staat een 0 of 1. Deze 0 of 1 betekent dat de var. waarvan de index in kolom 1, rij B staat resp. wel of niet geïnverteerd moet worden. Eveneens geldt dat een 0 of 1 in kolom 3, rij B staat, resp. wel of niet geïnverteerd moet worden.

v.b.3.14 : Bij elke functie $E(x_1,x_2)$ hoort de volgende matrix VARE :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stel $E=\{1,2,4\}$. EAA met de bases behorende bij de rijen ziet er dan als volgt uit :

$$\begin{array}{ll} \bar{x}_2\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ x_1\end{pmatrix} & \\ x_2\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} & \end{array} \overset{\textcircled{1}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}} \qquad \begin{array}{ll} x_2\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ x_1\end{pmatrix} & \\ \bar{x}_2\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} & \end{array} \overset{\textcircled{3}}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{ll} \bar{x}_2\begin{pmatrix}x_1\\ \bar{x}_1\end{pmatrix} & \\ x_2\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} & \end{array} \overset{\textcircled{2}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}} \qquad \begin{array}{ll} x_2\begin{pmatrix}x_1\\ \bar{x}_1\end{pmatrix} & \\ \bar{x}_2\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} & \end{array} \overset{\textcircled{4}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}}$$

Omdat het blokschema van N AARE E nagenoeg identiek is met dat van M AARF F beperken we ons tot het geven van de listing en de resultaten van N AARE E.

Listing van N AARE E :

```
      ∇ R←N AARE E;X;T;G;I;J
  [1]    X←2*N-2
  [2]    EA←N ARH E
  [3]    T←(N×N-1)÷2
  [4]    EAA←((4×T),4,X)⍴0
  [5]    VARE←((4×T),4)⍴0
  [6]    G←N
  [7]    I←J←1
  [8]   LOOF1:Z←((G-1)×(G-2)÷2)+I
  [9]    EAA[Z;;]←N MAFAA3 EA
  [10]   VARE[Z;]←G,1,I,1
  [11]   I←I+1
  [12]   →(×I-G)⌽VR,0,LOOF1
  [13]  VR:G←G-1
  [14]   I←1
  [15]   →(×G-2)⌽LOOF1,LOOF1,LOOF2
  [16]  LOOF2:EAA[J+T;;]←(EAA[J;;])[2 1 4 3;]
  [17]   EAA[J+2×T;;]←(EAA[J;;])[3 4 1 2;]
  [18]   EAA[J+3×T;;]←(EAA[J;;])[4 3 2 1;]
  [19]   VARE[J+T;]←VARE[J;1 2 3],0
  [20]   VARE[J+2×T;]←VARE[J;1],0,VARE[J;3 4]
  [21]   VARE[J+3×T;]←VARE[J+2×T;1 2 3],0
  [22]   J←J+1
  [23]   →(×J-T)⌽LOOF2,OUT,LOOF2
  [24]  OUT:R←EAA
  [25]   →0
      ∇
```

Resultaten van N AARE E :

```
         N←2
         E←1 2 4                      1
                                      0
         N AARE E                     1
 1                                    1
 1                                        VARE
 0                                    2  1  1  1
 1                                    2  1  1  0
                                      2  0  1  1
 1                                    2  0  1  0
 1
 1
 0

 0
 1
 1
 1
```

Vergelijk deze resultaten met v.b.3.14.

```
     N←3
     E←4 5 6 7 8

     N AARE E
0  1
0  1
0  1                 1  1
1  1                 1  1
                     0  1
0  0                 0  0
0  1
1  1                 1  1
1  1                 1  1
                     0  1
0  0                 0  0
0  1
1  1                      VARE
1  1                 2  1  1  1
                     3  1  1  1
0  1                 3  1  2  1
0  1                 2  1  1  0
1  1                 3  1  1  0
0  1                 3  1  2  0
                     2  0  1  1
0  1                 3  0  1  1
0  0                 3  0  2  1
1  1                 2  0  1  0
1  1                 3  0  1  0
                     3  0  2  0
0  1
0  0
1  1
1  1

0  1
1  1
0  1
0  1

1  1
1  1
0  0
0  1

1  1
1  1
0  0
0  1

1  1
0  1
0  1
0  1
```

M.b.v. deze resultaten kunnen we array EAA van v.b.3.8 reconstrueren.

Het programma PAREN2:

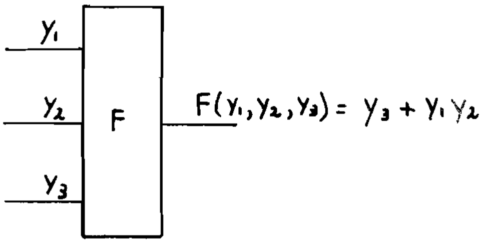
Bij het starten van PAREN2 gaan we er van uit dat $E(x_1,\ldots,x_N)$, $F(y_1,\ldots,y_M)$, N en M bekend zijn. Om na te gaan of er twee variabelen (x_i en x_l) afgesplitst kunnen worden van functie $E(x_1,\ldots,x_N)$ m.b.v. de aansluitingen $y_j=\dot{x}_i$ en $y_k=\dot{x}_l$ doen we het volgende : We nemen de eerste matrix EAA[1;;] uit EAA en FAA[B;;] uit FAA (B=1,...,M(M-1)).
We zoeken zo lang tot dat een van de matrixvergelijkingen FAA[B;;] $\otimes$ R=EAA[1;;] tenminste één unitaire oplossing heeft. Vinden we een oplossing dan zoeken we in de eerste resp. B-de rij van VARE resp. VARF welke variabelen op welke inputs aangesloten dienen te worden. Vinden we geen oplossing dan nemen we de volgende matrix EAA[2;;] en lossen we de matrixvergelijkingen FAA[B;;] $\otimes$ R=EAA[2;;] met B=1,...,M(M-1) op. Het programma PAREN2 stopt als we een unitaire oplossing gevonden hebben of als blijkt dat er in het geheel geen unitaire oplossing is.

v.b.3.15 : Stel $F(y_1,y_2,y_3)=\{4,5,6,7,8\}$

$$F=\ 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\underbrace{\bar{y}_1\ y_1}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}$$

$$\underbrace{\bar{y}_2\qquad y_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\qquad\qquad}$$



$$\mathrm{FAA}=\overset{①\quad \bar{y}_3}{\begin{array}{c}\bar{y}_2\left(\begin{array}{c}\bar{y}_1\\ y_1\end{array}\right.\\ y_2\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}}\qquad \overset{④\ y_3}{\begin{array}{c}\bar{y}_1\left(\begin{array}{c}\bar{y}_2\\ y_2\end{array}\right.\\ y_1\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}}$$

$$\overset{②}{\begin{array}{c}\bar{y}_3\left(\begin{array}{c}\bar{y}_1\\ y_1\end{array}\right.\\ y_3\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}}\qquad \overset{⑤}{\begin{array}{c}\bar{y}_1\left(\begin{array}{c}\bar{y}_3\\ y_3\end{array}\right.\\ y_1\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}}$$

$$\overset{③}{\begin{array}{c}\bar{y}_3\left(\begin{array}{c}\bar{y}_2\\ y_2\end{array}\right.\\ y_3\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}}\qquad \overset{⑥}{\begin{array}{c}\bar{y}_2\left(\begin{array}{c}\bar{y}_3\\ y_3\end{array}\right.\\ y_2\left(\begin{array}{c}\vdots\\ \ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}}$$

Stel $E(x_1,x_2)=\bar{x}_2+x_1 =\{1,2,4\}$ is de te realiseren functie.

$$E= \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{\bar{x}_1 \;\; x_1}_{\bar{x}_2} \;\; \underbrace{\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot}_{x_2}$$

$$EAA= \overset{①}{\begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \\ x_2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{②}{\begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \\ x_2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \overset{③}{\begin{array}{c} x_2 \\ \\ \bar{x}_2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{④}{\begin{array}{c} x_2 \\ \\ \bar{x}_2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

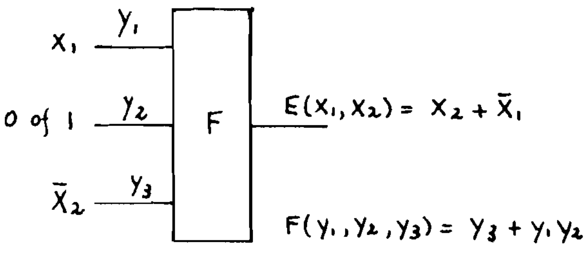
We lossen achtereenvolgens de matrixvergelijkingen FAA[J;;]$\otimes$ R= EAA[I;;] op waarbij I varieert van 1 t/m 4 en bij één bepaalde I, J varieert van 1 t/m 6. Als we op deze manier de waarden van J en I doorlopen vinden we de eerste matrixvergelijking met een unitaire oplossingsmatrix R voor I=3 en J=2.

Gegeven is verder nog : VARE= 2 1 1 1 en VARF= 2 1

$$VARE = \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{en } VARF = \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{array}$$

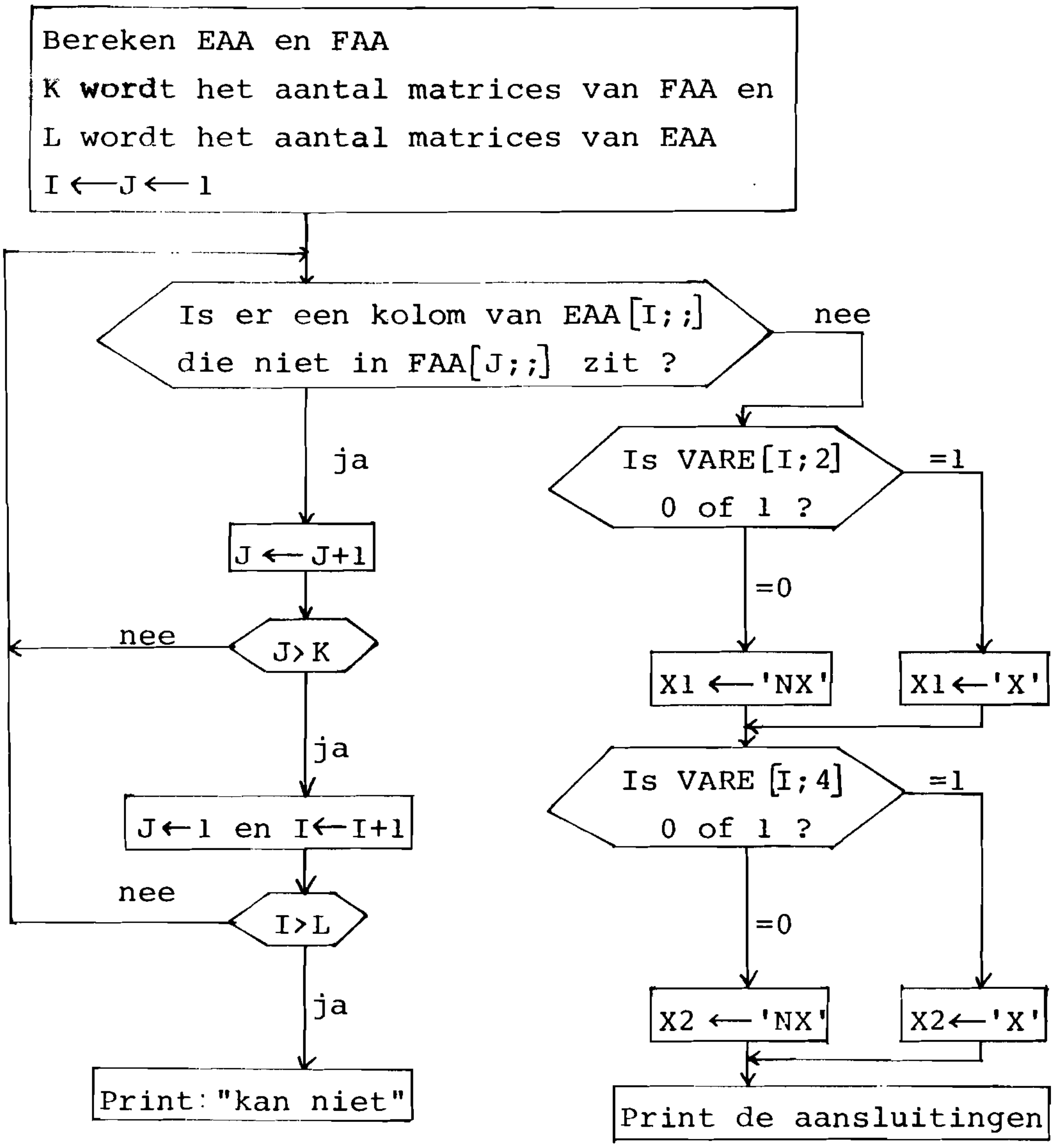
I=3 ==> Uit de derde rij van VARE leiden we $\bar{x}_2$ en x_1 af.
J=2 ==> Uit de tweede rij van VARF leiden we y_3 en y_1 af.

Hieruit volgt dat de aansluitingen $y_3=\bar{x}_2$ en $y_1=x_1$ mogelijk zijn. E is dus op onderstaande wijze te realiseren.



Op y_2 moeten we een functie aansluiten van nul variabelen dus de constanten 0 of 1. (De preciese aansluiting komt in hoofdstuk 4 ter sprake)

Blokschema van PAREN2 :



Listing van PAREN2 :

```
      ∇ F←PAREN2;I;J;B;X1;X2;L;K
  [1]    EAA←N AARE E
  [2]    FAA←M AARF F
  [3]    K←M×M 1
  [4]    L←2×N×N-1
  [5]    I←J←1
  [6]   LOOP1:R←(⍉FAA[J;])∧.=EAA[I;]
  [7]    B←∧/∨/[1]R
  [8]    →(×B)⌽VR,STOP,0
  [9]   VR:J←J+1
  [10]   →(×J-K)⌽LOOP1,VR1,LOOP1
  [11]  VR1:I←I+1
  [12]   J←1
  [13]   →(×I-L)⌽LOOP1,OUT,LOOP1
  [14]  STOP:→(×VARE[I;2])⌽VR2,VR3,0
  [15]  VR2:X1←'NX'
  [16]   →VR31
  [17]  VR3:X1←'X'
  [18]  VR31:→(×VARE[I;4])⌽VR4,VR5,0
  [19]  VR4:X2←'NX'
  [20]   →VR51
  [21]  VR5:X2←'X'
  [22]  VR51:F←'Y',(⍕VARF[J;1]),' = ',(⍕X1),(⍕VARE[I;1]),'    ','Y'
  [23]   F←F,(⍕VARF[J;2]),' = ',(⍕X2),⍕VARE[I;3]
  [24]   →0
  [25]  OUT:F←'KAN NIET'
      ∇
```

Resultaten van PAREN2 :

```
          M←3
          F←4 5 6 7 8
          N←2
          E←1 2 4
          PAREN2
    Y 3 = NX 2    Y 1 = X 1
```

Voor controle en betekenis van deze resultaten zie v.b.3.15.

```
          M←4
          F←2 3 4 7 8 10 12 14 15 16
          N←3
          E←4 5 6 7 8
          PAREN2
    Y 3 = X 2    Y 2 = X 1
```

Voor controle en betekenis van deze resultaten zie v.b.3.7, 3.8 en 3.9

3.3.3 Discussie :

De functies PAREN2, N AARE E en M AARF F kunnen gebruikt worden voor elke functie $E(x_1,...,x_N)$ en $F(y_1,...,y_M)$ van twee of meer variabelen. Dus $N \geqslant 2$ en $M \geqslant 2$. De maximale waarde van N is 8 en van M is 9. Als $N>8$ of $M>9$ krijgen we een space limit.

De duur van het uitvoeren van het programma PAREN2 bedraagt 2 min. als $N=8$ en $M=4$ en als de output "kan niet" is. Dan zijn namelijk alle mogelijke $2N(N-1)M(M-1)=2.8.7.4.3=1344$ matrixvergelijkingen opgelost. Verkleinen we N of M met 1 dan halveert deze tijd als de output "kan niet" is. Als $N=8$ en $M=4$ en de output bestaat uit de aansluitingen van de afgesplitste var. op de inputs dan bedraagt de executietijd slechts een gedeelte van die 2 min.

We hebben een aanzet gemaakt voor het onderzoek of het zinvol is de resultaten van PAREN1 te gebruiken bij PAREN2. Dit wordt nu aan de hand van een voorbeeld besproken :
Gegeven is de te realiseren functie $E(x_1,x_2,x_3)=x_3+x_1x_2$
en de bouwsteen $F(y_1,y_2,y_3,y_4)=\overline{y}_4(\overline{y}_3(\overline{y}_2+y_1)+y_3y_2\overline{y}_1)+$

$$y_4(\overline{y}_3(\overline{y}_2+\overline{y}_1)+y_3(\overline{y}_2+y_1)).$$

Het resultaat van PAREN1 is de volgende tabel:

	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$
y_1	1	1	1	1	1	1
y_2	1	1	1	1	1	1
y_3	0	0	1	0	0	1
y_4	0	0	1	0	0	1

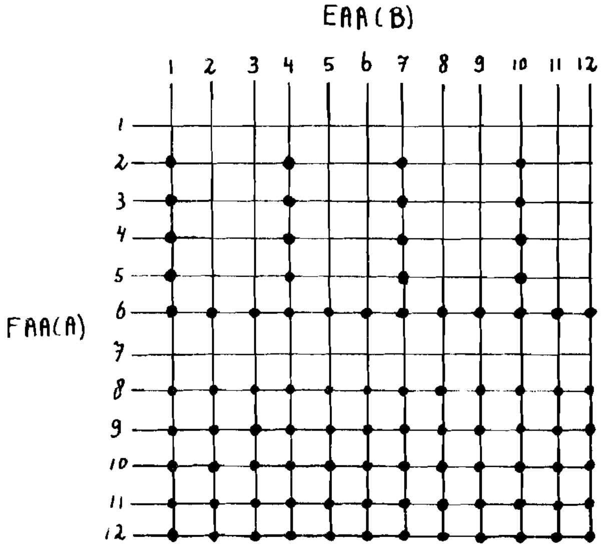
Er bestaan dus 8 verschillende aansluitingen (y_j,x_i) waarvoor geen variabele x_i van $E(x_1,x_2,x_3)$ afgesplitst kan worden. Dit gegeven gebruiken we om het maximale aantal op te lossen matrixvergelijkingen bij PAREN2 te reduceren. Zowel array FAA als EAA bevat 12 matrices waarvan de resp. bases gelijk zijn aan die van v.b.3.7 resp. 3.8 . Uit bovenstaande tabel volgt b.v. dat aansluiting (y_3,x_1) niet mogelijk is. Omdat

in b.v. EAA(1) x_1 bij rij 2 en 4 hoort en in b.v. FAA(8) y_3 ook bij rij 2 en 4 hoort, heeft de matrixvergelijking FAA(8) $\otimes$ R=EAA(1) geen unitaire oplossing R. Deze conclusie is gebaseerd op het feit dat er tenminste één kolom van EAA(1) bestaat die niet in FAA(8) voorkomt. M.b.v. het resultaat van PAREN1 kan de matrixvergelijking FAA(8) $\otimes$ R= EAA(1) geëlimineerd worden.
Om te achterhalen voor welke A en B de matrixvergelijking FAA(A) $\otimes$ R=EAA(B) geëlimineerd kan worden hanteren we de tabel op pag 65(A=1,...,M(M-1) en B=1,...,2N(N-1)) .

Verdeel de vier rijen van FAA(A) of EAA(B) als volgt in vier groepen :

groep 1 : rij 1 en 2
groep 2 : rij 3 en 4
groep 3 : rij 1 en 3
groep 4 : rij 2 en 4

niet mogeLijke aansluiting (y_j,x_i) of $(y_j,\bar{x}_i)$	Plaats de matrices EAA(B) in groep i als ze in overeenkomstige rijen de var. x_i of $\bar{x}_i$ bevatten. $(i=1,2,3,4)$	Plaats de matrices FAA(A) in groepen i als ze in overeenkomstige rijen de var. y_j bevatten $(i=1,2,3,4)$.	Vorm voor (y_j,x_i) of $(y_j,\bar{x}_i)$ per groep i alle mogelijke combinaties (A,B) (zie ook onderstaande tabel).
(y_3,x_1)	groep 1en2 : leeg. groep 3: EAA(B) als $B\in\{4,5,10,11\}$ groep 4 : EAA(B) als $B\in\{1,2,7,8\}$	groep1. leeg groep2: FAA(A) als $A\in\{2,3,12\}$ groep3 : leeg groep 4: FAA(A) als $A\in\{6,8,9\}$	(6,1) (6,2) (6,7) (6,8) (8,1) (8,2) (8,7) (8,8) (9,1) (9,2) (9,7) (9,8)
$(y_3,\bar{x}_1)$	groep 1en2 : leeg groep 3 = groep 4 van (y_3,x_1) groep 4 = groep 3 van (y_3,x_1)		(6,4) (6,5) (6,10) (6,11) (8,4) (8,5) (8,10) (8,11) (9,4) (9,5) (9,10) (9,11)
(y_3,x_2)	groep 1: EAA(B) als $B\in\{7,10\}$ groep2: EAA(B) als $B\in\{1,4\}$ groep 3: EAA(B) als $B\in\{6,12\}$ groep 4 : EAA(B) als $B\in\{3,9\}$		(2,1) (2,4) (3,1) (3,4) (12,1) (12,4) (6,3) (6,9) (8,3) (8,9) (9,3) (9,9)
$(y_3,\bar{x}_2)$	groep 1 = groep 2 van (y_3,y_2) groep 2 = groep 1 van (y_3,y_2) groep 3 = groep 4 van (y_3,y_2) groep 4 = groep 3 van (y_3,y_2)		(2,7) (2,10) (3,7) (3,10) (12,7) (12,10) (6,6) (6,12) (8,6) (8,12) (9,6) (9,12)
(y_4,x_1)	idem als bij (y_3,x_1)	groep 1: leeg groep 2 : FAA(A) als $A\in\{4,5,6\}$ groep 3 : leeg groep 4 : FAA(A) als $A\in\{10,11,12\}$	(10,1) (10,2) (10,7) (10,8) (11,1) (11,2) (11,7) (11,8) (12,1) (12,2) (12,7) (12,8)
$(y_4,\bar{x}_1)$	idem als bij $(y_3,\bar{x}_1)$		(10,4) (10,5) (10,10) (10,11) (11,4) (11,5) (11,10) (11,11) (12,4) (12,5) (12,10) (12,11)
(y_4,x_2)	idem als bij (y_3,x_2)		(4,1) (4,4) (5,1) (5,4) (6,1) (6,4) (10,3) (10,9) (11,3) (11,9) (12,3) (12,9)
$(y_4,\bar{x}_2)$	idem als bij $(y_3,\bar{x}_2)$		(4,7) (4,10) (5,7) (5,10) (6,7) (6,10) (10,6) (10,12) (11,6) (11,12) (12,6) (12,12).


EAA(B)

FAA(A)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2	●			●			●			●		
3	●			●			●			●		
4	●			●			●			●		
5	●			●			●			●		
6	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
7												
8	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
9	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
10	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
11	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
12	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Als het kruispunt van EAA(B) en FAA(A) "verbonden" is, heeft de bijbehorende matrixvergelijking geen unitaire oplossing.

Hoofdstuk 4 : De realisatie van elke willekeurige functie van twee of drie variabelen m.b.v. een programma in APL met als ULM het hoofdelement van de Dreloba serie.

4.1 Inleiding.

Het hoofdelement van de Dreloba serie is een dubbelmembraanrelais dat dient voor het schakelen van luchtvermogens. Fig. 4.1 geeft een schematische doorsnede van dit element. Het element bestaat uit vijf kamers waarvan de bovenste en onderste door membranen van de andere kamers gescheiden worden. Deze beide membranen zijn door een stift met elkaar verbonden zodat ze samen bewegen. Door deze beweging kunnen, naar keuze, telkens twee van de drie middelste kamers met elkaar verbonden worden, terwijl de derde kamer dan afgesloten wordt.

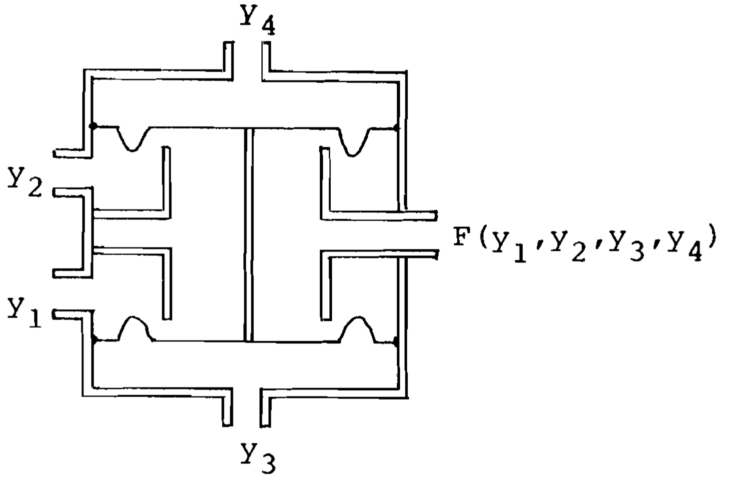
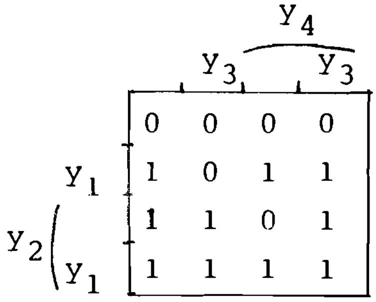


Fig.4.1 : Schematische doorsnede van het hoofdelement van de Dreloba serie

0 signaal ⇐⇒ 0-0,3 kg/cm^2
1 signaal ⇐⇒ 0,7-1 kg/cm^2

We kunnen bovenstaande pneumistor beschouwen als een digitale bouwsteen met de volgende waarheidstabel :



0	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

De schakelfunctie die bij deze waarheidstabel hoort is :

$$F(y_1,y_2,y_3,y_4)= y_1(y_4+\bar{y}_3)+y_2(\bar{y}_4+y_3)$$

Het dubbelmembraanrelais zullen we in het vervolg beschouwen als een digitale bouwsteen met 4 inputs en één output zoals in fig.4.2 geschetst is.

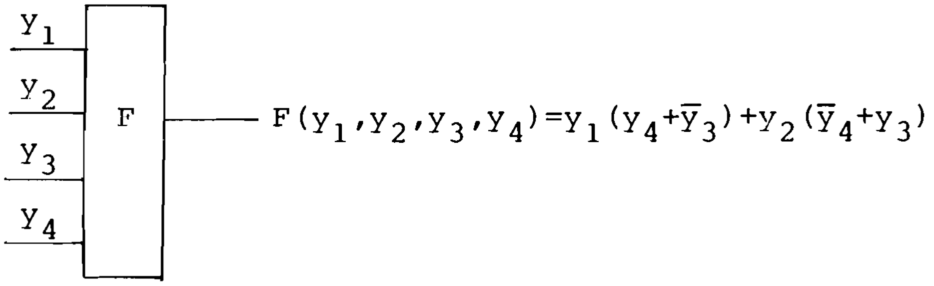


Fig.4.2 : Digitale bouwsteen als equivalent van het hoofdelement van de Dreloba serie.

We ontwikkelen een programma PAREN3 dat nagaat of een gewenste functie E van twee of drie variabelen te realiseren is met één bouwsteen F. Zo ja, dan bepaalt dit programma op welke inputs van F de variabelen van E aangesloten moeten worden.

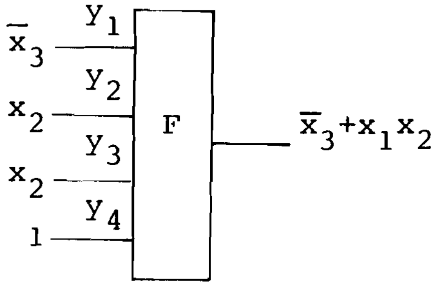
Voor meer informatie over pneumistoren in het algemeen en het dubbelmembraanelement inhet bijzonder zie het blad : "Bedrijfsmechanisatie-kern", jaargang 19, 1969, nr. 5, pag 105.

Bij het zoeken naar een ULM is de keuze gevallen op bovenstaand element omdat dit element in de handel is en de theorie van hoofdstuk 3 over het afsplitsen van één en twee var. van een schakelfunctie hiermee goed toepasbaar is.

4.2 Theorie bij het realiseren van elke gewenste functie van twee of drie variabelen met één digitale bouwsteen met vier inputs en één output.

We gaan uit van de bouwsteen van fig.4.2. Een functie $E(x_1,x_2,x_3)$ is te realiseren met één bouwsteen $F(y_1,y_2,y_3,y_4)$ als we van E twee variabelen kunnen afsplitsen. Dit betekent dat er twee inputs moeten zijn waarop we twee verschillende variabelen of hun complementen kunnen aansluiten en dat op de overige twee inputs de functies van de resterende variabele aangesloten kunnen worden.

v.b.4.1 : De functie $E(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3+x_1x_2$ kan met één bouwsteen $F(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1(y_4+\bar{y}_3)+y_2(\bar{y}_4+y_3)$ gemaakt worden door de variabelen x_2 en x_1 af te splitsen en aan te sluiten op resp. y_3 en y_2. Op de overige inputs y_1 en y_4 worden dan nog functies aangesloten van de resterende variabele x_3. We kunnen nu vaststellen dat $y_1=\bar{x}_3$ en $y_4=1$. Zo verkrijgen we de volgende realisatie van E m.b.v. F:



Om de 144 mogelijke afsplitsingen van twee variabelen van E te kunnen onderzoeken vormen we van de functie $F(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1(y_4+\bar{y}_3)+y_2(\bar{y}_4+y_3)$ een array FAA van 12 matrices met 4 rijen en 4 kolommen :

$$\mathrm{FAA} = \begin{array}{cc} & \\ & y_1 \\ y_2 & \\ & y_1 \end{array}\overset{\textcircled{1}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_1 \\ y_4 & \\ & y_1 \end{array}\overset{\textcircled{4}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_2 \\ y_1 & \\ & y_2 \end{array}\overset{\textcircled{7}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_4 \\ y_1 & \\ & y_4 \end{array}\overset{\textcircled{10}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ & y_1 \\ y_3 & \\ & y_1 \end{array}\overset{\textcircled{2}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_2 \\ y_4 & \\ & y_2 \end{array}\overset{\textcircled{5}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_3 \\ y_2 & \\ & y_3 \end{array}\overset{\textcircled{8}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_4 \\ y_2 & \\ & y_4 \end{array}\overset{\textcircled{11}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ & y_2 \\ y_3 & \\ & y_2 \end{array}\overset{\textcircled{3}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_3 \\ y_4 & \\ & y_3 \end{array}\overset{\textcircled{6}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_3 \\ y_2 & \\ & y_3 \end{array}\overset{\textcircled{9}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & \\ & y_4 \\ y_3 & \\ & y_4 \end{array}\overset{\textcircled{12}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Van de gewenste functie $E(x_1,x_2,x_3)$ vormen we ook een array EAA dat 12 matrices met vier rijen en 2 kolommen bevat :

v.b.4.2 : Stel $E=x_2+x_1\overline{x}_3=\{2,3,4,7,8\}$ dan

$$\mathrm{EAA}= \begin{array}{cc} & \\ & x_1 \\ x_2 & \\ & x_1 \end{array}\overset{\textcircled{1}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & x_1 \\ & \\ x_2 & x_1 \\ & \end{array}\overset{\textcircled{4}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} x_2 & \\ & x_1 \\ & \\ & x_1 \end{array}\overset{\textcircled{7}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} x_2 & x_1 \\ & \\ & x_1 \\ & \end{array}\overset{\textcircled{10}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ & x_1 \\ x_3 & \\ & x_1 \end{array}\overset{\textcircled{2}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & x_1 \\ & \\ x_3 & x_1 \\ & \end{array}\overset{\textcircled{5}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} x_3 & \\ & x_1 \\ & \\ & x_1 \end{array}\overset{\textcircled{8}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} x_3 & x_1 \\ & \\ & x_1 \\ & \end{array}\overset{\textcircled{11}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ & x_2 \\ x_3 & \\ & x_2 \end{array}\overset{\textcircled{3}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} & x_2 \\ & \\ x_3 & x_2 \\ & \end{array}\overset{\textcircled{6}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} x_3 & \\ & x_2 \\ & \\ & x_2 \end{array}\overset{\textcircled{9}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{cc} x_3 & x_2 \\ & \\ & x_2 \\ & \end{array}\overset{\textcircled{12}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Het onderzoek naar de mogelijke afsplitsing van twee variabelen van $E(x_1,x_2,x_3)$ verloopt als volgt : We berekenen of de matrixvergelijking FAA[J;;] ⊗ R=EAA[I;;] tenminste één unitaire oplossing RN heeft. I doorloopt de waarden 1,...,12 en bij elke I varieert J van 1,...,12 totdat we een I en J gevonden hebben waarbij bovenstaande matrixvergelijking tenminste één unitaire oplossing RN heeft.

.b.4.3 : Als $E=x_2+x_1\bar{x}_3$ (zie v.b.4.2) dan heeft de matrixvergelijking FAA[1;;] ⊗ R=EAA[1;;] tenminste een unitaire oplossing RN omdat elke kolom van EAA[1;;] in FAA[1;;] voorkomt. We bepalen nu de oplossingen van FAA[1;;] ⊗ R=EAA[1;;] . Deze voldoen aan RN→R en voor element R_{ji} van matrix R geldt het volgende : $R_{ji}=1$ als de j-de kolom van FAA[1;;] identiek is aan de i-de kolom van EAA[1;;] . Anders is $R_{ji}=0$

$$\underbrace{\begin{array}{cccccc} & & & & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\quad}^{y_4}} \\ & & & y_3 & & y_3 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & y_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ y_2 & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & y_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}}_{\text{FAA}[1;;]} \otimes \underbrace{\begin{array}{cccc} & & & x_3 \\ & & 1 & 0 \\ & y_3 & 0 & 1 \\ y_4 & & 0 & 0 \\ & y_3 & 1 & 0 \end{array}}_{R} = \underbrace{\begin{array}{cccc} & & & x_3 \\ & & 0 & 0 \\ & x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & & 1 & 1 \\ & x_1 & 1 & 1 \end{array}}_{\text{EAA}[1;;]}$$

Er zijn twee unitaire oplossingen RN die voldoen aan RN→R. Deze zijn :

$$\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{matrix} \quad \text{en} \quad \begin{matrix}0 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\1 & 0\end{matrix}$$

Door de y waarden die horen bij de rijen van FAA[1;;] te vergelijken net de x waarden die horen bij de rijen van EAA[1;;] volgt dat de twee afgesplitste variabelen x_1 en x_2 aangesloten dienen te worden op resp. y_1 en y_2.

Kiezen we b.v. de unitaire oplossing RN=

$$\begin{array}{cc} & \\ & y_3 \\ y_4 & \\ y_4 & y_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc} 1 & \overset{x_3}{0} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

van v.b. 4.3 dan volgt daaruit de tabel :

x_3	0	1
y_4	0	0
y_3	0	1

waaruit we afleiden : $y_4=0$ en $y_3=x_3$.
We kunnen dus $E(x_1,x_2,x_3)=x_2+x_1\bar{x}_3$ volgens fig.4.3 realiseren :

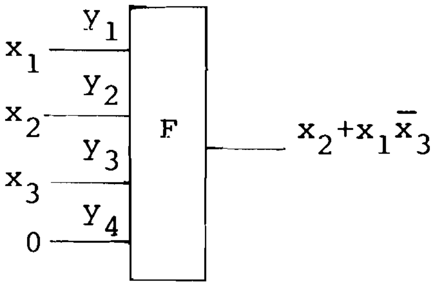


fig.4.3 : Realisatie van $E(x_1,x_2,x_3)=x_2+x_1\bar{x}_3$ met bouwsteen $F(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1(y_4+\bar{y}_3)+y_2(\bar{y}_4+y_3)$.

4.3 Het programma PAREN3.

Het programma PAREN3 bepaalt of een gewenste functie E van twee of drie variabelen gerealiseerd kan worden met één bouwsteen F. Vóór het starten van PAREN3 moeten de functies E en F, het aantal variabelen N van E en het aantal inputs M van bouwsteen F bekend zijn.

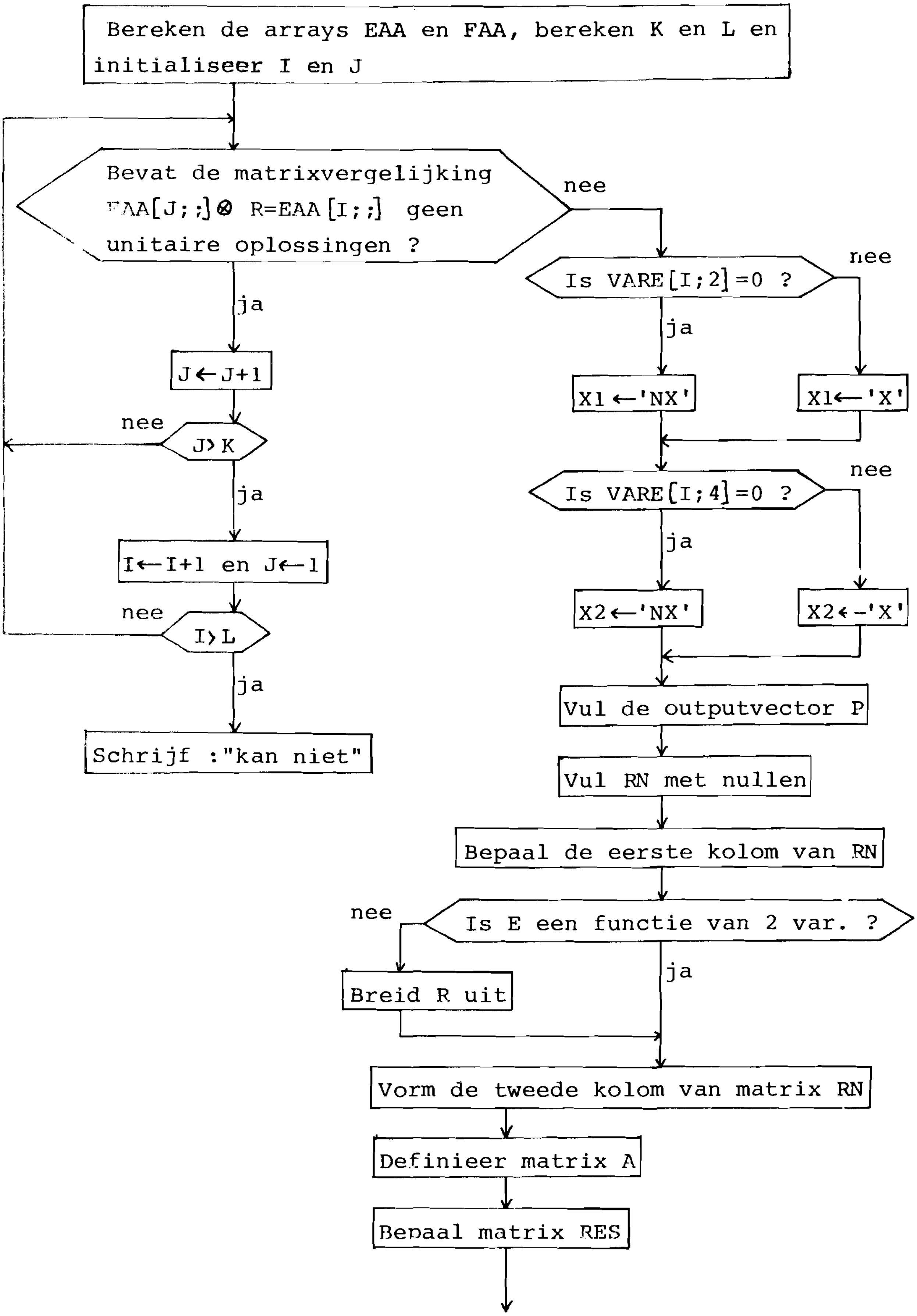
Als voor een bepaalde waarde van I en J de matrixvergelijking FAA[J;;]⊗ R=EAA[I;;] tenminste een unitaire oplossing RN heeft, dan bepalen we RN uit de algemene oplossingsmatrix R door in elke kolom van R de bovenste één te kiezen en alle andere enen van R door nullen te vervangen.

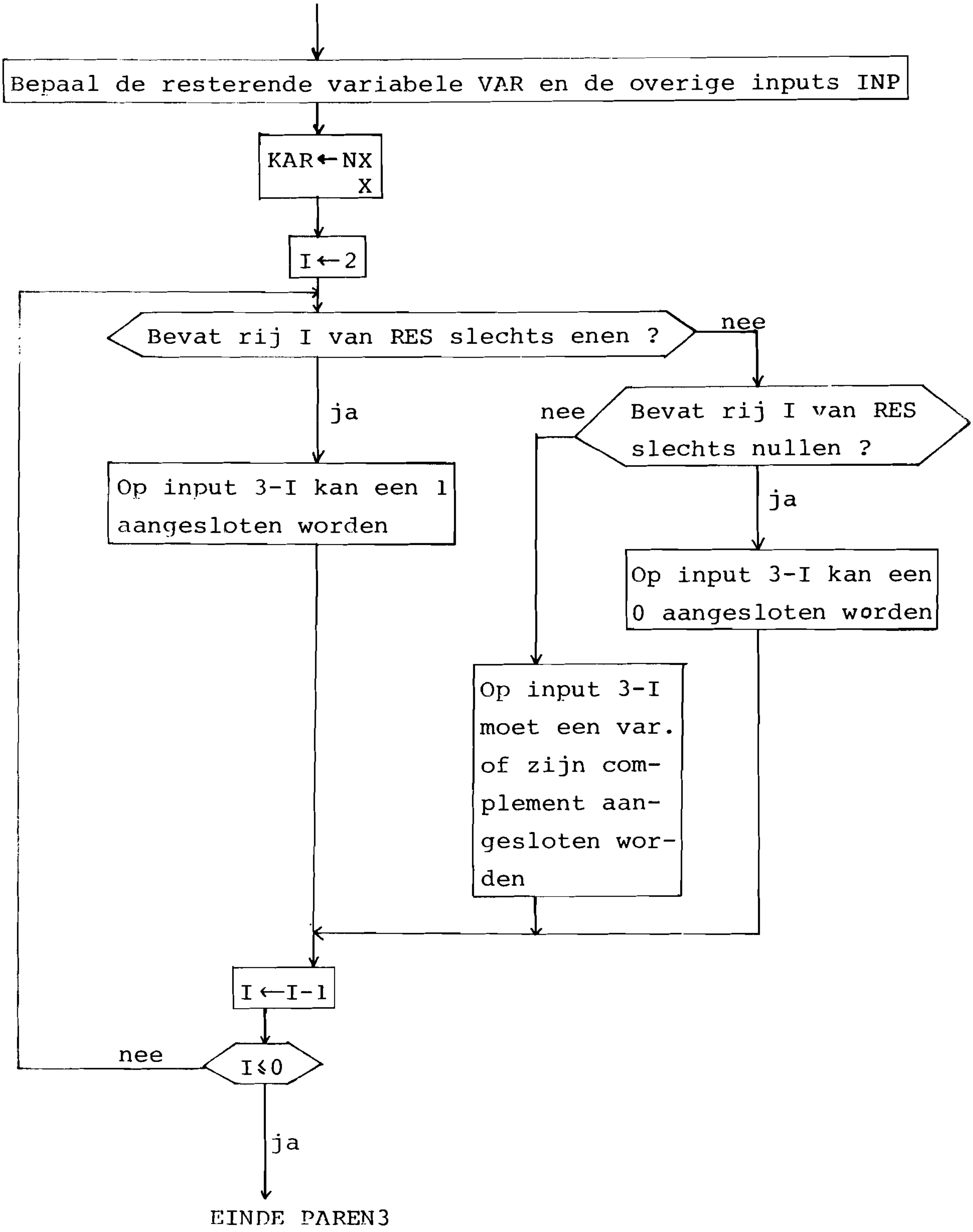
v.b.4.4 : Stel $R=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ dan is $RN=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

PAREN3 is een uitbreiding als een speciaal geval van het programma PAREN2 : Een speciaal geval omdat bij PAREN3 slechts N=2 of N=3 en M=4 mogen zijn; een uitbreiding omdat als er twee variabelen afgesplitst kunnen worden van functie E de aan te sluiten functies op al de vier inputs van F bekend worden.

Er volgt nu het blokschema, de listing en de resultaten van PAREN3.

Blokschema van PAREN3 :




Bepaal de resterende variabele VAR en de overige inputs INP
KAR←NX
X
I←2
Bevat rij I van RES slechts enen ?
nee
ja
Op input 3-I kan een 1 aangesloten worden
nee
Bevat rij I van RES slechts nullen ?
ja
Op input 3-I kan een 0 aangesloten worden
Op input 3-I moet een var. of zijn complement aangesloten worden
I←I-1
nee
I⩽0
ja
EINDE PAREN3

Listing van PAREN3:

```
     ∇ F←PAREN3;B;X1;X2;K;L;Q;I;J
[1]     EAA←N AARE E
[2]     FAA←M AARF F
[3]     K←M×M−1
[4]     L←2×N×N−1
[5]     I←J←1
[6]    LOOP1:R←(⍉FAA[J;;])∧.=EAA[I;;]
[7]     B←∧/∨/[1]R
[8]     →(×B)⌽VR,STOP,0
[9]    VR:J←J+1
[10]    →(×J−K)⌽LOOP1,VR1,LOOP1
[11]   VR1:I←I+1
[12]    J←1
[13]    →(×I−L)⌽LOOP1,OUT,LOOP1
[14]   STOP:→(×VARE[I;2])⌽VR2,VR3,0
[15]   VR2:X1←'NX'
[16]    →VR31
[17]   VR3:X1←'X'
[18]   VR31:→(×VARE[I;4])⌽VR4,VR5,0
[19]   VR4:X2←'NX'
[20]    →VR51
[21]   VR5:X2←'X'
[22]   VR51:F←(('Y',⍕VARF[J;1]),' = ',X1),⍕VARE[I;1]
[23]    F←F,'      ',(('Y',⍕VARF[J;2]),' = ',X2),⍕VARE[I;3]
[24]    RN←4 2⍴0
[25]    RN[;1]←∨\R[;1]
[26]    →(×2−(⍴EAA)[3])⌽VER,EXTRA,VER
[27]   EXTRA:R←⍉(2,4)⍴R[;1]
[28]   VER:RN[;2]←∨\R[;2]
[29]    A←4 2⍴0 0 0 1 1 0 1 1
[30]    RES←⍉(⍉RN)∨.∧A
[31]    VAR←3−3|I−1
[32]    INF←(∨(⍳4)∊VARF[J;])/⍳4
[33]    KAR←2 2⍴'NX X'
[34]    I←2
[35]   LOOP:→(×∧/RES[I;])⌽VR6,EEN,0
[36]   VR6:→(×∨/RES[I;])⌽NUL,VR7,0
[37]   EEN:F←F,'      ',('Y',⍕INF[3−I]),' = 1'
[38]    →VR8
[39]   NUL:F←F,'      ',('Y',⍕INF[3−I]),' = 0'
[40]    →VR8
[41]   VR7:Q←(,RES[I;])/[1]KAR
[42]    Q←(,Q),⍕VAR
[43]    F←F,'      ',('Y',⍕INF[3−I]),' = ',Q
[44]   VR8:I←I−1
[45]    →(×I)⌽0,LOOP,0
[46]   OUT:'KAN NIET'
[47]    →0
     ∇
```

Resultaten van PAREN3:

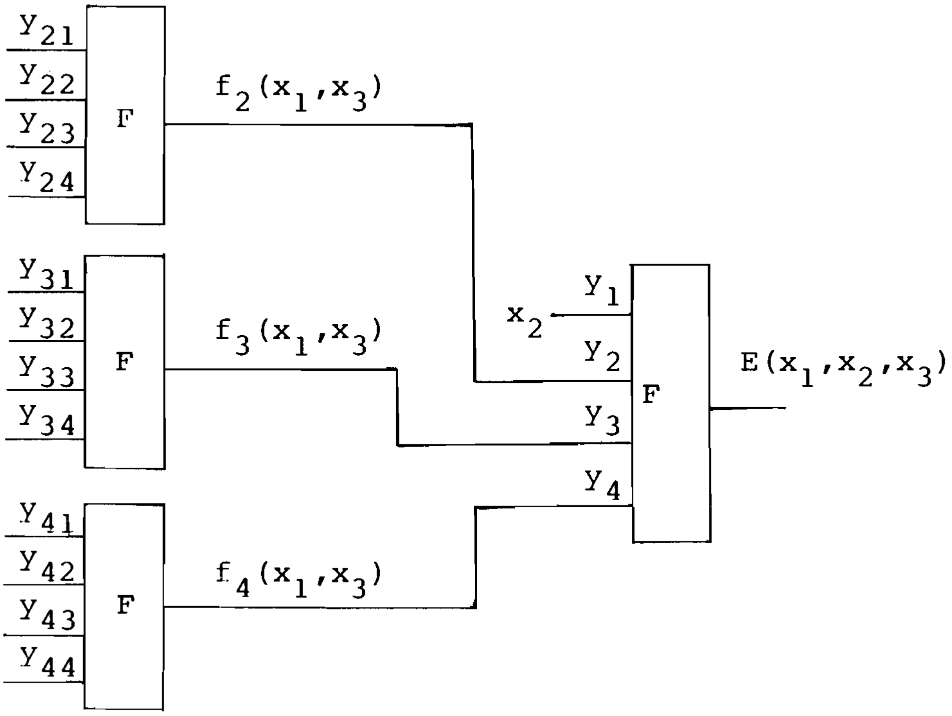
```
      F←2 3 4 7 8 10 12 14 15 16
      M←4


         E←1 2 3 5 6 7
         N←3
         PAREN3
 Y 3 = X 2     Y 2 = NX 1     Y 1 = 1     Y 4 = 0


         E←1 3 4
         N←2
         PAREN3
 Y 4 = X 2     Y 3 = X 1     Y 1 = 1     Y 2 = 0

         E←1 3 4
         N←3
         PAREN3
 Y 4 = X 2     Y 3 = X 1     Y 1 = NX 3     Y 2 = 0

         E←1 2 4
         N←2
         PAREN3
 Y 3 = X 2     Y 2 = X 1     Y 1 = 1     Y 4 = 0

         E←3
         N←2
         PAREN3
 Y 1 = X 2     Y 3 = X 1     Y 2 = 0     Y 4 = 0

         E←1
         N←2
         PAREN3
 Y 3 = X 2     Y 1 = NX 1     Y 2 = 0     Y 4 = 0

         E←4 5 6 7 8
         N←3
         PAREN3
 Y 3 = X 2     Y 2 = X 1     Y 1 =  X 3     Y 4 = 1

         E←1 2 3 4 8
         N←3
         PAREN3
 Y 3 = X 2     Y 2 = X 1     Y 1 = NX 3     Y 4 = 1  .
```

4.4 Discussie:

De functie PAREN3 is getest voor alle 256 mogelijke functies van drie variabelen. Van deze functies zijn er 115 met één bouwsteen te realiseren.

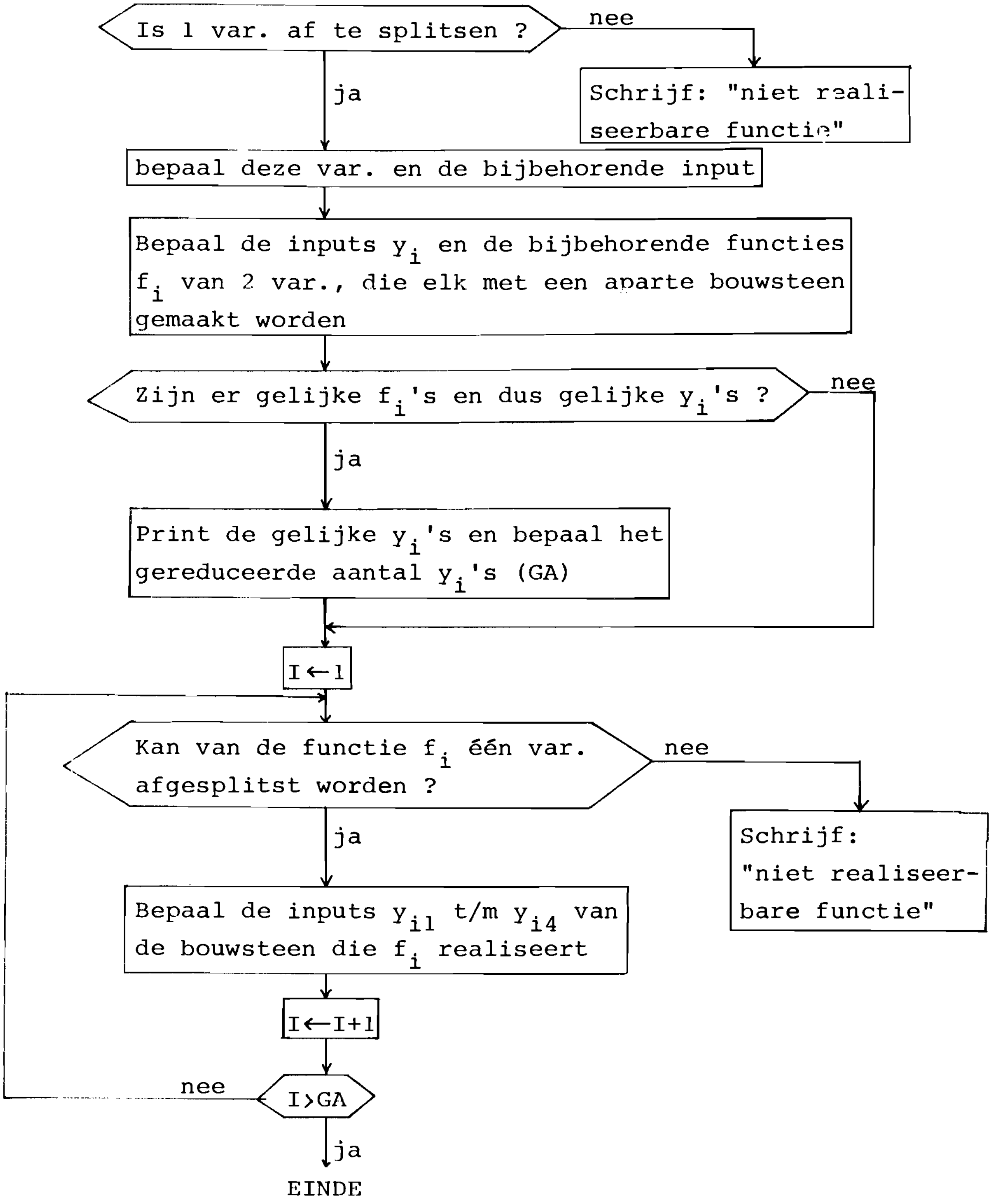
Er volgt nu een uitbreiding van PAREN3 waarbij meerdere bouwstenen F gebruikt worden om E re realiseren.
Als er geen twee variabelen van de functie E afgesplitst kunnen worden dan is E niet met één bouwsteen F realiseerbaar (E is een functie van 3 var.). Het programma PAFEN3 geeft dan als output :"kan niet". We gaan nu PAREN3 uitbreiden met een onderzoek waarin we nagaan of één variabele van E af te splitsen is. Als één input verbonden kan worden met een afgesplitste variabele dan kunnen op de overige inputs nog de functies van de resterende twee variabelen aangesloten worden. We proberen nu deze 3 functies met maximaal 3 bouwstenen F te realiseren.

v.b.4.5: Stel dat van $E(x_1,x_2,x_3)$ de variabele x_2 op input y_1 van bouwsteen $F(y_1,y_2,y_3,y_4)$ aangesloten kan worden dan onderzoeken we de volgende realisatie :



We dienen dus $f_2(x_1,x_3)$, $f_3(x_1,x_3)$ en $f_4(x_1,x_3)$ te bepalen en na te gaan of elk van deze functies met één bouwsteen F te realiseren is.

Bovenstaande toeveoeging aan PAREN3 is een vervanging voor het blok : Schrijf :"kan niet" en ziet er in blokschema als volgt uit :



Er volgt nu een toepassing van het bovenstaande :

Beschouw de functie $E(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3(\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1x_2)$
Kan deze functie E met de bouwsteen $F(y_1,y_2,y_3,y_4)=\bar{y}_4(y_2+\bar{y}_3y_1)+$
$y_4(y_1+y_3y_2)$
gemaakt worden?

Eerst gaan we na of de functie E met één bouwsteen F gerealiseerd kan worden. Daartoe onderzoeken we of 2 var. van E af te splitsen zijn. Dit doen we door de matrices uit de arrays FAA← M AARF F en EAA←N AARE E met elkaar te vergelijken (N=3 is het aantal variabelen van functie E en M=4 is het aantal inputs van bouwsteen F). Omdat er geen matrix in array FAA is die alle verschillende kolommen van een matrix uit array EAA bezit, kunnen we niet twee variabelen van E afsplitsen.

Nu komt bovenstaande toevoeging aan PAREN3 in werking :
Kan 1 variabele van de functie E afgesplitst worden?

We kunnen de functies F en E ook als volgt noteren :

E=1 0 0 1 0 0 0 0

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\ x_1}_{\bar{x}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}_{x_2}\ \cdot}_{\bar{x}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}}_{x_3}$$

F= 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\bar{y}_1\ y_1}_{\bar{y}_2}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}_{y_2}\ \cdot}_{\bar{y}_3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}_{y_3}\ \cdot\ \cdot}_{\bar{y}_4}\ \underbrace{\cdot}_{y_4}}$$

Daaruit volgt voor de arrays FA en EA :

$$EA=\begin{array}{l}\bar{x}_1\\x_1\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad FA=\begin{array}{l}\bar{y}_1\\y_1\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0&0&1\\1&1&0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

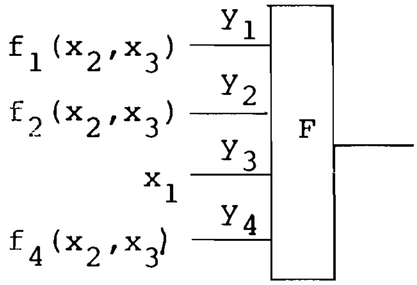
$$\begin{array}{l}\bar{x}_2\\x_2\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{l}\bar{y}_2\\y_2\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1&0&1\\1&1&1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}\bar{x}_3\\x_3\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{l}\bar{y}_3\\y_3\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}x_1\\\bar{x}_1\end{array}\begin{pmatrix}\cdots&&&\\\cdots&&&\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{l}\bar{y}_4\\y_4\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

We vergelijken de matrices van EA met die van FA te beginnen met EA[1;;] , de eerste matrix van EA. We onderzoeken of er een matrix FA[J;;] van FA is die alle verschillende kolommen van EA[1;;] bevat. FA[3;;] bevat alle verschillende kolommen van EA[1;;] dus $y_3=x_1$.



Om de functies $f_i(x_2,x_3)$ te bepalen, berekenen we eerst de oplossing R van de matrixvergelijking FA[3;;] ⊗ R=EA[1;;]

$$\begin{array}{c}\begin{array}{l}\bar{y}_3\\y_3\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}\\\underbrace{\underbrace{\underbrace{\bar{y}_1\ y_1}_{\bar{y}_2}\ \underbrace{\cdots}_{y_2}}_{\bar{y}_4}\ \underbrace{\cdots}_{y_4}}\end{array}\otimes\begin{array}{c}\begin{array}{l}\bar{y}_4\left[\begin{array}{l}\bar{y}_2\left[\begin{array}{l}\bar{y}_1\\y_1\end{array}\right.\\y_2\left[\begin{array}{l}\vdots\end{array}\right.\end{array}\right.\\y_4\left[\begin{array}{l}\vdots\end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\\underbrace{\underbrace{\bar{x}_2\ x_2}_{\bar{x}_3}\ \underbrace{\cdots}_{x_3}}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{array}{l}\bar{x}_1\\x_1\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\underbrace{\underbrace{\bar{x}_2\ x_2}_{\bar{x}_3}\ \underbrace{\cdots}_{x_3}}\end{array}$$

$R_{ji}=1$ als $FA[3;j]=EA[1;i]$ dus als de j-de kolom van $FA[3;;]$ gelijk is aan de i-de kolom van $EA[1;;]$.

Om y_4, y_2 en y_1 uit te drukken in x_2 en x_3, moeten we matrix R reduceren tot een unitaire matrix RG, die in elke kolom slechts één 1 bevat. RG kunnen we uit R maken door in een kolom slechts de bovenste één uit de overeenkomstige kolom van R over te nemen.

$$RG = \begin{array}{ccc|cccc} \bar{y}_4 & \bar{y}_2 & \bar{y}_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & y_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_4 & \vdots & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \bar{x}_2 & x_2 & & \\ & & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{\bar{x}_3}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{x_3}} \end{array}$$

Uit RG volgt de tabel :

x_3	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
y_4	0	1	0	0
y_2	0	1	0	0
y_1	1	0	0	0

(De eerste kolom uit deze tabel is 0 0 1 omdat in de eerste kolom van RG in rij 2 een 1 staat; rij 2 hoort bij de inputs $\bar{y}_4\bar{y}_2y_1$ dus $y_4=0$, $y_2=0$ en $y_1=1$).

Uit deze tabel kunnen we horizontaal aflezen hoe b.v. y_4 van x_3 en x_2 afhangt; namelijk $y_4=\bar{x}_3x_2$.
Net zo lezen we af : $y_2=y_4$ en $y_1=\bar{x}_3\bar{x}_2$.

Dus : $f_1(x_2,x_3)=\bar{x}_2\bar{x}_3$

$f_2(x_2,x_3)=x_2\bar{x}_3$

$f_4(x_2,x_3)=x_2\bar{x}_3$

$f_2=f_4$ dus het gereduceerde aantal functies GA is twee. We gaan nu met 2 bouwstenen F de functies f_1 en f_2 proberen te realiseren.

<u>Realisatie van f_1:</u>

$$f_1(x_2,x_3) = \underbrace{\underset{\bar{x}_2}{1}\quad \underset{x_2}{0}}_{\bar{x}_3}\quad \underbrace{0\quad 0}_{x_3} \Longrightarrow EA = \begin{array}{c}\begin{array}{c}\bar{x}_2\\ x_2\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\[2ex] \begin{array}{c}\bar{x}_3\\ x_3\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\[2ex] \begin{array}{c}x_2\\ \bar{x}_2\end{array}\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\end{pmatrix}\\ \vdots\end{array}$$

$$FA = \begin{array}{c}\bar{y}_{11}\\ y_{11}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&1&0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{y}_{12}\\ y_{12}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{y}_{13}\\ y_{13}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{y}_{14}\\ y_{14}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

Omdat elke kolom van EA[1;;] in FA[3;;] zit kunnen we de var. x_2 afsplitsen en aansluiten op input y_{13}. Dus $y_{13}=x_2$. Om te bepalen hoe y_{11}, y_{12} en y_{14} van x_3 afhangen lossen we de matrixvergelijking FA[3;;] $\otimes$ R=EA[1;;] op.

$$\underbrace{\begin{array}{c}\bar{y}_{13}\\ y_{13}\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \underbrace{\underbrace{\underset{\bar{y}_{11}}{}\ \underset{y_{11}}{}}_{\bar{y}_{12}}\quad\underbrace{\quad}_{y_{12}}}_{\bar{y}_{14}}\ \cdots\ \underbrace{\qquad\qquad}_{y_{14}}\end{array}}_{FA[3;;]} \otimes \underbrace{\begin{array}{c}\bar{y}_{14}\left[\begin{array}{c}\bar{y}_{12}\left[\begin{array}{c}\bar{y}_{11}\\ y_{11}\end{array}\right.\\ y_{12}\left[\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right.\end{array}\right.\\ y_{14}\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \\ \\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\ \end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \bar{x}_3\ \ x_3\end{array}}_{R} = \underbrace{\begin{array}{c}\bar{x}_2\\ x_2\end{array}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \bar{x}_3\ \ x_3\end{array}}_{EA[1;;]}$$

Uit R volgt de gereduceerde matrix $RG=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt de tabel :
$$\begin{array}{c|cl} x_3 & 0\ 1 & \\ \hline y_{11} & 0\ 0 & \longrightarrow y_{11}=0 \\ y_{12} & 0\ 0 & \longrightarrow y_{12}=0 \\ y_{14} & 0\ 0 & \longrightarrow y_{14}=0 \end{array}$$

<u>Realisatie van f_2</u>: $f_2(x_2,x_3) = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$
$$\underbrace{\bar{x}_2\ \ x_2}_{\bar{x}_3}\ \ \underbrace{\ \ldots\ }_{x_3}$$

$$EA= \begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ x_2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{x}_3 \\ x_3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x_2 \\ \bar{x}_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x_3 \\ \bar{x}_3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$FA= \begin{array}{c} \bar{y}_{21} \\ y_{21} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{y}_{22} \\ y_{22} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{y}_{23} \\ y_{23} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \bar{y}_{24} \\ y_{24} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beide kolommen van EA[1;;] komen in FA[1;;] voor : $y_{21}=x_2$

$$\begin{array}{c} \bar{y}_{21} \\ y_{21} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{array}{c} \bar{y}_{24} \\ \\ y_{24} \end{array}\left[\begin{array}{l} \begin{array}{c} \bar{y}_{23} \\ y_{23} \end{array}\left[\begin{array}{l} \begin{array}{c} \bar{y}_{22} \\ y_{22} \end{array} \\ \vdots \end{array}\right. \\ \vdots \end{array}\right. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{x}_3 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ x_2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\quad \bar{x}_3\ \ x_3$$

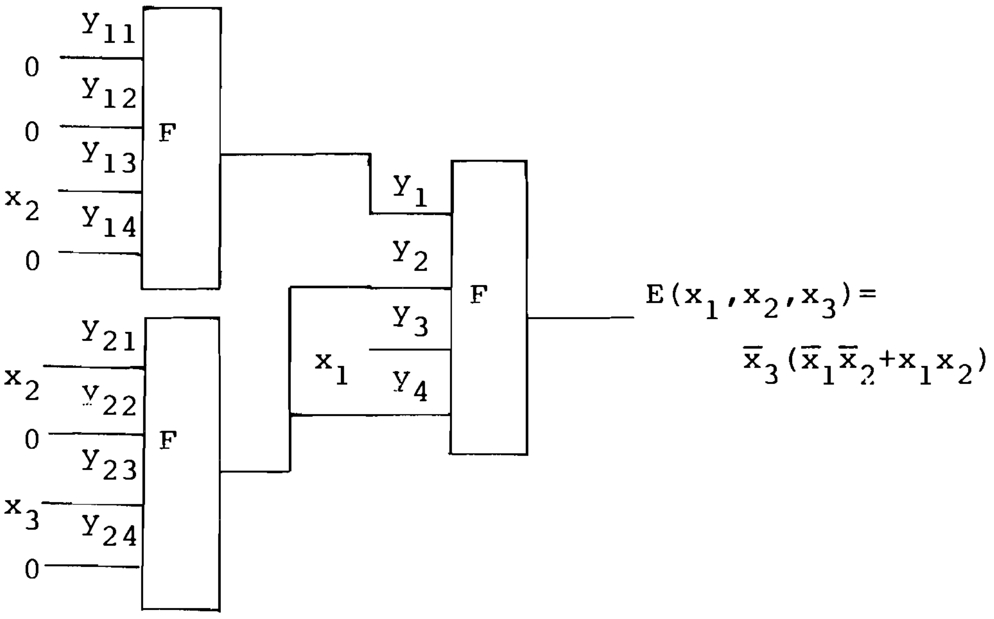
$$\underbrace{\underbrace{\bar{y}_{22}\ \ y_{22}}_{\bar{y}_{23}}\ \ \underbrace{\ \ldots\ }_{y_{23}}}_{\bar{y}_{24}}\ \ \underbrace{\ \ldots\qquad\qquad\ }_{y_{24}}$$

Uit R bepalen we de gereduceerde matrix RG = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Uit RG volgt :

$$\begin{array}{c|cc}
x_3 & 0 & 1 \\
\hline
y_{24} & 0 & 0 \longrightarrow y_{24}=0 \\
y_{23} & 0 & 1 \longrightarrow y_{23}=x_3 \\
y_{22} & 0 & 0 \longrightarrow y_{22}=0
\end{array}$$

De totale realisatie ziet er dus als volgt uit :



$$F(y_1,y_2,y_3,y_4)=\bar{y}_4(y_2+\bar{y}_3y_1)+y_4(y_1+y_3y_2)$$

Hoofdstuk 5 : De realisatie van een schakelfunctie m.b.v. een minimaal aantal multiplexers.

5.1 Inleiding :

Een multiplexer kan beschouwd worden als een ULM en we schrijven daarom MULM-k (Multiplexer Universal Logic Modul met k control inputs). Met een MULM-k kan elke functie van k+1 variabelen gerealiseerd worden. Als we namelijk $f(x_k,x_{k-1},\ldots,x_0)$ willen realiseren dan expanderen we deze functie, volgens Shannons principe, naar de variabelen $x_1,\ldots,x_k$:

$$\begin{aligned} f(x_k,x_{k-1},\ldots,x_0)= {} & \bar{x}_k.\bar{x}_{k-1}.\ldots.\bar{x}_1.f(0,0,\ldots,0,x_0)+ \\ & \bar{x}_k.\bar{x}_{k-1}.\ldots.x_1.f(0,0,\ldots,1,x_0)+ \ldots + \\ & x_k.x_{k-1}.\ldots.x_1.f(1,1,\ldots,1,x_0). \end{aligned}$$

De expansievariabelen $x_1,\ldots,x_k$ worden aangesloten op de k control inputs van de multiplexer en de residufuncties $f(j_k,j_{k-1},\ldots,j_1,x_0)$, $j_i=0$ of 1, worden aangesloten op de 2^k geselecteerde inputs van de multiplexer.

v.b.5.1 : Stel we willen $f(x_2,x_1,x_0)=\bar{x}_2\bar{x}_1x_0+\bar{x}_2x_1+x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$ realiseren met één MULM-2. Door f te expanderen naar b.v. de variabelen x_1 en x_2 bepalen we dan de 4 residufuncties $f_i(x_0)$, $i=0,1,2,3$:

$$f(x_2,x_1,x_0)=\bar{x}_2\bar{x}_1(x_0)+\bar{x}_2x_1(1)+x_2\bar{x}_1(\bar{x}_0)+x_2x_1(0).$$

Dus : $f_0(x_0)=x_0$, $f_1(x_0)=1$, $f_2(x_0)=\bar{x}_0$ en $f_3(x_0)=0$

Deze residufuncties $f_i(x_0)$ sluiten we aan op de resp. geselecteerde inputs s_i $(i=0,1,2,3)$.
We verkrijgen zo de realisatie van de gegeven functie volgens fig.5.1.

We maken voortaan slechts gebruik van MULM-1 en MULM-2 bouwstenen om een schakelfunctie te realiseren en het onderzoek is erop gericht het aantal MULM's dat nodig is voor de realisatie van een functie te minimaliseren. Daartoe zoeken we de geschikste expansie van de schakelfunctie.

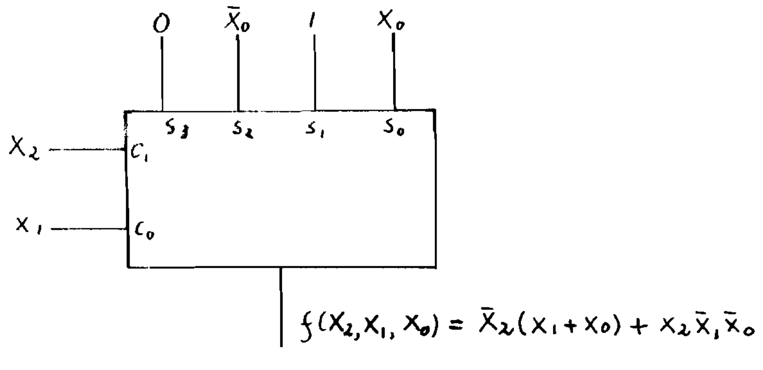


Fig.5.1 : Realisatie van een speciale functie van 3 var. met een MULM-2.

5.2 Eigenschappen van MULM-1 en MULM-2 netwerken.

Met $2^{n-1}-1$ MULM-1 bouwstenen kunnen we elke functie $f(x_{n-1},...,x_0)$ realiseren als deze bouwstenen in de boomstruktuur met elkaar verbonden worden. Zie als voorbeeld fig.5.2, waarin het netwerk geschetst is, met behulp waarvan elke willekeurige functie van vier variabelen gerealiseerd kan worden. Merk op dat op de control inputs slechts ongecomplementeerde variabelen aangesloten zijn. Dit zal in het vervolg ook steeds het geval zijn.

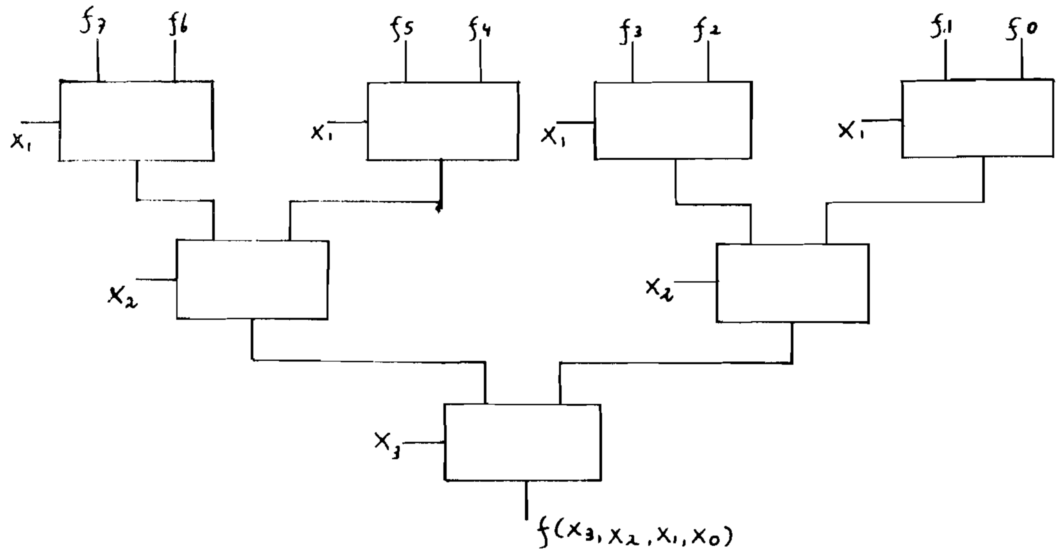


Fig.5.2 : Netwerk voor de realisatie van elke willekeurige functie van 4 var. m.b.v. MULM-1 bouwstenen.

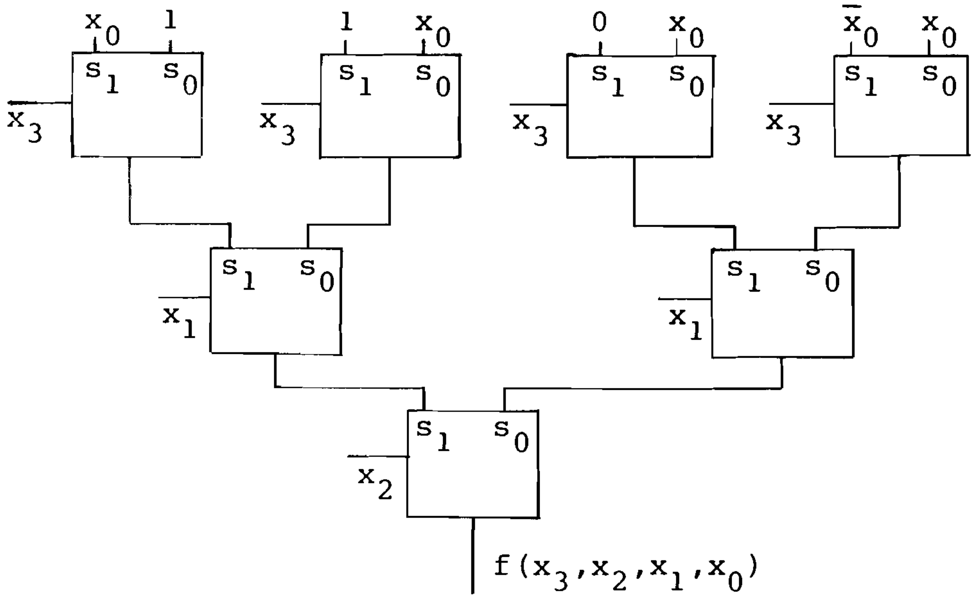
Realiseren we een schakelfunctie met MULM-2 bouwstenen dan is het aantal benodigde bouwstenen maximaal :

$$\sum_{i=0}^{L-1} 2^{2i} \quad \text{waarin } L \in \mathbb{N} \text{ en } \frac{n-1}{2} \leqslant L \leqslant \frac{n-1}{2} + 1$$

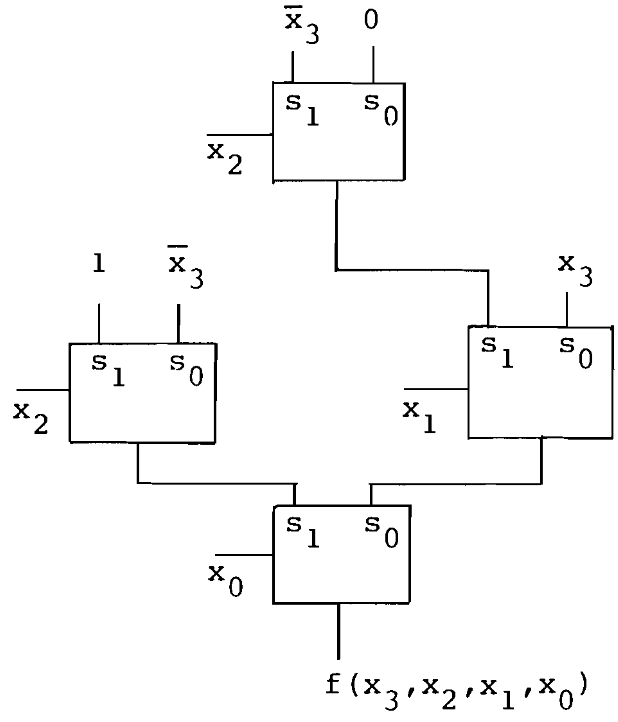
Voor elke functie $f(x_{n-1},...,x_0)$ zijn de geselecteerde inputs van elke MULM-k in de boomcircuit-realisering residufuncties van $f(x_{n-1},...,x_0)$. Bij een minimale boomrealisatie van een functie dienen we dus de som van produkten-expansie te vinden die het minste aantal residufuncties bevat. In v.b.5.2 wordt duidelijk gemaakt dat de volgorde van expanderen van invloed kan zijn op het verkrijgen van een minimaal aantal residufuncties.

v.b.5.2 : We realiseren $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=\bar{x}_3(x_0+x_2x_1)+x_3(\bar{x}_1\bar{x}_0+x_2x_0)$ met een boomcircuit, bestaande uit MULM-1's op twee manieren :

1. $f= \bar{x}_2(\bar{x}_1(\bar{x}_3x_0+x_3\bar{x}_0)+x_1(\bar{x}_3x_0))+$
$x_2(\bar{x}_1(\bar{x}_3x_0+x_3)+x_1(\bar{x}_3+x_3x_0))$



2. $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=\bar{x}_0(\bar{x}_1(x_3)+x_1(x_2\bar{x}_3))+x_0(\bar{x}_2\bar{x}_3+x_2)$



Uit dit voorbeeld blijkt dat door te zoeken naar een geschikte expansie een besparing van een aantal MULM-1's verkregen kan worden.

Het aantal MULM-k bouwstenen nodig voor het realiseren van $f(x_n,...,x_0)$, $\bar{f}(x_n,...,x_0)$ en $\bar{f}(\bar{x}_n,...,\bar{x}_0)$ is gelijk. Is de boomrealisatie van $f(x_n,...,x_0)$ bekend dan kunnen de realisaties van de gecomplementeerde en duale functie daaruit als volgt afgeleid worden :

- De boomrealisatie van de gecomplementeerde functie $\bar{f}(x_n,...,x_0)$ volgt uit die van $f(x_n,...,x_0)$ door de functies van één of nul variabelen die op de geselecteerde inputs zijn aangesloten te vervangen door hun complement.
- De boomrealisatie van de duale functie $\bar{f}(\bar{x}_n,...,\bar{x}_0)$ volgt uit die van $f(x_n,...,x_0)$ door de functies die aangesloten zijn op de geselecteerde inputs van een MULM-1 te permuteren en alle functies van nul variabelen door hun complement te vervangen.

5.3 Minimalisatie van het aantal multiplexers m.b.v. een numerieke expansie techniek.

Als we een schakelfunctie $f(x_{n-1},...,x_0)$ realiseren m.b.v. MULM-k bouwstenen in de vorm van een boom dan dienen we $f(x_{n-1},...,x_0)$ te expanderen naar k variabelen. De 2^k residufuncties, die zo ontstaan, dienen we weer te expanderen naar k andere variabelen mits ze geen functie zijn van nul of een variabele. Omdat het aantal MULM-k's in een boomrealisatie van een schakelfunctie evenredig is met het aantal verschillende residufuncties van meer dan een variabele bij herhaalde expansie naar k variabelen, zijn er methoden nodig om residufuncties van nul of een variabele te detekteren.

We ontwikkelen nu methoden om na te gaan of een residufunctie een functie is van nul of één variabele, of hij redundante variabelen bevat en of er bepaalde residufuncties gelijk zijn.

Allereerst beschrijven we hoe we residufuncties vormen en noteren :

De schakelfunctie $f(x_{n-1},...,x_0)$ expanderen we naar de variabele x_i als volgt :

$$f(x_{n-1},...,x_0)=\bar{x}_i.f(x_{n-1},...,x_{i+1},0,x_{i-1},...,x_0)+$$
$$x_i.f(x_{n-1},...,x_{i+1},1,x_{i-1},...,x_0).$$

We noteren dit zó: $f(x_{n-1},...,x_0)=\bar{x}_i.R^{\bar{i}}+ x_i.R^i$.

Op dezelfde manier kunnen we $f(x_{n-1},...,x_0)$ naar b.v. de variabelen x_0 en x_1 expanderen :

$$f(x_{n-1},...,x_0)=\bar{x}_1\bar{x}_0.R^{\bar{1},\bar{0}} + \bar{x}_1x_0.R^{\bar{1},0} + x_1\bar{x}_0.R^{1,\bar{0}} + x_1x_0.R^{1,0}.$$

Om de residufuncties op een gemakkelijke manier met elkaar te kunnen vergelijken noteren we de schakelfunctie en de residufuncties als een verzameling natuurlijke getallen welke de mintermen in decimale vorm zijn.

v.b.5.3 : Stel $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0+\bar{x}_3\bar{x}_2x_1x_0+\bar{x}_3x_2\bar{x}_1x_0+$
$+\bar{x}_3x_2x_1\bar{x}_0+\bar{x}_3x_2x_1x_0+x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0+x_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0+x_3x_2\bar{x}_1x_0+x_3x_2x_1x_0$

De decimale vorm van de mintermen is resp. 1,3,5,6,7,8,12,13,15 omdat :

$$\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0=x_3^0x_2^0x_1^0x_0^1 \longrightarrow (0.2^3+0.2^2+0.2^1+1.2^0)=1$$

$$\bar{x}_3\bar{x}_2x_1x_0=x_3^0x_2^0x_1^1x_0^1 \longrightarrow (0.2^3+0.2^2+1.2^1+1.2^0)=3$$

$$\vdots$$

$$x_3x_2x_1x_0=x_3^1x_2^1x_1^1x_0^1 \longrightarrow (1.2^3+1.2^2+1.2^1+1.2^0)=15$$

We noteren f dus als $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=\Sigma(1,3,5,6,7,8,12,13,15)$.

Zo kunnen we ook elke residuverzameling van f noteren als een verzameling natuurlijke getallen. R^{i^*} bestaat uit de verzameling natuurlijke getallen die de decimale representaties zijn van de mintermen van $f(x_{n-1},\ldots,x_0)$ waarin x_i^* voorkomt (x_i^* is x_i of $\bar{x}_i$). Alle residufuncties van één expansievariabele kunnen m.b.v. een tabel gemakkelijk gevonden worden. We demonstreren dit aan de hand van de functie uit v.b.5.3 in v.b.5.4.

v.b.5.4 : $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=\Sigma(1,3,5,6,7,8,12,13,15)$

x_3	x_2	x_1	x_0	min-term
0	0	0	1	1
0	0	1	1	3
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	1	15

$R^{\bar{0}}=(6,8,12)$

$R^{0}=(1,3,5,7,13,15)$

$R^{\bar{1}}=(1,5,8,12,13)$

$R^{1}=(3,6,7,15)$

$R^{\bar{2}}=(1,3,8)$

$R^{2}=(5,6,7,12,13,15)$

$R^{\bar{3}}=(1,3,5,6,7)$

$R^{3}=(8,12,13,15)$

Een residuverzameling $R^{i^* j^*}$ (na afsplitsing van de twee variabelen x_i^* en x_j^*) is gelijk aan de doorsnede van de twee verzamelingen R^{i^*} en R^{j^*} (x_i^* is x_i of $\bar{x}_i$ en x_j^* is x_j of $\bar{x}_j$).

v.b.5.5 : beschouwen we v.b.5.4 dan vinden we b.v. $R^{\bar{3}1}$ als vogt : $R^{\bar{3}1}=R^{\bar{3}}\cap R^{1}=(1,3,5,6,7)\cap(3,6,7,15)=(3,6,7)$

Zo kunnen we uit een residuverzameling met twee expansievariabelen en een residuverzameling met een expansievariabele een residuverzameling met drie expansievariabelen vormen door van de twee eerstgenoemde de doorsnede te nemen.

v.b.5.6 : Zie ook v.b.5.4 en 5.5 :
$R^{\bar{3}\bar{2}1}=R^{\bar{3}1}\cap R^{\bar{2}}=(3,6,7)\cap(1,3,8)=(3)$

We kunnen twee residuverzamelingen pas op hun gelijkheid gaan testen als de verzameling expansievariabelen van beide residuverzamelingen gelijk is. Om verder de invloed van de expansievariabelen op de residuverzamelingen te elimineren gaan we genormaliseerde residuverzamelingen construeren.
De genormaliseerde residuverzameling N^{i^*} van R^{i^*} is als volgt gedefinieerd :

$N^{i^*}=R^{i^*}-p.2^{i}$ met p=0 als $x_i^*=\bar{x}_i$ en
p=1 als $x_i^*=x_i$.

v.b.5.7 : Als $R^{\bar{1},0}=(1,5,13)$ em $R^{1,0}=(3,7,15)$ dan is
$N^{\bar{1},0}=R^{\bar{1},0}-(0.2^{1}+1.2^{0})=(1,5,13)-1=(0,4,12)$ en
$N^{1,0}=R^{1,0}-(1,2^{1}+1.2^{0})=(3,7,15)-3=(0,4,12)$
Omdat $N^{\bar{1},0}=N^{1,0}$ geldt $f(x_3,x_2,0,1)=f(x_3,x_2,1,1)$ en zijn er dus twee gelijke residuverzamelingen.

Als de twee genormaliseerde residuverzamelingen $N^{\bar{i}}$ en N^{i} gelijk zijn dan heeft $f(x_{n-1},\dots,x_0)$ een redundante variabele x_i. Als $R^{\bar{i},k-1^*,\dots,0^*} = R^{i,k-1^*,\dots,0^*} - 2^{i}$ dan heeft de residuverzameling $R^{k-1^*,\dots,0^*}$ een redundante variabele x_i.

De functie $f(x_{n-1},\dots,x_0)$ is gelijk aan 0 of 1 als het aantal mintermen van f resp. 0 of 2^n bedraagt. De residufunctie $f(x_{n-1},\dots,x_k,j_{k-1},\dots,j_0)$ is gelijk aan 1 of 0 als het aantal elementen van de residuverzameling $R^{\overset{*}{\overline{k-1}},\dots,\overset{*}{0}}$ 2^{n-k} resp. 0 bedraagt. Om te bepalen of $f(x_{n-1},\dots,x_0)$ een functie is van x_i dient de functie naar x_i geexpandeerd te worden. Als een residufunctie 2^{n-1} mintermen bevat en de ander geen dan geldt dat $f(x_{n-1},\dots,x_0)$ een functie is van x_i.

Een residufunctie $f(x_{n-1},\dots,x_k,j_{k-1},\dots,j_0) = \overline{x}_k (=x_k)$ als de residuverzameling $R^{\overline{k},\overset{*}{\overline{k-1}},\dots,\overset{*}{0}}$ $2^{n-k-1}(0)$ elementen heeft terwijl $R^{k,\overset{*}{\overline{k-1}},\dots,\overset{*}{0}}$ $0(2^{n-k-1})$ elementen heeft

$$j_p = \begin{cases} 0 \text{ als } \overset{*}{x}_p=\overline{x}_p \\ 1 \text{ als } \overset{*}{x}_p=x_p \end{cases} \quad p=0,\dots,k-1$$

v.b.5.8 : zie ook v.b.5.4 :

$$R^{\overline{3},\overline{1},\overline{0}}=R^{\overline{3}}\cap R^{\overline{1},\overline{0}}=(1,3,5,6,7)\cap(8,12)= \phi$$

$$R^{3,\overline{1},\overline{0}}=R^{3}\cap R^{\overline{1},\overline{0}}=(8,12,13,15)\cap(8,12)=(8,12)$$

$$\left.\begin{matrix} n=4 \\ k=2 \end{matrix}\right\} 2^{n-k-1}=2$$

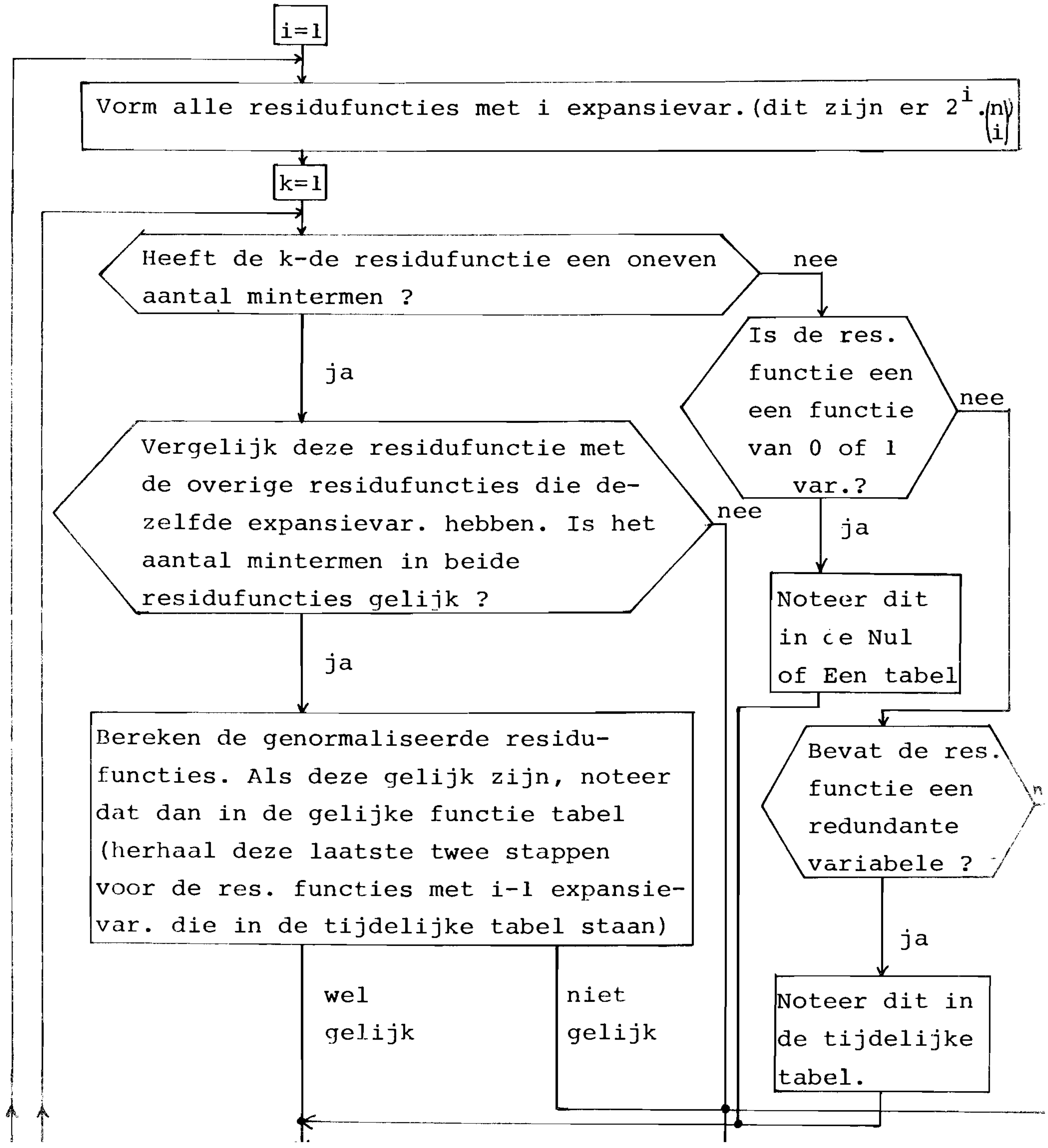
Omdat $R^{\overline{3},\overline{1},\overline{0}}$ nul elementen bevat en $R^{3,\overline{1},\overline{0}}$ twee elementen geldt dat $f(x_3,x_2,0,0)=x_3$

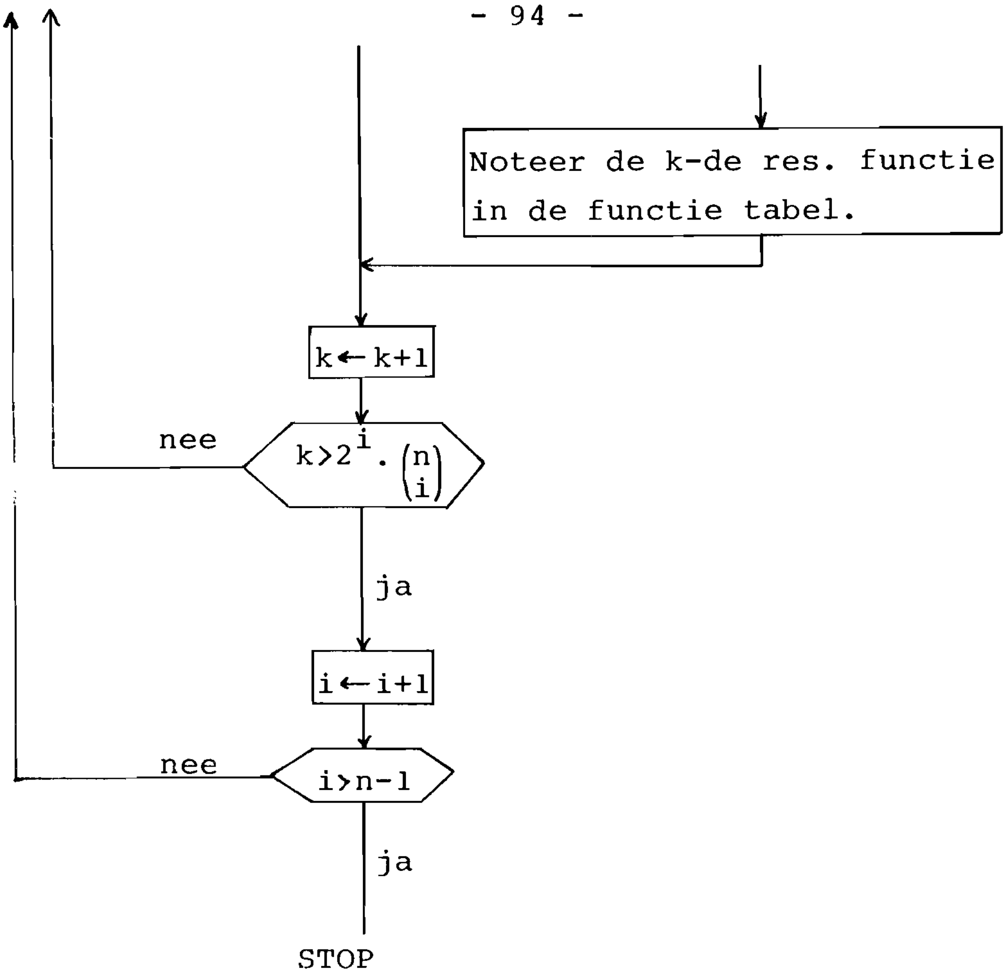
Voordat we een uitspraak kunnen doen over de vraag welke expansie van $f(x_{n-1},\dots,x_0)$ de minimale realisatie oplevert m.b.v. MULM-1 bouwstenen, moeten we alle residufuncties met één en twee expansievariabelen vormen. Deze functies delen we in in drie klassen namelijk :

- Een klasse met residufuncties die slechts een functie zijn van nul of een variabele (de Nul of Een tabel).
- Een klasse die alle paren residufuncties bevat die gelijk zijn aan elkaar (de gelijke functie tabel).
- Een tabel die alle residufuncties van meer dan één variabele bevat die niet tot de vorige twee klassen behoren (de

functie tabel).

In onderstaand blokschema wordt het indelen van de residufuncties in de drie klassen besproken (voor MULM-1's). Een extra tijdelijke klasse(de tijdelijke tabel) bevat alle residufuncties met b.v. één expansievariabele die een redundante variabele hebben. Als namelijk een residufunctie met één expansievariabele een redundante variabele bevat dan kan deze residufunctie gelijk zijn aan een residufunctie met twee expansievariabelen.





v.b.5.9 : Voor de functie $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=\sum(1,3,5,6,7,8,12,13,15)$ worden m.b.v. bovenstaand blokschema de volgende drie tabellen gevonden :

Nul of Een tabel

Residu-verz.	Waarde
$R^{\bar{1},\bar{0}}$	x_3
$R^{\bar{2},0}$	$\bar{x}_3$
$R^{2,0}$	1
$R^{\bar{3},0}$	1
$R^{3,\bar{0}}$	$\bar{x}_1$
$R^{3,0}$	x_2
$R^{\bar{3},\bar{1}}$	x_0
$R^{\bar{3},\bar{2}}$	x_0

Functie tabel

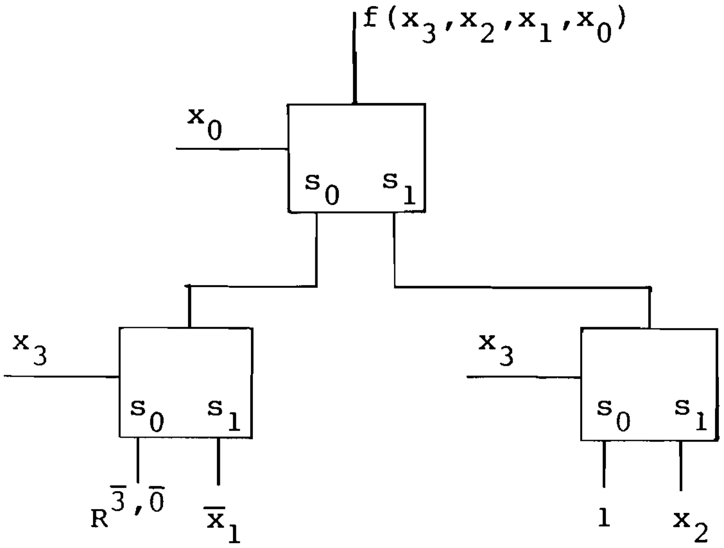
Expansie-var.	Residufunctie
x_0	$R^{\bar{0}},R^0$
x_1	$R^{\bar{1}},R^1$
x_2	$R^{\bar{2}},R^2$
x_3	$R^{\bar{3}},R^3$
x_1 x_0	$R^{1,\bar{0}}$
x_2 x_0	$R^{\bar{2},\bar{0}}.R^{2,\bar{0}}$
x_3 x_0	$R^{\bar{3},\bar{0}}$
x_2 x_1	$R^{\bar{2},\bar{1}},R^{\bar{2},1},R^{2,\bar{1}},R^{2,1}$
x_3 x_1	$R^{\bar{3},1},R^{3,\bar{1}},R^{3,1}$
x_3 x_2	$R^{\bar{3},2},R^{3,\bar{2}},R^{3,2}$

Gelijke functie tabel

Res. verz.	Res. verz.
$R^{\bar{1},0}$	$R^{1,0}$

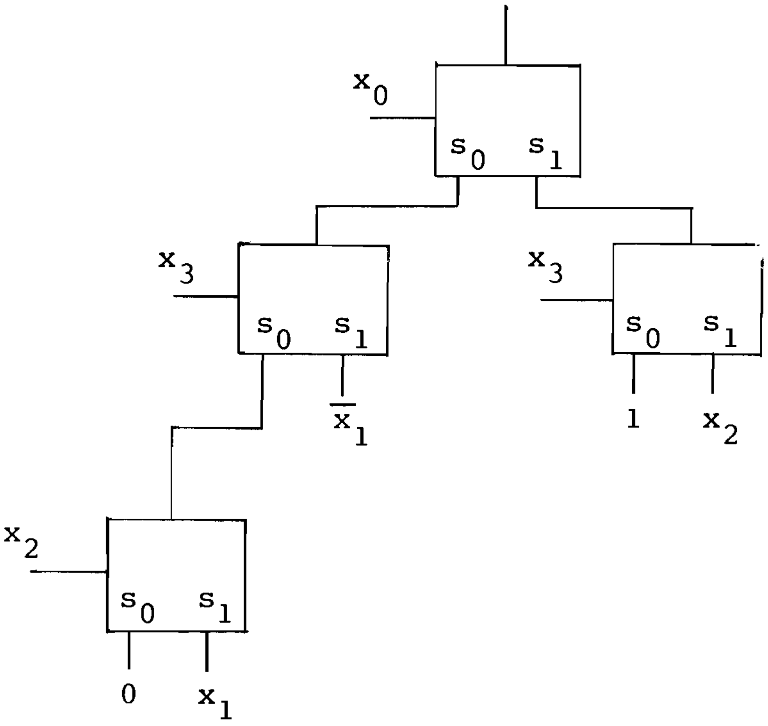
M.b.v. de indeling van alle residufuncties in drie tabellen kunnen we een boom construeren met een minimaal aantal MULM-1 bouwstenen. Daartoe gaan we eerst na welke expansievariabele we het beste kunnen kiezen op het eerste expansieniveau. In de functietabel van v.b.5.9 zien we dat alle residuverzamelingen met één expansievariabele functies zijn van meer dan één variabele. Daarom stellen we in dit geval de keuze van de expansievariabele op het eerste niveau uit en proberen een keuze te maken uit de expansievariabelen op het tweede expansieniveau. In de functietabel van v.b. 5.9 zien we dat de expansievariabelen x_3,x_0 slechts één residuverzameling $R^{\bar{3},\bar{0}}$ hebben die een functie is van meer dan één variabele. De overige drie residuverzamelingen $R^{\bar{3},0}$,$R^{3,\bar{0}}$ en $R^{3,0}$ staan in de Nul of Een tabel dus ze zijn functies van 0 of 1 variabele. Kiezen we van x_3 en x_0, x_C als expansievariabele op het eerste niveau, dan ontstaat de volgende minimale boomrealisatie van $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=$ $\sum(1,3,5,6,7,8,12,13,15)$ m.b.v. MULM-1 bouwstenen (zie v.b.5.10).

v.b.5.10:



$R^{\bar{3},\bar{0}}$ moeten we nog met een MULM-1 realiseren. $R^{\bar{3},\bar{0}}$ is een functie van x_1 en x_2. We expanderen $R^{\bar{3},\bar{0}}$ b.v. naar x_2 en en bepalen $R^{\bar{3},\bar{2},\bar{0}}$ en $R^{\bar{3},2,\bar{0}}$, die dus beide functies zijn van x_1. Omdat $R^{\bar{3},\bar{2},\bar{0}}=0$ en $R^{\bar{3},2,\bar{0}}=x_1$ kunnen we het netwerk van v.b.5.10 completeren tot het netwerk geschetst v.b.5.11

v.b.5.11 : $f(x_3,x_2,x_1,x_0)=\bar{x}_0(\bar{x}_3x_2x_1+x_3\bar{x}_1)+x_0(\bar{x}_3+x_2)$



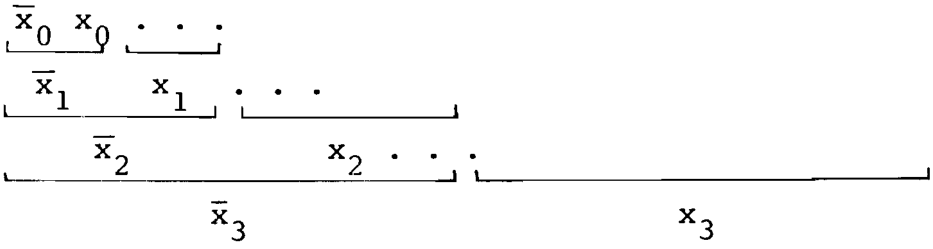
Opmerking : Bij de realisatie volgens v.b.5.11 zal het aantal bouwstenen niet veranderen als we i.p.v. expansievariabele x_0 op het eerste niveau variabele x_3 kiezen mits dan x_0 wordt gekozen als expansievariabele op het tweede niveau. Op dezelfde manier kunnen we op het derde niveau x_1 i.p.v. x_2 als expansievariabele kiezen.

Het zoeken naar de minimale boomrealisatie is zeer uitgebreid m.b.v. een algoritme beschreven in een artikel van Tabloski en Mowle (zie hoofdstuk 2).

5.4 Het gebruik van Boole-matrices bij de minimalisatie van het aantal multiplexers.

Inplaats van een residufunctie te beschouwen als een verzameling decimale getallen, kunnen we ook inzicht krijgen in de residufuncties als we ze voorstellen door een digitale vector. Daartoe vormen we van een functie $f(x_{n-1},...,x_0)$ een digitale vector met 2^n elementen. Het i-de element is 1 als minterm i tot de functie behoort. De 2n mogelijke residufuncties met één expansievariabele zijn de rijen van de matrices die we vormen met het programma N ARH F(zie hoofdstuk 3).

v.b.5.12 : We nemen de functie van v.b.5.3 :
$f(x_3,x_2,x_1,x_0)= \Sigma(1,3,5,6,7,8,12,13,15)$
De digitale vector DV die bij f hoort is :
DV= 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1



Na het uitvoeren van FA←4 ARH f bevat FA 4 matrices met 2 rijen en $2^{4-1}=8$ kolommen. Net zo kunnen we de 1/2n(n-1) residufuncties met twee expansievariabelen maken door het aanroepen van het programma N AARF F. Van de dan ontstane N(N-1) matrices met 4 rijen en 2^{N-2} kolommen nemen we daarna de eerste 1/2N(N-1) matrices die we FAA noemen.

v.b.5.13 : Als DV= 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1

$\bar{x}_0$ x_0 . . .

$\bar{x}_1$ x_1 . . .

$\bar{x}_2$ x_2 . . .

$\bar{x}_3$ x_3

dan zijn FA en FAA arrays die ontstaan bij het aanroepen van : FA← 4 ARH f

FAA← 4 AARF f

$$\mathrm{FA}=\begin{array}{c}\bar{x}_0\\x_0\end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{x}_1\\x_1\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{x}_2\\x_2\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{x}_3\\x_3\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&1&1&1\\1&0&0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{FAA}=\begin{array}{c}\bar{x}_1\left[\begin{array}{c}\bar{x}_0\\x_0\end{array}\right.\\x_1\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{c}\bar{x}_2\left[\begin{array}{c}\bar{x}_1\\x_1\end{array}\right.\\x_2\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{x}_2\left[\begin{array}{c}\bar{x}_0\\x_0\end{array}\right.\\x_2\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{c}\bar{x}_3\left[\begin{array}{c}\bar{x}_1\\x_1\end{array}\right.\\x_3\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\bar{x}_3\left[\begin{array}{c}\bar{x}_0\\x_0\end{array}\right.\\x_3\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{c}\bar{x}_3\left[\begin{array}{c}\bar{x}_2\\x_2\end{array}\right.\\x_3\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

Uit de eerste rij van de eerste matrix van FAA kunnen we aflezen dat $R^{\bar{1},\bar{0}}=x_3$. Omdat de basis van de variabelen x_3 en x_2 bij de kolommen van deze rij hoort.

Uit de derde rij van de derde matrix van FAA volgt dat $R^{3,\bar{0}}=\bar{x}_1$

Een residufunctie heeft een oneven aantal mintermen als het aantal enen in de bijbehorende rij oneven is.

v.b.5.14 : In v.b.5.13 heeft $R^{\overline{0}}$ een oneven aantal mintermen omdat de eerste rij van de eerste matrix van FA drie enen bevat.

Om na te gaan of een residufunctie 0 of 1 is, gaan we na of de bijbehorende rij resp. slechts nullen of enen bevat.

v.b.5.15 : In v.b.5.13 zien we dat de tweede rij van de derde matrix van FAA slechts enen bevat : $R^{\overline{3},0}=1$.

Als we onderzoeken of twee residufuncties gelijk zijn, hoeven we niet meer de genormaliseerde residufuncties te berekenen. Zijn namelijk twee rijen van een matrix van FA of FAA identiek dan zijn de bijbehorende residufuncties ook gelijk.

v.b.5.16 : In v.b.5.13 zijn de tweede en vierde rij van de eerste matrix van FAA gelijk ; daarom is $R^{\overline{1},0}=R^{1,0}$.

Literatuuroverzicht:

1. Boek : Digital Computer and Control Engineering (1960)
   Schrijver : R.S. Ledley ; (hoofdstuk 13 en 14).

2. Burroughs B6000/B7000 APL/700 User Reference Manual.

3. Artikel : Pneumonica en Fluidica
   Tijdschrift : Bedrijfsmechanisatie-Kern
   (jaargang 19,1969,nr 5,pag 105)
   Schrijver : O.A.M. François.

4. Artikel : Matrix Method of Synthesis of Combinational Schemes and Logic Convertors for Finite Automata
   Tijdschrift : Eng. Cyber. (vol. 13, 1975, pag 76)
   Schrijvers: S.M. Achasova en O.L. Bandman.

5. Artikel : On Identification of Redundancy and Symmetry of Switching Functions.
   Tijdschrift : IEEE Transactions on Computers
   (dec. 1975, pag 1609)
   Schrijvers: S.S. Yau en Y.S. Tang.

6. Artikel : A Numerical Expansion Technique and its Application to Minimal Multiplexer Logic Circuits.
   Tijdschrift : IEEE Trasnactions on Computers
   (july 1976, pag 684)
   Schrijvers: T.F. Tabloski en F.J. Mowle.

7. Literatuuronderzoek bse 77-10
   Onderwerp : Boolean Matrix Equations in Logic Design.