

MASTER

Rekonstruktie door middel van de "Filtered Back-Projection" methode

Wullems, J.H.C.M.

Award date:
1978

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Rekonstruktie door middel van de
"Filtered Back - Projection" methode

afstudeerverslag van: J.H.C.M. Willems

uitgevoerd bij: N.V. Philips Medical System Division
Medical Data Processing

department: Information and System Support

onder leiding van: prof. ir. A. Heetman (THE afd. E vakgroep EB)
ir. J.H. Statius Muller (MDP - ISS)

in de periode van 1 november 1977 tot 26 oktober 1978.

Inhoud.blz. :

4:	Voorwoord
5:	Samenvatting
6:	Notities en definities
8:	1. Rekonstruktiemethoden
8:	1.1. Röntgen diagnostische afbeeldingssystemen
12:	1.2. Computer axiale tomografie
12:	1.2.1. Algebraïsche methoden
16:	1.2.2. Analytische methoden
19:	1.3. "Filtered back - projection"
19:	1.3.1. Diskreet filter
20:	1.3.2. Diskrete Backprojector
21:	1.4. Röntgenscanners
25:	2. Filter
25:	2.1. Theorie
25:	2.1.1. Inleiding
25:	2.1.1.1. Definities en signaalbeschrijving
29:	2.1.1.2. Filtereigenschappen
32:	2.1.2. Convolutie
32:	2.1.2.1. Structuur
33:	2.1.2.2. Realisatie
35:	2.1.2.3. Interpoleren
38:	2.1.2.4. Berekeningen
38:	2.1.2.5. Nauwkeurigheid
42:	2.1.3. Fouriertransformatie
42:	2.1.3.1. Diskrete Fourier transformatie
43:	2.1.3.2. Fast Fourier transformatie
47:	2.1.3.2.1. Berekeningen
48:	2.1.3.2.2. Nauwkeurigheid

55:	2.2. Uitvoering
55:	2.2.1. Eisen
56:	2.2.2. Realisatie
56:	2.2.2.1. Convolutie
56:	2.2.2.1.1. Data blokschema (dbs)
59:	2.2.2.1.2. Modules van het dbs
64:	2.2.2.1.3. Controle eenheid
66:	2.2.2.2. Fourier transformatie
67:	2.2.2.2.1. Blokschema
69:	2.2.2.2.2. Modules van het bs
79:	3. Backprojector
79:	3.1. Theorie
79:	3.1.1. Procesbeschrijving
81:	3.1.2. Berekeningen
82:	3.1.3. Nauwkeurigheid
84:	3.2. Uitvoering
84:	3.2.1. Eisen
85:	3.2.2. Realisatie
85:	3.2.2.1. Data blokschema
89:	3.2.2.2. Modules van het data blokschema
99:	3.2.2.3. Controle eenheid
103:	4. Integratie Filter - Backprojector
107:	5. Conclusies
109:	6. Literatuurlijst

Bijlagen:

111:	Afstudeeropdracht
112:	1.1. Afleidingen van analytische rekonstruktiemethoden
116:	2.1. Nauwkeurigheid van het filter d.m.v. convolutie
119:	2.2. Nauwkeurigheid van het filter d.m.v. transformatie
123:	3.1. Data blokschema backprojector

Voorwoord.

Het afstudeerwerk heeft betrekking op de ontwikkeling van een in de röntgendiagnostiek toegepaste rekonstruktiemethode, n.l. de "filtered back-projection" methode en is uitgevoerd in drie fasen. In de eerste fase is getracht de plaats van deze rekonstruktie-methode in de röntgendiagnostiek weer te geven en de theoretische achtergronden van de methode te beschrijven.

In de tweede fase is gezocht naar ontwerpcriteria van de twee processen: filter en backprojector.

In de laatste fase is gezocht naar oplossingsmethoden voor de processen. Voor het filterproces worden twee oplossingsmogelijkheden uitgewerkt, te weten filtering d.m.v. convolutie en d.m.v. transformaties. Voor de diverse oplossingsmethoden van beide processen zijn, uitgaande van de ontwerpcriteria, de deeleisen afgeleid en zijn (hardware)realisatiemogelijkheden aangegeven.

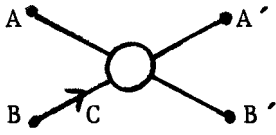
In dit voorwoord wil ik mijn dank uitbrengen aan degenen, die het mogelijk gemaakt hebben, dat ik op deze plaats mijn studie heb kunnen afronden, met name aan dr.ir. J.W. Haarman, ir. J.A. Dinklo, (hoofd afdeling M.D.P.), prof.ir. A. Heetman (afstudeerhoogleraar) en aan ir. J.H. Statius Muller (coach).

Samenvatting.

In hoofdstuk 1 wordt een beschrijving van bewegings- en axiale tomografie gegeven. De rekonstruktiemethoden van computer axiale tomografie worden opgesomd. Diverse methoden van analytische computer axiale tomografie worden genoemd en afgeleid. De formules van de diskrete "filtered back-projection" worden getoond. Tot slot worden beschrijvingen gegeven van drie generaties röntgenscanners. In hoofdstuk 2 en 3 worden de twee processen: filter en back-projector uitgewerkt. Met behulp hiervan kan het beeld gerekonstrueerd worden; uitgegaan wordt van parallelle aequidistante profielen. In hoofdstuk 2 worden twee filtermethoden uitgewerkt om het gevraagde filter te realiseren. Na de beschrijving van het signaal en de filtereigenschappen worden de convolutie en de fast Fourier-transformatie behandeld. Aan de hand van de gewenste nauwkeurigheid en de gevraagde rekonstruktietijd worden voor beide methoden de eisen afgeleid. Vervolgens wordt voor elk van de twee filtermethoden een hardware uitvoering gegeven. In hoofdstuk 3 wordt het proces beschreven, dat het mogelijk maakt de gefilterde profielen terug te projekteren in een beeldgeheugen, zodanig dat de beeldpunten sequentieel verwerkt worden. Ook hier wordt aan de hand van de afgeleide eisen een hardware uitvoering gegeven en de diverse modules uitgewerkt. Tot slot volgt een funktionele beschrijving van de controle-eenheid. In hoofdstuk 4 worden enkele integratiemogelijkheden genoemd van de twee processen.

Notities en definities.

$f(x,y)$	te reconstrueren functie in carth. coörd. stelsel
$f(r,\phi)$	te reconstrueren functie in pool-coördinaten
$F(V_x, V_y)$	Fourier getransformeerde van $f(x,y)$
$F(V_r, \theta)$	Fourier getransformeerde van $f(r,\phi)$
$g(x')$	genormeerde profielwaarde = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y') dy'$
$g(r,\theta)$	genormeerde profielwaarde in pool-coördinaten
$g'(x',\theta)$	gefilterde genormeerde profielwaarde
$F(x)$	Fourier getransformeerde van de functie x
$F^{-1}(V_x)$	inverse Fourier getransformeerde van de functie V_x
*	één-dimensionale convolutie
**	twee-dimensionale convolutie
I	stralingsintensiteit
$(\Delta x)^2$	beeldpuntsoppervlakte
μ	lineaire verzwakkingscoëfficiënt
w	gewichtsfactor
a	bemonsteringsinterval
D.F.T.	diskrete Fourier transformatie
I.D.F.T.	inverse diskrete Fourier transformatie
F.F.T.	fast Fourier transformatie
I.F.F.T.	inverse fast Fourier transformatie
$E\{x^P\}$	p^e moment van de kansverdeling $P(x)$
$E\{x\}$	verwachtingswaarde van x
b	aantal bits van een getal, inclusief tekenbit
ϵ_1	fout in 1 ($\epsilon_1 = 1^* - 1$)
F	verhouding van de variantie van de ruis t.o.v. de variantie van het signaal $F = \frac{\sigma_{\xi x}^2}{\sigma_x^2}$
V	($= 2 \log N$) aantal stages per transformatie
k_1, k_2, k_3	backprojector konstanten
$x_n(p)$	diskrete signaalwaarden van $x(p)$
$h(n)$	diskrete waarden van de impulsresponsie
$H(k)$	diskrete waarden van de overdrachtsfunctie



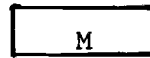
butterfly bewerking $A' = A + B.C$
 $B' = A - B.C$



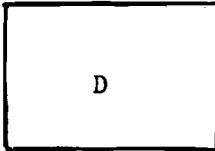
geheugenelement



register (latch)



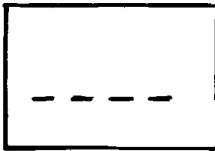
multiplexer



vertragingselement



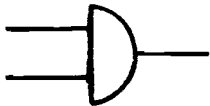
"exclusive or" functie



funktie element:
 functie vermeld in het blok



rekelement (ALU)



"and" functie



inverter

1. Rekonstruktie methoden.

1.1. Röntgen diagnostische afbeeldingssystemen.

In conventionele röntgen diagnostiek wordt met behulp van een röntgenbron en een röntgendetektor een twee-dimensionale afbeelding gemaakt van een drie-dimensionaal voorwerp. De stralingsintensiteit van een uit het voorwerp tredende bundel wordt bepaald door de intensiteit van de ingaande bundel en de verzwakking van de bundel in het voorwerp. De verzwakking is een functie van de afgelegde weg, de energie van de bundel en van het atoomnummer en de dichtheid van het voorwerp. Zie fig. 1.1.1.

In formule geldt:

$$I_i = I_0(E) e^{-\int_0^x \mu_j(z, \rho, E) dx_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} I_0(E) e^{-\sum_{j=1}^N \mu_j(z, \rho, E) \Delta x_j} \quad (1.1.1.)$$

waarin:

- I_i = stralingsintensiteit uittredende bundel
- I_0 = stralingsintensiteit intredende bundel
- μ = verzwakkingscoëfficiënt
- z = atoomnummer
- ρ = dichtheid
- E = spektraal afhankelijke stralingsenergie
- Δx = afstand

zie lit. 1.1.

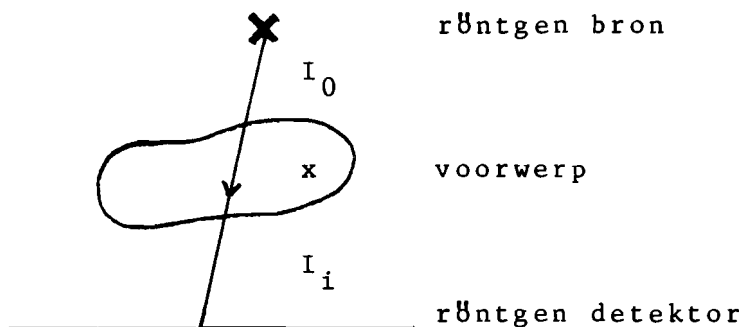


fig. 1.1.1.

---xxx---

Dit betekent, dat de relatie tussen de intensiteitsverdeling van het beeld en de verzwakkingscoëfficiëntenverdeling van het voorwerp niet "één op één" is. Het gevolg hiervan is, dat de plaats van een waarneembaar gedeelte van het voorwerp uit één beeld niet bepaald kan worden en dat de mogelijkheid aanwezig is, dat informatie van aanwezige details verloren gaat. Zie fig. 1.1.2.

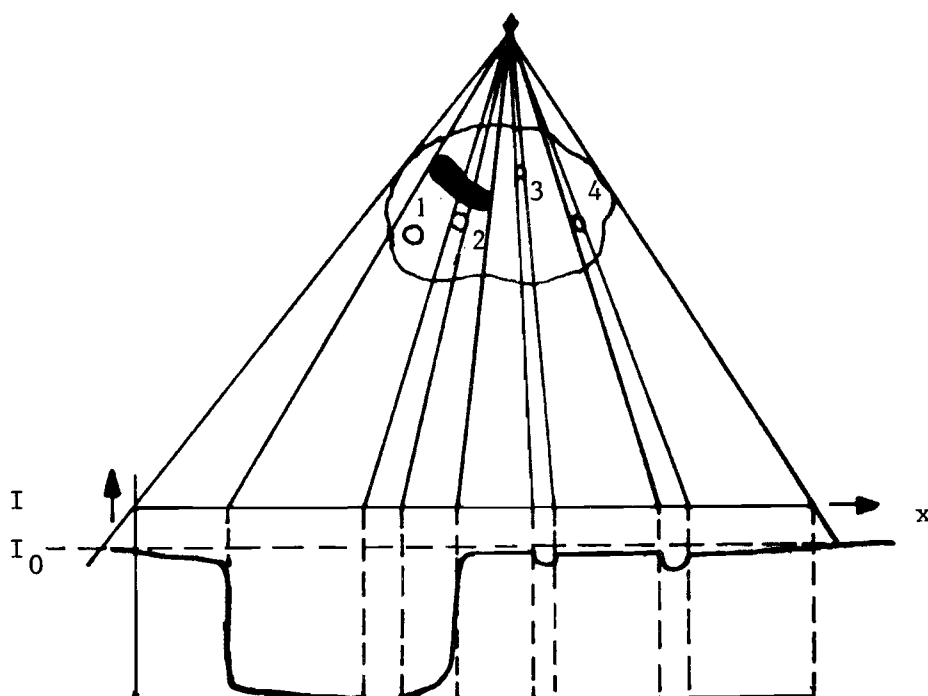


fig. 1.1.2. :

de invloed op de intensiteitsverdeling van punt 1 en 2 is niet waarneembaar.
De plaatsen van punt 3 en 4 zijn niet te bepalen uit de intensiteitsverdeling.

---xxx---

Met behulp van tomografie tracht men deze nadelen te voorkomen door een twee-dimensionale afbeelding te maken van een doorsnede van een drie-dimensionaal voorwerp. In de röntgen-diagnostiek komen twee vormen van tomografie voor: de bewegingstomografie en de transaxiale tomografie (in lit. 1.2. wordt als derde methode genoemd de multiplex tomografie o.a. toegepast in de röntgen astronomy).

Bij de bewegingstomografie maken de röntgenbron en -detektor een zodanige beweging ten opzichte van het voorwerp, dat een vlak (focusvlak) scherp afgebeeld wordt, terwijl andere vlakken (min of meer) vervaagd worden. De meest eenvoudige bewegingstomografie is de lineaire, waarbij röntgenbron en -detektor een lineaire beweging maken. Zie fig. 1.1.3. (lit. 1.2. - 1.3.).

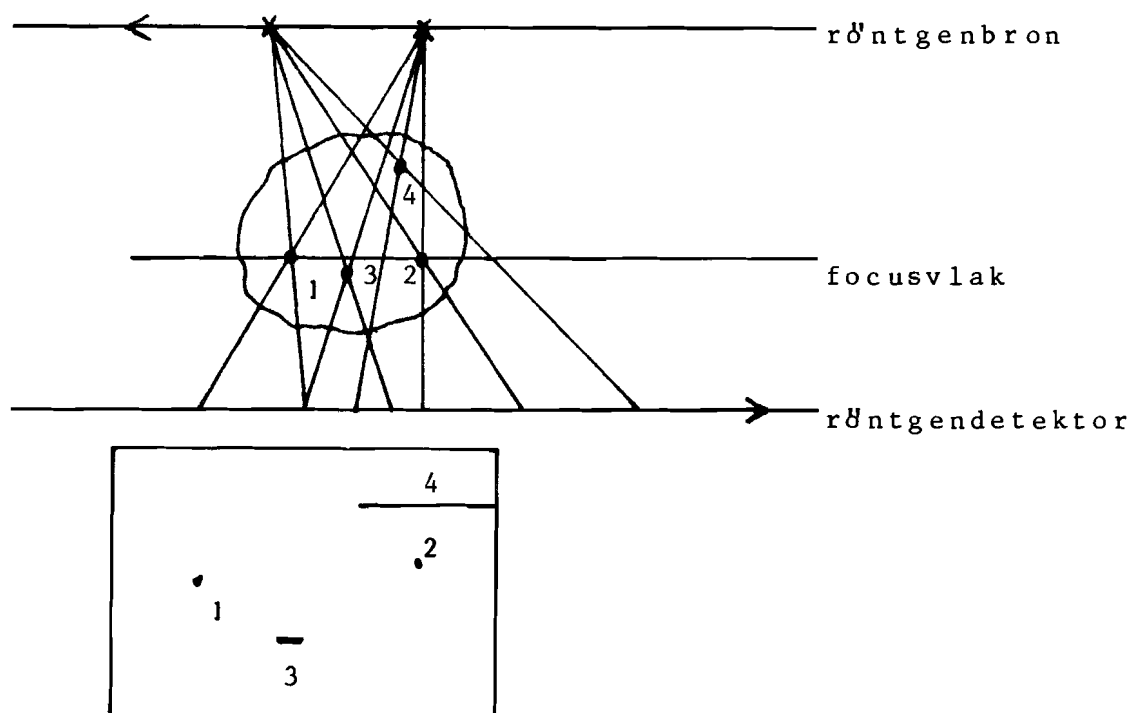


fig. 1.1.3. :

lineaire bewegingstomografie.
 daar röntgenbron en -detektor lineair bewegen, worden de punten 1 en 2 uit het focusvlak scherp afgebeeld; punt 3 dicht gelegen bij dit vlak wordt zwak vervaagd, terwijl punt 4 sterk vervaagd wordt.

---xxx---

Bij de transaxiale tomografie wordt uitsluitend het af te beelden vlak aangestraald door middel van een smalle röntgenbundel. Door het vlak onder diverse hoeken aan te stralen kan dit vlak gerekonstrueerd worden. Zie fig. 1.1.4.

Wanneer voor de rekonstruktie gebruik gemaakt wordt van een computer spreekt men van computer (trans)axiale tomografie, in

andere gevallen spreken we van analoge transaxiale tomografie.
Zie lit. 1.2.

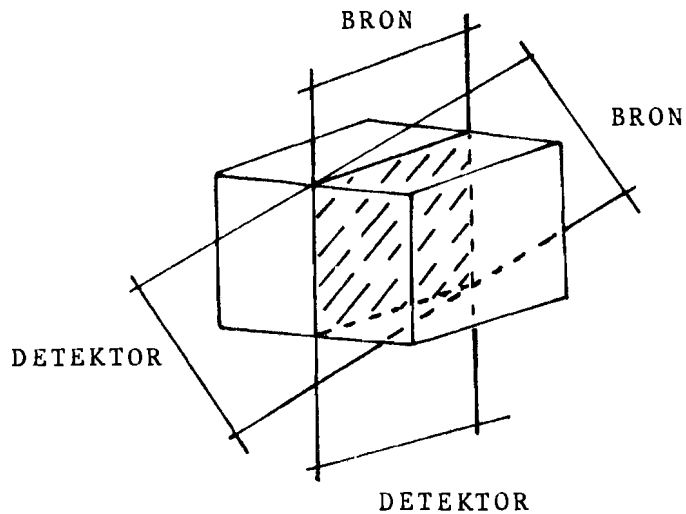


fig. 1.1.4. :

transaxiale tomografie.

Met behulp van een smalle röntgenbundel wordt een voorwerp aangestraald. De intensiteit van de uit tredende bundel wordt gemeten met een detektor met beperkte openingshoek. Door röntgenbron en -detektor lineair te bewegen wordt de intensiteitsverdeling in een bepaalde richting (θ) gemeten (profiel genaamd).

Door röntgenbron en -detektor t.o.v. het voorwerp in diskrete stappen te roteren, kunnen diverse profielen bepaald worden.

Uit de gemeten profielen kan het beeld van de doorsnijing gerekonstrueerd worden.

---xxx---

1.2. Computer axiale tomografie.

De beeldkonstruktie uit de gemeten profielen kan met behulp van een computer berekend worden op twee manieren: de arithmetische methode en de analytische methode. Beide methoden worden toegelicht uitgaande van parallelle aequidistante profielen - hieronder wordt verstaan, dat ieder profiel bestaat uit een aantal röntgenbundels, welke onderling parallel zijn en waarvan de afstanden van opeenvolgende bundels identiek zijn.

1.2.1. Arithmetische methode.

Het te rekonstrueren beeld wordt opgedeeld gedacht in een aantal vierkante beeldvlakjes (pixels) met identieke oppervlakte $(\Delta x)^2$. Doel is om uit een aantal profielen de gemiddelde verzwakkingscoëfficiënten (μ_{ij}) per pixel (ij) te bepalen.

Beschouw nu een röntgenbundel met breedte Δx , samenvallend met een rij beeldpunten. Zie fig. 1.2.1.

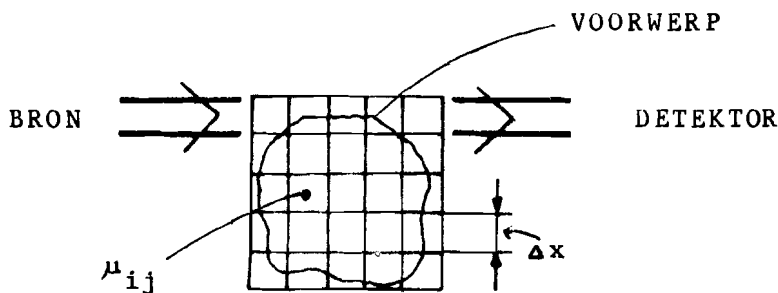


fig. 1.2.1. :

voorwerp V wordt opgedeeld in een matrix beeldpunten. Het voorwerp wordt aangestraald met een röntgenbundel met breedte Δx , samenvallend met een rij beeldpunten.

---xxx---

De intensiteit van de gemeten röntgenbundel zal bepaald worden door de functie:

$$I_i = I_0 \cdot e^{-\sum_{j=1}^N \mu_{ij} \Delta x} \quad (\text{zie formule 1.1.1.})$$

waarin μ_{ij} de gemiddelde verzwakkingscoëfficiënt is van het beeldpunt in rij i en kolom j , ofwel:

$$\sum_{j=1}^N \Delta x \cdot \bar{\mu}_{ij} = \ln \frac{I_0}{I_i} = g_i \quad (1.2.1.)$$

g_i is de genormeerde profielfunctie

Wanneer nu de röntgenbundel een hoek maakt met de rijen van de matrix, wordt de intensiteit van de gemeten röntgenbundel bepaald door:

$$I_{mk} = I_0 \cdot e^{-\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N w_{ij,m,k} \bar{\mu}_{ij} \Delta x} \quad (1.2.2.)$$

waarin: I_{mk} de intensiteit is van profiel k op plaats m .
 $w_{ij,m,k}$ de gewichtsfactor is van beeldpunt ij behorende bij profiel k op plaats m . Zie fig. 1.2.2.

Formule 1.2.2. levert:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mu_{ij} \cdot \Delta x \cdot w_{ij,m,k} = \ln \frac{I_0}{I_{mk}} = g_{mk} \quad (1.2.3.)$$

Daar $w_{ij,m,k}$ bekend zijn, kan men met behulp van formule (1.2.1.) en (1.2.3.) de verzwakkingscoëfficiënten (μ_{ij}) oplossen. Twee methoden staan hiervoor ter beschikking, namelijk m.b.v. matrix berekening en m.b.v. iteratieve methoden.

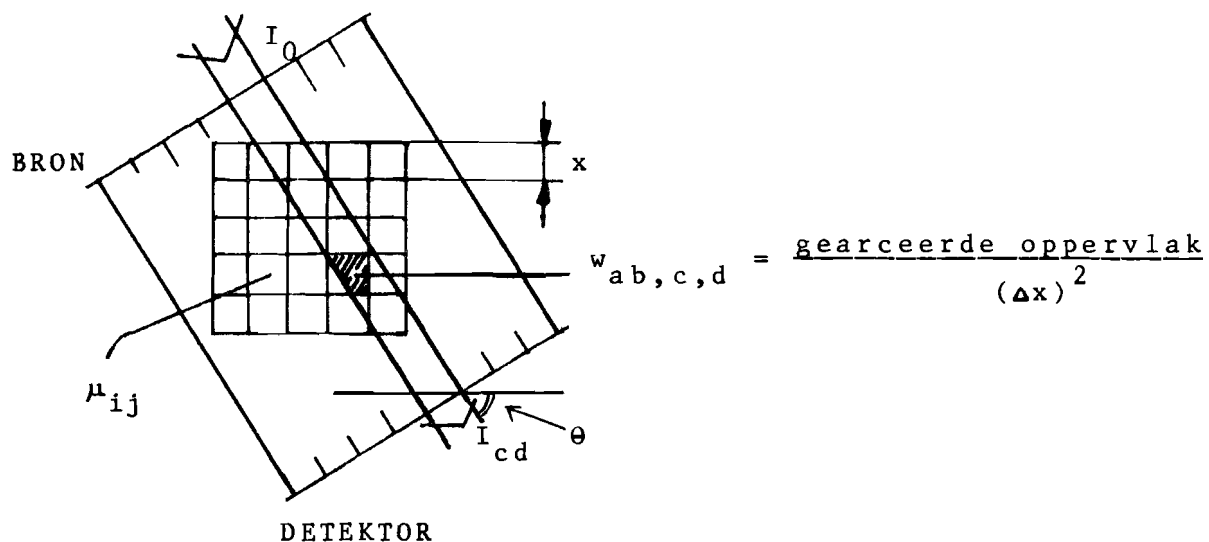


fig. 1.2.2.:

de röntgenbundel maakt een hoek θ met de rijen van de beeldmatrix. De gewichtsfactoren $w_{ij,k,m}$ uit formule 1.2.2. wordt bepaald door de verhouding van het doorstraalde oppervlak per pixel t.o.v. de totale oppervlakte van een pixel. De gewichtsfactoren zijn per pixel een functie van het profielnummer (k) en de plaats (m).

---xxx---

1.2.1.1. Matrix berekening.

Formule (1.2.1.) en (1.2.3.) kunnen in matrixvorm uitgedrukt worden in:

$$\begin{pmatrix} w_{ij} & \dots & w_{l,nm} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ w_{nm,l} & \dots & w_{nm,nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \cdot \\ \mu_{in} \\ \cdot \\ \mu_{lm} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} g_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{nm} \end{pmatrix} \quad (1.2.4.)$$

waarin: μ_{ij} verzwakkingscoëfficiënt van
pixel ij $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$

$$g_{mk} = \ln \frac{I_0}{I_{mk}}$$

w_{ij} gewichtscoefficienten $1 \leq i \leq nm$
 $1 \leq j \leq nm$

het totaal aantal vergelijkingen is gelijk aan het aantal onbekenden.

Dus: $W \underline{\mu} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \underline{g}$

$$\underline{\mu} = \frac{1}{\Delta x} \cdot W^{-1} \cdot \underline{g} \quad (1.2.5.)$$

Door de inverse matrix van de gewichtsfactoren te bepalen zijn de verzwakkingscoëfficiënten te berekenen uit de gemeten profielen. Zie formule (1.2.5.)

1.2.1.2. Iteratieve berekening.

Vergelijking 1.2.4. kan op iteratieve wijze berekend worden. Na gekozen startwaarden voor μ_{ij} kunnen de berekende intensiteiten (m.b.v. 1.2.4.) vergeleken worden met de gemeten waarden. Afhankelijk hiervan worden de verzwakkingscoëfficiënten aangepast. Dit wordt herhaald na correctie, tot een beperkt verschil tussen bere-

kende en gemeten waarde bereikt is.

Er zijn diverse iteratieve methoden, zoals ART, SIRT en ILST (zie lit. 1.4.).

1.2.2. Analytische methode.

De verzwakkingscoëfficiënten-verdeling van het te reconstrueren beeld wordt beschreven met behulp van de functie $f(x,y)$ of in poolcoördinaten $f(r,\phi)$. Zie fig. 1.2.3.

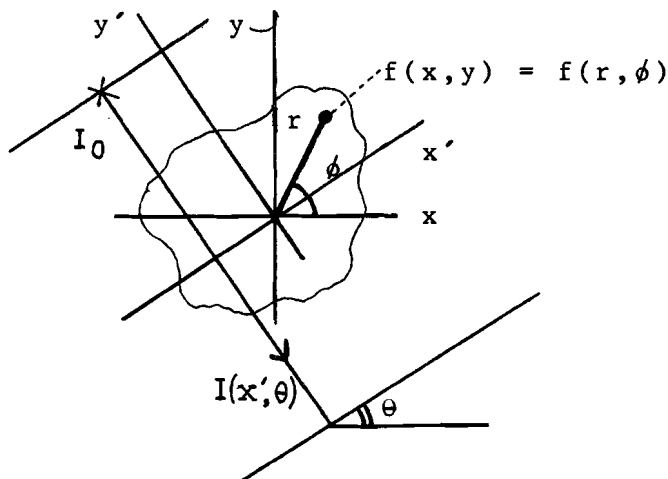


fig. 1.2.3.

---xxx---

Beschouw de röntgenbundel met een oneindig kleine breedte (röntgenlijn). De intensiteit van een onder hoek θ uittredende bundel wordt gegeven door:

$$I(x', \theta) = I_0 e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') dy'} \quad (1.2.6.)$$

Hierin is: $x' y'$ het coördinatenstelsel, waarvan de y' as evenwijdig is aan de röntgenbundel en waarvan de oorsprong samenvalt met de oorsprong van het coördinatenstelsel $x y$

θ de hoek tussen de assen x en x'

Het bepalen van de verzwakkingscoëfficiënten $f(x,y)$ uit de gemeten profielen $(g(x',\theta))$ kan op verschillende manieren:

1.2.2.1. Door de Fourier getransformeerde funkties van de gemeten profielen te bepalen.

Door hierna de twee-dimensionale funktie, gegeven door de getransformeerde profielen, onder diskrete hoeken invers te transformeren.

1.2.2.2. Door de gemeten profielen te filteren en vervolgens terug te projekteren.

1.2.2.3. Door de gemeten profielen terug te projekteren en vervolgens twee-dimensionaal te filteren.

1.2.2.4. Door toepassing van de inverse Radon transformatie.

of in formule vorm (voor definities en notaties zie blz. 6. voor afleidingen zie bijlage 1.1.):

1.2.2.1. Fourier methode

$$1. F(V_r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(r, \theta) \cdot e^{+2\pi i V_r \cdot r} dr$$

$$2. f(r, \phi) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_r, \theta) \cdot e^{+2\pi i V_r r \cos(\phi - \theta)} |V_r| dV_r d\theta$$

1.2.2.2. "Filtered Back-projection" methode

$$1. g'(x', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_r| F(V_r, \theta) \cdot e^{+2\pi i V_r x'} dV_r = h(r) * g(x', \theta)$$

$$2. f(r, \phi) = \int_0^{\pi} g'(r \cdot \cos(\phi - \theta), \theta) d\theta$$

1.2.2.3. "Back-projection-filter" methode

$$1. f'(r, \phi) = \int_0^{\pi} g(r \cdot \cos(\phi - \theta), \theta) \cdot d\theta$$

$$2. f(r, \phi) = f'(r, \phi) ** h_2(r, \theta)$$

1.2.2.4. Inverse Radon transformatie

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r \cdot \cos(\phi - \theta) - r'} \cdot \frac{\partial(g(r', \theta))}{\partial r'} \cdot dr' d\theta$$

Overzichtschema zie fig. 1.2.4. uit lit. 1.1.-1.2.-1.3. en 1.4.

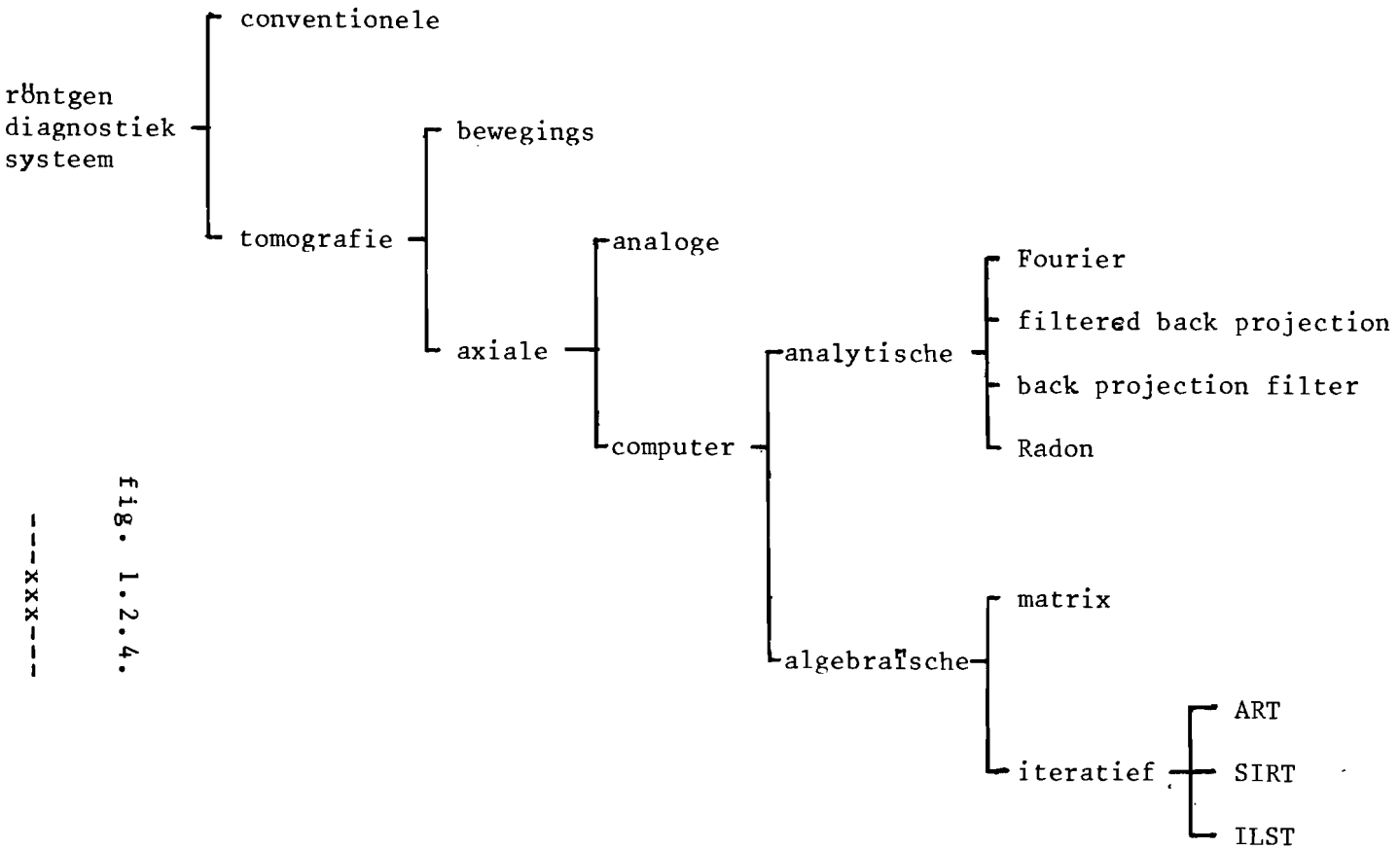


fig. 1.2.4.

---xxx---

Opmerking:

filtered back projection is mogelijk, uitgaande van profielen van zowel parallelle als van divergerende röntgenbundels.

1.3. "Filtered back - projection"

In paragraaf 1.2. is aangetoond, dat uitgaande van parallelle aequidistante profielen, een beeld te rekonstrueren is door de gemeten data te normeren, te filteren en vervolgens terug te projekteren.

1.3.1. Diskreet filter (zie lit. 1.5. en 1.6.)

Wanneer de gemeten profielen bandbegrensd zijn, kan men het signaal bemonsteren zonder informatieverlies (sample theorema). Ook het filter kan in deze situatie bandbegrensd worden, of met andere woorden de impulsresponsie kan eveneens bemonsterd worden (na periodieke voortzetting van de overdrachtsfunctie in het frekwentie domein). Het filterproces is uit te voeren als een lineaire diskrete convolutie tussen twee diskrete functies.

Stel nu de diskrete waarden voor als:

$g(ma, \theta)$	waarden van het gemeten genormeerde profiel
$h(pa)$	waarden van de impulsresponsie van het filter
$g'(na, \theta)$	waarden van het genormeerde gefilterde profiel

waarin: n, m en p integers zijn

a = bemonsteringsinterval

Nu geldt: $g'(x', \theta) = h(r) * g(x', \theta)$ zie par. 1.2.2.2.

$$g'(na, \theta) = h(pa) * g(ma, \theta)$$

ofwel:
$$g'(x', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \theta) h(x' - \xi) d\xi$$

$$g'(na, \theta) = a \sum_{ma=-M}^M \{g(ma, \theta) h((n-m)a)\} \quad (1.3.1.)$$

waarin: de functie $h(x')$ de inverse Fourier getransformeerde functie van de functie $|V_r|$ is.

De gemeten profielen zijn in het plaatsdomein eveneens begrensd.

Het interessegebied van het gefilterde profiel is dat wat overeenkomt met het gebied van het gemeten profiel.

M.a.w. ook de funktie $g'(na, \theta)$ is begrensd.

$$\begin{array}{lll} \text{gemeten profiel:} & g(ma, \theta) & -M \leq ma \leq M \longrightarrow \\ \text{gefilterd profiel:} & g'(na, \theta) & -M \leq na \leq M \end{array}$$

Uit (1.3.1.) volgt:

$$g'(na, \theta) = a \sum_{ma=-M}^M g(ma, \theta) h((n-m)a) \quad -M \leq na \leq M$$

Dus de diskrete waarden van de impulsresponsie kan begrensd worden:

$$h(pa) \quad \text{met} \quad -2M \leq pa \leq 2M$$

Voor het afgeleide filter $H(V_r) = |V_r|$ kan de diskrete impulsresponsie $h(na)$ bepaald worden.

$$\begin{aligned} \text{Hiervoor geldt:} \quad h(na) &= \frac{1}{4a^2} & n &= 0 \\ &= -\frac{1}{\pi^2 n^2 a^2} & n &= \text{oneven} \\ &= 0 & n &= \text{even} \end{aligned}$$

1.3.2. Diskrete back - projector.

Het te rekonstrueren beeld $f(x, y) = f(r, \phi)$ kan eveneens diskreet beschouwd worden; ofwel opgedacht worden uit een aantal pixels. De funktie wordt nu voorgesteld door:

$$f(r, \phi) = f(k\Delta r, l\Delta \phi)$$

waarin: k en l integers

Δr en $\Delta \phi$ bemonsteringsinterval van r en ϕ

De backprojectie formule luidt:

$$f(r, \phi) = \int_0^\pi g'(r \cdot \cos(\phi - \theta), \theta) d\theta$$

$$\text{ofwel: } f(k\Delta r, l\Delta \phi) = \Delta \theta \cdot \sum_{m=0}^{N-1} g'(k\Delta r \cdot \cos(l\Delta \phi - m\Delta \theta), m\Delta \theta) \quad (1.3.2.)$$

Daar de funktie $g'(k\Delta r \cdot \cos(l\Delta\phi - m\Delta\theta), m\Delta\theta)$ uit formule (1.3.2.) in het algemeen niet gelijk is aan een van de diskrete gefilterde profielwaarden $g'(na)$ dient men t.b.v. de terugprojectie de waarden te bepalen door middel van interpolatie.

1.4. Röntgenscanners.

De eerste generatie röntgenscanner levert een axiale tomografie van een voorwerp, uitgaande van parallelle profielen.

Het voorwerp wordt met een smalle röntgenbundel (röntgenlijn) aangestraald. De intensiteit van de uittredende straling wordt gemeten m.b.v. een detector met beperkte openingshoek. Door nu de röntgenbron en de -detector lineair te verplaatsen, wordt de intensiteitsverdeling van een profiel gemeten op aequidistante afstanden. Vervolgens worden de röntgenbron en de -detector geroteerd ten opzichte van het voorwerp. Na een diskrete hoekverdraaiing wordt het volgende profiel bepaald.

In de tweede generatie röntgenscanners wordt het voorwerp met een smalle kleine röntgenbundel (fan) aangestraald. De intensiteit van de uittredende bundel wordt met behulp van een aantal detectoren gemeten. Door de röntgenbron en de -detectoren lineair te bewegen worden nu een aantal parallelle profielen gemeten. Het aantal gemeten profielen is gelijk aan het aantal detectoren. Vervolgens worden de röntgenbron en de -detectoren wederom geroteerd. De diskrete hoekverdraaiing is nu groter dan de rotatiestap in de eerste generatie röntgenscanners. Zie fig. 1.4.1.

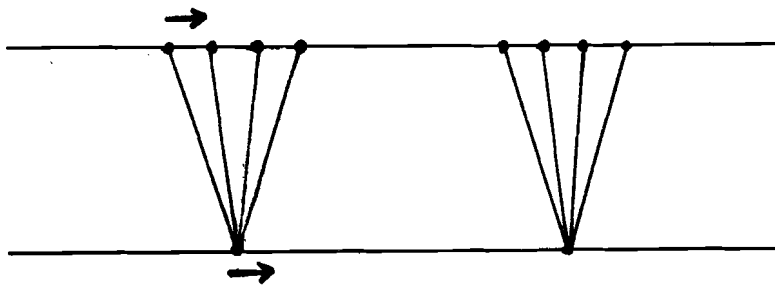


fig. 1.4.1. :

tweede generatie röntgenscanner

---xxx---

De derde generatie röntgenscanner is een computer axiale tomograaf, die rekonstrukties van objektdoorsneden kan maken, uitgaande van divergerende röntgenbundels, met behulp van de "filtered back-projection" methode. Door middel van een brede

divergerende röntgenbundel wordt een voorwerp aangestraald; tegenover de bron bevindt zich een reeks detektoren, welke het röntgen schaduwbeeld omzetten in elektrische signalen. Op deze wijze wordt de intensiteit van een fan profiel bepaald. De röntgen-bron en -detektor roteren ten opzichte van het voorwerp, om diverse profielen te kunnen meten. Door de meetwaarden uit de diverse profielen te sorteren, worden uit de fan profielen parallelle profielen verkregen. Na interpolatie tussen de meetwaarden van de parallelle profielen worden aequidistante parallelle profielen verkregen. Zie fig. 1.4.2.

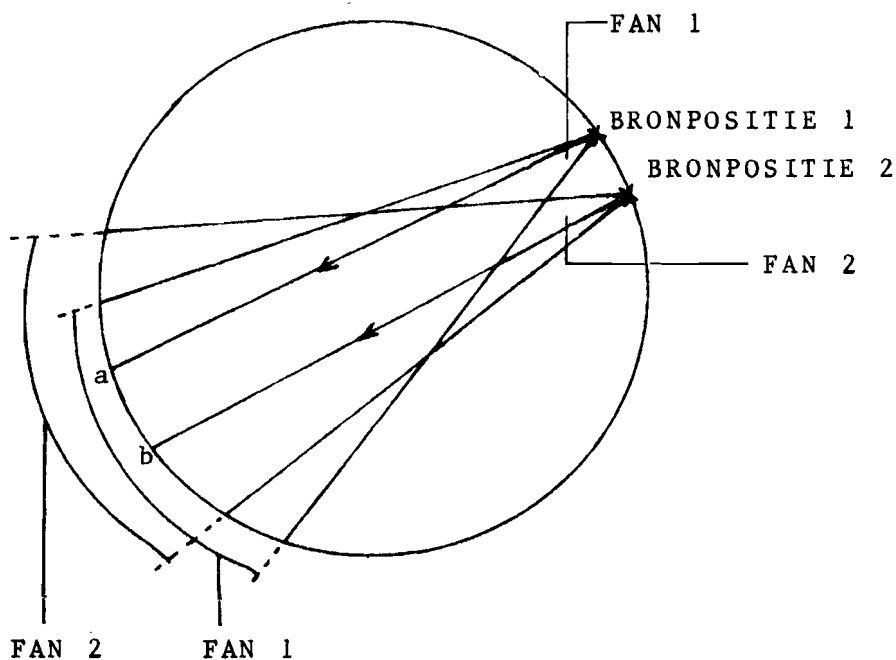


fig. 1.4.2. :

door sortering worden fanprofielen omgezet in parallelle profielen. Bundel a uit fan 1 loopt evenwijdig aan bundel b uit fan 2.

---xxx---

De sortering en interpolatie worden o.a. verricht in het préproces. Door middel van "filtered back-projection" wordt nu het beeld gerekonstrueerd en opgeslagen in het beeldgeheugen. De inhoud van dit geheugen wordt opgeslagen op disk of magnetische band en wordt vervolgens afgebeeld met behulp van een video display. Het meet-, rekonstruktie- en display proces wordt bestuurd door een minicomputer. Zie fig. 1.4.3.

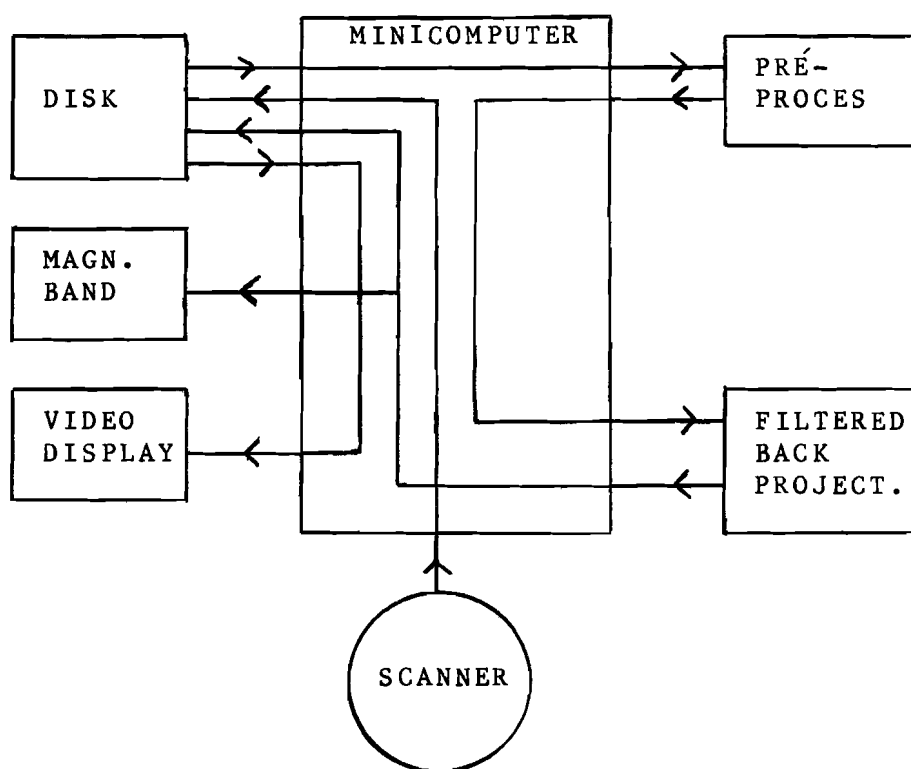


fig. 1.4.3. :

röntgen scanner

---xxx---

In deze generatie scanners kan een rekonstruktie gemaakt worden met behulp van de "filtered back-projection" methode, uitgaande van de fan profielen. De hierboven beschreven rekonstruktie is echter een methode, direkt aansluitend op de in de eerste en tweede generatie scanners gebruikte methode.

2. Filter.

2.1. Theorie.

2.1.1. Inleiding.

2.1.1.1. Definities en signaalbeschrijving.

Een systeem A voegt aan een ingangssignaal x een (uitgangs)signaal y toe volgens een bepaald concept. Zie fig. 2.1.1.

Een diskreet systeem B voegt aan een diskreet ingangssignaal x_n een diskreet uitgangssignaal y_n toe. Zie fig. 2.1.2.

Een causaal digitaal filter is een lineair plaats-invariant diskreet systeem, waarbij het uitgangssignaal y_n beschreven kan worden met behulp van het ingangssignaal $x_n, x_{n-1}, x_{n-2} \dots$ en het uitgangssignaal $y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3} \dots$

$$\text{ofwel: } y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, x_n, x_{n-1}, \dots) \quad (2.1.1.)$$

Digitale filters zijn te verdelen in recursieve en niet recursieve filters. Recursieve filters voldoen aan formule (2.1.1.). Niet recursieve filters bezitten de eigenschap, dat het uitgangssignaal y_n uitsluitend bepaald wordt door het heersende ingangssignaal x_n en het ingangssignaal in het verleden x_{n-i} :

$$\text{ofwel: } y_n = g(x_n, x_{n-1}, \dots) \quad (2.1.2.)$$

In het vervolg worden uitsluitend niet recursieve filters in beschouwing genomen, tenzij anders vermeld. De eigenschappen van een spatieel digitaal filter kunnen beschreven worden in het plaats-domein met de impulsresponsie en in het frequentie (of z) domein met de overdrachtsfunctie.

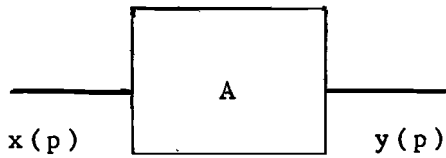


fig. 2.1.1. :

systeem A

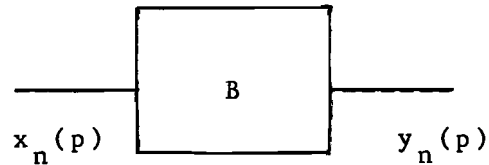


fig. 2.1.2. :

diskreet systeem B

---xxx---

Een continu signaal $x(p)$ kan onder voorwaarde

dat: 1) $x(p)$ integreerbaar is

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(p) dp$ eindig is

3) f voldoet aan de Dirichlet condities voor $x = \xi p$

beschreven worden in het frequentiedomein $X(V_p)$ m.b.v.

Fouriertransformatie:

$$X(V_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(p) e^{-2\pi i V_p p} dp \quad (2.1.3.)$$

$$\text{en } x(\xi_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(V_p) e^{2\pi i V_p p} d(V_p) \quad (2.1.4.)$$

Zie lit. 2.1.

Een diskreet spatieel signaal $x_n(p)$ kan beschouwd worden als een aequidistant bemonsterd continu signaal $x(p)$. De amplitudes op de diskrete plaatsen vormen een rij getallen, waarvoor geldt:

$$x_n(p) = x(p) \quad \text{voor } p = nP$$

waarin: P is het bemonsteringsinterval

n is een integer

Zie lit. 2.2.

In het frequentiedomein is een diskreet signaal een continue periodieke funktie, zie fig. 2.1.3. Een bandbegrensd continu signaal x met maximale frequentie B wordt één-éénduidig bepaald door het diskrete signaal x_n , indien het bemonsterings-

interval kleiner of gelijk is aan $\frac{1}{2B}$ (kriterium van Nyquist).
Zie fig. 2.1.3.

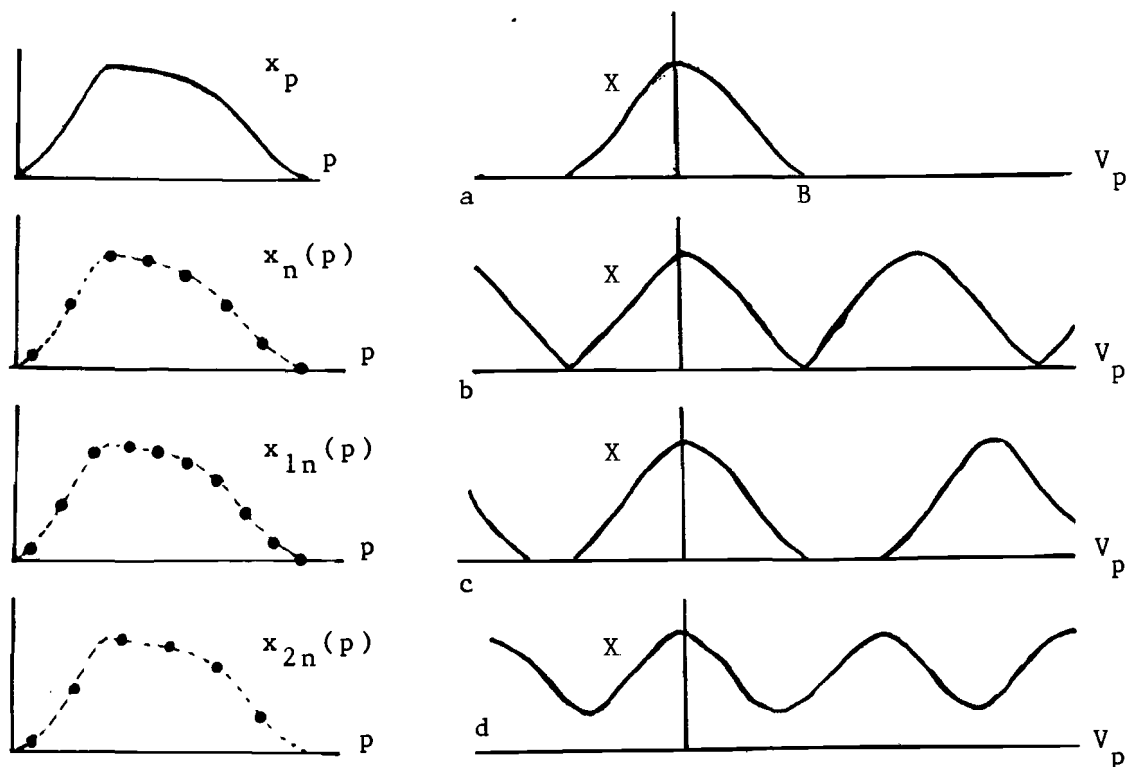


fig. 2.1.3. :

signalen en hun frequentiespektra

- a) bandbegrensd signaal $x(p)$
 b) bemonsterd signaal $x_n(p)$ bemonst.interval = $\frac{1}{2B}$
 c) bemonsterd signaal $x_{1n}(p)$ bemonst.interval < $\frac{1}{2B}$
 d) bemonsterd signaal $x_{2n}(p)$ bemonst.interval > $\frac{1}{2B}$ →
 → vervorming

---xxx---

Een periodiek diskreet signaal x_n heeft in het frequentiedomein als afbeelding een eveneens periodiek diskreet signaal.

Tussen de twee signalen bestaat per periode een één op één relatie, gegeven door:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i 2\pi \frac{nk}{N}} \quad (2.1.5.)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i 2\pi \frac{nk}{N}} \quad (2.1.6.)$$

Zie fig. 2.1.4. en lit. 2.2. en lit. 2.3.

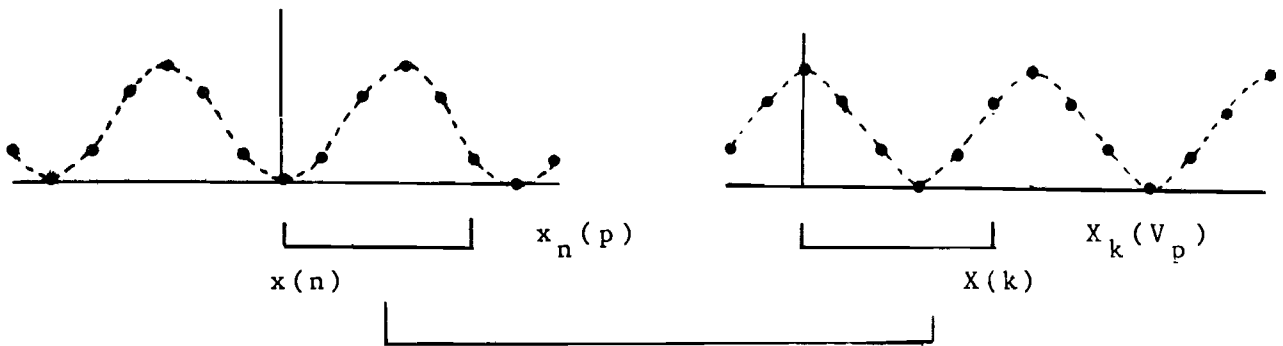


fig. 2.1.4. :

één op één relatie tussen periodieke diskrete signalen in plaats- en frequentiedomein

---xxx---

2.1.1.2. Filtereigenschappen.

Het uitgangssignaal y_n van een digitaal filter wordt, indien het ingangssignaal eindig en causaal is, bepaald door de convoluties van het ingangssignaal $x_n, x_{n-1} \dots x_0$ en het uitgangssignaal $y_{n-1}, y_{n-2} \dots y_0$ met de impulsresponsie ($h(n)$) van het filter. Voor een recursief filter geldt:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) - \sum_{i=1}^{N-1} h(i)y(n-i) \quad (2.1.7.)$$

Voor een niet recursief filter geldt, dat alle diskrete waarden van het uitgangssignaal uitsluitend afhankelijk zijn van de impulsresponsie en het ingangssignaal. Voor een niet recursief filter geldt:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) = h(n) * x(n) \quad (2.1.8.)$$

Indien zowel het ingangssignaal als de impulsresponsie begrensd zijn, zal ook het uitgangssignaal begrensd zijn.

Als $x(n) = 0$ voor $n > N-1 \wedge n < 0$
 $h(n) = 0$ voor $n > M-1 \wedge n < 0$ } $\rightarrow y_n = 0$ voor $n < 0 \wedge n > N+M-1$

Zie fig. 2.1.5.

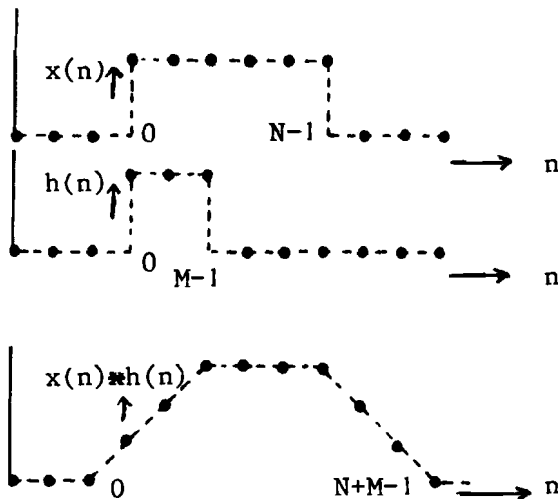


fig. 2.1.5. :

lineaire convolutie $y(n) = h(n)*x(n)$

---xxx---

De filtereigenschappen kunnen tevens beschreven worden met de diskrete overdrachtsfunctie. Deze wordt bepaald m.b.v. de transformatie, welke aequivalent is aan de transformatie beschreven in hoofdstuk 2.1.1.1.

Voor de diskrete overdrachtsfunctie $H(k)$ geldt:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-i 2\pi \frac{kn}{M}} \quad (2.1.9.)$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k) e^{i 2\pi \frac{kn}{M}} \quad (2.1.10.)$$

Beschouw het begrensde uitgangssignaal y_n .

Door y_n periodiek voort te zetten kan het getransformeerde signaal $Y(k)$ in het frequentiedomein verkregen worden met behulp van formule (2.1.5.).

Wanneer dit signaal afgeleid wordt uit het ingangssignaal en de impulsresponsie zullen beiden uitgebreid moeten worden tot dezelfde breedte als het uitgangssignaal ($M+N-1$) en zullen vervolgens periodiek voortgezet dienen te worden. Immers de convolutie van de twee uitgebreide, periodiek voortgezette signalen x_p en h_p (circulaire convolutie) levert een periodiek signaal y_p , waarvan een periode aequivalent is aan de lineaire convolutie van de twee begrensde signalen x_n en h_n . Zie fig. 2.1.6. en zie lit. 2.4.

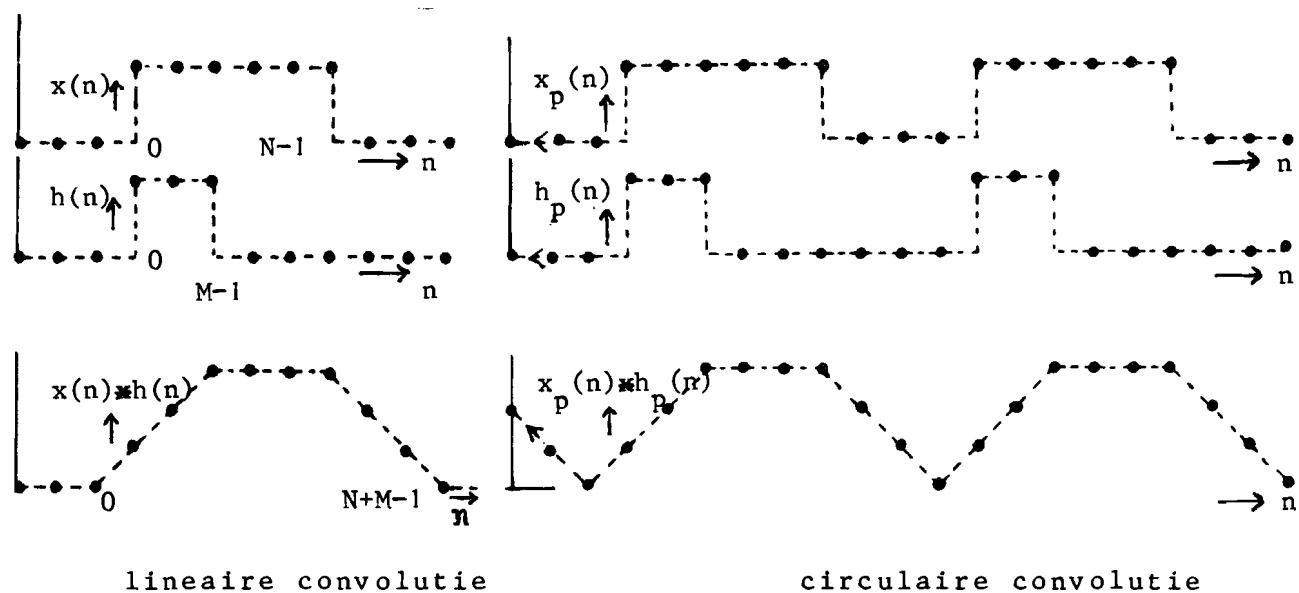


fig. 2.1.6. :

vergelijking van lineaire en circulaire convolutie

---xxx---

Het signaal $Y(k)$ wordt gegeven door het produkt van het getransformeerde ingangssignaal $X(k)$ met de overdrachtsfunctie $H(k)$, ofwel:

$$Y(k) = H(k) \cdot X(k)$$

waarin: $Y(k) = F(y(n))$

$$X(k) = F(x(n))$$

$$H(k) = F(h(n))$$

ofwel: $y(n) = F^{-1}(H(k) \cdot F(x(n)))$

M.a.w. de filtereigenschappen worden volledig bepaald door de begrensde overdrachtsfunctie $H(k)$ $0 \leq k \leq N+M-1$

2.1.2. Convolutie.

2.1.2.1. Struktuur.

Een diskreet causaal filter kan, uitgaande van formule 2.1.8. gerealiseerd worden met behulp van de direkte methode. Zie fig. 2.1.7.

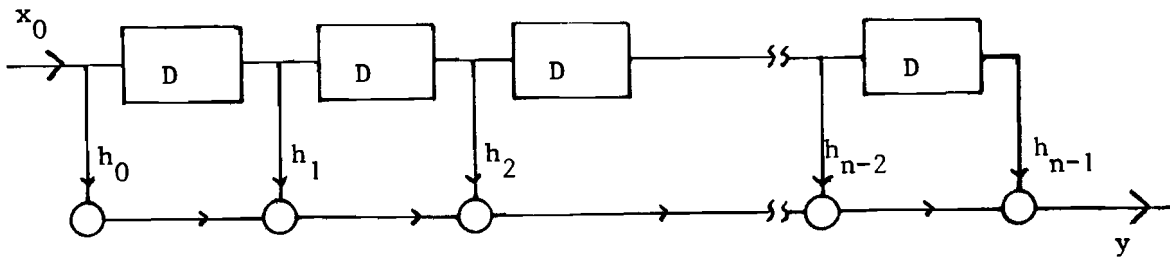


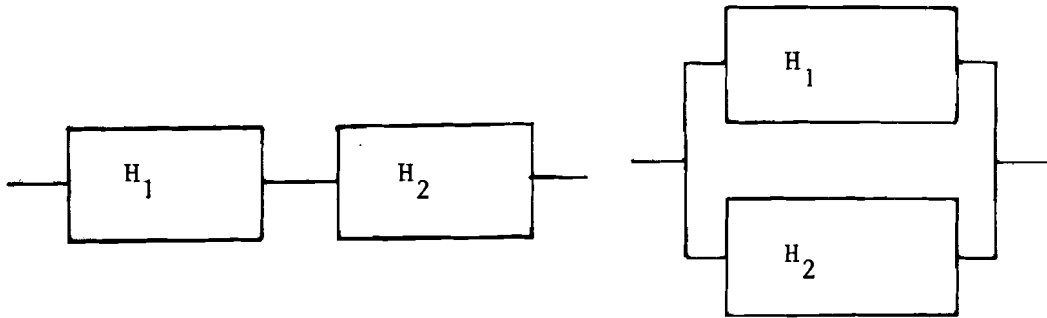
fig. 2.1.7. :

direkte methode van een niet recursief filter

---xxx---

Deze structuur (I) volgt uit beide bestaande direkte methoden van algemene filters, uitgaande van formule 2.1.7. Zie lit. 2.2. - 2.3. Andere structuren (II en III) staan bekend onder de benamingen: cascade en parallele methode.

Bij de cascade methode wordt de overdrachtsfunctie opgesplitst in deelprodukten; bij de parallele methode in deelsommen. De deeloverdrachtsfuncties kunnen uitgevoerd worden met behulp van de direkte methode. De totale overdrachtsfunctie wordt verkregen door de deeloverdrachtsfuncties resp. in serie en parallel te schakelen. Zie fig. 2.1.8.



cascade-schakeling $H = H_1 \cdot H_2$ parallele schakeling $H = H_1 + H_2$

fig. 2.1.8. :

filterstructuren

---xxx---

2.1.2.2. Realisatie.

Onder realisatie wordt hier verstaan: het vinden van de impulsresponsie uit de gevraagde overdrachtsfunctie.

In de literatuur worden, afhankelijk naar indeling, twee of drie realisatiemogelijkheden genoemd:

1. Venster methode
2. Methode m.b.v. computerberekeningen
 - 2.1. Bemonstering van de overdrachtsfunctie
 - 2.2. Minimax methode

Venstermethode:

In het algemeen zal de impulsresponsie van de gevraagde overdrachtsfunctie niet eindig zijn. Om het filter te realiseren m.b.v. een eindige impulsresponsie, kan deze bepaald worden uit de oneindige impulsresponsie, vermenigvuldigd met een vensterfunctie. Hierdoor zal de overdrachtsfunctie aangetast worden, immers de overdrachtsfunctie wordt geconvolveerd met de getransformeerde vensterfunctie. In het geval echter, dat uitgegaan wordt van:

- 1) een eindig ingangssignaal en
- 2) het uitgangssignaal is uitsluitend in het overeenkomstige gebied

van het ingangssignaal interessant, wordt het gevraagde uitgangssignaal (ter breedte N) niet aangetast, wanneer een rechthoekig venster met een breedte van $2N$ gekozen wordt. Zie fig. 2.1.9.

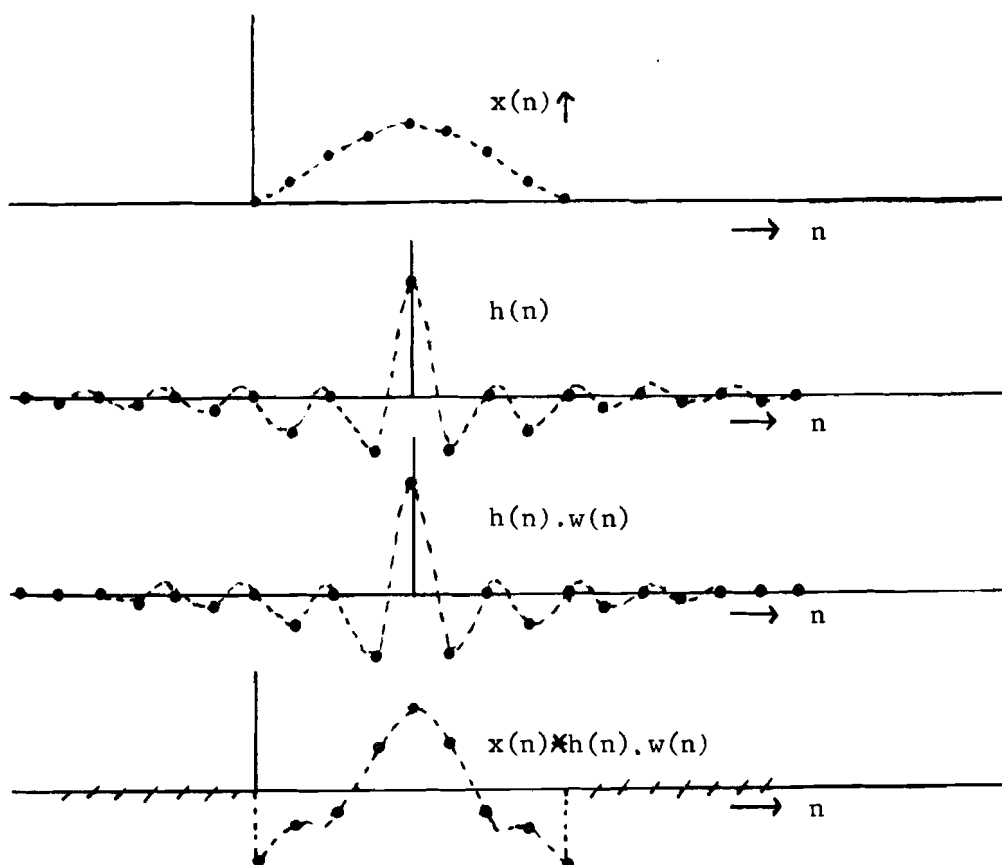


fig. 2.1.9. :

in het interessegebied is de gefilterde functie niet afhankelijk van het venster, indien het venster $\geq 2 *$ de breedte van het ingangssignaal is. Onder het interessegebied wordt verstaan het gebied van het uitgangssignaal, wat overeenkomt met dat van het ingangssignaal.

---xxx---

Opmerking:

in het algemeen zal het uitgangssignaal wel vensterafhankelijk zijn. Door de keuze van bepaalde vensters (Hamming, Kaiser) kan een compromis gevonden worden in de ongewenste opslingersverschijnselen in de overdrachtsfunctie (verschijnsel van Gibbs) en het uitsmerend effect van het venster op de overdrachtsfunctie.

Methode m.b.v. computerberekeningen.

Uitgaande van een bemonsterde overdrachtsfunctie kan de eindige impulsresponsie berekend worden. Door specifieke delen van de overdrachtsfunctie te kiezen (dikwijls doorlaat- en sperbanden) kan, door keuze van de rest van de overdrachtsfunctie, de fout in het gewenste deel beperkt worden (methode 2a).

Bij de minimax methode wordt de impulsresponsie verkregen uit de bemonsterde overdrachtsfunctie, opgegeven in specifieke waarden en een fouteninterval.

2.1.2.3. Interpoleren.

Wanneer de bemonsteringsfrequentie van de impulsresponsie (f_1) groter is dan die van het ingangssignaal (f_2) en de verhouding van f_2 tot f_1 geheel is, kan men, door toevoegen van extra componenten (nullen) aan het ingangssignaal, een uitgangssignaal met hogere frequentie dan het ingangssignaal bepalen.

Zie fig. 2.1.10.

Door het ingangssignaal verschoven te bemonsteren, kan de bandbreedte van het systeem vergroot worden met een faktor f_2/f_1 . Het uitgangssignaal kan verkregen worden door de twee verschoven ingangssignalen samen te voegen en vervolgens te filteren of door de ingangssignalen allereerst geïnterpoleerd te filteren en de verkregen uitgangssignalen te sommeren. Zie fig. 2.1.11.

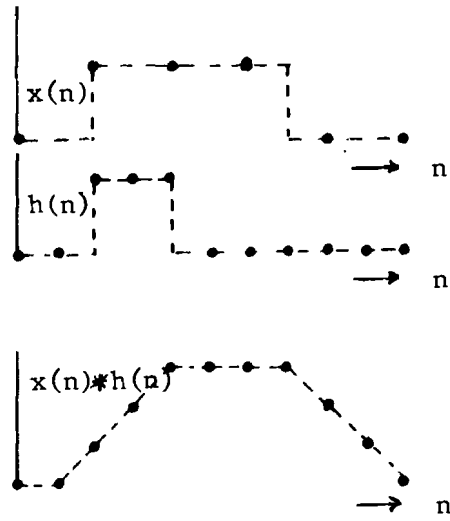


fig. 2.1.10. :

geïnterpoleerd filteren

---xxx---

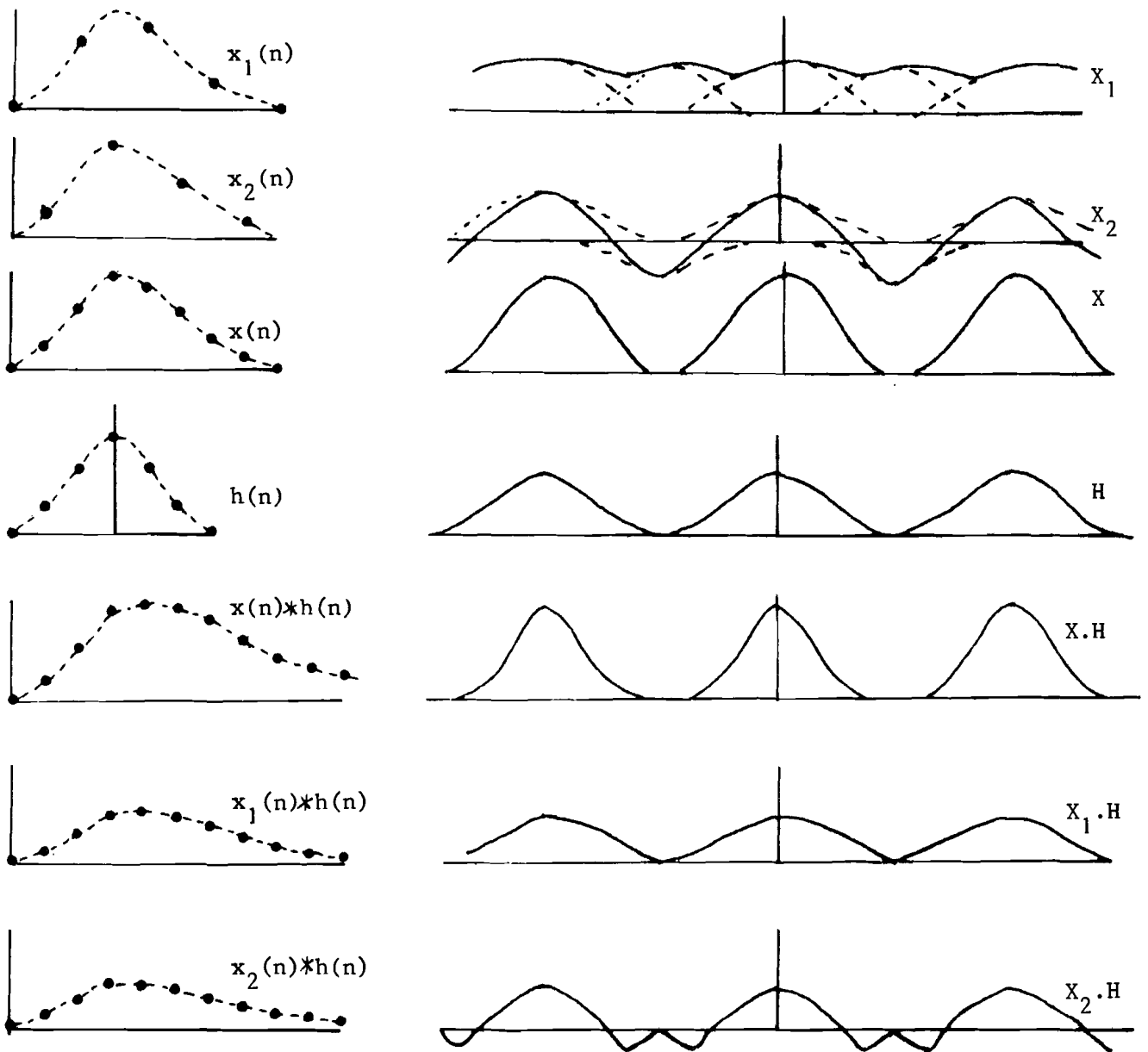


fig. 2.1.11. :

geïnterpoleerd filteren

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$y(n) = x(n)*h(n) = x_1(n)*h(n) + x_2(n)*h(n)$$

$$\text{ofwel: } X_3(k).H(k) = X_1(k).H(k) + X_2(k).H(k)$$

---xxx---

2.1.2.4. Berekeningen.

Wanneer het aantal filtercoëfficiënten (N) overeenkomt met het aantal meetpunten van hetingangssignaal, bedraagt het aantal berekeningen per uitgangsmetpunt eveneens N; bij geïnterpoleerd filteren zal dit aantal p.N zijn, wanneer p de verhouding van de bemonsteringsfrequenties van het filter t.o.v. hetingangssignaal voorstelt ($p = f_2/f_1$).

Indien het gewenste uitgangssignaal-gebied overeenkomt met hetingangssignaal-gebied zijn het aantal berekeningen per signaal resp. N^2 en pN^2 .

2.1.2.5. Nauwkeurigheid t.g.v. eindige woordlengten.

Zowel hetingangssignaal als de filtercoëfficiënten (impulsresponsie) worden voorgesteld middels getallen met eindige woordlengte. Hierdoor zal het uitgangssignaal slechts met een beperkte nauwkeurigheid bepaald kunnen worden. De te onderscheiden onnauwkeurigheden worden veroorzaakt door:

- 1) eindige woordlengte van hetingangssignaal
- 2) eindige woordlengte van de filtercoëfficiënten
- 3) eindige woordlengte van het produkt van hetingangssignaal met een filtercoëfficiënt.
- 4) overload in de sommatie van de produkten.

Om de invloed van de diverse effecten te bepalen, worden de getallen genormeerd voorgesteld in "two's complement", d.w.z.

$$A = a_0 a_1 a_2 \dots a_{b-1}$$

$$A = -a_0 \cdot 2^{+0} + \sum_{i=1}^{b-1} a_i \cdot 2^{-i} ; \quad a_0, a_1, \dots, a_{b-1} = 0 \text{ of } = 1$$

Wanneer de meetwaarde A^* voorgesteld wordt door A, bedraagt de fout $A^* - A$ in het geval van afronding:

$$\epsilon_A = |A^* - A| \leq 2^{-b}$$

en in het geval van afkappen $0 \leq A^* - A < 2^{-b+1}$

en is het interval uniform verdeeld. Zie fig. 2.1.12.

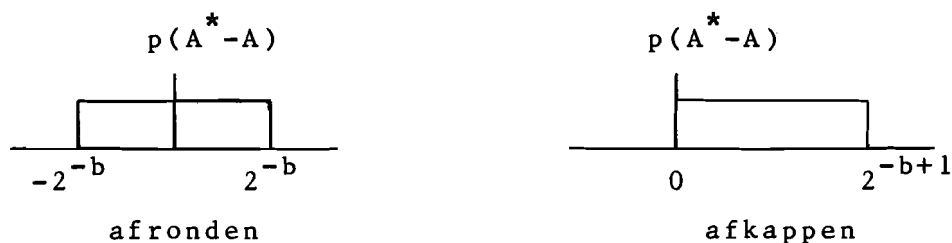


fig. 2.1.12. : kansverdeling $P(A^* - A)$

---xxx---

De statistische waarden van deze verdelingen worden weergegeven in tabel 2.1.1.

		afroning	afkapping
verwachtingswaarde	$E\{\underline{\epsilon}_A\}$	0	2^{-b}
variantie	$\sigma_{\underline{\epsilon}_A}^2 = E\{\underline{\epsilon}_A^2\}$	$\frac{1}{12} \cdot 2^{-2b+2}$	$\frac{1}{12} \cdot 2^{-2b+2}$

tabel 2.1.1.

De verdeling van $\frac{\sum_{i=1}^N (A_i^* - A_i)}{\sigma \sqrt{N}}$ voor $\lim N \rightarrow \infty$ is

normaal verdeeld $N(0,1)$ (centrale limietstelling, zie lit. 5). De onvermijdelijke fout van het filter wordt gegeven door de fout, die ontstaat ten gevolge van de beperkte woordlengte van het ingangssignaal.

Stel de fout van hetingangssignaal voor door ϵ_{x_i} .

De fout in het uitgangssignaal ϵ_y wordt nu gegeven door:

$$\epsilon_{y_i} = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_{x(n)} h(i-n)$$

De verwachtingswaarde $E\{\epsilon_y\}$ zal bij afronding gelijk zijn aan

nul, immers $E\{\epsilon_y\} = E\left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_{x(n)} h(i-n) \right\} = E\{\epsilon_x\} \sum_{n=0}^{N-1} h(i-n) = 0$
 Zie blz. 117.

Bij afkappen geldt voor de verwachtingswaarde $E(\epsilon_y) = 2^{-b} \sum_{n=0}^{N-1} h(i-n)$

Voor de variantie geldt in beide situaties:

$$\sigma_{\epsilon_y}^2 = E\{\epsilon_{y_i}^2\} = E\{\epsilon_{x_i}\} \sum_{n=0}^{N-1} (h(i-n))^2 \text{ en}$$

voor de maximale afwijking $\Delta_{\max} = \epsilon_{x\max} \sum_{n=0}^{N-1} |h(i-n)|$

Afleiding: zie bijlage 2.1.

Op identieke wijze kunnen de andere effecten berekend worden.

Tengevolge van de filtercoëfficiënten (h_i):

stel $h_i^* = h_i + \epsilon_{h_i}$, dan geldt:

$$\epsilon_{y_i} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \epsilon_{h(i-n)}$$

verwachtingswaarde $E\{\epsilon_{y_i}\} = 0$ (afronden)

verwachtingswaarde $E\{\epsilon_{y_i}\} = N \cdot 2^{-b}$ (afkappen)

variantie $\sigma_{\epsilon_y}^2 \leq N \cdot E\{\epsilon_{h_i}^2\}$

maximale fout $\Delta_{\max} = N \cdot \epsilon_{h\max}$

Tengevolge van het produkt:

het produkt van het ingangssignaal x , bestaande uit N bits en de coëfficiënten h , bestaande uit M bits, heeft een maximum aantal bits van $N+M$. Door het produkt slechts uit te drukken in L bits ontstaat er een afwijking in het eindresultaat. Stel de afwijking in het produkt voor door ϵ_p , dan geldt:

$$\varepsilon_{y_i} = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_p$$

verwachtingswaarde $E\{\varepsilon_{y_i}\} = 0$ (afronden)

verwachtingswaarde $E\{\varepsilon_{y_i}\} = N \cdot E\{\varepsilon_p\}$ (afkappen)

variantie $\sigma_{\varepsilon_y}^2 = N \cdot E\{\varepsilon_p^2\}$

maximale fout $\Delta_{\max} = N \cdot \varepsilon_{p\max}$

Tengevolge van overload in de accumulator:

de gevonden produkten worden N keer gesommeerd in de accumulator. Hierdoor kan overload ontstaan bij beperking van het aantal bits van de accumulator.

Nu geldt:
$$y_i = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)h(i-n)$$

ofwel:
$$|y_n| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| |h(i-n)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |h(i-n)|$$

immers $|x_i| \leq 1$

Wanneer de filtercoëfficiënten genormeerd zijn, is de maximale som (ofwel de maximale waarde van y) vastgelegd.

Opmerking:

uitgegaan is van ruisbronnen, welke onderling onafhankelijk zijn een onafhankelijk van het ingangssignaal.

2.1.3. Fouriertransformatie.

2.1.3.1. Diskrete Fouriertransformatie.

Een digitaal filter kan uitgevoerd worden in het frequentiedomein door middel van diskrete Fouriertransformatie.

Door hetingangssignaal te Fouriertransformeren wordt het diskrete begrensde frequentiespektrum bepaald. Filtering vindt nu plaats door vermenigvuldiging van het gevonden spektrum met de diskrete overdrachtsfunctie. Het uitgangssignaal wordt gevonden door inverse transformatie van het produkt. Zie fig. 2.1.13.

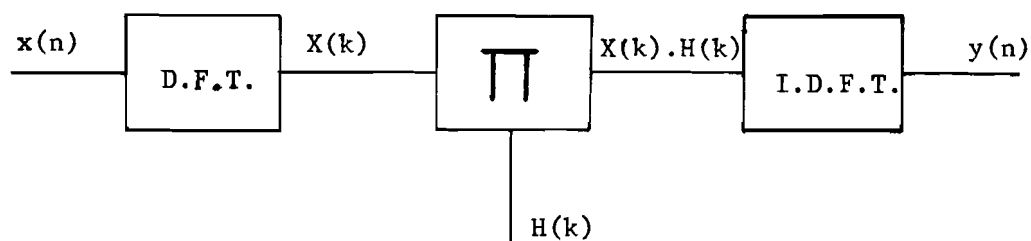


fig. 2.1.13. :

digitaal filter, uitgevoerd in het frequentiedomein

---xxx---

Nu geldt:

$$1) X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad \text{zie formule (2.1.5.)}$$

$$2) H(k) = \text{overdrachtsfunctie}$$

$$3) Y(k) = X(k) \cdot H(k)$$

$$4) y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad \text{zie formule (2.1.6.)}$$

In paragraaf 2.1.2. is aangetoond, dat in het gewenste uitgangssignaal (overeenkomstig hetingangssignaal) geen vervorming optreedt, wanneer de filtercoëfficiënten begrensd worden door middel van een rechthoekig venster, waarvan de breedte twee maal de breedte van hetingangssignaal is. De lineaire convolutie levert

als uitgangssignaal een signaal, waarvan de breedte drie maal de ingangssignaalbreedte is. Om een identieke filtering te verkrijgen met behulp van transformaties, dienen we het ingangssignaal uit te breiden, zodanig dat de breedte drie maal de oorspronkelijke breedte bedraagt.

2.1.3.2. Fast Fourier Transformatie.

De diskrete Fouriertransformatie kan onder speciale voorwaarden zeer efficiënt uitgerekend worden door middel van Fast Fourier Transformatie. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het feit, dat een transformatie is uit te voeren door sommatie van deeltransformaties.

Gevraagd wordt $X(k)$ te bepalen, waarvoor geldt:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

We splitsen nu de sommatie in twee deelsommaties, ofwel:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(2n) e^{-i2\pi \frac{2nk}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1) e^{-i2\pi \frac{(2n+1)k}{N}}$$

Stel nu: $x_1(n) = x(2n)$ en $x_2(n) = x(2n+1)$, dan geldt:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}} +$$

$$e^{-i2\pi \frac{k}{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}} \quad \text{voor } 0 \leq k \leq N/2 - 1$$

$$\text{en } X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}} -$$

$$e^{-i2\pi \frac{k}{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}} \quad \text{voor } N/2 \leq k \leq N-1$$

Nu geldt per definitie:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}}$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}}$$

ofwel:

$$X(k) = X_1(k) + e^{-i2\pi \frac{k}{N}} \cdot X_2(k) \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1$$

$$X(k) = X_1(k') - e^{-i2\pi \frac{k'}{N}} \cdot X_2(k') \quad N/2 \leq k \leq N-1$$

$$k' = k - N/2$$

Zie fig. 2.1.14.

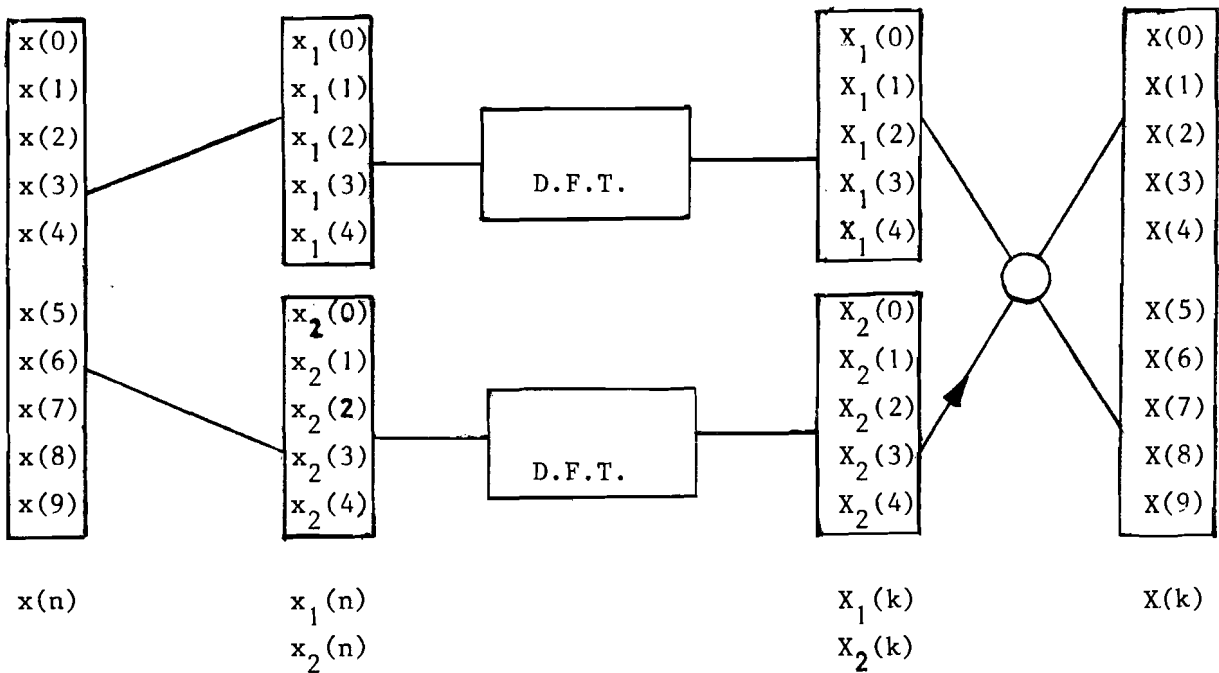
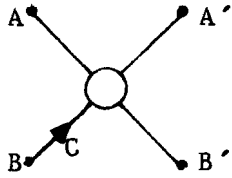


fig. 2.1.14. :

transformatie, uitgevoerd door deeltransformaties

---xxx---

waarin als symbool is gebruikt:



$$A' = A + C.B$$

$$B' = A - C.B$$

Zie lit. 2.2.

fig. 2.1.15. :

butterfly bewerking, symbolisch en in formulevorm

---xxx---

Wanneer nu het aantal meetpunten (N) een macht van twee is, kan door herhaald opdelen de transformatie uitgevoerd worden. Zie fig. 2.1.16.

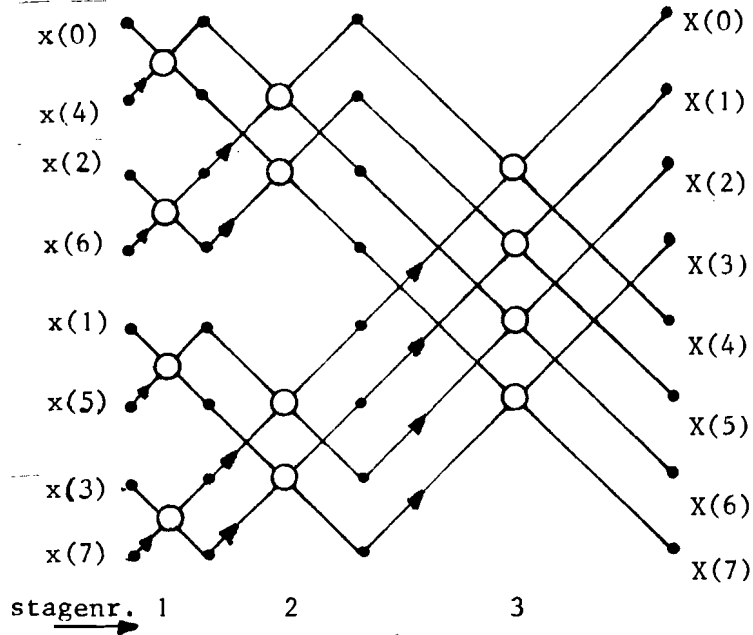


fig. 2.1.16. :

Fast Fourier Transformatie: radix 2
 input: bit reversed
 decimation in time
 in place

---xxx---

De beschreven methode wordt de radix 2 methode genoemd. Om de juiste uitgangssequentie te verkrijgen, dienen de ingangssignalen aangeboden te worden in "bit reversed" volgorde.

Bij de natuurlijke sequentie van het ingangssignaal zal de volgorde van het uitgangssignaal "bit reversed" zijn. Zie fig. 2.1.17.

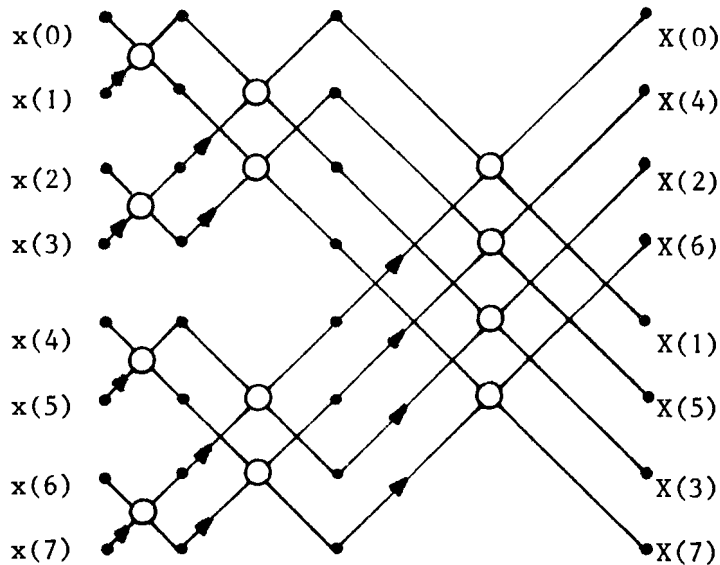


fig. 2.1.17. :

Fast Fourier Transformatie: radix 2
input: natuurlijke sequentie
in place
decimation in time

---xxx---

De methode wordt "in place" genoemd, omdat de resultaten van een berekening op dezelfde plaatsen terecht komen als waarvan het ingangssignaal gehaald is.

De verdeling in even en oneven termen wordt "decimation in time" genoemd. Dit in tegenstelling tot "decimation in frequency"; deze verdeling vindt plaats zoals weergegeven in fig. 2.1.18.

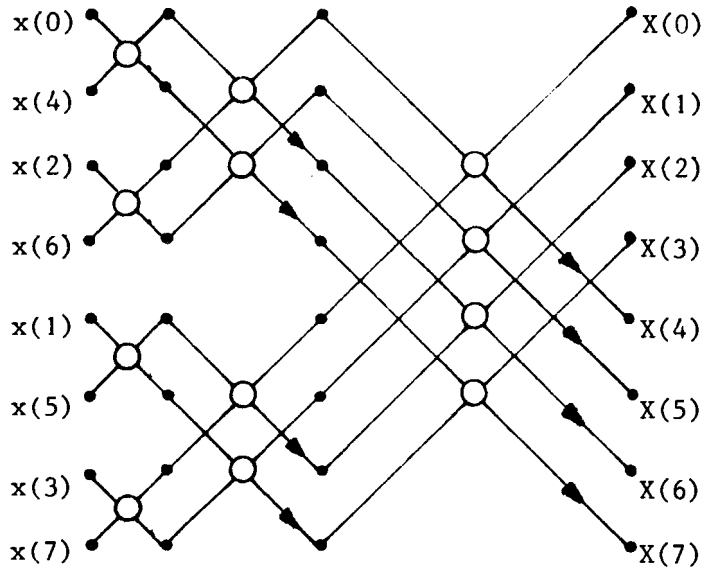


fig. 2.1.18. :

Fast Fourier Transformatie: radix 2
 input: bit reversed
 in place
 decimation in frequency

---xxx---

Opmerking:

de vermenigvuldigingsfactoren $e^{-i2\pi\frac{k}{N}}$ worden in de literatuur "twiddle factors" genoemd; een rij butterfly betrekkingen heet "stage" (zie fig. 2.1.16.)

2.1.3.2.1. Berekeningen.

Het aantal complexe vermenigvuldigingen voor een N punts Fast Fourier Transformatie (radix 2) bedraagt $1/2 N^2 \log N$ (zie fig. 2.1.16.) en het aantal optellingen en aftrekkingen is $N^2 \log N$. Om het filter via Fast Fourier uit te voeren, dienen we het ingangssignaal niet 3 maal, maar 4 maal uit te breiden, daar het aantal punten een macht van twee dient te zijn.

Het aantal reële vermenigvuldigingen bedraagt:

t.b.v. Fouriertransformatie $(1/2 \cdot 4N^2 \log 4N) * 4$
 t.b.v. vektorprodukt $4N * 2$ (reëel filter)
 t.b.v. inverse Fouriertransformatie $(1/2 \cdot 4N^2 \log 4N) * 4$

Het aantal reële optellingen per transformatie bedraagt:

$6 * 1/2 \cdot 4N^2 \log 4N$ en per filteruitvoering $24 N^2 \log 4N$. Immers uitgedrukt per butterfly is het aantal reële vermenigvuldigingen 4 en het aantal optellingen 6.

2.1.3.2.2. Nauwkeurigheid.

De nauwkeurigheid van een digitaal filter, uitgevoerd d.m.v. transformaties, wordt bepaald door de nauwkeurigheid, waarmee de transformatie en de inverse transformatie uitgevoerd wordt, alsmede de nauwkeurigheid van het vektorprodukt van het spektrum met de overdrachtsfunctie.

Nauwkeurigheid Fast Fourier Transformatie.

De nauwkeurigheid van het spektrum wordt beïnvloed door het effect van drie soorten ruisbronnen:

- 1) ingangsruijs t.g.v. eindige nauwkeurigheid van hetingangssignaal
- 2) coëfficiëntenruis ten gevolge van eindige nauwkeurigheid van de

coëfficiënten $e^{-i2\pi \frac{k}{N}}$

- 3) butterfly ruijs:

3.1) eindige nauwkeurigheid van de vermenigvuldiging

3.2) fout t.g.v. vermenigvuldiging met een faktor 1/2.

Fixed point berekening.

Om overload te voorkomen in een butterfly berekening, kan men twee wegen bewandelen:

1. Normering van hetingangssignaal.

Voor een butterfly berekening geldt: $A' = A + C.B$ en $B' = A - C.B$.

Zie fig. 2.1.15.

Nu geldt:

- a. Het maximum van de absolute waarden van A en B is kleiner of gelijk aan het maximum van de absolute waarde van A' en B'.
- b. Het maximum van een punt in het frequentiedomein X(k) is kleiner dan N maal het maximum van hetingangssignaal, waarin N het aantal componenten voorstelt. Zie bijlage 2.2.

Overload kan in elke butterfly voorkomen worden door het ingangssignaal te normeren volgens $|x(n)| < 1/N$. In lit. 2.6. wordt de signaal-ruisverhouding van het spektrum afgeleid ten gevolge van de nauwkeurigheid van de butterfly berekening. Deze verhouding blijkt omgekeerd evenredig te zijn met het kwadraat van het aantal componenten van het ingangssignaal.

Zie bijlage 2.2. - formule (8).

Een aanzienlijke verbetering wordt verkregen door methode 2.

2. Normering van iedere butterfly.

Ga weer uit van : $A' = A + C.B$ en $B' = A - C.B$

Het maximum van de absolute waarden van A' en B' is kleiner dan twee maal het maximum van de absolute waarden van A en B. Wanneer nu het ingangssignaal genormeerd wordt volgens $|x(n)| < 1$ en bovendien het ingangssignaal per butterfly vermenigvuldigd wordt met 1/2, is overload uitgesloten. Nu geldt voor de diverse ruisbronnen:

1. Ingangsruiis.

De signaal-ruisverhouding van het spektrum is gelijk aan de signaal-ruisverhouding van het ingangssignaal. Zie bijlage 2.1.

2. Coëfficiëntenruis.

Hiervoor wordt afgeleid, dat de signaal-ruisverhouding (F) omgekeerd evenredig is met de logaritme van het aantal ingangskomponenten:

$$F = (\sqrt{6}) \cdot 2^{-2b+2} \quad (2.1.12.) \quad , \text{waarin } \sqrt{6} = 2 \log N$$

Zie lit. 2.6.

3. Butterfly ruis.

In lit. 2.6 wordt de hierdoor veroorzaakte signaal-ruisverhouding bepaald. Deze is omgekeerd evenredig met het aantal componenten van hetingangssignaal. Zie bijlage 2.2.

In formule vorm:

$$F = 10 \cdot N \cdot 2^{-2b+2} \quad (2.1.13.)$$

waarin: F is de signaal-ruisverhouding = $\frac{\sigma_{\epsilon_x}^2}{\sigma_x^2}$

N is het aantal meetpunten

b is het aantal bits

$\sigma_{\epsilon_x}^2$ = de variantie van het ruissignaal in het uitgangssignaal

σ_x^2 = de variantie van het uitgangssignaal

In lit. 2.7. wordt rekening gehouden met foutloze vermenig-

vuldigingen ($e^{-i2\pi\frac{k}{N}} = \pm 1$ of $\pm i$).

Nu wordt bij benadering gevonden:

$$F = (.3)^2 \cdot 8 \cdot N \cdot 2^{-2b+2} \cdot 3. \quad (2.1.14.)$$

Floating point berekening.

Butterfly ruis.

Met behulp van het model, gegeven in fig. 2.1.19. wordt in lit. 2.8 afgeleid, dat uitgaande van ruisbronnen, onderling onafhankelijk en onafhankelijk van hetingangssignaal, de signaal-ruisverhouding van het uitgangsspectrum gegeven wordt door de formule:

$$F = \frac{\sigma_{\epsilon_x}^2}{\sigma_x^2} = 2 \sigma_{\epsilon_x}^2 \cdot V \quad (2.1.15.)$$

waarin $V = 2 \log N$ = het aantal stages

Dit geldt, indien hetingangssignaal beschouwd kan worden als witte ruis. Door foutloze vermenigvuldigingen in de beschouwing mee te nemen, wordt de verhouding:

$$F = 2 \sigma_{\epsilon_x}^2 \{ V^{-3/2} + (1/2) V^{-1} \} \quad (2.1.16.)$$

In lit. 2.9. wordt de signaal-ruisverhouding afgeleid voor algemene ingangssignalen.

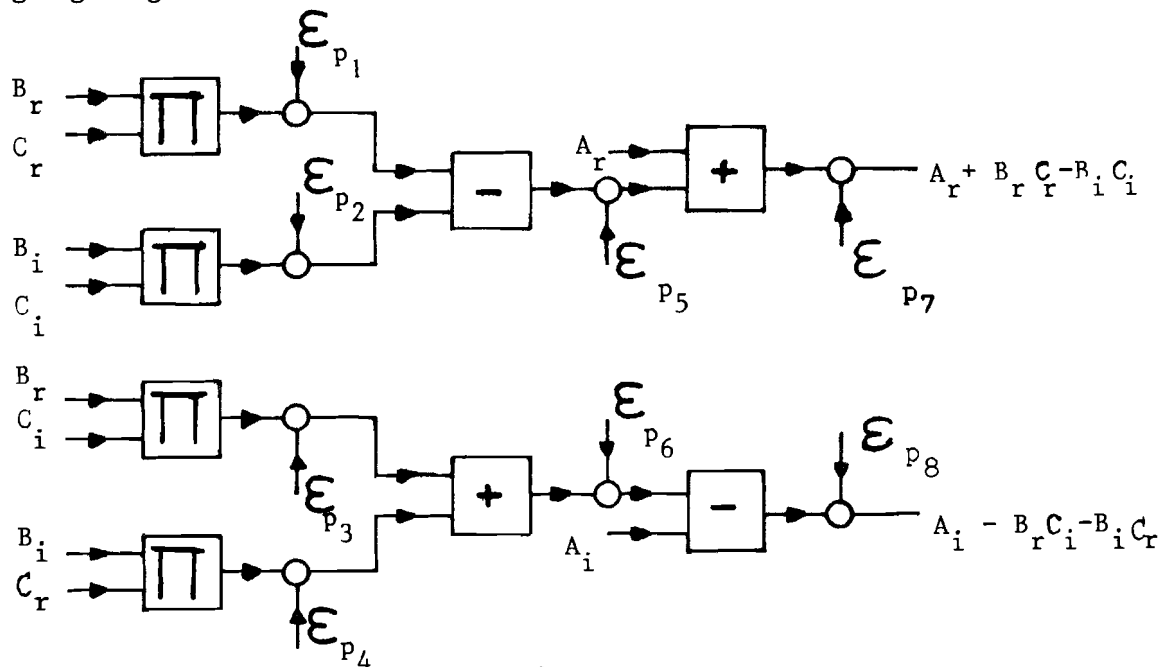


fig. 2.1.19. :

model t.b.v. de bepaling van de signaal-ruisverhouding

---xxx---

Coëfficiëntenruis.

In lit. 2.3. wordt experimenteel aangegeven, dat het resultaat t.g.v. coëfficiëntenruis voor fixed point en floating point berekeningen, identiek zijn op een constante faktor na.

Block floating point berekening.

Een tussenvorm van fixed point en floating point berekening, staat bij F.F.T. berekeningen bekend onder de naam block floating point berekening. Hieronder verstaat men, dat na iedere butterfly bewerking gecontroleerd wordt of er een overload is opgetreden. Is dit het geval, dan worden alle datapunten op die stage vermenigvuldigd met $1/2$ en een teller houdt het aantal overloads bij. In het ongunstigste geval wordt op iedere stage de data gehalveerd, waardoor een identieke situatie optreedt als beschreven bij de 2^e methode van fixed point berekeningen. De signaal-ruisverhouding is sterk ingangssignaal afhankelijk. Enkele experimentele resultaten worden gegeven in lit. 2.3.

Nauwkeurigheid van het filter.

De nauwkeurigheid van het uitgangssignaal van het filter wordt bepaald door de nauwkeurigheid van de transformaties en het vektorprodukt van het spektrum met de overdrachtsfunctie. In deze subparagraaf wordt de methode uit lit. 2.6. genoemd om deze nauwkeurigheid te bepalen.

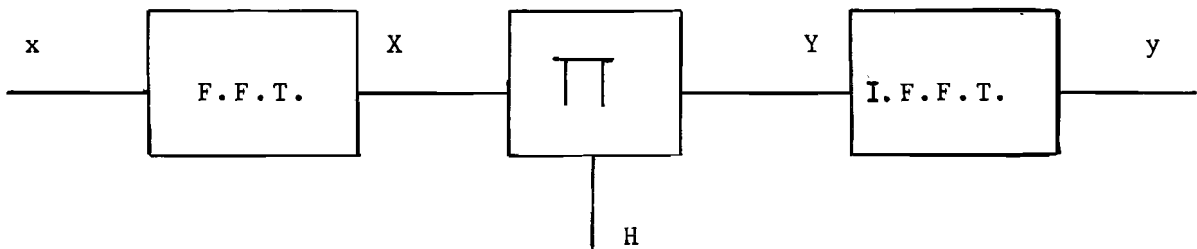


fig. 2.1.20. :
filterbewerking

---xxx---

Uitgegaan wordt van fixed point berekening methode 2, d.w.z. in iedere stage wordt de data vermenigvuldigd met een faktor 1/2. Voor de variantie van de ruissignalen geldt achtereenvolgens:

variantie van de ruis in X = $\sigma_{\epsilon_X}^2 = (10/3) \cdot 2^{-2b+2}$ (zie bijlage 2.2.)

na het vektorprodukt: variantie van de ruis in Y = $\sigma_{\epsilon_Y}^2 = \sigma_{\pi}^2 + \sigma_{\epsilon_X}^2 \cdot B$

waarin σ_{π}^2 is de variantie t.g.v. eindige vermenigvuldiging:

$$\sigma_{\pi}^2 = (1/3) \cdot 2^{-2b+2}$$

B is een filtereigenschap : $B = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} H(k)^2$

Voor de I.F.F.T. is het aantal noodzakelijke normeringsfactoren afhankelijk van de waarden van het uitgangssignaal $y(n)$ ofwel van de som van de absolute waarden van de filtercoëfficiënten, immers:

$$|y(n)| \leq \sum_{l=0}^{N-1} |h(l)| = C \quad \text{Zie paragraaf 2.1.2.5.}$$

Voor de variantie van de ruis van het uitgangssignaal $\sigma_{\epsilon_y}^2$ geldt:

$$\sigma_{\epsilon_y}^2 = \frac{N}{C^2} \cdot \sigma_{\epsilon_y}^2 + \sigma_{\epsilon_{IF}}^2 \quad (2.1.17.)$$

waarin: $\sigma_{\epsilon_{IF}}^2$ de variantie van de fout t.g.v. de inverse Fouriertransformatie voorstelt: stel het aantal normeringsfactoren gelijk aan m , dan geldt:

$$\sigma_{\epsilon_{IF}}^2 = \left(\frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \dots + \frac{N}{2 \cdot 2^m} \right) \sigma_T^2 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i \sigma_{\pi}^2$$

σ_{π}^2 de variantie van de fout t.g.v. vermenigvuldiging:
 $\sigma_{\pi}^2 = (1/3) \cdot 2^{-2b+2}$

σ_T^2 de variantie van de fout t.g.v. vermenigvuldiging en normering met een faktor $1/2$: $\sigma_T^2 = (5/6) \cdot 2^{-2b+2}$
 b het aantal bits, inclusief tekenbit.

Voor de variantie van het uitgangssignaal geldt:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{512} \cdot B \cdot \frac{512}{C} \cdot \sigma_x^2 \quad (2.1.18.)$$

waarin $\frac{1}{512}$ t.g.v. F.F.T.
(per stage vermenigvuldiging met $1/2$).

B t.g.v. vektorprodukt

$\frac{512}{C}$ t.g.v. I.F.F.T. met specifieke normering.

De signaal-ruisverhouding van het uitgangssignaal volgt uit formule 2.1.17 en 2.1.18.

$$\frac{\sigma_{\epsilon_y}^2}{\sigma_y^2} = \frac{N/C^2 \cdot \sigma_{\epsilon_y}^2 + \sigma_{\epsilon_{IF}}^2}{1/512 \cdot B \cdot 512/C \cdot \sigma_x^2} \quad (2.1.19.)$$

Voor de signaal-ruisverhouding van het ingangssignaal geldt:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\epsilon_x}^2} = \frac{1/3}{1/12 \cdot 2^{-2b+2}} = \frac{4}{2^{-2b+2}} \quad (2.1.20.)$$

De verslechteringsfaktor van de signaal-ruisverhoudingen van in- en uitgangssignaal kan nu bepaald worden en uitgedrukt worden in het verlies van een aantal bits.

2.2. Uitvoering.

Het filter heeft tot doel het ingangssignaal te filteren volgens formule 1.3.1.:

$$g'(na, \theta) = a \cdot \sum_{ma=M}^M \{g(ma, \theta), h(n-m)a\}$$

Omdat na uitvoeren van de berekening, een vermenigvuldiging uitgevoerd moet worden (maal a) kan deze vermenigvuldigingsfaktor zodanig uitgebreid worden, dat het filter als uitgangssignaal een genormeerde gefilterde data aflevert. Dit betekent, dat de data een waarde bezit, waardoor na het uitvoeren van het tweede proces (in de back-projector) het resultaat van de verzwakkingscoëfficiënten direkt weergegeven wordt in een Hounsfieldschaal. Eigenschap van de Hounsfieldschaal is, dat de verzwakkingscoëfficiënten relatief weergegeven worden ten opzichte van de verzwakkingscoëfficiënt van water. De waarden bevinden zich in het interval van -1000 tot +1048.

2.2.1. Eisen.

De eisen, die aan het filter gesteld worden, zijn achtereenvolgens:

1. Real time rekonstruktie, d.w.z. een rekonstruktietijd gelijk aan de scantijd.
2. Het aantal te bewerken profielen bedraagt 300 of 600.
3. De ingangprofielen bestaan uit een variabel aantal bemonsteringsintervallen (256, 288, 512).
4. Zowel het ingangssignaal als het uitgangssignaal wordt uitgedrukt in een 16 bits getal ("two's complement").
5. Het uitgangssignaal bestaat uit hetzelfde aantal meetpunten als het ingangssignaal of het dubbele hiervan (geïnterpoleerd filteren).
6. Na het filteren dienen de meetwaarden genormeed te worden.
7. De filtercoëfficiënten zijn variabel, het filter is symmetrisch.

2.2.2. Realisatie.

Het filter kan gerealiseerd worden door het uitvoeren van de convolutie van de meetdata met de impulsresponsie, of door inverse transformatie van het produkt van de overdrachtsfunctie met het frequentiespektrum van het ingangssignaal.

2.2.2.1. Convolutie.

De eisen, vertaald uit paragraaf 2.1.2. en 2.2.1. worden weergegeven in tabel 2.2.1.

aantal profielen	300	600
aantal ingangsmmeetpunten	256	288 512
aantal uitgangsmmeetpunten	256	288 512
max. aantal filtercoëfficiënten	512	
ingangssignaalgrootte	16 bits	
uitgangssignaalgrootte	16 bits	
coëfficiëntengrootte	24 bits	
accumulator/produkt grootte	28 bits	
deelprocestijd	100	80 25 nsec.
geïnterpoleerd	JA	NEE NEE
normering: schaalfactor	16 bits	
shift	4 bits	

tabel 2.2.1.

2.2.2.1.1. Data blokschema.

In fig. 2.2.1. wordt het data blokschema van het filter weergegeven, uitgevoerd d.m.v. convolutie.

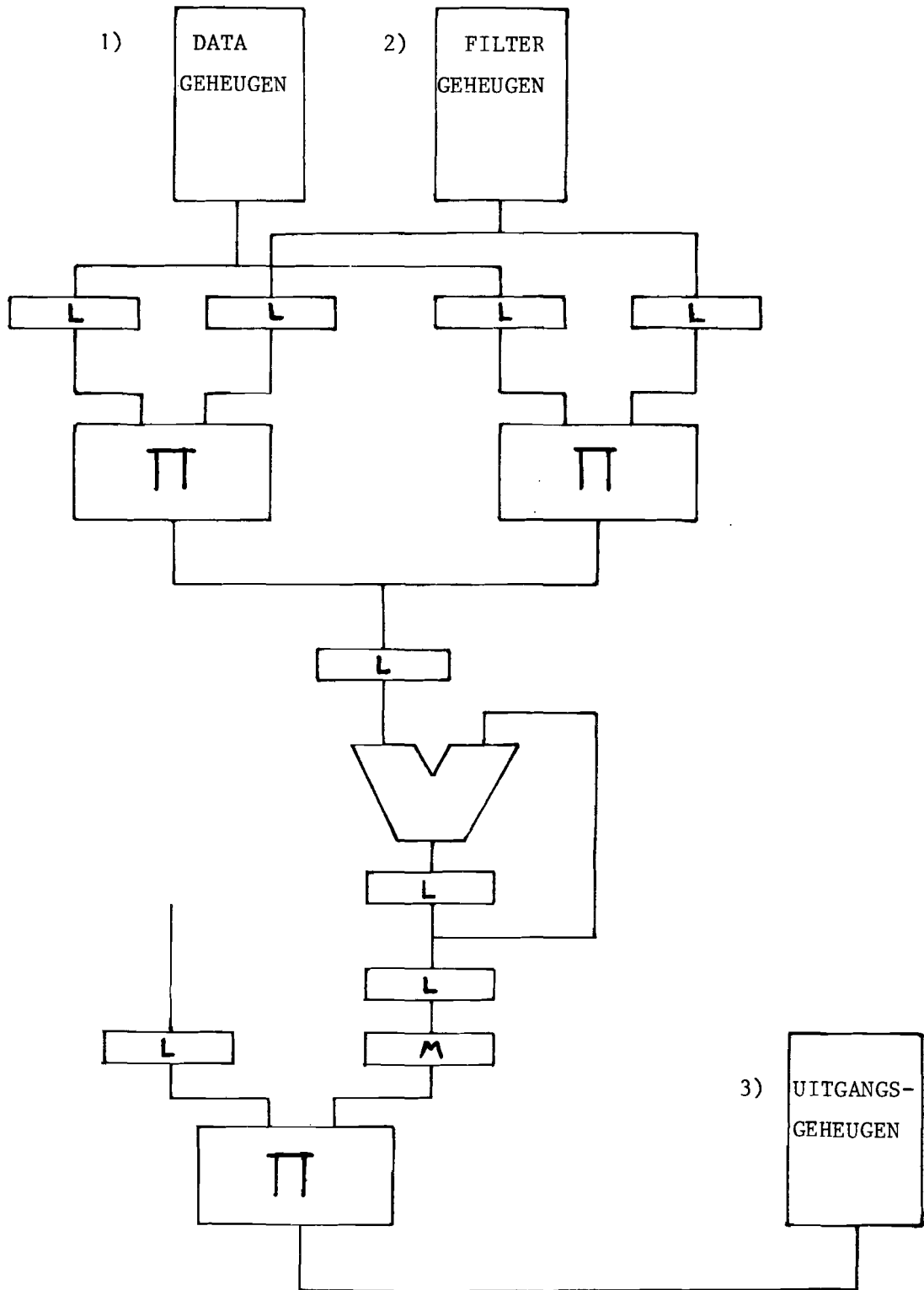


fig. 2.2.1. :

data blokschema van het convolutie filter

---xxx---

In de geheugens 1,2 en 3 worden resp. opgeslagen: het ingangssignaal, de filtercoëfficiënten en het uitgangssignaal.

De waarden worden uit het ingangs- en coëfficiëntengeheugen gelezen en toegevoerd aan één van de twee vermenigvuldigers, door gebruik te maken van registers, waarin de waarden om beurten ingeklokt worden.

Nadat de vermenigvuldiging is uitgevoerd, wordt de afgekapte waarde opgeteld bij de reeds aanwezige waarde in de accumulator. Nadat de waarde van een meetpunt bepaald is, wordt de waarde genormeerd door middel van een verschuivingselement en een vermenigvuldiger. Daarna wordt de waarde in het uitgangsgeheugen geschreven. Met behulp van de huidige componenten is het mogelijk een deelprocestijd te realiseren van 100 nanosec., waardoor een real time rekonstruktie alleen mogelijk is voor een ingangssignaal, bestaande uit 256 meetpunten en niet geïnterpoleerd filteren.

Bij geïnterpoleerd filteren kan men een real time rekonstruktie verkrijgen d.m.v. het parallel plaatsen van twee filters.

Daar zowel het ingangsgeheugen als het coëfficiëntengeheugen sequentieel uitgelezen wordt, kan men het lezen overlappend uitvoeren, waardoor een schijnbaar zeer snel geheugen ontstaat. Gevolg hiervan is, dat men uitsluitend de vermenigvuldigers en accumulator parallel dient te plaatsen. Bij modulaire bouw moet er echter rekening mee gehouden worden, dat deze structuur een zeer snel communicatiepad vereist tussen twee eenheden.

Een real time filtering van data, bestaande uit 512 meetpunten per profiel, kan uitgevoerd worden met 4 filters.

Per filter kunnen de profielen parallel gefilterd worden. Deze oplossing is te prefereren boven het parallel filteren van deelprofielen, daar hierdoor een modulaire bouw mogelijk is en omdat bij storing rekonstruktie mogelijk blijft, echter met geringere snelheid.

2.2.2.1.2. Modules van het data blokschema.

De afzonderlijke modules van het blokschema van het filter zijn achtereenvolgens: ingangsgeheugen, coëfficiëntengeheugen, vermenigvuldiger, accumulator, normeereenheid en uitgangsgeheugen.

Ingangsgeheugen.

Dit geheugen bestaat uit 512 woorden à 16 bits en dient een accesstijd te bezitten kleiner dan 100 nanosec. Gekozen kan worden voor 4 Signetics geheugenelementen 82 S 208 (256 * 8 bit RAM, accesstijd < 70 nanosec.). Zie fig. 2.2.2.

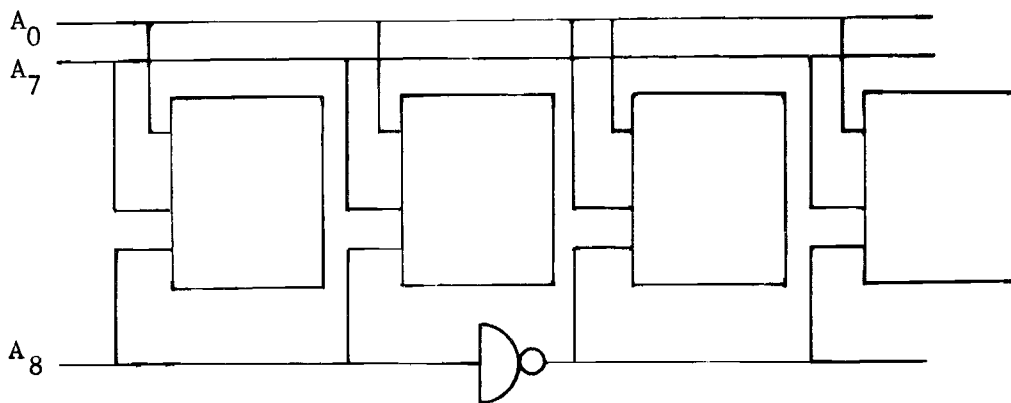


fig. 2.2.2. :

ingangsgeheugen

---xxx---

Coëfficiëntengeheugen.

Dit geheugen bestaat uit 512 woorden à 24 bits; de eisen zijn gelijk aan die van het ingangsgeheugen. Gekozen kan worden voor 6 geheugenelementen van Signetics 82 S 208. Vergelijk fig. 2.2.2.

Vermenigvuldiger.

De vermenigvuldiger dient een 16 bits ingangsetal te vermenigvuldigen met een 24 bits coëfficiëntenwaarde. De beschikbare tijd bedraagt 100 nanosec.

De vermenigvuldiger kan opgebouwd worden uit twee 16 * 16 bits multipliers van TRW MPY 16AJ, uitgebreid met een accumulator,

welke bestaat uit acht ALU's 74 S 181 en twee carry look ahead generators 74 182.

Door het uitgangssignaal van de vermenigvuldigers toe te voegen aan de registers, uitgevoerd met three-state outputs, kan men volstaan met één accumulator. Zie fig. 2.2.3. en zie het tijdsdiagram in fig. 2.2.6.

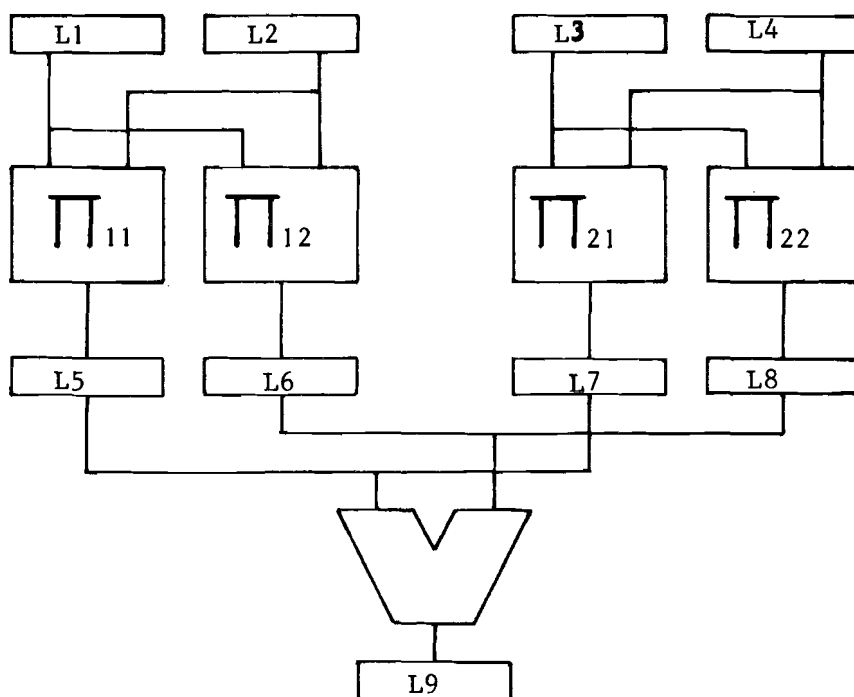


fig. 2.2.3. :

vermenigvuldiger, opgebouwd uit:

twee maal	5	ingangsregisters	TI	74 S 373
twee maal	2	multipliers	TRW	MPY 16 AJ
twee maal	8	uitgangsregisters	TI	74 S 373
een maal	8	ALU's	TI	74 S 181
een maal	2	carry-look-ahead- generators	TI	74 182
een maal	4	uitgangsregisters	TI	74 S 373

opmerking: accumulator, vergelijk fig. 2.2.4.

---xxx---

Accumulator.

Hierin dienen de deelprodukten gesommeerd te worden. De accumulator kan bestaan uit 8 ALU's en 2 carry-look-ahead generators, resp. type 74 S 181 en 74 182. Zie fig. 2.2.4.

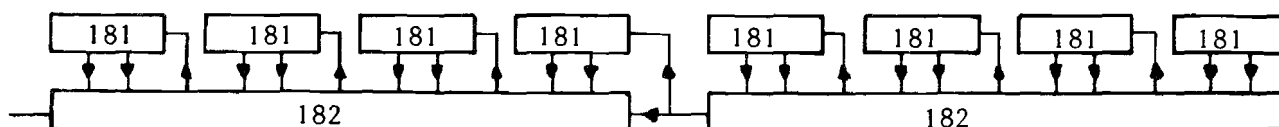


fig. 2.2.4. :

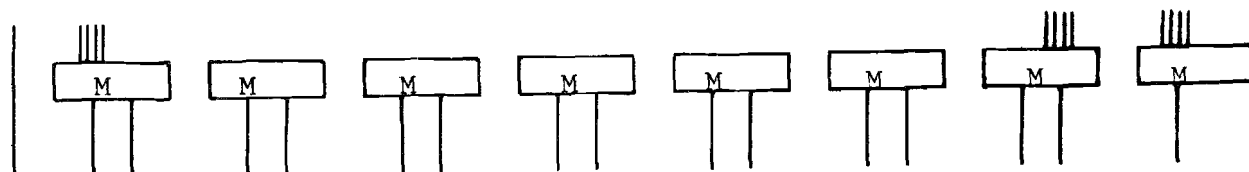
accumulator, opgebouwd uit acht ALU's en twee carry-look-ahead generators

---xxx---

Normeereenheid.

Om de gefilterde data te normeren, dient de meetwaarde variabel te worden verschoven. Met behulp van multiplexers is dit eenvoudig te realiseren. Voor een verschuiving van 4 bits kan gebruik gemaakt worden van 8 multiplexers, b.v. 74 S 153. Voordeel van een multiplexer boven een shift register is, dat controle slechts één keer per rekonstruktie plaatsvindt. Zie fig. 2.2.5.

teken



teken

fig. 2.2.5.

---xxx---

Na verschuiving dient de waarde vermenigvuldigd te worden met een in een register aanwezige waarde. Door de grote beschikbare tijd kan hier gebruik gemaakt worden van serie-parallel multipliers, uitgerust met twee shiftregisters. Zie lit. 2.10.

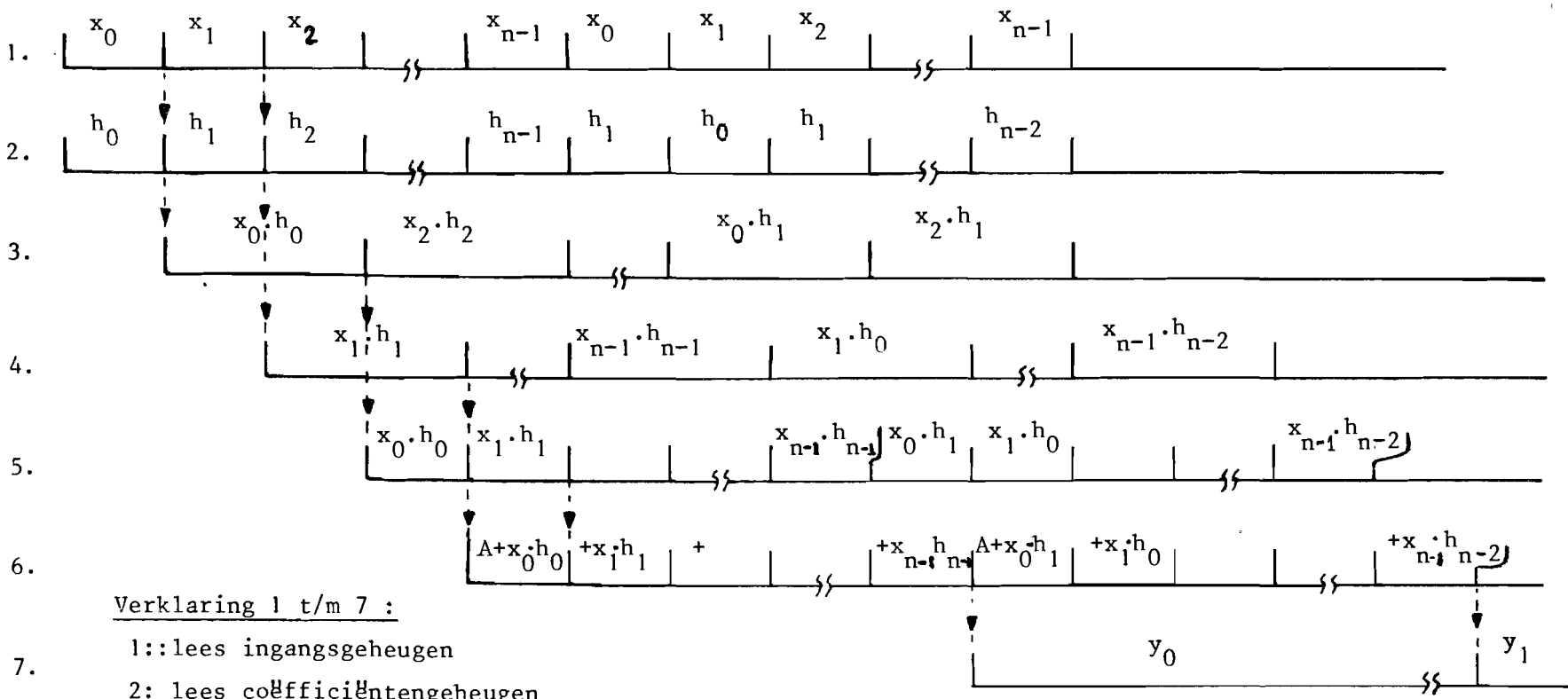
De vermenigvuldiging kan ook uitgevoerd worden met de bovengenoemde 16 * 16 bits multiplier TRW MPY 16 AJ. Voordeel hiervan is de eenvoudige controle (t.o.v. de serie-parallel multiplier) en per filter is slechts één soort multiplier nodig. Echter het prijsverschil is bijzonder groot.

Uitgangsgeheugen.

Het uitgangsgeheugen bestaat uit 512 woorden van 16 bit en kan, evenals het ingangsgeheugen, uit vier Signetics geheugenelementen 82 S 208 opgebouwd worden. Zie fig. 2.2.2.

Tijdsdiagram.

In fig. 2.2.6. wordt het tijdsdiagram van het filterproces weergegeven.



Verklaring 1 t/m 7 :

- 1.: lees ingangsgegevens
- 2: lees coefficientengegeuen
- 3: vermenigvuldiger 1
- 4: vermenigvuldiger 2
- 5: sommatör in vermenigvuldiger
- 6: accumulator
- 7: normeer en schrijf uitgangsgegevens

fig. 2.2.6. :
 tijdsdiagram van het filter d.m.v. convolutie
 ---xxx---

2.2.2.1.3. Controle eenheid.

Ten behoeve van het filter zijn twee situaties te onderscheiden:

- 1) transport: in deze toestand worden de diverse geheugens in- en uitgelezen
- 2) proces: in deze situatie wordt het filterproces uitgevoerd.

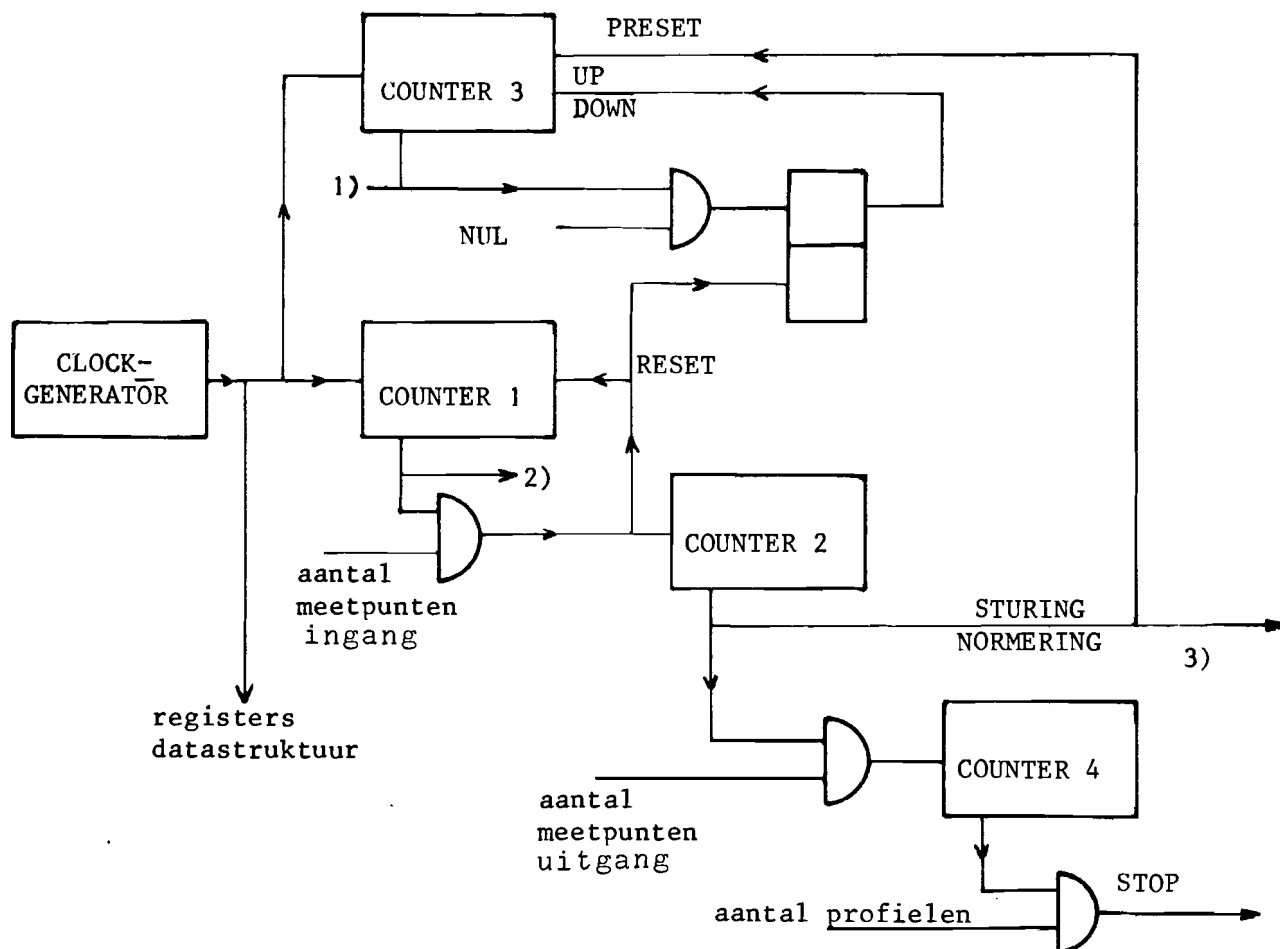
De controle eenheid dient ervoor te zorgen ,dat tijdens transport adressen voor de geheugens gegenereerd worden en dat het aantal transporten gecontroleerd wordt.

Tijdens proces situatie heeft de controle eenheid tot taak, het op gedefinieerde momenten uitvoeren van de deelprocessen (zie tijdsdiagram fig. 2.2.6.) en het genereren van de juiste adressen van de geheugens.

Voor beide taken kan gebruik gemaakt worden van een klokgenerator, preset up/down counters, en logische poorten.

Om de diverse deelprocessen te synchroniseren worden de in- en uitgangswaarden van de deelprocessen in registers ingeklokt door middel van de klokgenerator.

De juiste volgorde sequentie van de geheugenadressen in beide situaties, wordt gegeven door de counterwaarde. Deze waarden kunnen d.m.v. logische poorten vergeleken worden met de in registers opgegeven waarden, welke informatie bevatten over het aantal profielen en het aantal meetpunten van het in- en uitgangssignaal.



- 1) adres coëfficiëntengeheugen
 2) adres ingangsgeheugen
 3) adres uitgangsgeheugen

fig. 2.2.7. :

funktionele controle eenheid: processituatie

---xxx---

Beschrijving van de controle eenheid.

Counter 1 telt van nul tot het aantal ingangsmetpunten en geeft het adres van het ingangsgeheugen. Nadat het totaal aantal ingangsmetpunten bereikt is, wordt de counter gereset.

Counter 2 telt van nul tot het aantal uitgangsmetpunten en geeft het adres van het uitgangsgeheugen. Ook deze counter dient gereset te worden na het bereiken van de maximum waarde.

Counter 3 is een preset counter. De waarde van counter 2 is de presetwaarde. De waarde van de counter wordt verlaagd tot nul met de klokfrequentie en vervolgens verhoogd (count up). Deze counter geeft het adres van het coëfficiëntengeheugen. Counter 4 houdt het aantal gefilterde profielen bij.

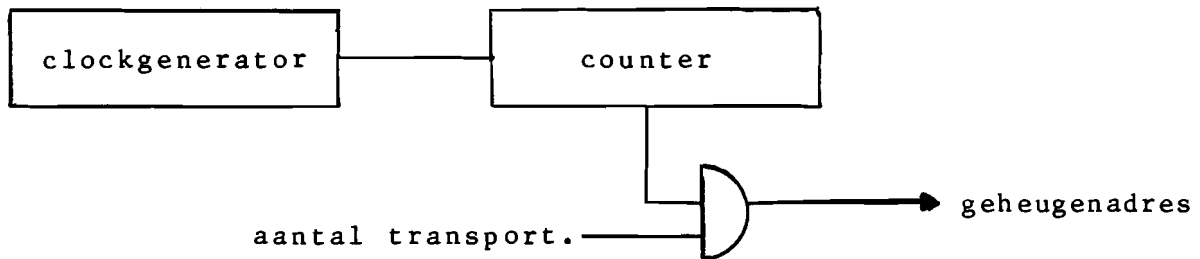


fig. 2.2.8. :

funktionele controle eenheid: transportsituatie

---xxx---

2.2.2.2. Fourier transformatie.

Uit de in paragraaf 2.2.1. gestelde eisen en de nauwkeurigheidsberekeningen in par. 2.1.3.2.2. blijkt, dat de gewenste nauwkeurigheid niet gehaald kan worden met behulp van fixed point berekeningen, tenzij het aantal bits in de berekeningen groot wordt. Immers het aantal bits, wat verloren gaat, bedraagt negen bij witte ingangssignalen; in ons geval zal dit aantal nog ongunstiger zijn, daar de spektrale verdeling van het ingangssignaal en de overdrachtsfunctie van het filter tegenovergesteld zijn (de energie van het signaal is voornamelijk laagfrequent, terwijl het filter een lage waarde heeft in dit gebied). De fouten, die bij block floating point berekeningen ontstaan, zijn moeilijk te schatten, immers zij zijn signaalafhankelijk. Er kan echter wel een berekeningswijze gekozen worden, zodanig dat de te verwachten waarden van fouten bijzonder gering zijn. Het maximum aantal overloads, wat per transformatie kan optreden is evenredig met het aantal stages. Zie par. 2.1.3.2.2.

Om de transformatietijd te beperken, kunnen de in- en uitgangssignalen van een butterfly-bewerking opgeslagen worden in registers. Daardoor kan het in- en uitlezen parallel verlopen aan de butterfly-berekening.

In de butterfly-bewerking kan hetzelfde toegepast worden door de afzonderlijke bewerkingen eveneens overlappend uit te voeren.

Wanneer het ingangssignaal bestaat uit 600 profielen van 256 meetpunten, duurt de totale filtering vier seconden. Wanneer de profielen bestaan uit 512 punten, kan een procestijd van 4.3 seconden gerealiseerd worden met twee filters.

Een blokschema van de analysator wordt gegeven in fig. 2.2.9.

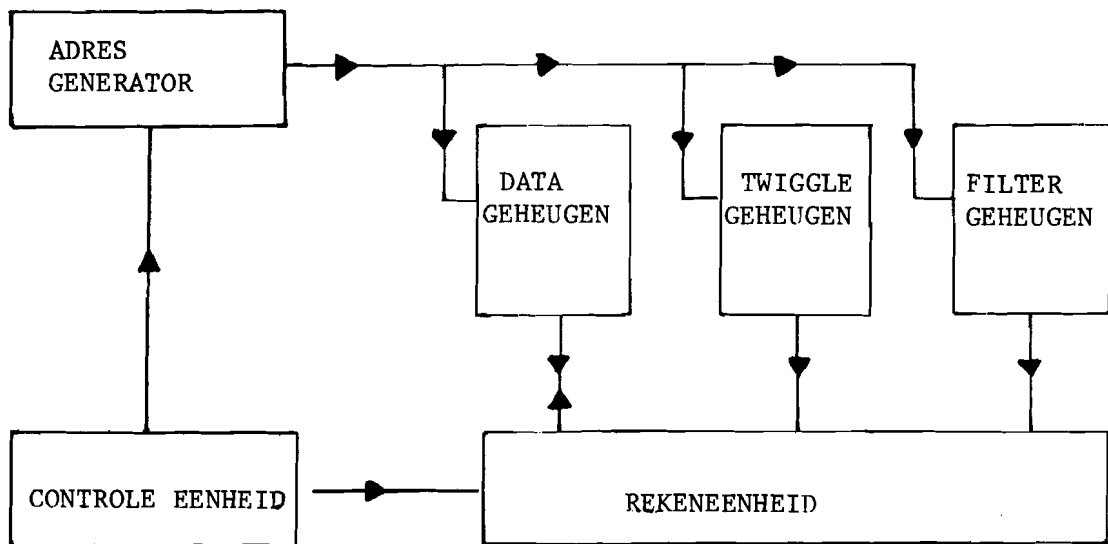


fig. 2.2.9. :

blokschema analysator

---xxx---

Beschrijving van het blokschema.

Het filter heeft drie geheugens. In geheugen één bevindt zich de data. Deze kan gezien worden zowel als ingangssignaal, alsmede als uitgangssignaal voor een butterfly-bewerking.

In geheugen twee bevinden zich de "twiggle factors" ofwel, dit is een sinus en cosinus tabel. Het derde geheugen bevat de overdrachtsfunctie van het filter.

Voor het uitvoeren van een transformatie worden door de adresgenerator de adressen van het datageheugen en de adressen van het geheugen met de "twiggle factors" gegeven.

In de rekeneenheid worden de geadresseerde waarden berekend (butterfly bewerking) en vervolgens worden de gevonden resultaten in het datageheugen weggeschreven in de aangegeven adressen.

Voor het uitvoeren van een vektorprodukt worden de waarden van het datageheugen en het filtergeheugen sequentieel toegevoerd aan de rekeneenheid. Hierin worden de twee waarden vermenigvuldigd; het resultaat wordt opgeslagen in het datageheugen.

Opmerking: in het blokschema is niet het register aangegeven, waarin het aantal overloads bijgehouden wordt.

2.2.2.2.2. Modules van het blokschema.

Data geheugen dit geheugen kan 2k woorden van 48 bits bevatten (zowel reëel en imaginair 24 bits).
Read en write cycle time dient \leq 150 nanosec.

"Twiggle factor" hierin kunnen 1k woorden van 48 bits opgeslagen worden.
geheugen
Read cycle time dient \leq 150 nanosec.
Uit dit geheugen wordt uitsluitend gelezen, m.a.w. read only memory is voldoende. Dit geheugen kan opgebouwd worden uit 6* (ROM) 82 S 181

Filter geheugen hierin worden 2k woorden van 24 bits opgeslagen. Read cycle time \leq 150 nanosec.

Om diverse overdrachtsfuncties te kunnen gebruiken is random access memory noodzakelijk.

De informatie dient bit reversed in dit geheugen geplaatst te worden.

Rekeneenheid deze eenheid bevat:

- 1) een 23 * 23 bits vermenigvuldiger, opgebouwd uit vier 12 * 12 bits multipliers en twee optellers. De optellers bestaan uit funktiegenerators (ALU's) en carry look ahead generators.
- 2) een funktiegenerator ter bepaling van de som en het verschil van twee signalen.
- 3) registers om de processen overlappend uit te voeren.

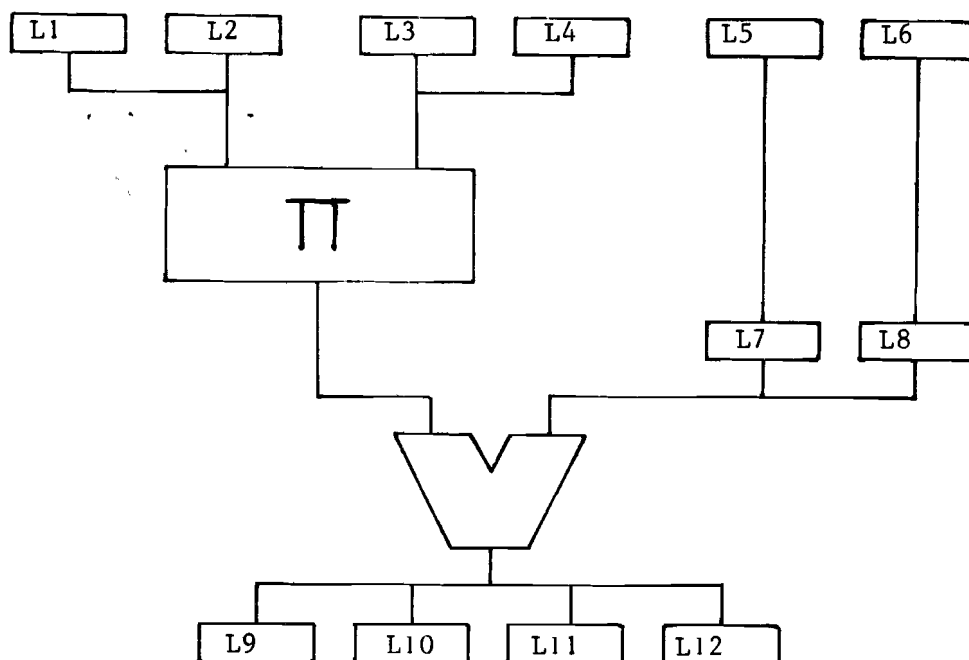


fig. 2.2.10. :

rekeeneenheid :

vermenigvuldiger zie fig. 2.2.11.

funktiegenerator 6 ALU's 74 S 181

2 carry look ahead generator 74 182

register 1 t/m 12 : 3 acht bit latch 74 S 373

---xxx---

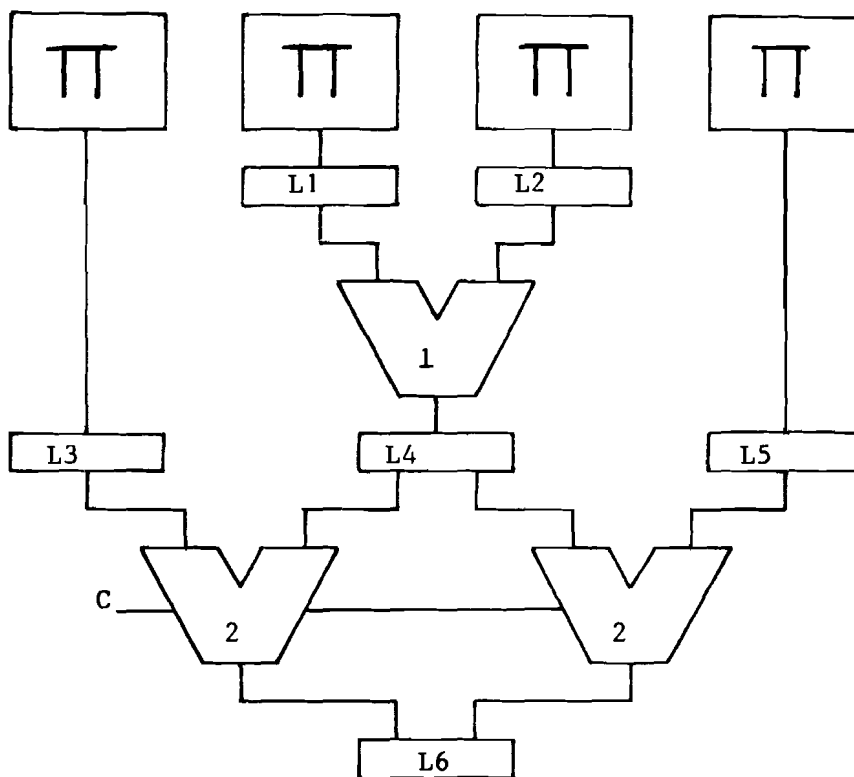


fig. 2.2.11. :

vermenigvuldiger zie lit. 2.12., bestaande uit:

- 4 multipliers

- opteller 1 6 ALU's 74 S 181
 2 carry look ahead generators 74 182

- opteller 2 9 ALU's 74 S 181
 3 carry look ahead generators 74 182

- register 1 3 8 bit latch 74 373
 ,, 2 3 ,, ,,
 ,, 3 3 ,, ,,
 ,, 4 3 { gekombineerd
 ,, 5 2 {
 ,, 6 3 ,, ,, ,,

---xxx---

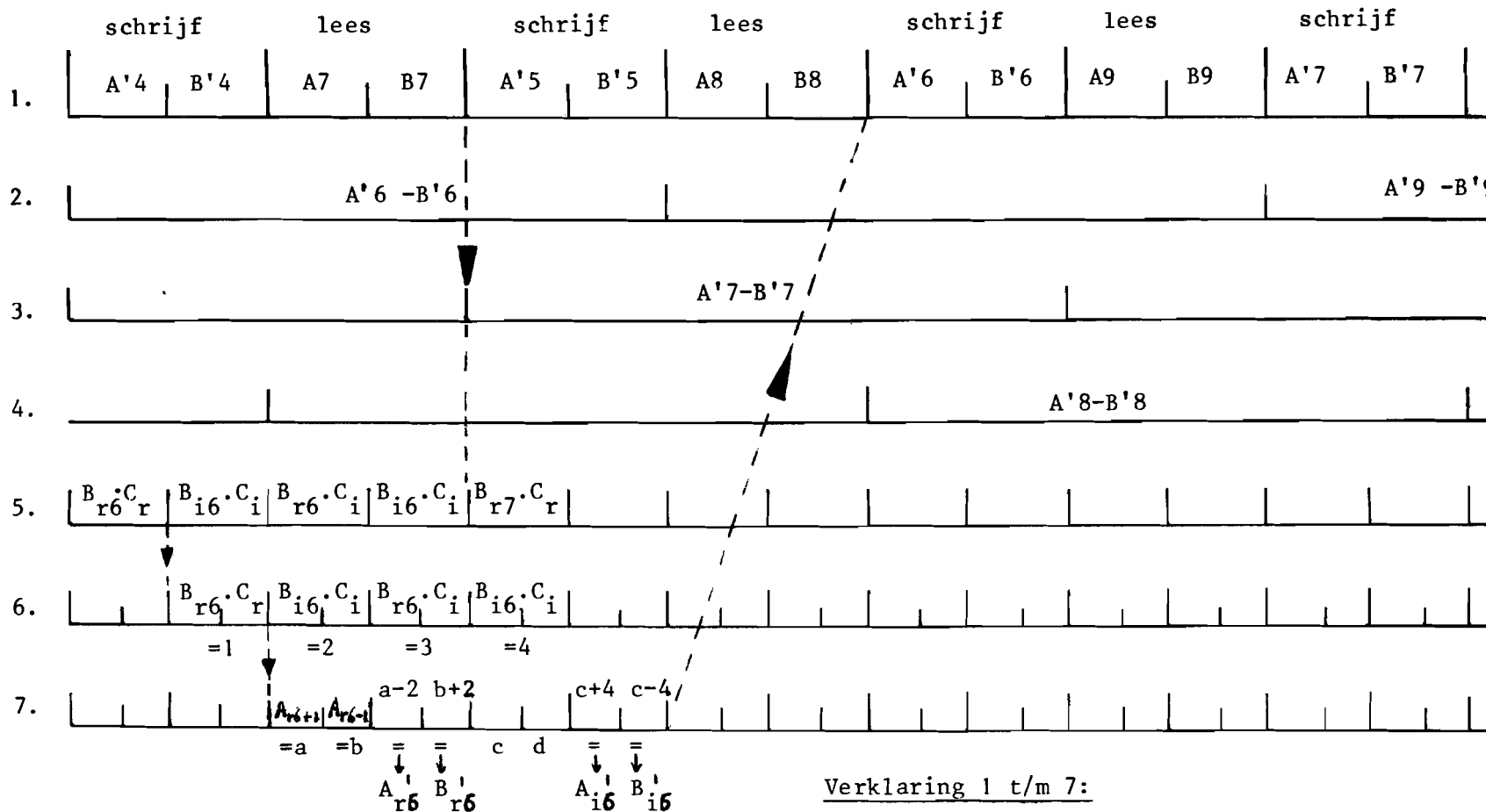


fig. 2.2.12. :
 tijdsdiagram van een transformatie
 ---xxx---

Verklaring 1 t/m 7:

- 1::lees en schrijf datageheugen
- 2: } butterfly bewerkingen
- 3: }
- 4: }
- 5: vermenigvuldiger
- 6: sominator in vermenigvuldiger
- 7: funktiegenerator (som en verschil)

Adresgenerator.

De adressen van het datageheugen en het "twiggle factor" geheugen zijn bij uitvoering van de transformatie afhankelijk van het stage nummer en het volgnummer in de stage.

Zie fig. 2.2.13. en tabel 2.2.4.

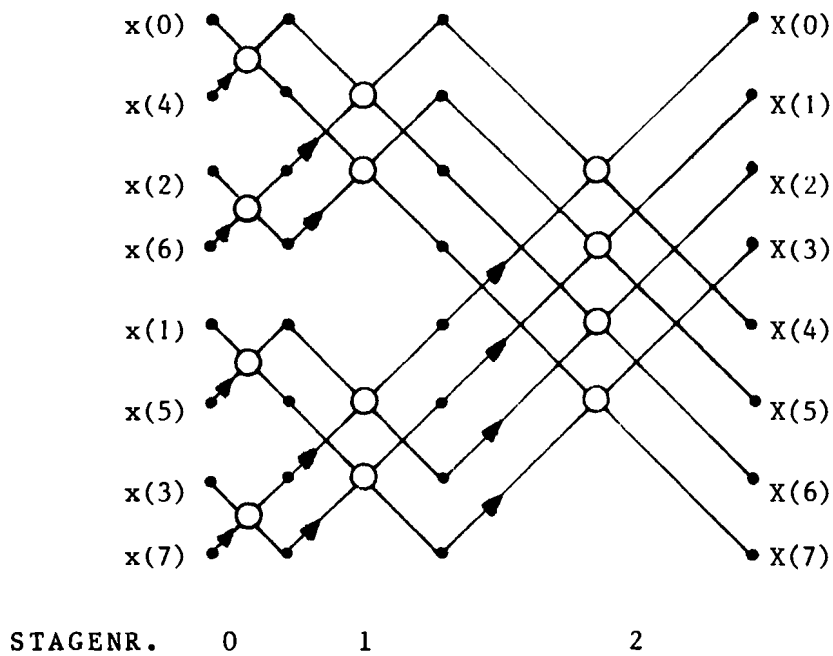


fig. 2.2.13. :

8 bits transformatie

---xxx---

<u>data geheugen</u>				<u>"twiggle factor" geheugen</u>			
stage	0	1	2		0	1	2
volgnummer							
1	0	0	0				
2	1	2	4		0	0	0
3	2	1	1				
4	3	3	5		0	2	1
5	4	4	2				
6	5	6	6		0	0	2
7	6	5	3				
8	7	7	7		0	2	3

tabel 2.2.4. :

adressen van de geheugens

Stel: het stagenummer i $0 \leq i \leq \sqrt{N}-1$ $\sqrt{N} = 2^{\log N}$
 $N =$ aantal te transformeren punten

het volgnummer j $1 \leq j \leq N$

data geheugenadres AD_{ij}

twiggle factor geheugenadres TD_{ij}

A afgeleide factor: $A = 1$ indien $j = 2^{i+1}$, anders $A = 0$

Dan geldt:

$$1) \quad AD_{i1} = 0$$

$$2) \quad AD_{i_{n+1}} = AD_{in} + 2^j \quad \text{als } n = \text{oneven} \wedge A = 0$$

$$3) \quad AD_{i_{n+1}} = AD_{in} - (2^j - 1) \quad \text{als } n = \text{even} \wedge A = 0$$

$$4) \quad AD_{i_{n+1}} = AD_{in} + 1 \quad \text{als } A = 1$$

$$5) \quad TD_{ij} = 0 \quad \text{als } A = 1$$

$$6) \quad TD_{i2} = 0$$

$$7) \quad TD_{i_{n+2}} = TD_{in} + 2^{j-j}$$

In lit. 2.11. wordt een adresgenerator vermeld voor een radix 2, in place, in frequency transformatie, uitgevoerd zonder vermenigvuldigers. In fig. 2.2.14. wordt een hierop aangepaste generator gegeven.

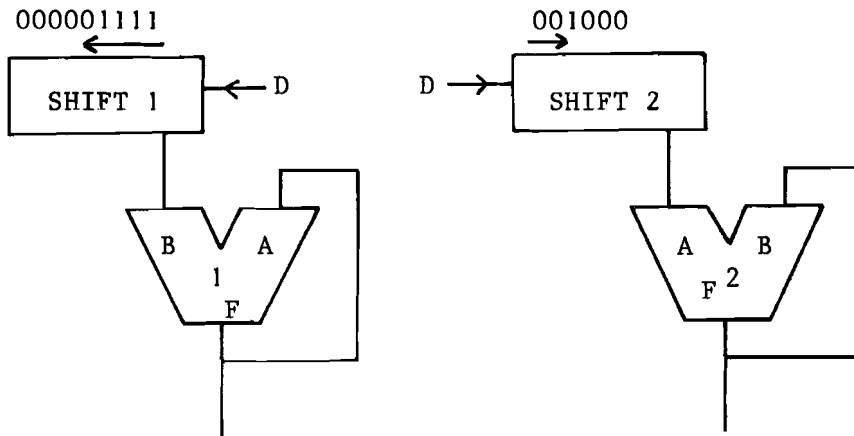
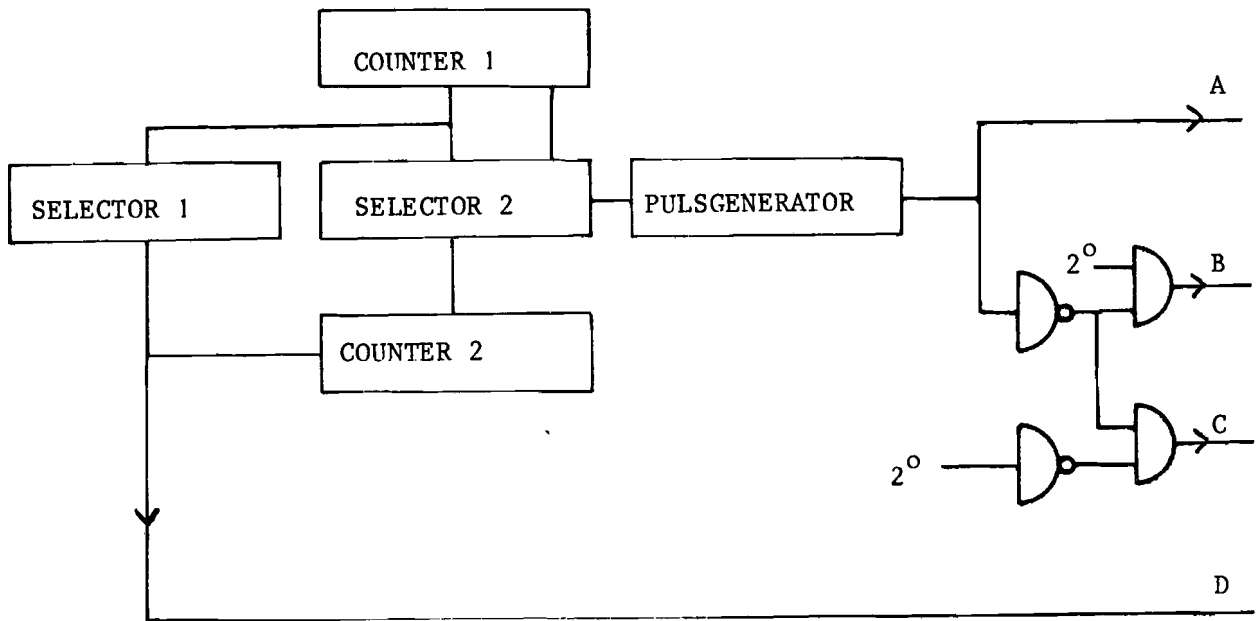


fig. 2.2.14.
adresgenerator

---xxx---

Beschrijving van de adresgenerator.

Counter 1 telt het aantal clockimpulsen, wanneer het aantal N bereikt wordt, ontstaat impuls D.

Met counter 2 wordt het nummer van de stage bijgehouden.

De A impuls ontstaat bij een waarde van counter 1, welke afhan-

kelijk is van het nummer van de stage; deze waarde wordt bepaald met selector 2.

Met bewerkingseenheid 1 en 2 wordt het adres van resp. data en twiggle factor geheugen berekend. Dit gebeurt met de volgende funkties:

indien	funktie ALU 1	funktie ALU 2
A = 1	F: = A + 1	F: = 0
B = 1	F: = A + B + 1	F: = A + B
C = 1	F: = A - B	F: = A + B
D = 1	F: = 0	F: = 0

Bij inverse transformatie kan van dezelfde adresgenerator gebruik gemaakt worden. Men dient echter het adres van het "twiggle factor" geheugen te inverteren en hierbij één op te tellen.

Zie fig. 2.2.15.



fig. 2.2.15. :

volgorde van de twiggle factors voor resp. F.F.T. en I.F.F.T.

immers "twiggle factor" F.F.T. = $e^{-i2\pi\frac{ik}{N}}$

"twiggle factor" I.F.F.T. = $e^{+i2\pi\frac{ik}{N}}$

---xxx---

Bij de besturing van de uitvoering van het vektorprodukt kan men gebruik maken van de counters.

Controle eenheid.

Ten behoeve van de controle eenheid zijn wederom twee situaties te onderscheiden:

- 1) transport. Zie paragraaf 2.2.2.1.3.
- 2) processituatie, te verdelen in twee transformatiefasen en een vektorproduktfase.

De controle eenheid heeft tot taak het synchroniseren van de uit te voeren processen van adresgenerator en rekeneenheid en het in- en uitlezen van de geheugens.

Allereerst dient een transformatie uitgevoerd te worden. Het aantal stages kan gecontroleerd worden met de adresgenerator en een counter. Na het uitvoeren van alle stages dient het vektorprodukt bepaald te worden, eveneens te controleren met behulp van de adresgenerator.

De inverse transformatie is identiek aan de transformatie, wanneer de adressen van de twiddle factors aangepast worden (zie beschrijving van de adresgenerator). Na het beëindigen van de processituatie is een transport noodzakelijk.

3. Backprojector.

3.1. Theorie.

3.1.1. Procesbeschrijving.

Het te rekonstrueren beeld $f(x,y)$ wordt opgedeeld gedacht in een beeldpuntenmatrix. Zie fig. 3.1.1.

Door de gefilterde waarden $g'(x)$ uit te smeren over deze matrix worden de lineaire verzwakkingscoëfficiënten μ_{ij} bepaald. Zie par. 1.2.2.2.

Dit gebeurt door toepassing van formule 1.3.2. :

$$f(k\Delta r, l\Delta\phi) = \Delta\theta \sum_{m=0}^{N-1} g'(k\Delta r \cdot \cos(l\Delta\phi - m\Delta\theta), m\Delta\theta)$$

M.a.w. de verzwakkingscoëfficiënt van een beeldpunt wordt gevonden door sommatie van de waarden, bepaald door die röntgenbundels, die door het gevraagde beeldpunt gaan.

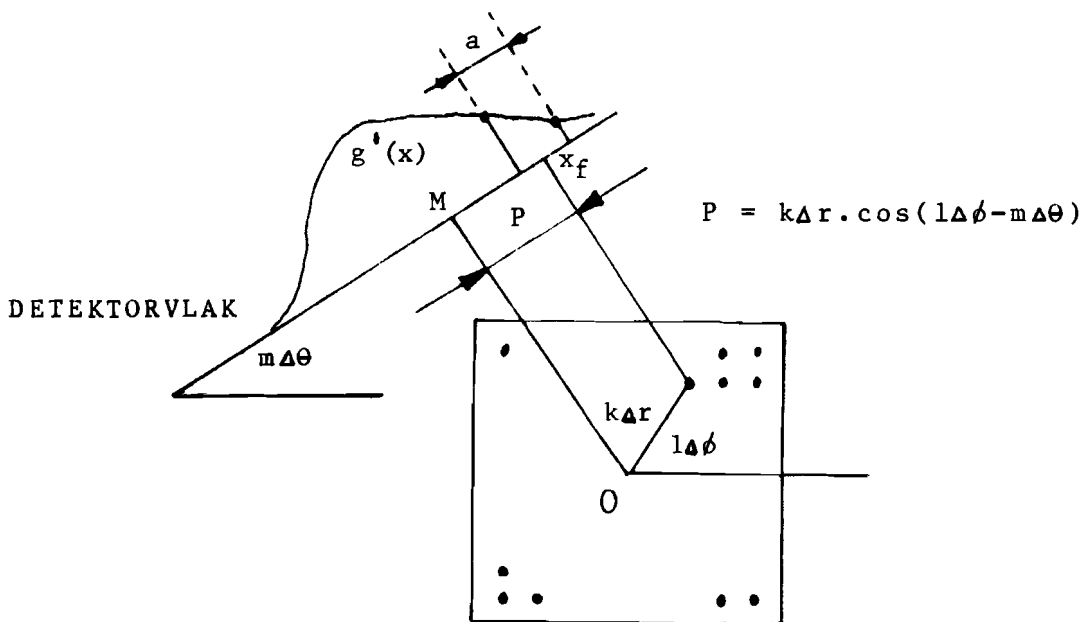


fig. 3.1.1. :

profiel $g'(x)$ wordt uitgesmeerd over het beeld.

---xxx---

De bijdrage van een profiel aan een beeldpunt wordt bepaald door het beeldpunt te projekteren op het profiel. De projectie P van een beeldpunt, gegeven door de functie $k\Delta r \cdot \cos(l\Delta\phi - m\Delta\theta)$, geeft de plaats x_f . De funktiewaarde $g'(x_f)$ kan bepaald worden door een interpolatieproces op de diskrete funktiewaarden $g'(na)$.

Een lineaire interpolatie in het interval, begrensd door de twee naastliggende meetpunten, blijkt voldoende te zijn.

Door nu per beeldpunt de bijdragen van alle profielen te sommeren wordt de verzwakkingscoëfficiënt van het betreffende beeldpunt berekend.

De projectie kan per profiel door middel van 3 konstanten voor ieder beeldpunt van de gehele beeldmatrix sequentieel bepaald worden. Zie fig. 3.1.2. Met behulp van de eerste konstante (k_1) wordt de projectie van het eerste beeldpunt t.o.v. de projectie van het middelpunt (draaipunt) van de scanner aangegeven. Een tweede konstante (k_2) geeft het verschil aan tussen de projecties van de twee opeenvolgende punten in een rij van de matrix en k_3 het verschil tussen twee opeenvolgende kolompunten. De back projection konstanten (k_1 , k_2 en k_3) zijn afhankelijk van:

- 1) het bemonsteringsinterval A_s
- 2) de beeldpunts grootte A_p
- 3) de hoek van het profiel t.o.v. het beeld (θ_i)
- 4) de ligging van het voorwerp ($x_2 y_2$) t.o.v. het draaipunt van de scanner
- 5) de beginhoek van het voorwerp (θ_o)

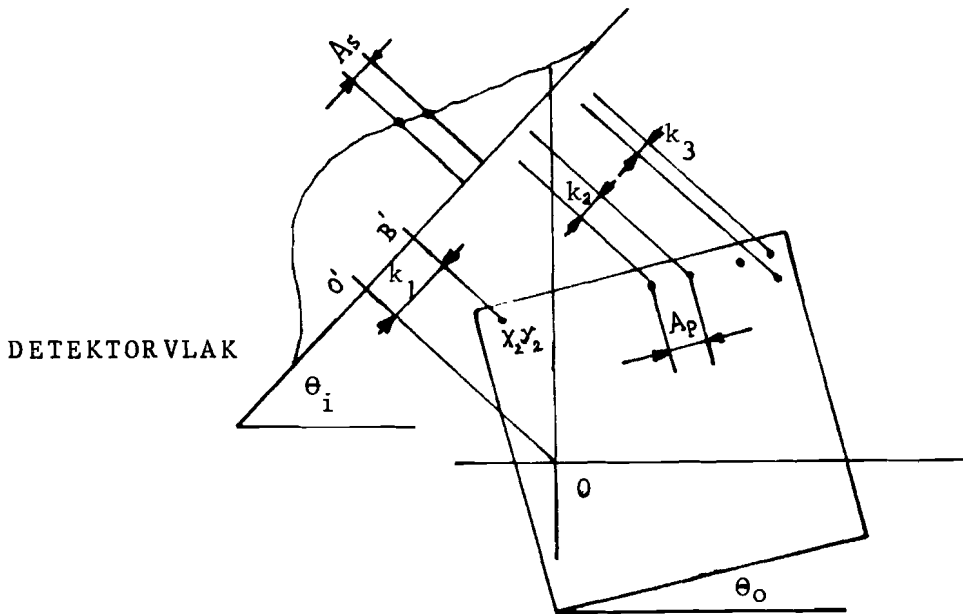


fig. 3.1.2. :

backprojector konstanten ter bepaling van de projectie van een beeldpunt op een profiel:

$$k_{1i} = O'B' = x_2 \cos(\theta_i - \theta_o) + y_2 \sin(\theta_i - \theta_o)$$

$$k_{2i} = A_p \cos(\theta_i - \theta_o)$$

$$k_{3i} = A_p \sin(\theta_i - \theta_o)$$

---xxx---

3.1.2. Berekeningen.

Het aantal berekeningen per profiel wordt bepaald door het aantal beeldpunten. Per beeld wordt het totaal aantal berekeningen gegeven door het produkt van het aantal profielen met het aantal beeldpunten.

3.1.3. Nauwkeurigheid.

Voor de nauwkeurigheid van de backprojector kan men onderscheiden de nauwkeurigheid, waarmee de projectie bepaald wordt en de nauwkeurigheid van de lineaire verzwakkingscoëfficiënten.

3.1.3.1. Ter bepaling van de projectie.

Stel: - het aantal beeldpunten $N*N$ en
 - de lineaire interpolatie met een projectie nauwkeurigheid van B bits.

Daar de plaats gegeven wordt door de som (of het verschil) van de konstanten, wordt de fout van de konstanten in een rij cumulatief voortgezet. Om een voldoende nauwkeurige projectiebepaling van alle beeldpunten te garanderen, dienen de waarden van de konstanten (k_i) $2^{\log N}$ maal nauwkeuriger te zijn dan de gevraagde projectienauwkeurigheid. Immers, statistische berekeningen, zoals in hoofdstuk 2, hebben hier geen zin, daar de fouten volledig gecorreleerd zijn.

3.1.3.2. Ter bepaling van de beeldwaarden.

Stel: - de gevraagde beeldwaarden worden uitgedrukt in een p bits Hounsfield-schaal
 - het aantal profielen bedraagt M
 - de meetwaarden $g'(x)$ van de gefilterde profielen worden weergegeven in 16 bits afgekapte getallen en voorgesteld in "two's complement" vorm met $|g'x(n)| \leq 1$

Wanneer uitgegaan wordt van:

- 1: in het filter genormeerde meetwaarden van de profielen; d.w.z. na uitvoering van het uitsmeereffekt van M projecties is de waarde in het beeldgeheugen equivalent met de verzwakkingscoëfficiënt (in Hounsfield-schaal)
- 2: een uniforme kansverdeling van de bijdragen per beeldpunt van de profielen

dan is:

- de maximaal te verwachten waarde van het eindresultaat van het back-projection proces (W_{\max}) statistisch te bepalen, immers de variantie van het uitgangssignaal bedraagt M maal de variantie van het ingangssignaal en het uitgangssignaal is normaal verdeeld (centrale limiet stelling)
- de maximale breedte van het tussenresultaat ($W_{T_{\max}}$) van het back-projection proces bepaald ($W_{T_{\max}} \leq W_{\max}$)
- het gevraagde eindresultaat direkt weer te geven door middel van afkappen van de waarden van het eindresultaat.

3.2. Uitvoering.

3.2.1. Eisen.

De gestelde eisen aan de backprojector kunnen als volgt worden samengevat:

1. Real time rekonstruktie, d.w.z. een rekonstruktietijd gelijk aan de scantijd.
2. Het aantal te bewerken profielen bedraagt 300 of 600.
3. De gefilterde ingangprofielen bestaan uit een variabel aantal meetpunten (256, 288 of 512).
4. Het uitgangssignaal dient uitgedrukt te worden in een 12 bits Hounsfield-schaal.
5. Het aantal beeldpunten is $256*256$, uitbreidbaar tot maximaal $512*512$.
6. Een nauwkeurigheid van de projectie bepaling van 4 bits.

3.2.2. Realisatie.

De eisen, vertaald uit paragraaf 3.2.1. en 3.1. worden weergegeven in tabel 3.2.1.

aantal beeldpunten	256 * 256	512 * 512
grootte k_1	24 bits	
„ k_2	10 bits	
„ k_3	10 bits	
„ k	28 bits	
accumulator grootte	20 bits	21 bits
ingangsheugen	512 woorden à 16 bits	
uitgangsheugen	64k wrdn à 24 bits	256k wrdn à 24 bits
tijd per deelproces	100 nanosec.	25 nanosec.

tabel 3.2.1. :

vertaalde eisen, uitgaande van een maximum aantal meetpunten per profiel (512), van een afgekapt genormeerd gefilterd ingangssignaal en van berekeningen, uitgevoerd in fixed point notatie. De grootte van het uitgangsheugen is gekozen in een veelvoud van 8 bits.

---xxx---

3.2.2.1. Data blokschema.

In fig. 3.2.1. en bijlage 3.1. is het data blokschema aangegeven van de backprojector. In geheugen 1 worden de genormeerde gefilterde meetwaarden opgeslagen en in geheugen 2 de konstanten k_1 . Deze konstanten worden toegevoerd aan een bewerkingseenheid (ALU) ter bepaling van de projectie. Geheugen 2 en de bewerkingseenheid vormen samen de adresgenerator. De gehele waarde van het resultaat geeft het adres van het op de projectie volgend meetpunt; de restwaarde bepaalt het interpolatiedeelinterval. De meetwaarde, aangegeven door middel van het adres, wordt uit het geheugen gelezen en samen met het interpolatiedeelinterval toegevoerd aan de inter-

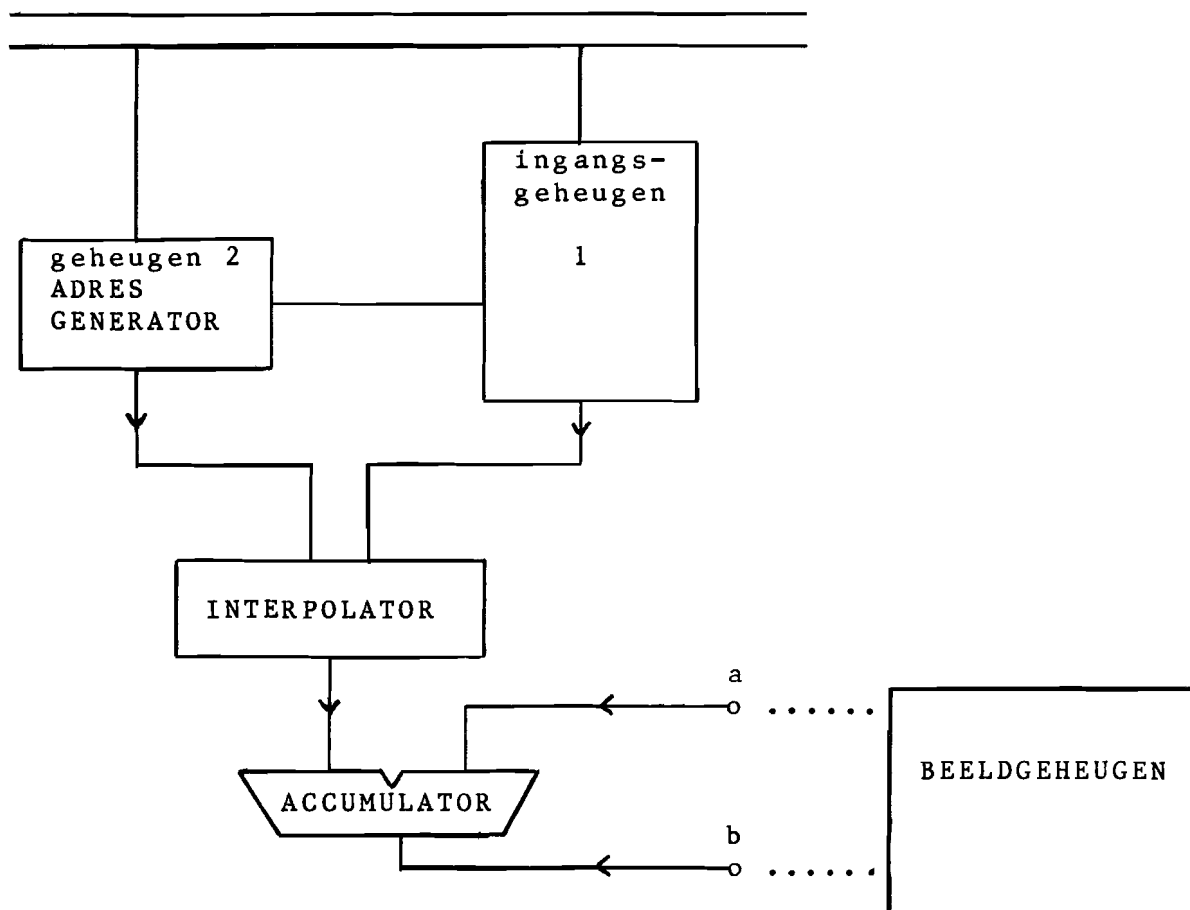


fig. 3.2.1. :

data blokschema van de back projector, bestaande uit 5 modules:

- geheugen 1 = ingangsg geheugen
- adres generator
- interpolator
- accumulator
- uitgangsg geheugen = beeldgeheugen

---xxx---

polator. In de interpolator, bestaande uit een bewerkingseenheid, een vermenigvuldiger en een opteller, wordt de bijdrage voor het te bepalen beeldpunt berekend. Wanneer uitgegaan wordt van een minimale beeldpuntsafstand kleiner of gelijk aan het bemonsteringsinterval van de profielen (zie fig. 3.2.2.) zullen twee opeenvolgende projecties maximaal één interval verschillen. Dit betekent, dat door de laatste gemeten meetwaarde tijdelijk op te slaan in een

register, de interpolatie uitgevoerd kan worden door slechts één meetwaarde te lezen. Indien de beeldpuntsafstand groter is dan het bemonsteringsinterval, kan het voorkomen, dat twee waarden gelezen moeten worden; echter de rekonstruktie is te grof, immers het bemonsteringsinterval bepaalt de spatiale resolutie van het te rekonstrueren beeld.

Na interpolatie wordt de bijdrage gesommeerd bij de reeds in het beeldgeheugen aanwezige waarde.

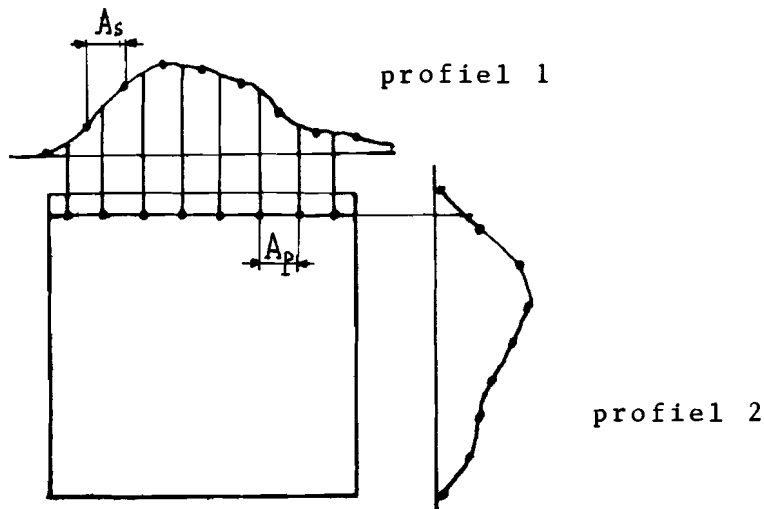


fig. 3.2.2. :

het bemonsteringsinterval (A_s) is gelijk aan de beeldpuntsafstand (A_p). De extreme projecties van twee opeenvolgende beeldpunten komen:

- in profiel 1 in één opeenvolgend interval
- in profiel 2 in hetzelfde interval

---xxx---

Wanneer het gehele proces overlappend wordt uitgevoerd, kan met behulp van de huidige bipolaire TTL componenten juist voldaan worden aan de gevraagde procestijd van 100 nanosec. Real time rekonstruktie is dus mogelijk, wanneer het beeld uit 256×256 beeldpunten bestaat. Wanneer de beeldgrootte uitgebreid wordt, kan, door het parallel uitvoeren van backprojectors, voldaan worden aan de gestelde tijdseisen.

Men kan hiervoor het beeldgeheugen opdelen in afzonderlijk te adresseren deelgeheugen. Door ieder deelgeheugen van een eigen

backprojector te voorzien, kan men de beeldpunten parallel verwerken. Zie fig. 3.2.3.

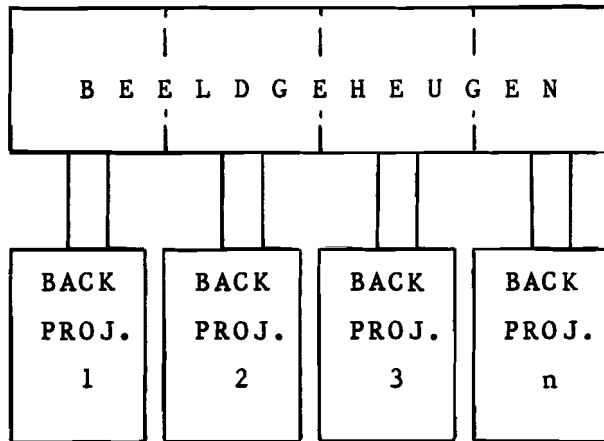


fig. 3.2.3. :

n backprojectors verwerken n beeldpunten parallel: het beeldgeheugen is verdeeld in afzonderlijk te adresseren deelgeheugens.

---xxx---

Doordat het proces sequentieel is, kan een tweede methode gekozen worden om de profielen parallel te verwerken zonder het beeldgeheugen op te delen. De momentane waarde van een beeldpunt wordt uit het beeldgeheugen gelezen en geplaatst in backprojector 1. De hierin bepaalde bijdrage wordt opgeteld bij de momentane waarde. Het resultaat wordt geplaatst in backprojector 2 en vermeerderd met de bijdrage van het profiel, dat zich in deze backprojector bevindt. Het resultaat van de laatste (n^e) backprojector wordt in het beeldgeheugen ingelezen. Zie fig. 3.2.4.

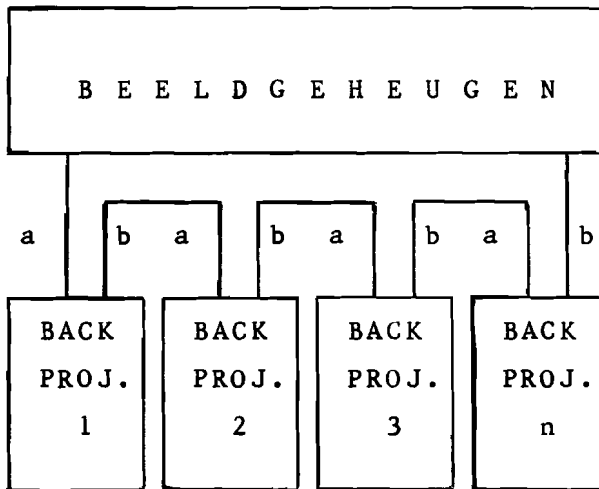


fig. 3.2.4. :

n backprojectors verwerken n profielen. De bijdragen van de verschillende profielen worden sequentieel bij de momentane bijdragen van het beeldgeheugen gesommeerd.

---xxx---

Indien gebruik gemaakt wordt van de "read-modify write" instructie, dient men er rekening mee te houden, dat de beeldpunten voor en na bewerking, verschoven in het beeldgeheugen geplaatst zijn. De verschuiving is afhankelijk van het aantal backprojectors.

3.2.2.2. Modules van het data blokschema.

De afzonderlijk te onderscheiden onderdelen van het blokschema van de backprojector zijn achtereenvolgens: ingangsgeheugen, adresgenerator, interpolator, accumulator en beeldgeheugen. Zie fig. 3.2.1. en bijlage 3.1.

Ingangsgeheugen.

In dit geheugen, bestaande uit 512 woorden à 16 bits, worden de gefilterde profielen opgeslagen. De read cycle time dient kleiner te zijn dan de deelprocestijd: 100 nanosec.

Gekozen kan worden voor bipolaire TTL random access memory. Om het aantal i.c.'s klein te houden is de door Signetics aangekondigde 82 S 208 (256 * 8 bits RAM accesstijd < 70 nanosec.) een geschikte keuze. Zie fig. 3.2.5.

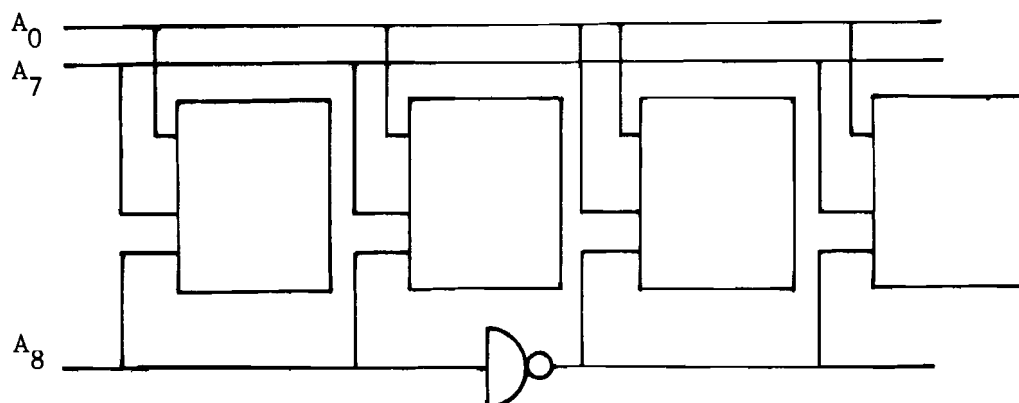


fig. 3.2.5. :

met behulp van 4 RAM's 82 S 208 kan het ingangsgeheugen gerealiseerd worden. Nadeel van het gebruik van dit i.c. is, dat er (nog) geen "second source" aanwezig is.

---xxx---

Adres generator

De adresgenerator bestaat uit geheugenelementen en een bewerkingseenheid. Zie fig. 3.2.6. In de geheugenelementen worden de back-projector konstanten k_1 , k_2 en k_3 opgeslagen. In de bewerkingseenheid worden deze konstanten verwerkt, zodanig dat het resultaat van de bewerkingen de projectie weergeeft van de beeldpunten. Door middel van three state latches kan men de konstanten eenvoudig opslaan en selekteren.

Als eerste dient k_1 in de bewerkingseenheid geplaatst te worden. De gehele waarde geeft het adres van het eerste op te halen getal uit het ingangsgeheugen. Door bij de waarde één op te tellen wordt het tweede adres verkregen. De waarden van de volgende adressen worden verkregen door bij het resultaat van de vorige

berekening k_2 op te tellen. Na $N+1$ adressen (N is het aantal beeldpunten in een rij) is een rij van de matrix afgewerkt. Nu dient k_3 bij het resultaat gesommeerd te worden ter verkrijging van het adres voor het punt in een nieuwe rij. De tweede rij wordt nu afgewerkt door de gegeven adreswaarde te verminderen met k_2 . Als bewerkingselement dient gekozen te worden voor een element, dat in "two's complement" in staat is tot: optellen, aftrekken, verhogen en verlagen met één.

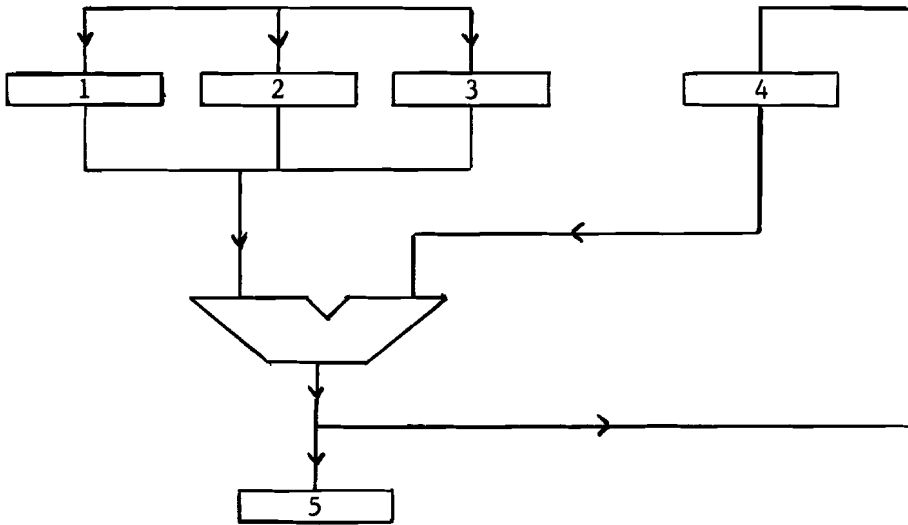


fig. 3.2.6. :

adresgenerator, opgebouwd uit registers en een bewerkingseenheden (ALU).

---xxx---

Als registers zijn te gebruiken de latch: 74 S 373 van Texas Instrument (Schottky uitvoering in verband met de snelheid). Het aantal latches bedraagt voor de vijf registers resp. 3, 2, 2, 4 en 4. Als ALU kan gekozen worden voor de 74 SN 181, uitgebreid met carry look ahead generator 74 182. Op deze wijze kan een typical tijd (t) verkregen worden, kleiner dan 65 nanosec. Om de tijd te verkorten kan uitgeweken worden naar de Schottky uitvoering 74 S 181. Zie fig. 3.2.7. ($t \leq 30$ nanosec.)

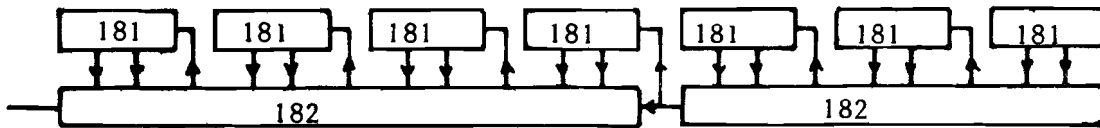


fig. 3.2.7. :

ALU, opgebouwd uit 7 * 74 SN 181 en 2 carry look ahead generators 74 182.

---xxx---

Interpolator.

Aan de interpolator worden de waarden, afkomstig uit het ingangsgeheugen, toegevoerd. Vervolgens wordt het verschil bepaald tussen twee opeenvolgende meetpunten ($A_{N+1} - A_N$). Het verschil wordt vermenigvuldigd met de restwaarde van het getal, dat bepaald is in de adresgenerator. Hiertoe dient de restwaarde opgeslagen te worden in een buffer. Het produkt wordt opgeteld bij de waarde van meetpunt (A_N). Daar er slechts één getal per interpolatieslag gelezen wordt uit het ingangsgeheugen, dient de laatste gelezen meetwaarde opgeslagen te worden en moet er een omschakeling uitgevoerd worden ter bepaling van het verschil $A_{N+1} - A_N$.

Zie fig. 3.2.8.

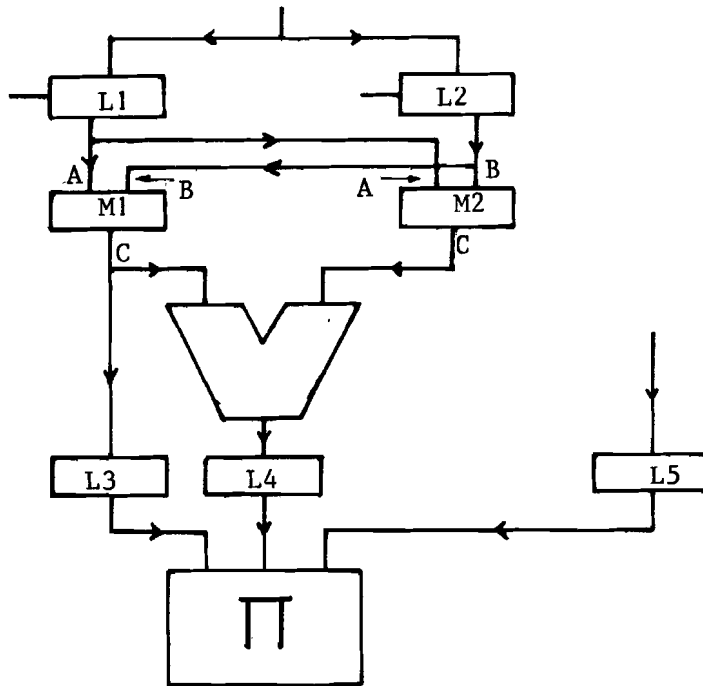


fig. 3.2.8. :

interpolator, bestaande uit registers (L), multiplexers (M), een ALU en een multiplier.

---xxx---

Als register kunnen dezelfde elementen gebruikt worden als in de adresgenerator. Per register zijn twee 8 bits latches noodzakelijk. De enable ingangen van L_1 en L_2 kunnen gebruikt worden om te selekteren, waarin de meetpuntswaarde wordt opgeslagen.

Om L_1 en L_2 te kunnen verwisselen als ingang van de ALU kan gebruik gemaakt worden van multiplexers (van 2 naar 1), b.v. Texas Instruments SN 74 S 258. Per multiplex functie dienen 4 multiplexers gebruikt te worden (immers de getallen zijn uitgedrukt in 16 bits). Evenals bij de adres generator kan met ALU 74 SN 181 en carry look ahead generators 74 182 het verschil tussen twee waarden bepaald worden. Men kan volstaan met 4 ALU's en 1 carry look ahead generator. Als buffer kan in dit geval gebruik gemaakt worden van een latch (74 S 373), daar de waarde slechts één tijdsinterval vertraagd dient te worden. Dit geldt zowel voor de restwaarde van de adresgenerator, als voor de waarde van het meetpunt (A_N).

De vermenigvuldiger (en opteller) kan opgebouwd worden uit acht $4 * 2$ bits multipliers van A.M.D., te weten 25 S 05. Voordeel hiervan is, dat tegelijkertijd het produkt bepaald kan worden én de som van het produkt met een op te geven waarde. Zie fig. 3.2.9.

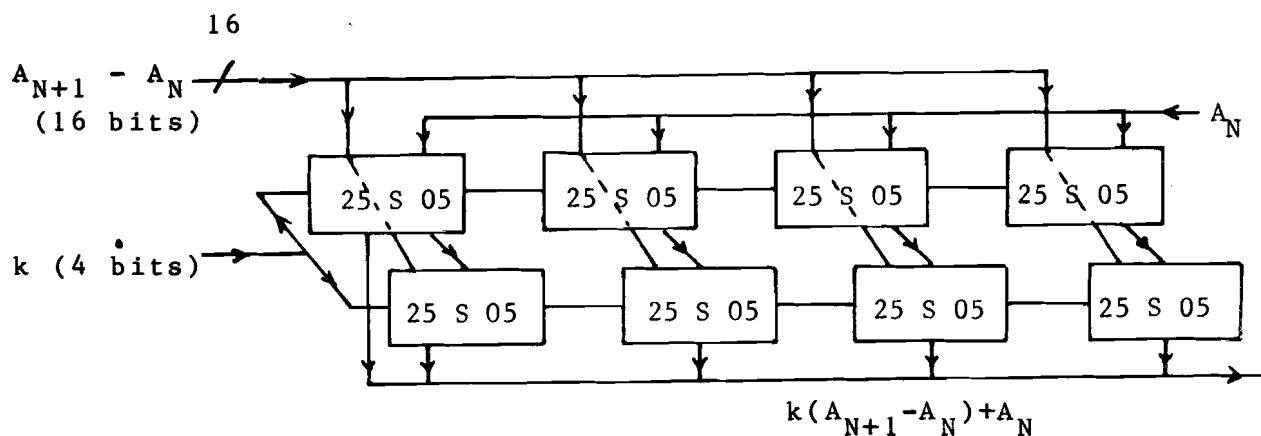


fig. 3.2.9. :

vermenigvuldiger, opgebouwd uit acht $4*2$ bits multipliers
 25 S 05 typ.tijd ≤ 87 nanosec. Als typ.tijd gehanteerd
 het maximum van de typ. propagation delay times
 (T_{PLH} en T_{PHL}).

---xxx---

Accumulator.

In de accumulator wordt de som bepaald van de in de interpolator bepaalde bijdrage en een uit het beeldgeheugen gelezen waarde. Ook hier kan gebruik gemaakt worden van ALU 74 SN 181, uitgebreid met carry look ahead generator 74 182. Zowel de ingangen als de uitgangen dienen gebufferd te worden, dit kan met behulp van latches. Zie fig. 3.2.10.

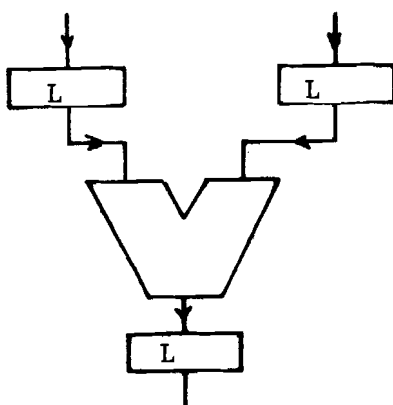


fig. 3.2.10. :

accumulator opgebouwd uit drie registers, ieder bestaande uit resp. 2, 3, 3 latches en een rekelement, opgebouwd uit 6 ALU's en 2 carry look ahead generators, typ. tijd (t) \leq 65 nanosec.

---xxx---

Beeldgeheugen.

Daar het proces van de backprojector zodanig is, dat het beeldgeheugen sequentieel ingeschreven en uitgelezen wordt, kan men het beeldgeheugen zeer snel uitvoeren met trage componenten door de componenten (deelgeheugens) overlappend in te schrijven en uit te lezen. Het minimale beeldgeheugen bestaat uit 256×256 beeldpunten $\hat{=}$ 24 bits. Een zeer gunstige geheugenopbouw kan men verkrijgen met $4 \times 4k$ geheugenelementen. Men kan voor het geheugen gebruik maken van zowel dynamische geheugens als van CCD geheugens. CCD geheugens kunnen met ongeveer dezelfde snelheid gelezen en beschreven worden als dynamische geheugens, wanneer het proces sequentieel is. Bij gebruik van dynamische geheugens kan gekozen worden voor elementen, bestaande uit $4k$ woorden $\hat{=}$ 1 bit. De elementen met $16k$ woorden $\hat{=}$ 1 bit zijn niet te gebruiken, omdat het overlappend adresseren dan niet meer mogelijk is. Fairchild levert een CCD geheugenelement met $4k$ woorden $\hat{=}$ 4 bits en een minimum "read modify write cycle time" van 600 nanosec.

Door het $64k$ geheugen op te splitsen in twee banken en iedere bank te splitsen in 8 subbanken, kan, uitgaande van een cyclustijd van

800 nanosec. een schijnbare cyclustijd van 100 nanosec. verkregen worden. Zie fig. 3.2.11. en fig. 3.2.12.

HC = HALT CONDITION \rightarrow P = HIGH
AE = DT = LOW

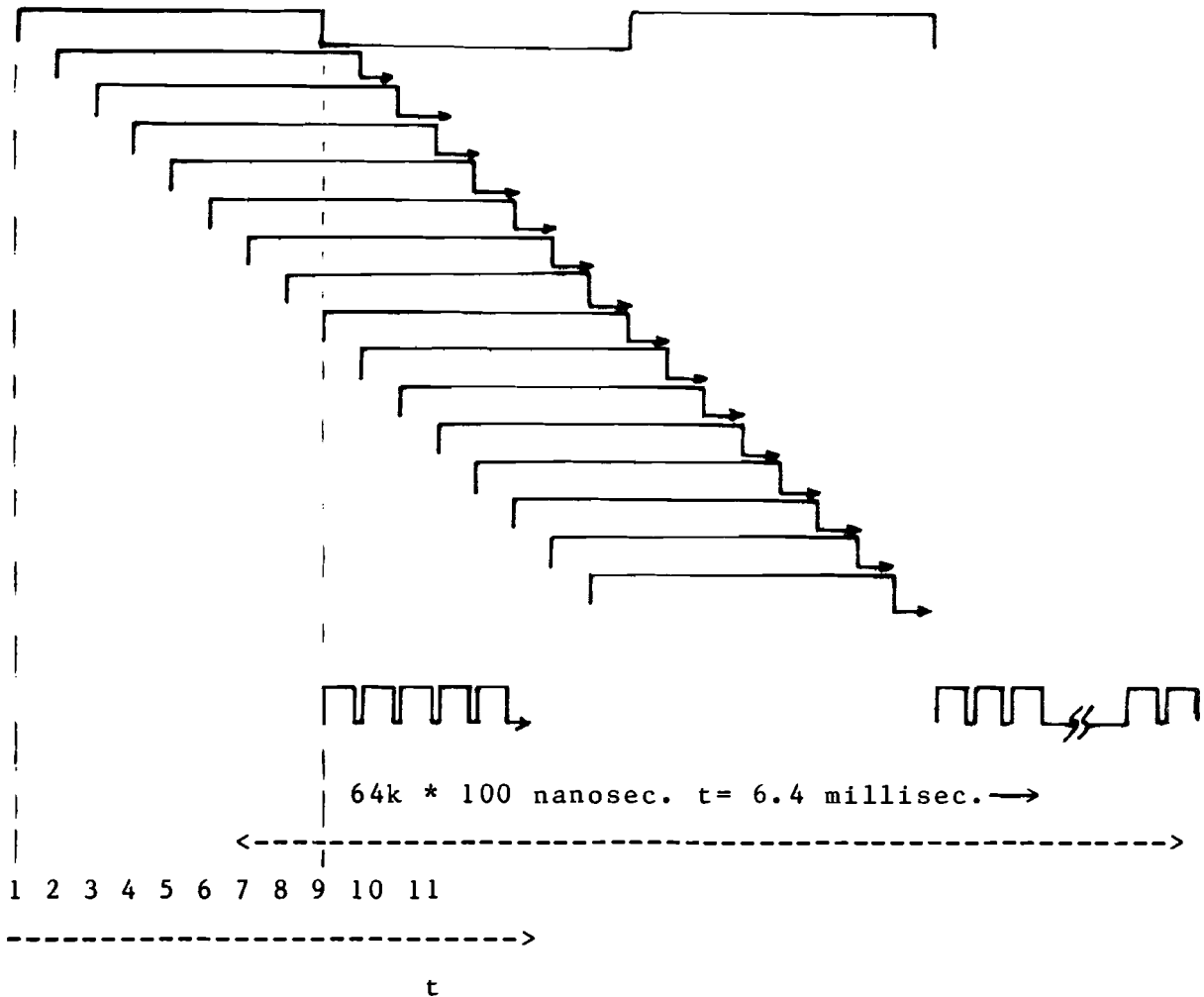


fig. 3.2.11. :

overlappend in- en uitlezen van het geheugen. Van tijdstip t_1 tot t_9 zijn geheugenelementen 8.1 en 8.2 (vgl. fig. 3.2.12.) in bedrijf en van t_9 tot t_{17} in rust (halt condition). De waarden van latch 1 worden in bedrijfstoestand in het geheugen gelezen, nadat de waarden uit het geheugen gelezen zijn in latch 2. D.m.v. multiplexers (van 8 naar 1) worden de ingangslijnen aan de latches toegevoerd.

---xxx---

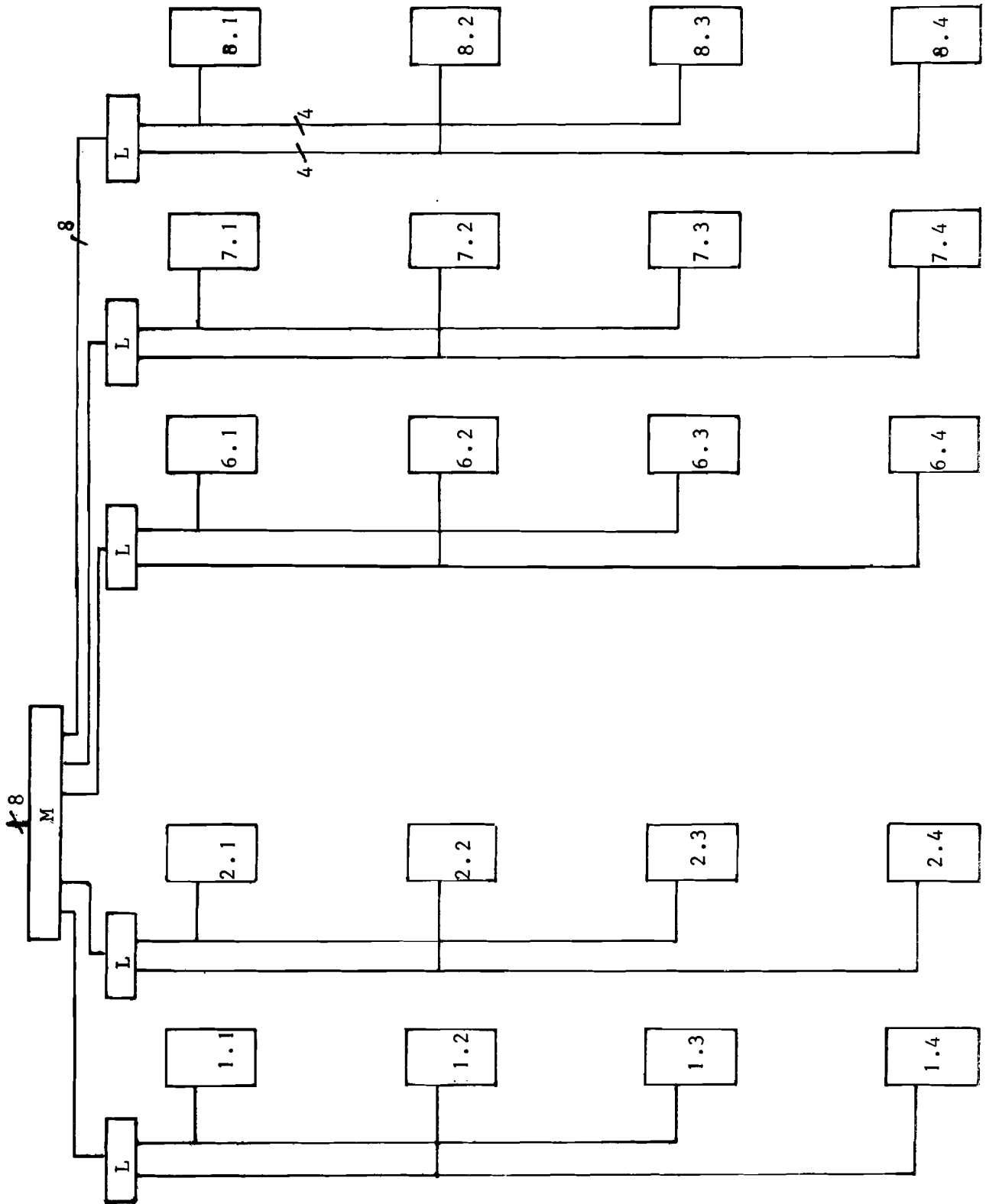


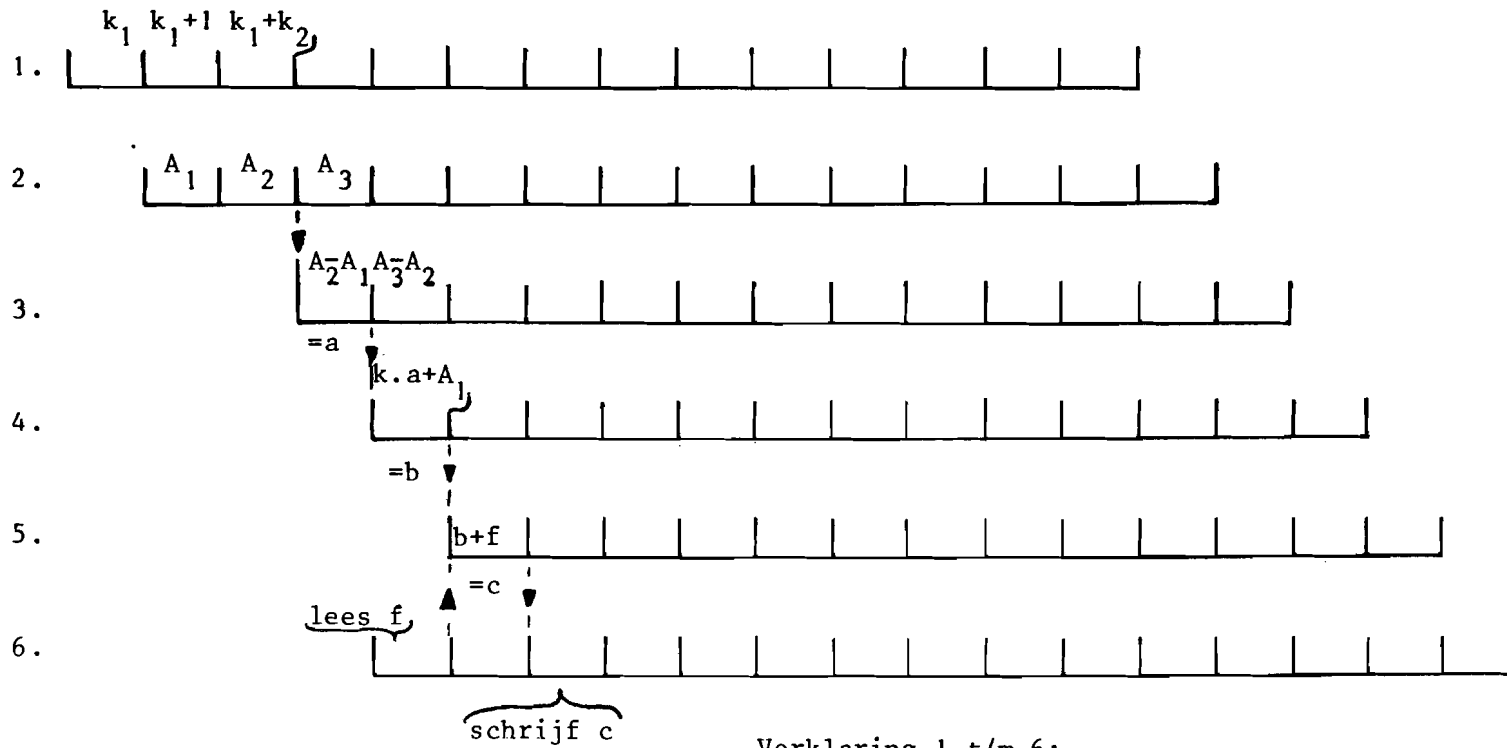
fig. 3.2.12. :

geheugen: 64k woorden van 8 bits.

---xxx---

Tijdschema van de data verwerking.

Het gehele proces van de backprojector dient overlappend uitgevoerd te worden met een cyclustijd van 100 nanosec. Zie Fig. 3.2.13.



Verklaring 1 t/m 6:

- 1: adresgenerator
- 2: lees ingangsgeheugen
- 3: interpolator: bepaal verschil $A_N - A_{N-1}$
- 4: interpolator: bepaal produkt en som $k(A_N - A_{N-1}) + A_{N-1}$
- 5: accumulator: $f + \{(k(A_N - A_{N-1}) + A_{N-1})\}$
- 6: lees en schrijf beeldgeheugen

fig. 3.2.13. :

tijdsdiagram backprojector.

---xxx---

3.2.2.3. Controle eenheid.

De backprojector wordt bestuurd vanuit de controle eenheid. Deze dient ervoor te zorgen, dat op de juiste tijdstippen de meetwaarden in de diverse buffers ingeklokt worden en dat de gevraagde functies door de bewerkingseenheden uitgevoerd worden.

In deze paragraaf wordt:

- 1: een funktionele beschrijving van de controle eenheid gegeven ten behoeve van de diverse deelprocessen
- 2: een realisatie in blokschema gegeven. De realisatie is niet tot op componentenniveau uitgevoerd.

Funktionele beschrijving.

Adresgenerator.

Bestuurd dienen te worden de ingangslatches en de bewerkingseenheid. In tabel 3.2.2. worden de functies van de bewerkingseenheid en de aangewezen latches weergegeven. (vgl. fig. 3.2.13.).

periode	latch	functie	
		$k_2 \geq 0$	$k_2 < 0$
1	k_1	F := A	F := A+1
2	k_1	F := A+1	F := A
3	k_2	F := A+B	F := A+B
N+2	k_3	F := A+B	F := A+B
N+3	k_2	F := B-A	F := B-A
2N+2	k_3	F := A+B	F := A+B
2N+3	k_2	F := A+B	F := A+B
N^2+1	k_2	F := B-A	F := B-A

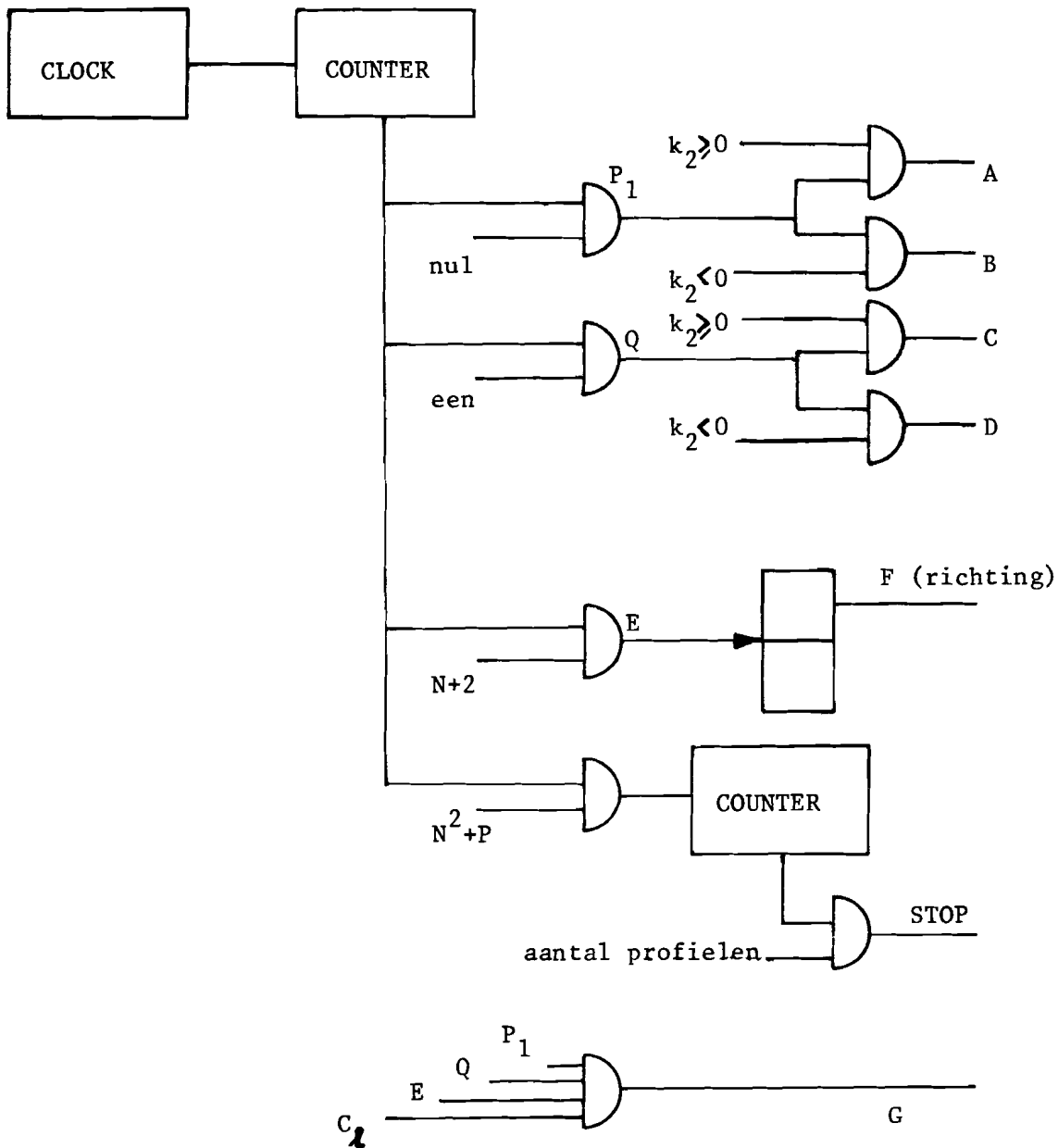
tabel 3.2.2.

Interpolator.

Bestuurd moeten worden de ingangslatches L_1 en L_2 en de multiplexers M_1 en M_2 van fig. 3.2.8. De multiplexers dienen van functie te veranderen ($C=A$ of $C=B$) wanneer het adres van het ingangsgeheugen wijzigt. De verandering van toewijzing van $\delta f L_1$ of L_2 wordt bepaald door:

- de wijziging van het adres
- het teken van k_2 en k_3
- de richting, waarin de beeldmatrix afgewerkt wordt.

De richting, waarin de projectie zich per beeldpunt verplaatst, is alternerend per rij. In een rij dient bij wijziging van het adres een toewijzingswisseling plaats te vinden. Bij een richtingsomkering van de projectie sequentie mag er echter op de eerste adreswijziging geen toewijzingswisseling volgen. Het inklokken van de diverse registers kan gebeuren met behulp van de clockgenerator ($C1$ zie blokschema); de tijdstippen volgen direkt uit het tijdsdiagram. Zie fig. 3.2.13.



N = aantal beeldpunten per rij
 P = afhankelijk van het aantal
 backprojectors

fig. 3.2.14. :

Blokschema controle eenheid.

---xxx---

	FUNKTIE ADRES GENERATOR	TOEWIJZING K_i
A = H	F := A	K_1
B = H	F := A+1	K_1
C = H	F := A+1	K_1
D = H	F := A	K_1
E = H	F := A+B	K_3
$\overline{GF} = H$	F := B-A	K_2
GF = H	F := A+B	K_2

Controle van de interpolator kan uitgevoerd worden door middel van twee "exclusive-or" funkties en een bistabiele multivibrator. Met behulp van de twee "exclusive-or" funkties wordt bepaald of er een richtingsverandering plaatsgevonden heeft. Is dit inderdaad het geval, dan zorgt de multivibrator ervoor dat bij de eerste wijziging van het adres geen wijziging op de toewijzing aan de latches plaatsvindt. Zie fig. 3.2.15.

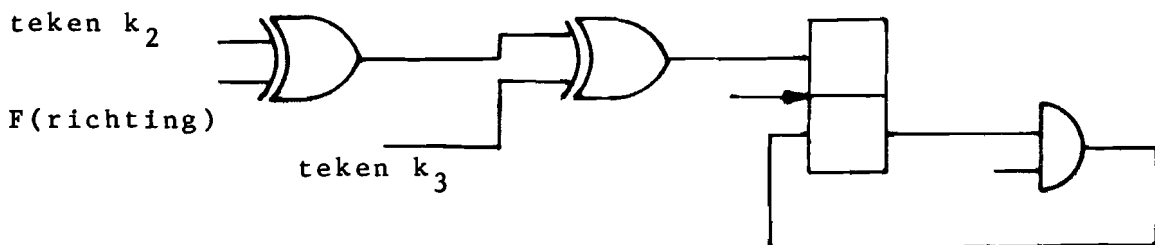


fig.3.2.15. :
controle van de interpolator.

---xxx---

4. Integratie filter backprojector.

De twee processen (filter en backprojector) kunnen gezien worden als twee afzonderlijke processen met ieder een rekeneenheid, een controle eenheid en een in- en uitgangsheugen. Door deze opbouw kunnen beide hun proces tegelijkertijd (overlappend) afwerken. Voor een gebruikelijke dataverwerkingssequentie is kommunikatie tussen het uitgangsheugen van het filter en het ingangsheugen van de backprojector noodzakelijk. Voor testdoeleinden is kommunikatie van de in- en uitgangsheugens met de host computer wenselijk. Kommunikatie met de hostcomputer kan plaatsvinden via de bus. Ook de kommunikatie tussen de processen kan verlopen via deze bus (gestuurd vanuit de host computer). Zie fig. 4.1.

Bij real time rekonstruktie zal echter de busbelasting zeer hoog worden. Een tweede mogelijkheid wordt gegeven door een één-richtingskommunikatiepad. Zie fig. 4.2.

Dit is uit te voeren met behulp van een controle eenheid, welke zorgt voor datatransport tussen de twee geheugens. Zie fig. 4.2.1. of door middel van busswitches. Zie fig. 4.2.2.

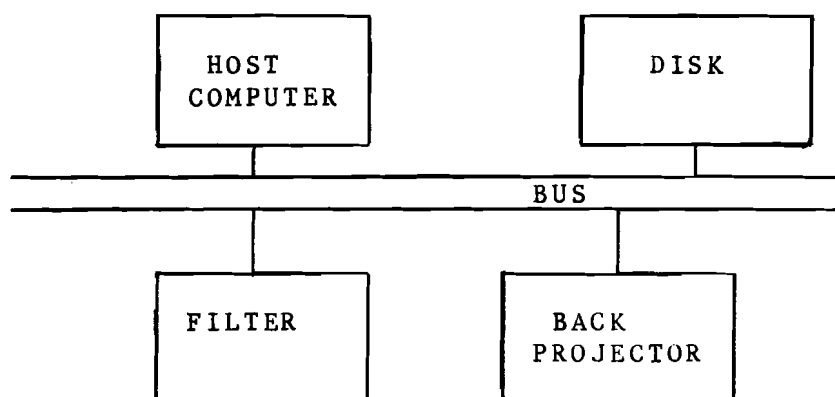


fig. 4.1. :

kommunikatie via de bus tussen host computer, filter en backprojector.

---xxx---

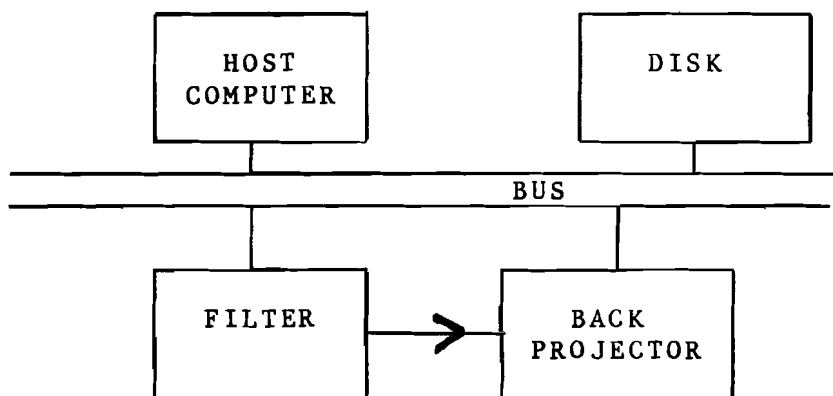


fig. 4.2. :

kommunikatie van filter en backprojector met de host computer via de bus en van filter met backprojector via een éénrichtingskommunikatiepad.

---xxx---

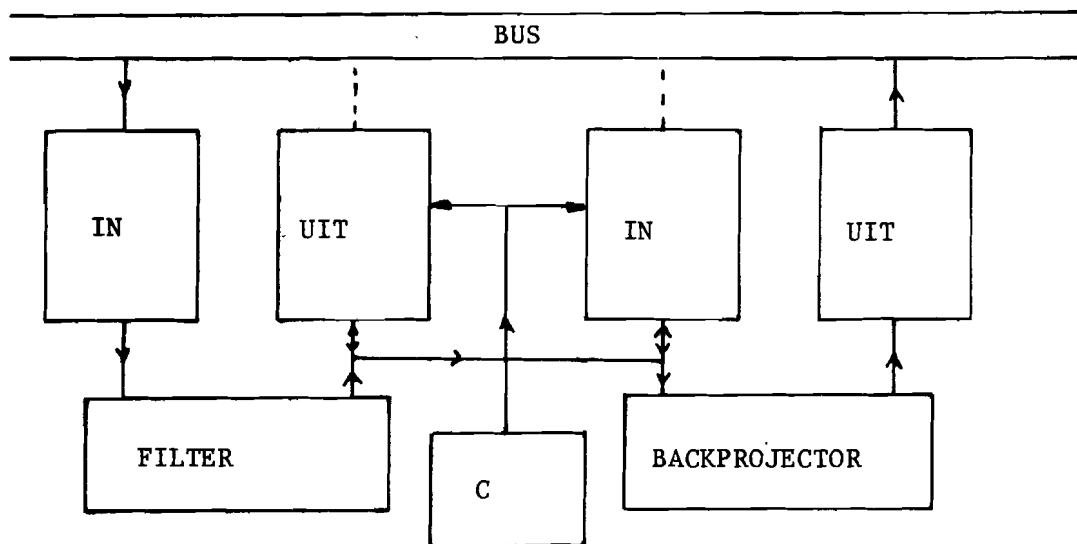


fig. 4.2.1. :

éénrichtingskommunikatiepad, gerealiseerd met behulp van een controle eenheid (C).

---xxx---

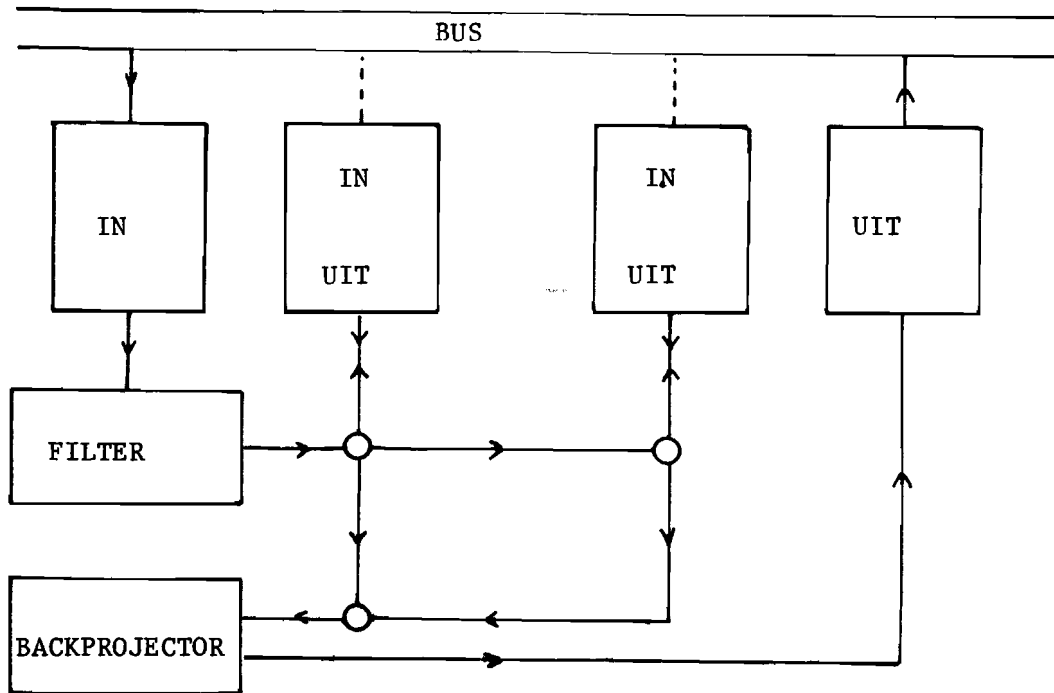


fig. 4.2.2. :

éénrichtingskommunikatiepad, gerealiseerd met behulp van busswitches.

---xxx---

Fig. 4.2.2. kan gerealiseerd worden met behulp van multiplexers en three state bus drivers (met enable ingang). Zie fig. 4.3.

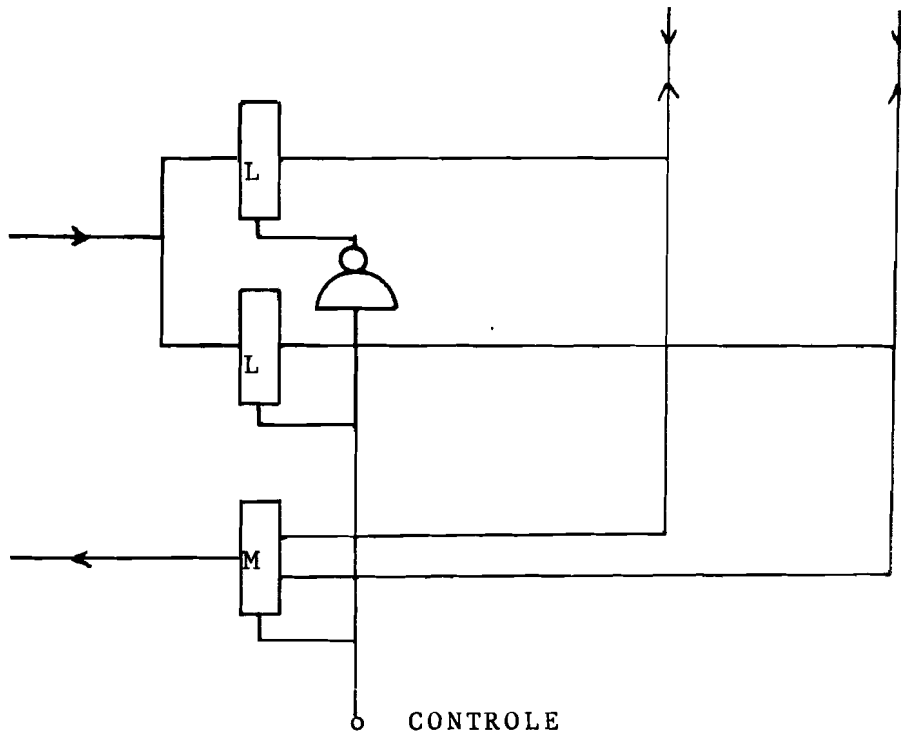


fig. 4.3. :

busswitch, gerealiseerd met twee drivers (ieder twee latches 74 S 373) en een multiplexer (bestaande uit vier i.c. 74 S 258).

---xxx---

Voordelen van het gebruik van busswitches:

- geen datatransport, dus betrouwbaarder
- geen extra controle op het transport nodig, m.a.w. de besturing is eenvoudig.
- goedkoop (vergelijk controle eenheden).
- vertragingstijd van de componenten zodanig, dat de cyclustijd niet aangepast hoeft te worden; dus sneller.

Nadeel:

wanneer de processen op verschillende borden gerealiseerd worden, dient er een zeer snel communicatiepad tussen de borden te zijn. Wanneer de data overgeheveld wordt, kan men de interpolator eenvoudiger uitvoeren door tijdens transport het verschil tussen twee opeenvolgende meetpunten te bepalen en weg te schrijven.

5. Conclusies.

1. De voornaamste eisen, die aan de processen gesteld worden, zijn:
 - de gevraagde rekonstruktietijd
 - het aantal te rekonstrueren beeldpunten
 - de gevraagde nauwkeurigheid
 - het aantal projecties
 - het aantal meetpunten per projectie.

2. Real time rekonstruktie van een beeldpuntenmatrix van 256×256 , uitgaande van 600 profielen van ieder 256 beeldpunten, is mogelijk met de aangegeven filter en backprojector structuren. Wanneer de matrix uitgebreid wordt tot 512×512 beeldpunten, uitgaande van 600 profielen van 512 meetpunten, is real time rekonstruktie mogelijk met 4 convolutiefilters en 4 backprojectors of met 2 transformatiefilters en 4 backprojectors.

3. De prijs van de componenten van een convolutiefilter, zoals aangegeven in het verslag, wordt in hoofdzaak bepaald door de prijs van de multipliers, de prijs van de componenten van een transformatiefilter door de prijs van de geheugens.

4. De componentenprijs van een transformatiefilter is vergelijkbaar met die van een convolutie filter, wanneer een real time rekonstruktie gevraagd wordt van een beeld, bestaande uit 512×512 , uitgaande van 600 profielen van 512 meetpunten. Wanneer de gevraagde "performance" kleiner is zal de prijs van het aangegeven convolutiefilter kleiner zijn dan die van een transformatiefilter (tenzij voldaan moet worden aan zeer specifieke eisen).

5. Wanneer verschillende backprojectors parallel werken is het niet noodzakelijk het beeldgeheugen op te splitsen in apart te adresseren deelgeheugens.

6. Door het verwerken van diverse profielen in parallelle filters en het opbouwen van de backprojector zonder parallel adresseerbare deelgeheugens, is een modulaire bouw van de rekonstruktor mogelijk. Men kan de rekonstruktorprijs afwegen tegen de rekonstruktietijd en bovendien kan bij eventueel optredende storingen in een module het gehele rekonstruktieproces uitgevoerd worden, echter met beperkte snelheid.
7. Voor het beeldgeheugen kan gebruik gemaakt worden van trage componenten. Men kan gebruik maken van seriële geheugenelementen (CCD). In lit. 3.1. wordt een prijsvergelijk gegeven van CCD geheugens en dynamische geheugens. De conclusie hiervan, dat CCD geheugens goedkoper zouden zijn, is thans achterhaald, waarschijnlijk door de kleine vraag naar deze componenten. Dit kan in de toekomst weer wijzigen.
8. Met behulp van een éénrichtingskommunikatiepad (eventueel uitgevoerd met busswitches) is de "filter-backprojector" vanuit de host computer te beschouwen als één device.
9. Geen rekening is gehouden met de nauwkeurigheid van synchroniseren van de diverse deelprocessen, waardoor een (misschien té) optimistisch beeld is gegeven van de procestijden.
Kritisch hiervoor zijn voor de verschillende processen:
 - filter m.b.v. transformaties : vermenigvuldiger
 - back projector : interpolator
10. Het éénrichtingskommunikatiepad is alleen uit te voeren met busswitches, indien het aantal uitgangsgeheugens van het filter gelijk is aan het aantal ingangsgeheugens van de backprojector en indien de deelprocestijden niet aangetast worden.

6. Literatuurlijst.**1.1. General Views on 3D image reconstruction and computerized transverse axial tomography.**

Z.H. Cho. IEEE NS 21,

june '74

1.2. Analog reconstruction methodes for transaxial tomography.

H.H. Barnett & W. Swindell. Proc. of IEEE 65 no. 1, Jan. '77

1.3. Image reconstruction from projections.

R. Gordon & G.T. Herman & S.A. Johnson.

Sci. American Vol. 233 pp. 56 - 71 , oct. '75

1.4. Theory of image reconstruction in computed tomography.

R.A. Brooks & G. Di Chiro.

Radiology 117 pp. 561 - 572 , dec. '75

1.5. Three dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: Application of convolutions instead of Fourier Transforms.

G.N. Ramachandran & A.V. Lakshminarayanan

Proc.Nat.Acad.Sci. USA Vol 68 no. 9 pp.2236 - 2249 sept.' 71

1.6. Reconstruction of substance from shadow.

G.N. Ramachandran

2.1. Wiskunde 30 diktaat nr. 2.258.**2.2. Theory and application of digital signal processing.**

L.R. Rabener & B. Gold

Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975

2.3. Digital Signal Processing.

A.V. Oppenheim & R.W. Schafer

Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975

- 2.4. **Digital Signal Processing.**
Stanley, Reston Publishing Company Inc., Reston V.A. 1975
- 2.5. **Statistisch Compendium dictaat nr. 2.218.**
- 2.6. **Effects of finite register length in digital filtering and the fast Fourier Transform.**
A.V. Oppenheim & C.J. Weinstein
Proc. IEEE Vol. 60 pp. 957 - 976 , aug. '72
- 2.7. **A fixed-point fast Fourier Transform error analysis.**
P. Welch, IEEE Transactions on Audio and Electro acoustics,
Vol. AU - 17 no. 2 pp. 151 - 157 , juni '69
- 2.8. **Roundoff noise in floating point fast Fourier Transform computation.**
C. Weinstein, IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics,
Vol. AU - 17 no. 3 , sept. '69
- 2.9. **Accumulation of round-off error in fast Fourier Transforms.**
T. Kaneko & B. Liu
Journal of the association for computing machinery
Vol. 17 no. 4 pp. 637 - 654 , oct. '70
- 2.10. **Schottky and low power Schottky data book.**
Advanced Micro Devices , 1977
- 2.11. **Digital Signal Processing.**
Theory, Design and Implementation
A. Peled & B. Liu; John Wiley and Sons Inc. , 1976
- 2.12. **Applications notes LSI Multipliers.** T.R.W. 9/ '77
- 3.1. **Intel memory design handbook.** pp. 1601 - 1604 , 1977

Bijlage 1.

Summary.

Graduation research of Mr. J.H.C. Wullems.

Title: Filtered Backprojector.

Scope: In Computerized Axial Tomography scanners, images are often reconstructed using the filtered backprojection method on parallel equidistant profiles.

The graduation research concerns the following aspects of a filtered backprojector.

- Design criteria to decompose the filtered backprojector into functional components, implemented in software, firmware and hardware.
- The Architecture of the filtered backprojector.

Trends towards higher resolution in profiles and reconstructed images, and reconstruction performed in "real time", should be taken into account.

Location: The research will be performed at Philips Medical System Division, department Medical Data Processing.

Period: 01-11-1977 - 01-11-1978

Coach: Ir. J.H. Stadius Muller, Medical Data Processing MSD.

Bijlage 1.1.Afleidingen van analytische rekonstruktie methoden.

uit lit. 2. en lit. 6.

De te rekonstrueren funkties $f(x,y) = f(r,\phi)$ kunnen resp. door middel van Fourier transformatie beschreven worden in het frequentie domein $F(V_x, V_y)$ en $F(V_r, \theta)$

Hiervoor geldt:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_x, V_y) e^{+2\pi i(V_x x + V_y y)} dV_x dV_y \quad (1)$$

$$f(r,\phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(V_r, \theta) e^{+2\pi i V_r r \cdot \cos(\phi - \theta)} V_r dV_r d\theta \quad (2)$$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_r, \theta) e^{+2\pi i V_r r \cdot \cos(\phi - \theta)} |V_r| dV_r d\theta \quad (3)$$

Voor de genormeerde gemeten profielwaarde $g(x) = \ln \frac{I_0}{I_1(x)}$

gemeten met röntgenbundels evenwijdig aan de y-as, geldt:

$$g(x) = \int_A^B f(x,y) dy \quad (4) \quad \text{vgl. formule (1.2.6.)}$$

Formule (1) in (4) levert:

$$g(x) = \int_A^B \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_x, V_y) e^{+2\pi i(V_x x + V_y y)} dV_x dV_y dy \quad (5)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_x, V_y) e^{2\pi i V_x x} \cdot \int_A^B e^{2\pi i V_y y} dy dV_x dV_y \quad (6)$$

Voor $\lim A \rightarrow -\infty$ en $\lim B \rightarrow +\infty$ geldt:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_x, V_y) e^{+2\pi i V_x x} \delta(V_y + 0) dV_x dV_y \quad (7)$$

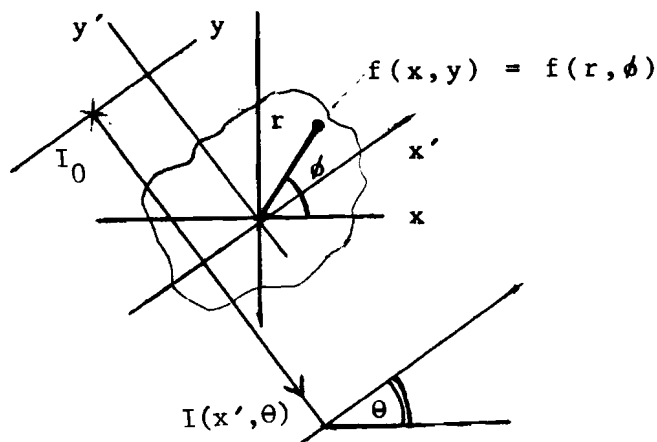
Met behulp van de veegformule:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_x, 0) e^{+2\pi i V_x x} dV_x \quad (8)$$

Op identieke wijze geldt voor een onder een diskrete hoek gemeten profiel:

$$g(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} F(V'_x, 0) e^{+2\pi i V'_x x'} dV'_x \quad (9)$$

Zie fig. 1.



röntgenbundel \rightarrow y' as
fig. 1.

---xxx---

of in poolcoördinaten:

$$g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(V_r, \theta) e^{+2\pi i V_r r} dV_r \quad (10)$$

waarin θ de diskrete hoek tussen de assen x en x' voorstelt.

Stel nu:

$$g'(l, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_r| F(V_r, \theta) e^{+2\pi i V_r l} dV_r \quad (11)$$

$$l = r \cdot \cos(\phi - \theta) \rightarrow$$

$$\rightarrow g'(r \cdot \cos(\phi - \theta), \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_r| F(V_r, \theta) e^{+2\pi i V_r r \cdot \cos(\phi - \theta)} dV_r \quad (12)$$

met formule (3) en (12) \rightarrow $f(r, \phi) = \int_0^\pi g'(r \cdot \cos(\phi - \theta), \theta) d\theta \quad (13)$

Fouriermethode.

Met behulp van de inverse funktie van formule (10) kunnen uit de gemeten profielen de diskrete funkties $F(V_r, \theta_i)$ bepaald worden. Door tweedimensionale inverse Fourieranalyse van de funktie $F(V_r, \theta)$ -bepaald uit de funkties $F(V_r, \theta_i)$ form.(3)- wordt de gevraagde funktie $f(r, \phi) = f(x, y)$ verkregen.

Zie lit. 1.6. en 1.4.

Filtered back-projection.

Het beeld kan gerekonstrueerd worden door de gemeten profielen allereerst te filteren volgens formule (11):

$$g'(1, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_r| F(V_r, \theta) e^{+2\pi i V_r 1} dV_r$$

ofwel: $g'(1, \theta) = F^{-1}\{|V_r|\} * g(1, \theta)$

en vervolgens de gefilterde profielen terug te projekteren volgens formule (13):

$$f(r, \phi) = \int_0^{\pi} g'(r \cdot \cos(\phi - \theta), \theta) d\theta$$

Back projection filter.

Een aansluitende methode op de filtered back projection is de back projection filter methode.

Het beeld wordt bepaald door allereerst de gemeten funktie terug te projekteren en vervolgens de tweedimensionale funktie tweedimensionaal te filteren.

$$f'(r, \phi) = \int_0^{\pi} g(r \cdot \cos(\phi - \theta), \theta) d\theta$$

$$f(r, \phi) = f'(r, \phi) ** F\{|V_r|, \theta\}$$

Inverse Radon transformatie.

Wanneer in plaats van het filter $H = |V_r|$ als filter $H_2 = |V_r| \cdot A = |V_r| e^{-\alpha V_r}$ gekozen wordt, kan men afleiden, dat voor $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{H_2\}$ de beeldrekonstruktie kan plaatsvinden met behulp

van de door Radon afgeleide formule (1917):

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r \cdot \cos(\phi - \theta) - r'} \cdot \frac{f(r', \phi)}{dr'} \cdot dr' d\theta$$

Zie lit. 2.

Opmerking: A kan gezien worden als een vensterfunctie.

Bijlage 2.1.

Nauwkeurigheid van het filter d.m.v. convolutie.

Doel is het bepalen van de invloed van de eindige woordlengte van

- | | | | |
|---------------------------|--------|---------------|--------------|
| 1. het ingangssignaal | $x(i)$ | \rightarrow | \sum_{x_i} |
| 2. de filtercoëfficiënten | $h(i)$ | \rightarrow | \sum_{h_i} |
| 3. het produkt | $x.h.$ | \rightarrow | \sum_p |
- op het uitgangresultaat $y(i)$:

model:

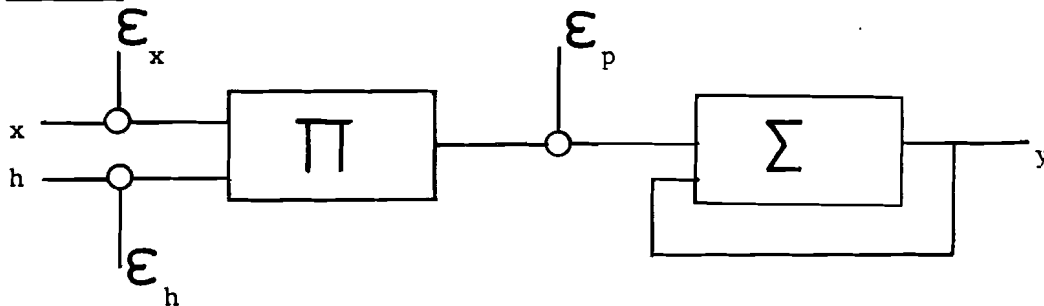


fig. 2.
---xxx---

Statistische eigenschappen.

Voor een homogene kansverdeling $P(x) = 1/D$ in het interval $|x| \leq 1/2D$ (zie fig. 3.) geldt voor het eerste moment:

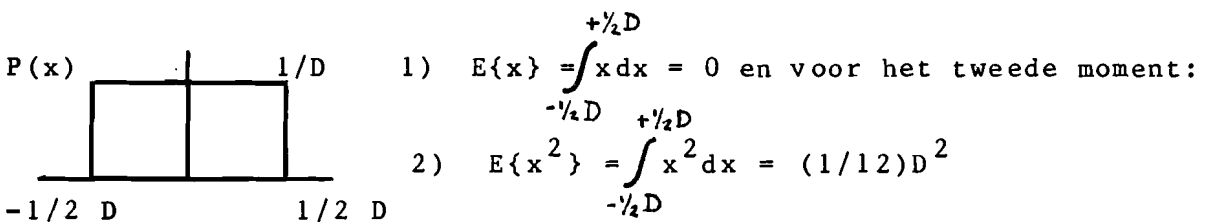


fig. 3.
---xxx---

immers voor het n^e moment geldt per definitie:

$$E\{x^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P(x) dx = \sum_{i=1}^N x_i^n P(x_i)$$

Bovendien gelden de volgende eigenschappen:

$$3) \quad E\{ax\} = a \cdot E\{x\} \quad \text{immers} \quad E\{ax\} = \int_{-\infty}^{+\infty} ax \cdot P(ax) dx$$

$$P(ax) = (1/a) \cdot P(x)$$

dus: $E\{ax\} = a \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot P(x) dx = a \cdot E\{x\}$

$$4) \quad E\{x^2 + y^2\} = E\{x^2\} + E\{y^2\} \quad \text{indien } x \text{ en } y \text{ ongecorreleerd}$$

zijn.

$$5) \quad E\left\{\sum_{i=1}^N a_i x_i\right\} = E\{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \dots\}$$

$$= E\{a_1 x_1\} + E\{a_2 x_2\} + E\{a_3 x_3\} \dots$$

$$= a_1 E\{x_1\} + a_2 E\{x_2\} + a_3 E\{x_3\} \dots$$

Indien: $E\{x_1\} = E\{x_2\} = E\{x_i\}$

dan geldt: $E\left\{\sum_{i=1}^N a_i x_i\right\} = E\{x_i\} \sum_{i=1}^N a_i$

$$6) \quad E\left\{\left(\sum_{i=1}^N a_i x_i\right)^2\right\} = E\{a_1^2 x_1^2\} + E\{a_2^2 x_2^2\} \dots \quad (\text{zie eigenschap 4})$$

$$= a_1^2 E\{x_1^2\} + a_2^2 E\{x_2^2\} \dots$$

Indien: $E\{x_1^2\} = E\{x_2^2\} = E\{x_i^2\}$

dan geldt: $E\left\{\left(\sum_{i=1}^N a_i x_i\right)^2\right\} = E\{x_i^2\} \sum_{i=1}^N a_i^2$

Resultaat:

$$1) \text{ fout t.g.v. } \mathcal{E}_x : \mathcal{E}_{y_i} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}_{x(n)} h(i-n)$$

$$E\{\mathcal{E}_{x_i}\} = 0 \quad (\text{eigenschap 1})$$

m.b.v. eigenschap 5: $E\{\mathcal{E}_{y_i}\} = 0$

m.b.v. eigenschap 6: $E\{\mathcal{E}_{y_i}^2\} = E\{\mathcal{E}_x^2\} \sum_{i=0}^{N-1} h(i-n)^2$

indien $\sum_{i=0}^{N-1} |h_n| = 1$ dan geldt: $E\{\mathcal{E}_{y_i}^2\} < E\{\mathcal{E}_x^2\}$

$$2) \text{ fout t.g.v. } \mathcal{E}_h: \mathcal{E}_{y_i} = \sum_{n=0}^{N-1} x^{(n)} \mathcal{E}_{h(n-i)}$$

$$E\{\mathcal{E}_{h(i)}\} = 0 \rightarrow E\{\mathcal{E}_{y_i}\} = 0 \quad (\text{eigenschap 5})$$

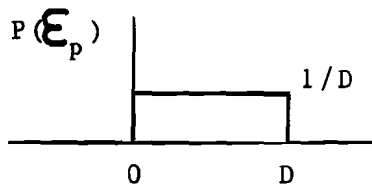
$$E\{\mathcal{E}_{y_i}^2\} = E\{\mathcal{E}_{h_i}^2\} \sum_{i=0}^{N-1} x_n \leq N \cdot E\{\mathcal{E}_{h_i}^2\}$$

$$3) \text{ fout t.g.v. } \mathcal{E}_p \quad y_i = \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{E}_p$$

$$\text{Indien } E\{\mathcal{E}_p\} = 0 \text{ dan geldt: } E\{\mathcal{E}_{y_i}\} = 0$$

$$E\{\mathcal{E}_{y_i}^2\} = N \cdot E\{\mathcal{E}_p^2\} \quad (\text{eigenschap 4})$$

Indien het produkt afgekapt is, krijgen we een verdeling als weergegeven in fig. 4.



$$P(\mathcal{E}_p) = 1/D \quad \text{voor } 0 \leq \mathcal{E}_p \leq D$$

fig. 4.

$$\text{Nu geldt: } E\{\mathcal{E}_p\} = \int_0^D x dx = (1/2)D$$

$$E\{\mathcal{E}_p^2\} = \int_0^D x^2 dx = (1/12)D^2$$

$$\text{Voor } E\left\{\sum_{i=0}^{N-1} p_n\right\} \text{ geldt: } E\left\{\sum_{i=0}^{N-1} p_n\right\} = N \cdot E\{\mathcal{E}_{p_n}\} = (1/2)N \cdot D$$

$$E\left\{\left(\sum_{i=0}^{N-1} p_n\right)^2\right\} = N \cdot E\{\mathcal{E}_{p_n}^2\} = (1/12)N \cdot D^2$$

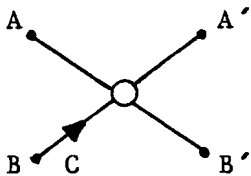
$$0 < \sum_{i=0}^{N-1} p_n \leq N \cdot D$$

$$P\left\{\sum_{i=0}^{N-1} p_n\right\} \quad \text{normaal verdeeld indien } \lim N \rightarrow \infty \\ (\text{centrale limietstelling})$$

Bijlage 2.2.Nauwkeurigheid van het filter m.b.v. transformaties."Fixed point" berekening.Normering I.

Het ingangssignaal is zodanig genormeerd, dat geldt:

$$|x(i)| < 1/N \quad (1)$$

Butterfly ruis.

Voor een butterfly berekening geldt:

$$A' = A + C \cdot B$$

$$B' = A - C \cdot B$$

$$\text{Nu geldt: } \max[|A|, |B|] \leq \max[|A'|, |B'|] \quad (2)$$

Voor de variantie van het uitgangssignaal (σ_X^2) geldt:

$$\sigma_X^2 = N \cdot \sigma_x^2 \quad (3)$$

waarin σ_x^2 = variantie van het ingangssignaal.

Beschouw een reële vermenigvuldiging, afgerond na b bits (in "two's complement" uitgedrukt). De variantie van de afrondfout σ_B^2 bedraagt:

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{12} \cdot 2^{-2b+2} \quad (4)$$

Iedere complexe vermenigvuldiging bestaat uit vier reële vermenigvuldigingen. Het aantal ruisbronnen, welke gezien worden door de uitgang, bedraagt $N-1$.

De variantie van het ruissignaal aan de uitgang σ_X^2 bedraagt:

$$\sigma_X^2 = (N-1)4\sigma_B^2 \quad (5)$$

Voor de signaal-ruisverhouding (F) geldt nu:

$$F = \frac{\sigma_{E_X}^2}{\sigma_X^2} = \frac{(N-1)4\sigma_B^2}{N\sigma_X^2} \quad (6)$$

Beschouw het ingangssignaal uniform verdeeld, m.a.w. de absolute waarde van het reële en imaginaire gedeelte is kleiner of gelijk aan $1/(\sqrt{2N})$ (zie formule 1)

$$\text{dan geldt: } \sigma_X^2 = 1/(3N^2) \quad (7)$$

$$\text{Uit (6) en (7) volgt: } F \approx 12N^2\sigma_B^2$$

Ingangsruis.

Voor de uitgang per butterfly geldt:

$$A' = A + C.B \quad ; \quad B' = A - C.B$$

$$\text{Stel: } A = A^* + \Delta A \quad B = B^* + \Delta B \quad |\Delta A| < D$$

$$\text{variantie van de ruisingangssignalen } \sigma^2 \Delta A = \sigma^2 \Delta B$$

$$\text{Nu geldt: } A' = A + C.B = A^* + \Delta A + C.B^* + C.\Delta B$$

$$B' = A - C.B = A^* + \Delta A - C.B^* - C.\Delta B$$

$$\text{dus: } \Delta A' = A' - A'^* = \Delta A + C.\Delta B$$

Voor de variantie van de ruis uitgangssignalen geldt:

$$\sigma^2 \Delta A' = \sigma^2 \Delta A + C^2 \cdot \sigma^2 \Delta B = 2\sigma^2 \Delta A$$

M.a.w. voor de variantie van het ruisuitgangssignaal van de F.F.T.

$\sigma_{E_X}^2$ geldt: $\sigma_{E_X}^2 = N \cdot \sigma^2 \Delta A$ voor de ver-

houding: $F_2 = \sigma_{E_X}^2 / \sigma_X^2$ geldt met formule (3):

$$F_2 = \frac{\sigma^2 \Delta A}{\sigma_X^2} \quad (9)$$

Normering II.

Hetingangssignaal is zodanig genormeerd, dat geldt: $|x(i)| \leq 1$
 Bij iedere butterfly vindt een extra vermenigvuldiging plaats met een faktor 1/2. Als variantie van het uitgangssignaal σ_X^2 wordt nu gevonden:

$$\sigma_X^2 = (1/N) \sigma_x^2 \quad (10)$$

Wanneer uitgegaan wordt van een uniforme kansverdeling van het ingangssignaal, geldt: $\sigma_x^2 = 1/3$ ofwel:

$$\sigma_X^2 = 1/(3N) \quad (11)$$

Butterflyruis:

deze wordt bepaald door de variantie van de vermenigvuldigingsfout σ_B^2 en de variantie t.g.v. de fout door vermenigvuldiging met 1/2 (σ_π^2)

De totale variantie σ_T^2 wordt gegeven door $\sigma_T^2 = 4\sigma_B^2 + \sigma_\pi^2$

$$\sigma_T^2 = (5/6) \cdot 2^{-2b+2} \quad (12)$$

De ruisbron op stage m wordt bij \sqrt{V} stages ($V = 2^{\log N}$) versterkt met een faktor $(1/2)^{\sqrt{V}-m-1}$.

Het aantal ruisbronnen, wat aan de uitgang gezien wordt, bedraagt: $2^{\sqrt{V}-m}$.

De totale ruisbijdrage aan de uitgang is nu:

$$\sigma_{E_X}^2 = \sigma_T^2 \sum_{m=0}^{V-1} 2^{V-m} (1/2)^{2V-2m-2} \approx 4\sigma_T^2 = (10/3)2^{-2b+2}$$

Voor de signaal-ruisverhouding geldt:

$$F_3 = \frac{\sigma_{E_X}^2}{\sigma_X^2} = \frac{4\sigma_T^2}{\frac{1}{N}\sigma_x^2} = \frac{4 \cdot (10/3)N \cdot 2^{-2b+2}}{\sigma_x^2}$$

Indien $\sigma_x^2 = 1/3$ geldt dus: $F_3 = 10N \cdot 2^{-2b+2}$

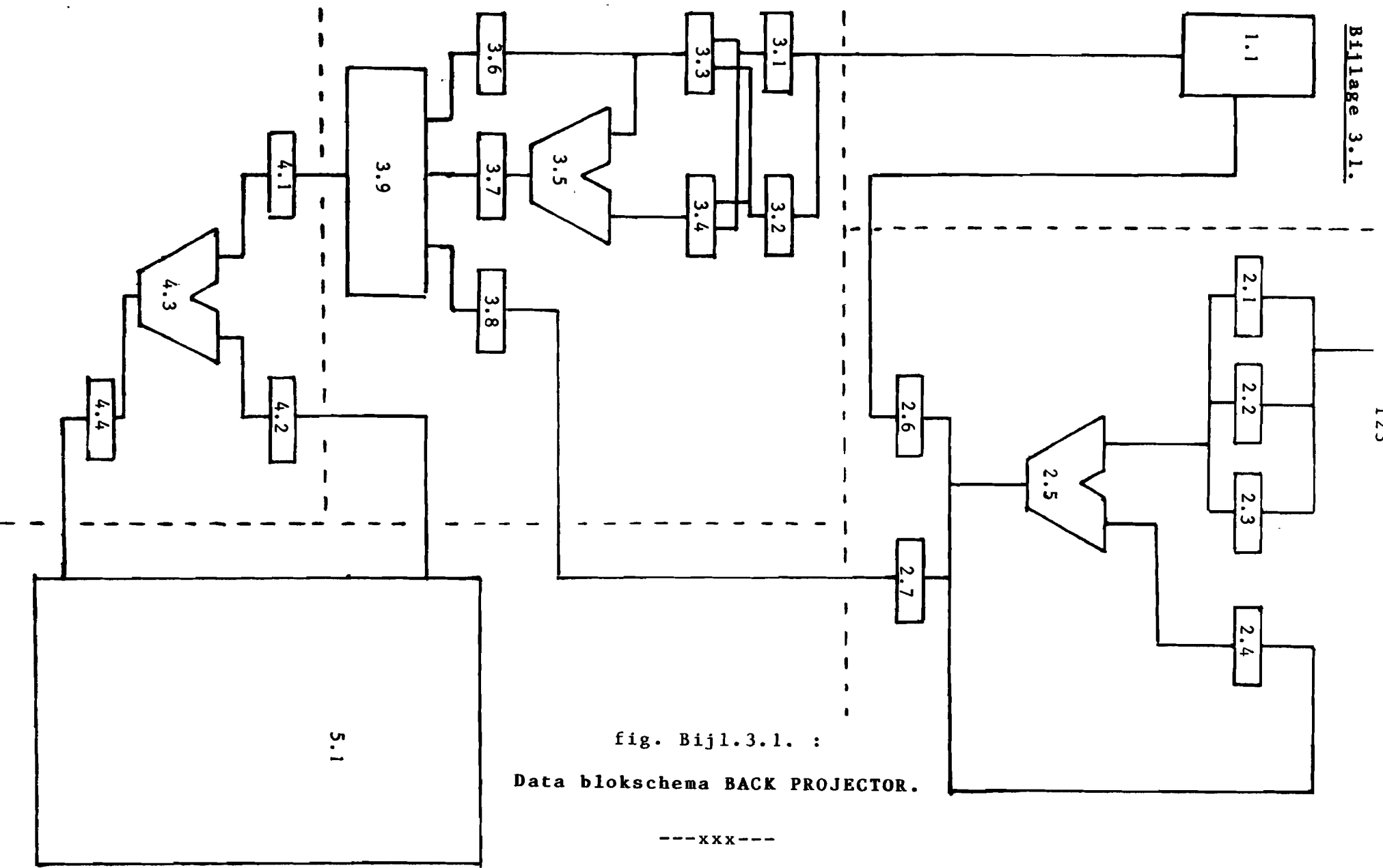


fig. Bijl.3.1. :
Data blokschema BACK PROJECTOR.

---xxx---