MASTER

Toepassingen van niet-orthogonale projectieoperatoren in de quantummechanica

Abu-Zeid, O.

Award date:
1990

Verslag van afstudeerwerk verricht in de vakgroep Theoretische Natuurkunde in de periode april 1985 - juli 1986

Toepassingen van niet-orthogonale projectieoperatoren in de quantummechanica.

Omar Abu-Zeid juli 1986

Begeleider : Dr. W.M. de Muynck
Afstudeerhoogleraar : Prof. Dr. F.W. Sluijter

Met dank aan Willem de Muynck voor een prettige samenwerking, aan Willem Wardenaar voor zijn hulpvaardigheid en het gebruik van zijn tekstverwerker,aan mijn overige huisgenoten die mij in de laatste weken met eenvoudige doch voedzame maaltijden op de been hebben weten te houden en tenslotte aan alle anderen die mij tot steun zijn geweest in de afgelopen tijd.

ERRATA

p.12	r.5 v.o	positieve $\rightarrow$ niet-negatieve
p.13	r.9	idem
	r.10	$\forall_m \rightarrow \forall_\psi$
p.16	r.2	dan, dan $\rightarrow$, dan
p.17	r.13	niet niet $\rightarrow$ niet-
p.20	(2.2.16)	$\lim\limits_{t\to\infty} \rightarrow \lim\limits_{\tau\to\infty}$
p.21	(2.2.21)	in 2^{o}lid $-i\int_0^t \rightarrow -i \operatorname{Loc} \int_0^t$
p. 23	(2.3.1)	Als $\rightarrow$ als
p.29	r. 1 v.o.	$\mathbb{P}_a$ heeft een aantal kenmerken van een mimorfisme. We hebben echter niet kunnen bewijzen dat het er één is.
p.30	r. 9	Als nu ... $\rightarrow$ Om te kunnen bewijzen dat $\mathbb{P}A$ een positieve operator is als A dit is, moeten we aantonen dat voor willekeurige ψ geldt: $\langle\psi\vert\mathbb{P}A\vert\psi\rangle \geq 0$ als $A \geq 0$.
	r.13	$\mathbb{P}_a$ is dus inderdaad een mimorfisme $\rightarrow$ vervalt
p.32	r.5	(2.3.32) $\rightarrow$ (2.4.24)
p.35	r.13	$\mathbb{P}_o(1+DC)\frac{1}{N_o} + \mathbb{P}_c(1+CD)\frac{1}{N_c}$
	r.14	gekonstrueerd
p.37	r. 14	(2.4.19) $\rightarrow$ (2.4.19) volgt.
p.38	r.2	theorie toe $\rightarrow$ theorie
p.40	r.16	zijn dat $\rightarrow$ zijn dan
p.41	(2.5.20)	$\sum\limits_{mm'} P_{sm} \times P_{s'm'}$
p.47	(2.5.61)	r.1 $\mathbb{P}^{(ss')}$
		r.3 $\mathbb{P}_{\epsilon' m} \rightarrow P_{\epsilon' m}$
		$\mathbb{P}_{\epsilon' m'} \rightarrow P_{\epsilon' m'}$
p.48	r.11	hebben van $\rightarrow$ hebben gemaakt van

p.50	(2.5.73)	r.1. $(\mathbb{P}_{D} + \mathbb{D})\,\mathbb{P}^{(ss)}$
p.51	r.4	de het → die het
p.55	(3.29)	$\mathbb{P}_{c}^{\neq}$
p.81	r.1	van C
p.83	r.6	verschillende
	(2.3.16)	$\bar{C}$
p.84 → p.85		
p.85 → p.84		
p.86	r.3 v.o.	Omdat de ... →
		Als de ... →
p.92	r.12-15	$\mathbb{P}_{c}$ is ... → vervalt

Samenvatting.

We hebben twee theorieën bestudeerd. Een theorie van George, Prigogine en Rosenfeld over het langetermijn gedrag van "grote" systemen, en een theorie van de Muynck over lokale toestanden en operatoren. In beide theorieen worden niet-zelfgeadjungeerde (super-)projectieoperatoren gebruikt om fysische grootheden te definiëren. Vooral in de theorie van G.P.R. komen veel verschillende projectoren voor. Er is een stukje algemene theorie over niet-zelfgeadjungeerde projectieoperatoren op een inproductruimte opgesteld. Hiermee kunnen de vele projectoren die bij G.P.R. een rol spelen overzichtelijk worden geklassificeerd. Dit leidt tot een beter begrip van de fysische betekenis van deze operatoren. Ook in de theorie van dM. werkt het ontwikkelde formalisme verhelderend.

G.P.R. passen hun theorie toe op de analyse van het quantummechanische meetproces. Ze maken hierbij, op een zeker punt, gebruik van orthogonale projectieoperatoren. Dit leidt tot een inconsistent formalisme. De fouten die G.P.R. maken kunnen verholpen worden door een niet-orthogonale projector $P^{\Sigma}_{>,s}$ te gebruiken. Opmerkelijk is dat deze projector formeel identiek is met een die dM. gebruikt om lokale toestanden te definieren.

Inhoud.

Inleiding.

In dit afstudeerwerk hebben we ons beziggehouden met toepassingen van (niet-zelfgeadjungeerde) projectieoperatoren in de quantummechanica.
Wanneer de quantummechanica geformuleerd wordt met behulp van dichtheidsoperatoren, gaan superoperatoren een rol spelen. Een superoperator beeldt gewone operatoren op de toestandsruimte (ook wel supervectoren genaamd) af op gewone operatoren. $e^{-iHt} \times e^{iHt}$ $(\hbar = 1)$, waarin H de hamiltoniaan is van een te bestuderen systeem, beeldt bijvoorbeeld de dichtheidsoperator van het systeem op tijdstip 0 af op de dichtheidsoperator op tijdstip t : $\rho(t) = (e^{-iHt} \times e^{iHt})\rho(0) := e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt}$ en is dus een superoperator.
Een superprojectieoperator is een lineaire idempotente superoperator. Het belang van superprojectieoperatoren is dat bepaalde fysische grootheden gedefiniëerd kunnen worden als de eigensupervectoren (bij eigenwaarde 1) van zulke superoperatoren. Zo worden in hoofdstuk 3. bijvoorbeeld lokale toestanden van een quantumveld gedefiniëerd door $\mathbb{P}_c^{\perp} \rho_c = \rho_c$ waarbij $\mathbb{P}_c^{\perp}$ een aan een gebied $C \subset \mathbb{R}^3$ toegevoegde superprojectieoperator, en ρ_c de dichtheidsoperator van een in gelokaliseerde toestand is. In het algemeen zal het beeld van een willekeurige dichtheidsoperator onder een superprojectieoperator niet weer een dichtheidsoperator zijn. Mimorfismen zijn superprojectieoperatoren die wel willekeurige dichtheidsoperatoren op dichtheidsoperatoren afbeelden. Deze klasse van superoperatoren is daarom bij uitstek geschikt om fysische grootheden te definiëren.

In hoofdstuk 1. gaan we nader in op superoperatoren. Er zullen verschillende adjuncties voor superoperatoren gedefiniëerd worden en aan de hand daarvan zullen we een aantal speciale superoperatoren (b.v. fractioneerbare, (anti-)hermitische adjointsymmetrische, unitaire enz.) onder de loep nemen. Ook zullen we superprojectieoperatoren en mimorfismen definiëren.

We hebben in dit werk verder twee theorieën bekeken waarin superprojectieoperatoren een grote rol spelen.

Ten eerste wordt in hoofdstuk 2. de theorie van George, Prigogine en Rosenfeld ([1]) uiteengezet. Deze theorie handelt over het gedrag van systemen die bestaan uit zeer vele deeltjes. G.P.R. definiëren met behulp van een superprojectieoperator $\tilde{\pi}$ een begrip "macroscopisch" dat betrekking heeft op het langetermijngedrag van zo'n groot systeem. Hun theorie passen ze voorts toe bij de analyse van het quantummechanische meetproces. Het meetapparaat, dat tenslotte uit zeer veel deeltjes bestaat, beschrijven ze dan aan de hand van hun formalisme.

Vervolgens wordt in hoofdstuk 3. een gedeelte van de theorie van de Muynck ([2]) over lokale operatoren en lokale observabelen bestudeerd. Deze begrippen definiëerd dM. met behulp van superprojectieoperatoren. Een van deze is een mimorfisme.

In hoofdstuk 4. wordt een stukje algemene theorie over (niet-zelfgeadjungeerde) projectieoperatoren op een Hilbertruimte ontwikkeld.

Aan de hand hiervan worden in hoofdstuk 5. de theoriëen van G.P.R. en dM. (geometrisch) geinterpreteerd.

Terloops zullen we nog een paar interessante verbanden tussen de theorie van G.P.R. en de theorie van dM. tegenkomen.

Hoofdstuk 1. Superoperatoren.

In de gewone quantummechanica werkt men doorgaans met de Schrodingervergelijking

$$i\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle \quad , \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1 \qquad (\hbar = 1) \tag{1.1}$$

$|\psi\rangle$, de toestandsvector, is een element van de toestandsruimte $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ is een Hilbertruimte. De verwachtingswaarde van een observabele $\mathcal{A}$ corresponderend met de operator A is :

$$\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|A|\psi\rangle \tag{1.2}$$

De quantummechanica kan ook geformuleerd worden met behulp van dichtheidsoperatoren. De dichtheidsoperator ρ die het systeem beschrijft is een hermitische operator die voldoet aan :

$$i\partial_t \rho = [H,\rho] \quad , \quad \mathrm{Tr}\,\rho = 1 \qquad (\hbar = 1) \tag{1.3}$$

De verwachtingswaarde van de observabele $\mathcal{A}$ is nu :

$$\langle A\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\,\rho A \tag{1.4}$$

In het rechterlid van (1.3) staat de commutator $[H,\rho]$. Als we H vast nemen kunnen we deze commutator opvatten als een lineaire afbeelding die aan iedere operator op $\mathcal{H}$ een operator op $\mathcal{H}$ toevoegt.

<u>Definitie 1.1.</u>

> Een (lineaire) superoperator (afgekort : s-operator) $\mathbb{A}$ op $\mathcal{H}$ is een (lineaire) afbeelding van de verzameling operatoren op $\mathcal{H}$ naar de verzameling operatoren op $\mathcal{H}$.

Wij zullen in het vervolg alleen lineaire superoperatoren gebruiken.
De commutator $[H,\cdot]$ heet de Liouville-(super-)operator.

De verzameling operatoren op $\mathcal{H}$ vormt een vectorruimte. Nemen we als inproduct van twee operatoren A en B :

$$(A,B) = \mathrm{Tr}\,A^+B \tag{1.5}$$

dan wordt deze vectorruimte een inproductruimte, de zogenaamde Hilbert-Schmidt-ruimte.

Een belangrijke klasse van s-operatoren is die der fractioneerbare s-operatoren.

<u>Definitie 1.2.</u>

Een s-operator $\mathbb{A}$ heet fractioneerbaar, als er twee operatoren $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ gevonden kunnen worden zodanig dat voor alle operatoren A

$$\mathbb{A}(A) = \mathcal{M} A \mathcal{N} \tag{1.6}$$

We schrijven :

$$\mathbb{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{N} \tag{1.7}$$

Is $\{|n\rangle\}$ een orthonormale basis voor $\mathcal{H}$ en schrijven we $\mathcal{M}_{ij}$ voor $\langle i|\mathcal{M}|j\rangle$ enzovoorts, dan noteren we de "componenten" van $\mathbb{A}$ als volgt :

$$\mathbb{A}_{ij,kl} = \mathcal{M}_{ik} \times \mathcal{N}_{lj} \tag{1.8}$$

dat wil zeggen :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(A)_{ij} &= (\mathcal{M} A \mathcal{N})_{ij} = \sum_{kl} \mathcal{M}_{ik} A_{kl} \mathcal{N}_{lj} = \sum_{kl} (\mathcal{M}_{ik} \times \mathcal{N}_{lj}) A_{kl} \\ &= \sum_{kl} \mathbb{A}_{ij,kl} A_{kl} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Som en product van twee fractioneerbare s-operatoren $\mathbb{A} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{N}_1$ en $\mathbb{B} = \mathcal{M}_2 \times \mathcal{N}_2$ zijn gedefinieerd als :

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{N}_1 + \mathcal{M}_2 \times \mathcal{N}_2 \tag{1.10}$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (\mathcal{M}_1 \times \mathcal{N}_1)(\mathcal{M}_2 \times \mathcal{N}_2) = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \times \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_1 \tag{1.11}$$

In componenten uitgeschreven wordt dit :

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})_{ij,kl} = \mathbb{A}_{ij,kl} + \mathbb{B}_{ij,kl} \tag{1.12}$$

$$(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})_{ij,kl} = \sum_{mn} \mathbb{A}_{ij,mn} \mathbb{B}_{mn,kl} \tag{1.13}$$

De al eerder ter sprake gekomen Liouville s-operator is de som van twee fractioneerbare s-operatoren :

$$\mathcal{L} = \{ H \times I - I \times H \} \tag{1.14}$$

Met behulp van het inproduct (1.5) kunnen voor s-operatoren een aantal adjuncties gedefinieerd worden.

Definitie 1.3.

De geadjungeerde van de s-operator $\mathbb{A}^{\ddagger}$ is de s-operator $\mathbb{A}$ die voldoet aan :

$$\forall_{A,B}\quad (\mathbb{A}(A), B) = (A, \mathbb{A}^{\ddagger}(B)) \tag{1.15}$$

Als $\mathbb{A}$ fractioneerbaar is, $\mathbb{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, dan geldt :

$$\mathbb{A}^{\ddagger} = \mathcal{M}^{+} \times \mathcal{N}^{+} \tag{1.16}$$

want:

$$\mathrm{Tr}\ \mathbb{A}(A)^{+} B = \mathrm{Tr}\ (\mathcal{M} A \mathcal{N})^{+} B = \mathrm{Tr}\ \mathcal{N}^{+} A^{+} \mathcal{M}^{+} B = \mathrm{Tr}\ A^{+} \mathcal{M}^{+} B \mathcal{N}^{+}$$
$$= \mathrm{Tr}\ A^{+} (\mathcal{M}^{+} \times \mathcal{N}^{+}) B^{+} = \mathrm{Tr}\ A^{+} \mathbb{A}^{\ddagger}(B)$$

Er geldt verder:

$$(\mathbb{A}^{\ddagger})^{\ddagger} = \mathbb{A} \tag{1.17}$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\ddagger} = \mathbb{B}^{\ddagger} \mathbb{A}^{\ddagger} \tag{1.18}$$

Een s-operator wordt hermitisch genoemd als hij invariant is onder adjunctie :

$$\mathbb{A}^{\ddagger} = \mathbb{A} \tag{1.19}$$

Een voorbeeld van een hermitische s-operator is de fractioneerbare s-operator $\mathbb{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ met $\mathcal{M}^{+} = \mathcal{M}$ en $\mathcal{N}^{+} = \mathcal{N}$.
Een s-operator heet anti-hermitisch als hij van teken verandert onder adjunctie:

$$\mathbb{A}^{\ddagger} = -\mathbb{A} \tag{1.20}$$

Bijvoorbeeld $\mathbb{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ met $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{+}$ en $\mathcal{N} = -\mathcal{N}^{+}$.

Definitie 1.4.

De geassocieerde $\mathbb{A}^{\sim}$ van een s-operator $\mathbb{A}$ wordt gedefinieerd door de relatie :

$$\mathbb{A}(A)^{+} = \mathbb{A}^{\sim}(A^{+}) \tag{1.21}$$

Voor de fractioneerbare s-operator $\mathbb{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ vinden we :

$$\mathbb{A}^{\sim} = \mathcal{N}^{+} \times \mathcal{M}^{+} \tag{1.22}$$

omdat :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, \mathbb{A}(A)\,\mathbb{B} &= \mathrm{Tr}\,(\mathcal{M} A \mathcal{N})\mathbb{B} = \mathrm{Tr}(\mathcal{N}^{+} A^{+} \mathcal{M}^{+})^{+}\,\mathbb{B} = \mathrm{Tr}\,((\mathcal{N}^{+} \times \mathcal{M}^{+}) A^{+})^{+}\,\mathbb{B} \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}^{\sim}(A^{+}))^{+}\,\mathbb{B} \end{aligned}$$

Voor het associeren van s-operatoren $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ geldt :

$$(\mathbb{A}^{\sim})^{\sim} = \mathbb{A} \tag{1.23}$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\sim} = \mathbb{A}^{\sim}\,\mathbb{B}^{\sim} \tag{1.24}$$

(1.23) en (1.24) bewijzen we zo :

$$(\mathbb{A}^{\sim})^{\sim}(B) = (\mathbb{A}^{\sim}(B^{+}))^{+} = (\mathbb{A}(B))^{++} = \mathbb{A}(B) \qquad \forall\, \mathbb{A}, B.$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\sim}(A^{+}) = ((\mathbb{A}\mathbb{B})(A))^{+} = (\mathbb{A}(\mathbb{B}(A)))^{+} = \mathbb{A}^{\sim}(\mathbb{B}(A)^{+}) = \mathbb{A}^{\sim}(\mathbb{B}^{\sim}(A^{+})) = (\mathbb{A}^{\sim}\mathbb{B}^{\sim})(A^{+})$$

Een s-operator $\mathbb{A}$ heet adjointsymmetrisch als hij invariant is onder associatie:

$$\mathbb{A}^{\sim} = \mathbb{A} \tag{1.25}$$

De fractioneerbare s-operator $\mathbb{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{M}^{+}$ is bijvoorbeeld adjointsymmetrisch. Een belangrijke eigenschap van adjointsymmetrische s-operatoren is dat ze hermitische operatoren op hermitische operatoren afbeelden.

Stelling 1.1.

Een s-operator $\mathbb{A}$ is dan en slechts dan adjointsymmetrisch als hij hermitische operatoren op hermitische operatoren afbeeldt :

$$\mathbb{A}^{\sim} = \mathbb{A} \iff \left\{ \forall_{A} \;\; A^{+} = A \Rightarrow \mathbb{A}(A)^{+} = \mathbb{A}(A) \right\} \tag{1.26}$$

Bewijs :

$\Rightarrow$) Met (1.21) en (1.25).

$\Leftarrow$) Elke operator A kan geschreven worden als de som van twee hermitische operatoren : $A = A_1 + iA_2$ met $A_1 = A_1^+ = \frac{A+A^+}{2}$ en $A_2 = A_2^+ = \frac{A-A^+}{2i}$. Dan is $\mathbb{A}(A)^+ = \mathbb{A}(A_1+iA_2)^+ = \mathbb{A}(A_1)^+ - i\,\mathbb{A}(A_2)^+$ $= \mathbb{A}(A_1) - i\,\mathbb{A}(A_2) = \mathbb{A}(A_1 - iA_2) = \mathbb{A}(A^+) = \mathbb{A}^{\alpha}(A)^+$ Dus is $\mathbb{A}^{\alpha} = \mathbb{A}$.

Stelling 1.2.

Als $\mathbb{A}^{\alpha} = \mathbb{A}$ dan is ook $(\mathbb{A}^{\ddagger})^{\alpha} = \mathbb{A}^{\ddagger}$.

$$(1.27)$$

Bewijs :

$$(\mathbb{A}^{\ddagger\alpha}(B), C) = (\mathbb{A}^{\ddagger}(B^+)^+, C) = \mathrm{Tr}\, \mathbb{A}^{\ddagger}(B^+)C = (C^+, \mathbb{A}^{\ddagger}(B^+)) = (\mathbb{A}(C^+), B^+) =$$

$$(\mathbb{A}^{\alpha}(C^+), B^+) = \mathrm{Tr}\, \mathbb{A}^{\alpha}(C^+)^+ B^+ = \mathrm{Tr}\, \mathbb{A}(C) B^+ = (B, \mathbb{A}(C)) = (\mathbb{A}^+(B), C)$$

voor alle B , C zodat $\mathbb{A}^{\ddagger\alpha} = \mathbb{A}^{\ddagger}$.

Stelling 1.3.

$$\mathbb{A}^{\alpha\ddagger} = \mathbb{A}^{\ddagger\alpha} \qquad (1.28)$$

Bewijs :

Laten B en A willekeurige operatoren zijn, dan is $(B, (\mathbb{A}^{\ddagger})^{\alpha}(A)) =$ $(B, \mathbb{A}^{\ddagger}(A^+)^+) = (\mathbb{A}^{\ddagger}(A^+), B^+) = (A^+, \mathbb{A}(B^+)) = (A^+, \mathbb{A}^{\alpha}(B)^+) = (\mathbb{A}^{\alpha}(B), A)$ $= (B, (\mathbb{A}^{\alpha})^{\ddagger}(A))$.

Definitie 1.5.

De kruis- ($\times$-) geadjungeerde $\mathbb{A}^{\times}$ van de s-operator $\mathbb{A}$ wordt gedefinieerd door :

$$\mathbb{A}^{\times} := \mathbb{A}^{\alpha\ddagger} = \mathbb{A}^{\ddagger\alpha} \qquad (1.29)$$

Stelling 1.4.

$$\forall_{A,B} \quad \mathrm{Tr}\, \mathbb{A}(A) B = \mathrm{Tr}\, A\, \mathbb{A}^{\times}(B) \qquad (1.30)$$

Bewijs :

$$\mathrm{Tr}\, A\, \mathbb{A}^{\times}(B) = (A^{+}, \mathbb{A}^{\times}(B)) = (A^{+}, (\mathbb{A}^{\sim})^{\ddagger}(B)) = (\mathbb{A}^{\sim}(A^{+}), B)$$
$$= (\mathbb{A}(A)^{+}, B) = \mathrm{Tr}\, \mathbb{A}(A)\, B$$

Deze laatste stelling zegt dat we de $\times$ - geadjungeerde ook hadden kunnen defini-eren als de geadjungeerde van $\mathbb{A}$ met betrekking tot de bilineaire functionaal $\mathrm{Tr}\, A\, B$. We zullen de $\times$- geadjungeerde in hoofdstuk 3. nog tegenkomen. Uit (1.29) kunnen we de conclusie trekken dat als $\mathbb{A}$ adjointsymmetrisch is $\times$- adjunctie en gewone adjunctie samenvallen :

$$\mathbb{A}^{\sim} = \mathbb{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}^{\times} = \mathbb{A}^{\ddagger} \tag{1.31}$$

Dit zullen we ook in hoofdstuk 3 gebruiken.
Het is eenvoudig na te gaan dat voor de Liouvilleoperator geldt :

$$\begin{aligned} L^{\ddagger} &= L & (iL)^{\ddagger} &= -iL \\ L^{\sim} &= -L & (iL)^{\sim} &= iL \\ L^{\times} &= -L & (iL)^{\times} &= -iL \end{aligned} \tag{1.32}$$

In de theorie van George, Prigogine en Rosenfeld wordt voor s-operatoren $\mathbb{A}$ die functionalen zijn van de Liouvilleoperator nog de ster-($*$-)conjugatie gebruikt.

Definitie 1.6.

Als de s-operator $\mathbb{A}$ van L afhangt, $\mathbb{A}(L)$, dan is de $*$ -geconjugeerde s-operator $\mathbb{A}^{*}(L)$ van $\mathbb{A}(L)$ gedefinieerd door :

$$\mathbb{A}^{*}(L) := (\mathbb{A}(-L))^{\ddagger} \tag{1.33}$$

De van L afhankelijke s-operator $\mathbb{A}(L)$ is $*$ -hermitisch als hij invariant is onder $*$ -conjugatie :

$$\mathbb{A}^{*}(L) = \mathbb{A}(L) \tag{1.34}$$

$\mathbb{A}(L)$ is bijvoorbeeld $*$-hermitisch als $\mathbb{A}(L) = \mathbb{A}(-L)$ en $\mathbb{A}^{\ddagger}(L) = \mathbb{A}(L)$ maar ook als $\mathbb{A}(L) = -\mathbb{A}(-L)$ en $\mathbb{A}^{\ddagger}(L) = -\mathbb{A}(L)$ (even in L en hermitisch resp. oneven in L en antihermitisch). We zien met (1.32) eenvoudig in dat :

$$\begin{aligned} (iL)^{*} &= iL \\ L^{*} &= -L \end{aligned} \tag{1.35}$$

We onderzoeken nog wat speciale superoperatoren.
Een s-operator $\mathcal{U}$ heet unitair als :

$$\mathcal{U}^{\ddagger}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^{\ddagger} = 1 \tag{1.36}$$

De fractioneerbare s-operator $\mathcal{U} = U \times V$ is bijvoorbeeld unitair als U en V beide unitair zijn. Maar ook de operator $e^{iLt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iLt)^n$ is unitair :

$$(e^{iLt})^{\ddagger} = e^{-iLt} \tag{1.37}$$

Een van L afhangende s-operator $\mathcal{U}(L)$ heet $*$-unitair als

$$\mathcal{U}^{*}(L)\,\mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(L)\,\mathcal{U}^{*}(L) = 1 \tag{1.38}$$

De s-operator e^{Lt} is bijvoorbeeld $*$-unitair :

$$(e^{Lt})^{*} = (e^{-Lt})^{\ddagger} = e^{-Lt} \tag{1.39}$$

In dit voorbeeld is e^{Lt} niet unitair : $(e^{Lt})^{\ddagger} = e^{Lt}$. De klasse van unitaire s-operatoren valt niet samen met de klasse van $*$-unitaire s-operatoren Als $\mathcal{U}(L)$ even is in L dan vallen beide begrippen wel samen.
Een transformatie van dichtheidsoperator ρ en operator A naar respectievelijk $\tilde{\rho}$ en $\tilde{A}$ is een $*$-unitaire transformatie als :

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \mathcal{U}(L)\rho \\ \tilde{A} = \mathcal{U}(-L)A \end{cases} , \quad \mathcal{U}^{*} = \mathcal{U}^{-1} \tag{1.40}$$

$*$-unitaire transformaties laten het inproduct van ρ en A , en daarmee de verwachtingswaarde van A , invariant :

$$\begin{aligned}(\tilde{A},\tilde{\rho}) &= \mathrm{Tr}\,\tilde{A}^{+}\tilde{\rho} = \mathrm{Tr}(\mathcal{U}(-L)A)^{+}\mathcal{U}(L)\rho = \mathrm{Tr}\,A^{+}\mathcal{U}^{\ddagger}(-L)\,\mathcal{U}(L)\rho \\ &= \mathrm{Tr}\,A^{+}\mathcal{U}^{*}(L)\,\mathcal{U}(L)\rho = \mathrm{Tr}\,A^{+}\rho = (A,\rho)\end{aligned} \tag{1.41}$$

Vooruitlopend op hoofdstuk 4. beschouwen we nu nog de s-projectieoperatoren.
Een s-operator $\mathbb{P}$ is een superprojectieoperator als $\mathbb{P}$ lineair is en als :

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P} \tag{1.42}$$

(zie (4.1)). De fractioneerbare s-operator $\mathbb{P} = P \times \mathcal{Q}$ is een projectieoperator als $P^2 = P$ en $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$.

Een s-projectieoperator heet <u>orthogonaal</u> als hij hermitisch is (zie stelling 4.1.) :

$$\mathbb{P}^{+} = \mathbb{P} \tag{1.43}$$

$\mathbb{P} = \mathcal{P} \times \varphi$ is bijvoorbeeld orthogonaal als $\mathcal{P}^{+} = \mathcal{P}$ en $\varphi^{+} = \varphi$.

In het vervolg zullen we geinteresseerd zijn in s-projectieoperatoren $\mathbb{P}$ die dichtheidsoperatoren ρ in dichtheidsoperatoren $\mathbb{P}\rho$ overvoeren. Omdat dichtheidsoperatoren hermitisch zijn moet dan $\mathbb{P}\rho = (\mathbb{P}\rho)^{+}$ zijn als $\rho = \rho^{+}$.
Dit betekent op grond van stelling 1.1. dat $\mathbb{P}$ adjointsymmetrisch moet zijn. Deze voorwaarde alleen is echter niet voldoende. $\mathbb{P}$ moet namelijk positieve operatoren in positieve operatoren overvoeren. Als dat zo is kan

$$\frac{\mathbb{P}\rho}{\mathrm{Tr}\,\mathbb{P}\rho} \tag{1.44}$$

geinterpreteerd worden als de dichtheidsoperator horend bij de geprojecteerde toestand. De verwachtingswaarde van de operator A is dan :

$$\langle A \rangle_{\frac{\mathbb{P}\rho}{\mathrm{Tr}\,\mathbb{P}\rho}} = \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathbb{P}\rho)^{+} A}{\mathrm{Tr}\,\mathbb{P}\rho} \tag{1.45}$$

Een factoriseerbare adjointsymmetrische s-projectieoperator is bijvoorbeeld :

$$\mathbb{P} = \mathcal{P} \times \mathcal{P}^{+} \qquad \text{met} \qquad \mathcal{P}^{2} = \mathcal{P} \tag{1.46}$$

Deze s-operator voert inderdaad positieve operatoren over in positieve operatoren. Als $\mathcal{P}^{+} = \mathcal{P}$ dan is $\mathbb{P}$ een orthogonale adjointsymmetrische s-projectieoperator. Is $\mathcal{P}^{+} \neq \mathcal{P}$ dan is $\mathbb{P}$ niet orthogonaal.

Een belangrijke klasse s-projectieoperatoren is die der mimorfismen.
Een s-operator $\mathbb{P}$ is een <u>mimorfisme</u> als :

i) $\mathbb{P}^{2} = \mathbb{P}$ (en $\mathbb{P}$ lineair)

ii) $\mathbb{P}$ voert positieve operatoren over in positieve operatoren :

$$\text{Als } \rho \geq 0 \text{ dan } \mathbb{P}\rho \geq 0$$

(1.47)

iii) $\mathbb{P}$ laat het spoor van (niet noodzakelijk positieve) operatoren invariant :

$$\mathrm{Tr}\,\mathbb{P}\rho = \mathrm{Tr}\,\rho$$

Het is duidelijk dat een mimorfisme dichtheidsoperatoren op dichtheidsoperatoren afbeeldt. Ze zijn daarom volgens stelling 1.1. adjointsymmetrisch. Het omgekeerde hiervan geldt niet. Er zijn adjointsymmetrische s-projectieoperatoren die geen mimorfismen zijn. We zullen dit, ook voor later gebruik, illustreren met een voorbeeld.

Als $\{|n\rangle\}$ een orthonormale basis voor $\mathcal{H}$ is kunnen we de s-projectieoperator

$$\mathbb{P}_n = |n\rangle\langle n| \times |n\rangle\langle n| \tag{1.48}$$

definieren. Met (1.46) zien we in dat dit een orthogonale adjointsymmetrische s-projector is. Bovendien voert $\mathbb{P}_n$ positieve operatoren over in positieve operatoren :

$$\text{Als } \forall_n \langle n|A|n\rangle \geq 0 \text{ dan is } \forall_m \langle m|\mathbb{P}_n A|m\rangle = \langle m|n\rangle\langle n|A|n\rangle\langle n|m\rangle$$

$$= \delta_{mn}\langle n|A|n\rangle \geq 0 \tag{1.49}$$

$\mathbb{P}_n$ is echter geen mimorfisme want $\mathbb{P}_n$ laat het spoor niet invariant. Met (1.49)

$$\mathrm{Tr}\, \mathbb{P}_n A = \sum_m \langle m|\mathbb{P}_n A|m\rangle = \sum_m \delta_{mn}\langle n|A|n\rangle = \langle n|A|n\rangle \neq \mathrm{Tr}\, A \tag{1.50}$$

Definieer nu de superoperator :

$$\mathbb{P}_n^\sigma := \sum_m |n\rangle\langle m| \times |m\rangle\langle n| \qquad (\sigma \text{ staat voor } \sigma\text{cheef}) \tag{1.51}$$

Met gebruikmaking van de orthonormaliteit van de vectoren $\{|n\rangle\}$ is eenvoudig na te gaan dat $\mathbb{P}_n^\sigma$ een s-projectieoperator is :

$$\mathbb{P}_n^{\sigma\,2} = \mathbb{P}_n^\sigma \tag{1.52}$$

$\mathbb{P}_n^\sigma$ is duidelijk niet fractioneerbaar, maar is de som van een aantal fractioneerbare s-operatoren. $\mathbb{P}_n^\sigma$ is ook niet orthogonaal :

$$\mathbb{P}_n^{\sigma+} \neq \mathbb{P}_n^\sigma \tag{1.53}$$

$\mathbb{P}_n^\sigma$ is wel een mimorfisme. Om dit te bewijzen moeten we nog aantonen dat i) en ii) van (1.47) voor $\mathbb{P}_n^\sigma$ gelden. Laat A een willekeurige operator zijn dan is

$$\mathbb{P}_n^\sigma(A) = \mathrm{Tr}\, A \cdot |n\rangle\langle n| \tag{1.54}$$

Met (1.54) zien we onmiddellijk in dat $\mathbb{P}_n^\sigma A$ positief is als A positief is. $\mathbb{P}_n^\sigma$ laat ook het spoor invariant. Met (1.54) :

$$\mathrm{Tr}\, \mathbb{P}_n^\sigma A = \mathrm{Tr}\, A - \mathrm{Tr}\, |n\rangle\langle n| = \mathrm{Tr}\, A \tag{1.55}$$

Uitgaande van (1.48) en (1.51) is zonder enige moeite te bewijzen dat :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_n \mathbb{P}_n^\sigma = \mathbb{P}_n^\sigma \\ \mathbb{P}_n^\sigma \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n \end{cases} \tag{1.56}$$

Deze relaties houden in dat $\mathbb{P}_n$ en $\mathbb{P}_n^\sigma$ op dezelfde lineaire deelruimte van de ruimte van operatoren op $\mathcal{H}$ projecteren. $\mathbb{P}_n^\sigma$ voert hierbij dichtheidsoperatoren over in dichtheidsoperatoren, $\mathbb{P}_n$ doet dit niet. In hoofdstuk 4. zullen we dit bewijzen. Met (1.48) en (1.51) tonen we tevens aan dat :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_m^\sigma \mathbb{P}_n^\sigma = \mathbb{P}_m^\sigma \\ \mathbb{P}_n^\sigma \mathbb{P}_m^\sigma = \mathbb{P}_n^\sigma \end{cases} \tag{1.57}$$

Deze vergelijkingen zullen we in hoofdstuk 4. interpreteren.

Hoofdstuk 2. De theorie van George, Prigogine en Rosenfeld.

2.1. Inleiding.

G.P.R. hebben een theorie ontwikkeld waarmee het gedrag van "grote" systemen (d.w.z. bestaand uit zeer veel deeltjes) bestudeerd kan worden. In zo'n systeem spelen zich allerlei processen af. Er zijn "kleinschalige" processen die zeer kort duren en waarbij slechts enkele deeltjes betrokken zijn, bijvoorbeeld botsingen tussen individuele atomen. Er zijn echter ook "grootschalige" processen die lang duren. Als het systeem bijvoorbeeld niet in evenwicht is maar in de loop der tijd daar wel naar toe gaat, dan zijn bij dat proces zeer vele botsingen tussen zeer vele deeltjes betrokken.
In een groot systeem komen verder fluctuaties voor. Er zijn in principe twee soorten fluctuaties. Ten eerste de fluctuaties die op lange termijn geen invloed zullen hebben op het systeem als geheel omdat ze elkaar zullen "uitdoven".
Dit worden de incoherente fluctuaties genoemd. Aan de andere kant echter zijn er ook fluctuaties mogelijk die elkaar versterken en zodoende op lange termijn wel gevolgen kunnen hebben voor het hele systeem (of voor "grote" delen daarvan).
Dergelijke fluctuaties heten coherent. De verplaatsing van het zwaartepunt van het systeem kan zo bijvoorbeeld worden opgevat als het gemiddelde van de verplaatsingen van de individuele deeltjes.
G.P.R. hebben nu een methode bedacht waarmee de "snelle" processen van de "langzame" gescheiden kunnen worden. Zij bereiken dit door de dichtheidsoperator ρ van het hele systeem met behulp van een geschikte s-projectieoperator $\tilde{\pi}$ te projecteren. De geprojecteerde operator $\tilde{\pi}\rho$ bevat dan precies alle informatie over "langzame" processen, terwijl de "snelle" processen eruit gefilterd zijn.
De "langzame" processen, waarmee in het algemeen zeer vele deeltjes gemoeid zijn en die zich afspelen in tijden die vele malen de gemiddelde atomaire botsingstijden belopen, kunnen we intuitief associeren met macroscopische processen.
De "snelle" processen met microscopische processen. De s-operator $\tilde{\pi}$ van G.P.R. kan zodoende dienen om een "macroscopisch niveau van observatie" te definieren.

Om hun gedachten uit te werken gaan G.P.R. ervan uit dat het te bestuderen systeem opgebouwd gedacht kan worden uit een modelsysteem dat bestaat uit een aantal onafhankelijke toestanden en een "restsysteem" dat zorgt voor koppelingen (overgangen) tussen die toestanden. Het modelsysteem gedraagt zich reversibel : als het zich in een of andere toestand bevindt, dan blijft het in die toestand. Het langetermijngedrag van dat systeem is dus weinig interessant. In het totale systeem, model + "rest", maakt de restterm overgangen tussen de toestanden van het modelsysteem mogelijk. Het totale systeem kan wel irreversibel gedrag ver-

tonen. In concrete gevallen wordt de keuze van het modelsysteem gedicteerd door de fysische situatie. Willen we bijvoorbeeld een gas bestuderen dan, dan is het voor de hand liggend als model systeem het ideale gas te nemen. Het restsysteem bestaat dan uit de intermoleculaire krachten en eventuele interacties tussen atomen en uitwendige (b.v. E.M.-)velden.
In overeenstemming met dit alles veronderstellen G.P.R. dat de hamiltoniaan van het totale systeem gesplitst kan worden in de hamiltoniaan $H^{(0)}$, die het modelsysteem beschrijft, en de hamiltoniaan $H^{(1)}$ van de restinteracties.

$$H = H^{(0)} + H^{(1)} \tag{2.1.1}$$

G.P.R. gaan nu werken in een basis van eigenvectoren $\{|m\rangle\}$ vam $H^{(0)}$, m staat b.v. voor een verzameling één-deeltjes toestanden of voor een verzameling bezettingsgetallen. Met deze toestanden kunnen de projectieoperatoren

$$P_m = |m\rangle\langle m| \quad , \tag{2.1.2}$$

geconstrueerd worden. De operatoren P_m zijn zijn zelfgeadjungeerd : $P_m^+ = P_m$ en dus orthogonaal (zie stelling 4.1.). Uitgaande van deze projectieoperatoren kunnen in de superruimte superprojectieoperatoren gedefinieerd worden :

$$\mathbb{P}_{m,m'} = P_m \times P_{m'} \tag{2.1.3}$$

Als het gewenst is dat s-projectieoperatoren hermitische operatoren in hermitische operatoren overvoeren, d.w.z. dat ze adjointsymmetrisch zijn, kunnen de $\mathbb{P}_{m,m'}$ gesymmetriseerd worden :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}_{m,m'}} &= P_m \times P_{m'} + P_{m'} \times P_m \qquad m \neq m' \\ \overline{\mathbb{P}_{mm}} &= \mathbb{P}_{mm} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

De s-operatoren $\overline{\mathbb{P}_{mm'}}$ zijn zelfgeadjungeerd, $\overline{\mathbb{P}_{mm'}}^{\neq} = \mathbb{P}_{mm'}$ en dus orthogonaal.
Voor de $\mathbb{P}_{mm'}$ geldt :

$$\mathbb{P}_{mm'} \cdot \mathbb{P}_{nn'} = \delta_{mn}\, \delta_{m'n'}\, \mathbb{P}_{mm'} \tag{2.1.5}$$

$$\sum_{mm'} \mathbb{P}_{mm'} = \mathbb{I} \tag{2.1.6}$$

In de basis $\{|m\rangle\}$ zijn het de niet-diagonaal termen van de "restinteracties" die zorgen voor overgangen tussen de toestanden van het modelsysteem. Deze overgangen zijn verantwoordelijk voor de langetermijnprocessen, zoals het irreversibel naar evenwicht gaan van het systeem.
Om de effecten van de restterm te scheiden van het gedrag van het modelsysteem introduceren G.P.R. nu twee superprojectieoperatoren $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_c$ die opgebouwd zijn uit de s-operatoren $\mathbb{P}_{mm'}$:

$$\mathbb{P}_0 = \sum_m \mathbb{P}_{mm} = \sum_m P_m \times P_m \tag{2.1.7}$$

$$\mathbb{P}_c = \mathbb{I} - \mathbb{P}_0 \tag{2.1.8}$$

$\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_c$ zijn zelfgeadjungeerd : $\mathbb{P}_0^+ = \mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_c^+ = \mathbb{P}_c$. $\mathbb{P}_0$ projecteert op de ruimte van operatoren die in de gegeven basis diagonaal zijn (en dus commuteren met $H^{(0)}$). Deze ruimte wordt het correlatievacuum genoemd. $\mathbb{P}_c$ projecteert op de ruimte van operatoren die niet niet diagonaal zijn. Deze ruimte heet de correlatieruimte. Het idee hierbij is dat de correlatieruimte de microscopische fluctuaties, die geen langetermijn effect hebben, d.w.z. geen macroscopisch waarneembare invloed, beschrijft. Er zijn, zoals opgemerkt, ook fluctuaties die wel langetermijn effecten hebben. In (2.1.7) en (2.1.8) is aan genomen dat die fluctuaties door middel van een geschikte keuze van $H^{(0)}$ al in het modelsysteem zijn opgenomen. In het algemeen is dat natuurlijk niet zo en er is dan ook een koppeling tussen het correlatievacuum en de correlatieruimte. Het probleem is nu de coherente fluctuaties van de incoherente te scheiden en op een of andere manier "op te tellen" bij $\mathbb{P}_0$ zodat een s-operator ontstaat die alle "langzame" (macroscopische) processen beschrijft.

2.2. Asymptotische toestanden.

De hamiltoniaan van het systeem is, zoals gezegd, :

$$H = H^{(0)} + K^{(1)} \tag{2.2.1}$$

De dichtheidsoperator ρ die de toestand van het systeem beschrijft voldoet aan:

$$i\partial_t \rho = [H,\rho] = L\rho \quad (\hbar = 1) \tag{2.2.2}$$

hierin is L de Liouville s-operator.
Met behulp van de in (2.1.7) en (2.1.8) ingevoerde s-operatoren $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_c$ kunnen zowel de s-vectoren als de s-operatoren in componenten gesplitst worden.

Voor ϱ en L geldt bijvoorbeeld :

$$\varrho = (\mathbb{P}_o + \mathbb{P}_c)\varrho = \mathbb{P}_o \varrho + \mathbb{P}_c \varrho \tag{2.2.3}$$

$$L = (\mathbb{P}_o + \mathbb{P}_c) L (\mathbb{P}_o + \mathbb{P}_c) = \mathbb{P}_o L \mathbb{P}_o + \mathbb{P}_o L \mathbb{P}_c + \mathbb{P}_c L \mathbb{P}_o + \mathbb{P}_c L \mathbb{P}_c \tag{2.2.4}$$

We definieren nu voor een willekeurige s-vector A en s-operator $\mathbb{A}$:

$$\begin{array}{ll} A_o := \mathbb{P}_o A & A_c := \mathbb{P}_c A \\ \mathbb{A}_{oo} := \mathbb{P}_o \mathbb{A} \mathbb{P}_o & \mathbb{A}_{oc} := \mathbb{P}_o \mathbb{A} \mathbb{P}_c \\ \mathbb{A}_{co} := \mathbb{P}_c \mathbb{A} \mathbb{P}_o & \mathbb{A}_{cc} := \mathbb{P}_c \mathbb{A} \mathbb{P}_c \end{array} \tag{2.2.5}$$

A_c noemen we het correlatiedeel van A of ookwel : de correlaties van A . A_o is het vacuumdeel van A . Als we zo ϱ en L in componenten uitschrijven en invullen in (2.2.2) krijgen we :

$$\begin{aligned} i\partial_t \varrho_o &= L_{oo}\varrho_o + L_{oc}\varrho_c \\ i\partial_t \varrho_c &= L_{co}\varrho_o + L_{cc}\varrho_c \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

In matrixnotatie :

$$i\partial_t \begin{bmatrix} \varrho_o \\ \varrho_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{oo} & L_{oc} \\ L_{co} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho_o \\ \varrho_c \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

De vergelijking voor ϱ_c kan formeel geïntegreerd worden :

$$\varrho_c(t) = e^{-iL_{cc}t}\varrho_c(0) - i\, e^{-iL_{cc}t}\int_0^t d\tau\, e^{iL_{cc}\tau} L_{co}\,\varrho_o(\tau) \tag{2.2.8}$$

G.P.R. willen nu asymptotische oplossingen maken, dat wil zeggen oplossingen die gelden in de limiet voor $t \to \infty$. Hiertoe merken ze op dat de operator :

$$T_c(t) := e^{-iL_{cc}t} \tag{2.2.9}$$

een grote rol speelt bij de tijdevolutie van de operator ϱ_c . $T_c(t)$ beschrijft een tijdevolutie die uitsluitend bestaat uit overgangen tussen toestanden uit de correlatieruimte.

Om de theorie nu verder te ontwikkelen voeren G.P.R. nu de zogenaamde Dissipativiteitsconditie in.

De dissipativiteitsconditie van G.P.R.

Voor iedere s-vector A geldt :

$$L \mathbb{P}_c A \neq 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{-iL_{cc}t} \mathbb{P}_c A = 0 \tag{2.2.10}$$

Deze conditie komt neer op de aanname dat het correlatiedeel van een willekeurige s-vector A uiteindelijk zal uitdoven als het geen constante van de beweging is. In hun artikel formuleren G.P.R. de dissipativiteitsconditie overigens als volgt :

$$L \mathbb{P}_c A \neq 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{-iL_{cc}t} A = 0$$

Het is te bewijzen dat als deze conditie geldt, voor alle s-vectoren moet gelden:

$$L \mathbb{P}_c A \neq 0 \Rightarrow \mathbb{P}_0 A = 0$$

met andere woorden : als voor een s-vector A $\mathbb{P}_0 A \neq 0$ en $L \mathbb{P}_c A \neq 0$ dan kan niet gelden $\lim_{t\to\infty} e^{-iL_{cc}t} A = 0$. Dit kan nauwelijks de bedoeling zijn van G.P.R.. Het idee van de dissipativiteitsconditie is namelijk dat de correlatie-informatie, besloten in het $\mathbb{P}_c A$ deel van A , tenslotte verdwijnt. Dit wordt beschreven door de eis dat :

$$\lim_{t\to\infty} e^{-iL_{cc}t} \mathbb{P}_c A = 0$$

Ook hiervoor moet $L \mathbb{P}_c A \neq 0$ zijn anders is $e^{-iL_{cc}t} \mathbb{P}_c A = \mathbb{P}_c A$ en is nog steeds niet $\lim_{t\to\infty} e^{-iL_{cc}t} \mathbb{P}_c A = 0$. Wij zullen dus uitgaan van (2.2.10).

Beschouw nu (2.2.8) :

$$\rho_c(t) = e^{-iL_{cc}t} \rho_c(0) - i\int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}(t-\tau)} L_{c0}\rho_0(\tau) \tag{2.2.8}$$

In deze vergelijking zijn de correlaties op tijdstip t geschreven als functie van de correlaties op tijdstip 0 en de diagonaalelementen op alle tijdstippen kleiner dan t . G.P.R. willen, uitgaande van (2.2.8), een vergelijking opstellen die geldig is in de limiet voor $t\to\infty$. Hiertoe merken ze op dat :

$$L \mathbb{P}_c \rho(0) \neq 0 \tag{2.2.11}$$

De begincorrelaties zijn geen constanten van de beweging. Op grond van de dissipativiteitsconditie geldt dan, in overeenstemming met (2.2.10),:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-iL_{cc}t}\, \mathbb{P}_c\, \rho(0) = 0 \tag{2.2.12}$$

De eerste term in het rechterlid van (2.2.8) mag dus verwaarloosd worden in de limiet $t\to\infty$. G.P.R. geven de dichtheidsoperator voor $t\to\infty$, die wordt verkregen door de microscopische correlaties te verwaarlozen, aan met $\tilde{\rho}(t)$.
Per definitie geldt dus :

$$\lim_{t\to\infty} (\rho(t) - \tilde{\rho}(t)) = 0 \tag{2.2.13}$$

Met (2.2.12) en (2.2.13) ingevuld wordt (2.2.8) :

$$\tilde{\rho}_c(t) = -i\int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co}\, \rho_o(t-\tau) \quad , \quad t\to\infty \tag{2.2.14}$$

de integraal is hier herschreven door overgang op een andere integratievariabele
Onder het integraalteken in (2.2.14) staat de term :

$$L_{co}\,\rho_o(t-\tau) = \mathbb{P}_c\,(L_{co}\,\rho_o(t-\tau)) \tag{2.2.15}$$

Omdat ρ_o willekeurig is en in ieder geval onafhankelijk van L is het niet aannemelijk dat $L(L_{co}\rho_o)=0$ zou moeten zijn . Volgens de dissipativiteitsconditie geldt nu :

$$\lim_{t\to\infty} e^{-iL_{cc}\tau} L_{co}\, \rho_o(t-\tau) = 0 \tag{2.2.16}$$

De integrand in (2.2.14) is dus alleen belangrijk voor kleine waarden van τ .
We mogen daarom in (2.2.14) $\rho_o(t-\tau)$ vervangen door $\tilde{\rho}_o(t-\tau)$. We beschouwen namelijk het geval dat t zeer groot is. Als τ dan klein is, dan is natuurlijk $t-\tau$ ook zeer groot en $\tilde{\rho}_o$ is per definitie de $\mathbb{P}_o$ component van ρ voor zeer grote argumenten. Vergelijking (2.2.14) wordt nu :

$$\tilde{\rho}_c(t) = -i\int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co}\, \tilde{\rho}_o(t-\tau) \quad , \quad t\to\infty \tag{2.2.17}$$

Dit substitueren G.P.R. nu in de exacte vergelijking voor $\tilde{\rho}_o$: (2.2.6) :

$$i\partial_t\, \tilde{\rho}_o(t) = L_{oo}\,\tilde{\rho}_o(t) + L_{oc}\,\tilde{\rho}_c(t) \quad , \quad t\to\infty \tag{2.2.18}$$

zodat, voor $t \to \infty$:

$$i\,\partial_t\, \tilde{\rho}_0(t) = L_{00}\, \tilde{\rho}_0(t) - i\, L_{0c} \int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{c0}\, \tilde{\rho}_0(t-\tau) \qquad (2.2.19)$$

Tot nu toe kunnen we alleen praten over de grootheden $\tilde{\rho}_0(t)$ en $\tilde{\rho}_c(t)$ in de limiet $t \to \infty$. Het zal nuttig blijken ook over een "asymptotische oplossing" $\tilde{\rho}(t)$ met $t < \infty$ te kunnen praten. Dat wil zeggen : we beschouwen (2.2.19) nu ook voor $t < \infty$. De oplossing van deze vergelijking is te schrijven met behulp van een tijdonafhankelijke s-operator ϑ :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0(t) &= e^{-i\vartheta t}\, \tilde{\rho}_0(0) \\ \mathbb{P}_0\, \vartheta\, \mathbb{P}_0 &= \vartheta \end{aligned} \qquad (2.2.20)$$

Dit gesubstitueerd in (2.2.19) geeft :

$$\begin{aligned} \vartheta\, \tilde{\rho}_0(t) &= L_{00}\, \tilde{\rho}_0(t) - i \int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{c0}\, e^{-i\vartheta(t-\tau)}\, \tilde{\rho}_0(0) \\ &= L_{00}\, \tilde{\rho}_0(t) - i \left\{ L_{0c} \int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{c0}\, e^{i\vartheta\tau} \right\} \tilde{\rho}_0(t) \end{aligned} \qquad (2.2.21)$$

Omdat,zoals eerder beargumenteerd is, de integrand in deze uitdrukking klein is voor grote τ mogen we de bovengrens t vervangen door ∞ . We krijgen dan :

$$\left\{ \vartheta - \left(L_{00} - i\, L_{0c} \int_0^\infty d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{c0}\, e^{+i\vartheta\tau} \right) \right\} \tilde{\rho}_0(t) = 0 \qquad (2.2.22)$$

Dit geldt voor alle t zodat :

$$\vartheta = L_{00} - i\, L_{0c} \int_0^\infty d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{c0}\, e^{i\vartheta\tau} \qquad (2.2.23)$$

G.P.R. definieren vervolgens de s-operator $\mathbb{C}$ door :

$$\mathbb{C} := -i \int_0^\infty d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{c0}\, e^{i\vartheta\tau} \qquad (2.2.24)$$

(2.2.23) wordt hiermee :

$$\vartheta = L_{00} + L_{0c}\, \mathbb{C} \qquad (2.2.25)$$

Met behulp van (2.2.17) en (2.2.20) kunnen we nu voor de asymptotische correlaties schrijven :

$$\tilde{\rho}_c(t) = -i \int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{c0}\, e^{i\vartheta\tau}\, \tilde{\rho}_0(t) \qquad (2.2.26)$$

Vervangen we de integratiegrens t weer door ∞ en gebruiken we (2.2.24) dan volgt :

$$\tilde{\rho}_c(t) = \mathbb{C}\, \tilde{\rho}_0(t) \tag{2.2.27}$$

De asymptotische correlaties zijn nu uitgedrukt in de asymptotische vacuümelementen. Samengevat voldoen $\tilde{\rho}_0$ en $\tilde{\rho}_c$ aan :

$$\begin{cases} i\,\partial_t\, \tilde{\rho}_0 = \vartheta\, \tilde{\rho}_0 \\ i\,\partial_t\, \tilde{\rho}_c = i\,\partial_t\, \mathbb{C}\, \tilde{\rho}_0 = \mathbb{C}\, \vartheta\, \tilde{\rho}_0 \end{cases} \tag{2.2.28}$$

Om nog een nuttige betrekking te vinden tussen $\mathbb{C}$ en ϑ integreren G.P.R. vergelijking (2.2.24) partieel na deze met $i\vartheta$ vermenigvuldigd te hebben :

$$\begin{aligned} i\cdot i\,\mathbb{C}\,\vartheta &= \int_0^\infty e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{co}\, e^{i\vartheta\tau}\cdot i\,\vartheta\, d\tau = \int_0^\infty e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{co}\, d\, e^{i\vartheta\tau} \\ &= e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{co}\, e^{i\vartheta\tau}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -i\,L_{cc}\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{co}\, e^{i\vartheta\tau}\, d\tau \\ &= \lim_{\tau\to\infty} e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{co}\, e^{i\vartheta\tau} - L_{co} + i\int_0^\infty L_{cc}\, e^{-iL_{cc}\tau}\, L_{co}\, e^{i\vartheta\tau}\, d\tau \\ &= 0 - L_{co} - L_{cc}\,\mathbb{C} \end{aligned}$$

In de laatste stap is weer gebruik gemaakt van de dissipativiteitsconditie. Dit kan op grond van de overweging dat $L(\mathbb{P}_c\, L_{co}\, e^{i\vartheta t} A)$ voor willekeurige s-vectoren A in het algemeen ongelijk aan nul is. We hebben zodoende :

$$\mathbb{C}\,\vartheta = L_{co} + L_{cc}\,\mathbb{C} \tag{2.2.29}$$

Substitueer (2.2.29) en (2.2.25) in (2.2.28) en gebruik (2.2.27) :

$$\begin{cases} i\,\partial_t\, \tilde{\rho}_0 = L_{oo}\, \tilde{\rho}_0 + L_{oc}\, \tilde{\rho}_c \\ i\,\partial_t\, \tilde{\rho}_c = L_{co}\, \tilde{\rho}_0 + L_{cc}\, \tilde{\rho}_c \end{cases} \tag{2.2.30}$$

Ofwel, met $\rho = \rho_0 + \rho_c = \mathbb{P}_0\,\rho + \mathbb{P}_c\,\rho$:

$$i\,\partial_t\, \tilde{\rho} = L\, \tilde{\rho} \tag{2.2.31}$$

$\tilde{\rho}$ is dus voor alle t een exacte oplossing van de Liouville-von Neumannvergelijking (dit was er al ingestopt voor $t\to\infty$, zie (2.2.16)).

Tenslotte leiden G.P.R. uit (2.2.25) en (2.2.29) door elimineren van ϑ een niet lineaire vergelijking voor $\mathbb{C}$ af :

$$\mathbb{C}\, \mathcal{L}_{oo} + \mathbb{C}\, \mathcal{L}_{oc}\, \mathbb{C} = \mathcal{L}_{co} + \mathcal{L}_{cc}\, \mathbb{C} \tag{2.2.32}$$

2.3. De Heisenbergrepresentatie en tijdomkeerinvariantie.

G.P.R. hebben nu twee exacte oplossingen van de Liouville-von Neumannvergelijking. Ten eerste de echte oplossing, $\rho(t)$, die het te bestuderen systeem beschrijft. Ten tweede de, met behulp van de s-operator ϑ kunstmatig geconstrueerde, oplossing $\tilde{\rho}(t)$. Voor $t \to \infty$ vallen deze twee samen, want zo is $\tilde{\rho}(t)$ gedefinieerd (zie (2.2.13)). G.P.R. willen ook het verband weten tussen $\tilde{\rho}(t)$ en $\rho(t)$ op tijdstippen $t < \infty$. Om deze relatie bloot te leggen is het nodig om in te gaan op de Heisenbergrepresentatie en het begrip tijdinversie.

Zoals bekend is in het Schrödingerbeeld de dichtheidsoperator tijdafhankelijk en zijn de operatoren tijdonafhankelijk. Operatoren A en dichtheidsoperatoren ρ voldoen aan :

$$\begin{cases} i\,\partial_t\, \rho = [H, \rho] & \text{ofwel} \quad \rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)\, e^{iHt} \quad (\hbar = 1) \\ i\,\partial_t A = 0 & \text{Als } A \text{ niet expliciet tijdafhankelijk is} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

De verwachtingswaarde van de operator A , gegeven de dichtheidsoperator ρ , is:

$$\langle A \rangle_{\rho(t)} = \mathrm{Tr}\ \rho(t) A = \mathrm{Tr}\ e^{-iHt} \rho(0)\, e^{iHt} A \tag{2.3.2}$$

Door cyclisch te verwisselen vinden we :

$$\langle A \rangle_{\rho(t)} = \mathrm{Tr}\ \rho(0)\, e^{iHt} A\, e^{-iHt} = \mathrm{Tr}\ \rho(0)\, A(t) \tag{2.3.3}$$

We krijgen dezelfde verwachtingswaarde voor A door de dichtheidsoperator tijdonafhankelijk en de operator A tijdafhankelijk te veronderstellen. Er moet dan gelden :

$$\begin{cases} A(t) = e^{iHt} A(0)\, e^{-iHt} \\ \rho(t) = \rho(0) \end{cases} \tag{2.3.4}$$

ofwel :

$$\begin{cases} i\,\partial_t A = -[H, A] = -L A \\ i\,\partial_t \rho = 0 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Wanneer de quantummechanica geformuleerd wordt op deze manier spreken we van het Heisenbergbeeld.

G.P.R. definiëren nu, zowel voor s-vectoren als voor s-operatoren, het begrip tijdinversie. De tijdgeinverteerden $\overline{\mathbb{O}(t)}$ en $\overline{A(t)}$ van de superoperator $\mathbb{O}(t)$ resp. de supervector $A(t)$ zijn gedefiniëerd door :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{O}(t)} &:= \mathbb{O}^{*}(-t) \\ \overline{A(t)} &:= A^{+}(-t) \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Als de hamiltoniaan van het systeem expliciet tijdonafhankelijk is, wat we steeds zullen veronderstellen, geldt voor de Liouville operator bijvoorbeeld :

$$\overline{L} = L^{*} = L \tag{2.3.7}$$

In het Heisenbergbeeld geldt volgens (2.3.4) voor operatoren A :

$$\overline{A(t)} = A^{+}(-t) = e^{iHt} A^{+}(0)\, e^{iHt} \tag{2.3.8}$$

ofwel :

$$i\,\partial_t \overline{A(t)} = [H, \overline{A(t)}] = L\, \overline{A(t)} \tag{2.3.9}$$

We zien met (2.3.9) en (2.2.2) dat de tijdafhankelijkheid van de tijdgeinverteerde operator $\overline{A(t)}$ (in het Heisenbergbeeld) hetzelfde is als de tijdafhankelijkheid van de dichtheidsoperator $\rho(t)$ (in het Schrödingerbeeld).
Met behulp van $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_c$ kan $\overline{A(t)}$ in componenten ontbonden worden

$$\begin{aligned} \overline{A_0(t)} &= \mathbb{P}_0\, \overline{A(t)} \\ \overline{A_c(t)} &= \mathbb{P}_c\, \overline{A(t)} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Met de definities van $\mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_c$ en de tijdinversie is na te gaan dat :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}_0\, A(t)} &= \mathbb{P}_0\, \overline{A(t)} \\ \overline{\mathbb{P}_c\, A(t)} &= \mathbb{P}_c\, \overline{A(t)} \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Net als voor $\rho(t)$ kunnen we ook voor $\overline{A(t)}$ een asymptotische oplossing $\widetilde{\overline{A(t)}}$ invoeren. Er geldt dan, conform (2.2.13), (2.2.20) en (2.2.27)

$$\lim_{t\to\infty}\left(\overline{A(t)} - \widetilde{\overline{A(t)}}\right) = 0 \tag{2.3.12}$$

$$\widetilde{\overline{A_0(t)}} = e^{-i\vartheta t}\,\widetilde{\overline{A_0(0)}} \tag{2.3.13}$$

$$\widetilde{\overline{A_c(t)}} = \mathbb{C}\;\widetilde{\overline{A_0(t)}} \tag{2.3.14}$$

In deze context zijnde s-operatoren ϑ en $\mathbb{C}$ op te vatten als de tijdgeinverteerden van twee nieuwe s-operatoren η en $\mathbb{D}$:

$$\eta = \bar{\vartheta} \tag{2.3.15}$$

$$\mathbb{D} = \bar{\mathbb{C}} \tag{2.3.16}$$

G.P.R. willen nu η en $\mathbb{D}$ berekenen. Om te beginnen is ϑ tijdonafhankelijk. Er moet dus gelden :

$$\eta = \bar{\vartheta} := \vartheta^{\ddagger}_{t\to -t} = \vartheta^{\ddagger} \tag{2.3.17}$$

Wat betreft $\mathbb{C}$ ligt de zaak ingewikkelder. $\mathbb{C}$ is gedefiniëerd volgens :

$$\mathbb{C} = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co}\, e^{i\vartheta\tau} = \lim_{t\to\infty} -i\int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co}\, e^{i\vartheta\tau}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \mathbb{C}_t \tag{2.3.18}$$

waarin :

$$\mathbb{C}_t := -i\int_0^t d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co}\, e^{i\vartheta\tau} \tag{2.3.19}$$

zodat :

$$\mathbb{C}^{\ddagger}_t = +i\int_0^t d\tau\, e^{-i\vartheta^{\ddagger}\tau} L_{oc}\, e^{iL_{cc}\tau} \tag{2.3.20}$$

Nu is :

$$\mathbb{D} := \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{\ddagger}_{t\to -t} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{C}^{\ddagger}_{-t} = \lim_{t\to\infty} i\int_0^{-t} d\tau\, e^{-i\vartheta^{\ddagger}\tau} L_{oc}\, e^{iL_{cc}\tau}$$

$$\overset{\tau\to-\tau}{=} \lim_{t\to\infty} -i\int_0^t d\tau\, e^{i\vartheta^{\ddagger}\tau} L_{oc}\, e^{-iL_{cc}\tau}$$

$$\mathbb{D} \overset{(2.3.15)}{=} -i\int_0^\infty d\tau\, e^{i\eta\tau} L_{oc}\, e^{-iL_{cc}\tau} \tag{2.3.21}$$

Voor ϑ en C gelden (2.2.25) en (2.2.29) :

$$\begin{cases} \vartheta = L_{oo} + L_{oc}\, \mathbb{C} & (2.2.25) \\ \mathbb{C}\, \vartheta = L_{co} + L_{cc}\, \mathbb{C} & (2.2.29) \end{cases}$$

We krijgen analoge relaties voor η en $\mathbb{D}$ door deze vergelijkingen te tijdinverteren en gebruik te maken van (2.3.7), (2.3.15) en (2.3.16) :

$$\begin{cases} \eta = L_{oo} + \mathbb{D}\, L_{co} & (2.3.22) \\ \eta\, \mathbb{D} = L_{oc} + \mathbb{D}\, L_{cc} & (2.3.23) \end{cases}$$

Het tijdinverteren van de tijdonafhankelijke s-operator $\mathbb{C}$ is dus niet hetzelfde als het gewone adjungeren. Dit komt omdat $\mathbb{C}$ als de limiet voor $t \to \infty$ van de wel tijdafhankelijke s-operator $\mathbb{C}_t$ gedefiniëerd is.
Voor de s-operatoren $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ is het tijdinverteren equivalent met de procedure : adjungeren en L door $-L$ vervangen, dat wil zeggen : met $*$ -conjugatie zoals gedefiniëerd in (1.33).
Beschouw (2.2.25) en (2.3.18) :

$$(\vartheta^{\ddagger})_{L \to -L} = -L_{oo} - \mathbb{C}^{\ddagger}_{L\to -L}\, L_{co} = -(L_{oo} + \mathbb{C}^{\ddagger}_{L \to -L}\, L_{co}) \qquad (2.3.24)$$

$$\mathbb{C}^{\ddagger}_{L\to -L} = i \int_0^\infty d\tau\, e^{i\vartheta^{\ddagger}_{L\to -L}} \cdot -L_{oc} \cdot e^{-iL_{cc}\tau}$$

$$= -i \int_0^\infty d\tau\, e^{-i\vartheta^{\ddagger}_{L\to -L}}\, L_{oc}\, e^{-iL_{cc}\tau} \qquad (2.3.25)$$

Vergelijken we (2.3.24) en (2.3.25) met (2.3.22), (2.3.23) en (2.3.21) dan kunnen we identificeren :

$$\vartheta^{\ddagger}_{L\to -L} = \vartheta^{*} = -\eta = -\vartheta^{\ddagger}_{t\to -t} = -\bar{\vartheta} \qquad (2.3.26)$$

$$\mathbb{C}^{\ddagger}_{L\to -L} = \mathbb{C}^{*} = \mathbb{D} = \bar{\mathbb{C}} \qquad (2.3.27)$$

Als een operator van de tijdparameter t afhangt, dan is hermitisch adjungeren en L door $-L$ vervangen, d.w.z. $*$ -conjugeren, ook equivalent met tijdinverteren. Dit is zo omdat de tijdafhankelijkheid altijd uitgedrukt kan worden als een functionele afhankelijkheid van de s-operator iLt . Bijvoorbeeld : uit (2.3.5) volgt $A(t) = e^{iLt} A(0)$ en $\bar{A}(t)_{t\to -t} = A^{+}(t)_{L\to -L} = (e^{-iLt} A(0))^{+} = e^{iLt} A(0)$. Als $\mathcal{O}(t)$ van t afhangt kunnen we daarom schrijven :

$$\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(iLt) \qquad (2.3.28)$$

zodat :

$$\overline{\mathbb{O}(t)} = \mathbb{O}^{\ddagger}(iLt)_{t\to -t} = \mathbb{O}^{\ddagger}(-iLt) = \mathbb{O}^{\ddagger}_{L\to -L}(iLt) = \mathbb{O}^{*}(t) \tag{2.3.29}$$

Voor operatoren die niet van t afhangen is tijdinverteren niet hetzelfde als $*$ -conjugeren. Als tegenvoorbeeld nemen we de operator L . Met (2.3.7) en (1.35) zien we :

$$\bar{L} = L = -L^{*}$$

Als de tijdafhankelijke s-operator $\mathbb{O}(t)$ uit (2.3.29) even is in L dan is :

$$\mathbb{O}^{*}(t) = \mathbb{O}^{\ddagger}(t) \tag{2.3.30}$$

zodat tijdinverteren neerkomt op gewoon adjungeren. Als $\mathbb{O}(t)$ ook nog een deel bevat dat oneven is in L dan gaat dit niet meer op. Voor tijdafhankelijke s-operatoren kan tijdinverteren opgevat worden als een generalisatie van adjungeren. Tijdomkeerinvariantie is dan een generalisatie van zelfgeadjungeerdheid. In (1.32) hebben we gezien dat iL adjointsymmetrisch is. Deze operator beeldt dus hermitische operatoren op hermitische operatoren af. Alle s-operatoren die functionalen zijn van iL , zoals $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $i\vartheta$ en $i\eta$ (zie (2.2.24), (2.3.21) (2.2.23) en (2.3.22)) zijn hiermee ook adjointsymmetrisch. We zullen zien dat alle fysisch interessante s-operatoren altijd functionalen zullen zijn van iL . De tijdgeinverteerden van deze s-operatoren zullen dan overigens ook functionalen zijn van iL en dus ook adjointsymmetrisch.
We zullen nu, G.P.R. volgend nog een nuttige relatie tussen ϑ en η afleiden. Met (2.2.25), (2.2.29), (2.3.22) en (2.3.23) vinden we :

$$\underbrace{L_{oo} + L_{oc}\,\mathbb{C}}_{\vartheta} + \underbrace{\mathbb{D}L_{co} + \mathbb{D}L_{cc}\,\mathbb{C}}_{\mathbb{D}\,\mathbb{C}\,\vartheta} = \underbrace{L_{oo} + \mathbb{D}L_{co}}_{\eta} + \underbrace{L_{oc}\,\mathbb{C} + \mathbb{D}L_{cc}\,\mathbb{C}}_{\eta\,\mathbb{D}\,\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{N}_o\,\vartheta = \eta\,\mathcal{N}_o \quad , \quad \mathcal{N}_o := 1 + \mathbb{D}\,\mathbb{C} \tag{2.3.31}$$

We zullen aannemen dat $\mathcal{N}_o$ een inverse $\mathcal{N}_o^{-1}$ (of $\frac{1}{\mathcal{N}_o}$) heeft. (2.3.31) wordt dan :

$$\begin{cases} \vartheta = \dfrac{1}{\mathcal{N}_o}\,\eta\,\mathcal{N}_o \\ \eta = \mathcal{N}_o\,\vartheta\,\dfrac{1}{\mathcal{N}_o} \end{cases} \tag{2.3.32}$$

Uit (2.3.31) is duidelijk dat :

$$\bar{\mathcal{N}}_0 = \mathcal{N}_0 \tag{2.3.33}$$

Tot slot melden we dat we met (2.2.24), (2.2.25), (2.3.21) en (2.3.23) kunnen schrijven

$$\vartheta = L_{oo} - i\int_0^\infty d\tau \; \Psi(\tau)\, e^{i\vartheta\tau} \tag{2.3.34}$$

$$\eta = L_{oo} - i\int_0^\infty d\tau \; e^{i\eta\tau}\, \Psi(\tau) \tag{2.3.35}$$

met :

$$\Psi(\tau) := L_{oc}\, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co} \tag{2.3.36}$$

Deze s-operator voegt aan iedere operator uit de $\mathbb{P}_o$ deelruimte een operator uit diezelfde deelruimte toe. Het is in feite een botsingsoperator.
Met de definities van $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ en Ψ is voorts na te gaan dat :

$$\mathcal{N}_0 = 1 - \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' \; e^{i\eta\tau}\, \Psi(\tau+\tau')\, e^{i\vartheta\tau'} \tag{2.3.37}$$

2.4. De relatie tussen asymptotisch en dynamisch gedrag.

In deze paragraaf zal de relatie tussen $\tilde{\rho}(t)$ en $\rho(t)$ gelegd worden. Hiertoe zullen we eerst ,uitgaande van (2.2.20), een groot aantal nuttige relaties afleiden voor $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ en daarmee geconstrueerde s-operatoren.
De tweede relatie van (2.2.20) luidt :

$$\vartheta = \mathbb{P}_0\, \vartheta\, \mathbb{P}_0 \tag{2.2.20}$$

Tijdinverteren van deze relaties geeft, omdat $\mathbb{P}_0$ zelfgeadjungeerd en tijdonafhankelijk is, :

$$\eta = \mathbb{P}_0\, \eta\, \mathbb{P}_0 \tag{2.4.1}$$

Voor $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ vinden we met (2.2.20), (2.2.24) en (2.3.16) de belangrijke reties :

$$\mathbb{C} = \mathbb{P}_c\, \mathbb{C}\, \mathbb{P}_0 \tag{2.4.2}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{P}_0 \, \mathbb{D} \, \mathbb{P}_c \tag{2.4.3}$$

We zullen hiervan alleen bewijzen dat $\mathbb{C}\,\mathbb{P}_0 = \mathbb{C}$. De bewijzen van de overige relaties verlopen analoog.

$\mathbb{C}\,\mathbb{P}_0 = \mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = -i \int_0^\infty d\tau \, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co} e^{i\vartheta\tau}$$

$$e^{i\vartheta\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\tau\vartheta)^n = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\tau\vartheta)^n$$ d.w.z.

$$e^{i\vartheta\tau}\,\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\tau)^n \vartheta^n \,\mathbb{P}_0 \underset{(2.2.20)}{=} \mathbb{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\tau)^n \vartheta^n$$

$$= \mathbb{P}_0 + e^{i\vartheta\tau} - \mathbb{I} = e^{i\vartheta\tau} - \mathbb{P}_c$$ zodat

$$L_{co}\, e^{i\vartheta\tau}\,\mathbb{P}_0 = L_{co}(e^{i\vartheta\tau} - \mathbb{P}_c) = L_{co} e^{i\vartheta\tau}$$

$$\mathbb{C}\,\mathbb{P}_0 = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau}\left\{L_{co}e^{i\vartheta\tau}\right\}\mathbb{P}_0 = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-iL_{cc}\tau} L_{co} e^{i\vartheta\tau} = \mathbb{C}$$

De relaties (2.4.2) en (2.4.3) impliceren :

$$\mathbb{C}^2 = 0 \tag{2.4.4}$$

$$\mathbb{D}^2 = 0 \tag{2.4.5}$$

want b.v. : $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\,\mathbb{P}_0 \cdot \mathbb{P}_c\,\mathbb{C} = 0$

Vanwege (2.4.2) t/m (2.4.5) kunnen nu een aantal nieuwe superprojectieoperatoren gedefinieerd worden :

$$\mathbb{P}_a = \mathbb{P}_0 + \mathbb{C} \qquad \mathbb{P}_b = \mathbb{P}_c - \mathbb{C} \qquad \mathbb{P}_a + \mathbb{P}_b = \mathbb{I} \tag{2.4.6}$$

$$\overline{\mathbb{P}_a} = \mathbb{P}_0 + \mathbb{D} \qquad \overline{\mathbb{P}_b} = \mathbb{P}_c - \mathbb{D} \qquad \overline{\mathbb{P}_a} + \overline{\mathbb{P}_b} = \mathbb{I} \tag{2.4.7}$$

Alleen voor $\mathbb{P}_a$ bewijzen we dat het inderdaad een s-projectieoperator is :

$$\mathbb{P}_a^2 = (\mathbb{P}_0 + \mathbb{C})(\mathbb{P}_0 + \mathbb{C}) = \mathbb{P}_0 + \mathbb{C}\,\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_0\,\mathbb{C} + \mathbb{C}^2 \underset{(2.4.2),(2.4.4)}{=} \mathbb{P}_0 + \mathbb{C} = \mathbb{P}_a$$

de overige bewijzen verlopen analoog.

$\mathbb{P}_a = \mathbb{P}_0 + \mathbb{C}$ is niet alleen een projectieoperator, het is zelfs een mimorfisme.

Om dit te bewijzen merken we op dat $\mathbb{P}_0$ is gedefinieerd als :

$$\mathbb{P}_0 = \sum_m P_m \times P_m = \sum_m |m\rangle\langle m| \times |m\rangle\langle m| \tag{2.1.7}$$

Dit betekent dat voor alle operatoren A :

$$\forall_n \quad \langle n|\mathbb{P}_0 A|n\rangle = \sum_m \langle n|m\rangle\langle m|A|m\rangle\langle m|n\rangle = \langle n|A|n\rangle \tag{2.4.8}$$

In het bijzonder geldt voor de operator $\mathbb{C}A$:

$$\forall_n \quad \langle n|\mathbb{C}A|n\rangle = \langle n|\mathbb{P}_0\mathbb{C}A|n\rangle = \langle n|0\cdot A|n\rangle = 0 \tag{2.4.9}$$

want op grond van (2.4.2) is $\mathbb{P}_0\mathbb{C} = 0$. Nu is voor alle operatoren A :

$$\langle n|\mathbb{P}_\alpha A|n\rangle = \langle n|\mathbb{P}_0 A|n\rangle + \langle n|\mathbb{C}A|n\rangle = \langle n|A|n \tag{2.4.10}$$

Als nu A een positieve operator is, d.w.z. als $\forall_n \; \langle n|A|n \geqslant 0$,dan is ook $\mathbb{P}_\alpha A$ een positieve operator. Tevens kunnen we met de laatste vergelijking inzien dat :

$$\mathrm{Tr}\,\mathbb{P}_\alpha A = \sum_n \langle n|\mathbb{P}_\alpha A|n\rangle = \sum_n \langle n|A|n\rangle = \mathrm{Tr}\,A \tag{2.4.11}$$

zodat $\mathbb{P}_\alpha$ ook het spoor van A invariant laat. $\mathbb{P}_\alpha$ is dus inderdaad een mimorfisme. Zoals eenvoudig is na te gaan is $\mathbb{P}_0$ zelf ook een mimorfisme
Wat bereft de overige s-operatoren is $\mathbb{P}_c$ zeker geen mimorfisme. $\overline{\mathbb{P}_\alpha}$ is hoogstwaarschijnlijk ook geen mimorfisme omdat voor willekeurige A $\mathrm{Tr}\,\overline{\mathbb{P}_\alpha}A = \mathrm{Tr}\,\mathbb{P}_0 A + \mathrm{Tr}\,\mathbb{D}A = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,\mathbb{D}A$ en omdat $\mathbb{P}_0\mathbb{D}A = \mathbb{D}A$ zal i.h.a. $\mathrm{Tr}\,\mathbb{D}A \neq 0$ zijn. Of $\overline{\mathbb{P}_c}$ een mimorfisme is, is nog niet duidelijk.

We introduceren nu, G.P.R. volgend, de met $\mathcal{N}_v$ verwante s-operator :

$$\mathcal{N}_c = 1 + \mathbb{C}\mathbb{D} \tag{2.4.12}$$

ook deze operator wordt verondersteld een inverse $\mathcal{N}_c^{-1}$ (of $\frac{1}{\mathcal{N}_c}$) te hebben.
Door uitschrijven en toepassen van de relaties (2.4.2) t/m (2.4.7), (2.3.31) en (2.4.12) kunnen we rechttoe rechtaan de volgende eigenschappen van de nieuwe s-projectieoperatoren verifieren :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_\alpha\mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c\mathbb{P}_\alpha = 0 \\ \overline{\mathbb{P}_\alpha}\,\overline{\mathbb{P}_c} = \overline{\mathbb{P}_c}\,\overline{\mathbb{P}_\alpha} = 0 \end{cases} \tag{2.4.13}$$

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{P}}_a \mathbb{P}_a = \mathbb{P}_0 \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0 \mathbb{P}_0 & \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{N}_0} \mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} \\ \mathbb{P}_b \overline{\mathbb{P}}_b = \mathbb{P}_c \mathcal{N}_c = \mathcal{N}_c \mathbb{P}_c & \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c \frac{1}{\mathcal{N}_c} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_a \mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_a & \mathbb{P}_a \mathbb{P}_c = 0 \\ \mathbb{P}_0 \mathbb{P}_a = \mathbb{P}_0 & \mathbb{P}_c \mathbb{P}_a = \mathbb{C} \end{cases} \tag{2.4.15}$$

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{P}}_a \mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_0 & \overline{\mathbb{P}}_a \mathbb{P}_c = \mathbb{D} \\ \mathbb{P}_0 \overline{\mathbb{P}}_a = \overline{\mathbb{P}}_a & \mathbb{P}_c \overline{\mathbb{P}}_a = 0 \end{cases} \tag{2.4.16}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_b \mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c & \mathbb{P}_b \mathbb{P}_0 = -\mathbb{C} \\ \mathbb{P}_c \mathbb{P}_b = \mathbb{P}_b & \mathbb{P}_0 \mathbb{P}_b = 0 \end{cases} \tag{2.4.17}$$

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{P}}_b \mathbb{P}_c = \overline{\mathbb{P}}_b & \overline{\mathbb{P}}_b \mathbb{P}_0 = 0 \\ \mathbb{P}_c \overline{\mathbb{P}}_b = \mathbb{P}_c & \mathbb{P}_0 \overline{\mathbb{P}}_b = -\mathbb{D} \end{cases} \tag{2.4.18}$$

$$\begin{cases} \mathcal{N}_0 \mathbb{D} = \mathbb{D} \mathcal{N}_c & \Rightarrow \mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c} = \frac{1}{\mathcal{N}_0} \mathbb{D} \\ \mathcal{N}_c \mathbb{C} = \mathbb{C} \mathcal{N}_0 & \Rightarrow \mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0} = \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{C} \end{cases} \tag{2.4.19}$$

Met behulp van (2.4.6) en (2.4.7) kunnen (2.2.25) en (2.3.22) omgeschreven worden tot:

$$\begin{cases} \vartheta = \mathbb{P}_0 L \mathbb{P}_a \\ \eta = \overline{\mathbb{P}}_a L \mathbb{P}_0 \end{cases} \tag{2.4.20}$$

We voeren voor later gebruik twee nieuwe operatoren ξ en λ in, die elkaars tijdgeinverteerde zijn :

$$\begin{cases} \xi := \mathbb{P}_c L \overline{\mathbb{P}}_b = L_{cc} - L_{c0} \mathbb{D} \\ \lambda := \mathbb{P}_b L \mathbb{P}_c = L_{cc} - \mathbb{C} L_{0c} \\ \overline{\xi} = \lambda \end{cases} \tag{2.4.21}$$

Voor ξ en λ geldt analoog (2.2.20) en (2.4.1) :

$$\begin{cases} \xi = \mathbb{P}_c \xi \mathbb{P}_0 \\ \lambda = \mathbb{P}_c \lambda \mathbb{P}_0 \end{cases} \tag{2.4.22}$$

Door (2.2.25) en (2.2.29) respectievelijk (2.3.22) en (2.3.23) op te tellen vinden we voor ϑ en η :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_a \vartheta = L \mathbb{P}_a \\ \eta \overline{\mathbb{P}}_a = \overline{\mathbb{P}}_a L \end{cases} \tag{2.4.23}$$

We herinneren nog even aan (2.3.31) :

$$\mathcal{N}_0 \vartheta = \eta \mathcal{N}_0 \tag{2.3.31}$$

Voor de operatoren ξ , λ en $\mathcal{N}_c$ kunnen analoge vergelijkingen opgesteld worden :

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{P}}_b \, \xi = L \, \overline{\mathbb{P}}_b \\ \lambda \, \mathbb{P}_b = \mathbb{P}_b \, L \\ \mathcal{N}_c \, \xi = \lambda \, \mathcal{N}_c \end{cases} \tag{2.3.32}$$

Dit kunnen we uitgaande van de boverste vergelijking van (2.4.23) bewijzen :

Uit $\mathbb{P}_a \vartheta = L \mathbb{P}_a$ en (2.4.13) volgt : $\mathbb{P}_b \mathbb{P}_a \vartheta = \mathbb{P}_b L \mathbb{P}_a = 0$
Dit betekent dat : $\mathbb{P}_b L = \mathbb{P}_b L(\mathbb{P}_b + \mathbb{P}_a) = \mathbb{P}_b L \mathbb{P}_a + \mathbb{P}_b L \mathbb{P}_b = \mathbb{P}_b L \mathbb{P}_b$
Tijdinverteren geeft : $L \overline{\mathbb{P}_b} = \overline{\mathbb{P}_b} L \overline{\mathbb{P}_b}$,
Nu is met (2.4.21) : $\xi = \mathbb{P}_c L \overline{\mathbb{P}_b}$ zodat $\overline{\mathbb{P}_b}\xi = \overline{\mathbb{P}_b} \mathbb{P}_c L \overline{\mathbb{P}_b} \overset{(2.4.8)}{=} \overline{\mathbb{P}_b} L \overline{\mathbb{P}_b} = L \overline{\mathbb{P}_b}$
waarmee de eerste relatie is afgeleid. De tweede vinden we simpelweg door de eerste te tijdinverteren : $\overline{\xi} \, \overline{\overline{\mathbb{P}_b}} = \overline{\overline{\mathbb{P}_b}} \, \overline{L}$ ofwel $\lambda \mathbb{P}_b = \mathbb{P}_b L$
Tenslotte is met de eerste twee vergelijkingen :
$\mathbb{P}_b \overline{\mathbb{P}_b} \xi = \mathbb{P}_b L \overline{\mathbb{P}_b} = \lambda \mathbb{P}_b \overline{\mathbb{P}_b}$. Substitueren we (2.4.14) hierin, dan zien we :
$\mathcal{N}_c \mathbb{P}_c \xi = \lambda \mathbb{P}_c \mathcal{N}_c$ zodat, met (2.4.22), $\mathcal{N}_c \xi = \lambda \mathcal{N}_c$.

Uit (2.3.31), (2.4.23) en (2.4.24) leiden we af :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_a e^{-i\vartheta t} = e^{-iLt} \mathbb{P}_a \\ e^{-i\eta t} \overline{\mathbb{P}_a} = \overline{\mathbb{P}_a} e^{-iLt} \\ \mathcal{N}_0 e^{-i\vartheta t} = e^{-i\eta t} \mathcal{N}_0 \quad \rightarrow e^{-i\vartheta t} \frac{1}{\mathcal{N}_0} = \frac{1}{\mathcal{N}_0} e^{-i\eta t} \end{cases} \tag{2.4.25}$$

en :

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{P}}_b e^{-i\xi t} = e^{-iLt} \overline{\mathbb{P}}_b \\ e^{-i\lambda t} \mathbb{P}_b = \mathbb{P}_b e^{-iLt} \\ \mathcal{N}_c e^{-i\xi t} = e^{-i\lambda t} \mathcal{N}_c \quad \rightarrow e^{-i\xi t} \frac{1}{\mathcal{N}_c} = \frac{1}{\mathcal{N}_c} e^{-i\lambda t} \end{cases} \tag{2.4.26}$$

We bewijzen de eerste relatie van (2.4.25). Uitgangspunt is de eerste relatie van (2.4.23) : $\mathbb{P}_a \vartheta = L \mathbb{P}_a$. Uit deze relatie volgt eenvoudig dat voor alle $n \geq 1$ geldt : $\mathbb{P}_a \vartheta^n = L^n \mathbb{P}_a$. Omdat voor alle s-operatoren A per definitie $A^0 = I$ geldt deze gelijkheid zelfs voor alle $n \geq 0$. Nu is $\mathbb{P}_a e^{-i\vartheta t} =$
$\mathbb{P}_a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \vartheta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \mathbb{P}_a \vartheta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} L^n \mathbb{P}_a = e^{-iLt} \mathbb{P}_a$
Op analoge wijze zijn de andere vergelijkingen af te leiden. (overigens kunnen we op analoge wijze relaties als $\mathbb{P}_a e^{i\vartheta t} = e^{iLt} \mathbb{P}_a$, enz. bewijzen).

De vergelijkingen (2.4.25) en (2.4.26) zullen het mogelijk maken op eenvoudige wijze verbanden af te leiden tussen $\rho(t)$ en $\tilde{\rho}(t)$ (en, zoals zal blijken, ook tussen $\rho(t)$ en $1-\tilde{\rho}(t) =: \hat{\rho}(t)$). We roepen hiertoe drie vergelijkingen in herinnering :

$$\rho(t) = e^{-iLt}\rho(0) \qquad (2.2.2)$$
$$\tilde{\rho}_o(t) = e^{-i\vartheta t}\tilde{\rho}_o(0) \qquad (2.2.20)$$
$$\tilde{\rho}_c(t) = \mathbb{C}\,\tilde{\rho}_o(t) \qquad (2.2.27)$$

Vermenigvuldig (2.2.2) met $\overline{\mathbb{P}}_a$ en (2.2.20) met $\mathcal{N}_o$ dan volgt m.b.v. (2.4.25) :

$$\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t) = \overline{\mathbb{P}}_a\, e^{-iLt}\rho(0) = e^{-i\eta t}\,\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(0) \qquad (2.4.27)$$
$$\mathcal{N}_o\,\tilde{\rho}_o(t) = \mathcal{N}_o\, e^{-i\vartheta t}\tilde{\rho}_o(t) = e^{-i\eta t}\mathcal{N}_o\,\tilde{\rho}_o(0) \qquad (2.4.28)$$

De tijdafhankelijkheid van de s-vector $\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t)$ wordt, net als de tijdafhankelijkheid van $\mathcal{N}_o\,\tilde{\rho}_o(t)$, bepaald door η . Als we op $t=0$ kiezen :

$$\tilde{\rho}_o(0) = \frac{1}{\mathcal{N}_o}\,\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(0) \qquad \text{d.w.z}\quad \overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(0) = \mathcal{N}_o\,\tilde{\rho}_o(0) \qquad (2.4.29)$$

dan geldt dit voor alle t :

$$\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t) = \mathcal{N}_o\,\tilde{\rho}_o(t)$$

ofwel :

$$\tilde{\rho}_o(t) = \frac{1}{\mathcal{N}_o}\,\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t) \qquad (2.4.30)$$
$$= \mathbb{P}_o\,\frac{1}{\mathcal{N}_o}\,\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t) \qquad (2.4.31)$$

Met (2.2.27) en (2.4.31) volgt :

$$\tilde{\rho}_c(t) = \mathbb{C}\,\frac{1}{\mathcal{N}_o}\,\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t) \qquad (2.4.32)$$

zodat ((2.4.31),(2.4.32)) :

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_o(t) + \tilde{\rho}_c(t) = (\mathbb{P}_o + \mathbb{C})\frac{1}{\mathcal{N}_o}\,\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t) = \mathbb{P}_a\,\frac{1}{\mathcal{N}_o}\,\overline{\mathbb{P}}_a\,\rho(t) \qquad (2.4.33)$$

Met de definitie :

$$\tilde{\pi} := \mathbb{P}_a\,\frac{1}{\mathcal{N}_o}\,\overline{\mathbb{P}}_a \qquad (2.4.34)$$

korten we (2.4.33) af tot :

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\pi}\, \rho(t) \tag{2.4.35}$$

De nieuwe s-operator $\tilde{\pi}$ is een projectieoperator :

$$\tilde{\pi}^2 = \mathbb{P}_\alpha \frac{1}{\mathcal{N}_0} \overline{\mathbb{P}}_\alpha \mathbb{P}_\alpha \frac{1}{\mathcal{N}_0} \overline{\mathbb{P}}_\alpha \overset{(2.4.14)}{=} \mathbb{P}_\alpha \frac{1}{\mathcal{N}_0} \mathcal{N}_0 \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} \overline{\mathbb{P}}_\alpha$$

$$= \mathbb{P}_\alpha \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} \overline{\mathbb{P}}_\alpha \underset{(2.4.15)}{=} \mathbb{P}_\alpha \frac{1}{\mathcal{N}_0} \overline{\mathbb{P}}_\alpha = \tilde{\pi} \tag{2.4.36}$$

Met (2.4.25) verifieren we eenvoudig dat :

$$\tilde{\pi}\, e^{-iLt} = e^{-iLt}\, \tilde{\pi} \tag{2.4.37}$$

zodat :

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\pi}\, \rho(t) = \tilde{\pi}\, e^{-iLt} \rho(0) = e^{-iLt}\, \tilde{\pi}\, \rho(0) = e^{-iLt}\, \tilde{\rho}(0) \tag{2.4.38}$$

Hier zien we bevestigd dat $\tilde{\rho}(t)$ een exacte oplossing van de Liouville-von-Neumannvergelijking is.
Eenvoudig gaan we na ((2.4.14),(2.4.15)) :

$$\begin{cases} \tilde{\pi}\, \mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}_\alpha & \tilde{\pi}\, \overline{\mathbb{P}}_\alpha = \tilde{\pi} \\ \mathbb{P}_\alpha\, \tilde{\pi} = \tilde{\pi} & \overline{\mathbb{P}}_\alpha\, \tilde{\pi} = \overline{\mathbb{P}}_\alpha \end{cases} \tag{2.4.39}$$

De tweede vergelijking van (2.4.39) combineren met (2.4.35) geeft :

$$\mathbb{P}_\alpha\, \tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t) \tag{2.4.40}$$

De asymptotische dichtheidsoperator is dus bevat in de $\mathbb{P}_\alpha$ deelruimte. Met (2.4.39) volgt ook :

$$\tilde{\pi}\, \tilde{\rho} = \tilde{\rho} \tag{2.4.41}$$

In feite is met (2.4.35) het gestelde doel bereikt want we hebben hiermee de gezochte relatie tussen $\tilde{\rho}(t)$ en $\rho(t)$. G.P.R. ontwikkelen de theorie echter nog wat verder. Volgens (2.4,34) is $\tilde{\pi}$ een projector. Dat betekent dat $1-\tilde{\pi}$ ook een projector is. Kunnen we voor $1-\tilde{\pi}$ een uitdrukking vinden analoog (2.4.34) voor $\tilde{\pi}$? Dit kan inderdaad. We zullen deze uitdrukking niet afleiden maar gewoon poneren en laten zien dat hij voldoet.

De s-operator gedefinieerd door :

$$\hat{\pi} := \overline{\mathbb{P}}_b \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_b \tag{2.4.42}$$

is een projectieoperator :

$$\hat{\pi}^2 = \hat{\pi} \tag{2.4.43}$$

en bovendien geldt :

$$\tilde{\pi} + \hat{\pi} = 1 \tag{2.4.44}$$

Het bewijs van (2.4.43) is, met gebruikmaking van (2.4.14) en (2.4.17), makkelijk te leveren. Om (2.4.44) te bewijzen schrijven we $\tilde{\pi}$ en $\hat{\pi}$ uit.

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi} + \hat{\pi} &= \mathbb{P}_a \frac{1}{\mathcal{N}_0} \overline{\mathbb{P}}_a + \overline{\mathbb{P}}_b \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_b = (\mathbb{P}_0 + \mathbb{C}) \frac{1}{\mathcal{N}_0} (\mathbb{P}_0 + \mathbb{D}) + (\mathbb{P}_c - \mathbb{D}) \frac{1}{\mathcal{N}_c} (\mathbb{P}_c - \mathbb{C}) \\
&= \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} \mathbb{P}_0 + \mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0} \mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} \mathbb{D} + \mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0} \mathbb{D} + \mathbb{P}_c \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_c - \mathbb{P}_c \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{C} - \mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_c + \mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{C} \underset{(2.4.14),(2.4.19)}{=} \\
&= \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} + \mathbb{C} \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} + \mathbb{P}_0 \mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c} + \mathbb{C} \mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c} + \mathbb{P}_c \frac{1}{\mathcal{N}_c} - \mathbb{P}_c \mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0} - \mathbb{D} \mathbb{P}_c \frac{1}{\mathcal{N}_c} + \mathbb{D} \mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0} \underset{(2.4.2),(2.4.3)}{=} \\
&= \mathbb{P}_0 \frac{1}{\mathcal{N}_0} + \cancel{\mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0}} + \cancel{\mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c}} + \mathbb{C} \mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c} + \mathbb{P}_c \frac{1}{\mathcal{N}_c} - \cancel{\mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0}} - \cancel{\mathbb{D} \frac{1}{\mathcal{N}_c}} + \mathbb{D} \mathbb{C} \frac{1}{\mathcal{N}_0} = \\
&= \mathbb{P}_0 (1 + \mathbb{D} \mathbb{C}) \frac{1}{\mathcal{N}_0} + \mathbb{P}_c (1 + \mathbb{C} \mathbb{D}) \frac{1}{\mathcal{N}_0} = \mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_c = 1
\end{aligned}$$

Met de operator $\hat{\pi}$ kan een s-vector $\hat{\rho}$ gekonstueerd worden, op dezelfde manier als met $\tilde{\pi}$ $\tilde{\rho}$ geconstrueerd wordt :

$$\hat{\rho}(t) := \hat{\pi}\, \rho(t) \tag{2.4.45}$$

Met (2.4.26) verifieert men dat :

$$\hat{\pi}\, e^{-iLt} = e^{-iLt}\, \hat{\pi} \tag{2.4.46}$$

waarmee :

$$\hat{\rho}(t) = e^{-iLt}\, \hat{\rho}(0) \tag{2.4.47}$$

Ook $\hat{\rho}(t)$ is een exacte oplossing van de Liouville-von-Neumannvergelijking. Analoog als voor $\tilde{\pi}$ leiden we voor $\hat{\pi}$ af ((2.4.14),(2.4.18)) :

$$\begin{cases} \hat{\pi}\, \overline{\mathbb{P}}_b = \overline{\mathbb{P}}_b & \qquad \hat{\pi}\, \mathbb{P}_b = \hat{\pi} \\ \overline{\mathbb{P}}_b\, \hat{\pi} = \hat{\pi} & \qquad \mathbb{P}_b\, \hat{\pi} = \mathbb{P}_b \end{cases} \tag{2.4.48}$$

Uit (2.4.45) en (2.4.48) :

$$\overline{\mathbb{P}}_\ell\, \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) \qquad (2.4.49)$$

De supervector $\hat{\rho}(t)$ is bevat in de $\mathbb{P}_\ell$ deelruimte. Uit (2.4.48) en (2.4.49) blijkt verder :

$$\hat{\pi}\, \hat{\varrho}(t) = \hat{\rho}(t) \qquad (2.4.50)$$

Voor de $\mathbb{P}_c$ resp. $\mathbb{P}_o$ component van $\hat{\rho}(t)$ kunnen we vergelijkingen analoog aan (2.2.20) en (2.2.27) voor $\tilde{\rho}_o(t)$ en $\tilde{\rho}_c(t)$ afleiden. Er geldt :

$$\hat{\rho}_c(t) = e^{-i\xi t}\, \hat{\rho}_c(0) \qquad (2.4.51)$$

$$\hat{\rho}_o(t) = -\mathbb{D}\, \hat{\rho}_c(t) \qquad (2.4.52)$$

Het bewijs van (2.4.51) : $\hat{\rho}_c(t) = \mathbb{P}_c\, \hat{\rho}(t) = \mathbb{P}_c\, \overline{\mathbb{P}}_\ell \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_\ell\, \rho(t) = \mathbb{P}_c \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_\ell\, \rho(t) = \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_c \mathbb{P}_\ell\, \rho(t)$

$= \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_\ell\, e^{-iLt} \rho(0) = \frac{1}{\mathcal{N}_c} e^{-i\lambda t} \mathbb{P}_\ell\, \varrho(0) = e^{-i\xi t} \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_\ell\, \rho(0) = e^{-i\xi t}\, \mathbb{P}_c\, \hat{\pi}\, \rho(0) = e^{-i\xi t}\, \hat{\rho}_c(0)$

Het bewijs van (2.4.52) : ga uit van (2.4.13) $\overline{\mathbb{P}}_\alpha\, \hat{\rho}(t) = \overline{\mathbb{P}}_\alpha\, \overline{\mathbb{P}}_\ell \frac{1}{\mathcal{N}_c} \mathbb{P}_\ell\, \varrho(t) = 0$

Met (2.4.7) : $\mathbb{P}_o\, \hat{\rho}(t) + \mathbb{D}\, \hat{\rho}(t) = 0$:

$$\hat{\rho}_o(t) = -\mathbb{D}\, \hat{\rho}(t) = -\mathbb{D}\, \hat{\rho}_c(t)$$

Vanwege (2.4.44) kunnen we schrijven :

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \tilde{\rho}(t) + \hat{\rho}(t) = \tilde{\rho}_o(t) + \tilde{\rho}_c(t) + \hat{\rho}_o(t) + \hat{\rho}_c(t) = (2.2.27)/(2.4.52) \\
&= \mathbb{P}_o\, \tilde{\rho}_o(t) + \mathbb{C}\, \tilde{\rho}_o(t) - \mathbb{D}\, \hat{\rho}_c(t) + \mathbb{P}_c\, \hat{\rho}_c(t) \\
&= (\mathbb{P}_o + \mathbb{C})\, \tilde{\rho}_o(t) + (\mathbb{P}_c - \mathbb{D})\, \hat{\rho}_c(t) \\
&= \mathbb{P}_\alpha\, \tilde{\varrho}_o(t) + \overline{\mathbb{P}}_\ell\, \hat{\rho}_c(t)
\end{aligned} \qquad (2.4.53)$$

$\rho(t)$ is hier geschreven als lineaire combinatie van $\tilde{\rho}_o(t)$ en $\hat{\rho}_c(t)$. Voor deze componenten geldt, met (2.2.20) en (2.2.51), in matrixnotatie :

$$i\,\partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_o(t) \\ \hat{\rho}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_o \\ \hat{\rho}_c \end{bmatrix} \qquad (2.4.54)$$

De componenten $\tilde{\rho}_0(t)$ en $\hat{\rho}_c(t)$ ontwikkelen zich dus onafhankelijk van elkaar. Dit in tegenstelling tot (2.2.7) waar de dichtheidsoperator ontbonden is in de componenten $\rho_0(t)$ en $\rho_c(t)$. In de beschrijving (2.4.53) echter, staan de componenten niet meer loodrecht op elkaar : $\mathbb{P}_a^{+}\bar{\mathbb{P}}_b \neq 0$, $\bar{\mathbb{P}}_b^{+}\mathbb{P}_a \neq 0$.
Door (2.4.53) met $\mathbb{P}_0$ resp. $\mathbb{P}_c$ te vermenigvuldigen kunnen $\rho_0(t)$ en $\rho_c(t)$ in $\tilde{\rho}_0(t)$ en $\hat{\rho}_c(t)$ uitgedrukt worden. We vinden met (2.4.15) en (2.4.18) :

$$\begin{bmatrix} \rho_0(t) \\ \rho_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbb{D} \\ \mathbb{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_0(t) \\ \hat{\rho}_c(t) \end{bmatrix} \tag{2.4.55}$$

De geinverteerde relaties relaties vinden we door $\rho(t) = \rho_0(t) + \rho_c(t)$ te vermenigvuldigen met $\mathbb{P}_b$ resp. $\bar{\mathbb{P}}_a$ en gebruik te maken van (2.4.14) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\rho}_0(t) \\ \hat{\rho}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{N}_0} & \frac{1}{\mathcal{N}_0}\mathbb{D} \\ -\frac{1}{\mathcal{N}_c}\mathbb{C} & \frac{1}{\mathcal{N}_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0(t) \\ \rho_c(t) \end{bmatrix} \tag{2.4.56}$$

De matrices die in (2.4.55) en (2.4.56) voorkomen zijn inderdaad elkaars inverse zoals direct uit (2.4.19).
De operatoren $\tilde{\pi}$ en $\hat{\pi}$ kunnen met behulp van de in (2.4.55) en (2.4.56) voorkomende matrices ook in matrixvorm geschreven worden. In dezelfde representatie:

$$\tilde{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbb{D} \\ \mathbb{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{N}_0} & \frac{1}{\mathcal{N}_0}\mathbb{D} \\ -\frac{1}{\mathcal{N}_c}\mathbb{C} & \frac{1}{\mathcal{N}_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{N}_0} & \frac{1}{\mathcal{N}_0}\mathbb{D} \\ \mathbb{C}\frac{1}{\mathcal{N}_0} & \mathbb{C}\frac{1}{\mathcal{N}_0}\mathbb{D} \end{bmatrix} \tag{2.4.57}$$

$$\hat{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbb{D} \\ \mathbb{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{N}_0} & \frac{1}{\mathcal{N}_0}\mathbb{D} \\ -\frac{1}{\mathcal{N}_c}\mathbb{C} & \frac{1}{\mathcal{N}_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\frac{1}{\mathcal{N}_c}\mathbb{C} & -\mathbb{D}\frac{1}{\mathcal{N}_c} \\ -\frac{1}{\mathcal{N}_c}\mathbb{C} & \frac{1}{\mathcal{N}_c} \end{bmatrix} \tag{2.4.58}$$

Inderdaad is b.v. : $\mathbb{P}_0 \tilde{\pi} \mathbb{P}_0 = \frac{1}{\mathcal{N}_0}$
Met deze matrixrelaties zien we bevestigd dat :

$$\tilde{\pi} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_0 \\ \tilde{\rho}_c \end{bmatrix} \tag{2.4.59}$$

$$\hat{\pi} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_0 \\ \hat{\rho}_c \end{bmatrix} \tag{2.4.60}$$

2.5. Het quantummechanische meetproces.

G.P.R. passen hun theorie toe over het gedrag van grote systemen toe op een meetapparaat dat een of andere observabele van een microscopisch systeem meet. Het meetproces kan opgevat worden als een irreversibel proces dat zich afspeelt in het meetapparaat. G.P.R. volgen hierbij een model van het quantummechanische meetproces dat voorgesteld is door Daneri, Loinger en Prosperi ([3]). Dit model zullen we kort bespreken.

Het quantummechanische meetproces volgens Daneri, Loinger en Prosperi.

Volgens D.L.P. voltrekt het meetproces zich in twee fasen.

1) In de eerste fase vindt er een koppeling plaats tussen het object en het meetapparaat. Het meetapparaat, dat voor de interactie in een soort rusttoestand was, wordt tengevolge van de interactie in een toestand gebracht die correspondeert met de begintoestand van het object. D.L.P. veronderstellen dat de koppeling gedurende een verwaarloosbaar korte tijd plaatsvindt en dat de toestand van het object niet beinvloed wordt.

2) In de tweede fase zijn object en meetapparaat weer ontkoppeld. Binnen het meetapparaat treedt nu een (ergodisch) proces in werking, dat het naar een evenwichtstoestand brengt die correspondeert met de toestand van het object ten tijde van de interactie. Deze evenwichtstoestand levert de gemeten waarde van de observabele.

Om dit schema uit te werken leggen D.L.P. bepaalde eisen op aan de constructie van het meetapparaat. De Hilbertruimte van toestanden van het object noemen we $\mathcal{H}_0$. Deze ruimte wordt opgespannen door een stel vectoren $\{|\varphi_s\rangle\}$, b.v. de eigenvectoren van de operator horend bij de observabele die gemeten wordt.
De Hilbertruimte van toestanden van het meetapparaat is $\mathcal{H}_M$. D.L.P. veronderstellen dat $\mathcal{H}_M$ lineaire deel-ruimten V_0 , V_1 , ... bevat die één-éénduidig corresponderen met met de toestanden $|\varphi_0\rangle$, $|\varphi_1\rangle$ .. enzovoorts. Deze deelruimten zullen in het algemeen meerdimensionaal zijn. De deelruimte V_s wordt opgespannen door de vectoren $\{|sm\rangle\}_m$ waarin m staat voor een quantumgetal (of een reeks quantumgetallen) dat de vector binnen V_s nader specificeerd. Ter illustratie : als het meetapparaat een wijzer bevat die verschillende posities in kan nemen, dan corresponderen de deelruimten V_s (d.w.z. het quantumgetal s) met de wijzerpositie terwijl m de interne toestand van de wijzer bepaald (b.v. hoe de diverse wijzeratomen ten op zichte van elkaar trillen). In deze zin bepaalt s de macroscopische toestand van het meetapparaat en m de microscopische.

De Hilbertruimte van het gecombineerde systeem, object en meetapparaat, is het directproduct van $\mathcal{H}_o$ en $\mathcal{H}_\eta$:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_o \otimes \mathcal{H}_\eta \tag{2.5.1}$$

Elementen van $\mathcal{H}_T$ noteren we met $|\psi\rangle$. Een basis voor $\mathcal{H}_T$ is het stelsel :

$$\left\{ |\psi_{t,sm}\rangle := |\varphi_t\rangle |sm\rangle \right\} \tag{2.5.2}$$

<u>De eerste fase volgens D.L.P.</u>

Als de toestand van het object voor de interactie

$$|\varphi\rangle = \sum_s c_s |\varphi_s\rangle \quad , \quad \sum_s |c_s|^2 = 1 \tag{2.5.3}$$

is, en de toestand van het meetapparaat is :

$$|0\,m\rangle \tag{2.5.4}$$

(een macroscopische "rusttoestand") dan is de toestand van het totale systeem voor de interactie :

$$|\psi_i\rangle := \sum_s c_s |\varphi_s\rangle |0m\rangle \tag{2.5.5}$$

Tijdens de interactie gaat $|\psi_i\rangle$ over in $|\psi_f\rangle$, de toestand van het totale systeem na de interactie :

$$|\psi_i\rangle = \sum_s c_s |\varphi_s\rangle |0\,m\rangle \tag{2.5.6}$$

$$\Big\downarrow \quad \text{interactie}$$

$$|\psi_f\rangle = \sum_s c_s |\varphi_s\rangle |s\,\cdot\cdot\rangle \tag{2.5.7}$$

We schrijven hier $|s\cdot\cdot\rangle$ omdat het tweede quantumgetal niet interessant is. Het gaat erom dat iedere component $|\varphi_s\rangle$ gekoppeld is met een element uit de overeenkomstige deelruimte V_s van $\mathcal{H}_\eta$.

Voor het vervolg zullen we dit schema nog formuleren in termen van dichtheidsoperatoren :

$$\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}| \otimes |om\rangle\langle om| \qquad (2.5.8)$$

$$\Big\downarrow \quad \text{interactie}$$

$$\rho_f = |\psi_f\rangle\langle\psi_f| = \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}| \otimes |s\cdots\rangle\langle s'\cdots| \qquad (2.5.9)$$

<u>De tweede fase volgens D.L.P.</u>

Direct na de interactie is de toestand van het object nog steeds $|\varphi\rangle = \sum_s c_s|\varphi_s\rangle$ In het meetapparaat treedt nu een ergodisch proces op dat het naar een evenwichtstoestand corresponderend met $|\varphi\rangle$ zal brengen. Wij gaan op D.L.P.'s analyse van dit proces niet in. Het belangrijkste is, volgens D.L.P.. dat dit proces de kruistermen in (2.5.9) doet verdwijnen.

<u>Het quantummechanische meetproces volgens George, Prigogine en Rosenfeld.</u>

G.P.R. gaan er, even als D.L.P., vanuit dat de Hilbertruimte $\mathcal{H}_M$ van het meetapparaat een aantal deelruimten V_0 , V_1 , ... bevat die resp. corresponderen met $|\varphi_0\rangle$, $|\varphi_1\rangle$, ... Zij nemen verder aan dat de correlaties tussen toestanden $|sm\rangle$ en $|s'm'\rangle$ met s ongelijk aan s' veel kleiner zijn dat de correlaties tussen toestanden $|sm\rangle$ en $|sm'\rangle$. Dat wil zeggen :

voor alle s , s' , m en m' en toestanden $\rho^{(M)}$ van het meetapparaat is :

$$s \neq s' \quad \langle sm|\rho^{(M)}|s'm'\rangle \ll \langle sm|\rho^{(M)}|sm'\rangle \qquad (2.5.10)$$

G.P.R. definiëren nu eerst, overeenkomstig hun theorie, de superoperatoren $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_c$ horend bij het meetapparaat. Laat :

$$P_{sm} := |sm\rangle\langle sm| \qquad (2.5.11)$$

zijn. P_{sm} is een orthogonale ($P_{sm}^+ = P_{sm}$) projectieoperator op de vector $|sm\rangle \in V_s$. $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_c$ zijn nu gedefiniëerd als :

$$\mathbb{P}_0 := \sum_{sm} P_{sm} \times P_{sm} \qquad (2.5.12)$$

$$\mathbb{P}_c := \sum_{ss'} {\sum_{mm'}}' P_{sm} \times P_{s'm'} \qquad (2.5.13)$$

$$\sum_{mm'}{}' := \begin{cases} s \neq s' : \sum_m \sum_{m'} \\ s = s' : \sum_m \sum_{m' \neq m} \end{cases} \tag{2.5.14}$$

$\mathbb{P}_0$ voegt aan iedere s-vector $\mathcal{A}$ zijn diagonaaldeel toe (in de gegeven basis). $\mathbb{P}_c$ voegt aan $\mathcal{A}$ zijn niet-diagonaaldeel toe. $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{P}_c$ kunnen geschreven worden als :

$$\mathbb{P}_0 = \sum_s \mathbb{P}_0^{(s)} \quad , \quad \mathbb{P}_c = \sum_{ss'} \mathbb{P}_c^{(ss')} \tag{2.5.15}$$

waarin :

$$\mathbb{P}_0^{(s)} := \sum_m P_{sm} \times P_{sm} \tag{2.5.16}$$

$$\mathbb{P}_c^{(ss')} := \sum_{mm'}{}' P_{sm} \times P_{s'm'} \tag{2.5.17}$$

G.P.R. definiëren voorts :

$$\mathbb{P}^{(ss')} := \delta_{ss'} \mathbb{P}_0^{(s)} + \mathbb{P}_c^{(ss')} = \delta_{ss'} \sum_m P_{sm} \times P_{sm} + \sum_{mm'}{}' P_{sm} \times P_{s'm'} \tag{2.5.18}$$

Op grond van (2.5.14) is (2.5.18) te herschrijven :

$$\mathbb{P}^{(ss')} = \delta_{ss'} \sum_{mm'} P_{sm} \times P_{sm'} + (1 - \delta_{ss'}) \sum_{mm'} P_{sm} \times P_{s'm'} \tag{2.5.19}$$

ofwel :

$$\mathbb{P}^{(ss')} = \sum_{mm'} P_{sm} \times P_{sm'} \tag{2.5.20}$$

Het is evident dat :

$$\sum_{ss'} \mathbb{P}^{(ss')} = \mathbb{I} \tag{2.5.21}$$

Verder is met (2.5.11), (2.5.16) t/m (2.5.18) en (2.5.20) in te zien dat :

$$\mathbb{P}_0^{(s)} \mathbb{P}_0^{(t)} = \delta_{st} \mathbb{P}_0^{(s)} \tag{2.5.22}$$

$$\mathbb{P}^{(ss')} \mathbb{P}^{(tt')} = \delta_{st} \delta_{s't'} \mathbb{P}^{(ss')} \tag{2.5.23}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)} \mathbb{P}^{(tt')} = \mathbb{P}^{(tt')} \mathbb{P}_0^{(s)} = \delta_{st} \delta_{st'} \mathbb{P}_0^{(s)} \tag{2.5.24}$$

Met deze resultaten tonen we aan dat :

$$\mathbb{P}_c^{(ss')}\,\mathbb{P}_c^{(tt')} = \delta_{st}\,\delta_{s't'}\,\mathbb{P}_c^{(ss')} \tag{2.5.25}$$

$$\mathbb{P}_c^{(ss')}\,\mathbb{P}^{(tt')} = \mathbb{P}^{(tt')}\,\mathbb{P}_c^{(ss')} = \delta_{st}\,\delta_{s't'}\,\mathbb{P}_c^{(ss')} \tag{2.5.26}$$

En, omdat $P_{sm}^{+} = P_{sm}$:

$$\mathbb{P}_o^{(s)+} = \mathbb{P}_o^{(s)} \tag{2.5.27}$$

$$\mathbb{P}^{(ss')+} = \mathbb{P}^{(ss')} \tag{2.5.28}$$

$$\mathbb{P}_c^{(ss')+} = \mathbb{P}_c^{(ss')} \tag{2.5.29}$$

$\mathbb{P}_o^{(s)}$, $\mathbb{P}_c^{(ss')}$, $\mathbb{P}^{(ss')}$ zijn dus orthogonale (in de zin van het H-S inproduct) projectieoperatoren. Er geldt :

$$\mathbb{P}_o^{(s)}\,\rho^{(n)} = \sum_m \langle s\,m|\,\rho^{(n)}\,|s\,m\rangle\,|s\,m\rangle\langle s\,m| \tag{2.5.30}$$

$$\mathbb{P}_c^{(ss')}\,\rho^{(n)} = {\sum_{mm'}}'\,\langle s\,m|\,\rho^{(n)}\,|s'm'\rangle\,|s\,m\rangle\langle s'm'| \tag{2.5.31}$$

$$\mathbb{P}^{(ss')}\,\rho^{(n)} = \sum_{mm'} \langle s\,m|\,\rho^{(n)}\,|s'm'\rangle\,|s\,m\rangle\langle s'm'| \tag{2.5.32}$$

Als we nog even terugdenken aan het model van het meetapparaat waar s de "macroscopische" toestand van de wijzer bepaalt en m de "microscopische" dan zien we eenvoudig in dat de apparaat-Hilbertruimte (of liever : dat deel van de apparaat-Hilbertruimte dat voor ons interessant is) in feite het tensorproduct is van een "macroscopische" toestandsruimte $\mathcal{H}_>$ en een "microscopische" toestandsruimte $\mathcal{H}_<$. $\mathcal{H}_>$ wordt opgespannen door $\{|s\rangle_>\}$, $\mathcal{H}_<$ door $\{|m\rangle_<\}$.

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_> \otimes \mathcal{H}_< \tag{2.5.33}$$

Om de fysische betekenis van (2.5.30), (2.5.31) en (2.5.32) wat te verduidelijken, zullen we aannemen dat de dichtheidsoperator $\rho^{(n)}$ geschreven kan worden als een tensorproduct van dichtheidsoperatoren $\rho_>$ en $\rho_<$ horend bij resp. $\mathcal{H}_>$ en $\mathcal{H}_<$. Dit kan bijvoorbeeld als $\rho^{(n)}$ een zuivere toestand , $|sm\rangle\langle sm|$, representeert : $|s\,m\rangle\langle s\,m| = |s\rangle\langle s| \otimes |m\rangle\langle m|$. Laat daarom :

$$\rho^{(n)} = \rho_> \otimes \rho_< \tag{2.5.34}$$

Substitueren we (2.5.34) in (2.5.30) t/m (2.5.33) dan vinden we direct :

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(\rho_> \otimes \rho_<) = \langle s|\rho_>|s\rangle\, |s\rangle\langle s| \otimes \sum_m \langle m|\rho_<|m\rangle\, |m\rangle\langle m|$$

$$= (|s\rangle\langle s| \times |s\rangle\langle s|)\,\rho_> \otimes \Big(\sum_m |m\rangle\langle m| \times |m\rangle\langle m|\Big)\,\rho_< \qquad (2.5.35)$$

$$\mathbb{P}_c^{(ss')}(\rho_> \otimes \rho_<) = \langle s|\rho_>|s'\rangle\, |s\rangle\langle s'| \otimes \sum_{mm'}{}' \langle m|\rho_<|m'\rangle\, |m\rangle\langle m'|$$

$$= (|s\rangle\langle s| \times |s'\rangle\langle s'|)\,\rho_> \otimes \Big(\sum_{mm'}{}' |m\rangle\langle m| \times |m'\rangle\langle m'|\Big)\,\rho_< \qquad (2.5.36)$$

$$\mathbb{P}^{(ss')}(\rho_> \otimes \rho_<) = \langle s|\rho_>|s'\rangle\, |s\rangle\langle s'| \otimes \sum_{mm'} \langle m|\rho_<|m'\rangle\, |m\rangle\langle m'|$$

$$= (|s\rangle\langle s| \times |s'\rangle\langle s'|)\,\rho_> \otimes (\mathbb{I} \times \mathbb{I})\,\rho_< \qquad (2.5.37)$$

$\mathbb{P}_0^{(s)}$ voegt aan $\rho_<$ zijn diagonaaldeel en aan $\rho_>$ een deel van zijn diagonaaldeel (n.l. datgene dat projecteert op $|s\rangle_>$) toe.
$\mathbb{P}_c^{(ss')}$ voegt, als $s \neq s'$, aan $\rho_<$ zichzelf toe en aan $\rho_>$ dat niet-diagonaledeel dat correspondeert met de partiele isometrie $|s\rangle\langle s'|$. Als $s = s'$ voegt $\mathbb{P}_c^{(ss)}$ aan $\rho_<$ zijn niet-diagonale deel toe en aan $\rho_>$ weer dat deel dat correspondeert met $|s\rangle\langle s'|$.
$\mathbb{P}^{(ss')}$ voegt aan $\rho_<$ zichzelf toe en aan $\rho_>$ het deel horend bij $|s\rangle\langle s'|$.

Opmerkingen.

1) De s-operator $\mathbb{P}_0 = \sum_s \mathbb{P}_0^{(s)}$ werkt op $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_> \otimes \mathcal{H}_<)$ d.w.z. op de ruimte van begrensde operatoren werkend op de hele ruimte $\mathcal{H}_n$. $\mathbb{P}_0$ kan niet dienen om het begrip "macroscopisch" te definieren. Dit is onmiddellijk duidelijk als we zien dat $\mathbb{P}_0$ symmetrisch is in de macroscopische en microscopische quantumgetallen (zie (2.5.12)).

2) Het is veeleer de s-operator $\mathbb{P}^{(ss')}$ die het macroscopische niveau definieert. $\mathbb{P}^{(ss')}$ werkt namelijk op de deelruimte $\mathcal{H}_<$ van $\mathcal{H}_n$ als de eenheidsoperator (zie (2.5.37)). We willen nog even de s-operator $\mathbb{P}^{(ss)}$ onder de loep nemen. Volgens (2.5.37) kunnen we schrijven :

$$\mathbb{P}^{(ss)} = |s\rangle\langle s| \times |s\rangle\langle s| \otimes \mathbb{I}_< \qquad (2.5.38)$$

waarin $\mathbb{I}_<$ de eenheidssuperoperator op $\mathcal{B}(\mathcal{H}_<)$ is. Met (1.48) zien we

$$\mathbb{P}^{(ss)} = \mathbb{P}_{>,s} \otimes \mathbb{I}_< \quad \left(\mathbb{P}_{>,s} := |s\rangle\langle s| \times |s\rangle\langle s| \right) \qquad (2.5.39)$$

We weten al dat $\mathbb{P}_{>,s}$ geen mimorfisme is. $\mathbb{P}^{(ss)}$ is dan ook geen mimorfisme. Met behulp van (1.51) echter kunnen we wel een mimorfisme construeren dat projecteert op dezelfde deelruimte als $\mathbb{P}_{>,s}$:

$$\mathbb{P}^{\sigma}_{>,s} = \sum_{t} |s><t| \times |t><s| \tag{2.5.40}$$

Het is nu na te gaan dat :

$$\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} := \mathbb{P}^{\sigma}_{>,s} \otimes \mathbb{I}_{<} \tag{2.5.41}$$

een mimorfisme is dat projecteert op dezelfde deelruimte als $\mathbb{P}^{(ss)}$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}^{(ss)}\,\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} = \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} \\ \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s}\,\mathbb{P}^{(ss)} = \mathbb{P}^{(ss)} \end{cases} \tag{2.5.42}$$

tevens geldt :

$$\mathbb{P}^{(tt)}\,\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} = 0 \quad , \quad t \neq s \tag{2.5.43}$$

3) Het begrip "macroscopisch" zoals dat hierboven behandelt wordt is een ander begrip dan het begrip "macroscopische niveau van observatie" zoals dat door G.P.R. met behulp van de s-operator $\tilde{\pi}$ gedefinieerd wordt (zie [1] 3.3.). Dat begrip heeft, zoals we gezien hebben, betrekking op het lange-termijn gedrag van het systeem. Het is te verwachten dat deze begrippen toch iets met elkaar te maken hebben, dat wil zeggen : het is te verwachten dat de s-operator $\tilde{\pi}$ iets te maken heeft met de deelruimte $\mathcal{H}_{>}$ van $\mathcal{H}_{n}$. Het moet nog blijken op welke manier.

<u>De eerste fase volgens George, Prigogine en Rosenfeld.</u>

Na al deze voorbereidingen kunnen we beginnen aan de beschrijving van het meetproces volgens G.P.R.. Met behulp van de projectieoperator $\mathbb{P}^{(ss')}$ kan de dichtheidsoperator $\rho^{(n)}$ gesplitst worden in "macroscopische" componenten :

$$\rho^{(n)} = \sum_{ss'} \mathbb{P}^{(ss')}\rho^{(n)} \tag{2.5.44}$$

De dichtheidsoperator $\rho_i^{(0)}$ van het object vóór de interactie is :

$$\rho_i^{(0)} = \sum_s c_s|\varphi_s> \cdot \sum_{s'} c^*_{s'}<\varphi_{s'}| = \sum_{ss'} c_s c^*_{s'}|\varphi_s><\varphi_{s'}| \tag{2.5.45}$$

Voor de interactie is het totale systeem in de toestand :

$$\rho_i^{(T)} = \rho_i^{(o)} \otimes \rho_i^{(m)} = \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}| \otimes \sum_{tt'} \mathbb{P}^{(tt')} \rho_i^{(m)} \tag{2.5.46}$$

Als gevolg van de interactie gaat $\rho_i^{(T)}$ over in $\rho_f^{(T)}$. Hierbij verandert de toestand van het meetapparaat wel die van het object echter niet :

$$\rho_i^{(T)} = \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}| \otimes \sum_{tt'} \mathbb{P}^{(tt')} \rho_i^{(m)}$$

$$\Big\downarrow \text{ interactie}$$

$$\rho_f^{(T)} = \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}| \otimes \mathbb{P}^{(ss')} \rho_f^{(m)} \tag{2.5.47}$$

Dit is geheel in overeenstemming met (2.5.8) en (2.5.9). Iedere component $c_s c_{s'}^* |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}|$ is toegevoegd aan een component $\mathbb{P}^{(ss')}\rho_f^{(m)}$ van de dichtheidsoperator $\rho_f^{(m)}$ van het meetapparaat na de interactie.

De tweede fase volgens George, Prigogine en Rosenfeld.

In deze fase treedt, zoals gezegd, in het meetapparaat een irreversibel proces op dat het in een evenwichtstoestand zal brengen die correspondeert met de toestand van het object voor de interactie. De toestand van het totale systeem aan het begin van dit proces (dus net na de interactie) is $\rho_f^{(T)}$. De toestand op tijdstip t na de interactie wordt nu :

$$\rho^{(T)}(t) = e^{-iL^{(T)}t} \rho_f^{(T)} \tag{2.5.48}$$

Hierin is $e^{-iL^{(T)}t}$ de tijdevolutiesuperoperator voor het hele systeem. Overeenkomstig de onafhankelijkheid van object en meetapparaat na de interactie nemen G.P.R. nu aan dat :

$$e^{-iL^{(T)}t} = e^{-iL^{(o)}t} \otimes e^{-iL^{(m)}t} \tilde{\pi} \tag{2.5.49}$$

$e^{-iL^{(o)}t}$ is de tijdevolutieoperator van het vrije object, $e^{-iL^{(m)}t}\tilde{\pi}$ de tijdevolutieoperator van het asymptotische deel van de dichtheidsoperator van het meetapparaat. De microscopische correlaties die geen aanleiding geven tot macroscopische effecten zijn hierbij in $\rho^{(m)}$ dus verwaarloosd. Substitueren we (2.5.47) en (2.5.46) in (2.5.48) dan krijgen we :

$$\rho^{(T)}(t) = \sum_{ss'} e^{-iL^{(o)}t} \rho_{ss'}^{(o)}(0) \otimes e^{-iL^{(m)}t} \tilde{\pi}\, \mathbb{P}^{(ss')} \rho_f^{(m)} \tag{2.5.50}$$

hierin is $\rho^{(o)}_{ss'}(o) = c_s c^*_{s'} |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}|$

G.P.R. stellen nu dat voor alle dichtheidsoperatoren $\rho^{(m)}$ van het meetapparaat geldt :

$$\mathbb{P}^{(ss')}\rho^{(m)} = \delta_{ss'}\,\mathbb{P}^{(ss)}\rho^{(m)} \tag{2.2.51}$$

Dit is niets anders dan de voorwaarde (2.5.10) waarin het linkerlid gelijk aan nul is gesteld. Volgens G.P.R. zullen van-wege (2.5.10) de s-operatoren Ψ , $\mathfrak{A}$ en η , die in feite de tijdevolutie van het meetapparaat bepalen, hoofdzakelijk overgangen van een $\mathbb{P}^{(s)}_o$ deelruimte (van $\mathbb{P}_o$) naar diezelfde deelruimte veroorzaken. Overgangen van de deelruimte $\mathbb{P}^{(s)}_o$ naar een $\mathbb{P}^{(s')}_o$ deelruimte met $s\neq s'$ zijn zeer onwaarschijnlijk en met de sterkere aanname (2.5.51) zelfs onmogelijk. Als dit niet zo zou zijn zou het uitsterven van de microscopische fluctuaties aanleiding kunnen geven tot verandering van de macroscopische wijzerpositie. Ook de s-operator $\mathbb{C}$ zal voornamelijk overgangen van een $\mathbb{P}^{(s)}_o$ naar een $\mathbb{P}^{(s)}_c$ toestand bewerkstelligen, Voor $\mathbb{D}$ geldt precies het omgekeerde . G.P.R. trekken uit deze overwegingen de conclusie dat :

$$\tilde{\pi}\,\mathbb{P}^{(ss)} = \mathbb{P}^{(ss)}\,\tilde{\pi} \tag{2.2.52}$$

Wij zullen hier aannemen dat dit juist is. Later zullen we dit plausibel maken. Met (2.5.51) en (2.5.52) wordt (2.5.50) :

$$\begin{aligned}\rho^{(T)}(t) &= \sum_{ss'} e^{-iL^{(o)}t}\rho^{(o)}_{ss'}(o) \otimes e^{-iL^{(m)}t}\delta_{ss'}\,\mathbb{P}^{(ss)}\tilde{\pi}\,\rho^{(m)}_f \\ &= \sum_s e^{-iL^{(o)}t}\rho^{(o)}_{ss}(o)\otimes e^{-iL^{(m)}t}\,\mathbb{P}^{(ss)}\tilde{\pi}\,\rho^{(m)}_f\end{aligned} \tag{2.5.53}$$

Tenslotten veronderstellen G.P.R dat $e^{-iL^{(m)}t}$ en $\mathbb{P}^{(ss)}$ commuteren :

$$e^{-iL^{(m)}t}\,\mathbb{P}^{(ss)} = \mathbb{P}^{(ss)}\,e^{-iL^{(m)}t} \tag{2.5.54}$$

Dit lijkt een terechte eis. Het wil zeggen dat de wijzerpositie een constante van de beweging is. Door (2.5.53) en (2.5.54) te combineren krijgen we :

$$\rho^{(T)}(t) = \sum_s e^{-iL^{(o)}t}\rho^{(o)}_{ss}(o)\otimes \mathbb{P}^{(ss)}\tilde{\rho}^{(m)}(t) \tag{2.5.55}$$

De toestand van het objectsysteem op tijdstip t krijgen we hieruit door het spoor over de ruimte $\mathcal{H}_m$ te nemen :

$$\rho^{(o)}(t) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_m}\,\rho^{(T)}(t) = \sum_s e^{-iL^{(o)}t}\rho^{(o)}_{ss}(o)\cdot \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_m}\,\mathbb{P}^{(ss)}\tilde{\rho}^{(m)}(t) \tag{2.5.56}$$

Nu rekenen we eenvoudig na dat :

$$\underset{\mathcal{H}_n}{\mathrm{Tr}}\ \mathbb{P}^{(ss)}\tilde{\rho}^{(n)}(t) = \sum_m \langle sm|\tilde{\rho}^{(n)}(t)|sm\rangle =: p_s\ (<1) \tag{2.5.57}$$

hierin is p_s de kans op de macroscopische waarde s op tijdstip t . In het algemeen zal dit <1 zijn. Dat betekent dat (2.5.56) niet correct kan zijn omdat dan zou gelden:

$$\underset{\mathcal{H}_0}{\mathrm{Tr}}\ \rho^{(o)}(t) = \underset{\mathcal{H}_0}{\mathrm{Tr}} \sum_s |c_s|^2 e^{-iL^{(o)}t} |\varphi_s\rangle\langle\varphi_s| \cdot p_s = \sum_s |c_s|^2 p_s < 1 \tag{2.5.58}$$

$\rho^{(o)}(t)$ zou geen dichtheidsoperator meer zijn. G.P.R. stellen nu dat :

$$\forall_s \lim_{t\to\infty} \underset{\mathcal{H}_n}{\mathrm{Tr}}\ \mathbb{P}^{(ss)}\tilde{\rho}^{(n)}(t) = 1 \tag{2.5.59}$$

Ze verduidelijken dit niet verder. Het is waarschijnlijk geinspireerd door de meer elementaire behandeling van de eerste fase van het meetproces zoals uitgevoerd door D.L.P. (zie (2.5.9)). In dat schema is namelijk wel :

$$\mathrm{Tr}\ |s\cdots\rangle\langle s'\cdots| = 1\cdot\delta_{ss'} \tag{2.5.60}$$

Aan (2.5.59) is wel voldaan als $\mathbb{P}^{(ss)}\tilde{\rho}^{(n)}(t)$ een dichtheidsoperator is wanneer $\tilde{\rho}^{(n)}(t)$ dit is. Met andere woorden : aan (2.5.59) is wel voldaan als $\mathbb{P}^{(ss)}$ een mimorfisme is. We hebben al gezien ((2.5.39) e.v.) dat dit niet zo is. In feite zit het al mis in (2.5.47) omdat gemakkelijk is in te zien dat, met $\mathbb{P}^{(ss')}$ gegeven door (2.5.18), geldt : $\underset{\mathcal{H}_T}{\mathrm{Tr}}\ \rho_f^{(T)} < 1$. Immers :

$$\begin{aligned}
\underset{\mathcal{H}_T}{\mathrm{Tr}}\ \rho_f^{(T)} &= \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* \sum_t \langle\varphi_{t'}|\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}|\varphi_{t'}\rangle \cdot \sum_{nt}\langle nt|\mathbb{P}^{(ss')}\rho_f^{(n)}|nt\rangle \\
&= \sum_{t'} |c_{t'}|^2 \cdot \sum_{nt}\langle nt|\mathbb{P}^{(t't')}\rho_f^{(n)}|nt\rangle. \\
&= \sum_{t'} |c_{t'}|^2 \sum_{nt}\sum_{mm'} \langle nt|\mathbb{P}_{t'm}\,\rho_f^{(n)}\,\mathbb{P}_{t'm'}|nt\rangle \\
&= \sum_{t'} |c_{t'}|^2 \sum_{nt}\sum_{mm'} \delta_{nt'}\delta_{tm}\delta_{tm'}\langle nt|\rho_f^{(n)}|nt\rangle \\
&= \sum_{nm} |c_n|^2 \langle nm|\rho_f^{(n)}|nm\rangle < \underset{\mathcal{H}_T}{\mathrm{Tr}}\ \rho_f^{(n)}
\end{aligned}$$

$$\text{omdat i.h.a. } |c_n|^2 < 1. \tag{2.5.61}$$

Wanneer we echter in (2.5.47) in plaats van $\mathbb{P}^{(ss)}$ het op dezelfde deelruimte projecterende mimorfisme $\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s}$ nemen , dan gaat het wel goed, want :

$$\underset{\mathcal{H}_T}{\mathrm{Tr}} \left\{ \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}| \otimes \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s}\,\rho_f^{(n)} \right\} =$$

$$= \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_o} |\varphi_s\rangle\langle\varphi_{s'}| \otimes \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_m} \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} \rho^{(m)}_f$$

$$= \sum_{ss'} c_s c_{s'}^* \delta_{ss'} \cdot 1 = \sum_s |c_s|^2 = 1. \tag{2.5.62}$$

We moeten dan in het voorgaande overal $\mathbb{P}^{(\varepsilon s)}$ vervangen door $\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s}$, waarmee aan (2.5.59) is voldaan (deze maatregel is voldoende omdat alleen de diagonaaltermen met $s=s'$ maar bijdragen tot het spoor). (2.5.56) wordt nu :

$$\rho^{(o)}(t) = \sum_s e^{-iL^{(o)}t} \rho^{(o)}_{ss}(0)$$

$$= \sum_s |c_s(t)|^2 |\varphi_s\rangle\langle\varphi_s| \quad , (t\to\infty) \tag{2.5.63}$$

Dit is het eindresultaat van G.P.R.. Zij merken op dat het een asymptotisch resultaat is dat in overeenstemming is met de Schrödingervergelijking. Omdat ze hier in feite het projectiepostulaat hebben afgeleid uit hun theorie en daarbij alleen gebruik hebben van quantummechanica, hebben ze bewezen dat het mogelijk is het meetproces, inclusief projectiepostulaat; op een quantummechanische manier consistent te beschrijven. Tenslotte geeft het verschil tussen de gereduceerde dichtheidsoperator (2.5.63) en de oorspronkelijke dichtheidsoperator van het object (2.5.45) naar de mening van G.P.R. de verandering in onze kennis t.g.v. de meting weer. We maken hierbij een paar

Opmerkingen.

1) voor G.P.R. is (2.5.63) de apotheose van het quantummechanische meetproces. Dit proces zorgt voor de overgang van $\rho^{(o)}(0)$ naar $\rho^{(o)}(t)$. Daarbij wordt het van groot belang geacht dat de kruistermen in de eindtoestand zijn verdwenen. De interpretatie daarvan is dat het object zich in de eindtoestand met zekerheid in een van de eigentoestanden $|\varphi_s\rangle$ bevindt. De zin van dit alles is nogal omstreden omdat de eindtoestand van het object nauwelijks interessant is. Het is juist de eindtoestand van het meetapparaat die ons interesseert omdat deze ons informatie over de begintoestand van het object zou moeten geven (vooropgezet dat het een goed meetapparaat is). Daarom bekijken we in plaats van (2.5.56) het partiële spoor over de object-Hilbertruimte $\mathcal{H}_o$:

$$\rho^{(m)}(t) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_o} \rho^{(T)}(0) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_o} \sum_s e^{-iL^{(o)}t} \rho^{(o)}_{ss}(0) \otimes \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} \tilde{\rho}^{(m)}_f(t)$$

$$= \sum_s \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_o} e^{-iL^{(o)}t} \rho^{(o)}_{ss}(0) \cdot \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} \tilde{\rho}^{(m)}_f(t)$$

$$= \sum_s \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_o} \rho^{(o)}_{ss}(0) \cdot \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} \tilde{\rho}^{(m)}_f(t)$$

$$= \sum_s |c_s|^2 \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s} \tilde{\rho}^{(m)}_f(t) \tag{2.5.64}$$

Hieruit volgt dat de kans p_s om het meetapparaat asymptotisch aan te treffen in de macroscopische toestand s gelijk is aan :

$$
\begin{aligned}
p_s &= \operatorname*{Tr}_{\mathcal{H}_n} \sum_m P_{sm}\, \rho^{(n)}(t) = \operatorname*{Tr}_{\mathcal{H}_n} \sum_{mm'} P_{sm}\, \rho^{(n)}_t\, P_{sm'} = \\
&= \operatorname*{Tr}_{\mathcal{H}_n} \mathbb{P}^{(ss)} \rho^{(n)}(t) \\
&= \sum_t |c_t|^2 \operatorname*{Tr}_{\mathcal{H}_n} \mathbb{P}^{(ss)}\, \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,t}\, \tilde{\rho}^{(n)}_t(t) \\
&= \sum_t |c_t|^2 \operatorname*{Tr}_{\mathcal{H}_n} \mathbb{P}^{\Sigma}_{>,t}\, \tilde{\rho}^{(n)}_t \cdot \delta_{st} \\
&= |c_s|^2
\end{aligned}
\tag{2.5.65}
$$

Op grond van (2.5.42) en (2.5.43). Dit is inderdaad wat van een meetapparaat verwacht wordt.

2) We willen hier (2.2.52) nog plausibel maken. Zoals gezegd stellen G.P.R. dat de operator $\mathbb{C}$ voornamelijk overgangen van een $\mathbb{P}_0^{(s)}$ toestand naar een $\mathbb{P}_c^{(ss)}$ toestand bewerkstelligt en $\mathbb{D}$ juist omgekeerd. We willen dit nu in formules weergeven. Allereerst zijn uitgaande van de definities van $\mathbb{P}_0^{(s)}$, $\mathbb{P}_c^{(ss)}$, $\mathbb{P}^{(ss)}$ en $\mathbb{P}_0$ en de relaties (2.5.22) en (2.5.25) de volgende vergelijkingen af te leiden:

$$\mathbb{P}_0^{(s)} \mathbb{P}_c^{(tt)} = \mathbb{P}_c^{(tt)} \mathbb{P}_0^{(s)} = 0 \quad \forall s,t \tag{2.5.66}$$

$$\mathbb{P}_0 \mathbb{P}_0^{(s)} = \mathbb{P}_0^{(s)} \mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_0^{(s)} \quad \forall s \tag{2.5.67}$$

$$\mathbb{P}_0 \mathbb{P}_c^{(ss)} = \mathbb{P}_c^{(ss)} \mathbb{P}_0 = 0 \quad \forall s \tag{2.5.68}$$

Stellen we nu dat voor $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ gelden :

$$\mathbb{C} = \sum_t \mathbb{P}_c^{(tt)}\, \mathbb{C}\, \mathbb{P}_0^{(t)} \tag{2.5.69}$$

$$\mathbb{D} = \sum_t \mathbb{P}_0^{(t)}\, \mathbb{D}\, \mathbb{P}_c^{(tt)} \tag{2.5.70}$$

dan is in ieder geval voldaan aan de eisen die G.P.R. stellen, want nu is inderdaad :

$$s \neq t : \quad \mathbb{P}_c^{(tt)}\, \mathbb{C}\, \mathbb{P}_0^{(s)} = 0 \tag{2.5.71}$$

$$s \neq t : \quad \mathbb{P}_0^{(s)}\, \mathbb{D}\, \mathbb{P}_c^{(tt)} = 0 \tag{2.5.72}$$

Ook is nu (2.5.52) af te leiden. We stellen hiertoe eerst drie vergelijkingen op

i) $(\mathbb{P}_o+\mathbb{D})\,\mathbb{P}^{(ss)} = (\mathbb{P}_o+\mathbb{D})(\mathbb{P}_o^{(s)}+\mathbb{P}_c^{(ss)}) = \mathbb{P}_o\mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{D}\,\mathbb{P}_c^{(ss)} = \mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{D}\,\mathbb{P}_c^{(ss)}$

$$\mathbb{P}_o^{(s)}(\mathbb{P}_o+\mathbb{D}) = \mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{D} + \mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{P}_o = \mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{D}\,\mathbb{P}_c^{(ss)}$$

hiermee zien we :

$$\mathbb{P}_o^{(s)}(\mathbb{P}_o+\mathbb{D}) = (\mathbb{P}_o+\mathbb{D})\,\mathbb{P}_o^{(s)} \tag{2.5.73}$$

ii) $\mathbb{P}^{(ss)}(\mathbb{P}_o+\mathbb{C}) = (\mathbb{P}_o^{(s)}+\mathbb{P}_c^{(ss)})(\mathbb{P}_o+\mathbb{C}) = \mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{P}_o + \mathbb{P}_c^{(ss)}\mathbb{C} = \mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{P}_c^{(ss)}\mathbb{C}\,\mathbb{P}_o^{(s)}$

$$(\mathbb{P}_o+\mathbb{C})\,\mathbb{P}_o^{(s)} = \mathbb{P}_o\mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{C}\,\mathbb{P}_o^{(s)} = \mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{P}_c^{(ss)}\mathbb{C}\,\mathbb{P}_o^{(s)}$$

dit levert :

$$\mathbb{P}^{(ss)}(\mathbb{P}_o+\mathbb{C}) = (\mathbb{P}_o+\mathbb{C})\,\mathbb{P}_o^{(s)} \tag{2.5.74}$$

iii) $(\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C})\,\mathbb{P}_o^{(s)} = \mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{D}(\mathbb{P}_c^{(ss)}\mathbb{C}\,\mathbb{P}_o^{(s)}) = \mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{D}\,\mathbb{P}_c^{(ss)}\mathbb{C}\,\mathbb{P}_o^{(s)}$

$$\mathbb{P}_o^{(s)}(\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C}) = \mathbb{P}_o^{(s)} + (\mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{D}\,\mathbb{P}_c^{(ss)})\,\mathbb{C} = \mathbb{P}_o^{(s)} + \mathbb{P}_o^{(s)}\mathbb{D}\,\mathbb{P}_c^{(ss)}\mathbb{C}\,\mathbb{P}_o^{(s)}$$

zodat :

$$(\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C})\,\mathbb{P}_o^{(s)} = \mathbb{P}_o^{(s)}(\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C})$$

ofwel :

$$\mathbb{P}_o^{(s)}\frac{1}{\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C}} = \frac{1}{\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C}}\,\mathbb{P}_o^{(s)} \tag{2.5.75}$$

Nu is :

$$\tilde{\pi}\,\mathbb{P}^{(ss)} = (\mathbb{P}_o+\mathbb{C})\frac{1}{\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C}}(\mathbb{P}_o+\mathbb{D})\,\mathbb{P}^{(ss)} \overset{(i)}{=} (\mathbb{P}_o+\mathbb{C})\frac{1}{\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C}}\,\mathbb{P}_o^{(s)}(\mathbb{P}_o+\mathbb{D})$$

$$\overset{(iii)}{=} (\mathbb{P}_o+\mathbb{C})\,\mathbb{P}_o^{(s)}\frac{1}{\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C}}(\mathbb{P}_o+\mathbb{D}) \overset{(ii)}{=} \mathbb{P}^{(ss)}(\mathbb{P}_o+\mathbb{C})\frac{1}{\mathbb{I}+\mathbb{D}\mathbb{C}}(\mathbb{P}_o+\mathbb{D})$$

$$= \mathbb{P}^{(ss)}\,\tilde{\pi} \tag{2.5.52}$$

Deze relatie is alleszins opmerkelijk. Hij legt in feite het verband tussen de twee begrippen "macroscopisch" waar we het al over gehad hebben. $\tilde{\pi}$ is de pro-operator die het "macroscopisch niveau van observatie" definieert. Dit houdt het lange-termijngedrag van het systeem in. $\mathbb{P}^{(s)}$ is de projectieoperator de het begrip "macroscopisch" definieert in de zin van macroscopische wijzertoestanden. Beide projectieoperatoren commuteren. Dat betekent dat $\mathbb{P}^{(s)}\tilde{\pi}$ weer een projectieoperator is. Wat de betekenis van dit alles precies is, is nog niet duidelijk.

Hoofdstuk 3. De theorie van de Muynck.

In analyses van het quantummechanische meetproces spelen de begrippen causaliteit en lokale commutativiteit een grote rol. Van causaliteit wordt gesproken als metingen uitgevoerd in causaal gescheiden gebieden elkaars meetresultaten niet beinvloeden. Lokale commutativiteit wil zeggen dat operatoren toegevoegd aan causaal gescheiden gebieden (uit $\mathbb{R}^3$ of M^4) altijd commuteren. In zijn proefschrift ([2]) onderzoekt de Muynck of lokale commutativiteit noodzakelijk dan wel voldoende is voor causaliteit. In zijn formalisme definiëert hij lokale operatoren en lokale toestanden met behulp van niet zelfgeadjungeerde superprojectieoperatoren. De eisen waaraan deze s-projectoren moeten voldoen onderzoekt dM. door eerst in een concrete representatie van de toestandsruimte te gaan werken. Daarna abstraheert hij tot representatievrije definities. Wij zullen hier een klein gedeelte van de theorie, slechts dat deel dat betrekking heeft op de genoemde s-projectoren, uiteenzetten. Onze werkwijze is niet helemaal identiek met die van dM. omdat we van het begin af aan s-projectieoperatoren zullen adjungeren met betrekking tot het Hilbert-Schmidtinproduct, iets wat dM. niet doet. We zullen nog laten zien dat beide versies equivalent zijn.

3.1. Gelokaliseerde quanta.

We beschouwen een scalar bosonveld in de $\mathbb{R}^3$ (we werken niet relativistisch). De Hilbertruimte $\mathcal{H}$ van toestanden van het systeem is de gewone Fockruimte. Een willekeurige toestand van het systeem kan geschreven worden als (zie [4]) :

$$|\psi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N!}} \int_{\mathbb{R}^3} d\bar{r}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} d\bar{r}_N \, \Psi_N(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_N)\, \psi^+(\bar{r}_1)\cdots\psi^+(\bar{r}_N)|0\rangle \qquad (3.1.1)$$

Hierin zijn de $\Psi_N(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_N)$ functies die symmetrisch zijn onder permutaties van de coordinaten. De veldoperatoren $\psi(\bar{r})$ en $\psi^+(\bar{r})$ voldoen aan de gebruikelijke commutatieregels :

$$\begin{aligned} [\psi(\bar{r}), \psi^+(\bar{r}')] &= \delta(\bar{r}-\bar{r}') \\ [\psi(\bar{r}), \psi(\bar{r}')] &= [\psi^+(\bar{r}), \psi^+(\bar{r}')] = 0 \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

$|0\rangle$ is de vacuumtoestand gedefinieerd door $\psi(\bar{r})|0\rangle = 0$.
In (3.1.1) is $|\psi\rangle$ een sommatie over N-deeltjes toestanden :

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \int_{\mathbb{R}^3} d\bar{r}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} d\bar{r}_N \, \Psi_N(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_N)\, \psi^+(\bar{r}_1)\cdots\psi^+(\bar{r}_N)|0\rangle \qquad (3.1.3)$$

Deze Fockruimtetoestand correspondeert met een $\mathcal{N}$-deeltjes golffunctie $\bar{\Psi}_{\mathcal{N}}(\bar{r}_1 \cdots \bar{r}_{\mathcal{N}})$
De vectoren

$$|\bar{r}_1', \cdots, \bar{r}_{\mathcal{N}}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}!}} \psi^+(\bar{r}_1') \cdots \psi^+(\bar{r}_{\mathcal{N}}')|0\rangle \tag{3.1.4}$$

vormen een volledige (Dirac-)orthonormale basis voor de Fockruimte. De vectoren (3.1.4) corresponderen met de (nog niet gesymmetriseerde) $\mathcal{N}$-deeltjes golffuncie

$$\Psi_{\mathcal{N}}(\bar{r}_1, \cdots, \bar{r}_{\mathcal{N}}) = \delta(\bar{r}_1 - \bar{r}_1') \cdot \cdots \cdot \delta(\bar{r}_{\mathcal{N}} - \bar{r}_{\mathcal{N}}') \tag{3.1.5}$$

Deze golffunctie beschrijft een $\mathcal{N}$-deeltjestoestand waarin de quanta gelokaliseerd zijn in $\bar{r}_1'$ t/m $\bar{r}_{\mathcal{N}}'$. Om deze reden kunnen we zeggen dat de Fockruimte vectoren (3.1.4) gelokaliseerde toestanden van het veld beschrijven (in ieder geval na symmetrisatie). Lineaire combinaties van toestanden (3.1.4) waarbij alle $\bar{r}_1' \cdots \bar{r}_{\mathcal{N}}'$ in een of ander gebied $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$ liggen leveren een in dat gebied $\mathbb{C}$ gelokaliseerde $\mathcal{N}$-deeltjes Fockruimtevector. Een algemene in $\mathbb{C}$ gelokaliseerde vector is te construeren door de $\mathcal{N}$-deeltjes vectoren voor verschillende $\mathcal{N}$ te sommeren:

$$|\psi\rangle_C = \sum_{\mathcal{N}=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}!}} \int_{\mathbb{C}} d\bar{r}_1 \cdots \int_{C} d\bar{r}_{\mathcal{N}} \, \Psi_{\mathcal{N}}(\bar{r}_1, \cdots, \bar{r}_{\mathcal{N}}) \psi^+(r_1) \cdots \psi^+(\bar{r}_{\mathcal{N}})|0\rangle \tag{3.1.6}$$

(3.1.6) verschilt van (3.1.1) uitsluitend hierin dat slechts over $\mathbb{C}$ geintegreerd wordt in plaats van over $\mathbb{R}$. In het vervolg wordt gewerkt met de basis vectoren (3.1.4). Deze worden genoteerd met $|\{n\}, \{\bar{n}\}\rangle$. n is hierin het bezettingsgetal van de eéndeeltjestoestand $\delta(\bar{r} - \bar{r}'), \bar{r}' \in \mathbb{C}$, $\{n\}$ is de verzameling van die bezettingsgetallen. Een zelfde definitie geldt voor $\{\bar{n}\}$ met betrekking tot het gebied $\bar{\mathbb{C}}$, het complement van $\mathbb{C}$. De som van alle elementen van $\{n\}$ en $\{\bar{n}\}$ is $\mathcal{N}$, het totale deeltjes aantal. De orthogonaliteit van de vectoren houdt in :

$$\langle\{n\}, \{\bar{n}\} | \{m\}\{\bar{m}\}\rangle = \delta_{\{n\}\{m\}} \, \delta_{\{\bar{n}\}\{\bar{m}\}} \tag{3.1.7}$$

Om schrijfwerk te bekorten zullen we $|\{n\}\{\bar{n}\}\rangle$ afkorten tot $|n\bar{n}\rangle$. In het bovenstaande is $\{n\}$ uiteraard te interpreteren als een dichtheid $\bar{n}(\bar{r})$ en zijn de δ-'s in (3.1.7) Dirac-deltafuncties. In het volgende zullen we toch een discrete notatie aanhouden, daarbij ervan uitgaand dat de quantisatie heeft plaatsgevonden in een aftelbare basis van (normeerbare) een-deeltjesfuncties i.p.v. in de continue basis van (oneigenlijke) functies $\delta(\bar{r} - \bar{r}')$.

3.2. Lokale operatoren.

De Muynck wil nu komen tot een definitie van het begrip "lokale operator met betrekking tot een gebied $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$ ". Hiertoe merkt hij op dat een lokale operator A_C , toegevoegd aan het gebied $\mathbb{C}$, in ieder geval moet voldoen aan de volgende voorwaarden :

i) A_C mag geen invloed hebben op het aantal quanta buiten $\mathbb{C}$.

ii) Het effect van de operator binnen $\mathbb{C}$ moet onafhankelijk zijn van de aanwezigheid van het aantal quanta buiten $\mathbb{C}$.

Als we werken in de $\{|n\bar{n}\rangle\}$ basis van de ruimte $\mathcal{H}$, betekenen deze eisen mathematisch :

$$\langle n\bar{n} |\, A_C \,| m\bar{m}\rangle = \delta_{\bar{m}\bar{n}} \langle n0 |\, A_C \,| m0\rangle \tag{3.2.1}$$

Vermenigvuldig nu in (3.2.1) linker- en rechterlid met de partiele isometrie $|n\bar{n}\rangle\langle m\bar{m}|$ en sommeer over n , $\bar{n}$, m en $\bar{m}$. In het linkerlid onstaat dan $I \cdot A_C \cdot I = A_C$ dus :

$$A_C = \sum_{n\bar{n}m} \langle n0 | A_C | m0\rangle \, | n\bar{n}\rangle\langle m\bar{n} | \tag{3.2.2}$$

of :

$$\begin{aligned} A_C &= \sum_{\bar{n}} \left\{ \sum_{n} |n\bar{n}\rangle\langle n0| \times \sum_{m} |m0\rangle\langle m\bar{n}| \right\} A_C \\ &= \mathbb{P}_C^{\ddagger} A_C \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

waarin :

$$\mathbb{P}_C^{\ddagger} := \sum_{\bar{n}} \left\{ \sum_{n} |n\bar{n}\rangle\langle n0| \times \sum_{m} |m0\rangle\langle m\bar{n}| \right\} \tag{3.2.4}$$

een s-operator is. Operatoren die aan (3.2.1) voldoen, voldoen dus ook aan (3.2.3). Omgekeerd is eenvoudig in te zien dat als een s-operator aan (3.2.3) voldoet, voor de matrixelementen van die operator (3.2.1) geldt. Om deze reden kunnen lokale operatoren gedefinieerd worden als operatoren die aan (3.2.3) voldoen.

Nu onderzoeken we $\mathbb{P}_C^{\ddagger}$ nader. Definiëer de operatoren :

$$A_{\bar{n}} := \sum_{n} |n0\rangle\langle n\bar{n}| \tag{3.2.5}$$

De geadjungeerde van $A_{\bar{n}}$ (m.b.t. het inproduct $\langle\cdot|\cdot\rangle$) is :

$$A^{+}_{\bar{n}} = \sum_{n} |n\bar{n}\rangle\langle n0| \tag{3.2.6}$$

Door gebruik te maken van de orthonormaliteit van de vectoren $\{|n\bar{n}\rangle\}$ is eenvoudig na te gaan dat :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & A_{\bar{m}} A_{\bar{n}} = \delta_{\bar{m}0} A_{\bar{n}} \\ \text{ii)} & A^{+}_{\bar{m}} A^{+}_{\bar{n}} = \delta_{\bar{n}0} A^{+}_{\bar{m}} \\ \text{iii)} & A_{\bar{m}} A^{+}_{\bar{n}} = \delta_{\bar{m}\bar{n}} A_{0} \\ \text{iv)} & A^{+}_{\bar{m}} A_{\bar{n}} = \sum_{n} |n\bar{m}\rangle\langle n\bar{n}| \end{array} \tag{3.2.7}$$

Met de operatoren $A_{\bar{n}}$, $A^{+}_{\bar{n}}$ en hun eigenschappen zien we dat :

$$\mathbb{P}^{\#}_{\mathbb{C}} = \sum_{\bar{n}} A^{+}_{\bar{n}} \times A_{\bar{n}} \tag{3.2.8}$$

en bovendien :

$$\mathbb{P}^{\#\,2}_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_{c} \tag{3.2.9}$$

$$(\mathbb{P}^{\#}_{c})^{+} \neq \mathbb{P}^{\#}_{c} \tag{3.2.10}$$

Het belang van dit alles is dat de lokale operatoren m.b.t. het gebied $\mathbb{C}$ gedefiniëerd worden als de eigenoperatoren, bij eigenwaarde 1, van een niet zelfgeadjungeerde superprojectieoperator $\mathbb{P}^{\#}_{c}$.

3.3. Lokale toestanden.

We zullen nu de geadjungeerde $\mathbb{P}_{c}$ van $\mathbb{P}^{\#}_{c}$ bestuderen. Deze s-operator kunnen we berekenen met (1.16) :

$$\mathbb{P}_{c} = \sum_{\bar{n}} A_{\bar{n}} \times A^{+}_{\bar{n}} \tag{3.3.1}$$

Dit is vanzelfsprekend ook een s-projectieoperator.
Met (3.2.5), (3.2.6) en (3.2.7) zien we in dat voor alle operatoren B :

$$\langle n\bar{n}|\mathbb{P}_{c} B|n\bar{n}\rangle = \delta_{0\bar{n}} \sum_{\ell} \langle n\bar{\ell}|B|n\bar{\ell}\rangle \tag{3.3.2}$$

Uit (3.3.2) blijkt dat $\mathbb{P}_c$ positieve operatoren op positieve operatoren afbeeldt :

$$\mathcal{B} \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}_c \mathcal{B} \geq 0 \tag{3.3.3}$$

Uit (3.3.2) valt verder, door sommeren over n en $\bar{n}$, af te leiden :

$$\mathrm{Tr}\, \mathbb{P}_c \mathcal{B} = \mathrm{Tr}\, \mathcal{B} \qquad (3.3.4))$$

$\mathbb{P}_c$ laat het spoor van een willekeurige s-vector invariant. Uit (3.3.3) en (3.3.4) blijkt dat $\mathbb{P}_c$ een mimorfisme is. $\mathbb{P}_c$ beeldt dus dichtheidsoperatoren af op dichtheidsoperatoren. Als ρ een willekeurige dichtheidsoperator is, wat is dan de fysische betekenis van de dichtheidsoperator $\mathbb{P}_c \rho$? Laat A_c een lokale observabele zijn en ρ een willekeurige dichtheidsoperator, dan is :

$$\mathrm{Tr}\, A_c \rho = \mathrm{Tr}\, A_c \mathbb{P}_c \rho \tag{3.3.5}$$

Als $A_{\bar{c}}$ een lokale observabele is met betrekking tot het gebied $\bar{C}$, dan is na te gaan dat :

$$\mathrm{Tr}\, A_{\bar{c}} \mathbb{P}_c \rho = \langle 0 | A_{\bar{c}} | 0 \rangle \tag{3.3.6}$$

Wat betreft de verwachtingswaarden van lokale operatoren m.b.t C bevat $\mathbb{P}_c \rho$ dus evenveel informatie als ρ zelf en wat betreft de verwachtingswaarden van lokale operatoren m.b.t $\bar{C}$ evenveel als de vacuümtoestand. Dit doet vermoeden dat $\mathbb{P}_c \rho$ een toestand beschrijft met alle quanta in C . Dit zal ook zo blijken te zijn (zie (3.4.4)).

De s-vector die orthogonaal projecteert op de toestanden uit $\mathcal{H}$ zonder quanta in $\bar{C}$ is :

$$P_c = \sum_n | n 0 \rangle \langle n 0 | \tag{3.3.7}$$

Een dichtheidsoperator ρ_c representeert nu per definitie een in C gelokaliseerde toestand als :

$$P_c \rho_c P_c = \rho_c \tag{3.3.8}$$

ofwel :

$$\mathbb{P}_C^{\perp} \rho_c = \rho_c \tag{3.3.9}$$

waarin :

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\perp} := P_c \times P_c \tag{3.3.10}$$

Dit wil zeggen : gelokaliseerde toestanden zijn de eigentoestanden bij eigenwaarde 1 van de s-operator $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\perp}$. We zien met (3.2.5) en (3.2.7) in dat :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \mathbb{P}_c^{\perp} = A_0 \times A_0 \\ \text{ii)} & \mathbb{P}_c^{\perp 2} = \mathbb{P}_c^{\perp} \\ \text{iii)} & \mathbb{P}_c^{\perp *} = \mathbb{P}_c^{\perp} \end{array} \tag{3.3.11}$$

$\mathbb{P}_c^{\perp}$ is dus een orthogonale s-projectieoperator. Met (3.3.1), (3.3.11) i) en (3.2.7) is te bewijzen dat :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_c \, \mathbb{P}_c^{\perp} = \mathbb{P}_c^{\perp} \\ \mathbb{P}_c^{\perp} \, \mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c \end{cases} \tag{3.3.12}$$

Uit (3.3.12) blijkt dat de eigen s-vectoren van $\mathbb{P}_C^{\perp}$ samenvallen met de eigen-s-vectoren van $\mathbb{P}_c$. In het bijzonder zijn dus de gelokaliseerde toestanden ρ_C , gedefinieerd met (3.3.9), ook eigentoestanden van $\mathbb{P}_c$ bij eigenwaarde 1. Gelokaliseerde toestanden kunnen daarom ook gedefiniëerd worden met :

$$\mathbb{P}_C \, \rho_c = \rho_c \tag{3.3.13}$$

Het voordeel van definitie (3.3.13) boven (3.3.9) is natuurlijk dat voor willekeurige dichtheidsoperatoren $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\perp} \rho$ i.h.a. geen dichtheidsoperator is terwijl $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} \rho$ dat wel is. Bovendien is $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} \rho$ gelokaliseerd in $\mathcal{C}$.

Opmerking.

We kunnen de Fockruimte $\mathcal{H}$, opgespannen door $\{ | n\bar{n} \rangle \}$, opvatten als een tensorproductruimte :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{H}_{\bar{\mathcal{C}}} \tag{3.3.14}$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ wordt opgespannen door de vectoren $\{ | n0 \rangle \}$, $\mathcal{H}_{\bar{\mathcal{C}}}$ door de vectoren $\{ | 0\bar{n} \rangle \}$. Wij korten dit af tot $\{ | n \rangle_{\mathcal{C}} \}$ resp. $\{ | \bar{n} \rangle_{\bar{\mathcal{C}}} \}$ waarbij we $\mathcal{C}$ en $\bar{\mathcal{C}}$ weglaten als dit geen verwarring oplevert. Voor $A_{\bar{n}}$ resp. $A_{\bar{n}}^{+}$ kunnen we nu schrijven ((3.2.5),(3.2.6)) :

$$A_{\bar{n}} = \sum_n | n\bar{0} \rangle \langle n\bar{n} | = \sum_n | n \rangle \langle n | \otimes | \bar{0} \rangle \langle \bar{n} | = I \otimes | \bar{0} \rangle \langle \bar{n} |. \tag{3.3.15}$$

$$A^{+}_{\bar{n}} = I \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{o}| \tag{3.3.16}$$

Met (3.3.11), (3.3.1) en (3.2.8) vinden we voor $\mathbb{P}^{\perp}_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{P}^{\neq}_{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{P}^{\perp}_{c} = I \times I \otimes \left(|\bar{o}\rangle\langle\bar{o}| \times |\bar{o}\rangle\langle\bar{o}|\right) \tag{3.3.17}$$

$$\mathbb{P}_{c} = \sum_{\bar{n}} I \otimes |\bar{o}\rangle\langle\bar{n}| \times I \otimes |\bar{n}\rangle\langle\bar{o}| = I \times I \otimes \sum_{\bar{n}} |\bar{o}\rangle\langle\bar{n}| \times |\bar{n}\rangle\langle\bar{o}| \tag{3.3.18}$$

$$\mathbb{P}^{\neq}_{c} = I \times I \otimes \sum_{\bar{n}} |\bar{n}\rangle\langle\bar{o}| \times |\bar{o}\rangle\langle\bar{n}| \tag{3.3.19}$$

Maken we nu gebruik van de notatie van (1.48) en (1.56) dan zien we :

$$\mathbb{P}^{\perp}_{c} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{P}_{\bar{c},\bar{o}} \tag{3.3.20}$$

$$\mathbb{P}_{c} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{P}^{\sigma}_{\bar{c},\bar{o}} \tag{3.3.21}$$

$$\mathbb{P}^{\neq}_{c} = \mathbb{I} \otimes \langle\bar{o}| \cdot |\bar{o}\rangle\, \mathbb{I} \tag{3.3.22}$$

Vergelijken we (3.3.20) en (3.3.21) met respectivelijk (2.5.37) en (2.5.39) dan zien we een opmerkelijke overeenkomst. Geven we de macroscopische rusttoestand van het meetapparaat in (2.5.39) het (symbolische) quantumgetal o , dan is $\mathbb{P}^{(o\bullet)} = \mathbb{P}_{>,o} \otimes \mathbb{I}_{<}$ formeel identiek met $\mathbb{P}^{\perp}_{\mathbb{C}} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{P}_{\bar{c},o}$. Het bij $\mathbb{P}^{(o\bullet)}$ "horende" mimorfisme $\mathbb{P}^{\sigma}_{>,o} \otimes \mathbb{I}_{<}$ is dan formeel identiek aan $\mathbb{P}_{c}$.

3.4. lokale observabelen en lokale algebra's.

Met (3.2.7) en (3.2.8) is in te zien dat :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}^{\neq}_{\mathbb{C}}\, A_c = A_c \\ \mathbb{P}^{\neq}_{\mathbb{C}}\, B_c = B_c \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{i)} & \mathbb{P}^{\neq}_{c}\,(A_c + B_c) = A_c + B_c \\ \text{ii)} & \mathbb{P}^{\neq}_{c}\,(A_c \cdot B_c) = A_c \cdot B_c \\ \text{iii)} & \mathbb{P}^{\neq}_{c}\, A^{+}_{c} = A^{+}_{c} \end{array} \tag{3.4.1}$$

De verzameling lokale operatoren is dus een involutiealgebra. De lokale observabelen zijn de zelfgeadjungeerde operatoren uit deze algebra. Lokale observabelen corresponderen met lokaal in $\mathbb{C}$ uitgevoerde metingen.

Als $\mathbb{D}$ ook een deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ is dan kunnen met (3.1.4), analoog de in 3.1. en 3.2. gevolgde werkwijze, s-projectieoperatoren $\mathbb{P}_{\mathbb{D}}^{\ddagger}$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}\cap\mathbb{D}}^{\ddagger}$ gedefiniëerd worden. We gaan dan uit van toestanden $|n_1 n_2 n_3 n_4\rangle$ waarin n_1 , n_2 , n_3 en n_4 verzamelingen bezettingsgetallen zijn van een-deeltjestoestanden in respectievelijk $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, $\mathbb{D}\setminus\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\cap\mathbb{D}$ en $\overline{\mathbb{C}\cup\mathbb{D}}$. Het is te bewijzen dat dan geldt :

$$\mathbb{P}_{C\cap D}^{\ddagger} = \mathbb{P}_{C}^{\ddagger}\,\mathbb{P}_{D}^{\ddagger} = \mathbb{P}_{D}^{\ddagger}\,\mathbb{P}_{C}^{\ddagger} \tag{3.4.2}$$

Dat wil zeggen dat we de lokale operatoren, en dus ook observabelen, met betrekking tot $C\cap D$ kunnen vinden door eerst op de ruimte van lokale observabelen m.b.t $\mathbb{C}$ te projecteren en daarna op die m.b.t $\mathbb{D}$, maar ook omgekeerd.

Tenslotte is, door de definities van $\mathbb{P}_{\bar{C}}$ en $\mathbb{P}_{C}$ te gebruiken, af te leiden dat voor willekeurige dichtheidsoperatoren ρ geldt :

$$\mathbb{P}_{\bar{C}}\,\mathbb{P}_{C}\,\rho = |0\rangle\langle 0| \tag{3.4.3}$$

Hiermee vinden we :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\mathbb{P}_{\bar{C}}^{\ddagger} A\cdot\mathbb{P}_{C}\,A &= \mathrm{Tr}\,\mathbb{P}_{\bar{C}}^{\ddagger} A\cdot\mathbb{P}_{\bar{C}}\,\mathbb{P}_{C}\,\rho = \mathrm{Tr}\,\mathbb{P}_{\bar{C}}^{\ddagger} A\,|0\rangle\langle 0| \\ &= \langle 0|\,\mathbb{P}_{\bar{C}}^{\ddagger} A\,|0\rangle \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

3.5. Generalisatie naar representatievrije definities.

De cruciale eigenschap van $\mathbb{P}_C$ is dat het een mimorfisme is. Deze eigenschap is onafhankelijk van de representatie waarin gewerkt wordt. Met dit inzicht generaliseert dM. de theorie tot een representatievrij formalisme.
In de algemene theorie wordt uitgegaan van de Fockruimte van veldtoestanden als Hilbertruimte $\mathcal{H}$. De vacuumtoestand is per definitie de toestand zonder quanta.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is de verzameling begrensde operatoren op $\mathcal{H}$. Dit is een Banachruimte m.b.t de operatornorm.
$\mathcal{T}(\mathcal{H})$ is de verzameling operatoren van traceklasse op $\mathcal{H}$. Dit is ook een Banachruimte m.b.t. de operatornorm.
$\mathcal{T}(\mathcal{H})_+$ is de verzameling positieve operatoren van traceklasse.

In $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is een inproduct gedefinieerd : het Hilbert-Schmidtinproduct.

$$A, B \in \mathcal{H}_{HS} \qquad \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\, A^{+} B \tag{3.5.1}$$

Het werken in de Hilbert-Schmidtruimte $\mathcal{H}_{HS}$ heeft twee nadelen. In de eerste plaats zijn niet alle begrensde operatoren Hilbert-Schmidt operatoren, zodat het niet mogelijk is om binnen $\mathcal{H}_{HS}$ de verwachtingswaarde $\mathrm{Tr}\,\rho A$ van iedere begrensde operator te definieren. Een ander bezwaar is de grotere gecompliceerdheid van de formules doordat $\mathrm{Tr}\,\rho A = \langle A^{+}, \rho \rangle$ t.g.v. de definitie van het Hilbert-Schmidt inproduct. Om deze reden verdient het Banachruimte formalisme zoals gehanteerd door dM. de voorkeur. Om aansluiting te krijgen met het formalisme van G.P.R. en met de theorie zoals we die in hoofdstuk 4. zullen ontwikkelen wordt hier echter gewerkt binnen de Hilbert-Schmidtruimte. We komen hier later nog even op terug.

dM. definiëert nu de lokale operatoren en lokale toestanden :

Definitie 3.1. (lokale operatoren).

Als $\mathbb{P}_C$ een mimorfisme is dat $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ in $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ afbeeldt, d.w.z. :

i) $\quad B \in \mathcal{T}(\mathcal{H})_{+} \Rightarrow \mathbb{P}_c B \in \mathcal{T}(\mathcal{H})_{+}$ (3.5.2)

ii) $\quad B \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \quad \mathrm{Tr}\, \mathbb{P}_c B = \mathrm{Tr}\, B$ (3.5.3)

iii) $\quad \mathbb{P}_C^{2} = \mathbb{P}_c$ (3.5.4)

dan is A_C per definitie een lokale operator met betrekking tot C als

$$\mathbb{P}_C^{+} A_c = A_c \tag{3.5.5}$$

Definitie 3.2. (lokale toestanden).

Als $\mathbb{P}_C$ het mimorfisme is zoals gedefinieerd in (3.5.2) t/m (3.5.4) dan is ρ_C per definitie de dichtheidsoperator van een in C gelokaliseerde toestand als :

$$\mathbb{P}_C \rho_C = \rho_C \tag{3.5.6}$$

dM. formuleert dan nog een aantal postulaten betreffende de lokaliteit.

Postulaat 3.1.

Met ieder begrensd gebied $\mathcal{C}$ van $\mathbb{R}^3$ is een mimorfisme $\mathbb{P}_C$ geassocieerd dat voldoet aan :

i) (3.5.2) t/m (3.5.4)
ii) $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3} = \mathbb{I}$ $\qquad \mathbb{I}$ is de eenheidsoperator op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
iii) Als $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ twee deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^3$ dan is

$$\mathbb{P}_{C \cap D} = \mathbb{P}_C \, \mathbb{P}_D = \mathbb{P}_D \, \mathbb{P}_C \tag{3.5.7}$$

(dit is een generalisatie van de geadjungeerde relatie van (3.4.2))

Postulaat 3.2.

Voor ieder gebied $\mathbb{C}$ van $\mathbb{R}^3$ vormen de operatoren met betrekking tot $\mathbb{C}$ een algebra :

$$\text{Als } \begin{cases} \mathbb{P}_C^{\#} A_C = A_C \\ \mathbb{P}_C^{\#} B_C = B_C \end{cases} \quad \text{dan is } \begin{cases} \mathbb{P}_C^{\#}(A_C + B_C) = A_C + B_C \\ \mathbb{P}_C^{\#}(A_C \cdot B_C) = A_C \cdot B_C \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Het is vrij eenvoudig te bewijzen dat deze algebra een involutiealgebra is. We doen dit hier niet. Postulaat 3.2. is een generalisatie van (3.4.1).

Postulaat 3.3.

Als $\bar{C}$ het complement is van C in $\mathbb{R}^3$ dan is :

$$\mathrm{Tr}\, \mathbb{P}_{\bar{C}}^{\#} A \cdot \mathbb{P}_C \, \rho = \langle 0 | \, \mathbb{P}_{\bar{C}}^{\#} A \, | 0 \rangle \tag{3.5.9}$$

Dit postulaat zegt dat een in $\mathbb{C}$ gelokaliseerde toestand buiten $\mathbb{C}$ equivalent is aan de vacuümtoestand. Het is een generalisatie van (3.4.4).

We gaan niet nader in op de implicaties van deze postulaten en definities. Wat voor ons interessant is, is het optreden van niet zelfgeadjungeerde (s-)projectieoperatoren. Dergelijke operatoren zijn we ook al bij G.P.R. tegengekomen.

In het volgende hoofdstuk zullen we niet zelfgeadjungeerde projectieoperatoren op een (eindigdimensionale) inproductruimte nader beschouwen.

We hebben al gemeld dat dM. in zijn proefschrift werkt in het Banach-ruimte formalisme. Dat wil zeggen dat hij s-operatoren niet adjungeert met betrekking tot het Hilbert-Schmidtinproduct maar met betrekking tot de bilineaire functionaal $\mathrm{Tr}\, A \cdot B$ (A en B begrensd). Wanneer we even terugdenken aan definitie 1.5. en stelling 1.4. zien we dat dM. in feite de $\times$ -geadjungeerde gebruikt. Voor ons maakt dit niets uit omdat $\mathbb{P}_c$ een mimorfisme is en daarmee adjointsymmetrisch. Volgens (1.31) is dan voor alle A $\mathbb{P}_c^{\times} A = \mathbb{P}_c^{\dagger} A$.

Hoofdstuk 4. Enige aspecten van projectieoperatoren op een inproductruimte.

We beschouwen een vectorruimte $\mathcal{H}$ met inproduct $(\cdot\,,\cdot)$. De dimensie van de ruimte is eindig. Iedere operator kan dan in ieder geval geadjungeerd worden met betrekking tot het inproduct. In de meeste stellingen wordt de dimensie van $\mathcal{H}$ niet gebruikt en veel resultaten gelden waarschijnlijk voor willekeurige inproductruimten.

Definitie 4.1.

Een operator P op $\mathcal{H}$ is per definitie een projectieoperator als hij lineair en idempotent is :

$$\alpha,\beta \in \mathbb{C}\ , v,w \in \mathcal{H} : P(\alpha v + \beta w) = \alpha P v + \beta P w \qquad (4.1)$$
$$P^2 = P$$

P hoeft niet zelfgeadjungeerd te zijn. We veronderstellen, zoals gezegd, wel dat de geadjungeerde P^+ van P altijd bestaat.

Definitie 4.2.

Een projectieoperator P is per definitie orthogonaal als :

$$\forall_{v,w \in \mathcal{H}} \quad (Pv, (1-P)w) = 0 \qquad (4.2)$$

Stelling 4.1.

De projectieoperator P is orthogonaal dan en slechts dan als hij zelfgeadjungeerd is.

Bewijs :

$\Rightarrow$) Als P orthogonaal is, dan is voor alle $v,w \in \mathcal{H}$ $(Pv, (1-P)w) = 0$
dus $(v, P^+(1-P)w) = 0$ dat betekent $P^+(1-P) = 0$
ofwel $P^+ = P^+P$ deze relatie adjungeren levert $P = P^+P$
zodat $P = P^+$.

$\Leftarrow$) Als P zelfgeadjungeerd is, dan is $P^+ = P$. Omdat $PP = P$ is ook $P^+P = P$ dus $P^+(1-P) = 0$ dan geldt voor alle $v, w \in \mathcal{H}$ $(Pv, (1-P)w) = 0$

We citeren een definitie uit het diktaat Lineaire Analyse 1 ([5]).

Definitie 4.3. ([5] (1.2.19))

Als $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ lineaire deelruimten zijn van de vectorruimte $\mathcal{H}$, en als $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, dan is de directe som van $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$, notatie $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, gedefinieerd door :

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in \mathcal{H}_1, v_2 \in \mathcal{H}_2 \} \tag{4.3}$$

Zij P een projectieoperator. We definieren twee lineaire deelruimten die met P geassocieerd zijn :

$$\mathcal{H}_P := \{ Pv \mid v \in \mathcal{H} \} \tag{4.4}$$

$$\mathcal{H}_{1-P} := \{ (1-P)v \mid v \in \mathcal{H} \} \tag{4.5}$$

$\mathcal{H}_P$ en $\mathcal{H}_{1-P}$ zijn lineaire deelruimten van $\mathcal{H}$ omdat P (en $1-P$) lineaire operatoren zijn. We bewijzen dit verder niet.

Stelling 4.2.

Als P een projectieoperator is, dan geldt voor de deelruimten $\mathcal{H}_P$ en $\mathcal{H}_{1-P}$:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \mathcal{H}_P \cap \mathcal{H}_{1-P} = \{0\} \\ &\text{ii)} \quad \mathcal{H}_P + \mathcal{H}_{1-P} = \mathcal{H} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Bewijs :

i) Laat $v \in \mathcal{H}_P \cap \mathcal{H}_{1-P}$, dan is $v \in \mathcal{H}_P$. Er is dan een $z \in \mathcal{H}$ zo dat $Pz = v$. Nu was $P^2 = P$ dus $Pv = P^2 z = Pz = v$. Zo is ook $(1-P)v = v$ want ook $1-P$ is een projectieoperator. Samen met $Pv = v$ levert dit $v = 0$.

ii) Zij $v \in \mathcal{H}$ dan is $v = Pv + (1-P)v$. Nu is $Pv \in \mathcal{H}_P$ en $(1-P)v \in \mathcal{H}_{1-P}$, dus ieder element van $\mathcal{H}$ is te schrijven als som van een element van $\mathcal{H}_P$ en een element van $\mathcal{H}_{1-P}$.

We zeggen dat de operator P <u>òp</u> de deelruimte $\mathcal{H}_P$ projecteert <u>parallel aan</u> $\mathcal{H}_{1-P}$. Dit betekent natuurlijk dat $1-P$ <u>òp</u> $\mathcal{H}_{1-P}$ projecteert <u>parallel aan</u> $\mathcal{H}_P$.

<u>Definitie 4.4.</u>

Twee lineaire deelruimten $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ van $\mathcal{H}$ staan loodrecht op elkaar, notatie $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$, als :

$$\forall_{v \in \mathcal{H}_1,\, w \in \mathcal{H}_2} \quad (v, w) = 0 \tag{4.7}$$

<u>Stelling 4.3.</u>

De projectieoperator P is orthogonaal dan en slechts dan als $\mathcal{H}_P \perp \mathcal{H}_{1-P}$.

Bewijs :

$\Rightarrow$) Zij $P^+ = P$ $v \in \mathcal{H}_P$, $w \in \mathcal{H}_{1-P}$ willekeurig. Er zijn vectoren $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ zó dat $v = Pz_1$ en $w = (1-P)z_2$. Dan is ook $v = P^+ z_1$. Nu is $(v, w) = (P^+ z_1, (1-P)z_2) =$ $= (z_1, P(1-P)z_2) = 0$. Dus $\mathcal{H}_P \perp \mathcal{H}_{1-P}$.

$\Leftarrow$) Zij $\mathcal{H}_P \perp \mathcal{H}_{1-P}$ dan is voor alle $v, w \in \mathcal{H}$ $Pv \in \mathcal{H}_P$ $(1-P)w \in \mathcal{H}_{1-P}$. Dat wil zeggen $(Pv, (1-P)w) = 0$ voor alle $v, w \in \mathcal{H}$, dus P is orthogonaal (def.4.2.).

We hebben hierboven met behulp van de projectieoperator P twee deelruimten van $\mathcal{H}$ gedefinieerd. Het omgekeerde kan ook.

Stelling 4.4. (zie ook [5] (1.2.19))

Laten $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ lineaire deelruimten zijn van de ruimte $\mathcal{H}$ zodanig dat :

i) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ (4.8)

ii) $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$

dan is ieder element v van $\mathcal{H}$ op een unieke manier te schrijven als de som van een element van $\mathcal{H}_1$ en een element van $\mathcal{H}_2$.

Bewijs :

Dat er minstens een manier is om v te schrijven als $v = v_1 + v_2$ $v_1 \in \mathcal{H}_1$ $v_2 \in \mathcal{H}_2$ volgt uit de voorwaarde ii). Stel nu dat $v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$ $v_1, w_1 \in \mathcal{H}_1$ $v_2, w_2 \in \mathcal{H}_2$ dan is $v_1 - w_1 = w_2 - v_2$
Nu is $v_1 - w_1 \in \mathcal{H}_1$ $w_2 - v_2 \in \mathcal{H}_2$ dus $v_1 - w_1 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$
zodat $v_1 = w_1$. Hiermee is ook $v_2 = w_2$.

Definieer nu de operatoren P_1 en P_2 door :

$$P_1 v = P_1 (v_1 + v_2) = v_1$$
$$P_2 v = P_2 (v_1 + v_2) = v_2 \tag{4.9}$$

Stelling 4.5.

P_1 is een projectieoperator.

Bewijs :

P_1 is lineair : $P_1(\alpha v + \beta w) = P_1(\alpha v_1 + \beta w_1 + \alpha v_2 + \beta w_2)$ $v_1, w_1 \in \mathcal{H}_1$ $v_2, w_2 \in \mathcal{H}_2$. $P_1(\alpha v + \beta w) = \alpha v_1 + \beta w_1 = \alpha P_1 v + \beta P_1 w$
P_1 is idempotent $P_1(P_1 v) = P_1 P_1 (v_1 + v_2) = P_1 v_1 = v_1$ want $v_1 \in \mathcal{H}_1$

Het is direct duidelijk dat P_1 òp $\mathcal{H}_1$ projecteert parallel aan $\mathcal{H}_2$ en $P_2 = 1 - P_1$ òp $\mathcal{H}_2$ parallel aan $\mathcal{H}_1$. Hierbij hoeven P_1 en P_2 geen orthogonale projecties te zijn. In het vervolg zullen projectieoperatoren in het algemeen dan ook niet zelfgeadjungeerd zijn.

Als P een projectieoperator is, dan is de geadjungeerde van P, P^+, ook een projectieoperator (want P^+ is lineair en idempotent). De met P^+ geassodeelruimten zijn :

$$\mathcal{H}_{P^+} = \{ P^+ v \mid v \in \mathcal{H} \} \tag{4.10}$$

$$\mathcal{H}_{1-P^+} = \{ (1-P^+) v \mid v \in \mathcal{H} \} \tag{4.11}$$

Als $\mathcal{H}_1$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{H}$ is, dan wordt het orthogonale complement van $\mathcal{H}_1$ t.o.v. $\mathcal{H}$, notatie $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$, gedefinieerd door :

$$\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1 := \{ v \in \mathcal{H} \mid \forall_{w \in \mathcal{H}_1} \; (v, w) = 0 \} \tag{4.12}$$

<u>Stelling 4.6.</u>

i) $\mathcal{H}_{1-P^+} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_P$

ii) $\mathcal{H}_P = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1-P^+}$

iii) $\mathcal{H}_{1-P} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{P^+}$

iv) $\mathcal{H}_{P^+} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1-P}$

Bewijs :

i) We bewijzen eerst $\mathcal{H}_{1-P^+} \supseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_P$. Zij $v \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_P$ willekeurig. Dan is $v \perp \mathcal{H}_P$ d.w.z. $\forall_{w \in \mathcal{H}} \; (v, Pw) = 0$ ofwel $\forall_{w \in \mathcal{H}} (P^+ v, w) = 0$. Dat betekent dat $P^+ v = 0$ ofwel $(1-P^+) v = v$ dus $v \in \mathcal{H}_{1-P^+}$.
Nu bewijzen we : $\mathcal{H}_{1-P^+} \subseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_P$. Zij $v \in \mathcal{H}_{1-P^+}$ willekeurig, dan is $(1-P^+) v = v$ dus $P^+ v = 0$ ofwel $\forall_{w \in \mathcal{H}} \; (P^+ v, w) = 0$ dus $\forall_{w \in \mathcal{H}} \; (v, Pw) = 0 \Rightarrow v \perp \mathcal{H}_P$

ii) $\mathcal{H}_P \subseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1-P^+}$: $v \in \mathcal{H}_P$ willekeurig, $z \in \mathcal{H}$ willekeurig. Dan is $w = (1-P^+) z \in \mathcal{H}_{1-P^+}$ willekeurig. Verder is $Pv = v$ en $(v, w) =$
$= (Pv, (1-P^+) z) = (v, P^+ (1-P^+) z) = 0$
zodat $v \perp \mathcal{H}_{1-P^+}$.
$\mathcal{H}_P \supseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1-P^+}$: Zij $v \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1-P^+}$ dan is $v \perp \mathcal{H}_{1-P^+}$ d.w.z. $\forall_{z \in \mathcal{H}}$ is $(v, (1-P^+) z) = 0$ dus $\forall_{z \in \mathcal{H}} \; ((1-P) v, z) = 0$
dat betekent $(1-P) v = 0$ dus $Pv = v$ $v \in \mathcal{H}_P$.

De bewijzen voor iii) en iv) verlopen analoog.

We citeren nu een aantal stellingen betreffende lineaire deelruimten van een inproductruimte uit [5]. We vermelden de bewijzen niet.

Stelling 4.7. ([5] (4.4.3))

Als $\mathcal{H}_1$ een deelverzameling (b.v. een lineaire deelruimte) is van de inproductruimte $\mathcal{H}$, dan is het orthogonale complement van $\mathcal{H}_1$ t.o.v. $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$, een gesloten lineaire deelruimte.

Stelling 4.8. ([5] (4.4.8))

Als $\mathcal{H}_1$ een volledige lineaire deelruimte is van de inproductruimte $\mathcal{H}$, dan is de directe som van $\mathcal{H}$ en zijn orthogonale complement gelijk aan $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1) = \mathcal{H}$$

(de directe som van twee orthogonale lineaire deelruimten wordt genoteerd met $\oplus$ ([5] (4.4.2))).

Stelling 4.9. ([5] (1.6.2))

Als de (semi-)metrische ruimte $(\mathcal{R}, d)$ (d is de metriek op $\mathcal{R}$) volledig is en S is een gesloten lineaire deelruimte van $\mathcal{R}$, dan is ook (S, d) volledig.

We poneren nu :

Stelling 4.10.

Als de inproductruimte $\mathcal{H}$ volledig is, d.w.z. als $\mathcal{H}$ een Hilbert-ruimte is, dan is :

i) $\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{1-p^+} = \mathcal{H}$ (4.13)

ii) $\mathcal{H}_{p^+} \oplus \mathcal{H}_{1-p} = \mathcal{H}$ (4.14)

Bewijs :

i) $\mathcal{H}$ is een volledige metrische ruimte, $\mathcal{H}_p$ is een lineaire deelruimte van $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}_{1-p^+}$ is het orthogonale complement van $\mathcal{H}_p$ t.o.v. $\mathcal{H}$. Met stelling 4.7. is $\mathcal{H}_{1-p^+}$ een gesloten lineaire deelruimte van $\mathcal{H}$. Stelling 4.9. zegt nu dat $\mathcal{H}_{1-p^+}$ een volledige lineaire deelruimte van $\mathcal{H}$ is. Volgens stelling 4.8. is dan de directe som van

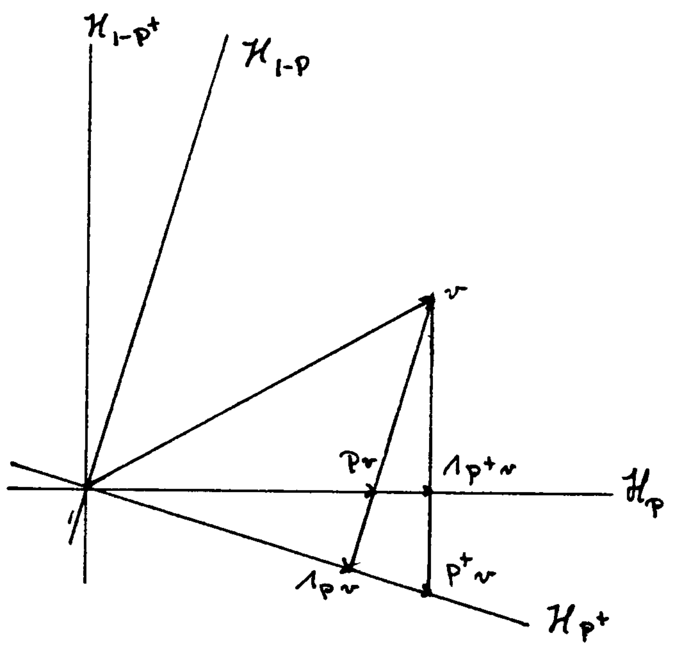
$\mathcal{H}_{1-P^+}$ en zijn orthogonale complement gelijk aan $\mathcal{H}$. Het orthogonale complement van $\mathcal{H}_{1-P^+}$ was echter $\mathcal{H}_P$ zodat het gestelde volgt.

ii) wordt analoog bewezen.

Omdat we aangenomen hebben dat de dimensie van $\mathcal{H}$ eindig is, is $\mathcal{H}$ een Hilbertruimte. We zullen dus aannemen dat (4.13) en (4.14) gelden.

Met stellingen 4.4. en 4.5. zien we in dat er een projectieoperator is die òp $\mathcal{H}_P$ projecteert parallel aan $\mathcal{H}_{1-P^+}$. Deze noemen we Λ_{P^+}. Omdat $\mathcal{H}_P \perp \mathcal{H}_{1-P^+}$ is met stelling 4.3. $\Lambda_{P^+}^+ = \Lambda_{P^+}$. Zo is er ook een projectieoperator die òp $\mathcal{H}_{P^+}$ projecteert parallel aan $\mathcal{H}_{1-P}$. Deze noemen we Λ_P . Ook Λ_P is zelfgeadjungeerd : $\Lambda_P^+ = \Lambda_P$.

We kunnen alle operatoren alsvolgt schematisch weergeven



Dit plaatje is enigzins verraderlijk omdat het, bijvoorbeeld, suggereert dat $\mathcal{H}_P \cap \mathcal{H}_{P^+} = \{0\}$ en dat hoeft niet zo te zijn.

We beschouwen nu twee projectieoperatoren : P_1 en P_2 . Met deze operatoren zijn de volgende deelruimten geassocieerd :

$$\mathcal{H}_{P_1} := \{P_1 v \mid v \in \mathcal{H}\} \qquad \mathcal{H}_{1-P_1} := \{(1-P_1)v \mid v \in \mathcal{H}\} \tag{4.15}$$

$$\mathcal{H}_{P_2} := \{P_2 v \mid v \in \mathcal{H}\} \qquad \mathcal{H}_{1-P_2} := \{(1-P_2)v \mid v \in \mathcal{H}\} \tag{4.16}$$

(we hebben het hier nog niet over P_1^+ , P_2^+ enz.)

Definitie 4.5.

P_1 en P_2 projecteren per definitie op dezelfde deelruimte, notatie $P_1 \downarrow P_2$, als $\mathcal{H}_{P_1} = \mathcal{H}_{P_2}$.

Stelling 4.11.

P_1 en P_2 projecteren dan en slechts dan op dezelfde deelruimte als :

$$\begin{cases} P_1 P_2 = P_2 \\ P_2 P_1 = P_1 \end{cases} \tag{4.17}$$

Bewijs :

$\Rightarrow$) Zij $\omega \in \mathcal{H}_{P_1}$ willekeurig, dan is $P_1 \omega = \omega$. Zij $v \in \mathcal{H}$ willekeurig, dan is $P_2 v \in \mathcal{H}_{P_2}$ dus $P_2 v \in \mathcal{H}_{P_1}$. Dat wil zeggen $P_1(P_2 v) = P_2 v$. v was willekeurig dus $P_1 P_2 = P_2$. de andere relatie volgt op analoge wijze.

$\Leftarrow$) Als $P_1 P_2 = P_2$ dan is voor alle $v \in \mathcal{H}$ $P_1 P_2 v = P_2 v$. Dat wil zeggen : voor alle v is $P_2 v \in \mathcal{H}_{P_1}$. M.a.w. $\mathcal{H}_{P_2} \subseteq \mathcal{H}_{P_1}$; met de relatie $P_2 P_1 = P_1$ bewijzen we op analoge wijze : $\mathcal{H}_{P_1} \subseteq \mathcal{H}_{P_2}$ zodat $\mathcal{H}_{P_1} = \mathcal{H}_{P_2}$.

Stelling 4.12.

Als P_1 en P_2 op dezelfde deelruimte projecteren en beide orthogonaal zijn, dan is :

$$P_1 = P_2 \tag{4.18}$$

Bewijs :

Wegens stelling 4.11. geldt :

i) $P_1 P_2 = P_2$

ii) $P_2 P_1 = P_1$

Adjungeer i) en gebruik dat P_1 en P_2 beide orthogonaal zijn : $P_2 P_1 = P_2$. Met ii) volgt het gestelde.

Definitie 4.6.

P_1 en P_2 projecteren per definitie parallel aan dezelfde deelruimte als $\mathcal{H}_{1-P_1} = \mathcal{H}_{1-P_2}$.

We noteren dit met $P_1 \,/\!/\, P_2$. Uit de definitie is duidelijk dat P_1 en P_2 dan en slechts dan parallel aan dezelfde deelruimte projecteren als $1-P_1$ en $1-P_2$ op dezelfde deelruimte projecteren.

Stelling 4.13.

P_1 en P_2 projecteren dan en slechts dan parallel aan dezelfde deelruimte als :

$$\begin{cases} P_1 P_2 = P_1 \\ P_2 P_1 = P_2 \end{cases} \tag{4.19}$$

Bewijs :

$\Rightarrow$) Zoals gezegd projecteren $1-P_1$ en $1-P_2$ nu op dezelfde deelruimte. Met stelling 4.11. geldt nu :

$$\begin{aligned} (1-P_1)(1-P_2) &= (1-P_2) \\ (1-P_2)(1-P_1) &= (1-P_1) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Hieruit is (4.19) direct af te leiden.

$\Leftarrow$) Als (4.19) geldt dan is (4.20) onmiddellijk af te leiden. Dat wil zeggen dat $1-P_1$ en $1-P_2$ op dezelfde deelruimte projecteren zodat $P_1 \,/\!/\, P_2$.

Stelling 4.14.

i) Als $P_1 \perp P_2$ en $P_2 \perp P_3$ dan $P_1 \perp P_3$

ii) Als $P_1 \,/\!/\, P_2$ en $P_2 \,/\!/\, P_3$ dan $P_1 \,/\!/\, P_3$

Bewijs :

i) $P_1 P_3 = P_1 (P_2 P_3) = (P_1 P_2) P_3 = P_2 P_3 = P_3$

$P_3 P_1 = P_3 (P_2 P_1) = (P_3 P_2) P_1 = P_2 P_1 = P_1$

ii) $P_1 P_3 = (P_1 P_2) P_3 = P_1 (P_2 P_3) = P_1 P_2 = P_1$

$P_3 P_1 = (P_3 P_2) P_1 = P_3 (P_2 P_1) = P_3 P_2 = P_3$

Opmerking : Omdat ook $P_1 \downarrow P_1$, $P_1 \downarrow P_2 \Rightarrow P_2 \downarrow P_1$

en $P_1 /\!/ P_1$, $P_1 /\!/ P_2 \Rightarrow P_2 /\!/ P_1$

zijn "$\downarrow$" en "$/\!/$" equivalentierelaties.

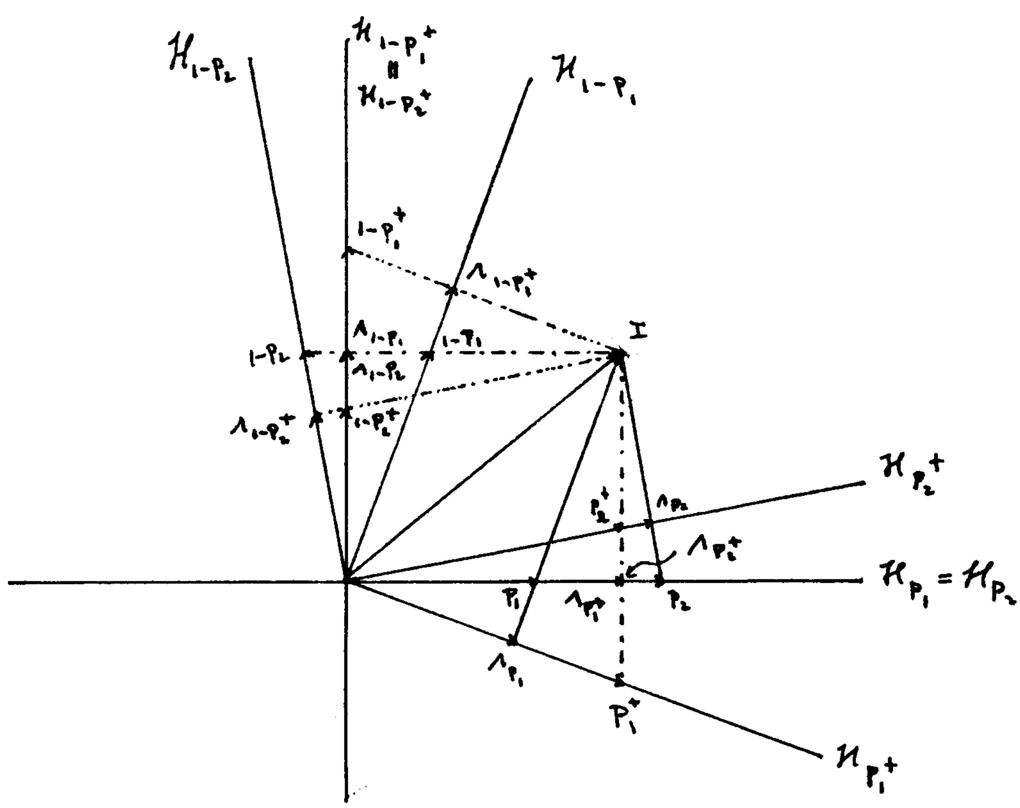
Stelling 4.15.

$$\begin{array}{ccc} P_1 \downarrow P_2 & \Longleftrightarrow & 1-P_1 \;/\!/\; 1-P_2 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ P_1^+ /\!/ P_2^+ & \Longleftrightarrow & 1-P_1^+ \downarrow 1-P_2^+ \end{array}$$

Bewijs :

$P_1 \downarrow P_2 \Longleftrightarrow 1-P_1 /\!/ 1-P_2$ hebben we al gezien . Dit is per definitie zo. $P_1 \downarrow P_2 \Rightarrow P_1^+ /\!/ P_2^+$: als $P_1 \downarrow P_2$ dan is (stelling 4.11.) $P_1 P_2 = P_2$ en $P_2 P_1 = P_1$. Dit adjungeren levert $P_2^+ P_1^+ = P_2^+$ en $P_1^+ P_2^+ = P_1^+$ zodat met stelling 4.13. $P_1^+ /\!/ P_2^+$. De redenering is natuurlijk om te draaien zodat ook $P_1^+ /\!/ P_2^+ \Rightarrow P_1 \downarrow P_2$. De overige implicaties zijn op analoge wijze af te leiden.

We illustreren ook dit met een plaatje :



We hebben gezien dat Λ_P op $\mathcal{H}_{P^+}$ projecteert parallel aan $\mathcal{H}_{1-P}$. Nu projecteert P^+ ook op $\mathcal{H}_{P^+}$ en P projecteert ook parallel aan $\mathcal{H}_{1-P}$. Met stellingen 4.11. en 4.13. geldt daarom :

$$\Lambda_P \downarrow P^+ \quad : \quad \begin{cases} \Lambda_P P^+ = P^+ \\ P^+ \Lambda_P = \Lambda_P \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\Lambda_P \,/\!/\, P \quad : \quad \begin{cases} \Lambda_P P = \Lambda_P \\ P \Lambda_P = P \end{cases} \tag{4.22}$$

Evenzo geldt voor Λ_{P^+} : Λ_{P^+} projecteert net als P op $\mathcal{H}_P$ en net als P^+ parallel aan $\mathcal{H}_{1-P^+}$:

$$\Lambda_{P^+} \downarrow P \quad : \quad \begin{cases} \Lambda_{P^+} P = P \\ P \Lambda_{P^+} = \Lambda_{P^+} \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\Lambda_{P^+} \,/\!/\, P^+ \quad : \quad \begin{cases} \Lambda_{P^+} P^+ = \Lambda_{P^+} \\ P^+ \Lambda_{P^+} = P^+ \end{cases} \tag{4.24}$$

Stelling 4.16.

Als $P^+ = P$ dan is $\Lambda_P = \Lambda_{P^+} = P = P^+$

Bewijs :

$\Lambda_P \downarrow P^+$. Als $P^+ = P$ dan $\Lambda_P \downarrow P$. Ook was $\Lambda_{P^+} \downarrow P$ dus $\Lambda_P \downarrow \Lambda_{P^+}$. Dat wil zeggen : $\Lambda_P \Lambda_{P^+} = \Lambda_{P^+}$ en $\Lambda_{P^+} \Lambda_P = \Lambda_P$. Adjungeer de laatste betrekking, dan is met $\Lambda_{P^+}^+ = \Lambda_{P^+}$ en $\Lambda_P^+ = \Lambda_P$: $\Lambda_P \Lambda_{P^+} = \Lambda_P$ zodat met de eerste betrekking : $\Lambda_P = \Lambda_{P^+}$. Op analoge wijze is af te leiden dat $\Lambda_P = P$ (want $P^+ = P$)

We willen nu een aantal relaties tussen P , P^+ , Λ_P en Λ_{P^+} blootleggen. Daartoe wordt de operator C_P gedefinieerd door :

$$C_P = P - \Lambda_P \tag{4.25}$$

De geadjungeerde van deze operator is :

$$C_P^+ = P^+ - \Lambda_P \tag{4.26}$$

Stelling 4.17.

i) $$(1-\Lambda_p)C_p\Lambda_p = C_p \tag{4.27}$$

ii) $$\Lambda_p C_p^+(1-\Lambda_p) = C_p^+ \tag{4.28}$$

iii) $$C_p^2 = C_p^{+2} = 0 \tag{4.29}$$

Bewijs :

i) $(1-\Lambda_p)C_p = (1-\Lambda_p)(P-\Lambda_p) = (P-\Lambda_p P-\Lambda_p+\Lambda_p = P-\Lambda_p = C_p$

$C_p\Lambda_p = (P-\Lambda_p)\Lambda_p = P\Lambda_p-\Lambda_p = P-\Lambda_p$

beide op grond van (4.22)

ii) Dit volgt door i) te adjungeren

iii) Op grond van i) is : $C_p^2 = C_p\Lambda_p\cdot(1-\Lambda_p)C_p = 0$

Nu is $C_p^+C_p$ en niet-negatieve operator want :

$$\forall v\in\mathcal{H}: (v, C_p^+C_p v) = (C_p v, C_p v)\geq 0 \tag{4.30}$$

Dit betekent dat $I+C_p^+C_p$ een positieve operator is en dus inverteerbaar. Zo is ook $C_pC_p^+$ niet negatief en $I+C_pC_p^+$ positief en inverteerbaar. We noteren de inverse van $1+C_p^+C_p$ resp. $1+C_pC_p^+$ met :

$$\frac{1}{1+C_p^+C_p} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{1+C_pC_p^+} \tag{4.31}$$

We bewijzen nu voor het vervolg nog een hulpstelling :

(hulp-)Stelling 4.18.

i) $$\frac{1}{1+C_p^+C_p}\Lambda_p = \Lambda_p\frac{1}{1+C_p^+C_p} \tag{4.32}$$

ii) $$\frac{1}{1+C_pC_p^+}\Lambda_p = \Lambda_p\frac{1}{1+C_pC_p^+} = \Lambda_p \tag{4.33}$$

iii) $$\frac{1}{1+C_pC_p^+}C_p = C_p\frac{1}{1+C_p^+C_p} \tag{4.34}$$

iv) $$\frac{1}{1+C_p^+C_p}C_p = C_p \tag{4.35}$$

v) $$\frac{1}{1+c_p^+ c_p}\, c_p^+ = c_p^+ \frac{1}{1+c_p c_p^+} \tag{4.36}$$

vi) $$c_p^+ \frac{1}{1+c_p^+ c_p} = c_p^+ \tag{4.37}$$

Bewijs :

i) $\Lambda_p(1+c_p^+ c_p) = \Lambda_p + c_p^+ c_p = (1+c_p^+ c_p)\Lambda_p$

Door $1+c_p^+ c_p$ te inverteren volgt het gestelde.

ii) Met (4.27) : $\Lambda_p(1+c_p c_p^+) = \Lambda_p = (1+c_p c_p^+)\Lambda_p$, nu inverteren.

iii) $c_p(1+c_p^+ c_p) = c_p + c_p c_p^+ c_p = (1+c_p c_p^+) c_p$, nu inverteren.

v) Volgt door iii) te adjungeren.

iv) Met (4.29) is $c_p^2 = 0$ zodat $c_p = c_p + c_p^+ c_p c_p = (1+c_p^+ c_p) c_p$

vi) Volgt door iv) te adjungeren.

<u>Stelling 4.19.</u>

i) $$\Lambda_p = P^+ P \frac{1}{1+c_p^+ c_p} = \frac{1}{1+c_p^+ c_p} P^+ P \tag{4.38}$$

ii) $$\Lambda_{p^+} = P \frac{1}{1+c_p^+ c_p} P^+ \tag{4.39}$$

Bewijs :

i) $P^+ P = (\Lambda_p + c_p^+)(\Lambda_p + c_p) = \Lambda_p + c_p^+ \Lambda_p + \Lambda_p c_p + c_p^+ c_p$

met (4.27) en (4.28) : $P^+ P = \Lambda_p + c_p^+ c_p = \Lambda_p(1+c_p^+ c_p) = (1+c_p^+ c_p)\Lambda_p$

ii) We noemen voorlopig :

$$P \frac{1}{1+c_p^+ c_p} P^+ =: \pi$$

-) $\pi^+ = \pi$ want $1+c_p^+ c_p$ is hermitisch dus $\frac{1}{1+c_p^+ c_p}$ ook.

-) Met wat onder i) bewezen is vinden we :

$$\pi^2 = P \frac{1}{1+c_p^+ c_p} P^+ P \frac{1}{1+c_p^+ c_p} P^+ = P \frac{1}{1+c_p^+ c_p} \Lambda_p P^+ = \pi$$

omdat volgens (4.21) $\Lambda_P \perp P^+$.

π is dus een orthogonale projectieoperator.

Met wat onder i) bewezen is zien we :

$$\pi P = P \frac{1}{1+C_P^+ C_P} P^+ P = P \Lambda_P = P \qquad \text{want : } P /\!/ \Lambda_P$$

Voorts is $P\pi = \pi$ evident.
We hebben nu bewezen dat ook $\pi \perp P$. Nu is, met (4.23) ook $\Lambda_{P^+} \perp P$ zodat, met stelling 4.14., $\Lambda_{P^+} \perp \pi$. π en Λ_{P^+} zijn beide orthogonaal. Met stelling 4.12. volgt nu : $\pi = \Lambda_{P^+}$.

Stelling 4.20.

$$1 - \Lambda_{P^+} = (1 - P^+) \frac{1}{1 + C_P C_P^+} (1 - P) \tag{4.40}$$

Bewijs :

$$\Lambda_{P^+} + (1 - P^+) \frac{1}{1+C_P C_P^+} (1 - P) = P \frac{1}{1+C_P^+ C_P} P^+ + (1 - P^+) \frac{1}{1+C_P C_P^+} (1 - P)$$

$$= (\Lambda_P + C_P) \frac{1}{1+C_P^+ C_P} (\Lambda_P + C_P^+) + (1 - \Lambda_P - C_P^+) \frac{1}{1+C_P C_P^+} (1 - \Lambda_P - C_P)$$

$$= (\Lambda_P + C_P) \left\{ \Lambda_P \frac{1}{1+C_P^+ C_P} + C_P^+ \frac{1}{1+C_P C_P^+} \right\} + (1 - \Lambda_P - C_P^+) \left\{ (1 - \Lambda_P) \frac{1}{1+C_P C_P^+} - C_P \frac{1}{1+C_P^+ C_P} \right\}$$

$$= (\Lambda_P + \cancel{C_P}) \frac{1}{1+C_P^+ C_P} + (\cancel{C_P^+} + C_P C_P^+) \frac{1}{1+C_P C_P^+} + (1 - \Lambda_P) \frac{1}{1+C_P C_P^+} - C_P^+ \cancel{\frac{1}{1+C_P C_P^+}}$$

$$- (\cancel{1} - C_P^+) C_P \frac{1}{1+C_P^+ C_P}$$

$$= (\Lambda_P + C_P^+ C_P) \frac{1}{1+C_P^+ C_P} + (1 - \Lambda_P + C_P C_P^+) \frac{1}{1+C_P C_P^+}$$

$$= \Lambda_P (1 + C_P^+ C_P) \frac{1}{1+C_P^+ C_P} + (1 - \Lambda_P)(1 + C_P C_P^+) \frac{1}{1+C_P C_P^+}$$

$$= \Lambda_P + 1 - \Lambda_P = 1$$

Op analoge wijze als boven kunnen we een operator C_{P^+} definieren :

$$C_{P^+} := P^+ - \Lambda_{P^+} \tag{4.41}$$

met geadjungeerde :

$$C_{P^+}^+ = P - \Lambda_{P^+} \tag{4.42}$$

Het blijkt dan dat, wegens $\Lambda_{p^+} \,/\!/\, P^+$

$$\text{i)} \quad (1-\Lambda_{p^+})\, C_{p^+} \Lambda_{p^+} = C_{p^+} \tag{4.43}$$

$$\text{ii)} \quad \Lambda_{p^+} C_{p^+}^{+} (1-\Lambda_{p^+}) = C_{p^+}^{+} \tag{4.44}$$

$$\text{iii)} \quad C_{p^+}^{2} = C_{p^+}^{+2} = 0 \tag{4.45}$$

conform (4.27) t/m (4.29).
Evenals boven is dan te bewijzen :

$$\text{i)} \quad \Lambda_{p^+} = P P^+ \frac{1}{1+C_{p^+}^{+} C_{p^+}} = \frac{1}{1+C_{p^+}^{+} C_{p^+}} P P^+ \tag{4.46}$$

$$\text{ii)} \quad \Lambda_{P} = P^+ \frac{1}{1+C_{p^+}^{+} C_{p^+}} P \tag{4.47}$$

$$\text{iii)} \quad 1-\Lambda_{P} = (1-P) \frac{1}{1+C_{p^+} C_{p^+}^{+}} (1-P^+) \tag{4.48}$$

conform (4.38), (4.39) en (4.40).

Er bestaan ook relaties tussen C_p en C_{p^+}, bijvoorbeeld :

Stelling 4.21.

$$C_P + C_{p^+} = (C_P + C_{p^+})^+ \tag{4.49}$$

Bewijs :

Met de definities van C_p en C_{p^+} zien we :

$$P = \Lambda_P + C_p \quad \Rightarrow \quad P^+ = \Lambda_P + C_p^+$$

$$P^+ = \Lambda_{p^+} + C_{p^+} \quad \Rightarrow \quad P = \Lambda_{p^+} + C_{p^+}^{+}$$

dus :

$$P^+ - P = \Lambda_P + C_p^+ - \Lambda_P - C_p = C_p^+ - C_p$$

$$P^+ - P = \Lambda_{p^+} + C_{p^+} - \Lambda_{p^+} - C_{p^+}^{+} = C_{p^+} - C_{p^+}^{+}$$

zodat :

$$C_p^+ - C_p = C_{p^+} - C_{p^+}^+$$

door hergroeperen van de termen volgt het gestelde.

Met behulp van stelling 4.19. ii) kunnen we tenslotte C_{p^+} nog uitdrukken in C_p , C_p^+ en Λ_p :

$$C_{p^+} = P^+ - \Lambda_{p^+} = \Lambda_p + C_p^+ - \Lambda_{p^+}$$

$$= \Lambda_p + C_p^+ - (\Lambda_p + C_p) \frac{1}{1 + C_p^+ C_p} (\Lambda_p + C_p^+) \tag{4.50}$$

Resumé.

In het bovenstaande hebben we, uitgaande van de niet-(noodzakelijk) zelfgeadjungeerde projectieoperator P , drie andere projectieoperatoren "geconstrueerd" P^+ , Λ_p en Λ_{p^+} . Deze hebben o.a. de volgende eigenschappen :

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && \Lambda_p^+ = \Lambda_p \\
&\text{ii)} && \Lambda_{p^+}^+ = \Lambda_{p^+} \\
&\text{iii)} && P \,/\!/\, \Lambda_p \qquad P \perp \Lambda_{p^+} \\
&\text{iv)} && P^+ /\!/\, \Lambda_{p^+} \qquad P^+ \perp \Lambda_p
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Als $P^+ = P$ dan vallen alle operatoren samen : $P^+ = P = \Lambda_p = \Lambda_{p^+}$.
Met de definities :

$$C_p = P - \Lambda_p \tag{4.25}$$

$$C_{p^+} = P^+ - \Lambda_{p^+} \tag{4.41}$$

vonden we :

$$(1 - \Lambda_p) C_p \Lambda_p = C_p \tag{4.27}$$

$$(1 - \Lambda_{p^+}) C_{p^+} \Lambda_{p^+} = C_{p^+} \tag{4.43}$$

$$C_p^2 = C_{p^+}^2 = 0 \tag{4.29)/(4.45}$$

Tenslotte vonden we een aantal verbanden tussen de orthogonale en niet-orthogonale projectoren zoals bijvoorbeeld (4.39) en (4.47) :

$$\Lambda_{p^+} = P \frac{1}{1 + C_p^+ C_p} P^+ \tag{4.39}$$

$$\Lambda_P = P^+ \frac{1}{1+C_{P^+}^{+} C_{P^+}} P \tag{4.47}$$

We willen de constructie nu omdraaien.
We gaan uit van een orthogonale projectieoperator Λ en een (lineaire) operator C die voldoen aan :

$$(1-\Lambda)C\Lambda = C \tag{4.52}$$

Hieruit volgt dan :

$$C^2 = 0 \tag{4.53}$$

In het bovenstaande is $C^+ \neq C$ want stel namelijk dat $C^+ = C$. Dan is door (4.52) te adjungeren eenvoudig in te zien dat $C = 0$: $C^+ = \Lambda C^+(1-\Lambda)$ dus $C = \Lambda C(1-\Lambda)$. Dan is met (4.52) $C = (1-\Lambda)C\Lambda = (1-\Lambda)\Lambda C(1-\Lambda)\Lambda$ $= 0$. Dit geval is niet interessant.

Definieer nu :

$$P = \Lambda + C \tag{4.54}$$

Stelling 4.22.

Als P gedefinieerd is als in (4.54), waarbij Λ en C aan (4.52) voldoen, dan is :

i) $P^2 = P \qquad P^+ \neq P$

ii) $P \,/\!\!/\, \Lambda$ (4.55)

iii) $P^+ \downarrow \Lambda$ (4.56)

Bewijs :

i) Met (4.52) en (4.53) : $P^2 = (\Lambda+C)(\Lambda+C) = \Lambda + C\Lambda + \Lambda C + C^2 = \Lambda + C = P$
Omdat $C^+ \neq C$ is $P^+ \neq P$.

ii) Met (4.52) en (4.53) : $P\Lambda = (\Lambda+C)\Lambda = \Lambda + C\Lambda = \Lambda + C = P$
$\Lambda P = \Lambda(\Lambda+C) = \Lambda + \Lambda C = \Lambda$

iii) Volgt door adjungeren van ii)

Uitgaande van P kunnen we, als boven beschreven, weer Λ_P, Λ_{P^+} en P^+ construeren.

Stelling 4.23.

Met P, Λ en C gedefinieerd als in (4.52) en (4.54) en Λ_P als na stelling 4.10. geldt :

i) $\Lambda = \Lambda_P$ (4.57)

ii) $C = C_P$ (4.58)

Bewijs :

i) Volgens (4.22) is $\Lambda_P // P$. Met stelling 4.14. ii) en (4.55) volgt $\Lambda /// \Lambda_P$. Dan geldt, met definitie 4.6. e.v. $1-\Lambda \downarrow 1-\Lambda_P$. Omdat Λ en Λ_P orthogonaal zijn, zijn ook $1-\Lambda$ en $1-\Lambda_P$ orthogonaal. Volgens stelling 4.12. is dan $1-\Lambda = 1-\Lambda_P$ zodat $\Lambda = \Lambda_P$.

ii) Dit volgt uit (4.25), (4.54) en wat onder i) bewezen is.

Ter illustratie passen we deze constructie toe op projectieoperatoren in een n-dimensionale inproductruimte.

Laat Λ een orthogonale projectieoperator zijn. Er bestaat een basis waarin Λ de vorm

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.59)$$

heeft. Λ is hier een $n \times n$ matrix, 1 is de $k \times k$ ($k < n$) eenheidsmatrix. Zij C een matrix die voldoet aan (4.52). Dan moet gelden :

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.60)$$

zodat $\alpha = \beta = \delta = 0$ en γ willekeurig.

C toegepast op een vector uit de ruimte waarop Λ projecteert levert een vector uit de ruimte waarop $1-\Lambda$ projecteert. C "koppelt" deze deelruimten.

Voor de geadjungeerde van   geldt :

$$C^{+} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{+} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

Zij nu :

$$P = \Lambda + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

dan is :

$$P^{+} = \Lambda + C^{+} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma^{+} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

Het is eenvoudig na te rekenen dat $P^2 = P$, $P^{+2} = P^{+}$, $P /\!/ \Lambda$ en $P^{+} \downarrow \Lambda$.
Voorts is :

$$1 + C^{+}C = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^{+}\gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

en :

$$\frac{1}{1 + C^{+}C} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 + \gamma^{+}\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

Uit stelling 4.23. is gebleken dat $\Lambda = \Lambda_P$ en $C = C_P$. We kunnen nu met behulp van (4.39) Λ_{P^+} berekenen :

$$\Lambda_{P^+} = P \frac{1}{1 + C^{+}C} P^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 + \gamma^{+}\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma^{+} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 + \gamma^{+}\gamma} & \dfrac{1}{1 + \gamma^{+}\gamma}\gamma^{+} \\ \gamma\dfrac{1}{1 + \gamma^{+}\gamma} & \gamma\dfrac{1}{1 + \gamma^{+}\gamma}\gamma^{+} \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

Dat dit inderdaad een orthogonale projectieoperator is rekent men eenvoudig na. In het speciale geval dat γ vierkant is en unitair, $\gamma\gamma^{+} = \gamma^{+}\gamma = 1$, krijgen we :

$$\Lambda_{p^+} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \gamma^{+} \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Hoofdstuk 5. Interpretaties.

5.1. De theorie van George, Prigogine en Rosenfeld.

In de theorie van George, Prigogine en Rosenfeld zijn we een bijzonder groot aantal superoperatoren tegengekomen die allemaal op een of andere manier met elkaar in verband staan. Er zijn onder die s-operatoren welgeteld acht superprojectie operatoren, waarvan er verschillen de niet-zelfgeadjungeerd zijn. We willen nu een wat duidelijker beeld hebben van alle relaties tussen die operatoren. Daartoe gaan we eerst in grote lijnen na hoe de theorie ontwikkeld wordt.

1) De eerste s-operator die een rol speelt is $\mathcal{L}$. Deze beschrijft de dynamica van het systeem ((2.2.2)).

2) Vervolgens worden de s-projectieoperatoren $\mathbb{P}_o$ en $\mathbb{P}_c$ ingevoerd waarmee de s-vectoren en s-operatoren in componenten kunnen worden gesplitst ((2.2.5)).

3) De s-operator ϑ wordt ingevoerd ((2.2.20)). Hiermee worden asymptotische oplossingen van de Liouville-von Neumann vergelijking geconstrueerd.

4) Met behulp van $\mathbb{P}_o$, $\mathbb{P}_c$, $\mathcal{L}$ en ϑ wordt de superoperator $\mathbb{C}$ gedefinieerd ((2.2.24)).

$$\{\mathbb{P}_o , \mathbb{P}_c , \mathcal{L}, \vartheta\} \Rightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$ voldoet aan $\quad \mathbb{P}_c \, \mathbb{C} \, \mathbb{P}_o = \mathbb{C} \qquad$ (2.4.2)

5) Vervolgens wordt het begrip tijdinversie geintroduceerd. Tijdinversie is een generalisatie van adjunctie (zie (2.3.20)).

6) Er worden, door tijdinverteren, uit ϑ en $\mathbb{C}$ twee nieuwe s-operatoren gedefiniëerd :

$$\eta = \bar{\vartheta} \qquad (2.3.15)$$

$$\mathbb{D} = \bar{\mathbb{C}} \qquad (2.3.16)$$

We beschouwen nu wat onder 7) genoemd staat. Met alles wat we in hoofdstuk 4. gezien hebben over niet-orthogonale projectieoperatoren, is het interpreteren van de onder 7) voorkomende relaties vrij eenvoudig geworden. We constateren om te beginnen dat alle genoemde relaties tussen de diverse projectieoperatoren bewezen zijn uitgaande van (2.4.2), (2.4.3) en de zelfgeadjungeerdheid (ook onder tijdinversie) van $\mathbb{P}_0$ alléén.

Als we nu even doen alsof tijdinverteren hetzelfde is als adjungeren, dan zien we makkelijk in dat de constructie van $\mathbb{P}_a$, $\overline{\mathbb{P}}_a$ en $\tilde{\pi}$ uitgaande van $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{C}$, zoals uitgevoerd door G.P.R., exact overeenkomt met de constructie van Λ_{P^+}, P en P^+ uitgaande van Λ en C op de wijze van stellingen 4.22. en 4.23. We leggen dus de correspondenties :

G.P.R.	Hoofdstuk 4.	
$\mathbb{P}_0$	$\Lambda = \Lambda_P$	stelling 4.13.
$\mathbb{C}$	$C = C_P$	
$\mathbb{P}_a = \mathbb{P}_0 + \mathbb{C}$	$P = \Lambda + C = \Lambda_P + C_P$	
$\overline{\mathbb{P}}_a = \mathbb{P}_0 + \overline{\mathbb{C}}$	$P^+ = \Lambda_P + C_P^+$	
$\tilde{\pi} = \mathbb{P}_a \dfrac{1}{1+\overline{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}} \overline{\mathbb{P}}_a$	$\Lambda_{P^+} = P \dfrac{1}{1+C_P^+ C_P} P^+$	

De relaties (2.4.15), (2.4.16) en (2.4.39) komen overeen met (4.21) t/m (4.24) :

i)	$\mathbb{P}_a \,/\!/\, \mathbb{P}_0$	(2.4.15)	$P \,/\!/\, \Lambda_P$	(4.22)
ii)	$\overline{\mathbb{P}}_a \perp \mathbb{P}_0$	(2.4.16)	$P^+ \perp \Lambda_P$	(4.21)
iii)	$\tilde{\pi} \perp \mathbb{P}_a$	(2.4.39)	$\Lambda_{P^+} \perp P$	(4.23)
iv)	$\tilde{\pi} \,/\!/\, \overline{\mathbb{P}}_a$	(2.4.39)	$\Lambda_{P^+} /\!/ P^+$	(4.24)

Voor de overige projectieoperatoren vinden we :

G.P.R.	Hoofdstuk 4.
$\mathbb{P}_c$	$1 - \Lambda_P$
$\mathbb{P}_t = 1 - \mathbb{P}_a$	$1 - P$
$\overline{\mathbb{P}}_t = 1 - \overline{\mathbb{P}}_a$	$1 - P^+$

$$\tilde{\pi} = 1 - \hat{\pi} =$$

$$= (1-\overline{\mathbb{P}}_a)\frac{1}{1+\mathbb{C}\overline{\mathbb{C}}}(1-\mathbb{P}_a) \quad (2.4.42) \qquad 1-\Lambda_{P^+} = (1-P^+)\frac{1}{1+C_P C_P^+}(1-P) \quad (4.40)$$

7) Uitgaan de van $\mathbb{P}_o$, $\mathbb{P}_c$, $\mathbb{C}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ worden nu een groot aantal nieuwe s-projectieoperatoren geintroduceerd :

$$\underbrace{\mathbb{P}_o,\ \mathbb{P}_c,\ \mathbb{C},\ \overline{\mathbb{C}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}_a = \mathbb{P}_o + \mathbb{C} \qquad \mathbb{P}_b = \mathbb{I} - \mathbb{P}_a = \mathbb{P}_c - \mathbb{C} \qquad (2.4.6)$$

$$\overline{\mathbb{P}}_a = \mathbb{P}_o + \overline{\mathbb{C}} \qquad \overline{\mathbb{P}}_b = \mathbb{I} - \overline{\mathbb{P}}_a = \mathbb{P}_c - \overline{\mathbb{C}} \qquad (2.4.7)$$

$$\tilde{\pi} = \mathbb{P}_a \frac{1}{1+\overline{\mathbb{C}}\mathbb{C}} \overline{\mathbb{P}}_a \qquad \hat{\pi} = 1 - \tilde{\pi} = \overline{\mathbb{P}}_b \frac{1}{1+\mathbb{C}\overline{\mathbb{C}}} \mathbb{P}_b \qquad (2.4.34)/(2.4.42)$$

We roepen een aantal relaties die tussen deze s-operatoren gelden in herinnering :

i) $\begin{cases} \mathbb{P}_a \mathbb{P}_o = \mathbb{P}_a \\ \mathbb{P}_o \mathbb{P}_a = \mathbb{P}_o \end{cases}$ (2.4.15) v) $\begin{cases} \mathbb{P}_b \mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c \\ \mathbb{P}_c \mathbb{P}_b = \mathbb{P}_b \end{cases}$ (2.4.17)

ii) $\begin{cases} \overline{\mathbb{P}}_a \mathbb{P}_o = \mathbb{P}_o \\ \mathbb{P}_o \overline{\mathbb{P}}_a = \overline{\mathbb{P}}_a \end{cases}$ (2.4.16) vi) $\begin{cases} \overline{\mathbb{P}}_b \mathbb{P}_c = \overline{\mathbb{P}}_b \\ \mathbb{P}_c \overline{\mathbb{P}}_b = \mathbb{P}_c \end{cases}$ (2.4.18)

iii) $\begin{cases} \tilde{\pi} \mathbb{P}_a = \mathbb{P}_a \\ \mathbb{P}_a \tilde{\pi} = \tilde{\pi} \end{cases}$ (2.4.34) vii) $\begin{cases} \hat{\pi} \mathbb{P}_b = \hat{\pi} \\ \mathbb{P}_b \hat{\pi} = \mathbb{P}_b \end{cases}$ (2.4.48)

iv) $\begin{cases} \tilde{\pi} \overline{\mathbb{P}}_a = \tilde{\pi} \\ \overline{\mathbb{P}}_a \tilde{\pi} = \overline{\mathbb{P}}_a \end{cases}$ (2.4.39) viii) $\begin{cases} \hat{\pi} \overline{\mathbb{P}}_b = \overline{\mathbb{P}}_b \\ \overline{\mathbb{P}}_b \hat{\pi} = \hat{\pi} \end{cases}$ (2.4.48)

voorts geldt, zoals met (2.1.7), (2.1.8) en de definities eenvoudig is na te gaan, :

$$\mathbb{P}_o = \mathbb{P}_o^{+} = \overline{\mathbb{P}}_o$$
$$\mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c^{+} = \overline{\mathbb{P}}_c$$
$$\overline{\hat{\pi}} = \hat{\pi}$$
$$\overline{\tilde{\pi}} = \tilde{\pi}$$
$$\overline{\mathbb{P}}_a \neq \mathbb{P}_a$$
$$\overline{\mathbb{P}}_b \neq \mathbb{P}_b$$

8) Tenslotte voeren G.P.R, om de dynamica van het systeem verder te bestuderen, uitgaande van $\mathbb{P}_c$, $\mathbb{P}_b$, $\overline{\mathbb{P}}_b$, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ en L twee nieuwe s-operatoren in:

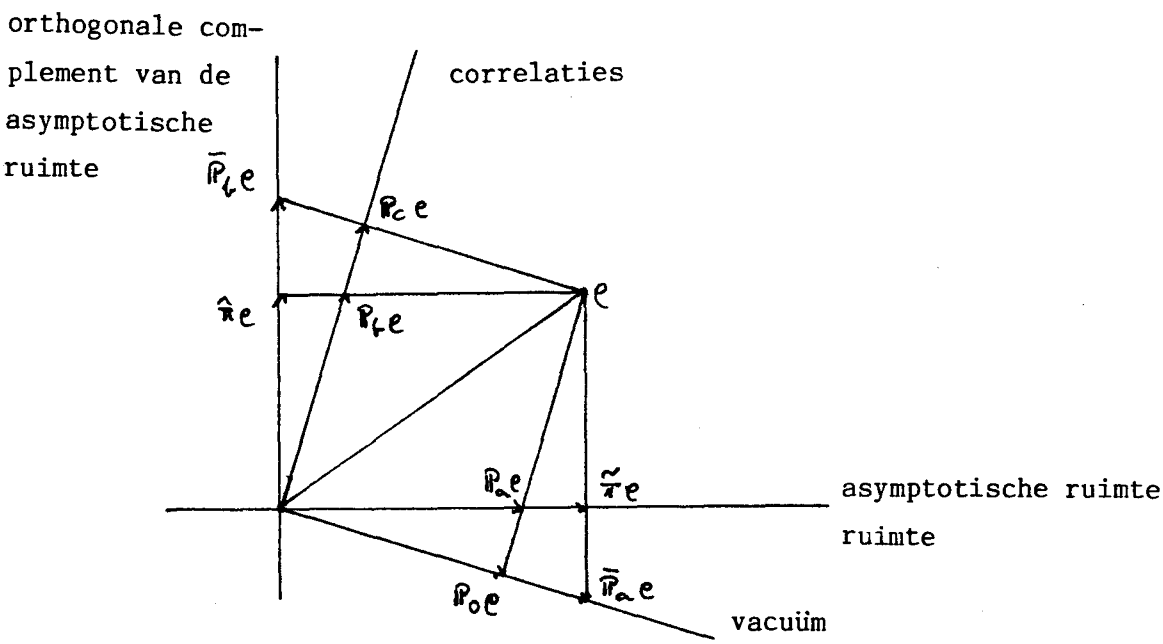
$$\left\{\mathbb{P}_c, \overline{\mathbb{P}}_b, \mathbb{P}_b, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \xi \\ \lambda \end{cases} \qquad (2.4.21)$$

ξ en λ zijn elkaars tijdgeinverteerden : $\overline{\xi} = \lambda$.

De vergelijkingen (2.4.17), (2.4.18) en (2.4.48) zeggen in feite :

v)	$\mathbb{P}_l \perp \mathbb{P}_c$	(2.4.17)
vi)	$\bar{\mathbb{P}}_l \parallel \mathbb{P}_c$	(2.4.18)
vii)	$\hat{\pi} \parallel \mathbb{P}_l$	(2.4.48)
viii)	$\hat{\pi} \perp \bar{\mathbb{P}}_l$	(2.4.48)

We kunnen dit alles schematisch weergeven :



De theorie kan nu als volgt geinterpreteerd worden. G.P.R. beginnen met een decompositie van de Hilbertruimte in het correlatievacuüm (gekarakteriseerd door $\mathbb{P}_0$ en $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$) en de correlatieruimte (gekarakteriseerd door $\mathbb{P}_c$ en $\mathbb{P}_l$). Het idee is dat het correlatievacuum, dat alleen diagonaaltermen bevat, alle langzame processen beschrijft, en dat de snelle processen, de microscopische fluctuaties, met niet-diagonaaltermen corresponderen. Zoals ook in 2.1. al is opgemerkt zijn er echter ook microscopische fluctuaties die wel langetermijn effecten hebben : de z.g. coherente fluctuaties. Om deze in rekening te brengen introduceren G.P.R. de s-operator $\mathbb{C}$, die de coherente van de niet-coherente fluctuaties scheidt. Met behulp van deze superoperator wordt de asymptotische ruimte geconstrueerd. Deze wordt gekarakteriseerd door de projectoren $\tilde{\pi}$ en $\mathbb{P}_\alpha$ en kan worden opgevat als de ruimte van macroscopische grootheden. Het orthogonale complement hiervan, gekarakteriseerd door $\hat{\pi}$ en $\bar{\mathbb{P}}_l$, kan opgevat worden als de "ruimte van die atomaire fluctuaties die onder de gegeven waarnemingscondities (d.w.z. die gedefinieerd door de asymptotische dynamica) niet kunnen worden waargenomen" ([1] p.23). Omdat de superoperator $\mathbb{P}_\alpha$ een mimorfisme is ((2.4.9) t/m (2.4.11)) kunnen we voor willekeurige dichtheidsoperatoren ρ $\mathbb{P}_\alpha \rho$ opvatten als macroscopische dichtheidsoperator.

Ten overvloede herhalen we de correspondenties tussen de theorie van G.P.R. en het formalisme van hoofdstuk 4. nog eens in matrixtaal.
In 2.4. hebben we een matrixrepresentatie gegeven van $\tilde{\pi}$ en $\hat{\pi}$. We werkten daar in een representatie waarin $\mathbb{P}_0$ diagonaal is :

$$\mathbb{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

Omdat $\mathbb{C}$ aan (2.4.2) voldoet, is eenvoudig na te gaan dat in deze representatie de matrix voor $\mathbb{C}$ de vorm :

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.2}$$

heeft. Voor $\mathbb{P}_a$ en $\overline{\mathbb{P}}_a$ vinden we :

$$\mathbb{P}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.3}$$

$$\overline{\mathbb{P}}_a = \begin{bmatrix} 1 & \overline{\mathbb{C}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.4}$$

En tenslotte, met (2.4.57), voor $\tilde{\pi}$:

$$\tilde{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\overline{\mathbb{C}}\mathbb{C}} & \frac{1}{1+\overline{\mathbb{C}}\mathbb{C}}\overline{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}\frac{1}{1+\overline{\mathbb{C}}\mathbb{C}} & \mathbb{C}\frac{1}{1+\overline{\mathbb{C}}\mathbb{C}}\mathbb{C} \end{bmatrix} \tag{2.4.57}$$

In hoofdstuk 4. hebben we voor Λ_p , C_p , P , P^+ en Λ_{p^+} , werkend in een basis waarin Λ_p diagonaal is, de volgende matrices opgesteld :

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

$$P^{+} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma^{+} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

$$\Lambda_{P^{+}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\gamma^{+}\gamma} & \frac{1}{1+\gamma^{+}\gamma}\gamma^{+} \\ \gamma\frac{1}{1+\gamma^{+}\gamma} & \gamma\frac{1}{1+\gamma^{+}\gamma}\gamma^{+} \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

Als we γ laten corresponderen met $\mathbb{C}$, dan zijn alle overige correspondenties evident.

5.2. De theorie van de Muynck.

Ook in de theorie van dM. komen niet-zelfgeadjungeerde projectieoperatoren voor. Omdat we ook in die theorie met een inproductruimte te maken hebben, kunnen we proberen ook hier de resultaten uit hoofdstuk 4. toe te passen.

We werken in de representatie van 3.2.. Er spelen drie superprojectieoperatoren een rol :

$$\mathbb{P}_c^{+} = \sum_{\bar{n}} A_{\bar{n}}^{+} \times A_{\bar{n}} \tag{3.2.8}$$

$$\mathbb{P}_c = \sum_{\bar{n}} A_{\bar{n}} \times A_{\bar{n}}^{+} \tag{3.3.1}$$

$$\mathbb{P}_c^{\perp} = A_0 \times A_0 \tag{3.3.10}$$

De volgende relaties gelden :

$$\mathbb{P}_c^{\perp +} = \mathbb{P}_c^{\perp} \tag{3.3.11}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_c \mathbb{P}_c^{\perp} = \mathbb{P}_c^{\perp} \\ \mathbb{P}_c^{\perp} \mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c \end{cases} \tag{3.3.12}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_c^{+} \mathbb{P}_c^{\perp} = \mathbb{P}_c^{+} \\ \mathbb{P}_c^{\perp} \mathbb{P}_c^{+} = \mathbb{P}_c^{\perp} \end{cases} \tag{5.2.1}$$

(5.2.1) volgt door (3.3.12) te adjungeren.

We weten ondertussen wat (3.3.12) en (5.2.1) betekenen :

$$\mathbb{P}_c \perp \mathbb{P}_c^{\perp} \tag{5.2.2}$$

$$\mathbb{P}_c^{+} /\!/ \mathbb{P}_c^{\perp} \tag{5.2.3}$$

Terugdenkend aan de relaties (4.21) en (4.22) leggen we eenvoudig correspondenties met de theorie uit hoofdstuk 4. :

dM.	Hoofdstuk 4.
$\mathbb{P}_c^{\perp}$	Λ_P
$\mathbb{P}_c$	P^+
$\mathbb{P}_c^{\neq}$	P
?	Λ_{P^+}

In de theorie van dM. is nog geen operator die correspondeert met Λ_{P^+} . We kunnen deze operator echter wel construeren. Daartoe definieren we eerst :

$$\mathbb{C} = \mathbb{P}_c^{\neq} - \mathbb{P}_c^{\perp} \tag{5.2.4}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat geldt :

$$(\mathbb{I} - \mathbb{P}_c^{\perp})\, \mathbb{C}\, \mathbb{P}_c^{\perp} = \mathbb{C} \tag{5.2.5}$$

conform (4.25) en (4.27). Met behulp van de bovenstaande definities voor $\mathbb{P}_c^{\neq}$ en $\mathbb{P}_c^{\perp}$ kunnen we schrijven :

$$\mathbb{C} = \sum_{\bar{n}\neq 0} A^+_{\bar{n}} \times A_{\bar{n}} \tag{5.2.6}$$

Dan is :

$$\begin{aligned} 1 + \mathbb{C}^{\neq}\mathbb{C} &= 1 + \Big(\sum_{\bar{n}\neq 0} A_{\bar{n}} \times A^+_{\bar{n}}\Big)\Big(\sum_{\bar{m}\neq 0} A^+_{\bar{m}} \times A_{\bar{m}}\Big) \\ &= 1 + \sum_{\substack{\bar{n}\neq 0 \\ \bar{m}\neq 0}} A_{\bar{n}} A^+_{\bar{m}} \times A_{\bar{m}} A^+_{\bar{n}} \qquad \text{met (3.2.7) :} \\ &= 1 + \sum_{\substack{\bar{m}\neq 0 \\ \bar{n}\neq 0}} \delta_{\bar{m}\bar{n}}\, A_0 \times A_0 \\ &= 1 + \sum_{\bar{n}\neq 0} A_0 \times A_0 = 1 + \delta\, \mathbb{P}_c^{\perp} \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

waarin

$$\delta := \sum_{\bar{n}\neq 0} 1. \tag{5.2.8}$$

δ is de dimensie van de ruimte opgespannen door de vectoren $\{|0\bar{n}\rangle\}_{\bar{n}}$ minus 1. In het algemeen is δ oneindig en bestaat $1 + \mathbb{C}^{\neq}\mathbb{C}$ niet.

Voor het vervolg nemen we aan dat δ wel eindig is. De inverse van $1+\mathbb{C}^{\ddagger}\mathbb{C}$ is

$$\frac{1}{1+\mathbb{C}^{\ddagger}\mathbb{C}} = 1 - \frac{\delta}{\delta+1}\,\mathbb{P}_c^{\perp} \tag{5.2.9}$$

zoals direct te controleren is. We noemen de operator die correspondeert met Λ_{p^+} π . Voor π geldt nu, conform (4.39), :

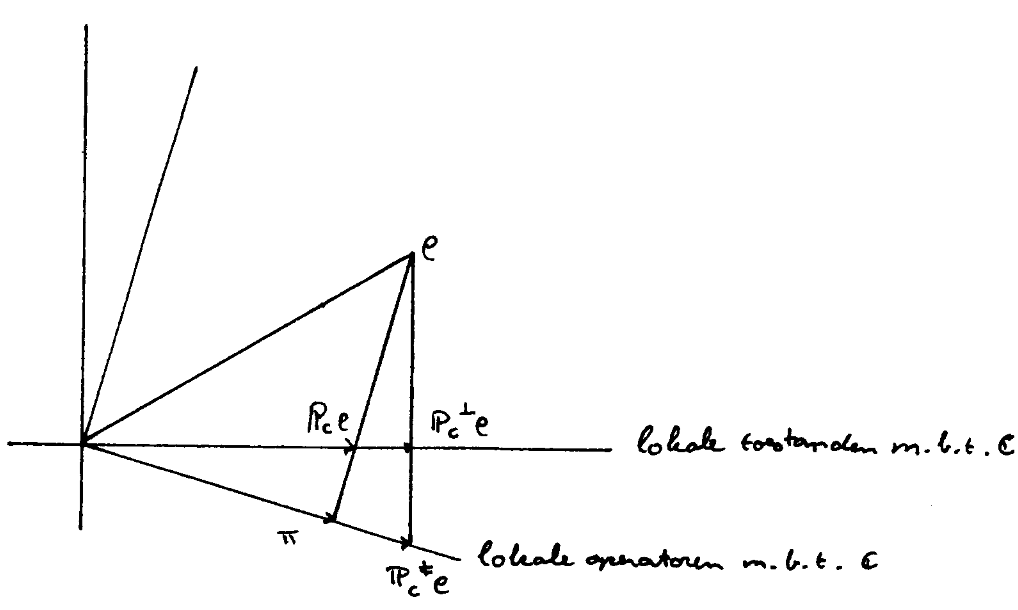
$$\begin{aligned}
\pi &= \mathbb{P}_c^{\ddagger}\,\frac{1}{1+\mathbb{C}^{\ddagger}\mathbb{C}}\,\mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c^{\ddagger}\left(1-\frac{\delta}{\delta+1}\right)\mathbb{P}_c^{\perp}\,\mathbb{P}_c \\
&= \frac{1}{\delta+1}\,\mathbb{P}_c^{\ddagger}\,\mathbb{P}_c^{\perp}\,\mathbb{P}_c = \frac{1}{\delta+1}\,\mathbb{P}_c^{\ddagger}\,\mathbb{P}_c \\
&= \frac{1}{\delta+1}\left(\mathbb{P}_c^{\perp} + \mathbb{C} + \mathbb{C}^{\ddagger} + \mathbb{C}\,\mathbb{C}^{\ddagger}\right)
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

op grond van (5.2.2), (5.2.4) en (5.2.5).
Het is duidelijk dat π zelfgeadjungeerd is. π projecteert, als hij bestaat, orthogonaal op dezelfde deelruimte als $\mathbb{P}_c^{\ddagger}$.
Expliciet heeft π de vorm :

$$\pi = \frac{1}{\delta+1}\Big(A_0 \times A_0 + \sum_{\bar n \neq 0} A_{\bar n}^{+} \times A_{\bar n} + \sum_{\bar n \neq 0} A_{\bar n} \times A_{\bar n}^{+} + \sum_{\substack{\bar n \neq 0 \\ \bar m \neq 0}} A_{\bar n}^{+} A_{\bar m} \times A_{\bar m}^{+} A_{\bar n} \Big) \tag{5.2.11}$$

We hebben al geconstateerd dat er problemen ontstaan als $\delta \to \infty$. Uit (5.2.9) en (5.2.10) blijkt dat π dan gelijk wordt aan de nuloperator. We mogen de resultaten uit hoofdstuk 4. blijkbaar niet zonder meer toepassen.

Het voorgaande geven we schematisch weer :



Wat de fysische betekenis van $\mathbb{C}$ is, is nog niet duidelijk.

In de algemene theorie van dM. wordt alleen gewerkt met de s-operatoren $\mathbb{P}_c$ en $\mathbb{P}_c^{*}$. De operator $\mathbb{P}_c^{\perp}$ speelt geen rol meer. Met het formalisme uit hoofdstuk 4. kunnen we, in ieder geval op een formele manier, uitgaande van $\mathbb{P}_c$ (of $\mathbb{P}_c^{*}$) $\mathbb{P}_c^{\perp}$ en π definieren. Het is nog niet duidelijk of dit zinnig is. Het kan namelijk zijn dat de zo gedefinieerde operatoren geen mimorfismen zijn.

Conclusies.

-) Aan de hand van de in hoofdstuk 4. ontwikkelde theorie kunnen we het formalisme van G.P.R. geometrisch interpreteren. We zien dan duidelijker hoe de diverse s-operatoren met elkaar in verband staan. De hierdoor verkregen overzichtelijkheid heeft in belangrijke mate bijgedragen tot een grotere bruikbaarheid van de theorie van G.P.R. bij de analyse van het begrip "macroscopische observabele" (zie verder).

-) Als we de tijdinversie opvatten als gewone adjunctie, dan blijkt dat G.P.R.'s constructie van de s-operator $\tilde{\pi}$, uitgaande van $\mathbb{P}_0$ en $\mathbb{C}$, in feite uniek is.

-) De deelruimte waarop $\tilde{\pi}$ projecteert kan geinterpreteerd worden als de ruimte van macroscopische grootheden. $\mathbb{P}_\alpha$ is een mimorfisme dat op dezelfde deelruimte als $\tilde{\pi}$ projecteert. Als ρ een willekeurige dichtheidsoperator is, dan kunnen we $\mathbb{P}_\alpha \rho$ als macroscopische dichtheidsoperator interpreteren (macroscopisch in de zin van het asymptotische gedrag).

-) De meettheorie die G.P.R. ontwikkelen laat nogal wat te wensen over.
Ten eerste is hun theorie, doordat zij gebruik maken van de s-projector $\mathbb{P}^{(ss)}$ die geen mimorfisme is, inconsistent. Ten tweede is wat zij beschouwen als hun voornaamste resultaat, het afleiden van het projectiepostulaat, vanuit het oogpunt van de quantummechanische meettheorie niet erg relevant.
Het eerste euvel kan verholpen worden door i.p.v. $\mathbb{P}^{(ss)}$ het mimorfisme $\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s}$, dat op dezelfde deelruimte projecteert als $\mathbb{P}^{(ss)}$, te gebruiken.
Wat betreft het projectiepostulaat : dit vinden G.P.R. door naar de toestand van het object te kijken op tijdstip t na de interactie. Dit is, zoals gezegd, niet erg relevant. Kijken we in plaats hiervan naar de asymptotische toestand van het meetapparaat na de interactie, dan treden weer inconsistenties op t.g.v. het gebruik van $\mathbb{P}^{(ss)}$. Ook nu kan dit verholpen worden door $\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s}$ te gebruiken.
We krijgen dan een acceptabel eindresultaat.

-) In de meettheorie van G.P.R. spelen twee begrippen macroscopisch een rol : ten eerste het "macroscopisch niveau van observatie" zoals dat gedefiniëerd is door $\tilde{\pi}$ en $\mathbb{P}_\alpha$. Ten tweede het begrip macroscopisch in de zin van "macroscopische wijzerposities" zoals dat gedefiniëerd is door $\mathbb{P}^{(ss)}$ en $\mathbb{P}^{\Sigma}_{>,s}$. Wat de relatie tussen deze begrippen precies is, is nog niet geheel duidelijk. Wel hebben we gezien dat $\tilde{\pi}$ en $\mathbb{P}^{(ss)}$ commuteren. Wat het meest interessant is, is de relatie tussen $\mathbb{P}_\alpha$ en $\mathbb{P}^{\Sigma}_{\geq,s}$ omdat voor willekeurige dichtheidsoperatoren ρ , zowel $\mathbb{P}_\alpha \rho$ als $\mathbb{P}^{\Sigma}_{\geq,s}\rho$ opgevat kunnen worden als macroscopische dichtheidsoperatoren. Deze relatie zal in de toekomst nog onderzocht moetem worden.

-) Tenslotte merken we op dat de meettheorie van G.P.R. (in feite die van D.P.L.) het meest interessante stuk van het meetproces, namelijk de interactie tussen object en meetapparaat, nagenoeg geheel buiten beschouwing laat.

-) Met behulp van het formalisme uit hoofdstuk 4. kunnen we ook de theorie van dM. geometrisch interpreteren. Bovendien kunnen we nu op de wijze van hoofdstuk 4. in dM.'s theorie een nieuwe s-projectieoperator π definieren. Deze s-operator projecteert loodrecht op de ruimte van lokale operatoren. Hierbij treedt de complicatie op dat π gelijk aan de nuloperator wordt als de dimensie van de ruimte naar oneindig gaat. Het is nog niet duidelijk wat dit betekent. Ook de fysische interpretatie van de s-operator $\mathbb{C}$ die gebruikt wordt om π te construeren is nog onduidelijk.

-) De s-operator $\mathbb{P}_c$ die dM. gebruikt om lokale operatoren te definiëren is formeel identiek met de s-operator $\mathbb{P}^{\Sigma}_{\geq,s}$ die we in de meettheorie van G.P.R. nodig hadden om het formalisme consistent te maken.

Literatuur.

1. C. George, I. Prigogine, L. Rosenfeld.
Det Kong. Danske Vid. Selsk. Mat-fys. Medd. 38 (1972) 12.

2. W.M. de Muynck.
Proefschrift, Universiteit van Amsterdam (1984).

3. A. Daneri, A. Loinger, G.M. Prosperi.
Nuclear Physics 33 (1962) 297.

4. B. Robertson.
Am. J. Phys. 41 (1973) 678.

5. N.G. de Bruijn, A.J.E.M. Janssen.
Lineaire Analyse 1, T.H.E. syllabus 2.238.

6. I. Prigogine, C. George, F. Henin.
Physica 45 (1969) 418.

7. I. Prigogine, C. George, F. Henin, L. Rosenfeld.
Chemica Scripta 4 (1973) 5.

8. C. George, I. Prigogine, L. Rosenfeld.
Nature 240 (1972) 25.

9. A.P. Grecos.
Physica 51 (1971) 50.

10. L. Rosenfeld.
Supplement of the Progress of Theoretical Physics, Commemoration Issue for the 30th. Anniversary of the Meson Theory by Dr. H. Yukawa, (1965) 223.

11. I.Prigogine.
Non-Equilibrium Statistical Mechanics, Interscience Publ., New York, 1962.

Appendix 1. Normen van projectieoperatoren op een Hilbertruimte.

We willen in deze appendix nog enige opmerkingen maken betreffende de normen van projectieoperatoren op een Hilbertruimte $\mathcal{H}$. We zullen de notatie uit hoofdstuk 4. gebruiken.

De norm van een element v van $\mathcal{H}$ is , zoals gebruikelijk, gedefinieerd als :

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} \tag{A1.1}$$

Onder de norm $\|P\|_s$ van de operator P op $\mathcal{H}$ verstaan we :

$$\|P\|_s := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Pv\|}{\|v\|} \tag{A1.2}$$

We bewijzen de volgende stellingen.

<u>Stelling A1.1.</u>

Als Λ een zelfgeadjungeerde projectieoperator op $\mathcal{H}$ is, dan is :

$$\|\Lambda\|_s = 1 \tag{A1.3}$$

Bewijs :

Als Λ een orthogonale projectieoperator op $\mathcal{H}$ is, dan is $1-\Lambda$ dit ook. Zij $v \in \mathcal{H}$ willekeurig. Nu is :

$$v = (\Lambda + (1-\Lambda))v \tag{A1.4}$$

zodat :

$$(v,v) = (\Lambda v + (1-\Lambda)v, \Lambda v + (1-\Lambda)v) = (\Lambda v, \Lambda v) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(\Lambda v,(1-\Lambda)v)}}$$

$$+ \underset{0}{\underset{\shortparallel}{((1-\Lambda)v, \Lambda v)}} + ((1-\Lambda)v, (1-\Lambda)v) \tag{A1.5}$$

Dat wil zeggen :

$$\|v\|^2 = \|\Lambda v\|^2 + \|(1-\Lambda)v\|^2 \tag{A1.6}$$

Als $v \neq 0$ zien we hiermee direct in dat :

$$\frac{\|\Lambda v\|^2}{\|v\|} \leqslant 1 \tag{A1.7}$$

Dan is :

$$\|\Lambda\|_s := \sup_{v \neq 0} \frac{\|\Lambda v\|}{\|v\|} \leqslant 1 \tag{A1.8}$$

Zij nu $\omega \neq 0$ een element uit $\mathcal{H}_\Lambda$ (zie (4.4)) dan is :

$$\frac{\|\Lambda \omega\|}{\|\omega\|} = \frac{\|\omega\|}{\|\omega\|} = 1 \tag{A1.9}$$

Met (A1.8) betekent dit :

$$\|\Lambda\|_s = 1 \tag{A1.10}$$

Nu laten we zien dat de norm van een niet-orthogonale projectieoperator altijd groter dan een is. Dit bewijzen we in drie stappen.

Stelling A1.2.

Als P een niet-orthogonale projectieoperator is en Λ_P de bij P "horende" orthogonale projectieoperator (zie (4.22)) dan geldt voor alle $v \in \mathcal{H}$ met $\Lambda_P v \neq 0$:

$$\frac{\|Pv\|}{\|v\|} \leqslant \frac{\|P\Lambda_p v\|}{\|\Lambda_p v\|} \tag{A1.11}$$

Bewijs :

Zij $v \in \mathcal{H}$ willekeurig, maar zó dat $\Lambda_p v \neq 0$.

$$v = \Lambda_p v + (1-\Lambda_p)v \quad , \quad (\Lambda_p v, (1-\Lambda_p)v) = 0 \tag{A1.12}$$

Hieruit volgt :

$$\|v\|^2 = \|\Lambda_p v\|^2 + \|(1-\Lambda_p)v\|^2 \geqslant \|\Lambda_p v\|^2 \tag{A1.13}$$

zodat :

$$\frac{1}{\|v\|} \leq \frac{1}{\|\Lambda_p v\|} \tag{A1.14}$$

Dat wil zeggen :

$$\frac{\|\mathcal{P} v\|}{\|v\|} \leqslant \frac{\|\mathcal{P} v\|}{\|\Lambda_p v\|} = \frac{\|\mathcal{P}\Lambda_p v\|}{\|\Lambda_p v\|} \tag{A1.15}$$

waarbij de laatste gelijkheid geldt omdat $\mathcal{P} /\!/ \Lambda_p$ ((4.22)).

Stelling A1.3.

Laat $\mathcal{P}$ en Λ_p dezelfde betekenis hebben als in de vorige stelling. Voor alle $v \in \mathcal{H}$ met $\Lambda_p v \neq 0$ geldt :

$$\frac{\|\mathcal{P}\Lambda_p v\|}{\|\Lambda_p v\|} \geqslant 1 \tag{A1.16}$$

Bewijs :

$$v = (\mathcal{P} + (1-\mathcal{P}))v = \Lambda_p v + (1-\Lambda_p)v \tag{A1.17}$$

$$\mathcal{P}v = \Lambda_p v + ((1-\Lambda_p) - (1-\mathcal{P}))v \tag{A1.18}$$

Nu is $\Lambda_p v \in \mathcal{H}_{p^+}$, voorts is $\Lambda_p /\!/ \mathcal{P}$ zodat $1-\mathcal{P} \downarrow 1-\Lambda_p$. Dat betekent : $(1-\Lambda_p-(1-\mathcal{P}))v \in \mathcal{H}_{1-\mathcal{P}}$. Nu is $\mathcal{H}_{p^+} \perp \mathcal{H}_{1-\mathcal{P}}$ (zie stelling 4.6.) waarmee voor alle v :

$$(\Lambda_p v, ((1-\Lambda_p) - (1-\mathcal{P}))v) = 0 \tag{A1.19}$$

Uit (A1.18) en (A1.19) concluderen we :

$$\|\mathcal{P}v\|^2 = \|\Lambda_p v\|^2 + \|\{(1-\Lambda_p)-(1-\mathcal{P})\}v\|^2 \geqslant \|\Lambda_p v\|^2 \tag{A1.20}$$

Waarmee uiteindelijk, omdat $\mathcal{P} /\!/ \Lambda_p$, :

$$\frac{\|\mathcal{P}v\|}{\|\Lambda_p v\|} = \frac{\|\mathcal{P}\Lambda_p v\|}{\|\Lambda_p v\|} \geqslant 1 \tag{A1.21}$$

Voor alle vectoren $v \in \mathcal{H}$ $v \neq 0$ waarvoor $\Lambda_P v = 0$ geldt, vanwege $\Lambda_P // P$, ook dat $Pv = 0$. Voor die vectoren is dus $\|Pv\|/\|v\| = 0$. Om deze reden en op grond van stellingen A1.2. en A1.3. mogen we schrijven :

$$\|P\|_S = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Pv\|}{\|v\|} = \sup_{\Lambda_P v \neq 0} \frac{\|P\Lambda_P v\|}{\|\Lambda_P v\|} \geq 1 \tag{A1.22}$$

Als nu $\|P\|_S = 1$ zou zijn, dan zou voor alle $v \neq 0$ met $\Lambda_P v \neq 0$ moeten gelden dat $\|P\Lambda_P v\| = \|\Lambda_P v\|$. Ofwel, weer omdat $\Lambda_P // P$, :

$$\|Pv\| = \|\Lambda_P v\| \tag{A1.23}$$

Met de gelijkheid (A1.20) zou dit geven :

$$\|\{(1-\Lambda_P) - (1-P)\}v\| = 0$$

$$\|(P - \Lambda_P)v\| = 0$$

$$Pv = \Lambda_P v \qquad \text{voor alle } v \text{ met } \Lambda_P v \neq 0 \tag{A1.24}$$

i) Zij nu $v \in \mathcal{H}_{P^+}$ $v \neq 0$ dan is, omdat $P^+ \downarrow \Lambda_P$, $\Lambda_P v = v \neq 0$
Met (A1.24) : $Pv = \Lambda_P v = v$. Dat wil zeggen $v \in \mathcal{H}_P$

ii) Omgekeerd : als $v \in \mathcal{H}_P$ $v \neq 0$ dan is, omdat $P // \Lambda_P$,
$P\Lambda_P v = Pv = v \neq 0$. Hieruit volgt dat $\Lambda_P v \neq 0$ zodat $\Lambda_P v = Pv = v$
Omdat $P^+ \downarrow \Lambda_P$ betekent dit dat $v \in \mathcal{H}_{P^+}$

i) en ii) samen betekent dat $\mathcal{H}_{P^+} = \mathcal{H}_P$. Volgens stelling 4.6. iv) is $\mathcal{H}_{P^+} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1-P}$. We kunnen dus schrijven : $\mathcal{H}_P = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{1-P}$.
Dat wil zeggen : $\mathcal{H}_P \perp \mathcal{H}_{1-P}$. Stelling 4.3. zegt dat P dan orthogonaal is : $P^+ = P$: tegenspraak. De norm van P is dus echt groter dan 1.

Appendix 2. Normen van superprojectieoperatoren.

We gaan uit van een Hilbertruimte $\mathcal{H}$. Voor de lineaire operatoren op $\mathcal{H}$ kunnen we twee normen definiëren. Zij $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\|A\|_s := \sup_{v \neq 0} \frac{\|A v\|}{\|v\|} \qquad \text{(s} \Leftrightarrow \text{supremum)} \tag{A2.1}$$

$$\|A\|_i := \{\mathrm{Tr}\, A^+ A\}^{1/2} \qquad \text{(i} \Leftrightarrow \text{inproduct)} \tag{A2.2}$$

Uitgaan de van deze twee normen kunnen we voor de superoperatoren ook twee normen definiëren. Zij $\mathbb{P}$ een superoperator :

$$\|\mathbb{P}\|_s = \sup_{A \neq 0} \frac{\|\mathbb{P} A\|_s}{\|A\|_s} \tag{A2.3}$$

$$\|\mathbb{P}\|_i = \sup_{A \neq 0} \frac{\|\mathbb{P} A\|_i}{\|A\|_i} \tag{A2.4}$$

Deze normen zullen in het algemeen niet gelijk zijn. We willen dit illustreren aan de hand van de in (3.2.8) gedefiniëerde superprojectieoperator $\mathbb{P}_c^{\neq}$:

$$\mathbb{P}_c^{\neq} = \sum_{\bar{n}} A_{\bar{n}}^{+} \times A_{\bar{n}} \tag{3.2.8}$$

<u>Stelling A2.1. (dM.).</u>

$$\|\mathbb{P}_c^{\neq}\|_s = 1 \tag{A2.5}$$

Bewijs :

Zij $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ met sup.-norm 1 :

$$\|\mathcal{B}\|_s = 1 \tag{A2.6}$$

Zij verder $v \in \mathcal{H}$, dan is :

$$\mathbb{P}_c^{\neq} \mathcal{B} |v\rangle = \sum_{\bar{n}} A_{\bar{n}}^{+} \mathcal{B} A_{\bar{n}} |v\rangle$$

dus :

$$\| \mathbb{P}_c^{\neq} \mathcal{B}|v\rangle\|^2 = \langle v|(\mathbb{P}_c^{\neq}\mathcal{B})^+\mathbb{P}_c^{\neq}\mathcal{B}|v\rangle$$

$$= \langle v|\sum_{\bar n \bar m} A_{\bar n}^+ \mathcal{B}^+ A_{\bar n} A_{\bar m}^+ \mathcal{B} A_{\bar m}|v\rangle \qquad \text{met (3.2.7) :}$$

$$= \langle v|\sum_{\bar n \bar m} \delta_{\bar m \bar n} A_{\bar n}^+ \mathcal{B}^+ A_0 \mathcal{B} A_{\bar m}|v\rangle$$

$$= \langle v|\sum_{\bar n} A_{\bar n}^+ \mathcal{B}^+ A_0 \mathcal{B} A_{\bar n}|v\rangle$$

$$= \sum_{\bar n} \langle \omega_{\bar n}| \mathcal{B}^+ A_0 \mathcal{B}|\omega_{\bar n}\rangle \tag{A2.7}$$

waarin :

$$|\omega_{\bar n}\rangle = A_{\bar n}|v\rangle \tag{A2.8}$$

Vanwege (3.2.7) iv) is :

$$I = A_0 + \sum_{\bar n \neq 0} A_{\bar n}^+ A_{\bar n} \tag{A2.9}$$

zodat voor alle vectoren $x \in \mathcal{H}$:

$$\langle x|x\rangle = \langle x|A_0|x\rangle + \sum_{\bar n \neq 0} \langle x|A_{\bar n}^+ A_{\bar n}|x\rangle \tag{A2.10}$$

Hiermee :

$$\langle x|A_0|x\rangle \leq \langle x|x\rangle \qquad \text{voor alle } x \tag{A2.11}$$

Nemen we $|x\rangle = \mathcal{B}|\omega_n\rangle$ dan volgt met (A2.7), (A2.11) en (A2.6) :

$$\|\mathbb{P}_c^{\neq}\mathcal{B}|v\rangle\|^2 \leq \sum_{\bar n} \langle \omega_{\bar n}|\mathcal{B}^+\mathcal{B}|\omega_{\bar n}\rangle$$

$$= \sum_{\bar n} \|\mathcal{B}|\omega_{\bar n}\rangle\|^2 \leq \sum_{\bar n} \| |\omega_{\bar n}\rangle\|^2 \tag{A2.12}$$

Voor $|\omega_{\bar n}\rangle$ vinden we met (A2.8) en (3.2.7) :

$$\sum_{\bar n} \| |\omega_{\bar n}\rangle\|^2 = \sum_{n} \langle \omega_{\bar n}|\omega_{\bar n}\rangle = \sum_{\bar n} \langle v|A_{\bar n}^+ A_{\bar n}|v\rangle = \langle v|v\rangle \tag{A2.13}$$

Dit levert met (A2.12) :

$$\|\mathbb{P}_c^{\neq}\mathcal{B}|v\rangle\|^2 \leq \| |v\rangle\|^2 \tag{A2.14}$$

zodat :

$$\| \mathbb{P}_c^{\neq} \mathbb{B} \|_s = \sup_{v \neq 0} \frac{\| \mathbb{P}_c^{\neq} \mathbb{B} v \|}{\| v \|} \leq 1 = \| \mathbb{B} \|_s \tag{A2.15}$$

Uit (A2.15) concluderen we :

$$\| \mathbb{P}_c^{\neq} \|_s = \sup_{\| \mathbb{B} \|_s = 1} \| \mathbb{P}_c^{\neq} \mathbb{B} \| \leq 1 \tag{A2.16}$$

Er zijn echter operatoren waarvoor $\mathbb{P}_c^{\neq} \mathbb{B} = \mathbb{B}$ zodat :

$$\| \mathbb{P}_c^{\neq} \|_s = 1 \tag{A2.17}$$

Stelling A2.2.

$$\| \mathbb{P}_c^{\neq} \|_i = \infty \tag{A2.18}$$

Bewijs :

Het is voldoende te bewijzen dat :

$$\forall_{\substack{\mathbb{B} \neq 0 \\ \mathbb{P}_c^{\perp} \mathbb{B} = \mathbb{B}}} \quad \frac{\| \mathbb{P}^{\neq} \mathbb{B} \|_i}{\| \mathbb{B} \|_i} = \infty \tag{A2.19}$$

waarin $\mathbb{P}_c^{\neq}$ gedefinieerd is door (3.3.11).
Neem daarom aan dat $\mathbb{P}_c^{\perp} \mathbb{B} = \mathbb{B}$ dan is :

$$\begin{aligned}
\| \mathbb{P}_c^{\neq} \mathbb{B} \|_i^2 &= \mathrm{Tr} \sum_{\bar{n}} (A_{\bar{n}}^{+} \mathbb{B} A_{\bar{n}})^{+} \sum_{\bar{m}} A_{\bar{m}}^{+} \mathbb{B} A_{\bar{m}} \\
&= \mathrm{Tr} \sum_{\bar{n}\bar{m}} A_{\bar{n}}^{+} \mathbb{B}^{+} A_{\bar{n}} A_{\bar{m}}^{+} \mathbb{B} A_{\bar{m}} = \mathrm{Tr} \sum_{\bar{n}\bar{m}} \delta_{\bar{m}\bar{n}} A_{\bar{n}}^{+} \mathbb{B}^{+} A_0 \mathbb{B} A_{\bar{m}} \\
&= \mathrm{Tr} \sum_{\bar{n}} A_{\bar{n}}^{+} \mathbb{B}^{+} A_0 \mathbb{B} A_{\bar{n}} = \mathrm{Tr} \sum_{\bar{n}} A_{\bar{n}} A_{\bar{n}}^{+} \mathbb{B}^{+} A_0 \mathbb{B} \\
&= \sum_{\bar{n}} \mathrm{Tr}\, A_0 \mathbb{B}^{+} A_0 \mathbb{B} = \mathrm{Tr}\, \mathbb{B}^{+} A_0 \mathbb{B} A_0 \cdot \Big(\sum_{\bar{n}} \cdot 1\Big) = \mathrm{Tr}\, \mathbb{B}^{+} \mathbb{P}_c^{\perp} \mathbb{B} \Big(\sum_{\bar{n}} \cdot 1\Big) \\
&= \mathrm{Tr}\, \mathbb{B}^{+} \mathbb{B} \Big(\sum_{\bar{n}} \cdot 1\Big) = \| \mathbb{B} \|_i^2 \cdot \sum_{\bar{n}} \cdot 1
\end{aligned} \tag{A2.20}$$

Hiermee is :

$$\frac{\| \mathbb{P}_c^{\neq} \mathbb{B} \|_i}{\| \mathbb{B} \|_i} = \text{“} \sqrt{\sum_{\bar{n}} \cdot 1} \text{”} = \infty \tag{A2.21}$$