

MASTER

Bladbeweging bij, en belastingen op snellopende windturbines met scharnierende bladophanging

Bierbooms, W.A.A.M.

Award date:
1986

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain



Afdeling der Technische Natuurkunde
Vakgroep TRANSPORTFYSICA

8681631

Titel: BLADBEWEGING BIJ, EN BELASTINGEN OP
 SNELLOPENDE WINDTURBINES MET
 SCHARNIERENDE BLADOPHANGING

Auteur: Wim Bierbooms

Verslagno.: R-783-A

Datum: april 1986

Werkeenheid: windenergiegroep

Afstudeerdocent: Prof. G. Vossers

Begeleiders: Paul Smulders
 Gijs van Kuik

Samenvatting

Er is onderzoek verricht naar het gedrag van windturbines met een flexibele bladophanging. Hierbij zijn de (stijve) bladen via een scharnier plus veer, op zekere afstand van de rotoras, bevestigd aan de naaf; zodanig dat de bladen een extra vrijheidsgraad krijgen loodrecht op het rotorvlak. Voor het klagedrag is een lineaire differentiaal vergelijking afgeleid uitgaande van simpele aerodynamica (bladelementtheorie); onder de veronderstelling dat de geïnduceerde snelheid uniform is en er geen tipverliezen zijn. De bewegingsvergelijking bestaat naast een traagheidsterm uit een veerterm (inclusief de centrifugaalwerking) en een aerodynamische dempingsterm. Naast de constante aerodynamische excitatie ten gevolge van rechte aanstroming zijn de optredende excitaties periodiek (met frequentie gelijk aan de hoeksnelheid): scheve aanstroming, (lineaire) windgradiënt, gravitatie en kruien (gyroscopische krachten). Bij benadering is het scharnier-veer blad een 2^e orde systeem dat wordt aangeslagen met een frequentie net onder de eigenfrequentie.

Voor elk van de excitaties apart zijn er analytische uitdrukkingen bepaald voor de grootte van de optredende klaphoeken. Voor een gegeven windturbine kunnen daarmee snel en eenvoudig de klaphoeken berekend worden, wat gedaan is voor een tweetal windturbines. Voor grote windturbines treedt de grootste klaphoek (en dientengevolge ook het grootste bladwortelmoment) op ten gevolge van de windgradiënt; voor windturbines die uitgerust zijn met een vaanmechanisme is de grootste belasting het gyroscopisch effect ten gevolge van het kruien.

De gewenste beperking van het bladwortelmoment bij gebruik van de scharnier-veer constructie is zowel kwalitatief als kwantitatief beschouwd. Bij een constante excitatie wordt het bladwortelmoment beperkt door de centrifugaalwerking; bij een periodieke excitatie door de centrifugaalwerking én de aerodynamische demping en tenslotte bij een a-periodieke excitatie (windvlaag) door de aerodynamische demping (klapsnelheid). Ook de doorgegeven momenten op gondel en toren worden beperkt als gevolg van het toepassen van het scharnier-veer blad.

Verder is aangetoond dat het gedrag van een flexibel blad te benaderen is met dat van een scharnier-veer blad, onder de voorwaarde dat dit blad dezelfde eigenfrequentie bezit.

Er zijn metingen verricht aan een 2-bladige modelrotor ($\phi 1,45$ m) waarvan de bladen onafhankelijk van elkaar kunnen scharnieren. In de windtunnel zijn de klaphoeken gemeten bij rechte en scheve aanstroming; daarnaast is de gravitatie invloed bepaald in de situatie dat de rotor door een motor wordt aangedreven. De theoretisch berekende klaphoeken stemmen globaal gezien overeen met de verkregen meetresultaten.

INHOUDSOPGAVE

	blz.
Samenvatting	1
Inhoudsopgave	3
Inleiding	6
Hoofdstuk 1: De bewegingsvergelijking voor een klappend blad	11
1.1 Het scharnier-veer blad	11
1.2 De diverse coördinaatstelsels	16
1.3 De bewegingsvergelijking	20
1.4 Het transiënt gedrag	28
1.5 Het aerodynamisch moment	32
1.6 De axiale inductiefactor	40
Hoofdstuk 2: De klapbeweging	44
2.1 De algemene oplossing	44
2.2 De klaphoeken bij één bepaalde belasting	46
2.2.1 Alleen rechte aanstroming	47
2.2.2 De invloed van de gravitatie	48
2.2.3 De invloed van de windgradiënt	49
2.2.4 De invloed van de scheve aanstroming	50
2.2.5 De invloed van de kruibeweging	51
2.2.5.1 Kruien zonder scheve aanstroming	51
2.2.5.2 Kruien met scheve aanstroming	53
2.3 Het δ_3 -effect	55
2.4 Het klappend blad als 2 ^e orde systeem	58
2.5 Het statisch en dynamisch evenwicht	66
2.5.1 Het statisch evenwicht	67
2.5.2 Het dynamisch evenwicht	68
2.6 De klaphoeken van een tweetal windturbines onder diverse condities	70
2.6.1 Windturbine A	70
2.6.2 Windturbine B	76

	blz.
Hoofdstuk 3: Windturbinebelastingen	79
3.1 Het bladwortelmoment in klaprichting	79
3.2 Beperking van het bladwortelmoment via de scharnier-veer constructie	83
3.2.1 Constante excitatie	83
3.2.2 Periodieke excitatie	84
3.2.3 Windvlaag	89
3.2.4 Getallenvoorbeeld	90
3.3 Het aandrijvend moment	92
3.4 Het coriolismoment	95
3.5 Het moment op gondel en toren	100
Hoofdstuk 4: Het gedrag van een flexibel blad	106
4.1 De bewegingsvergelijking van een flexibel blad	106
4.2 De bladmodes en eigenfrequentie	109
4.3 De berekening van de verschillende bladmodes en bijbehorende eigenfrequenties	111
4.3.1 De Rayleigh-Ritz methode	112
4.3.2 De Myklestad methode	114
4.4 De oplossing van de bewegingsvergelijking	116
4.5 Het bladwortelmoment	117
4.6 De belastingsverdeling langs het blad	118
4.7 Het equivalent scharnier-veer model	122
Hoofdstuk 5: Metingen aan een scharnier-veer blad	128
5.1 De modelrotor en de klaphoekmeter	128
5.1.1 De modelrotor	128
5.1.2 De klaphoekmeter	133
5.2 De meetopstelling	135
5.2.1 De windtunnelmeting	135
5.2.2 De meting in ventilatorstoestand	136
5.3 De meetresultaten	138
5.3.1 Rechte aanstroming	138
5.3.2 Scheve aanstroming	141
5.3.3 Gravitatie	144

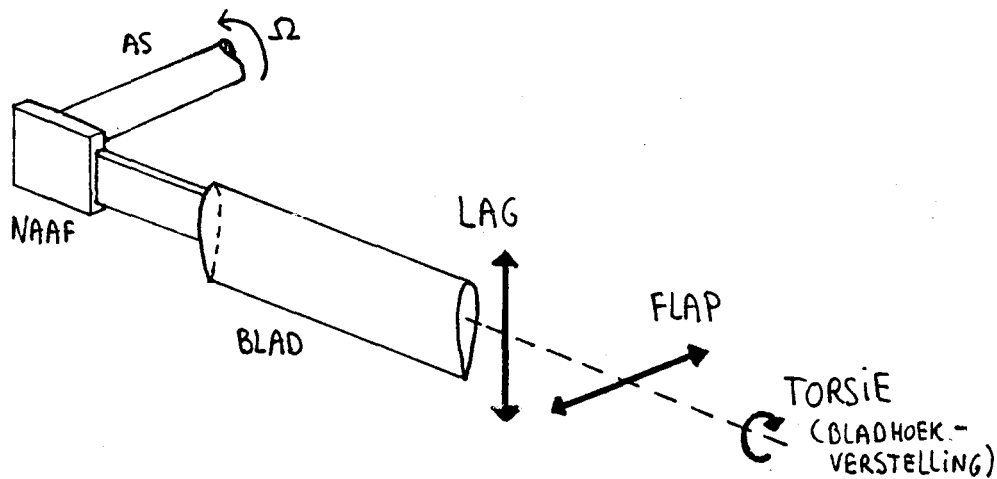
	blz.
Hoofdstuk 6: State-of-the-art, suggesties voor verder onderzoek en conclusies	147
6.1 State-of-the-art	147
6.2 Suggesties voor verder onderzoek	149
6.3 Conclusies	152
Literatuurlijst	153
Appendix	
A.1 Afleiding van de dynamische vergelijkingen van Euler	155
A.2 Sommatie over het aantal bladen	159
A.3 De luchtstroming door een rotor	162
A.4 De aero-elastische instabiliteiten	164
A.5 Symbolenlijst en indices	168

INLEIDING

De windenergiegroep van de vakgroep Transportfysica houdt zich naast de participatie in het C.W.D. (Consultancy services Wind energy Developing countries) bezig met algemeen windenergie onderzoek. Een van de problemen bij het gebruik van windenergie betreft de grote wisselende belastingen (die leiden tot vermoeiing) waaraan de windturbine bloot staat, onder andere: gravitatie, windgradiënt, scheve aanstroming en het gyroscopisch moment ten gevolge van het kruien. Dit leidt tot zwaardere constructies dan nodig zou zijn, indien de belasting statisch zou zijn. Een methode om de wisselende belastingen te verminderen is om de constructie flexibel te maken zodat via het doorbuigen de belasting gedeeltelijk al wordt opgevangen. Een bijkomend voordeel is dat het afgegeven vermogen van de windturbine gestabiliseerd wordt. Aangezien de grootste belastingen via de rotorbladen binnenkomen, ligt het voor de hand om daar over te gaan op een flexibele constructie. Het flexibele gedrag kan op verschillende manieren gerealiseerd worden: flexibele bladen die stijf aan de naaf bevestigd zijn; stijve bladen die via een flexibele bladwortel opgehangen zijn; stijve bladen die via een scharnier (met ingebouwde veer) zijn bevestigd.

De bladscharnierconstructie wordt praktisch al vanaf het eerste model toegepast bij helicopters. De huidige theorie voor deze constructies is juist ontwikkeld ten behoeve van het bepalen van de bladbelastingen van helicopters. Daarbij onderscheidt men de scharnierende bladbeweging loodrecht op het rotorvlak, de zogenaamde flap (Engels voor klappen) en de beweging in het rotorvlak, de lag (achterblijven; de hoeksnelheid van het blad schommelt rondom de rotorhoeksnelheid Ω); zie figuur I.1.

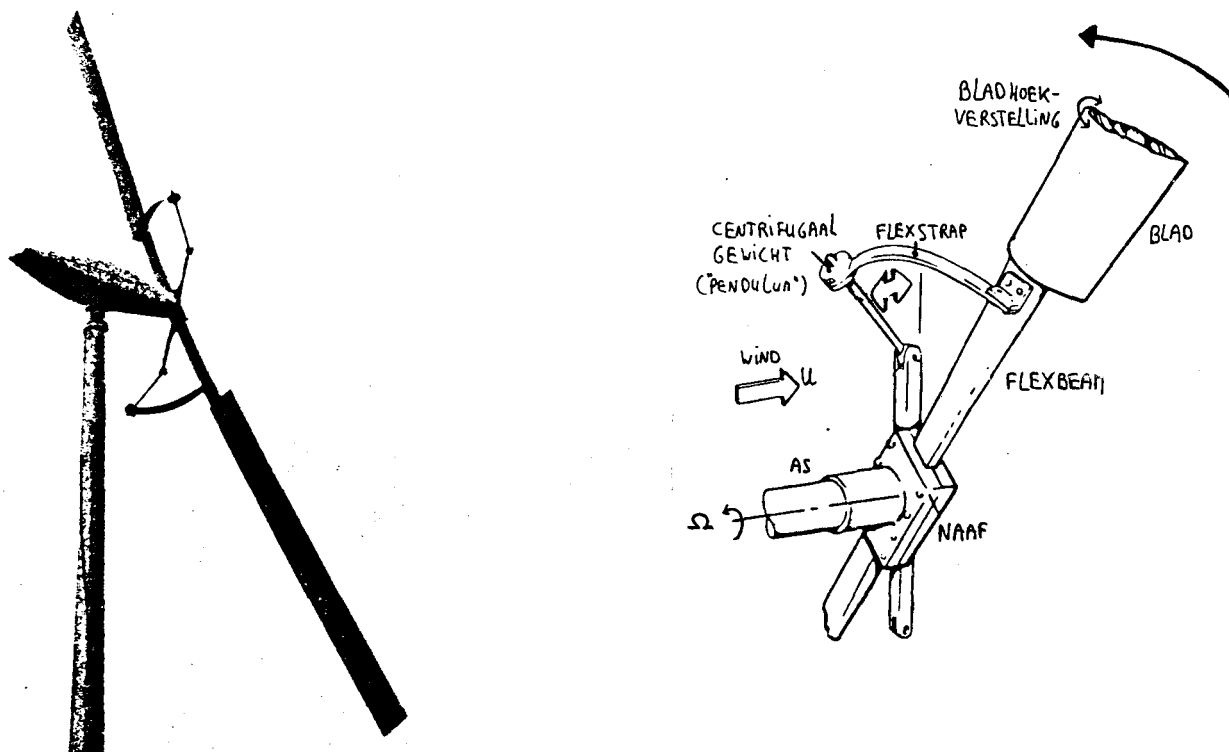
Het beperken van de wisselende belastingen door gebruik van scharnieren zal zeker bij grote windturbines opwegen tegen de gecompliceerdheid van de benodigde constructie. Bij gebruik van flexibele bladen worden deze constructie moeilijkheden voor scharnierende delen ondervangen en ligt het probleem meer bij het vinden van een geschikt materiaal (composiet) met juiste flexibiliteit en voldoende sterkte. Aangezien de bladwortelmomenten via de naaf



Figuur 1.1: Het onderscheid tussen lag, flap en torsie.

doorgegeven worden, zullen bij het toepassen van flexibele bladen ook de belastingen op de rest van de windturbine afgevlakt worden. Hierdoor kunnen de transmissie, gondel en toren (plus fundatie) eenvoudiger, lichter en ook goedkoper geconstrueerd worden. Via koppeling van de bladhoekverstelling aan de klapbeweging van het blad, kan de turbine zelfregelend gemaakt worden en neemt de bedrijfszekerheid toe. Naast het economische aspect speelt de bedrijfszekerheid een overheersende rol voor de toekomst van de windturbinefabrikanten. Het flexible concept wordt daarom de laatste jaren al veelvuldig toegepast.

Een voorbeeld hiervan is de Amerikaanse UTRC molen ($\phi 9$ m, 8 kW) waarvan de constructie in figuur I.2 te zien is (zie ook [8]). De bladen zijn onderling verbonden via een flexibel element (de zogenaamde flexbeam) dat op zijn beurt aan de (stijve) naaf vastzit. De flexbeam geeft het blad een bewegingsvrijheid in "flap" en "lag" richting. Doordat de flexbeam ook torsieslap is, is het mogelijk om via een centrifugaalgewicht de molen zelfregelend te maken. De flexbeam bezit een pre-twist van ongeveer 15° ("leading edge" naar de wind gericht), die nodig is voor de zelfstart. Indien de rotor begint te draaien beweegt het centrifugaalgewicht naar het rotorvlak toe en zal zodoende via de zogenaamde flexstrap (verbinding centrifugaalgewicht met flexbeam/blad) de bladhoek verkleinen, waardoor de aanstromingshoek van het blad zo optimaal mogelijk blijft. Naast bladhoekverstelling werkt het mechanisme ook als (toeren)beveiliging. Bij windvlagen zal de hoeksnelheid zo ver oplopen



Figuur 1.2: De UTRC-molen inclusief een detailtekening van de naafconstructie met het centrifugaalgewicht.

dat door middel van het centrifugaalgewicht de bladen een bladhoek van ongeveer -5° krijgen waardoor er overtrek (stall) optreedt. Hierdoor kan de maximale rotorhoeksnelheid tot een aanvaardbaar niveau beperkt worden. Verder is het zo dat deze downwind-molen door het gebruik van de flexbeam zichzelf op de wind houdt (wanneer de molen vrij kan kruien).

We beperken ons in dit onderzoek tot stijve bladen die scharnierend zijn opgehangen, waarbij de bladen loodrecht op het rotorvlak kunnen bewegen (klapbeweging). Het scharnier zit op enige afstand van de as (excentriciteit) en bevat een veer die de klapbeweging tegenwerkt. Om het gedrag van het scharnier-veer blad goed te bepalen is een (omvangrijk) computerprogramma nodig, waarin allerlei niet-lineaire effecten zijn meegenomen. In dit verslag zal echter het gedrag analytisch beschreven worden wat vooral het fysisch inzicht ten goede zal komen. De prijs die hiervoor betaald moet worden is dat (grote) vereenvoudigingen noodzakelijk zijn en verder zijn de verkregen resultaten alleen geldig voor snellopers. Dit laatste is niet zo erg

omdat het nut van het beperken van de belastingen vooral van belang is bij grote windturbines; de grote windturbines worden overwegend gebruikt voor electriciteitsopwekking en zijn daarom snellopers. De vergelijkingen van het analytische model kunnen gebruikt worden in het beginstadium van het ontwerpproces. Op een eenvoudige wijze kunnen 1^e orde schattingen gemaakt worden voor het gedrag van de windturbine (de klapbeweging van het blad en grootte van de bladwortelmomenten evenals de andere momenten die op de constructie werken) onder invloed van de diverse belastingen. Tevens kan de invloed van enkele windturbineparameters snel nagegaan worden door ze simpelweg in de formules te variëren. Naderhand kan dan het definitieve ontwerp met behulp van een computerprogramma berekend worden.

Een ander voordeel van een analytische behandeling is dat daarmee de mogelijkheid wordt geschapen om het uitgebreide computerprogramma te testen.

In hoofdstuk 1 zal de bewegingsvergelijking voor het scharnier-veer blad onder diverse belastingen afgeleid worden. Hoofdstuk 2 geeft de uit de bewegingsvergelijking opgeloste klapbeweging weer. Om een idee te krijgen van de grootte orde van de klapbeweging zal een getallenvoorbeeld gegeven worden aan de hand van een gegeven windturbine. Hoofdstuk 3 gaat in op de optredende windturbinebelastingen. In hoofdstuk 4 zal aangetoond worden dat in eerste benadering ook het gedrag van een flexibel blad met een equivalent scharnier-veer blad beschreven kan worden. Een overzicht van de verrichte metingen aan een modelrotor met scharnierende bladen, om de vereenvoudigde theorie van hoofdstuk 2 te controleren, kan gevonden worden in hoofdstuk 5. Hoofdstuk 6 tenslotte bevat een korte schets van de state-of-the-art (waaronder literatuur [1] en [2], waarop dit rapport grotendeels is gebaseerd) betreffende het onderzoek naar flexibele rotorsystemen. Tevens worden er suggesties gedaan voor verder onderzoek en het hoofdstuk wordt besloten met de conclusies.

Met dit verslag is binnen de windenergiegroep een begin gemaakt met het onderzoek aan flexibele rotorsystemen. Dit rapport dient als basis voor verder onderzoek zodat een aantal (elementaire) zaken uitgebreid zijn behandeld wat tot een vrij lijvig verslag heeft geleid. De lezer die al bekend is met de betreffende materie óf slechts geïnteresseerd is in de resultaten kan zich beperken tot de hoofdstukken 2, 3 en 5 en §6.3 voor de conclusies; een globale omschrijving van de bewegingsvergelijking kan gevonden worden aan het begin van §1.3.

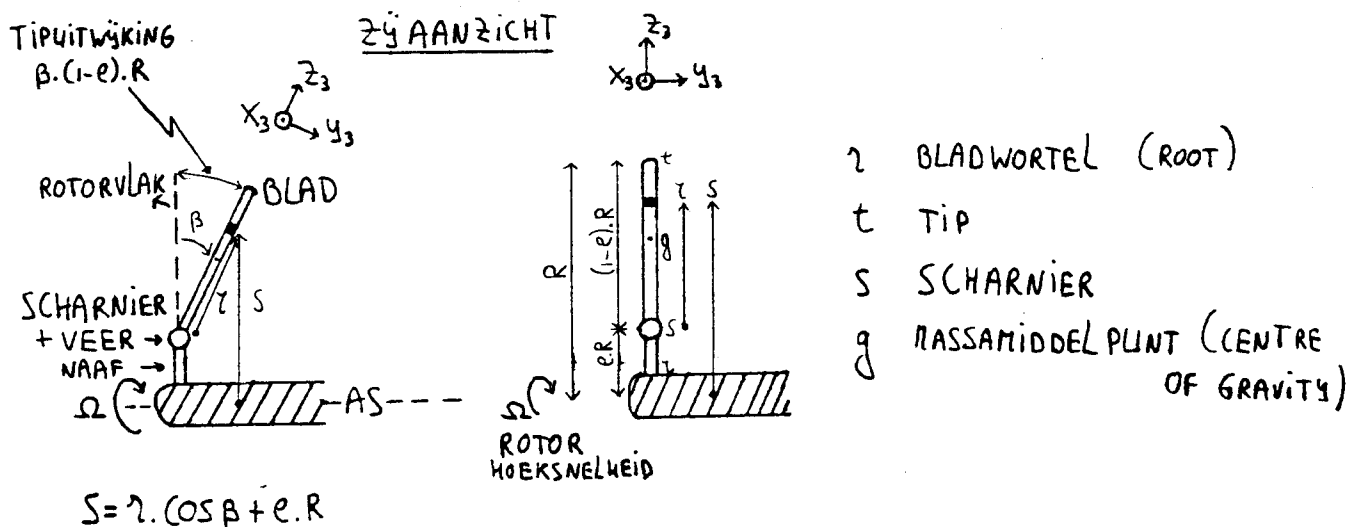
Tot slot wil ik iedereen bedanken die me geholpen heeft bij mijn afstudeeronderzoek. Met name Anton Huisman, Adri Kragten en Bram Wijnands voor het tekenen plus construeren van de experimentele rotor inclusief de klaphoekmeter alsook voor de vele technische en tactische tips die ze mij verstrekt hebben. Natuurlijk wil ik ook mijn directe begeleiders Paul en Gijs alsmede prof. Vossers hartelijk bedanken; onder andere voor de geleverde opbouwende kritiek, nadat ze zich eerst door een voorlopige versie van dit verslag (handgeschreven) heen geworsteld hadden.

HOOFDSTUK 1: DE BEWEGINGSVERGELIJKING VOOR EEN KLAPPEND BLAD

Voordat de bewegingsvergelijking van een scharnierend blad wordt afgeleid zal in de volgende paragraaf eerst het scharnier-veer blad geïntroduceerd worden. In paragraaf 1.2 zullen enkele coördinaatstelsels gedefiniëerd worden die de eigenlijke afleiding in de daarop volgende paragrafen, overzichtelijker maken.

1.1 Het scharnier-veer blad

Er wordt uitgegaan van een ∞ -stijf blad dat via een excentrische scharnier (dat wil zeggen op afstand $e.R$ van de as) bevestigd is aan de naaf, zie figuur 1.1 (Voorlopig is het voor ons niet interessant om



Figuur 1.1: Het scharnier-veer blad met straal R en excentriciteit e en de definitie van de afstand s (vanaf de as) en r (vanaf het scharnier); voor de twee situaties dat de klaphoek β ongelijk en gelijk aan nul is.

te weten hoeveel bladen de rotor telt; in de figuren worden 1 of 2 bladen weergegeven). Het scharnier geeft het blad een bewegingsvrijheid loodrecht op het rotorvlak; bij het scharnier bevindt zich tevens een (torsie)veer met veerstijfheid K die de klapbeweging tegenwerkt. Er kunnen nu twee verschillende stralen gedefiniëerd worden:

- 1) s afstand vanaf de as
- 2) r afstand vanaf het scharnier.

Beide stralen kunnen dimensieloos gemaakt worden door ze te delen door de rotorstraal R .

$$\begin{aligned} y &= \frac{s}{R} & 0 \leq s \leq R & \text{ EN } & 0 \leq y \leq 1 \\ x &= \frac{r}{R} & 0 \leq r \leq (1-e) \cdot R & \text{ EN } & 0 \leq x \leq (1-e) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Uit figuur 1.1 volgt direct het verband tussen beide stralen:

$$\begin{aligned} s &= r \cdot \cos \beta + e \cdot R \\ y &= x \cdot \cos \beta + e \end{aligned} \quad (1.2)$$

NET β DE KLAPHOEK

Dit onderscheid tussen s en r wordt gemaakt om onduidelijkheden in de rest van het verslag te vermijden. De straal r zal gebruikt worden bij de afleiding van de bewegingsvergelijking van het blad omdat dan de afstand tot het scharnier belangrijk is; dit is namelijk de arm van een op het blad werkend moment. De afstand s tot de rotoras zal gebruikt worden bij de behandeling van de aerodynamische krachten waaraan het blad blootstaat; waarbij onder andere de hoeksnelheid van het blad van belang is. Bij dit laatste wordt, gemakshalve, verondersteld dat het blad gewoon doorloopt vanaf het scharnier tot aan de as, waarbij wordt uitgegaan van geëxtrapoleerde waarden voor koorde en bladhoek (zie de figuren 1.2 en 1.3):

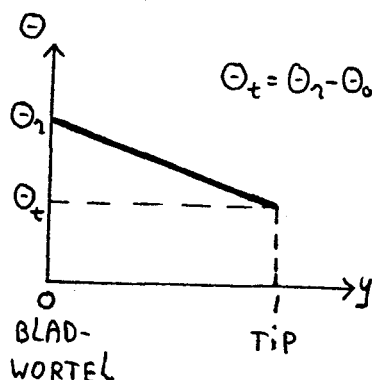
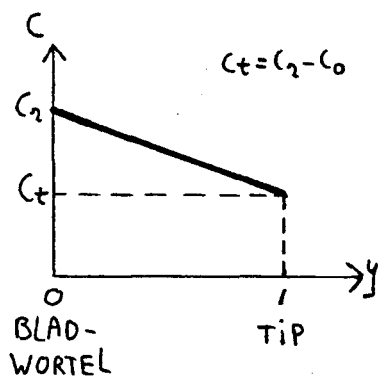
$$c(y) = c_2 - c_0 \cdot y$$

NET c_2 DE GEËXTRAPOLEERDE KOORDE BIJ DE BLADWORTEL ($_{\text{ROOT}}; y=0$) (1.3)
EN c_0 EEN CONSTANTE

$$\Theta(y) = \Theta_1 - \Theta_0 \cdot y$$

(1.4)

MET Θ_1 DE GEËXTRAPOLEERDE BLADHOEK
EN Θ_0 EEN CONSTATE



Figuur 1.2: De bladkoorde c
als functie van
de straal y .

Figuur 1.3: De bladhoek Θ
als functie van
de straal y .

N.B.: Overeenkomstig literatuur [1] en [2] wordt de bladhoek aangeduid met het symbool Θ in plaats van β ; dit laatste symbool wordt namelijk gereserveerd voor de klaphoek, zie (1.10).

Zowel de koorde als de twist van het blad worden lineair verondersteld. Omdat nu de bladkoorde vastligt volgens (1.3) kunnen ook de zogenaamde tapsheidintegralen t_n bepaald worden die in §1.4 (bij het bepalen van de aerodynamische krachten) nodig zijn:

$$t_n := \int_0^l y^{n-1} \cdot \frac{c(x)}{c_1} dy = \int_0^l \left\{ y^{n-1} - \frac{c_0}{c_1} y^n \right\} dy = \frac{1}{n} - \frac{c_0/c_1}{n+1}$$

MET n EEN GEHEEL GETAL

(1.5)

De massa m_b van het blad, massamiddelpunt x_g en traagheidsmoment I slaan op het scharnierende gedeelte van het blad, met lengte $R \cdot (1-e)$, zodat nu r de relevante straal is. Algemeen geldt:

$$\begin{cases} m_b = \int_0^{R(1-e)} dm = \int_0^{R(1-e)} \mu dr = R \cdot \int_0^{(1-e)} \mu dx \\ x_g = \frac{r_g}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{m_b} \cdot \int_0^{R(1-e)} r dm = \frac{1}{R \cdot m_b} \cdot \int_0^{R(1-e)} \mu \cdot r dr = \frac{R}{m_b} \cdot \int_0^{(1-e)} \mu x dx \\ I = \int_0^{R(1-e)} r^2 dm = \int_0^{R(1-e)} \mu \cdot r^2 dr = R^3 \cdot \int_0^{(1-e)} \mu \cdot x^2 dx \end{cases} \quad (1.6)$$

MET $\mu = \frac{dm}{dr}$ DE MASSA PER LENGTE EENHEID

DE INTEGRATIES LOPEN VANAF HET SCHARNIERPUNT ($r=0$)
TOT DE TIP ($r = R \cdot (1-e)$)

De grootheden m_b , x en I zijn dus een functie van de massaverdeling μ (bij gegeven R en e).

Indien verondersteld wordt dat voor de tapse bladen geldt dat μ lineair met x verloopt:

$$\mu(x) = \mu_s - \mu_0 \cdot x$$

NET μ_s DE MASSA PER LENGTE EENHEID BIJ HET SCHARNIER ($x=0$) (1.7)
EN μ_0 EEN CONSTATE

Dan verandert (1.6) in:

$$\begin{cases} m_b = R \cdot \left\{ \mu_s \cdot (1-e) - \frac{1}{2} \mu_0 \cdot (1-e)^2 \right\} \\ x_g = \frac{R}{m_b} \cdot \left\{ \mu_s \cdot (1-e)^2 - \frac{1}{3} \mu_0 \cdot (1-e)^3 \right\} \\ I = R^3 \cdot \left\{ \frac{1}{3} \mu_s \cdot (1-e)^3 - \frac{1}{4} \mu_0 \cdot (1-e)^4 \right\} \end{cases} \quad (1.8)$$

Indien de massa uniform verdeeld is ($\mu = \text{constant}$) dan geldt:

$$\begin{cases} m_b = R \cdot \mu \cdot (1-e) \\ x_g = \frac{R}{m_b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1-e)^2 = \frac{1}{2} (1-e) \\ I = R^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \mu \cdot (1-e)^3 = \frac{1}{3} \cdot m_b \cdot R^2 \cdot (1-e)^3 \end{cases} \quad (1.9)$$

In de rest van het verslag wordt uitgegaan van een blad met bekend veronderstelde waarden voor m_b , x_g en I en wordt geen

uitspraak gedaan over de massaverdeling μ langs het blad.

N.B.: Eigenlijk is het traagheidsmoment een vector (zie ook appendix 1): $I = [I_x, I_y, I_z]$ (ten opzichte van een met het blad meebewegend assenstelsel). Als het blad dun en smal is geldt er: $I_x \approx I_y \approx I$ en $I_z \ll I$ met I volgens (1.6). Ook de straal van het massamiddelpunt is een vector: $\vec{r}_g = [0, 0, r_g]$ met $r_g = x_g \cdot R$ en x_g volgens (1.6).

Met het voorafgaande is de geometrie van het blad vastgelegd. Tot slot van deze paragraaf worden alvast enkele opmerkingen geplaatst betreffende de klaphoek β . De klaphoek kan benaderd worden met het eerste gedeelte van de Fourierreeks met variabele ψ (azimuthhoek; zie eventueel figuur 1.5):

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cdot \cos \psi + \beta_{1s} \cdot \sin \psi \quad \left(+ \beta_{2c} \cdot \cos 2\psi + \beta_{2s} \cdot \sin 2\psi + \dots \right)$$

EN DUS $\beta' = \frac{d\beta}{d\psi} = -\beta_{1c} \cdot \sin \psi + \beta_{1s} \cdot \cos \psi$ (1.10)

EN $\beta'' = \frac{d^2\beta}{d\psi^2} = -\beta_{1s} \cdot \cos \psi - \beta_{1c} \cdot \sin \psi$

MET ψ DE AZIMUTH HOEK

(De indices 1c en 1s slaan respectievelijk op eerste cosinus- en eerste sinus-coëfficiënt.)

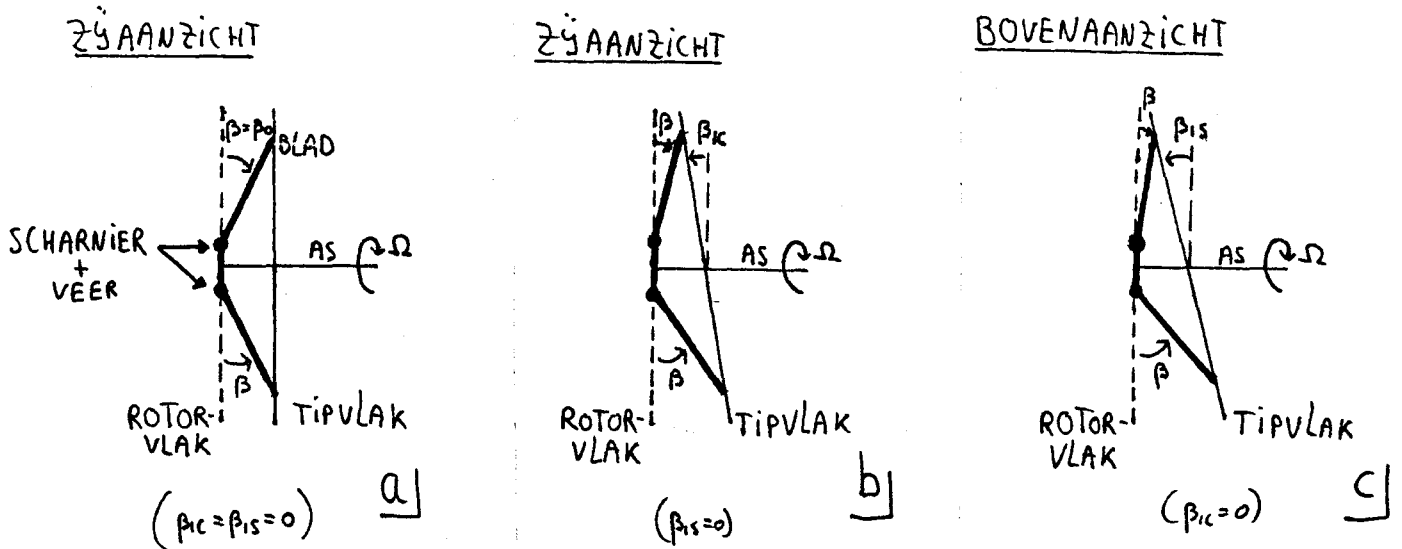
N.B.: Als β benaderd kan worden met (1.10) betekent dit dat de bladtippen in een plat vlak bewegen: het zogenaamde tipvlak. Immers de tipuitwijking is gelijk aan

$$\beta \cdot R \cdot (1-e) = \beta_0 \cdot R \cdot (1-e) + \beta_{1c} \cdot R \cdot (1-e) \cdot \cos \psi$$

(in geval $\beta_{1s} = 0$) en verloopt dus lineair met de hoogte van de tip $z = R \cdot \cos \psi$ (zie eventueel figuur 1.4b en ook 1.5). Hierbij is verondersteld dat de klaphoek klein blijft zodat $\sin \beta = \tan \beta = \beta$ en $\cos \beta = 1$. Van deze benadering zal in het gehele verslag gebruik gemaakt worden. Voor alle andere waarden voor β_{1c} en β_{1s} kan een analoog betoog gehouden worden, zodat het tipvlak altijd een plat vlak is.

De klaphoekcoëfficiënten β_0 , β_{1c} en β_{1s} , waarmee de bladbeweging is vastgelegd volgens (1.10), hebben een fysische betekenis (zie figuur 1.4). Als de klaphoek onafhankelijk is van de azimuthhoek ψ ($\beta_{1c} = \beta_{1s} = 0$) beschrijft het blad een kegel met kegelhoek β_0 , oftewel β_0 is de statische klaphoek. De $\cos \psi$ - en $\sin \psi$ -termen in (1.10) zorgen ervoor dat de kegel iets kantelt; de helling van deze kanteling wordt weergegeven met de cyclische

kantelhoeken β_{1c} en β_{1s} . De kantelhoek van het tipvlak om de horizontale as (vanuit de windrichting gezien vóórover) is β_{1c} en de kantelhoek om de verticale as (naar rechts) is β_{1s} .



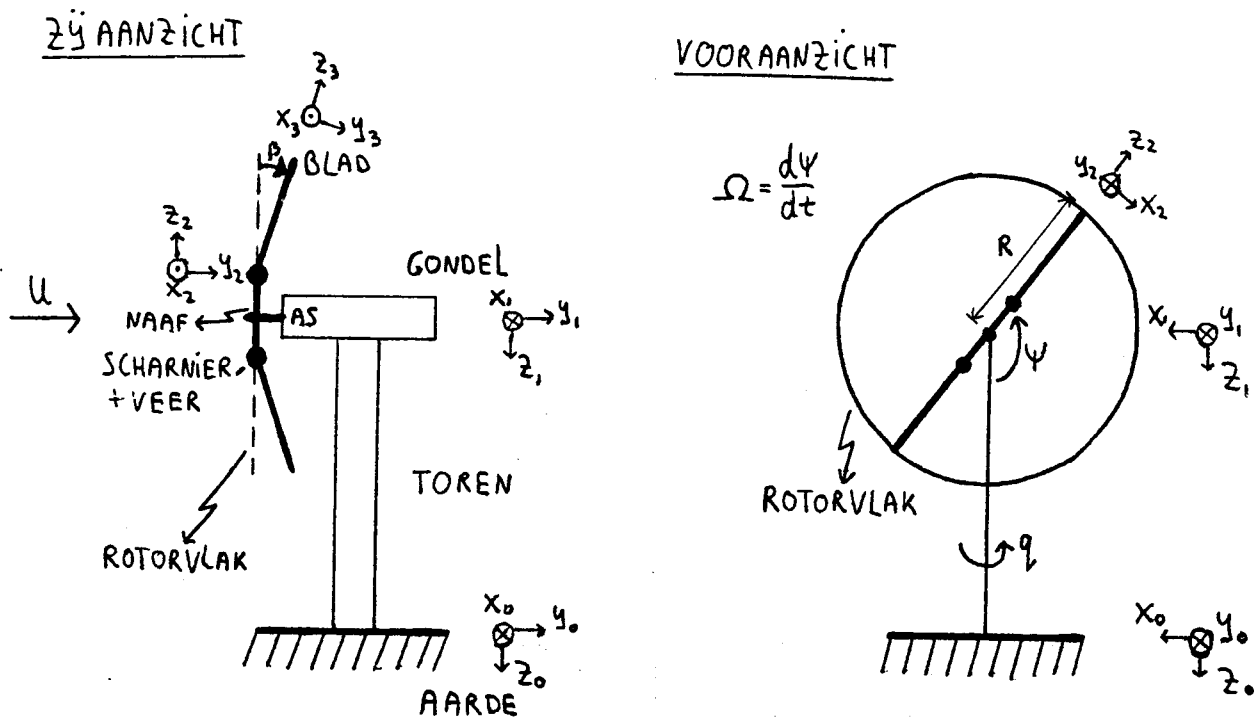
Figuur 1.4: De klaphoek β en respectievelijk de definitie van de klaphoekcoëfficiënten β_0 (kegelhoek), β_{1c} (kantelhoek vóórover) en β_{1s} (kantelhoek zijwaarts naar rechts).

Het vlak waarvoor $\beta = 0$ (dus loodrecht op de as) noemen we het rotorvlak. Indien $\beta_{1c} = \beta_{1s} = 0$ zijn tip- en rotorvlak evenwijdig; in de andere gevallen is de richting van de snijlijn (kantellijn) te vinden via:

$$\beta = \beta_0 \text{ dus } \beta_{1c} \cdot \cos\psi + \beta_{1s} \cdot \sin\psi = 0 \text{ oftewel } \psi = \arctan(-\beta_{1c}/\beta_{1s})$$

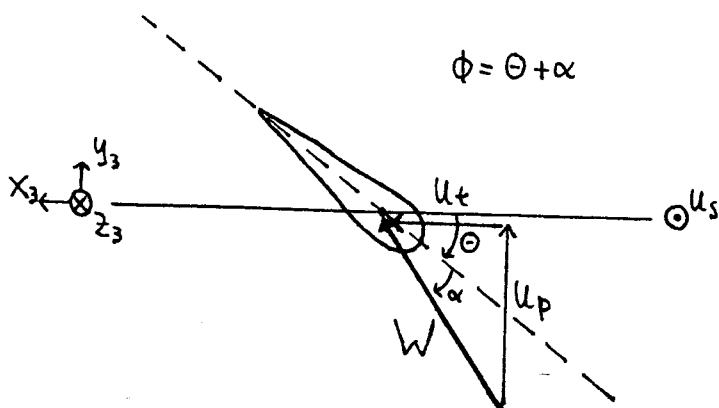
1.2 De diverse coördinaatstelsels

Een schematische weergave van een windturbine is te zien in figuur 1.5 (als voorbeeld is een tweebladige rotor getekend). De turbine zelf bezit in tegenstelling tot het blad geen excentriciteit; de rotoras ligt pal boven de kruias. Om het gedrag van de windturbine te beschrijven is het handig om de volgende orthogonale coördinaatstelsels te definiëren:



Figuur 1.5: Vóór- en zijaanzicht van een windturbine en de definitie van de diverse coördinaatstelsels; met U de windsnelheid, Ω de rotorhoeksnelheid, q de kruihoeksnelheid en Ψ de azimuthhoek.

BOVENAANZICHT



Figuur 1.6: Profieldoorsnede van een blad (met bladhoek Θ) en de relatieve aanstroomsnelheid W , evenals de tangentiële snelheid U_t , de loodrechte snelheid U_p (perpendicular) en de aanstroomsnelheid in lengterichting U_a (span) van het bladelement.

- $X_0 Y_0 Z_0$ vast aan de aarde (stilstaand); met Z_0 verticaal naar beneden en Y_0 (horizontaal) in de windrichting.
- $X_1 Y_1 Z_1$ vast aan de gondel; ten opzichte van de aarde ($X_0 Y_0 Z_0$) roterend om de Z_1 -as (torenas; komt overeen met Z_0 as) met hoeksnelheid q (op de wind kruien en eventueel beveiliging).
Gemakshalve gaan we er in het vervolg vanuit dat de afstand rotor-kruias gelijk is aan nul. Aan het einde van §1.5 zal deze vereenvoudiging gerechtvaardigd worden.
- $X_2 Y_2 Z_2$ vast aan de naaf; ten opzichte van de gondel roterend om de Y_2 -as (rotoras) met hoeksnelheid $\Omega = d\psi/dt$, waarbij ψ de azimuthhoek is (in de onderste stand geldt $\psi = 0$).
- $X_3 Y_3 Z_3$ vast aan het blad; ten opzichte van de naaf roterend om de X_3 -as (scharnieras van het blad) met hoeksnelheid β waarbij β de klaphoek is (zie ook figuur 1.6). Dit assenstelsel wordt zodanig gekozen dat het tevens een zogenaamd hoofdtraagheidsassenstelsel is, met Z_3 in de lengterichting van het blad.

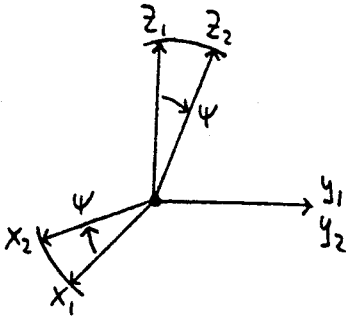
Als gezamenlijke oorsprong van de eerste 3 assenstelsels kan het middelpunt van de rotoras (in het rotorvlak) genomen worden; de oorsprong van het bladcoördinatenstelsel $X_3 Y_3 Z_3$ is het scharnierpunt. Het uitdrukken van een bepaalde vector (bijvoorbeeld een wind- of hoeksnelheid) in coördinaten van een ander stelsel kan geschieden via het geschikt ontbinden van de desbetreffende vector. Gemakkelijker is het om dit te doen via coördinatentransformaties (zie figuren 1.7 en 1.8); waarbij we alleen geïnteresseerd zijn in rotaties en dus niet in translaties:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

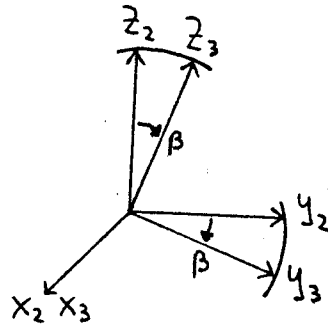
VAN GONDEL NAAR NAAF

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

VAN NAAF NAAR BLAD



Figuur 1.7: De rotatie om de Y_2 -as over hoek ψ .



Figuur 1.8: De rotatie om de X_3 -as over hoek β .

De overgangsmatrix van gondel naar blad volgt uit de matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ \sin \beta \cdot \sin \psi & \cos \beta & -\sin \beta \cdot \cos \psi \\ -\cos \beta \cdot \sin \psi & \sin \beta & \cos \beta \cdot \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

De overgangsmatrix van het blad naar gondel is de inverse (oftewel de gespiegelde) van de overgangsmatrix van gondel naar blad.

Indien nodig zal via de indices 0 tot en met 3 aangegeven worden ten opzichte van welk assenstelsel de desbetreffende vector wordt weergegeven. Als voorbeeld bepalen we de plaatsvector s van een bladelement (afstand tot de as): ten opzichte van $X_3 Y_3 Z_3$ is dit simpelweg $s_3 = [0, 0, s]$. Ten opzichte van het stelsel $X_1 Y_1 Z_1$ geldt dan:

$$\vec{s}_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \beta \cdot \sin \psi & -\cos \beta \cdot \sin \psi \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \psi & -\sin \beta \cdot \cos \psi & \cos \beta \cdot \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \cdot \sin \psi \cdot \cos \beta \\ s \cdot \sin \beta \\ s \cdot \cos \psi \cdot \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

1.3 De bewegingsvergelijking

Voordat we de bewegingsvergelijking precies afleiden zullen we eerst de klapbeweging globaal omschrijven. Aangezien het blad dat in §1.1 is geïntroduceerd vrij kan scharnieren om een klapas, zal de wind het blad naar achteren doen klappen. Het blad zal niet volledig achteroverklappen, ten gevolge van de optredende centrifugaalkracht die het blad in het rotorvlak tracht te houden (veerwerking). Daarnaast is er bij het klapscharnier ook een echte veer aanwezig. De klaphoek β zal precies zo groot worden dat er evenwicht is tussen de aerodynamische en de totale veerkracht (ten gevolge van veer + centrifugaalwerking). Indien er nog geen evenwichtstoestand is bereikt zal de klaphoek β in de tijd veranderen. Het blijkt nuttig te zijn om het dimensieloosgetal γ in te voeren dat de verhouding aangeeft tussen de aerodynamische- en traagheidskrachten. Dit kengetal is afkomstig uit de helicoptertheorie en heet het getal van Lock. Naast de traagheids- en veerkrachten vindt er bij de klapbeweging ook aerodynamische demping plaats. Immers indien het blad naar voren (respectievelijk achter) beweegt zal het blad een grotere (kleinere) windsnelheid voelen zodat de kracht toeneemt (afneemt) en de klapbeweging (in beide gevallen) geremd wordt. Deze aerodynamische demping zorgt ervoor dat het blad snel de evenwichtstoestand bereikt. In totaal wordt zo een bewegingsvergelijking verkregen dat overeenkomt met dat voor een 2^e orde systeem. Door scheve aanstroming en windgradiënt zal de wind het blad periodiek belasten (de windsnelheid die het blad voelt wordt immers periodiek), waardoor de klapbeweging eveneens periodiek wordt (met frequentie gelijk aan de rotorhoeksnelheid Ω). Naast de aerodynamische krachten werken op het blad nog de zwaartekracht en een kracht ten gevolge van het kruien. Ook deze twee krachten zijn periodiek met frequentie Ω . Een ander effect van de scheve aanstroming, windgradiënt en gravitatie is dat het klappend blad niet meer precies te beschrijven is als een 2^e orde systeem.

Voor de mathematische afleiding van de bewegingsvergelijking van een enkel blad in de klaprichting β maken we gebruik van de dynamische Euler vergelijking (zie appendix 1):

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + m b (\bar{r}_g \times \bar{a}_s)_x = M_x$$

NET $\bar{I} = [I_x, I_y, I_z]$ HET TRAGHEIDSMOMENT VAN HET BLAD

$\bar{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ HOEKSNELHEID VAN HET ASSENSTELSEL $X_3 Y_3 Z_3$
(VAST AAN HET BLAD)

(1.15)

\bar{a}_s DE VERSNELLING VAN HET SCHARNIER

EN \bar{M}_x HET UITWENDIG MOMENT IN X-RICHTING

Er wordt aangenomen dat de bladen onafhankelijk van elkaar bewegen en dat de rotor- evenals de kruihoeknelheid constant is. In bewegingsvergelijking (1.15) wordt de bladbeweging opgebouwd gedacht uit een rotatie van het blad (hoeknelheid $\bar{\omega}$) en een beweging van het scharnier (versnelling \bar{a}_s).

N.B.: Juist vanwege deze splitsing hoeven bij de coördinatentransformaties uit de vorige paragraaf alleen de rotaties beschouwd te worden en geen translaties. De coördinatentransformaties (onder andere (1.11)) worden immers alleen gebruikt voor het berekenen van $\bar{\omega}$; het feit dat de oorsprong van $X_3 Y_3 Z_3$ (het klapscharnier) niet samenvalt met die van de andere 3 stelsels (translatie) wordt in de bewegingsvergelijking verdisconteerd via \bar{a}_s .

Voor we $\bar{\omega}$ en \bar{a}_s bepalen maken we eerst een tweetal afspraken:

- Alle grootheden waarvan de grootte afhankelijk is van de keuze van het referentiepunt, zoals (hoek)nelheid en versnelling, worden gerelateerd aan de aarde (zogenaamde absolute waarde). Behalve als erbij vermeld wordt dat ze relatief zijn; dan zijn ze gedefinieerd ten opzichte van het scharnier van het blad (oorsprong $X_3 Y_3 Z_3$).

- Behalve als het expliciet anders vermeld wordt, worden alle vectoren uitgeschreven in coördinaten ten opzichte van $X_3 Y_3 Z_3$ (met het blad meebewegend stelsel).

Voor het uitwerken van (1.15) dient de hoeknelheid van het blad $\bar{\omega}_b$ bekend te zijn. Ten gevolge van de klapbeweging is

$$\bar{\omega}_b = [-\dot{\beta}, 0, 0];$$

hierbij dient de rotorhoeknelheid Ω nog verrekend te worden. Als de kruisnelheid q voorlopig op nul gesteld wordt geldt er dat

$$\bar{\omega}_{b,1} = [0, -\Omega, 0].$$

Met behulp van de overgangsmatrix wordt de hoeknelheid (ten gevolge van Ω) ten opzichte van het $X_3 Y_3 Z_3$ stelsel bepaald:

$$\bar{\omega}_{b,3} = [0, -\Omega \cos \beta, -\Omega \sin \beta].$$

In totaal krijgen we zo

$$\bar{\omega}_b = [-\dot{\beta}, -\Omega \cdot \cos\beta, -\Omega \cdot \sin\beta].$$

Vervolgens dient het effect van de beweging van het scharnier (oorsprong $X_3 Y_3 Z_3$) bepaald te worden. Daartoe bepalen

we eerst de plaatsvector van het relatieve massamiddelpunt (dus ten opzichte van het blad in plaats van ten opzichte van de aarde):

$$\bar{r}_g = [0, 0, x_g \cdot R].$$

De versnelling van het bladscharnier is gelijk aan

$$\bar{a}_{s,2} = [0, 0, -\Omega^2 \cdot e \cdot R]$$

(naar de as toe) en dus

$$\bar{a}_{s,3} = [0, \Omega^2 \cdot e \cdot R \cdot \sin\beta, -\Omega^2 \cdot e \cdot R \cdot \cos\beta].$$

Het benodigde uitwendig product wordt nu:

$$\bar{r}_g * \bar{a}_{s,3} = [-\Omega^2 \cdot e \cdot x_g \cdot R^2 \cdot \sin\beta, 0, 0].$$

Invullen in (1.15) levert tenslotte:

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \cdot (1 + \epsilon) \cdot \beta = \frac{M_e}{I}$$

$$\text{MET } I_y = I_x + I_z$$

$$I_x = I \quad \text{MET } I \text{ VOLGENS (1.6)}$$

$$\epsilon = \frac{m \cdot e \cdot x_g \cdot R^2}{I}$$

EXCENTRICITEITS COEFFICIENT

(1.16)

$M_e := -M_x$ HET RELATIEVE (DUS TEN OPZICHTE VAN HET KLAPSCHARNIER)
UITWENDIG MOMENT IN KLAPRICHTING (DE SUBSCRIPT
E STAAT VOOR EXCITATIE)

Het dimensieloze getal ϵ is schaalonafhankelijk en wordt bepaald door de geometrie van het blad. Voor helicopterbladen ligt ϵ in de buurt van 0,06; voor windturbines ongeveer tussen 0 en 0,2.

In geval dat de gondel tevens om de Z_1 -as kruit met hoeksnelheid q verloopt de berekening analoog. Nu is de hoeksnelheid van het scharnier

$$\bar{\omega}_{s,1} = [0, -\Omega, -q]$$

en dus

$$\bar{\omega}_{s,2} = [-q \cdot \sin\psi, -\Omega, -q \cdot \cos\psi].$$

De plaatsvector van het bladscharnier is

$$\bar{s}_{s,2} = [0, 0, e \cdot R],$$

zodat de versnelling \bar{a}_s bepaald kan worden:

$$\bar{a}_{s,2} = \bar{\omega}_{s,2} \times \bar{v}_{s,2} = \bar{\omega}_{s,2} \times (\bar{\omega}_{s,2} \times \bar{s}_{s,2}) = \begin{bmatrix} q^2 \cdot e \cdot R \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi \\ q \cdot \Omega \cdot e \cdot R \cdot \cos\psi \\ -q^2 \cdot e \cdot R \cdot \sin^2\psi - \Omega^2 \cdot e \cdot R \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Voor het uitproduct $\bar{r}_g * \bar{a}_s$ dient de uitdrukking van a_s weer eerst ten opzichte van $X_3 Y_3 Z_3$ geschreven te worden.

N.B.: \bar{a}_s is de versnelling van het scharnier ten opzichte van de aarde uitgeschreven in bladcoördinaten; de versnelling van het scharnier ten opzichte van het blad zelf is natuurlijk gelijk aan nul.

Met het relatieve massamiddelpunt $\bar{r}_g = [0, 0, x_g \cdot R]$ volgt voor de x-coördinaat van het uitproduct:

$$\begin{aligned} (\bar{r}_g \times \bar{a}_s)_x &= -g \cdot \Omega \cdot e \cdot x_g \cdot R^2 \cdot \cos \psi \cdot \cos \beta - g^2 \cdot e \cdot x_g \cdot R^2 \cdot \sin^2 \psi \cdot \sin \beta \\ &\quad - \Omega^2 \cdot e \cdot x_g \cdot R^2 \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (1.18)$$

Verder is de hoeksnelheid van het blad nu gelijk aan

$$\bar{\omega}_b = \begin{bmatrix} -g \cdot \sin \psi - \dot{\beta} \\ -\Omega \cdot \cos \beta + g \cdot \sin \beta \cdot \cos \psi \\ -\Omega \cdot \sin \beta - g \cdot \cos \beta \cdot \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Invullen in (1.15) levert tenslotte de gevraagde bewegingsvergelijking van het blad op (bij verwaarlozing van termen q^2 ten opzichte van Ω^2):

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \cdot (1 + \epsilon) \cdot \beta = \frac{M_e}{I} - (\Omega + \epsilon) \cdot g \cdot \Omega \cdot \cos \psi \quad (1.20)$$

Het rechterlid van (1.20) dient nog nader uitgewerkt te worden. Voor het relatieve uitwendige moment M_e kan geschreven worden:

$$M_e = M_g + M_v + M_a \quad (1.21)$$

respectievelijk de relatieve momenten ten gevolge van gravitatie, veer en aerodynamische krachten. Het veermoment probeert β gelijk aan nul te maken en is gelijk aan

$$M_v = -K \cdot \beta \quad (1.22)$$

MET K DE VEERSTIJFHEID

Voor M_g , in de klapproductie, wordt eerst de valversnelling g ten opzichte van het $X_3 Y_3 Z_3$ -stelsel bepaald:

$$\vec{g}_1 = [0, 0, g]$$

zodat

$$\vec{g}_3 = [g \cdot \sin \psi, -g \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi, g \cdot \cos \psi \cdot \cos \psi].$$

Voor het gravitatiemoment wordt aldus verkregen:

$$M_g = -(\vec{r}_g \times m b \cdot \vec{g})_x = -x_g \cdot R \cdot m b \cdot g \cdot \sin \beta \cdot \cos \psi \approx -x_g \cdot R \cdot m b \cdot g \cdot \cos \psi \cdot \beta \quad (1.23)$$

Indien het blad zich in het onderste gedeelte van de rotorschijf bevindt probeert M_g de grootte van de klaphoek β te verkleinen; in het bovenste gedeelte juist te vergroten.

Het aerodynamisch moment M_a zal in §1.5 behandeld worden, waarbij we nu alvast stellen dat M_a de term

$$-1/2 \cdot t_4 \cdot \gamma \cdot I \cdot \Omega \cdot \dot{\beta} \quad (\text{met } \gamma \text{ het getal van Lock})$$

bevat. De bewegingsvergelijking kan nu als volgt geschreven worden, waarbij er van de variabele t (tijd) overgegaan wordt op de variabele $\psi = \Omega \cdot t$ (azimuthhoek):

$$\beta'' + \frac{\gamma}{2} \cdot t_4 \cdot \beta' + \left(1 + \epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2} + \frac{x_g \cdot R \cdot m b \cdot g \cdot \cos \psi}{I \cdot \Omega^2}\right) \cdot \beta = \frac{\tilde{M}_a}{I \cdot \Omega^2} - (2 + \epsilon) \cdot \hat{q} \cdot \cos \psi$$

$$\text{MET } \tilde{M}_a = M_a + \frac{1}{2} \cdot t_4 \cdot \gamma \cdot I \cdot \Omega \cdot \dot{\beta} \quad (\text{DUS HET AERODYNAMISCH MOMENT ZONDER DE } \dot{\beta} \text{ TERM})$$

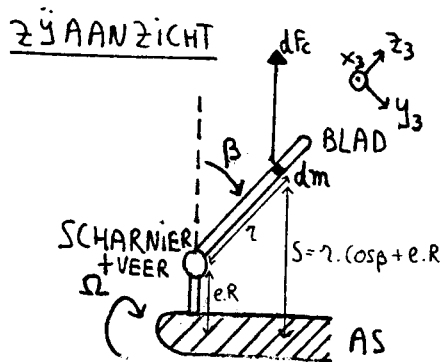
$$\beta' = \frac{d\beta}{d\psi} = \frac{d\beta}{dt} \cdot \frac{dt}{d\psi} = \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \quad ; \quad \beta'' = \frac{\ddot{\beta}}{\Omega^2} \quad (1.24)$$

$$\text{EN } \hat{q} = \frac{q}{\Omega} \quad \text{DIRENSIE LOZE KRUI HOEKSNELHEID}$$

(DE ACCENT ' GEEFT DUS DE AFGELEIDE NAAR DE AZIMUTH HOEK ψ AAN EN HET DAKJE ^ EEN DIRENSIE LOZE HOEKSNELHEID)

Deze vergelijking had ook afgeleid kunnen worden door uit te gaan van de krachten op een bladelement dm en vervolgens te integreren over het blad (zie [1], (II-39)). In (1.23) kunnen de volgende termen herkend worden:

- $I \cdot \Omega^2 \cdot \beta''$ traagheidsterm
- $I \cdot \Omega^2 \cdot \gamma / 2 \cdot t_4 \cdot \beta'$ aerodynamische demping
(werkt klapproductie tegen)
- $I \cdot \Omega^2 \cdot (1 + \epsilon) \cdot \beta$ centrifugaal term
(zie figuur 1.9), immers



Figuur 1.9: De centrifugaalkracht dF_c op een bladelement dm .

$$M_c = |\vec{r} \times \vec{F}_c| = \int_0^{R(1-e)} r \sin \beta \cdot \Omega^2 \cdot s \, dm = I \cdot \Omega^2 \cdot (1+\epsilon) \cdot \beta$$

$$\text{MET } s = r \cdot \cos \beta + e \cdot R \approx r + e \cdot R \quad (\text{AFSTAND TOT DE AS}) \quad (1.25)$$

$$\chi_g \text{ EN } I \text{ VOLGENS (1.6)}$$

$$\text{EN } \epsilon \text{ VOLGENS (1.16)}$$

(De integraties lopen vanaf het scharnierpunt $r=0$). Uit de uitdrukkingen blijkt dat de centrifugaalkracht het blad weer terug in het rotorvlak probeert te trekken en dus op te vatten is als een extra veer (met stijfheid $I \cdot \Omega^2 \cdot (1+\epsilon)$).

$$- I \cdot \Omega^2 \cdot K / (I \cdot \Omega^2) \cdot \beta \quad \text{veer term}$$

De factor $K / (I \cdot \Omega^2)$ kan opgevat worden

als een dimensieloze veerstijfheid: de veerstijfheid K gedeeld door de veerstijfheid $I \cdot \Omega^2$ ten gevolge van de centrifugaalwerking (indien de excentriciteit $e=0$)

$$- I \cdot \Omega^2 \cdot x_g \cdot R \cdot m_b \cdot g \cdot \cos \psi / (I \cdot \Omega^2) \cdot \beta \quad \text{gravitatieterm}$$

Deze term verandert de factor vóór β in (1.23) van een constante in een functie van de azimuthhoek ψ (veer met wisselende stijfheid).

$$- I \cdot \Omega^2 \cdot (2 + \xi) \cdot \hat{q} \cdot \cos \Psi$$

gyroscopisch effect ten gevolge
van de kruibeweging

Of deze term het juiste teken heeft, kan als volgt gecontroleerd worden (zie figuur 1.10 en [4], blz. 218). Het impulsmoment L van de rotor wijst in de negatieve Y_1 -richting. Bij het kruien om de negatieve Z_1 -as wordt er een krachtmoment $\bar{\tau}$ in de negatieve Z_1 -richting uitgeoefend op de rotor. Aangezien

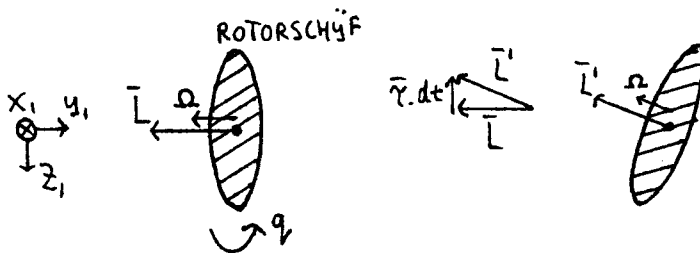
$$\bar{\tau} \cdot dt = d\bar{L} = \bar{L}' - \bar{L}$$

MET $\bar{\tau}$ KRACHTMOMENT
EN \bar{L} IMPULSMOMENT

(1.26)

zal de rotor de neiging hebben om achterover te kantelen; de rotor gedraagt zich als een gyroscoop. Voor een blad in de onderste stand ($\Psi=0$) zal het gyroscopisch effect β willen verminderen in overeenstemming met de term in (1.23). Door óf de richting van q óf de richting van Ω te veranderen, wijzigt tevens de richting van het gyroscopisch moment.

ZY AANZICHT



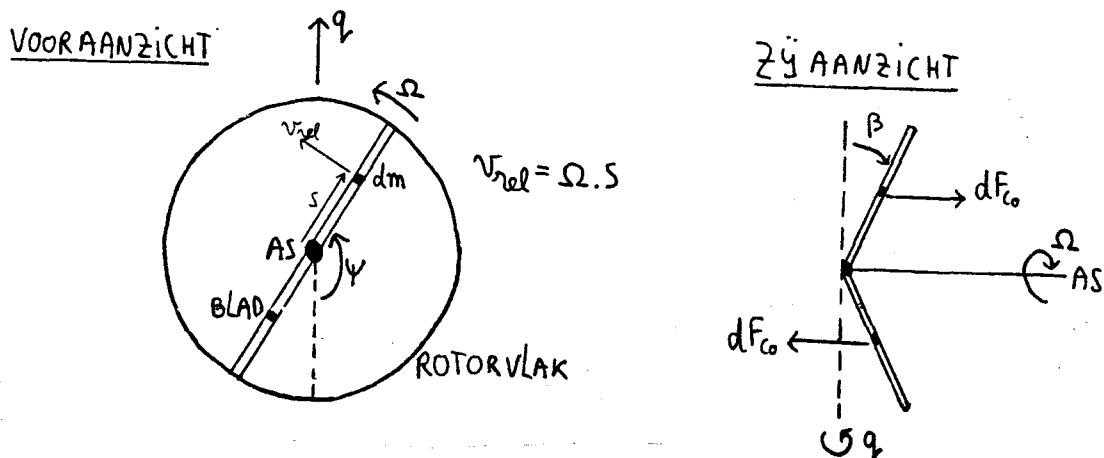
Figuur 1.10: Het gyroscopisch effect bij het kruien.

N.B.: Het gyroscopisch effect kan ook uitgelegd worden als een coriolismoment ten gevolge van de kruisnelheid q . Per definitie geldt er (zie ook figuur 1.11):

$$\omega = -2 \cdot m \cdot \bar{q} \cdot \bar{v}_{rel}$$

MET \bar{q} DE HOEKSNELHEID VAN X, Y, Z ,

EN $\bar{v}_{rel} = \Omega \cdot s$ DE RELATIEVE SNELHEID (TEN OPZICHTE VAN X, Y, Z) (1.27)
TEN GEVOLGE VAN DE ROTORROTATIE



Figuur 1.11: De corioliskracht dF_{co} op een bladelement dm ten gevolge van de rotorrotatie Ω en kruishoeknelheid q ; voor het gemak is $e=0$ gesteld.

Uit (1.27) volgt:

$$dF_{co} = -2 \cdot q \cdot \Omega \cdot s \cdot \cos \psi \cdot dm$$

$$\text{EN OUS} \quad M_{co} = \int_0^R s \, dF_{co} = -2 \cdot I \cdot q \cdot \Omega \cdot \cos \psi \quad (1.28)$$

Indien het blad ook een excentriciteit bezit krijgen we precies de uitdrukking voor het gyroscopisch moment. (De relatieve beweging (ten opzichte van $X_1 Y_1 Z_1$) ten gevolge van de klapbeweging geeft aanleiding tot een corioliskracht in het rotorvlak en beïnvloedt wel het askoppel maar niet de klapbeweging, zie §3.4). Of het gyroscopisch effect te schrijven is als een corioliskracht of als bijvoorbeeld een centrifugaalkracht is louter een kwestie van de keuze van het assenstelsel. Dit is een algemene eigenschap van schijnkrachten; schijnkrachten zijn extra krachten die nodig zijn om de wet van Newton $F=m \cdot a$ te mogen toepassen als niet van een inertiële stelsel wordt uitgegaan. Als bijvoorbeeld voor het assenstelsel het met het blad meebewegend stelsel $X_3 Y_3 Z_3$ wordt gekozen is de corioliskracht altijd gelijk aan nul, omdat dan immers de relatieve snelheid nul is.

1.4 Het transiëntgedrag

In deze paragraaf zal de oplossing van de in de vorige paragraaf afgeleide bewegingsvergelijking behandeld worden. De oplossing van (1.24) bestaat uit de som van een particuliere oplossing en de oplossing van de homogene vergelijking; waarbij het eerste gedeelte het stationaire gedrag (gedwongen trilling) weergeeft, terwijl het tweede gedeelte het transiëntgedrag (start of inschakelgedrag) beschrijft dat in loop der tijd uitdempt. In deze paragraaf zal het startgedrag bestudeerd worden, waarvoor het aerodynamisch moment (dat in de volgende paragraaf wordt behandeld) nog niet bekend hoeft te zijn. Hoofdstuk 2 zal gewijd zijn aan de stationaire oplossing.

Afgezien van de gravitatieterm is de homogene vergelijking van (1.24):

$$\beta'' + 2\zeta \cdot \beta' + \hat{\omega}_b^2 \cdot \beta = 0$$

\downarrow TRAGHEID \downarrow VEER + CENTRIFUGAALWERKING
 \downarrow AERODYNAMISCHE DEMPING

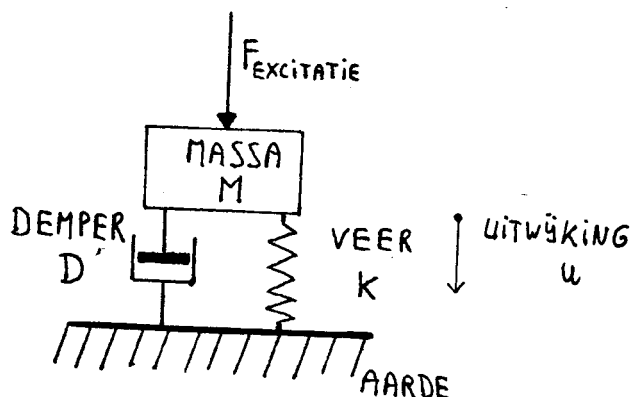
(1.29)

MET $\zeta = \frac{k}{4} \cdot t_d$ DEMPINGS COËFFICIËNT

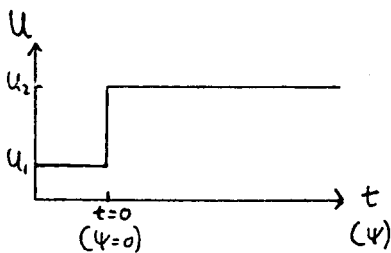
EN $\hat{\omega}_b = \frac{\omega_b}{\Omega} = \sqrt{1 + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}}$ EIGEN FREQUENTIE

Dit is de vergelijking voor een 2^e orde systeem dat niet belast wordt en dus een vrije trilling uitvoert met frequentie gelijk aan $\hat{\omega}_b$.

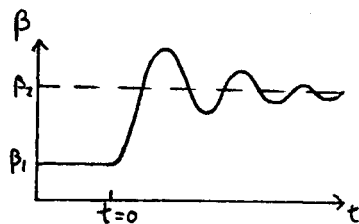
Een bekend voorbeeld van een 2^e orde systeem is het massa-veer-demper systeem (zie figuur 1.12) met bewegingsvergelijking:



Figuur 1.12: Het massa-veer-demper systeem.

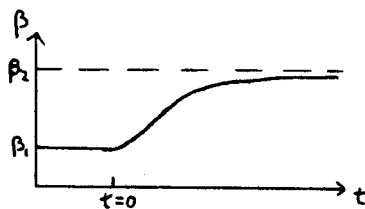


WINDVLAAG

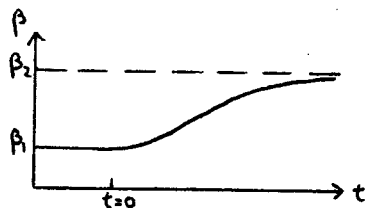


$$a) \frac{\zeta}{\omega_b} < 1$$

GEDAMPTE TRILLING



$$b) \frac{\zeta}{\omega_b} = 1$$

KRITISCH GEDAMPTE TRILLING
(NET GEEN "OVERSHOOT")

$$c) \frac{\zeta}{\omega_b} > 1$$

OVERGEDAMPTE TRILLING

Figuur 1.13: De responsie β (klaphoek) van een 2^e orde systeem op een stapvormige verstoring U (windvlaag) voor een drietal waarden voor ζ/ω_b (ζ is de dempingscoëfficiënt en ω_b de dimensieloze eigenfrequentie van het blad); met als coördinaat de tijd t (of de azimuthhoek $\psi = \Omega \cdot t$).

$$m\ddot{u} + D\dot{u} + k \cdot u = F_e$$

MET m MASSA (TRAAGHEID) D DENPING k VEERSTERKTE F_e EXCITATIEKRACHT (INGANGSSIGNAAL)

(1.30)

EN u UITWYKING (UITGANGSSIGNAAL)VOORTS GELDT ER: $\zeta = \frac{D}{2m}$ DENPINGSCOËFFICIËNTEN $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ RESONANTIE FREQUENTIE (EIGENFREQUENTIE)

Over het gedrag van een 2^e orde systeem kan zo'n beetje alles gevonden worden in de literatuur. Op dit moment zijn we vooral geïnteresseerd in het transiëntgedrag (oftewel de responsie op een stap in de kracht F_e). In het geval van het scharnierend blad komt dit neer op een stap in de windsnelheid U . De bekende oplossing van (1.29) op een stap (te vinden via substitutie van $\beta = e^{\lambda \cdot \psi}$ met λ complex) is:

$$\beta(\psi) = \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2) \cdot e^{-\zeta \cdot \psi} \cdot \cos(\sqrt{\omega_b^2 - \zeta^2} \cdot \psi) \quad (1.31)$$

indien de randvoorwaarden van (1.29) als volgt zijn:

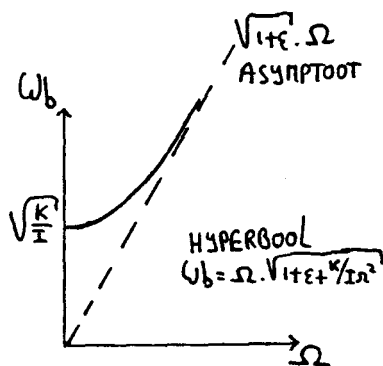
$$\beta(0) = \beta_1 \text{ en } \beta(\infty) = \beta_2 \text{ (zie figuur 1.13)}$$

De oplossing is een trilling waarbij van de ene evenwichtstoestand β_1 (bij $U=U_1$) overgegaan wordt in een andere, namelijk β_2 (bij $U=U_2$). Als $\zeta = \hat{\omega}_b$ (oftewel

$$\gamma = 4/t_4 \cdot \sqrt{(1 + \xi + K/(I \cdot \Omega^2))}$$

dan is de trilling kritisch gedempt; voor $\zeta > \hat{\omega}_b$ overgedempt. Voor windturbines is $\gamma = 4$ à 16 en dus $\zeta = 0,1$ à $0,4$ (als $c_t/c_r = 1/4$ en dus $t_4 = 0,1$ (1.5)), zodat er sprake is van een gedempte trilling ($\hat{\omega}_b \geq 1$) met sterke demping: binnen ongeveer 1 à 2 omwentelingen is de nieuwe evenwichtstoestand bereikt (waarbij de massa en straal van het blad alleen via γ van invloed zijn op de dempingstijd). Dit houdt in dat voor excitaties met lage frequentie (ten opzichte van ω_b) het gedrag van de klapbeweging quasistationair verondersteld kan worden; dat wil zeggen de beweging van het blad wordt opgevat als een opeenvolgende reeks van evenwichtstoestanden. We hoeven dan alleen de stationaire oplossing (gedwongen trilling) te beschouwen.

De eigenfrequentie van het blad ω_b (figuur 1.14) is afhankelijk van de veerstijfheid K en excentriciteit e (via ξ). De ontwerper is via het variëren van K en/of e in staat elke gewenste eigenfrequentie voor het blad te verkrijgen. Als zowel K en e nul is, is de eigenfrequentie ω_b van het klappend blad gelijk aan de rotorhoeksnelheid.



Figuur 1.14: De eigenfrequentie van het blad ω_b als functie van de rotorhoeksnelheid Ω .

Toevoeging van de gravitatieterm in (1.29) zorgt ervoor dat de coëfficiënten in de differentiaalvergelijking niet langer meer constanten zijn. Dit kan in principe tot instabiel gedrag leiden. De fysische achtergrond van deze instabiliteit kan duidelijk gemaakt worden via het massa-veer-demper systeem van figuur 1.12. De door een excitatie toegevoerde energie wordt gedeeltelijk door de demper afgevoerd; het restant (of tekort) wordt door de veer tijdelijk opgeslagen (respectievelijk afgegeven). Het effect van de gravitatie term is nu dat er een extra veer bijkomt waarvan de veersterkte periodiek is (met frequentie Ω). Hierdoor loopt het periodiek opslaan/afgifte van energie van de "gravitatieveer" niet in de pas met dat van de oorspronkelijke veer. Dit zal het proces ontregelen; bij bepaalde condities kan het zelfs zo ver komen dat het systeem niet meer in staat is om alle toegevoerde energie te verwerken en zal de uitwijking alsmaar toenemen.

In het geval van het klappend blad zal de klaphoek β nooit ∞ -groot worden, omdat de gravitatieterm maar klein is en bovendien is, zoals we reeds gezien hebben, de demping erg groot.

1.5 Het aerodynamisch moment

Om ook de stationaire oplossing van (1.24) te kunnen bepalen, dient het aerodynamisch moment M_a bekend te zijn. Voor het berekenen van het aerodynamisch moment M_a wordt eerst de totale relatieve windsnelheid voor een bladelement bepaald; dit is de windsnelheid die het bladelement voelt. Deze is opgebouwd uit de ongestoorde windsnelheid plus de geïnduceerde snelheid v_i en de schijnbare windsnelheid ten gevolge van de bladbeweging (zie ook figuur 1.6):

$$\bar{U}_{rel} = \bar{U} + \bar{v}_i + \bar{U}_{schijnbaar} \quad (1.32)$$

- De geïnduceerde axiale snelheid $v_i = [0, -v_i, 0]$ (ten opzichte van $X_1 Y_1 Z_1$) wordt uniform over het rotorvlak verondersteld. Voorts wordt de geïnduceerde tangentiële snelheid verwaarloosd; omdat de windturbine een snelloper is, is de zogrotatie erg klein.
- De schijnbare wind (de relatieve windsnelheid voor het blad bij windstilte), ten gevolge van rotorrotatie Ω en kruihoeksnelheid q , kan direct uit de hoeksnelheid $\bar{\omega}_b$ (1.19) van het blad berekend

$$[U_t, U_p, U_s] = -\bar{\omega}_b \times \bar{s}$$

MET $\bar{s} = [0, 0, s]$ EN $s \approx r + e.R$ (VANAF DE AS)
 DE INDICES t, p EN s SLAAN RESPECTIEVELYK OP TANGENTIËEL
 (PARALLEL AAN HET BLAD), PERPENDICULAIR (LOODRECHT) EN SPAN
 (LENGTE RICHTING) (1.33)

Bovendien levert de klapbeweging een bijdrage aan de schijnbare wind:

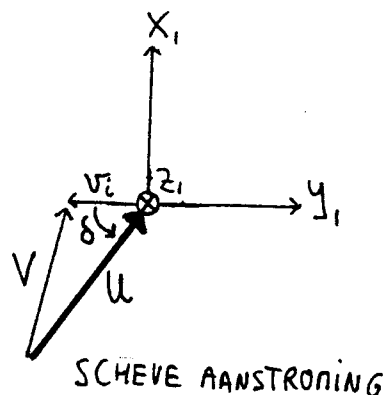
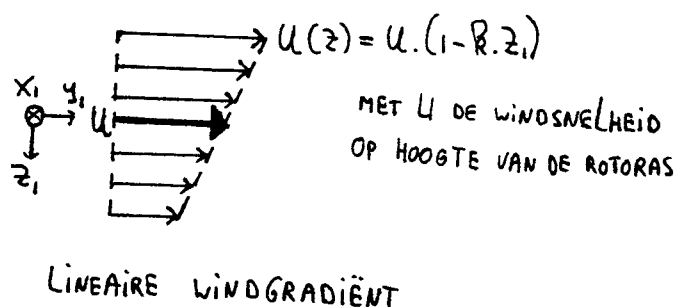
$$\bar{\omega}_b = [-\dot{\beta}, 0, 0] \text{ en } [U_t, U_p, U_s] = -\bar{\omega}_b * \bar{r} = [0, -\dot{\beta} \cdot r, 0] \text{ met } \bar{r} = [0, 0, r]$$

(vanaf het scharnier).

In totaal wordt zo verkregen:

$$\begin{aligned}
 U_t &= \Omega \cdot s \cdot \cos \beta - q \cdot s \cdot \sin \beta \cdot \cos \psi \approx \Omega \cdot s - q \cdot s \cdot \beta \cdot \cos \psi \\
 U_p &= -q \cdot s \cdot \sin \psi - \dot{\beta} \cdot r \approx -q \cdot s \cdot \sin \psi - \dot{\beta} \cdot (s - e.R)
 \end{aligned} \quad (1.34)$$

De snelheid U_s is onbelangrijk voor het bepalen van de lift.

BOVENAANZICHTZY AANZICHT

Figuur 1.15: De ongestoorde windsnelheid U en de geïnduceerde axiale snelheid v_1 , evenals de resultante V ; met δ de scheve aanstromingshoek en k de windgradiëntcoëfficiënt.

- Bij de ongestoorde windsnelheid wordt er rekening gehouden met een lineaire windgradiënt (de windturbine bevindt zich in de grenslaag van de aarde)

$$U(z) = U \cdot (1 - R \cdot z) \quad (1.35)$$

MET R DE WINDGRADIËNT COËFFICIËNT

en een scheve aanstromingshoek δ (zie figuur 1.15). Windturbines met een servo gestuurde kruis-inrichting zullen in het algemeen scheef worden aangestroomd, omdat het kruisysteem pas gaat werken indien de rotor gemiddeld over een zekere tijd scheef op de wind staat, over een grotere hoek dan de ingestelde drempelwaarde. Windturbines die zijn uitgerust met een vaan zullen sneller reageren op een verandering in de windrichting.

Voor een bladelement op afstand s van de as geldt $z_1 = s \cdot \cos\beta \cdot \cos\psi$ (1.14). dus ten opzichte van het $X_1 Y_1 Z_1$ stelsel geldt:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} U \cdot \sin\delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos\beta \cdot \cos\psi) \\ U \cdot \cos\delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos\beta \cdot \cos\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Waaruit de ongestoorde windsnelheid ten opzichte van het blad $X_3 Y_3 Z_3$ volgt:

$$\begin{cases} U_t = U \cdot \cos \psi \cdot \sin \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \beta \cdot \cos \psi) \approx U \cdot \cos \psi \cdot \sin \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \psi) \\ U_p = U \cdot \sin \psi \cdot \sin \beta \cdot \sin \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \beta \cdot \cos \psi) + U \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \beta \cdot \cos \psi) \\ \approx U \cdot \beta \cdot \sin \psi \cdot \sin \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \psi) + U \cdot \cos \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \psi) \end{cases} \quad (1.37)$$

Er wordt voorlopig aangenomen dat bij het kruien de gondel precies met de wind meedraait zodat δ niet verandert.

In totaal geldt dus voor de relatieve aanstroomsnelheid ten opzichte van het bladelement (substitutie van (1.34) en (1.37) in (1.32)):

$$\begin{cases} U_t = \Omega \cdot s - q \cdot s \cdot \beta \cdot \cos \psi + U \cdot \cos \psi \cdot \sin \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \psi) \\ U_p = U \cdot \beta \cdot \sin \psi \cdot \sin \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \psi) + U \cdot \cos \delta \cdot (1 - R \cdot s \cdot \cos \psi) - v_i \\ - q \cdot s \cdot \sin \psi - \dot{\beta} \cdot (s - e \cdot R) \end{cases} \quad (1.38)$$

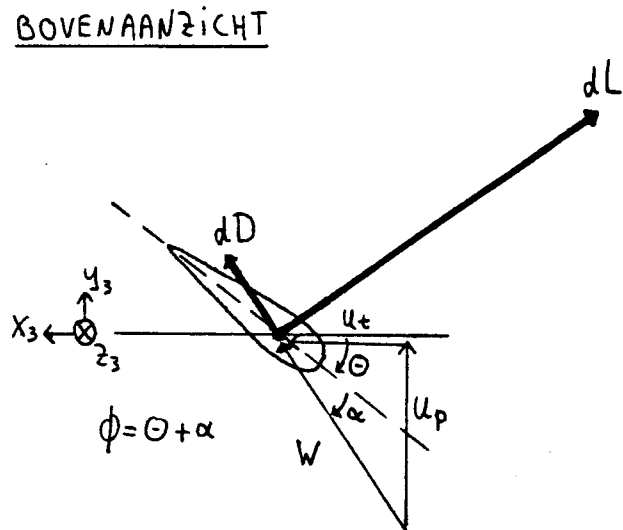
Nu de relatieve windsnelheid bekend is kan het aerodynamisch moment bepaald worden (zie figuur 1.16):

$$M_a = \int_{e \cdot R}^R s \cdot (dL \cdot \cos \psi + dD \cdot \sin \psi) \approx \int_{e \cdot R}^R s \cdot dl \quad (1.39)$$

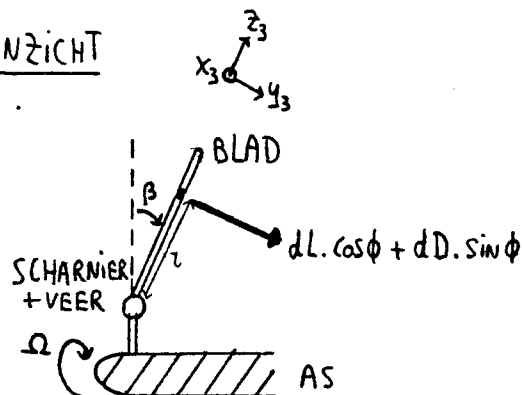
$$\begin{aligned} dl &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_L \cdot W^2 \cdot dA && \text{LIFT TERM} \\ \text{MET } dA &= c \cdot ds && \text{OPPERVLAKTE} \\ C_L &= C_{L\alpha} \cdot \alpha && \text{LIFT COEFFICIËNT} \\ \text{MET } C_{L\alpha} &= \frac{dC_L}{d\alpha} && \text{HELLING VAN DE LIFTKROMME} \\ \alpha &= \phi - \theta && \text{AANSTROOM HOEK} \\ \text{EN } \phi &&& \text{HOEK VAN } W \text{ MET COÖRDINATENSTELSEL} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Er wordt geen rekening gehouden met tipverliezen. Een bladelement op afstand s van de as zal des te meer aan het totale aerodynamisch moment bijdragen naarmate s groter is tengevolge van de term

BOVENAANZICHT



ZIJ AANZICHT



Figuur 1.16: De lift dL en weerstand dD van een bladelement.

$s \cdot W^2$. Op grond hiervan maken we de volgende vergaande vereenvoudiging door te stellen dat voor de snelloper geldt:

$$\begin{aligned} U_t = \Omega \cdot s \Rightarrow U_p & \text{ VOOR ALLE } s \\ \text{ZODAT } \phi \approx \frac{U_p}{U_t} & \text{ EN } W^2 = U_t^2 \end{aligned} \quad (1.41)$$

De bijdrage van het kruien en de scheve aanstroming in U_t worden uitgemiddeld. Fysisch houden deze aannamen in dat alleen de invloed van de richting en niet van de grootte van de relatieve aanstroomsnelheid \bar{W} in de benadering van de lift wordt verdisconteerd. Hiermee wordt (1.39) met behulp van (1.40) gelijk aan:

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_{L\alpha} \cdot R^2) \int_e y \cdot c(y) \cdot (U_p \cdot U_t - \Theta(y) \cdot U_t^2) dy = \\ & \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot I \cdot \Omega^2 \int_e \left\{ y^2 \cdot \frac{c(y)}{c_r} \cdot \frac{U_p}{\Omega \cdot R} - y^3 \cdot \frac{c(y)}{c_r} \cdot \Theta(y) \right\} dy \end{aligned} \quad (1.42)$$

MET $\gamma = \frac{\rho \cdot C_{L\alpha} \cdot c_r \cdot R^4}{I}$ GETAL VAN LOCK

In vergelijking (1.42) is γ het getal van Lock; dit dimensieloze getal geeft de verhouding weer tussen de aerodynamische- en traagheidskrachten. Het getal van Lock is tamelijk schaalafhankelijk omdat bij opschaling van een blad de massa ongeveer evenredig is met

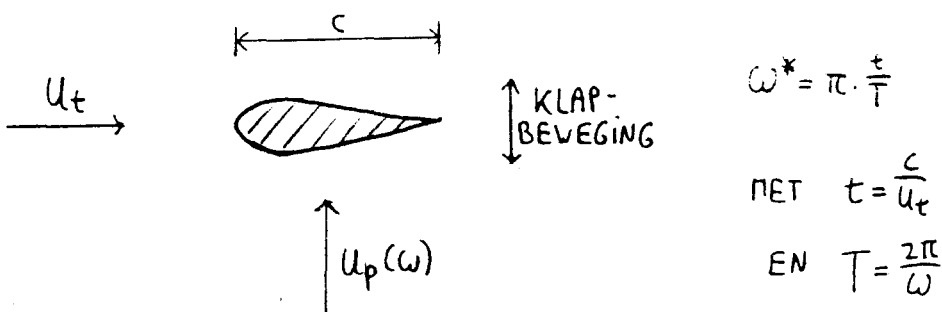
R^3 en dus I evenredig met R^5 (1.6); daarnaast is de koorde of ongeveer evenredig met R .

N.B.: Je zou verwachten dat γ evenredig zou zijn met $1/R$ omdat de luchtkrachten evenredig zijn met R^2 (oppervlakte) en de traagheidskrachten evenredig met R^3 (inhoud). In het beschouwde geval van een snelloper en de gemaakte aannamen zijn de luchtkrachten echter evenredig met R^3 omdat nu in de formule voor de lift in plaats van U^2 de term $U_p \cdot U_t = U_p \cdot \Omega \cdot s$ (met $\Omega = \text{constant}$) te voorschijn komt.

In feite is de gebruikte uitdrukking voor de lift (1.40) slechts een quasi-stationaire benadering. Immers omdat de aanstroomhoek $\alpha = U_p / (\Omega \cdot s) - \Theta$ (met U_p volgens (1.38)) voortdurend varieert ten gevolge van onder andere de klapbeweging is ook de circulatie Γ van het blad tijdafhankelijk. ($\Gamma = \oint v \, dl$ integratie om het blad heen met v de plaatselijke aanstroomsnelheid en dl een klein stukje van de bladkoorde; volgens Kutta-Joukovsky geldt: $\Gamma = L / (\rho \cdot U \cdot R)$). Volgens de stelling van Kelvin blijft de totale circulatie constant, zodat het blad wervels (met tegengestelde circulatie) zal genereren. Deze losgelaten wervels zullen op hun beurt de lift van het blad beïnvloeden. Bij dit proces kunnen een tweetal karakteristieke tijden onderscheiden worden:

- 1) $t = c / U_t$ de tijd die een luchtdeeltje nodig heeft om het blad te passeren.
 - 2) $T = 2 \cdot \pi / \omega$ de trillingstijd van de variatie in de aanstroomhoek α .
- Er kan nu de zogenaamde gereduceerde frequentie gedefiniëerd worden (zie figuur 1.17):

PROFIEL DOORSNEDE .



Figuur 1.17: De definitie van de gereduceerde frequentie ω^* .

$$\omega^* = \pi \cdot \frac{t}{T} = \frac{\omega \cdot c}{2 \cdot U_t} \quad (1.43)$$

Uit de literatuur (bijvoorbeeld [7], §3.4.2.1) blijkt dat indien $\omega^* < 0,05$ (oftewel $T > 20 \cdot \pi \cdot t$) de instationaire effecten verwaarloosd kunnen worden. In het geval van een windturbine is ω gelijk aan de rotorhoeksnelheid Ω (\propto bezit immers een $\cos\psi$ -, $\sin\psi$ -afhankelijkheid met $\psi = \Omega \cdot t$) en de relatieve aanstroomsnelheid U_t (bij de tip) wordt weer benaderd met $\Omega \cdot R$ zodat $\omega^* = c / (2 \cdot R)$; voor reële bladen geldt dan inderdaad dat $\omega^* \leq 0,05$.

De stationaire benadering voor de lift komt erop neer dat gesteld wordt dat de lift alleen van de momentane aanstroomsnelheid afhankelijk is en niet van de voorgeschiedenis van het blad (toen de wervels werden losgelaten). Voor het bepalen van de condities waarbij het blad een instabiele trilling gaat uitvoeren (flutter) dient wel de instationaire liftterm meegenomen te worden.

Na deze twee intermezzo's over het getal van Lock en de gereduceerde frequentie, keren we terug naar uitdrukking (1.42) betreffende het aerodynamisch moment. Indien de excentriciteit ongelijk nul is, wordt de uitdrukking voor M_a nogal complex omdat er dan geïntegreerd dient te worden vanaf het begin van het blad ($y=e$) tot aan de tip ($y=1$). In de uitgewerkte uitdrukking van (1.42) zullen er uitgebreide coëfficiënten met machten van e verschijnen. Om te vermijden dat de uitdrukking onhandelbaar wordt, wordt daarom bij het bepalen van het aerodynamisch moment verondersteld dat $e=0$. (Het scharnier valt dan samen met de as; met andere woorden er wordt uitgegaan dat de bladen tot de as doorlopen). Deze benadering is geoorloofd omdat de invloed van e op M_a vrij gering is. (Immers zoals hierboven al is gesteld, is de bijdrage van het buitenste gedeelte van het blad aan M_a overheersend). De integratie ondergrens van (1.42) verandert nu in 0 en er kan gebruik gemaakt worden van de reeds bepaalde tapsheidintegralen t_n (1.5), waarbij van geëxtrapoleerde waarden voor koorde en bladhoek wordt uitgegaan voor het traject as ($y=0$) tot scharnierpunt ($y=e$, waar het eigenlijke blad pas begint). Met gebruik van (1.38) en de uitdrukking voor de bladhoek (1.4) wordt dan voor het aerodynamisch moment verkregen:

$$a = R \int_0^1 y dl = \frac{\kappa}{2} \cdot I \cdot \Omega^2 \cdot \left\{ \frac{\cos \delta - \alpha}{\lambda} \cdot t_3 - \frac{R \cdot R \cdot \cos \delta}{\lambda} \cdot t_4 \cdot \cos \psi - \hat{q} \cdot t_4 \cdot \sin \psi - t_4 \cdot \beta' \right. \\ \left. + \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot \sin \psi \cdot t_3 \cdot \beta - \frac{R \cdot R \cdot \sin \delta}{\lambda} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot t_4 \cdot \beta - \Theta_n \cdot t_4 + \Theta_o \cdot t_5 \right\} \quad (1.44)$$

MET $\lambda = \frac{\Omega \cdot R}{u}$ SNELLOPENDHEID
 EN $\alpha = \frac{v_i}{u}$ AXIALE INDUCTIEFACTOR

Met β volgens (1.10) is in te zien dat het aerodynamisch moment ook hogere harmonische in $\psi = \Omega \cdot t$ bezit.

De term $-t_4 \cdot \beta'$ is de reeds genoemde dempingsterm. Door een klapbeweging naar achteren (toenemende β) zorgt deze term dat U_p (1.38) en dus ook de aanstroomhoek α en de lift kleiner worden: de klapbeweging wordt gedempt. Als het blad naar voren aan het klappen is (afnemende β) is β' negatief en neemt de lift toe, zodat ook nu de klapbeweging aerodynamisch gedempt wordt.

De dempingsterm kan echter ook instabiel gedrag veroorzaken. Bij het naar voren klappen van het blad neemt U_p (1.38) toe, zodat de aanstromingshoek α wordt vergroot. In het extreme geval kan dan overtrek plaatsvinden en wordt Cl_w (en dus ook γ) negatief. Dit betekent dat de dempingsterm van teken verandert en de trilling niet langer gedempt wordt maar juist versterkt (instabiliteit). Het spreekt voor zich dat dit verschijnsel vermeden dient te worden door bijvoorbeeld een regeling via bladhoekverstelling en/of het vergroten van de veersterkte K zodat de klapsnelheid beperkt blijft.

Via invullen van de bepaalde uitdrukking voor Ma in (1.24) wordt uiteindelijk de totale bewegingsvergelijking van het blad in de klaprichting verkregen:

$$\beta'' + \frac{\kappa}{2} \cdot t_4 \cdot \beta' + \left(1 + \varepsilon + \frac{\kappa}{I \cdot \Omega^2} + \frac{\chi g \cdot R \cdot mb \cdot g \cdot \cos \psi}{I \cdot \Omega^2} - \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{\sin \delta \cdot \sin \psi}{\lambda} \cdot t_3 \right. \\ \left. + \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot \sin \delta \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi}{\lambda} \cdot t_4 \right) \cdot \beta = \quad (1.45)$$

$$\frac{\kappa}{2} \cdot \left(\frac{\cos \delta - \alpha}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_n \cdot t_4 + \Theta_o \cdot t_5 \right) + \cos \psi \cdot \left(-\frac{\kappa}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot \cos \delta}{\lambda} \cdot t_4 - (2 + \varepsilon) \cdot \hat{q} \right) + \sin \psi \cdot \left(-\frac{\kappa}{2} \cdot \hat{q} \cdot t_4 \right)$$

Zoals beloofd zal tot slot van deze paragraaf de aanname dat de rotor-toren afstand nul is, nader beschouwd worden. Indien deze afstand, die we f zullen noemen, ongelijk aan nul is, geeft dit zowel een bijdrage aan de schijnbare wind voor een bladelement alsook een extra schijnkracht ten gevolge van het kruien (centrifugaalwerking).

Deze laatste is gelijk aan:

$$F = -mb \cdot q^2 \cdot f \quad (\text{IN NEGATIEVE } Y_1\text{-RICHTING})$$

$$\text{ZODAT } M = -F \cdot r_g = -mb \cdot q^2 \cdot f \cdot r_g \quad (1.46)$$

Dit constant moment zorgt volgens (1.45) voor een constante klaphoek β_0 ter grootte van (analoog aan (2.5) volgend hoofdstuk; voor het constante aerodynamisch moment):

$$\beta_0 = \frac{M / (I \cdot \Omega^2)}{1 + \epsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}} \leq \frac{M}{I \cdot \Omega^2} = -3 \cdot \hat{q}^2 \cdot \frac{f}{R} \cdot x_g = -0,07^\circ \quad (1.47)$$

$$\text{MET } I = \frac{1}{3} \cdot mb \cdot R^2$$

$$\text{EN } \hat{q} = 0,05, \quad x_g = 0,5 \quad \text{EN} \quad \frac{f}{R} = 0,3$$

Deze bijdrage aan de kegelhoek β_0 is te verwaarlozen (zie eventueel ook §2.6).

De schijnbare wind ten gevolge van het kruien met arm f is gelijk aan (ten opzichte van $X_1 Y_1 Z_1$):

$$U = [q \cdot f, 0, 0] \quad (1.48)$$

Via coördinatentransformatie (1.13) volgt dan:

$$\begin{cases} U_t = \cos \psi \cdot q \cdot f \\ U_p = \sin \beta \cdot \sin \psi \cdot q \cdot f = \beta \cdot q \cdot f \cdot \sin \psi \end{cases} \quad (1.49)$$

De bijdrage aan U_t is gemiddeld nul en te verwaarlozen ten opzichte van $\Omega \cdot s$, zodat aanname (1.41) van kracht blijft. De bijdrage aan U_p is (aan het bladuiteinde) klein ten opzichte van de term $q \cdot s \cdot \sin \psi$ in (1.38) (onder de veronderstelling dat f/R ordegrootte 0,3

is).

Concluderend kan er dus gesteld worden dat de gemaakte vereenvoudiging, door de rotor-toren afstand gelijk aan nul te maken, gerechtvaardigd is.

1.6 De axiale inductiefactor

In de bewegingsvergelijking van het blad (1.45) zit nog de onbekende axiale inductiefactor a . Deze kan verkregen worden door de uitdrukkingen voor de axiale weerstandscoefficiënt C_D volgens de bladelement- en impulstheorie aan elkaar gelijk te stellen. Uitgaande van een bepaalde bladgeometrie wordt dan een vergelijking in a verkregen.

N.B.: Bij het ontwerpen van rotorbladen gaat men juist uit van een gegeven waarde voor a (namelijk die waarde waarvoor het vermogen maximaal is). Via het gelijkstellen van beide uitdrukkingen voor C_D kan het bladontwerp (kooorde en bladhoek als van functie van r) bepaald worden.

Volgens de hypothese van Glauert is de door de rotor beïnvloede luchtmassa per tijdseenheid bij scheve aanstroming gelijk aan

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot V \quad (1.50)$$

$$\text{NET } V = \sqrt{(U \cdot \cos \delta - v_i)^2 + (U \cdot \sin \delta)^2} = U \cdot \sqrt{1 - 2a \cdot \cos \delta + a^2}$$

(Deze uitdrukking is eigenlijk bestemd voor helicopters in voorwaartse vlucht [9]; dus voor δ iets kleiner dan 90°). In (1.50) is V de resultante van de ongestoorde snelheid U en de geïnduceerde axiale snelheid v_i (zie figuur 1.15). Volgens de impulstheorie geldt nu dat:

$$D_{ax} = \frac{dm}{dt} \cdot 2 \cdot v_i \quad (\text{DE KRACHT IS GELIJK AAN DE IMPULSVERANDERING}) \quad (1.51)$$

Uit combinatie van (1.50) en (1.51) volgt:

$$C_D = \frac{D_{ax}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \cdot \pi \cdot R^2} = 4 \cdot a \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot a \cdot \cos \delta + a^2} \approx 4 \cdot a \cdot (\cos \delta - a) \quad (1.52)$$

De uitdrukking voor C_D volgens de bladelementtheorie wordt verkregen via integratie over de straal en vervolgens sommatie over het aantal bladen N (zie ook figuur 1.15):

$$D_{ax} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^R (dL \cdot \cos \phi + dD \cdot \sin \phi) \cdot \cos \beta \approx \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^R dl \quad (1.53)$$

Met behulp van (1.38), (1.39) en (1.40) wordt verkregen:

$$C_D = \frac{D_{ax}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \cdot \pi \cdot R^2} = \sigma \cdot (C_{L\alpha} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \left\{ y \cdot \frac{c(y)}{c_1} \cdot \frac{u_p}{\Omega \cdot R} - y^2 \cdot \frac{c(y)}{c_2} \cdot \theta(y) \right\} dy) \quad (1.54)$$

$$\text{MET } \sigma = \frac{N \cdot c_1}{\pi \cdot R} \quad \text{SOLIDITY}$$

Analoog aan het geval van het aerodynamisch moment kan dit uitgewerkt worden tot:

$$C_D = \sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{\cos \delta - a}{\lambda} \cdot t_2 - \frac{R \cdot k \cdot \cos \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \cos \psi - \frac{1}{2} \cdot t_3 \cdot \sin \psi - t_3 \cdot \beta' + \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot \sin \psi \cdot t_2 \cdot \beta - \frac{R \cdot k \cdot \sin \delta}{\lambda} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot t_3 \cdot \beta - \theta_1 \cdot t_3 + \theta_0 \cdot t_4 \right\} \quad (1.55)$$

Bij de sommatie over het aantal bladen N geldt het volgende: alleen de harmonische waarvan de orde n een veelvoud is van het aantal bladen N blijven over (zie appendix 2). Om dit toe te kunnen passen wordt eerst de uitdrukking voor β (1.10) ingevuld in (1.55), waarbij gebruik gemaakt kan worden van de volgende gonioformules:

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\psi & \sin \psi \cdot \cos^2 \psi &= \frac{1}{4} \sin \psi + \frac{1}{4} \sin 3\psi & \sin \psi \cdot \cos \psi &= \frac{1}{2} \sin 2\psi \quad (1.56) \\ \cos^2 \psi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2\psi & \sin^2 \psi \cdot \cos \psi &= \frac{1}{4} \cos \psi - \frac{1}{4} \cos 3\psi \end{aligned}$$

Voor een 2-bladige rotor vervallen dus de $\sin\psi$ -, $\cos\psi$ - en $\sin(3.\psi)$ - $\cos(3.\psi)$ -termen zodat er volgt:

$$C_D = \sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda^2 \cdot \left\{ \frac{\cos\delta - a}{\lambda} \cdot t_2 + \frac{\sin\delta}{\lambda} \cdot t_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \beta_{1c} \cdot \sin^2\psi + \frac{1}{2} \beta_{1s} (1 - \cos 2\psi) \right) - \frac{R \cdot P \cdot \sin\delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \frac{1}{2} \beta_0 \cdot \sin^2\psi - \Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4 \right\} \quad (1.57)$$

Wanneer de rotor 3 bladen telt vervallen de $\sin(2.\psi)$ -, $\cos(2.\psi)$ -termen. In het geval van 4 of meer bladen blijven alleen de constante termen over omdat in (1.55) de hoogste orde 3 is. Onder de aanname dat β klein is gaat (1.55) ongeacht het aantal bladen tenslotte over in:

$$C_D = \sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda^2 \cdot \left\{ \frac{\cos\delta - a}{\lambda} \cdot t_2 - \Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4 \right\} \quad (1.58)$$

en is de uitdrukking ψ -onafhankelijk geworden.

Gelijkstellen van vergelijking (1.52) en (1.58) geeft de gevraagde uitdrukking voor a:

$$4 \cdot a \cdot (\cos\delta - a) = \sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda \cdot t_2 \cdot \left\{ (\cos\delta - a) + \frac{\lambda}{t_2} \cdot (-\Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4) \right\} \quad (1.59)$$

oftewel

$$a = \frac{\sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda \cdot t_2}{4} \cdot \left\{ 1 + \frac{\lambda}{t_2 \cdot (\cos\delta - a)} \cdot (-\Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4) \right\} \\ = \frac{\sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda \cdot t_2}{4} \cdot \left\{ 1 + \frac{\lambda}{t_2 \cdot \cos\delta} \cdot (-\Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4) \right\} \quad (1.60)$$

Indien de bladparameters vastliggen, geeft (1.60) het verband weer tussen de inductiefactor a en de snellopendheid λ . Omdat er uitgegaan wordt van reële bladen (met lineaire in plaats van ideale twist en koorde) zal de met (1.60) berekende waarde voor a, voor elke waarde van λ , lager zijn dan de theoretische optimale waarde (energetisch gezien) van 1/3.

Zonder de gedane benaderingen in de vergelijkingen (1.52) en (1.60)

wordt er een 4^e-graads vergelijking in a verkregen:

$$16 \cdot a^2 \cdot (1 - 2 \cdot a \cdot \cos \delta + a^2) = \left[\sigma \cdot (L \cdot \lambda \cdot t_2 \cdot \left\{ (\cos \delta - a) + \frac{\lambda}{t_2} \cdot (-\theta_1 \cdot t_3 + \theta_0 \cdot t_4) \right\} \right]^2 \quad (1.61)$$

Deze vergelijking kan bijvoorbeeld via successieve substitutie opgelost worden. Uit berekeningen blijkt dat de met (1.60) gemaakte fout, voor de in (1.45) voorkomende factor $(\cos \delta - a)$, minder dan 6% bedraagt (zie tabel 2.3 in hoofdstuk 2).

Met (1.45) en (1.60) zijn nu de vergelijkingen bepaald die het klapedrag beschrijven. In het volgende hoofdstuk zullen de vergelijkingen opgelost worden (voor wat betreft het stationaire gedeelte).

HOOFDSTUK 2: DE KLAPBEWEGING

2.1 De algemene oplossing

In deze paragraaf wordt de stationaire oplossing (het aanloopgedrag volgens §1.4 wordt verondersteld uitgedempt te zijn) bepaald van de bewegingsvergelijking in klapproductie (1.45). Uit deze differentiaalvergelijking blijkt dat het klappend blad bij benadering een 2^e orde systeem is. (Zonder de ψ -afhankelijkheid in de coëfficiënt voor de β -term in (1.45), ten gevolge van gravitatie, scheve aanstroming en windgradiënt, is de bewegingsvergelijking precies een 2^e orde systeem (1.29)). Deze constatering is belangrijk aangezien van een 2^e orde systeem zo'n beetje alles bekend is (systeemtheorie) en bovendien is het gedrag van een 2^e orde systeem vrij aanschouwelijk. Hier komen we in §2.4 uitgebreid op terug.

Op dit moment maken we alleen gebruik van de volgende eigenschap van een 2^e orde systeem. Bij excitaties met frequenties Ω , 2Ω , 3Ω ... (1^e en hogere harmonische) zal indien Ω ongeveer gelijk is aan de eigenfrequentie ω_b van het 2^e orde systeem, de responsie van de hogere harmonische te verwaarlozen zijn ten opzichte van de responsie op de 1^e harmonische. Omdat (1.45) zoveel op een 2^e orde systeem lijkt nemen we nu zonder bewijs aan dat ook in dit geval de hogere harmonische te verwaarlozen zijn; en dat de klapproductie snel is uitgedempt. Een verdere rechtvaardiging van deze benadering is dat ook in de helicopterliteratuur ([9], blz. 55) deze benadering gehanteerd wordt op grond van computerberekeningen.

Voor het klappend blad betekent dit dat we ons kunnen beperken tot 1^e harmonische van Ω , de zogenaamde 1-P (periodieke) excitaties, in het totale uitwendige moment waaraan het blad blootstaat. De in het vorige hoofdstuk behandelde excitaties windgradiënt en kruien zijn 1-P excitaties. Hogere harmonische in M_a ten gevolge van gravitatie en scheve aanstroming (zie (1.45)) en eventuele snelle windfluctuaties ten gevolge van turbulentie kunnen weggelaten worden. Ook de responsie β blijft nu beperkt tot de 1^e harmonische in ψ zodat het afbreken van de Fourier reeks volgens (1.10) geoorloofd is.

De gevraagde oplossing van (1.45) wordt nu vrij gemakkelijk verkregen via het invullen van uitdrukking (1.10) voor β in de differentiaalvergelijking (1.45); waarna de verschillende termen (constante, $\cos\psi$ - en $\sin\psi$ -term) links en rechts van het gelijkteken aan elkaar gelijkgesteld worden. Hierbij dient weer gebruik gemaakt te worden van de gonioformules (1.56) en 2^e en hogere harmonische worden weggelaten. De zo verkregen vergelijkingen voor de klaphoeken kunnen in vectorvorm overzichtelijk worden weergegeven:

$$\begin{bmatrix} A_2 & \frac{1}{2}A_3 & \frac{1}{2}A_4 \\ A_3 & A_2-1 & A_1+\frac{1}{4}A_5 \\ A_4 & -A_1+\frac{1}{4}A_5 & A_2-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{bmatrix}$$

MET DE COËFFICIËNTEN :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\lambda}{2} \cdot t_4 && \text{(AERODYNAMISCHE DEMPING)} \\ A_2 &= 1 + \epsilon + \frac{\kappa}{I \cdot \Omega^2} && \text{(CENTRIFUGAAL- EN VEERTERM)} \\ A_3 &= x_g \cdot R \cdot m_b \cdot g / (I \cdot \Omega^2) && \text{(GRAVITATIE)} \\ A_4 &= -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{v \sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 && \text{(SCHEVE AANSTROMING)} \\ A_5 &= \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot v \sin \delta}{\lambda} \cdot t_4 && \text{(WINDGRADIËNT + SCHEVE AANSTROMING)} \\ A_6 &= \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{\cos \delta - \epsilon}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_1 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) && \text{(RECHTE/SCHEVE AANSTROMING)} \\ A_7 &= -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot \cos \delta}{\lambda} \cdot t_4 - (2 + \epsilon) \tilde{q} && \text{(WINDGRADIËNT EN KRUIEN- GYROSCOPISCH EFFECT)} \\ A_8 &= -\frac{\lambda}{2} \cdot t_4 \cdot \tilde{q} && \text{(KRUIEN- SCHÛNBARE WIND)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Voor het overzicht worden ook de al bekende constanten weer vermeld:

$$\begin{cases} m_b = R \cdot \int_0^{(1-e)} \mu dx \\ x_g = \frac{R}{m_b} \cdot \int_0^{(1-e)} \mu \cdot x dx \\ I = R^3 \cdot \int_0^{(1-e)} \mu \cdot x^2 dx \\ \text{(MET } \mu = \frac{dm}{dx}) \end{cases} \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{\rho \cdot C_L \alpha \cdot C_2 \cdot R^4}{I} \\ \epsilon &= \frac{m_b \cdot e \cdot x_g \cdot R^2}{I} \\ \lambda &= \frac{\Omega \cdot R}{u} \end{aligned} \quad \begin{aligned} t_n &= \frac{1}{n} - \frac{6/c_2}{n+1} \\ \tilde{\omega}_b^2 &= (1 + \epsilon + \frac{\kappa}{I \cdot \Omega^2}) \end{aligned}$$

De benodigde axiale inductiefactor a kan bepaald worden met (1.60):

$$a = \frac{\sigma \cdot C_L \alpha \cdot \lambda \cdot t_2}{4} \cdot \left\{ 1 + \frac{\lambda}{t_2 \cdot \cos \delta} \cdot (-\Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4) \right\} \quad (2.2)$$

MET $\sigma = \frac{N \cdot C_1}{\pi \cdot R}$

De algemene oplossing van de klapbeweging wordt nu gevonden door de regel van Cramer toe te passen op (2.1):

$$\beta_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A_6 & \frac{1}{2}A_3 & \frac{1}{2}A_4 \\ A_7 & A_2-1 & A_1+\frac{1}{4}A_5 \\ A_8 & -A_1+\frac{1}{4}A_5 & A_2-1 \end{vmatrix} \quad \text{EN} \quad \beta_{1c} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A_2 & A_6 & \frac{1}{2}A_4 \\ A_3 & A_7 & A_1+\frac{1}{4}A_5 \\ A_4 & A_8 & A_2-1 \end{vmatrix}$$

$$\text{EN} \quad \beta_{1s} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A_2 & \frac{1}{2}A_3 & A_6 \\ A_3 & A_2-1 & A_7 \\ A_4 & -A_1+\frac{1}{4}A_5 & A_8 \end{vmatrix} \quad \text{MET} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_2 & \frac{1}{2}A_3 & \frac{1}{2}A_4 \\ A_3 & A_2-1 & A_1+\frac{1}{4}A_5 \\ A_4 & -A_1+\frac{1}{4}A_5 & A_2-1 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Uitgeschreven krijgen we voor de determinant:

$$\Delta = A_2 \cdot \left\{ (A_2-1)^2 + A_1^2 - \frac{1}{16}A_5^2 \right\} + \frac{1}{4}A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 - \frac{1}{2}(A_2-1) \cdot (A_3^2 + A_4^2)$$

Uitdrukking (2.3) beschrijft dus het stationaire gedrag van het blad, wanneer de inschakelverschijnselen zijn uitgestorven. Het klapedrag voor een willekeurige windturbine kan nu verkregen worden door de uitdrukkingen (2.3) uit te werken. Tevens kan de invloed van een gegeven variabele nagegaan worden door de klaphoeken uit te zetten tegen bijvoorbeeld U , δ en q met als parameters c , Θ , m_b , K enzovoorts. Om meer inzicht te krijgen in het klapedrag zullen in de volgende paragraaf de klaphoeken afgeleid worden onder één bepaalde belasting. In §2.6 zal, als voorbeeld, van een tweetal denkbeeldige windturbines de klaphoeken berekend worden zodat er een idee ontstaat omtrent de grootte van de klaphoeken onder de verschillende excitaties.

2.2 De klaphoeken bij één bepaalde belasting

In deze paragraaf worden de klaphoeken gegeven als het blad naast de rechte aanstroming slechts één bepaalde belasting ondergaat. Achtereenvolgens zullen de volgende belastingen aan bod komen: geen

extra belasting (dus alleen rechte aanstroming), gravitatie, windgradiënt, scheve aanstroming en tenslotte het kruien.

2.2.1 Alleen rechte aanstroming

In dit geval vereenvoudigt vergelijking (2.1) tot:

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2-1} & A_1 \\ 0 & -A_1 & A_{2-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\text{NET } \tilde{A}_6 = \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{1-a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_r \cdot t_4 + \Theta_o \cdot t_5 \right)$$

Uitwerken levert de gevraagde uitdrukkingen voor de klaphoeken op:

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{\frac{k}{2} \cdot \left(\frac{1-a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_r \cdot t_4 + \Theta_o \cdot t_5 \right)}{1 + \varepsilon + \frac{K}{\Gamma \Omega^2}} \\ \beta_{1c} = 0 \\ \beta_{1s} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Onder invloed van rechte aanstroming zal het blad dus een kegel beschrijven. Omdat χ redelijk schaalonafhankelijk is zal ook de klaphoek β_0 dat zijn. Zoals te verwachten valt neemt volgens (2.5) de kegelhoek af bij toenemende veerstijfheid K , toenemende bladhoek Θ_r (dit is afnemende lift), toenemende axiale inductiefactor a of toenemende snellopendheid λ (oftewel afnemende U). Ook de invloed van het getal van Lock wordt nu duidelijk. Als de bladen licht en lang zijn en tevens Cl_x groot, is χ groot (10 à 15) en is het blad aerodynamisch erg actief. Dat wil zeggen dat de kegelhoek relatief groot is en dat tevens de aerodynamische demping (1.29) sterk is; het blad zal de evenwichtstoestand erg snel bereiken. Voor zware, korte bladen is de waarde voor χ laag (4 à 8) en zal de kegelhoek relatief klein zijn evenals de demping.

2.2.2 De invloed van de gravitatie

De bewegingsvergelijking voor het blad wordt nu:

$$\begin{bmatrix} A_2 & \frac{1}{2}A_3 & 0 \\ A_3 & A_{2-1} & A_1 \\ 0 & -A_1 & A_{2-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

zodat

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{1-a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right\} \\ \beta_{1c} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{1-a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right) \cdot \left(\frac{x_g \cdot R \cdot m_b \cdot g}{I \cdot \Omega^2} \right) \\ \beta_{1s} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{1-a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot \frac{x_g \cdot R \cdot m_b \cdot g}{I \cdot \Omega^2} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{MET } \Delta = \left(1 + \varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right) \cdot \left(\frac{x_g \cdot R \cdot m_b \cdot g}{I \cdot \Omega^2} \right)^2$$

Ter controle: met $g=0 \text{ m/s}^2$ wordt (2.7) weer gelijk aan (2.5). Aan het einde van §1.4 is reeds vermeld dat door de gravitatieterm er instabiel gedrag kan optreden. Dit effect komt in vergelijking (2.7) tot uiting in het feit dat in theorie voor elke molen (met óf e óf K ongelijk nul) een Ω te vinden is waarbij de noemer (determinant Δ) nul wordt. Bij normale windturbines zal dit gebeuren buiten het werkgebied van de molen zodat normaal gesproken geen instabiliteiten zullen optreden. (Bij het opstarten zal de molen snel de kritische hoeksnelheid passeren, zodat ook dan de gravitatie invloed niet tot instabiel gedrag zal leiden).

Ten gevolge van de gravitatie zal de kegelhoek β_0 enigszins toenemen; tevens krijgen de cyclische kantelhoeken β_{1c} en β_{1s} een waarde. Beide kantelhoeken zijn negatief, evenredig met de bladmassa en klein ten opzichte van β_0 . De verhouding tussen zijwaarts en vóórover kantelen van het tipvlak ("scheefstand") is:

$$\frac{\beta_{1s}}{\beta_{1c}} = \frac{\frac{k}{2} \cdot t_4}{\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}} \quad (2.8)$$

Voor bladen met grote χ zal de kegel voornamelijk zijwaarts kantelen; bij kleine χ voornamelijk achterover. Als zowel de veerstijfheid K als de excentriciteit e gelijk aan nul is, zal β_{1c} nul worden, zodat de bladkegel zuiver zijwaarts kantelt. Wanneer de veerstijfheid erg groot is, zal β_{1s} naar nul naderen en kantelt de kegel hoofdzakelijk achterover.

2.2.3 De invloed van de windgradiënt

Als er sprake is van een windgradiënt verandert (2.1) in:

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2-1} & A_1 \\ 0 & -A_1 & A_{2-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_6 \\ \tilde{A}_7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\text{MET } \tilde{A}_7 = -\frac{\chi}{2} \cdot \frac{R \cdot R}{\lambda} \cdot t_4$$

zodat

$$\begin{cases} \beta_{1c} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\chi}{2} \cdot \left(\frac{1-a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{K}{I \cdot R^2} \right)^2 + \left(\frac{\chi}{2} t_4 \right)^2 \right\} \\ \beta_{1s} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\chi}{2} \cdot \left(1 + \varepsilon + \frac{K}{I \cdot R^2} \right) \cdot \left(\varepsilon + \frac{K}{I \cdot R^2} \right) \cdot \frac{R \cdot R}{\lambda} \cdot t_4 \\ \beta_{1s} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\chi}{2} \cdot \left(1 + \varepsilon + \frac{K}{I \cdot R^2} \right) \cdot \frac{\chi}{2} \cdot t_4 \cdot \frac{R \cdot R}{\lambda} \cdot t_4 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{MET } \Delta = \left(1 + \varepsilon + \frac{K}{I \cdot R^2} \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{K}{I \cdot R^2} \right)^2 + \left(\frac{\chi}{2} t_4 \right)^2 \right\}$$

Ten opzichte van alleen rechte aanstroming verandert β_0 niet; het effect van de windgradiënt wordt dus uitgemiddeld over het rotoroppervlak.

De beide cyclische kantelhoeken zijn weer negatief en evenredig met de windgradiëntcoëfficiënt k . De verhouding tussen de twee cyclische hoeken is identiek aan (2.8); de windgradiëntbelasting bevat immers ook een $\cos\psi$ -afhankelijkheid (1.45):

(2.11)

$$M_e - \text{WINDGRADIËNT} = -\frac{\chi}{2} \cdot I \cdot R^2 \cdot \frac{R \cdot R}{\lambda} \cdot t_4 \cdot \cos\psi$$

Wanneer $K=e=0$ zal de rotor onder invloed van de windgradiënt zuiver zijwaarts kantelen ($\beta_{1c}=0$). Dit effect is te verklaren door de rotor op te vatten als een gyroscoop (zie ook figuur 1.10): de windgradiënt kan gezien worden als een krachtmoment γ in de X_1 -richting. Dit heeft tot gevolg dat het impulsmoment verandert volgens (1.26) en de rotor draait zijwaarts naar links.

2.2.4 De invloed van scheve aanstroming

In geval dat de windturbine scheef wordt aangestroomd geldt er:

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 & \frac{1}{2}A_4 \\ 0 & A_{2-1} & A_1 \\ A_4 & -A_1 & A_{2-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

en de klaphoeken worden nu:

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{\cos\delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_1 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right\} \\ \beta_{1c} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{\cos\delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_1 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\sin\delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \frac{k}{2} \cdot t_4 \\ \beta_{1s} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{\cos\delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_1 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\sin\delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\text{MET } \Delta = \left(1 + \varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot \frac{\sin\delta}{\lambda} \cdot t_3 \right)^2$$

Onder invloed van scheve aanstroming zal de kegelhoek β_0 afnemen omdat de windsnelheidscomponent loodrecht op het rotervlak $U \cdot (\cos\delta - a)$ afneemt. Daarnaast zal tengevolge van de scheve aanstroming de determinant Δ afnemen en dus β_0 toenemen; dit tweede effect is echter in het algemeen vrij klein en te verwaarlozen ten opzichte van het eerste.

De beide cyclische hoeken zijn evenredig met $\sin\delta$ en klein ten opzichte van β_0 . De verhouding tussen de twee is nu, op het teken na, precies het omgekeerde van (2.8):

$$\frac{\beta_{1s}}{\beta_{1c}} = - \frac{\left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right)}{\frac{k}{2} \cdot t_4} \quad (2.14)$$

Dit komt omdat de excitatie in plaats van een $\cos\psi$ een $\sin\psi$ term bevat (1.45):

$$M_e - \text{SCHEVE AANSTROMING} = \frac{k}{2} \cdot I \cdot r^2 \cdot \frac{\sin\delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \beta \cdot \sin\psi \quad (2.15)$$

Gezien het feit dat β_{1s} positief is heeft het tipvlak de neiging om met de wind mee te draaien.

Als de scheve aanstromingshoek δ langzaam verandert kan toch gebruik gemaakt worden van vergelijking (2.14), waarin voor δ de tijdafhankelijke uitdrukking ingevuld kan worden (quasi-stationaire benadering).

2.2.5 De invloed van de kruibeweging

2.2.5.1 Kruien zonder scheve aanstroming

Als laatste belasting wordt het kruien om de Z_1 -as behandeld:

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2-1 & A_1 \\ 0 & -A_1 & A_2-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{0s} \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_6 \\ \bar{A}_7 \\ A_8 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{MET } \bar{A}_7 = -(2+\varepsilon) \cdot \hat{q}$$

en

$$\begin{cases} \beta_{0s} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{1-a}{\lambda} t_3 - \Theta_2 t_4 + \Theta_0 t_5 \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right\} \\ \beta_{1c} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(1 + \varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \cdot \left\{ - \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \cdot (2 + \varepsilon) \cdot \hat{q} + \frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot \hat{q} - \frac{k}{2} \cdot t_4 \right\} \\ \beta_{1s} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \left(1 + \varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \cdot \frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot \hat{q} + (2 + \varepsilon) \cdot \hat{q} \cdot \frac{k}{2} \cdot t_4 \right\} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\text{MET } \Delta = \left(1 + \varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right) \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot r^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right\}$$

De kegelhoek β_0 verandert niet door de kruibeweging omdat aangenomen is dat de ongestoorde windsnelheid met het kruien meedraait en dus steeds loodrecht op het rotorvlak blijft staan ($\delta=0$).

De cyclische klaphoeken zijn evenredig met q en kunnen vrij groot worden (zelfs groter kan β_0 voor molens die zijn uitgerust met een vaanmechanisme, zodat kruisnelheden bereikt kunnen worden tot ongeveer 1/2 rad/s). De maximale klaphoeken en dus ook bladwortelmomenten (zie §3.1) kunnen tijdens het kruien verwacht worden. De uitdrukking voor de verhouding tussen β_{1s} en β_{1c} wordt nu wat ingewikkelder:

$$\frac{\beta_{1s}}{\beta_{1c}} = \frac{-\frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot \left\{ \left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right) + (2 + \varepsilon) \right\}}{-\left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right) \cdot (2 + \varepsilon) + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2} \quad (2.18)$$

Dit komt omdat de kruibeweging zowel zorgt voor een gyroscopisch moment alsook een bijdrage levert aan de schijnbare wind. Als beide effecten gescheiden worden, worden weer de bekende uitdrukkingen verkregen:

$$\frac{\beta_{1s}}{\beta_{1c}} = \frac{\frac{k}{2} \cdot t_4}{\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}} \quad \text{TEN GEVOLGE VAN HET GYROSCOPISCH EFFECT} \quad (2.19)$$

$$\frac{\beta_{1s}}{\beta_{1c}} = \frac{-\left(\varepsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} \right)}{\frac{k}{2} \cdot t_4} \quad \text{TEN GEVOLGE VAN DE SCHIJNBARE WIND} \quad (2.20)$$

Vergelijking (2.19) komt overeen met (2.8) omdat in de uitdrukking voor het gyroscopisch moment een $\cos\psi$ term voorkomt (1.20):

$$M_e - \text{GYROSCOPISCH EFFECT} = -(2 + \varepsilon) \cdot I \cdot \dot{\gamma} \cdot \Omega^2 \cdot \cos\psi \quad (2.21)$$

Vergelijking (2.20) is identiek aan (2.14) omdat in de uitdrukking voor de schijnbare wind ten gevolge van het kruien een $\sin\psi$ term zit (1.45):

$$M_e - \text{SCHIJNBARE WIND} = -\frac{k}{2} \cdot t_y \cdot I \cdot \hat{j} \cdot \Omega^2 \cdot \sin \psi \quad (2.22)$$

2.2.5.2 Kruien met scheve aanstroming

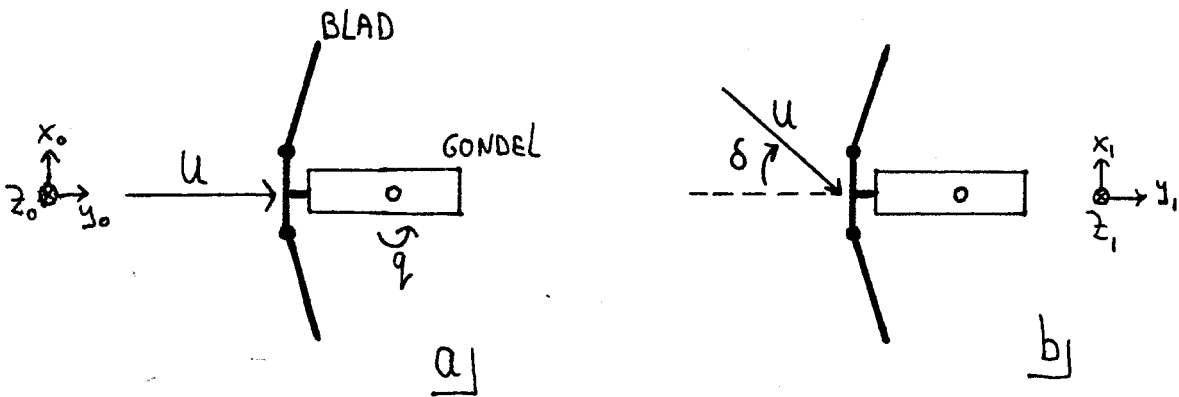
In dit geval verandert de windrichting niet ten opzichte van de aarde. In het model kan dit effect verdisconteerd worden via een scheve aanstroming:

$$\delta = -q \cdot t \quad (2.23)$$

ten opzichte van de gondel (zie figuur 2.1). (Een en ander zou ook formeel behandeld kunnen worden via een coördinatentransformatie van aarde naar gondel, analoog aan (1.11) en (1.12)). Aangezien de kruisnelheid q klein is ten opzichte van de rotorhoeksnelheid Ω kan de klapbeweging quasistationair opgevat worden. Er wordt dus verondersteld dat op elk tijdstip het blad zich in een evenwichtstoestand bevindt zodat voor de berekeningen van een bepaalde scheve aanstromingshoek δ uitgegaan kan worden. In de zo verkregen formules dient dan δ vervangen te worden door $-q \cdot t$. Onder invloed van zowel de kruibeweging als de scheve aanstroming wordt (2.1) nu:

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 & \frac{1}{2}A_4 \\ 0 & A_2^{-1} & A_1 \\ A_4 & -A_1 & A_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_6 \\ \tilde{A}_7 \\ A_8 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

BOVENAANZICHT



Figuur 2.1: De omzetting van de kruisbeweging q (figuur a) in een overeenkomstige scheve aanstroming δ (figuur b).

met oplossing:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{k}{2} \cdot \left(\frac{\cos \delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \left\{ \left(\epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \left\{ \frac{k}{2} \cdot (2 + \epsilon) \cdot \hat{q} + \frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot \hat{q} \cdot \left(\epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) \right\} \right] \right. \\
 \beta_{1c} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 + \epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) \cdot \left\{ -(2 + \epsilon) \cdot \hat{q} \cdot \left(\epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) + \frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot \hat{q} \cdot \frac{k}{2} \cdot t_4 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \left\{ \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{\cos \delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \frac{k}{2} \cdot t_4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot (2 + \epsilon) \cdot \hat{q} \right\} \right] \\
 \beta_{1s} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 + \epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) \cdot \left\{ -\frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot \hat{q} \cdot \left(\epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) - \frac{k}{2} \cdot t_4 \cdot (2 + \epsilon) \cdot \hat{q} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{\cos \delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) \cdot \left(\epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) \right] \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

MET $\Delta = \left(1 + \epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) \cdot \left\{ \left(\epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4 \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \left(\epsilon + \frac{k}{I \cdot R^2} \right) \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \right)^2$
 EN $\delta = -q \cdot t$

Oplossing (2.25) bestaat uit de oplossing voor alleen de scheve aanstroming (2.13) aangevuld met de extra termen ten gevolge van het kruien (2.17) plus twee extra termen, de zogenaamde koppelingstermen (koppeling tussen scheve aanstroming en kruien); de beide koppelingstermen zijn in (2.25) onderstreept. De koppelingstermen zijn meestal klein ten opzichte van de andere termen. Indien de kruisnelheid q groot is (ongeveer $1/2$ rad/s) zijn de kruitermen overheersend zodat β_{1c} en β_{1s} volgens (2.25) niet al te veel zullen afwijken van (2.17).

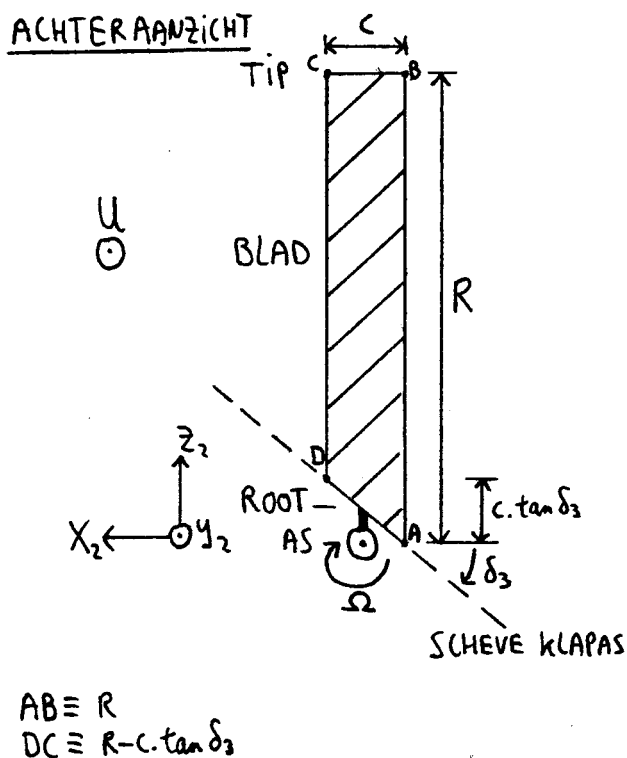
De kegelhoek β_0 wordt nu wel wat kleiner ten gevolge van de scheve aanstroming.

2.3 Het δ_3 -effect

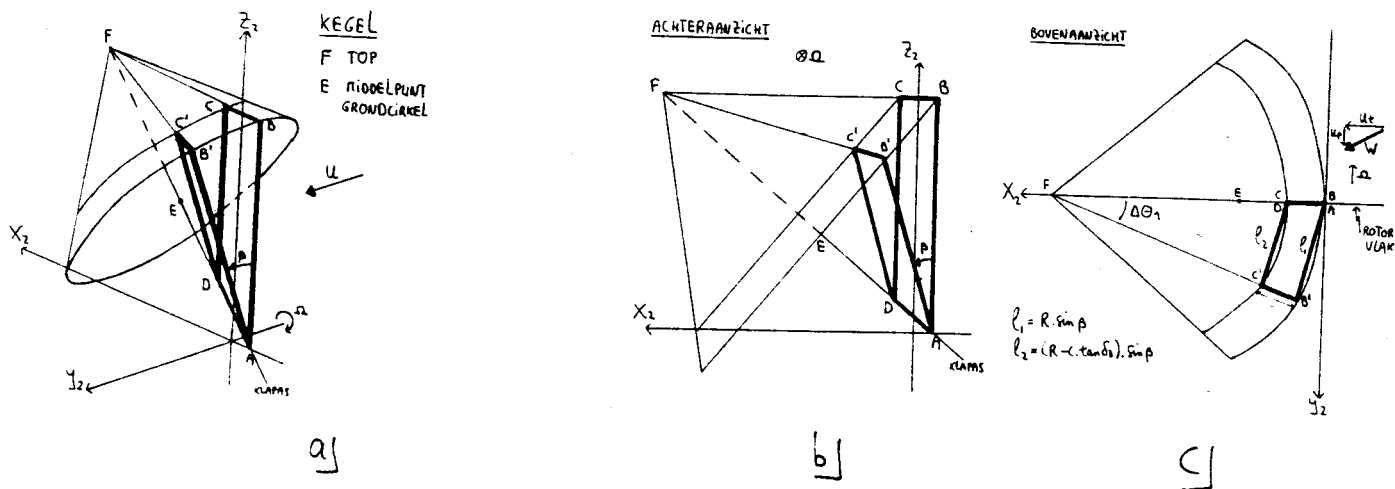
In §1.4 is gebleken dat de klapbeweging erg snel uitdempt. Hiervan kan gebruik gemaakt worden om een snelle regeling van de windturbine te verkrijgen via bladhoekverstelling. Daartoe wordt de bladhoek Θ_r afhankelijk gemaakt van de klaphoek β :

$$\Theta_r = \Theta_r(\beta) \quad \text{EEN STIJGENDE FUNCTIE VAN } \beta \quad (2.26)$$

Dit wordt het δ_3 -effect genoemd. Het doel van deze regeling is om het aandrijvend koppel (en dus ook de rotorsnelheid) zoveel mogelijk constant te houden. Bij windstoten zal β en dientengevolge ook Θ_r toenemen. Een grotere Θ_r betekent een kleinere α (zie figuur 1.6) en daardoor wordt de toename in de lift (ten gevolge van de vlaag) en aandrijvend koppel beperkt. Tevens wordt via de koppeling de maximale klaphoek (en het bladwortelmoment, zie §3.1) iets gereduceerd (zie vergelijking (2.46) volgende paragraaf). Het δ_3 -effect kan gerealiseerd worden via een stangenmechanisme; of met behulp van een flexibel bladwortelmoment met speciale buigeigenschappen; of door de klapas scheef te bevestigen (zie figuur 2.2). Uit figuur 2.3a tot en met 2.3c blijkt dat dan de tipkooorde BC over een kegelmantel beweegt in plaats van over een cilinderoppervlak. (Voor de eenvoud is in de figuur uitgegaan van $\Theta_0=0$ (constante bladhoek) en $\Theta_r=0$ voor $\beta=0$). Uit figuur 2.3c volgt nu de bladhoekverandering $\Delta\Theta_r$ ten



Figuur 2.2: Het δ_3 -mechanisme. (Voor de eenvoud is $\theta_r = \theta_0 = 0$ genomen).



Figuur 2.3: a) Ruimtelijke weergave van de klappbeweging om de scheve klapas ADEF (over klaphoek β). De koorde BC beweegt over de kegelmantel naar B'C'.
 b) Projectie op het X_2 - Z_2 vlak (rotorvlak). Het blad klapt uit het vlak van tekening naar voren toe.
 c) Projectie op het X_2 - Y_2 vlak.

gevolge van het δ_3 -mechanisme als functie van de klaphoek β :

$$C \cdot \Delta\theta_2 = l_1 - l_2 = C \cdot \tan \delta_3 \cdot \sin \beta \quad (2.27)$$

zodat voor kleine hoeken δ_3 van de scheve klapas geldt:

$$\theta_2 = \tilde{\theta}_2 + \delta_3 \cdot \beta$$

MET $\tilde{\theta}_2$ DE BLADHOEK VOOR $\beta=0$ ($\Delta\theta_2 = \theta_2 - \tilde{\theta}_2$) (2.28)
 EN δ_3 DE HOEK VAN DE SCHEVE KLAPAS

De invloed van het δ_3 -effect (in de uitvoering van een scheve klapas) op de klapbeweging kan gevonden worden door in de differentiaalvergelijking (1.45) voor de bladhoek uitdrukking (2.28) te nemen:

Tevens verandert a volgens (1.60) in:

$$a = \tilde{a} - \frac{\sigma \cdot C L \alpha \cdot \lambda^2 \cdot t_3}{4 \cdot \cos \delta} \cdot \delta_3 \cdot \beta \quad (2.29)$$

Zowel de bladhoek als de axiale inductiefactor zijn nu afhankelijk van de klaphoek. Voor de vergelijking in matrixvorm (2.1) betekent dit dat bij de factor A_2 de term

$$\gamma \cdot \delta_3 \cdot \left(\frac{t_4}{2} - \frac{\sigma \cdot C L \alpha \cdot \lambda \cdot t_3^2}{8 \cdot \cos \delta} \right)$$

opgeteld dient te worden. De bepaalde oplossingen in §2.2 voor de klaphoeken blijven geldig, als men in de resultaten bij A_2 dezelfde term optelt. Het δ_3 -mechanisme heeft op de klapbeweging dus hetzelfde effect als het vergroten van de veerstijfheid K (en/of excentriciteit e).

2.4 Het klappend blad als 2^e orde systeem

In §1.4 is het startgedrag van het scharnier-veer blad behandeld, er vanuit gaande dat het een 2^e orde systeem is; in deze paragraaf zullen we het stationair gedrag bepalen. Om te beginnen zal eerst een 2^e orde systeem in z'n algemeenheid beschouwd worden.

De vergelijking van een 2^e orde systeem kunnen we als volgt schrijven (zie figuur 2.4):

$$\ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + \omega_n^2 u = i$$

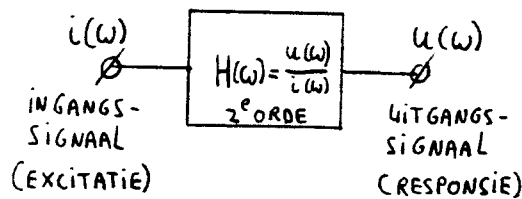
NET ζ DAMPINGSCOEFFICIENT

ω_n RESONANTIE FREQUENTIE

i INGANGS SIGNAAL (EXCITATIE)

u UITGANGS SIGNAAL (RESPONSIE)

(2.30)



Figuur 2.4: Een blokdiagram van een 2^e orde systeem.

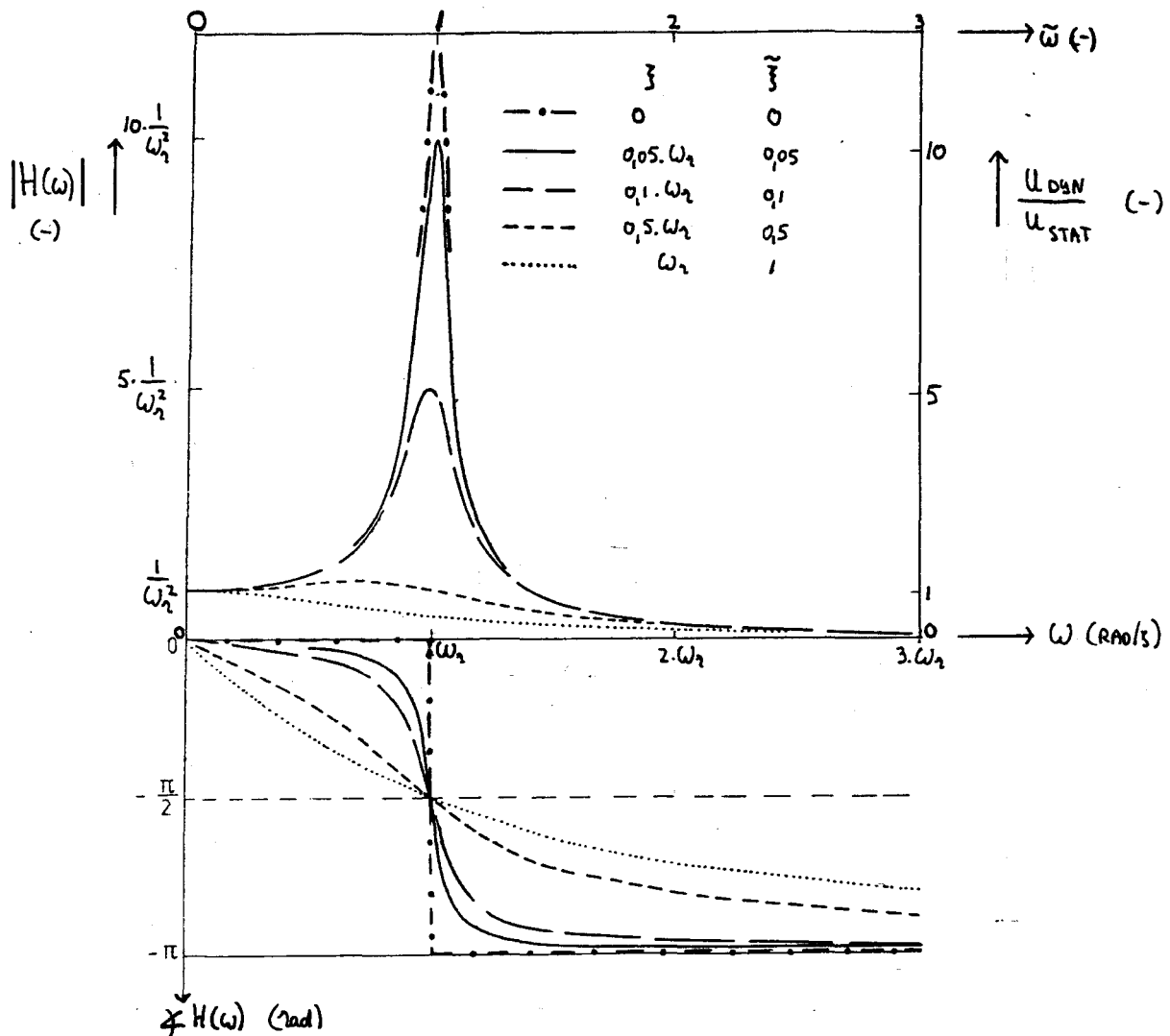
We willen nu de responsie u bepalen voor een periodiek ingangssignaal i met frequentie ω . (De responsiefrequentie is altijd gelijk aan de excitatiefrequentie). In de literatuur wordt deze weergegeven via de zogenaamde frequentieresponsie H (ookwel overdrachtsfunctie genoemd); dit is een complex getal dat de verhouding weergeeft tussen het uit- en ingangssignaal als functie van ω . Voor een 2^e orde systeem

geldt:
$$H(\omega) := \frac{u(\omega)}{i(\omega)} = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j \cdot 2\zeta \cdot \omega}$$

NET j HET IMAGINAIRE BASISGETAL

DUS AMPLITUDE
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \cdot \omega)^2}}$$
 (2.31)

EN FASEHOEK
$$\angle H(\omega) = \text{ARCTAN} \frac{2\zeta \cdot \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$



Figuur 2.5: a) De amplitude $|H(\omega)|$ en fase $\angle H(\omega)$ van de frequentieresponsie $H(\omega)$ van een 2^e orde systeem als functie van de frequentie ω (de assen links plus onder); met als parameter de dempingscoëfficiënt ζ .
 b) De verhouding tussen de dynamische en statische responsie U_{dyn}/U_{stat} van een 2^e orde systeem als functie van de dimensieloze frequentie $\tilde{\omega} = \omega/\omega_r$ (de assen rechts plus boven); met als parameter de dempingscoëfficiënt $\zeta = \zeta/\omega_r$.

Figuur 2.5a geeft H weer als functie van ω met als parameter ζ . De figuur laat zien dat voor $\omega=0$ (statische excitatie) de responsie u onafhankelijk is van de demping ζ . Voor $\omega \rightarrow \infty$ gaat de responsie van het 2^e orde systeem naar nul, weer ongeacht de demping. Voor $\omega = \omega_r$ is de excitatiefrequentie ω gelijk aan de eigenfrequentie van het systeem en treedt er resonantie op (indien er geen demping aanwezig is gaat $u \rightarrow \infty$). De responsie is het grootst bij de resonantiefrequentie indien $\zeta=0$; bij demping ($\zeta \neq 0$) treedt de maximale responsie op bij een (iets) lagere frequentie. Het faseverschil is wel altijd 90° in geval van resonantie (ongeacht de demping). (Bij $\zeta = \omega_r$ is er sprake van kritische demping, zie §1.3; ω_r is naast de resonantiefrequentie ook de frequentie van de vrije trilling, indien die ongedempt is (1.31)).

In de literatuur wordt ookwel in plaats van $H(\omega)$ de verhouding tussen de dynamische en statische responsie (respectievelijk $u_{dyn}=u(\omega)$ en $u_{stat}=u(0)$) weergegeven als functie van de dimensieloze frequentie $\tilde{\omega}$ (zie figuur 2.5b):

$$\frac{u_{dyn}}{u_{stat}} = \frac{i(\omega) \cdot H(\omega)}{i(0) \cdot H(0)} = \frac{1}{\frac{(\omega_r^2 - \omega^2) + j \cdot 2\zeta \cdot \omega}{\omega_r^2}} = \frac{1}{(1 - \tilde{\omega}^2) + j \cdot 2\tilde{\zeta} \cdot \tilde{\omega}}$$

MET $i(0) = i(\omega)$ (AFSPRAAK: AMPLITUDE VAN HET STATISCHE- EN (2.32)
 DYNAMISCHE INGANGSSIGNAAL ZIJN GELĪK)
 $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_r}$ DIMENSIELOZE FREQUENTIE
 $\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{\omega_r}$ DEMPINGS COEFFICIENT

Let op: Hier worden de frequenties dimensieloos gemaakt via deling door ω_r ; in de rest van het verslag gebeurt dat via deling door Ω (bijvoorbeeld $\hat{\omega}_b = \omega_b / \Omega$).

Uit figuur 2.5 volgt direct een belangrijke eigenschap van een 2^e orde systeem. Indien de excitatiefrequentie Ω in de buurt ligt van de resonantiefrequentie ω_r dan zal de responsie hierop vrij groot zijn. De responsie op eventuele hogere harmonische ($2 \cdot \Omega$, $3 \cdot \Omega$, $4 \cdot \Omega$ ) kunnen dan verwaarloosd worden. Van deze eigenschap is in §2.1 al gebruik gemaakt; er vanuit gaande dat voor het scharnier-veer blad geldt dat zowel de excentriciteitscoëfficiënt ϵ als de veerstijfheid $K/(I \cdot \Omega^2)$ orde grootte 0,1 zijn (in het werkgebied van de turbine) zodat $\omega_b \approx \Omega$ (1.29).

Na deze algemene uitwijding over 2^e orde systemen keren we terug naar het scharnier-veer blad. Indien de factor vóór de klaphoek β (de "veer" van het massa-veer-demper systeem) in (1.45) een constante is (en dus onafhankelijk van Ψ) is het scharnier-veer blad een 2^e orde systeem. Dit kan bereikt worden door de bij de azimuthafhankelijke termen, de klaphoek te benaderen met de constante kegelhoek β_0 :

$$\beta'' + 2\zeta \cdot \beta' + \omega_b^2 \cdot \beta = \frac{M_e}{I \cdot r^2}$$

MET $\zeta = \frac{\delta}{4} \cdot t_4$ DEMPINGS COEFFICIENT

$$\omega_b = \sqrt{1 + \epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}} \quad \text{EIGENFREQUENTIE (ONAFHANKELĪK VAN } \Psi) \quad (2.33)$$

β UITGANGSSIGNAAL (KLAPHOEK)

$\frac{M_e}{I \cdot r^2}$ INGANGSSIGNAAL MET FREQUENTIE $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\Omega}$

Voor het excitatiemoment geldt:

$$e(\hat{\omega}) = M_e(\omega) + M_e(1) \quad ; \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{\Omega} \text{ is RESPECTIEVELIJK } 0 \text{ EN } 1 \text{ (INNERS } \psi = \Omega \cdot t)$$

$$\text{NET } \frac{M_e(\omega)}{I \cdot \Omega^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \delta - a}{\lambda} t_3 - \Theta_2 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right)$$

$$\text{EN } \frac{M_e(1)}{I \cdot \Omega^2} = \cos \psi \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{R \cdot k \cdot \cos \delta}{\lambda} \cdot t_4 - (2 + \epsilon) \frac{1}{2} - \frac{x_g \cdot R \cdot m \cdot g}{I \cdot \Omega^2} \cdot \beta_0 \right\} \quad (2.34)$$

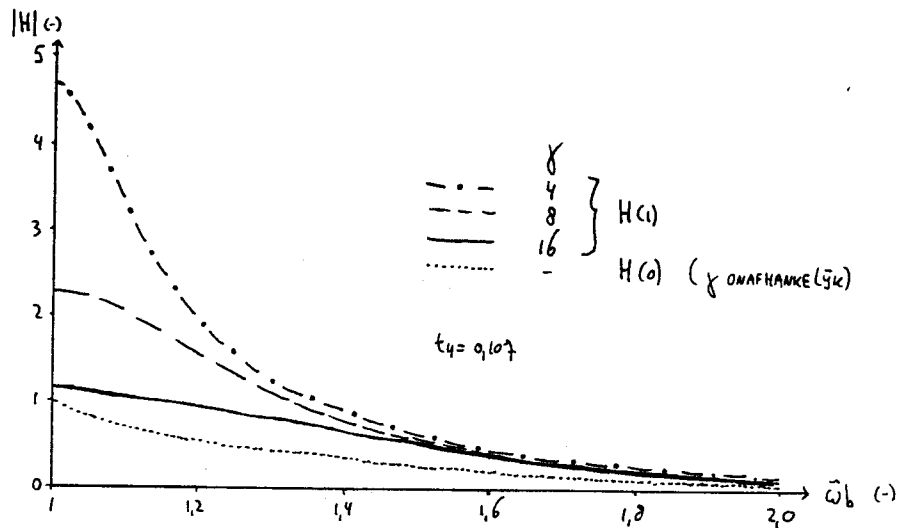
$$+ \sin \psi \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t_4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \beta_0 \right\}$$

(DE 2^e HARMONISCHE IN M_e IS WEGGELATEN)

Deze verdere benadering waarmee de bewegingsvergelijking herleid wordt tot een 2^e orde systeem maken we met het doel om te laten zien dat dan de klaphoeken vrij eenvoudig bepaald kunnen worden, met behulp van de frequentieresponsie van een 2^e orde systeem. Bovendien maken we later nog gebruik van de aanschouwelijkheid van een 2^e orde systeem om enkele aspecten van het klagedrag van het scharnier-veer blad nader te bekijken.

Het bijzondere van het scharnier-veer blad is dat de excitatie M_e volgens (2.34) bestaat uit slechts twee frequenties namelijk: $\hat{\omega} = 0$ en $\hat{\omega} = 1$ (respectievelijk de constante term en de $\sin \psi$ -, $\cos \psi$ -term in (2.34), met $\psi = \Omega \cdot t$). Belangrijker is dat bovendien de eigenfrequentie ω_b van het blad nog een functie van Ω is. Bij het gebruik van figuur 2.5a betekent dit dat bij variatie in Ω de positie van $\omega_r = \omega_b$ in het H- ω plaatje meeverandert (evenals het snijpunt met de verticale as $1/\omega_r^2$); ook het aflezen van de verhouding u_{dyn}/u_{stat} (figuur 2.5b) is lastig gezien het feit dat de demping $\tilde{\zeta}$ via ω_b afhankelijk is van Ω . Het is daarom handiger om nu H weer te geven als functie van $\hat{\omega}_b$ voor de twee gevallen $\hat{\omega} = 0$ en $\hat{\omega} = 1$ (zie figuur 2.6); met behulp van (2.31) volgt:

$$|H(0)| = \frac{1}{\omega_b^2} = \frac{1}{1 + \epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}} \quad \text{EN } \nabla H(0) = 0 \quad (2.35)$$



Figuur 2.6: De amplitude $|H(0)|$ (statisch) en $|H(1)|$ (dynamisch) van het scharnier-veer blad als functie van de eigenfrequentie van het blad $\omega_b = \sqrt{(1 + \xi + K/(I \cdot \Omega^2))}$; met als parameter het getal van Lock γ .

$$\left\{ \begin{aligned} |H(1)| &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_b^2 - 1)^2 + (2.3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\xi + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{2} \cdot t_4\right)^2}} \\ \gamma H(1) &= \text{ARCTAN} \frac{-2.3}{\omega_b^2 - 1} = \text{ARCTAN} \frac{-\frac{\xi}{2} \cdot t_4}{\xi + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}} \end{aligned} \right. \quad (2.36)$$

Deze beide formules geven het klappedrag weer als functie van enkele molenparameters en van de rotorhoeksnelheid. Het 2^e orde gedrag van het scharnier-veer blad komt duidelijk naar voren in de situatie van resonantie. Dit is het geval wanneer $\omega_b = \Omega$ dus als $K = e = 0$ volgens (2.33). De responsie β zal dan 90° in fase achterlopen bij de excitatie M_e . In het geval van een windgradiënt bezit de excitatie een $\cos\psi$ -term (2.11) zodat de responsie dan een sinus zal zijn ($\beta_{1c} = 0$). Oftewel onder invloed van een (verticale) windgradiënt kantelt de rotor zijwaarts (naar links) in plaats van achterover! Als K en/of e ongelijk nul is, treedt er geen resonanties meer op ($\omega_b > \Omega$) en wordt het faseverschil kleiner dan 90° (figuur 2.5); de grootte van de klaphoek is af te leiden uit figuur 2.6.

Voor het bepalen van de klaphoeken β_0 , β_{1c} en β_{1s} herschrijven we de klaphoek (1.10):

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cdot \cos \psi + \beta_{1s} \cdot \sin \psi = \beta_0 + \beta_d(\psi) \quad (2.37)$$

MET $\beta_d(\psi) = \sqrt{\beta_{1c}^2 + \beta_{1s}^2} \cdot \cos(\psi + \phi_1)$ DYNAMISCHE KLAPHOEK
 EN $\phi_1 = \text{ARCTAN} -\frac{\beta_{1s}}{\beta_{1c}}$ FASE

of

$$\beta_d(\psi) = \sqrt{\beta_{1c}^2 + \beta_{1s}^2} \cdot \sin(\psi + \phi_2) \quad (2.38)$$

MET $\phi_2 = \text{ARCTAN} \frac{\beta_{1c}}{\beta_{1s}}$

$|\beta_d|$ is dus de amplitude van de klaphoek.

De azimuthonafhankelijke klaphoek β_0 is de statische responsie en kan met behulp van (2.34) en (2.35) meteen opgeschreven worden:

$$\beta_0 = \beta(0) = |H(0)| \cdot \frac{\pi_e(0)}{I \cdot \omega^2} = \frac{1}{1 + \xi + \frac{k}{I \cdot \omega^2}} \cdot \frac{k}{2} \left(\frac{\cos \delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \theta_1 \cdot t_4 + \theta_0 \cdot t_5 \right) \quad (2.39)$$

overeenkomstig de uitdrukking voor β_0 uit §2.2.1.

De azimuthafhankelijke klaphoek oftewel de dynamische responsie β_d op de 1-P excitatie (1^e harmonische) is gelijk aan:

$$\left\{ \begin{aligned} |\beta_d| = |H(\omega)| &= \frac{|\pi_e(\omega)|}{I \cdot \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\xi + \frac{k}{I \cdot \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4\right)^2}} \cdot \frac{\pi_e(\omega)}{I \cdot \omega^2} \\ \angle \beta_d &= \angle \pi_e(\omega) + \angle H(\omega) = \angle \pi_e(\omega) + \text{ARCTAN} \frac{-\frac{k}{2} \cdot t_4}{\xi + \frac{k}{I \cdot \omega^2}} \end{aligned} \right. \quad (2.40)$$

MET $\pi_e(\omega)$ VOLGENS (2.34)

N.B.: 1) Via de benadering om tot een 2^e orde systeem te komen, is de periodieke excitatie uitgebreid met termen die afhangen van de grootte van de statische responsie β_0 .

2) Indien het getal van Lock toeneemt dan neemt ook de demping toe, en wordt $|H|$ dus kleiner. De responsie β_d kan echter toch

toenemen bij toenemende γ omdat de excitatie M_e volgens (2.34) afhankelijk is van γ .

Het scharnier-veer blad wordt door M_e geëxciteerd met een frequentie $\hat{\omega}=1$ die iets lager is dan de resonantiefrequentie $\hat{\omega}_b$. (Dit betekent zoals reeds eerder vermeld dat de responsies op hogere harmonische ($2.\Omega$, $3.\Omega\dots$) inderdaad verwaarloosd mogen worden). Indien $K=e=0$ (centraal klapscharnier zonder veer) is $\hat{\omega}_b=1$ en treedt er resonantie op; de responsie β zal 90° in fase achterlopen op de excitatie $M_e/(I.\Omega^2)$. De altijd aanwezige aerodynamische demping zorgt ervoor dat de klaphoeken dan niet ∞ -groot worden.

Nu β_a bekend is kunnen ook de klaphoekcoëfficiënten β_{1c} en β_{1s} bepaald worden. Indien van $M_e(1)$ alleen de $\cos\psi$ afhankelijkheid wordt beschouwd (windgradiënt, gyroscopisch effect en gravitatie) dan geldt volgens de faserelaties van (2.37) en (2.40) dat:

$$\phi_1 = \text{ARCTAN} \frac{-\frac{1}{2} \cdot t_4}{\xi + \frac{K}{I.\Omega^2}} \quad \text{FASE VAN } \beta_d(t)$$

$$\text{OF TEWEL} \quad \frac{\beta_{1s}}{\beta_{1c}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot t_4}{\xi + \frac{K}{I.\Omega^2}} \quad (2.41)$$

waaruit met (2.40) meteen volgt:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{1c} &= \frac{\xi + \frac{K}{I.\Omega^2}}{\left(\xi + \frac{K}{I.\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot t_4\right)^2} \cdot \frac{|M_e(1)|}{I.\Omega^2} \\ \beta_{1s} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot t_4}{\left(\xi + \frac{K}{I.\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot t_4\right)^2} \cdot \frac{|M_e(1)|}{I.\Omega^2} \end{aligned} \right. \quad (2.42)$$

Indien van $M_e(1)$ alleen de $\sin\psi$ -term wordt beschouwd (schijnbare wind ten gevolge van het kruien en scheve aanstroming) dan geldt er:

$$\frac{\beta_{1c}}{\beta_{1s}} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot t_4}{\xi + \frac{K}{I.\Omega^2}} \quad (2.43)$$

en

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{1c} &= \frac{-\frac{k}{2} \cdot t_4}{\left(\xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4\right)^2} \cdot \frac{|M_{e(\omega)}|}{I \cdot \Omega^2} \\ \beta_{1s} &= \frac{\xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}}{\left(\xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2} \cdot t_4\right)^2} \cdot \frac{|M_{e(\omega)}|}{I \cdot \Omega^2} \end{aligned} \right. \quad (2.44)$$

Rekening houdend met de gemaakte benaderingen om te komen tot een 2^e orde systeem komt de vergelijking (2.42) overeen met de al afgeleide uitdrukkingen (2.7), (2.10) en (2.17) (de laatste zonder het effect van de schijnbare wind). Uitdrukking (2.44) is gelijk aan (2.13) en (2.17) (de laatste nu zonder het gyroscopisch effect). Ook de verhouding tussen de klaphoeken β_{1c} en β_{1s} volgens (2.8) en (2.14) worden nu in een ander perspectief gesteld via respectievelijk (2.41) en (2.43).

Bij een combinatie van enkele excitaties kan de totale responsie eenvoudig gevonden worden via het optellen van de afzonderlijke responsies; een 2^e orde systeem is immers lineair.

De via het 2^e orde concept afgeleide uitdrukkingen voor de klaphoeken komen dus vrij goed overeen met de resultaten van §2.2. Het 2^e orde model is echter niet in staat om de zogenaamde koppelingstermen (zie §2.2.5.2) te voorspellen evenals het mogelijke instabiel gedrag ten gevolge van de gravitatieterm.

De behandeling van het klagedrag met het 2^e orde model heeft als voordeel dat ook excitaties met frequenties ongelijk aan de rotorhoeksnelheid beschouwd kunnen worden met behulp van (2.31). Indien bijvoorbeeld de scheve aanstromingshoek δ snel (ten opzichte van Ω) in de tijd verandert kan de excitatieterm volgens (2.34) via Fourieranalyse uitgesplitst worden in een aantal verschillende frequentiecomponenten. De responsie op elk van die componenten kan dan berekend worden met (2.31). Hetzelfde geldt voor een snel variërende kruisnelheid q of windsnelheid U (in (2.34) is U verwerkt via de snellopendheid $\lambda = \Omega \cdot R / U$).

N.B.: Indien q niet constant is dient ook de bewegingsvergelijking zelf (1.20) aangepast te worden.

Tot slot van deze paragraaf wordt het δ_3 -effect nader beschouwd. Door de koppeling van de bladhoek aan de klaphoek verandert de eigenfrequentie (deze is namelijk gelijk aan de factor A2 van (2.1); zie ook §2.3):

$$\hat{\omega}_b = \sqrt{1 + \epsilon + \frac{K}{I \cdot r^2} + \gamma \cdot \delta_3 \cdot \left(\frac{t_4}{2} - \frac{\sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda \cdot t_3^2}{8 \cdot \cos \delta} \right)} \quad (2.45)$$

Hierdoor verandert ook de responsie β_d in grootte en fase volgens (2.36) en (2.40). Indien er geen veer aanwezig is en tevens de excentriciteit gelijk aan nul is ($K=e=0$) geldt er volgens (2.40):

$$\beta_d = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{K}{2} \cdot t_4 \cdot \delta_3\right)^2 + \left(\frac{K}{2} \cdot t_4\right)^2}} \cdot \frac{|n_e|}{I \cdot r^2} \quad (2.46)$$

INDIEN $\frac{t_4}{2} \gg \frac{\sigma \cdot C_{L\alpha} \cdot \lambda \cdot t_3^2}{8 \cos \delta}$

Dat wil zeggen dat de grootte van de cyclische klaphoek β_d door het δ_3 -mechanisme gereduceerd wordt met een factor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \delta_3^2}}$$

;zodat blijkt dat het effect van het δ_3 -mechanisme, wat het klagedrag betreft, overeenkomt met een kleine vergroting van de veerstijfheid K . Het effect van het δ_3 -mechanisme op het aandrijvend moment (waar het oorspronkelijk voor bedoeld is) is wat groter (zie eventueel tabel 3.4 van het volgende hoofdstuk).

2.5 Het statisch en dynamisch evenwicht

Er weer van uitgaande dat het klappend blad een 2^e orde systeem is kunnen de uitdrukkingen voor de klaphoeken, uit de vorige paragrafen, ook opgevat worden als evenwichtsvergelijkingen. Bij het aanbrengen van een constante excitatie M_e zal het 2^e orde

systeem naar een nieuw evenwichtstoestand toegaan, waarbij er evenwicht is tussen de veerkracht en de belasting (statisch evenwicht). Bij een wisselende belasting M_e gelijk aan de eigenfrequentie van het systeem treedt er resonantie op. Er is dan evenwicht tussen de demping en de aangebrachte belasting (dynamisch evenwicht). Immers aangezien er sprake is van resonantie is de traagheidsterm gelijk aan de totale veerkracht:

$$\rho'' + \hat{\omega}^2 \rho = 0$$

zodat volgens (2.33) volgt:

$$2\beta \cdot \rho' = M_e / (I \cdot \Omega^2) \quad \text{MET } \beta = \frac{k}{c} \cdot t_4$$

Deze laatste uitdrukking geeft nogmaals het bekende faseverschil van 90° weer tussen excitatie M_e en responsie β (uitgaande dat M_e een sinusvorm bezit).

2.5.1 Het statisch evenwicht

Als er sprake is van rechte aanstroming zal de klaphoek β precies zo groot worden dat het aerodynamisch moment wordt gecompenseerd door het totale terugwerkende moment, ten gevolge van de veer- plus de centrifugaalkracht (waarbij de veerwerking van het centrifugaalmoment steeds groter wordt ten opzichte van die van de veer, bij toenemende Ω):

$$\beta \cdot \{ I \cdot \Omega^2 \cdot (1 + \varepsilon) + k \} = M_a$$

MET $M_a = M_e(\omega)$ VOLGENS (2.34) (2.47)

Deze vergelijking komt overeen met (2.5). Bij een windvlaag neemt M_a toe en zal ook β_0 toenemen totdat weer voldaan wordt aan (2.47). In het geval de windvlaag stapvormig is zal ten gevolge van de klapbeweging de lift (en daarmee ook het aandrijvend moment en bladwortelmoment) geleidelijker toenemen. Dit komt omdat de toename in de windsnelheid gedeeltelijk gecompenseerd wordt door de klapsnelheid (1.38), zodat ook de toename in de aanstroomhoek α vloeiender tot stand komt (de stapvorm wordt wat afgevlakt). Tijdens windvlagen wordt dus door de klapbeweging van het scharnierend blad de gewenste beperking van de momenten verkregen.

2.5.2 Het dynamisch evenwicht

In deze subparagraaf veronderstellen we dat voor het blad geldt dat $K=e=0$ zodat de eigenfrequentie ω_b gelijk is aan de rotorhoeksnelheid, en er dus resonantie optreedt. Een van de periodieke belastingen met frequentie Ω (1-P excitatie) is het gyroscopisch moment als gevolg van het kruien; in vergelijking (2.34) is dit de term $-2 \cdot \hat{q} \cdot \cos \psi$ ($\xi=0$). Dat deze excitatieterm inderdaad gelijk is aan de dempingsterm volgt meteen na het berekenen daarvan. De dempingsterm $1/2 \cdot \gamma \cdot t_4 \cdot \beta'$ wordt gevonden na substitutie van de klaphoeken β_{1c} en β_{1s} volgens (2.17) (met alleen de bijdrage ten gevolge van het gyroscopisch effect):

$$\beta_{1c}=0 \text{ en } \beta_{1s} = -2 \cdot \hat{q} / (\gamma / 2 \cdot t_4) \quad (\text{immers } K=\xi=0)$$

dus (1.10) $\beta' = -2 \cdot \hat{q} / (\gamma / 2 \cdot t_4) \cdot \cos \psi$

Analoog wordt in geval van gravitatie (2.7) gevonden:

$$\text{dempingsterm } 2 \cdot \beta' = 2 \cdot \beta_{1s} \cdot \cos \psi = -xg \cdot R \cdot mb \cdot g / (I \cdot \Omega^2) \cdot \cos \psi \cdot \beta_0$$

Dit is gelijk aan de excitatieterm volgens (2.34).

In de situatie dat de belasting aerodynamisch van aard is, komt het evenwicht tussen demping en excitatie er op neer dat moet gelden:

$$\Delta U - \text{EXCITATIE} = \beta \cdot s$$

$$\text{MET } \beta = \Omega \cdot (-\beta_{1c} \cdot \sin \psi + \beta_{1s} \cdot \cos \psi) \quad \text{VOLGENS (1.10)} \quad (2.48)$$

Oftewel de verandering in de windsnelheid ten gevolge van de excitatie wordt volkomen weggenomen door de klapbeweging van het blad (1.38). De klapvrijheid van het blad zorgt dus op een effectieve wijze ervoor dat het effect van een eventuele asymmetrische aanstroming (dat wil zeggen: de relatieve aanstroomsnelheid van het bladelement is afhankelijk van ψ) geëlimineerd wordt. Een voorbeeld hiervoor is de invloed van het kruien op de schijnbare wind (1.34):

$$\Delta U (\text{kruien}) = -q \cdot s \cdot \sin \psi$$

Uit (2.17) volgt voor de klaphoeken (waarbij het gyroscopisch effect is weggelaten):

$$\beta_{1c} = \hat{q} \text{ en } \beta_{1s} = 0 \quad (\text{wederom } K=\xi=0)$$

zodat aan (2.48) wordt voldaan.

In geval van een windgradiënt (2.10) krijgt men

$$\beta_{1c} = 0 \text{ en } \beta_{1s} = -R \cdot k / \lambda$$

in overeenstemming met (1.37):

$$\Delta U (\text{windgradiënt}) = -k \cdot s \cdot U \cdot \cos \psi \quad (\delta=0)$$

N.B.: Voor $\psi = \pi$ (windsnelheid het grootst) is niet de klaphoek maar juist de klapsnelheid $\dot{\beta}$ volgens (2.48) maximaal.

Bij scheve aanstroming zijn linker en rechterlid van (2.48) wat verschillend omdat dan over het blad geïntegreerd moet worden. Volgens (2.13) geldt

$$\beta_{1s} = 0 \text{ en } \beta_{1c} = -\sin \delta / \lambda \cdot t_3 / t_4 \beta_0$$

en (1.37)

$$\Delta U (\text{scheve aanstroming}) = U \cdot \beta_0 \cdot \sin \psi \cdot \sin \delta \quad (k=0)$$

waarbij β overeenkomstig (2.34) vervangen is door β_0 .

Concluderend kan gesteld worden dat vergelijking (2.48) aangeeft dat de aerodynamische demping in evenwicht is met de aerodynamische excitatie. Dit in tegenstelling tot (2.47) waarbij de extra aerodynamische belasting wordt opgevangen door de totale veerkracht. Vergelijking (2.48) kan ook nog op de volgende manier uitgelegd worden. De klapbeweging is zodanig dat het tipvlak precies zo schuin gaat staan, dat over de gehele rotorschijf de loodrechte windcomponent even groot is; en dus ook de axiale aerodynamische kracht, zodat er sprake is van een evenwichtssituatie.

Algemeen geldt dat men in constructies resonantie dient te vermijden. Echter in het geval van een klappend blad zorgt de resonantie er juist voor dat de excitatie opgevangen wordt en het bladwortelmoment (intern buigmoment bij bladwortel) beperkt blijft of zelfs volledig verdwijnt! (Zie ook §3.1).

2.6 De klaphoeken van een tweetal windturbines onder diverse condities

In deze paragraaf worden de klaphoeken berekend met behulp van de in dit hoofdstuk afgeleide formules voor twee denkbeeldige molens A (ϕ 25 m) en B (ϕ 10 m); waarbij molen A een relatief grote waarde voor het getal van Lock heeft ($\gamma=15$) en molen B een kleinere ($\gamma=8$). Zodoende kan er een indruk verkregen worden omtrent de grootte van de klaphoeken β_0 , β_{1c} en β_{1s} onder invloed van de verschillende excitaties.

2.6.1 Windturbine A

De benodigde parameters van windturbine A staan opgesomd in tabel 2.1. Voor de luchtdichtheid ρ en valversnelling g is genomen: $\rho=1,25 \text{ kg/m}^3$ en $g=9,81 \text{ m/s}^2$. Voor we ingaan op de klaphoeken

Tabel 2.1: De diverse parameters van windturbine A.

<u>rotorparameters</u>	<u>windparameters</u>	<u>afgeleide parameters</u>	
$N=2$	$U=13 \text{ m/s}$	$\lambda=8$	
$R=12,5 \text{ m}$	$U_{\text{storm}}=40 \text{ m/s}$	$\lambda_{\text{storm}}=2,6$	
$c_r=1,9 \text{ m}$	$k=9,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$	$\sigma=0,0968$	
$c_0=1,6 \text{ m}$	$\delta=30^\circ$	$\gamma=14,8$	
$\theta_r=12^\circ$		$t_2=0,219$	
$\theta_0=15^\circ$	<u>hoeksnelheden</u>	$t_3=0,123$	
$m_b=570 \text{ kg}$	$\Omega=8,32 \text{ rad/s}$	$t_4=0,0816$	
$x_g=0,2$	$\hat{q}=4,2 \cdot 10^{-4}$	$t_5=0,0596$	
$I=2,2 \cdot 10^4 \text{ N.m.s}^2$			
$Cl_{\alpha}=5,6 \text{ rad}^{-1}$			
<u>bladophanging</u>	<u>K (N.m/rad)</u>	<u>e</u>	<u>ξ</u>
A1) normaal	$1,4 \cdot 10^7$	0,25	0,202
A2) scharnier+veer	10^8	0,2	0,162
A3) alleen scharnier	0	0	0

$\delta_3=30^\circ$ (indien aanwezig)

plaatsen we eerst enkele opmerkingen bij de molenparameters. Deze komen grotendeels overeen met die voor de 25m HAT te Petten (zie bijvoorbeeld [9]). Verder kan voor enkele parameters nog het volgende vermeld worden:

- Ω : dit is de hoeksnelheid bij de optimale snellopendheid $\lambda=8$
- Cl_α : deze volgt uit de $Cl-\alpha$ kromme voor een NACA 23012 profiel
- K en e : voor het bepalen van de veerstijfheid en excentriciteit wordt alvast gebruik gemaakt van een resultaat uit §4.7. Hierin wordt aangetoond dat het gedrag van een flexibel blad (dat wil zeggen zonder scharnier en veer, en niet ∞ -stijf) beschreven kan worden met een overeenkomstig scharnier-veer blad, waarvoor bewegingsvergelijking (2.1) met oplossing (2.3) geldig is. Als voor de eigenfrequentie van het flexibele blad (als functie van de rotorhoeksnelheid) geldt (4.21):

$$\omega_b^2 = \omega_0^2 + v \cdot \Omega^2$$

MET ω_0 DE EIGENFREQUENTIE VOOR $\Omega=0$ (2.49)
 EN v EEN CONSTANTE (FREQUENTIE COËFFICIENT)

dan dient het equivalente scharnier-veer blad te voldoen aan (4.35):

$$\begin{cases} e = \frac{(r-1) \cdot I}{m_b \cdot x_g \cdot R^2} \\ K = I \cdot \omega_0^2 \end{cases} \quad (2.50)$$

Voor de HAT is de eigenfrequentie van het niet-roterend blad ($\Omega=0$) gelijk aan 25 rad/s [9]. De frequentiefactor v wordt geschat op 1,2 (overeenkomstig de bladen van de 38m NASA MOD-0 volgens [1]). Met behulp van (2.50) kunnen nu K en e bepaald worden voor het scharnier-veer blad waarvan het gedrag overeenkomt met het echte blad: $K=1,4 \cdot 10^7$ N.m/rad en $e=0,25$.

Om de invloed van de veerstijfheid te beschouwen worden de klaphoeken ook berekend in het geval dat hetzelfde blad is voorzien van respectievelijk een scharnier plus veer (met een ongeveer 10* zo kleine veerstijfheid) en van alleen een scharnier bij de as: $K=e=0$; zodat er in totaal drie verschillende mogelijkheden zijn: A_1 (normaal), A_2 (scharnier+veer) en A_3 (alleen scharnier).

De windturbine wordt onderworpen aan de diverse excitaties zoals die in §2.2 aan bod zijn gekomen:

- 1) alleen rechte aanstroming met U gelijk aan $U(\text{rated})$
- 2) gravitatie
- 3) windgradiënt. Uit de definitie van k (1.35) volgt $U(24,5)/U(9,5)=(1+12,5.k)/(1-12,5.k)$ (de ashoogte is 22 m). Uit windmetingen op zowel 34,5 m (maximale tiphoogte) als 9,5 m (minimale tiphoogte) is k dan te berekenen.
- 4) scheve aanstroming. We nemen δ gelijk aan 30° .
- 5) kruibeweging (gyroscopisch). Met q gelijk aan de hoeksnelheid van het elektrische yawing mechanisme. Alleen de invloed van het gyroscopisch effect ten gevolge van het kruien wordt verrekend (en geen scheve aanstroming, $\delta=0$).
- 6) kruibeweging (schijnbare wind). Idem aan 5) met nu alleen de invloed van de schijnbare wind ten gevolge van het kruien.
- 7) alle excitaties tezamen: gravitatie, windgradiënt, scheve aanstroming en kruien (gyroscopisch effect en schijnbare wind).
- 8) storm. Hierbij is U continu gelijk aan 40 m/s zodat er sprake is van een stationaire situatie. Er wordt verder verondersteld dat de molen niet uit de wind wordt gekruid en dat de last (bijvoorbeeld een generator) zodanig is dat de rotorhoeksnelheid Ω op het oorspronkelijke nivo gehandhaafd blijft.

De bladresponsie op deze stormconditie geeft ook een indicatie van het gedrag van het blad bij een windvlaag (stap in de windsnelheid) in het geval van een constante last; wanneer de klaphoek al wel de nieuwe evenwichtstoestand heeft bereikt (de responsietijd van de klapbeweging is kort) maar dat de rotorhoekfrequentie nog nauwelijks is toegenomen. Vervolgens zal ook de rotorhoeksnelheid toenemen en verandert de klaphoek (quasi-stationair) mee. Op deze instationaire situatie zal niet verder ingegaan worden.

- 9) storm met alle excitaties. Gelijk aan 8) maar dan met alle excitaties van 7).
- 10) storm met het δ_3 -effect. Gelijk aan 8) met het δ_3 effect. Bij een windvlaag is de invloed van een δ_3 -mechanisme interessant. Daarom worden de klaphoeken ook bepaald door te veronderstellen dat er een scheve klapas aanwezig is met $\delta_3=30^\circ$.
- 11) storm met alle excitaties en δ_3 -effect. Gelijk aan 9) met het δ_3 -effect.

Tabel 2.2: De klaphoeken β_0 , β_{1c} en β_{1s} (in graden) voor windturbine A onder de diverse excitaties; voor een drietal constructies voor de bladophanging.

excitatie	A1 NORMAAL			A2 SCHARNIER+VEER			A3 ALLEEN SCHARNIER		
	β_0	β_{1c}	β_{1s}	β_0	β_{1c}	β_{1s}	β_0	β_{1c}	β_{1s}
1) alleen rechte aanstroming	0,44	0	0	2,5	0	0	4,6	0	0
2) gravitatie	0,44	-4,3.10 ⁻⁴	-2,7.10 ⁻⁵	2,5	-0,018	-0,013	4,6	0	-0,070
3) windgradient	0,44	-0,053	-3,4.10 ⁻³	2,5	-0,40	-0,29	4,6	0	-0,83
4) scheve aanstroming	0,36	-1,4.10 ⁻⁴	2,2.10 ⁻³	2,1	-0,068	0,082	3,7	-0,35	0
5) kruien (gyroscopisch effect)	0,44	-5,6.10 ⁻³	-3,6.10 ⁻⁴	2,5	-0,041	-0,030	4,6	0	-0,080
6) kruien (schijnbare wind)	0,44	9,8.10 ⁻⁵	-1,5.10 ⁻³	2,5	8,4.10 ⁻³	-0,011	4,6	0,024	0
7) alle excitaties	0,36	-0,052	-2,7.10 ⁻³	2,1	-0,46	-0,21	3,7	-0,33	-0,86
8) storm	1,7	0	0	9,8	0	0	18	0	0
9) storm + alle excitaties	1,5	-0,15	0,016	8,4	-2,0	0,30	15	-4,4	-2,5
10) storm + δ_1	1,7	0	0	8,5	0	0	14	0	0
11) storm + alle excitaties + δ_3	1,4	-0,15	0,015	7,2	-1,5	0,32	12	-3,7	-0,67

In tabel 2.2 worden voor deze windturbine de klaphoeken gegeven wanneer de turbine achtereenvolgens belast wordt met bovenstaande 11 excitatiemogelijkheden. De klaphoeken zijn berekend volgens de algemene oplossing (2.3) van vergelijking (2.1) en (2.2). (De klaphoeken bij slechts één bepaalde excitatie komen natuurlijk overeen met de in §2.2 afgeleide uitdrukkingen). Er wordt nogmaals opgewezen dat voor de afleiding van de bewegingsvergelijkingen (2.1) en (2.2) vele benaderingen zijn toegepast, zodat van de resultaten slechts verwacht mag worden dat ze de grootte orde van de klaphoeken correct weergeven. Enkele resultaten uit tabel 2.2 zullen nu nader beschouwd worden.

De statische klaphoek β_0 is bij normale windsnelheden vrij klein terwijl de cyclische klaphoeken β_{1c} en β_{1s} haast verwaarloosbaar zijn; de invloed van de windgradient is nog het grootst. (Bij erg grote windturbines zal in de praktijk de windgradient invloed overheerst worden door het effect van de windturbulentie).

De klaphoek β_0 verandert alleen bij een scheve aanstroming (en niet bij de overige 4 excitaties).

Ook de afgeleide verhouding tussen β_{1s} en β_{1c} volgens respectievelijk (2.8) en (2.14) kan nu gecontroleerd worden. Voor het normale blad is

$$(\gamma/2.t_4)/(\xi+K/(I.\Omega^2))=0,064$$

; voor de excitaties gravitatie, windgradient en kruien (gyroscopisch effect) is volgens de tabel inderdaad $\beta_{1s}/\beta_{1c}=0,064$ en voor scheve aanstroming en kruien (schijnbare wind) is $\beta_{1s}/\beta_{1c}=16$.

Als het teken van de scheve aanstromingshoek verandert (δ negatief) dan wijzigt tevens het teken van de desbetreffende klaphoeken β_{1c} en β_{1s} ; hetzelfde geldt voor de kruihoeksnelheid q (zowel wat het gyroscopisch effect betreft als de invloed van de schijnbare wind). Indien er een rechtsom in plaats van de gebruikte linksom draaiende windturbine (gezien vanaf de wind) genomen wordt, verandert alleen het teken van de klaphoeken β_{1c} en β_{1s} ten gevolge van het gyroscopisch effect van het kruien (zie ook §1.3).

Evenals in het geval van een combinatie van kruien en scheve aanstroming §2.2.5.2 treden er ook bij andere combinaties van excitaties zogenaamde koppelingstermen op. Deze koppelingstermen zijn niet al te groot zodat al een redelijke benadering voor de klaphoeken β_{1c} en β_{1s} onder invloed van alle excitaties verkregen kan worden door simpelweg de betreffende klaphoeken ten gevolge van de afzonderlijke excitaties op te tellen. Zo bedraagt de som voor het normale blad (A_1) ten gevolge van alle afzonderlijke excitaties $\beta_{1c} = -0,059^\circ$ terwijl volgens de tabel de klaphoek $\beta_{1c} = -0,052^\circ$ is.

Dat het blad met alleen een klapscharnier (A_3) wordt aangeslagen in zijn resonantiefrequentie komt duidelijk naar voren. Op een cosinus excitatie (gravitatie, windgradient en kruien (gyroscopisch effect)) wordt gereageerd met een sinus ($\beta_{1c} = 0$); bij een $\sin\psi$ -excitatie (scheve aanstroming en kruien (schijnbare wind)) is $\beta_{1s} = 0$ zodat de klaphoek een $\cos\psi$ -afhankelijkheid bezit. Als de veerstijfheid toeneemt (respectievelijk blad A_2 en A_1) worden de klaphoeken kleiner.

Bij een storm neemt de klaphoek fors toe (ongeveer een factor 4). Omdat het δ_3 -mechanisme voor de klappbeweging overeenkomt met het vergroten van de veerstijfheid K , zullen de klaphoeken kleiner worden overeenkomstig de tabel. Vergelijking (2.46) kan gecontroleerd worden door bijvoorbeeld in geval van windgradiënt ook de invloed van het δ_3 -effect te bekijken. Dan blijkt te gelden (voor het blad met alleen het scharnier: A_3): $\beta_{1c} = -0,30^\circ$ en $\beta_{1s} = -0,71^\circ$ zodat

$$\frac{|\beta_{1c}| \text{ MET } \delta_3}{|\beta_{1c}| \text{ ZONDER } \delta_3} = \frac{0,77}{0,83} = 0,92 \quad \text{TERWYJ} \quad \sqrt{\frac{1}{1+\delta_3^2}} = 0,89$$

; het verschil wordt veroorzaakt door de verwaarlozing van de verandering van a (2.29) (ten gevolge van het δ_3 -mechanisme) in (2.46).

Voordat er overgegaan wordt op windturbine B, stippen we eerst twee punten aan.

Bij de introductie van het blad in §1.1 is uitgegaan dat zowel de koorde als de bladhoek lineair verlopen. Indien er bij de afleiding van de bewegingsvergelijking was uitgegaan van een nog simpeler model, namelijk constante koorde en bladhoek dan zou in de bewegingsvergelijking (1.45) in plaats van de term $(-\Theta_r \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5)$ de term $(-\Theta/4)$ gestaan hebben; in de uitdrukking (1.60) voor de axiale inductiefactor zou in plaats van $(-\Theta_r \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4)$ de term $(-\Theta/3)$ verschenen zijn.

Deze nieuwe eenvoudigere uitdrukkingen, die dan eigenlijk alleen voor bladen met constante koorde en bladhoek geldig zijn, zullen toch de klaphoeken (bij benadering) juist weergeven voor bladen met lineaire koorde en bladhoek indien voor Θ de bladhoek op $3/4 \cdot R$ ingevuld wordt. Immers voor windturbine A is de term

$(-\Theta_r \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4) = -0,252$ (met de hoeken in graden);

dit is gelijk aan $-\Theta(x)/3$ indien $x=0,75$ (met de lineaire bladhoek, in graden, $\Theta(x)=12-15 \cdot x$).

De term $(-\Theta_r \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5)$ is gelijk aan $-0,0852 = -\Theta(x)/4$ voor $x=0,78$.

In tabel 2.3 wordt voor het scharnier-veer blad (A_2) de axiale inductiefactor a gegeven als functie van de scheve aanstromingshoek

Tabel 2.3: De axiale inductiefactor a van windturbine A_2 (scharnier+veer blad) onder verschillende condities. Bovendien wordt de relatieve fout in a gegeven, alsook in de term $(\cos\delta - a)$.

U (m/s)	conditie		benadering		relatieve fout in a (%)	relatieve fout in $(\cos\delta - a)$ (%)
	δ_3 (°)	δ (°)	a (1.60)	a (1.61)		
13	0	0	0,200	0,191	5	1
13	0	10	0,199	0,186	7	2
13	0	20	0,197	0,172	15	3
13	0	30	0,194	0,151	28	6
40	0	0	0,0732	0,0729	0,4	0,03
40	0	30	0,0726	0,0614	18	1
40	30	0	0,0645	0,0637	1,3	0,09
40	30	30	0,0640	0,0538	19	1

en tevens bij storm ($U=40$ m/s) met en zonder δ_3 -mechanisme. De waarden voor a zijn volgens benadering (1.60) bepaald; ze worden vergeleken met waarden die volgen uit de 4^e graadsvergelijking in a (1.61) die met behulp van successieve substitutie berekend zijn. Hoewel de relatieve fout in a vrij groot kan zijn (28%) blijft de relatieve fout in de term $(\cos\delta - a)$ beperkt tot 6%. Dit betekent dat voor het bepalen van de klaphoeken uit bewegingsvergelijking (2.1) het niet zo erg is om voor a de benadering (1.60) te nemen; a komt immers zelf niet in (2.1) voor maar de term $(\cos\delta - a)$.

Bij rechte aanstroming en $U=13$ m/s is volgens tabel 2.2 a (1.60) gelijk aan 0,2. Hieruit volgt dat de vermogenscoëfficiënt $C_p = P / (1/2 \cdot \rho \cdot U^3 \cdot \pi \cdot R^2)$ gelijk is aan 0,51 wat ruim 10% lager is dan de theoretisch maximale waarde van 0,59 (volgens Betz). De C_p waarde is kleiner dan 0,59 omdat het blad een lineaire koorde en bladhoek bezit in plaats van de ideale $c(x)$ en $\Theta(x)$ dat bijvoorbeeld volgens [5] bepaald kan worden. De invloed van δ op a (1.60) is vrij gering. Bij een windvlaag daalt de waarde van a aanzienlijk door de λ -afhankelijkheid (en omdat aangenomen is dat in eerste instantie Ω constant is). Zoals verwacht mocht worden (2.29) daalt a bij gebruik van een δ_3 -mechanisme.

N.B.: Als $\delta_3 \neq 0$ is a een functie van β (en dus in het algemeen ook een functie van ψ); in tabel 2.3 is de waarde voor a genomen als geldt dat $\beta = \beta_0$.

2.6.2 Windturbine B

Als tweede voorbeeld wordt een kleine windturbine genomen die via een vaanmechanisme op de wind wordt gehouden zodat de kruisnelheid groot kan zijn (tot ongeveer 1/2 rad/s). Omdat het hier om een puur denkbeeldige rotor handelt, kunnen in principe alle parameters vrij gekozen worden. Er is echter zoveel mogelijk getracht om alle parameters een redelijke waarde toe te kennen (zie tabel 2.4). Na de keuze voor $R=5$ m, $\lambda=6$ en voor de bladen $Cl_\alpha=6$ (met $Cl(\text{ontwerp})=1$ en $\alpha(\text{ontwerp})=8^\circ$), volgt met behulp van [5] het aantal bladen, koorde en bladhoek. De massa en traagheidsmoment worden relatief groot genomen zodat het getal van Lock γ klein uitvalt. Voor de excentriciteit e en veerstijfheid K zijn typische waarde gekozen van helicopterbladen [2]. Uit $U=V(\text{rated})=10$ m/s en $\lambda=6$ volgt meteen Ω . De waarde voor de windgradientcoëfficiënt k kan

Tabel 2.4: De diverse parameters van windturbine B.

<u>rotorparameters</u>	<u>windparameters</u>	<u>afgeleide parameters</u>
N=3	U=10 m/s	$\lambda=6$
R=5 m	U _{storm} =40 m/s	$\lambda_{storm}=1,5$
c _r =0,7 m	k=0,02 m ⁻¹	$\sigma=0,134$
c _o =0,5 m	$\delta=10^\circ$	$\gamma=8,2$
$\Theta_r=11^\circ$		t ₂ =0,262
$\Theta_0=13^\circ$	<u>hoeksnelheden</u>	t ₃ =0,155
m _b =60 kg	$\Omega=12$ rad/s	t ₄ =0,107
x _g =0,4	$\hat{q}=0,042$	t ₅ =0,0810
I=400 N.m.s ²		
CL _{α} =6,0 rad ⁻¹		

bladophanging	K (N.m/rad)	e	ξ
B ₁) normaal	1,3.10 ⁵	0,04	0,06
B ₂) scharnier+veer	2.10 ⁴	0,1	0,15
B ₃) alleen scharnier	0	0	0

$\delta_3=30^\circ$ (indien aanwezig)

bepaald worden door uit te gaan van een grenslaagprofiel met $1/n^2=0,15$ [10], blz.84):

$$U(15)/U(5)=(15/5)^{0,15}=1,18=(1+5.k)/(1-5.k)$$

bij een ashoogte van 10 m.

Voor de scheve aanstromingshoek nemen we nu $\delta=10^\circ$ en indien aanwezig geldt voor het δ_3 -mechanisme $\delta_3=30^\circ$.

In tabel 2.5 worden voor windturbine B de klaphoeken β_0 , β_{1c} en β_{1s} vermeld onder invloed van de verschillende excitaties; en weer bij een drietal combinaties voor K en e. De algemene opmerkingen die in de vorige paragraaf zijn geplaatst zijn ook voor deze windturbine van toepassing. In vergelijking met molen A blijken de klaphoeken in het algemeen groter te zijn. Erg opvallend zijn de erg grote cyclische klaphoeken die optreden bij het kruien (vooral ten gevolge van het gyroscopisch effect). Bij het ontwerpen van windturbines, die zijn uitgerust met een vaanmechanisme (om de molen op de wind te houden of hem er juist uit te draaien bij stormen) dient men erop bedacht te zijn dat tijdens het kruien de bladen zwaar belast worden ten gevolge van het gyroscopisch effect. Afhankelijk van

de draairichting van Ω en q heeft de rotor de neiging vóór- of achterover te willen kantelen ("pitching").

Tabel 2.5: De klaphoeken β_0 , β_{1c} en β_{1s} (in graden) voor windturbine B onder de diverse excitaties; voor een drietal constructies voor de bladophanging.

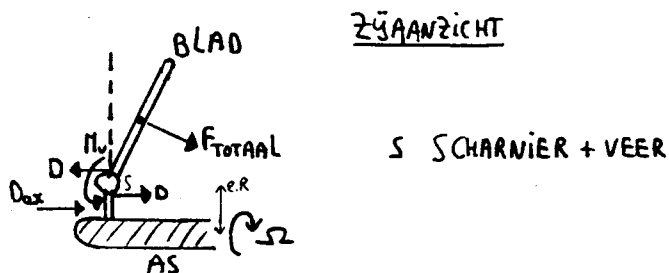
excitatie	β_0	B ₁ NORMAAL		B ₂ SCHARNIER+VEER			B ₃ ALLEEN SCHARNIER		
		β_{1c}	β_{1s}	β_0	β_{1c}	β_{1s}	β_0	β_{1c}	β_{1s}
1) alleen rechte aanstroming	1,2	0	0	2,6	0	0	3,9	0	0
2) gravitatie	1,2	-9,9.10 ⁻³	-1,9.10 ⁻³	2,6	-0,060	-0,053	3,9	0	-0,18
3) windgradient	1,2	-0,17	-0,033	2,6	-0,47	-0,42	3,9	0	-0,95
4) scheve aanstroming	1,1	-1,7.10 ⁻³	8,7.10 ⁻³	2,5	-0,046	0,052	3,8	-0,16	0
5) kruien (gyroscopisch effect)	1,2	-2,1	-0,39	2,6	-5,8	-5,2	3,9	0	-11
6) kruien (schijnbare wind)	1,2	0,084	-0,44	2,6	1,1	-1,2	3,9	2,4	0
7) alle excitaties	1,1	-2,2	-0,86	2,5	-5,4	-6,8	3,6	2,3	-12
8) storm	6,6	0	0	15	0	0	22	0	0
9) storm + alle excitaties	6,5	-2,8	-0,77	14	-8,0	-7,1	21	-1,1	-16
10) storm + δ_3	6,2	0	0	13	0	0	18	0	0
11) storm + alle excitaties + δ_3	6,1	-2,5	-0,68	13	-7,1	-4,6	17	-7	-12

HOOFDSTUK 3: WINDTURBINE BELASTINGEN

In het vorige hoofdstuk is de klappbeweging behandeld. In dit hoofdstuk zullen de hierbij optredende momenten voor respectievelijk bladwortel, naaf en toren aan bod komen; in eerste instantie uitgaande van een evenwichtssituatie (dat wil zeggen de klaphoeken β_0 , β_{1c} en β_{1s} zijn constant in de tijd).

3.1 Het bladwortelmoment in klapprichting

Voor sterkteberekeningen is het alleen nodig die plaatsen te beschouwen waar de belasting maximaal is. Als deze kritieke punten de belasting kunnen weerstaan zal dat ook het geval zijn voor de rest van de constructie. Voor het blad treedt het grootste moment op bij de bladwortel ($s=0$; figuur 1.1). Het bladwortel (root) moment M_r is gelijk aan de som van alle optredende momenten ten gevolge van traagheids-, gravitatie-, centrifugaal-, aerodynamische- en gyroscopische krachten. De bijdrage aan het bladwortelmoment van de aerodynamische kracht D_{ax} (1.53) die van as tot klapscharnier (dus over een afstand van $e.R$) werkt, wordt verwaarloosd; evenals trouwens de bijdrage ten gevolge van de (nog onbekende) dwarskracht D op het klapscharnier met arm $e.R$ (zie figuur 3.1). Voor het scharnier-



Figuur 3.1: De optredende krachten en momenten voor het scharnier-veer blad. Zowel de scharnierkracht D als de aerodynamische kracht D_{ax} , werkend van $s=0$ tot $e.R$ (naaf), wordt verwaarloosd.

veer blad is het bladwortelmoment dan simpelweg gelijk aan het terugwerkende veermoment M_v (ter plaatse van het scharnier):

$$M_l = -M_v = K \cdot \beta = K \cdot (\beta_0 + \beta_{ic} \cdot \cos \psi + \beta_{is} \cdot \sin \psi) \quad (3.1)$$

De frequentie van het periodieke bladwortelmoment is dus gelijk aan Ω . Dit periodiek moment is belangrijk, aangezien die aanleiding geeft tot materiaalvermoeïing. Wanneer de klaphoeken bekend zijn volgt uit (3.1) meteen het bladwortelmoment.

Uit (3.1) blijkt dat het als de veer ontbreekt ($K=0$) het bladwortelmoment altijd gelijk aan nul is. (Dit was ook wel te verwachten aangezien een scharnier per definitie geen momenten doorgeeft). Echter het nadeel van de constructie zonder veer is dat dan de klaphoek β groter zal zijn (zie bijvoorbeeld (2.5)) omdat alleen de centrifugaalwerking nog voor de veerwerking zorgt. Hierdoor moet de afstand rotor-toren groter worden om te voorkomen dat de bladen tegen de toren kunnen klappen. Dit bemoeilijkt de windturbineconstructie alsook de vaanbeveiliging. Een groter nadeel betreft het feit dat bij windstilte er geen veerwerking aanwezig is (immers $\Omega=0$ dus ontbreekt het centrifugaalmoment), zodat er aanslagen (plus dempers) nodig zijn om te voorkomen dat de bladen slap langs de toren naar beneden gaan hangen. Om deze redenen kan men daarom beter kiezen voor de eenvoudigere constructie van het scharnier-veer blad. Dit laatste heeft ook het voordeel dat de optredende corioliskrachten (zie §3.4) kleiner zullen zijn ten opzichte van de constructie met alleen een scharnier. Voor het bepalen van de juiste veersterkte van het scharnier-veer blad dient men een compromis te vinden tussen enerzijds het bladwortel moment zo klein mogelijk (K zo klein mogelijk); en anderzijds de klaphoek β en klapsnelheid $\dot{\beta} \cdot r$ zo klein mogelijk (K zo groot mogelijk), om de windturbineconstructie simpel te houden en de corioliskrachten te beperken. Bovendien is ook de eigenfrequentie van het blad afhankelijk van K volgens (1.29). Deze eigenfrequentie is vooral van belang bij windvlagen. Dan is er geen sprake meer van 1-P excitaties, maar wordt de rotor belast door een excitatie met een groot frequentiegebied, die het blad voornamelijk in zijn eigenfrequentie zal aanslaan. De eigenfrequentie dient nu zo gekozen te worden dat er met een andere vrijheidsgraad (bijvoorbeeld trilling van de toren) geen koppeling kan ontstaan (dat wil zeggen de twee trillingen beïnvloeden elkaar) dat kan leiden tot instabiliteiten

(waardoor de constructie zelfs stuk zou kunnen trillen).

Het doel van het aanbrengen van een scharnier-veer blad is om het bladwortelmoment zoveel mogelijk te beperken. Door (3.1) te vergelijken met het bladwortelmoment voor een ∞ -stijf opgehangen blad (dat wil zeggen $K=\infty$) kan de mate van succes bepaald worden. Dit laatste moment volgt uit (1.45) door $\beta=\beta'=\beta''=0$ te nemen. (Het bladmateriaal zelf dient nu alle excitaties op te vangen):

$$M_{\eta} = I \cdot \Omega^2 \cdot \left\{ \frac{K}{2} \cdot \left(\frac{\cos \delta - a}{\lambda} \cdot t_3 - \Theta_1 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5 \right) + \cos \psi \cdot \left(-\frac{K}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot \cos \delta}{\lambda} \cdot t_4 - 2 \cdot \vec{g} \right) + \sin \psi \cdot \left(-\frac{K}{2} \cdot \vec{g} \cdot t_4 \right) \right\} \quad (3.2)$$

N.B.: Voor een stijf blad geldt natuurlijk $\xi=0$ (immers $e=0$).

Het bladwortelmoment voor een stijf blad volgens (3.2) is maximaal indien:

$$\psi = \text{ARCTAN} \frac{-\frac{K}{2} \cdot \vec{g} \cdot t_4}{-\frac{K}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot \cos \delta}{\lambda} \cdot t_4 - 2 \cdot \vec{g}} \quad (3.3)$$

Het bladwortelmoment voor een scharnier-veer blad volgens (3.1) is maximaal indien $\beta=0$ oftewel als:

$$\psi = \text{ARCTAN} \frac{\beta_{15}}{\beta_{1c}} \quad (3.4)$$

(dit volgt ook uit (2.37))

Ook in dit hoofdstuk zullen er getallenvoorbeelden gegeven worden waarbij uitgegaan wordt van windturbine B uit §2.6. (De resultaten van windturbine A worden achterwege gelaten omdat ze geen essentiële informatie toevoegen aan die van windturbine B). Voor windturbine B met het scharnier-veer blad B₂ is het bladwortelmoment M_r berekend via (3.1) onder een viertal excitaties (van de 11 uit §2.6.1). Tevens is volgens (3.2) M_r voor een ∞ -stijf blad bepaald. Door gebruik te maken van (3.3) en (3.4) is het mogelijk om de bladwortelmomenten te schrijven als de som van het gemiddelde en de amplitude maal een cosinus met een zekere fasehoek (zie tabel 3.1).

Tabel 3.1: Het bladwortelmoment M_r voor windturbine B_2 (scharnier +veer blad) onder verschillende excitaties; ter vergelijking wordt M_r ook voor een ∞ -stijf blad vermeld.

excitatie	M_r (kNm)	
	scharnier+veer blad (B_2)	∞ -stijf blad
1) alleen rechte aanstroming	0,90	3,9
7) alle excitaties	$0,88 + 3,0 \cdot \cos(\psi + 128^\circ)$	$3,8 + 5,4 \cdot \cos(\psi + 169^\circ)$
9) storm + alle excitaties	$5,0 + 3,7 \cdot \cos(\psi + 139^\circ)$	$21,6 + 6,6 \cdot \cos(\psi + 171^\circ)$
11) storm + alle excitaties + δ_3	$4,4 + 3,0 \cdot \cos(\psi + 147^\circ)$	" "

Een snelle (grootte-orde) controle van de tabelwaarde bij rechte aanstroming ($U=10$ m/s), kan als volgt geschieden. Een schatting voor de axiale kracht $D_{ax} = C_d \cdot 1/2 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \pi \cdot R^2$ is 3150 N met $C_d=0,64$ ($=4 \cdot a \cdot (1-a)$ en a wordt op 0,2 geschat). Het aerodynamisch moment per blad is dan, uitgaande dat D_{ax} op $2/3 \cdot R$ aangrijpt, $M_a = 1/N \cdot D_{ax} \cdot 2/3 \cdot R = 3500$ N.m. Dit komt redelijk overeen met de tabelwaarde $M_r = 3,9$ kN.m voor het ∞ -stijve blad. Voor het scharnier-veer blad wordt het bladwortelmoment beperkt ten gevolge van het centrifugaalmoment $M_c = I \cdot \Omega^2 \cdot \beta_0 = 2600$ N.m (volgens tabel 2.5 is $\beta_0 = 2,6^\circ$). De schatting voor M_r bedraagt zodoende $3300 - 2600 = 700$ N.m; qua grootte-orde overeenstemmend met de tabelwaarde van 900 N.m.

Uit tabel 3.1 blijkt dat zowel het gemiddelde als de amplitude van het bladwortelmoment gereduceerd wordt door het gebruik van het scharnier plus veer. In de volgende paragraaf zal een en ander nader onderzocht worden.

Ook het δ_3 -mechanisme heeft een gunstige invloed op M_r (bij een ∞ -stijf blad kan er natuurlijk geen gebruik gemaakt worden van zo'n mechanisme).

N.B.: Ook bij het interpreteren van de waarden van de momenten mag men niet vergeten dat voor het afleiden van de formules van vele benaderingen gebruik is gemaakt.

3.2 Beperking van het bladwortelmoment via de scharnier-veer constructie

Het uitgangspunt van het gebruik van een scharnier-veer blad is het beperken van de bladbelasting. In deze paragraaf zullen we onderzoeken hoe groot deze reductie in het bladwortelmoment is ten opzichte van een ∞ -stijf opgehangen blad.

Als er uitgegaan wordt van de 2^e orde benadering voor het scharnierende blad (§2.4) is het mogelijk om een uitdrukking af te leiden voor de reductiefactor f , die we definiëren als de verhouding van het bladwortelmoment M_r van een scharnier-veer blad en dat van een ∞ -stijf blad. (Het bladwortelmoment voor een ∞ -stijf zal in het vervolg aangeduid worden met \tilde{M}_r). Vanwege de 2^e orde benadering is de bewegingsvergelijking van het blad gelijk aan (2.33):

$$\beta'' + 2\zeta \cdot \beta' + \tilde{\omega}_b^2 \cdot \beta = \frac{M_e}{I \cdot \Omega^2} \quad (3.5)$$

$$\text{MET } \tilde{\omega}_b^2 = 1 + \epsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}$$

$$\text{EN } \zeta = \frac{c}{4} \cdot t_4$$

Er wordt onderscheid gemaakt tussen een constante en periodieke excitatie en een windvlaag (a-periodieke excitatie). Deze drie gevallen zullen nu achtereenvolgens behandeld worden.

3.2.1 Constante excitatie

Zoals in §2.2.1 vermeld is, is in geval van alleen rechte aanstroming de belasting M_e constant en geldt (2.39):

$$\beta_0 = \frac{M_e / (I \cdot \Omega^2)}{1 + \epsilon + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}} \quad (3.6)$$

Het bladwortelmoment \tilde{M}_r is voor het ∞ -stijve blad gelijk aan de excitatie:

$$\tilde{M}_r = M_e \quad (3.7)$$

Bij het scharnier-veer blad wordt M_r beperkt ten gevolge van de centrifugaalwerking via de optredende klaphoek β_0 (zie eventueel ook §2.5.1):

$$M_r = M_e - M_c = M_e - I \cdot \Omega^2 \cdot (1+\epsilon) \cdot \beta_0 \quad (3.8)$$

met behulp van (1.25).

Voor M_e kan volgens (3.6) geschreven worden:

$$M_e = \left(1 + \epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}\right) \cdot I \cdot \Omega^2 \cdot \beta_0 \quad (3.9)$$

De reductiefactor bij een constante excitatie f_c wordt met behulp van (3.7) en (3.8):

$$f_c = \frac{M_r}{\tilde{M}_r} = \frac{M_e - I \cdot \Omega^2 \cdot (1+\epsilon) \cdot \beta_0}{M_e} = \frac{\frac{K}{I \cdot \Omega^2}}{\left(1 + \epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}\right)} \quad (3.10)$$

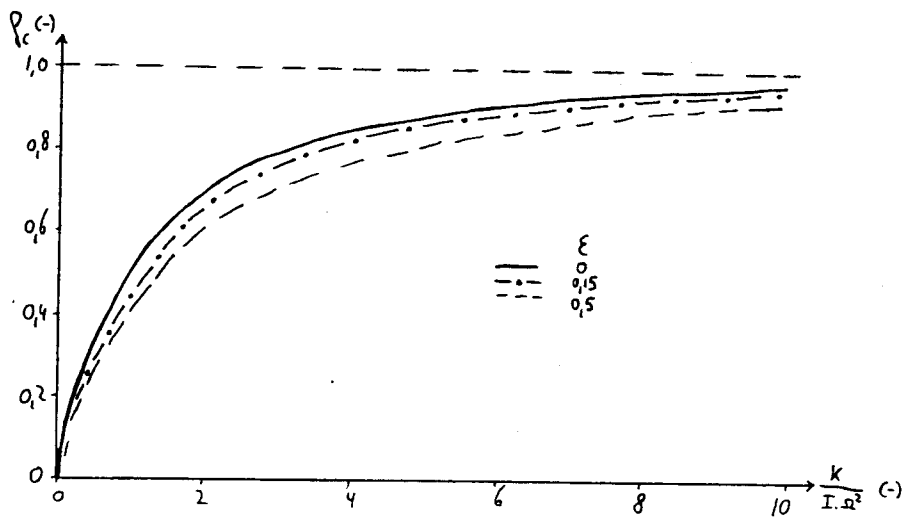
VIA SUBSTITUTIE VAN (3.9)

De reductiefactor f_c is in figuur 3.2 uitgezet als functie van $K/(I \cdot \Omega^2)$ met als parameter ϵ . Voor $K \rightarrow \infty$ gaat f_c natuurlijk naar 1; indien $K=0$ (veer afwezig) is zoals reeds bekend het bladwortelmoment gelijk aan nul en dus $f_c=0$.

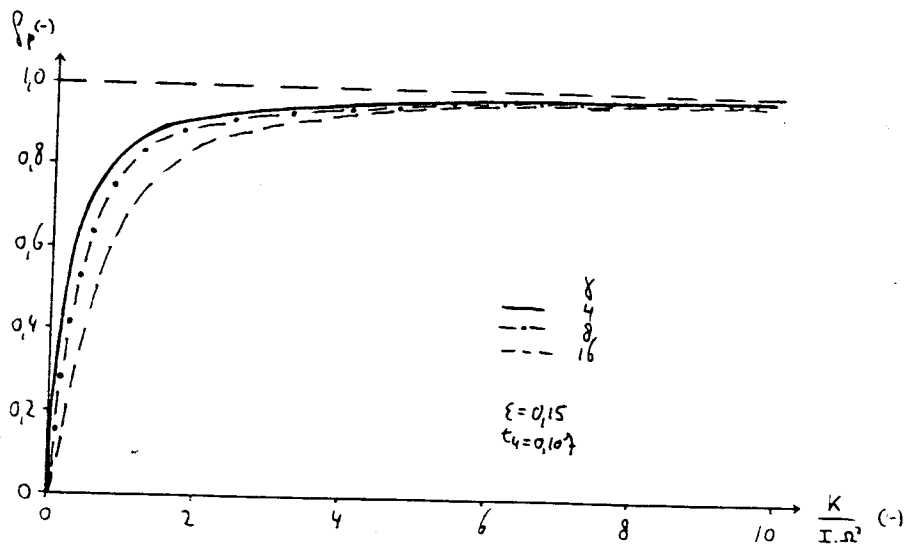
3.2.2 Periodieke excitatie

In geval van gravitatie, windgradiënt, scheve aanstroming en kruien is de excitatie M_e periodiek, met frequentie gelijk aan de rotorhoeksnelheid Ω . Volgens §2.4 is dan de dynamische klaphoek β_d gelijk aan (2.40):

$$|\beta_d| = \frac{1}{\sqrt{\left(\epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{K}{I \cdot \Omega^2} \cdot t_u\right)^2}} \cdot \frac{|M_e|}{I \cdot \Omega^2} \quad (3.11)$$



Figuur 3.2: De reductiefactor bij een constante excitatie f_c als functie van de dimensieloze veerstijfheid $K/(I \cdot \Omega^2)$ met als parameter de excentriciteitscoëfficiënt ξ .



Figuur 3.3: De reductiefactor bij een periodieke excitatie f_p als functie van de dimensieloze veerstijfheid $K/(I \cdot \Omega^2)$ met als parameter het getal van Lock γ .

Omdat de klaphoek β periodiek verandert, is ook het bladwortelmoment M_r periodiek. De amplitude van het bladwortelmoment (in dit geval gelijk aan het maximum) voor het scharnier-veer blad volgt direct uit (3.11) met behulp van (3.1):

$$|M_r| = k \cdot |\beta_d| = \frac{k}{\sqrt{\left(\xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{I} \cdot t_d\right)^2}} \cdot \frac{M_e}{I \cdot \Omega^2} \quad (3.12)$$

Het bladwortelmoment van het stijve blad is weer gelijk aan de excitatie M_e zelf:

$$|\tilde{M}_r| = |M_e| \quad (3.13)$$

De reductiefactor bij een periodieke excitatie f_p is dus gelijk aan:

$$f_p = \frac{|M_r|}{|\tilde{M}_r|} = \frac{\frac{k}{I \cdot \Omega^2}}{\sqrt{\left(\xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{I} \cdot t_d\right)^2}} \quad (3.14)$$

Ook nu geldt weer dat voor $K=0$ de reductiefactor gelijk is aan nul en voor $K \rightarrow \infty$ gaat f_p asymptotisch naar 1 (zie figuur 3.3).

De fysische verklaring voor de beperking van het bladwortelmoment is nu wat complexer dan in het geval van een constante excitatie. Om een en ander aanschouwelijk te maken stellen we het scharnier-veer blad voor als een massa (traagheid) plus 2 veren (echte veer K en centrifugaalwerking) en demper (aerodynamisch). Door de excitatie M_e wordt er energie toegevoerd aan het systeem. In geval van resonantie (dat wil zeggen geen veer en excentriciteit) loopt de responsie β precies 90° in fase achter op de excitatie. Dit houdt in dat de damping ($2 \cdot \xi \cdot \beta' \cdot I \cdot \Omega^2$) precies in fase is met de excitatie M_e , en ook in grootte daaraan gelijk is; oftewel via de damping wordt steeds alle (door de excitatie) toegevoerde energie meteen afgevoerd (zie ook §2.5.2):

$$\begin{aligned} P_{\text{TOEVOER}} &= M_e \cdot \dot{\beta} && (\text{VERROGEN IS MOMENT MAAL HOEKSNE(L)HEID}) \\ P_{\text{AFVOER}} &= M_{\text{DAMPING}} \cdot \dot{\beta} \\ \text{EN } M_e &= M_{\text{DAMPING}} && (\text{DYNAMISCH EVENWICHT}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aangezien de demping de excitatie volledig opvangt door alle toegevoerde energie direct weg te gooien, treedt er geen interne materiaalbelasting op; oftewel het bladwortelmoment is gelijk aan nul, wat eigenlijk meteen al volgde uit het feit dat er geen veer aanwezig is. Algemeen gesproken dient resonantie zoveel mogelijk vermeden te worden. Echter in het geval van een scharnierend blad zorgt de resonantie er juist voor dat de opgelegde excitatie effectief wordt geëlimineerd (zie ook (2.48))! Hierdoor wordt het bladmateriaal niet intern belast.

Als er wel een veer (met stijfheid K) wordt aangebracht treedt er geen resonantie meer op en is de demping niet langer meer in fase met de excitatie M_e . Hierdoor dienen de twee veren (K en $I.\Omega^2.(1+\epsilon)$) periodiek het energieverval op te slaan en terug te geven. Hoe groter K des te meer gaat de eigenfrequentie van het blad $\hat{\omega}_b$ (3.5) afwijken van de excitatiefrequentie $\hat{\omega}=1$ en zullen de twee veren een steeds grotere energiehoeveelheid dienen te verwerken. De in een veer opgeslagen energie is gelijk aan $1/2.K.\beta^2.R$. Een grotere hoeveelheid energie die opgeslagen dient te worden houdt onvermijdelijk in dat het bladwortelmoment $M_r = K.\beta$ toeneemt. N.B.: De klaphoek β zelf neemt af, omdat de excitatiefrequentie steeds meer van de resonatiefrequentie afwijkt, zie figuur 2.6 .

De beperking van het bladwortelmoment wordt in geval van een periodieke excitatie dus veroorzaakt door een combinatie van demping en centrifugaalwerking (wat betreft de excentriciteitsterm $\epsilon.I.\Omega^2.\beta$; de andere term, $I.\Omega^2.\beta$, wordt immers verdisconteerd door de traagheidsterm $I.\Omega^2.\beta''$ van (3.5)).

Nadat nu de achtergrond van de reductiefactor f_p bekend is gaan we de grootte van f_p vergelijken met die van reductiefactor f_c . Tussen beide reductiefactoren f_c en f_p bestaat de volgende relatie, die direct uit (3.10) en (3.14) volgt:

$$\frac{f_p}{f_c} = \frac{\frac{K}{I.\Omega^2}}{\sqrt{\left(\epsilon + \frac{K}{I.\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{K}{I.\Omega^2}.\tau_4\right)^2}} \cdot \frac{1 + \epsilon + \frac{K}{I.\Omega^2}}{\frac{K}{I.\Omega^2}} = \frac{\beta_{dyn}}{\beta_{stat}} \quad (3.16)$$

Voorts geldt:

$$\frac{M_r(i)}{M_r(0)} = \frac{k \cdot \beta_d}{k \cdot \beta_0} = \frac{\beta_{dyn}}{\beta_{STAT}} = \frac{f_p}{f_c}$$

(3.17)

MET $M_r(0)$ HET BLADWORTELMOMENT BIJ EEN STATISCHE EXCITATIE ($\tilde{\omega}=0$)
 $M_r(i)$ " " " " DYNAMISCHE " ($\tilde{\omega}=1$)

EN $\frac{\beta_{dyn}}{\beta_{STAT}}$ VOLGENS (2.32)

Vergelijking (3.16) had ook directer afgeleid kunnen worden:

$$\frac{f_p}{f_c} = \frac{\left(\frac{M_r}{\tilde{M}_r}\right)_{dyn}}{\left(\frac{M_r}{\tilde{M}_r}\right)_{STAT}} = \frac{M_r(i)}{M_r(0)}$$

(3.18)

INNERS $\tilde{M}_r(0) = M_e(0)$ EN $\tilde{M}_r(i) = M_e(i)$
 EN $M_e(0) = M_e(i)$ VOLGENS AFSpraak

Figuur 2.5b geeft dus niet alleen de verhouding weer tussen de dynamische en statische responsie β_{dyn}/β_{stat} (met voor het scharnier-veer blad $\tilde{\omega}=1/\hat{\omega}_b=1/\sqrt{(1+\xi+K/(I \cdot \Omega^2))}$ en parameter $\tilde{\xi}=(\gamma/4 \cdot t_4)/\hat{\omega}_b=(\gamma/4 \cdot t_4)/\sqrt{(1+\xi+K/(I \cdot \Omega^2))}$ met behulp van (2.33)) maar volgens (3.17) ook de verhouding tussen de reductiefactoren f_p/f_c en tussen de bladwortelmomenten $M_r(i)/M_r(0)$. Oftewel figuur 2.5b laat het effect op het bladwortelmoment zien, indien een statische excitatie wordt vervangen door een even grote dynamische excitatie. Uit de figuur blijkt dat voor molens met kleine γ (en dus kleine aerodynamische demping) het bladwortelmoment ten gevolge van een dynamische excitatie voor kleine veerstijfheden K (of grote Ω) flink kan oplopen ten opzichte van die bij een statische excitatie (zie ook figuur 2.6); immers hoe kleiner K des te meer benadert de excitatiefrequentie $\hat{\omega}=1$ de resonantiefrequentie $\hat{\omega}_b$. (De limietwaarde zelf van $M_r(i)/M_r(0)$ voor $K \rightarrow 0$ heeft geen fysische betekenis omdat voor $K=0$ beide bladwortelmomenten nul zijn). Hiermee is een al genoemde stelling aangetoond dat elk (sterkte) ontwerp voor een windturbine gebaseerd dient te zijn op de optredende periodieke excitaties (en niet op de statische).

Bij bovenstaande afleidingen voor de reductiefactoren f_c en f_p dienen nog een tweetal kantekeningen geplaatst te worden:

- Bij het bepalen van f_p is uitgegaan van een zuiver periodieke excitatie M_e . Indien er tevens sprake is van een constante term in

M_e is $\beta_0 \neq 0$ en dientengevolge zullen er extra termen bijkomen in het periodieke gedeelte van M_e volgens (2.34). Deze extra termen kunnen de oorspronkelijke excitatie zowel versterken als verzwakken. Aangezien deze extra termen niet van toepassing zijn voor een stijf blad (zonder preconingshoek β_0) zal de reductiefactor f_p ook veranderen.

Een δ_3 -mechanisme zal de reductiefactoren verkleinen, aangezien het δ_3 -effect het bladwortelmoment voor het scharnierveer blad verkleint.

- De afleidingen gaan expliciet uit van een 2^e orde systeem. De resultaten zijn dus alleen betrouwbaar indien de ψ -afhankelijke termen vóór β in (1.45) klein zijn ten opzichte van de ψ -onafhankelijke termen. In het geval dat dit niet meer zo is, is (3.10) alsook (3.14) niet meer geldig en kunnen er zelfs instabiliteiten optreden (zie laatste alinea §1.3), waardoor het bladwortelmoment onbeperkt zal toenemen.

3.2.3 Windvlaag

In de vorige subparagraaf is de periodieke excitatie aan bod gekomen. In deze subparagraaf behandelen we als voorbeeld van een a-periodieke excitatie M_e de windvlaag: stap in de windsnelheid. De bladresponsie hierop is al in §1.3 uiteengezet (zie figuur 1.13). Het bladwortelmoment volgt dan weer direct uit $M_r = K \cdot \beta$:

$$\bar{M}_r(\psi) = k \cdot \beta_2 + k \cdot (\beta_1 - \beta_2) \cdot e^{-\xi \cdot \psi} \cdot \cos(\sqrt{\omega_b^2 - \xi^2} \cdot \psi)$$

$$\text{NET } \beta_1 = \frac{M_{e1} / (I \cdot \Omega^2)}{1 + \xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}} \quad \text{EN } \beta_2 = \frac{M_{e2} / (I \cdot \Omega^2)}{1 + \xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2}} \quad (3.19)$$

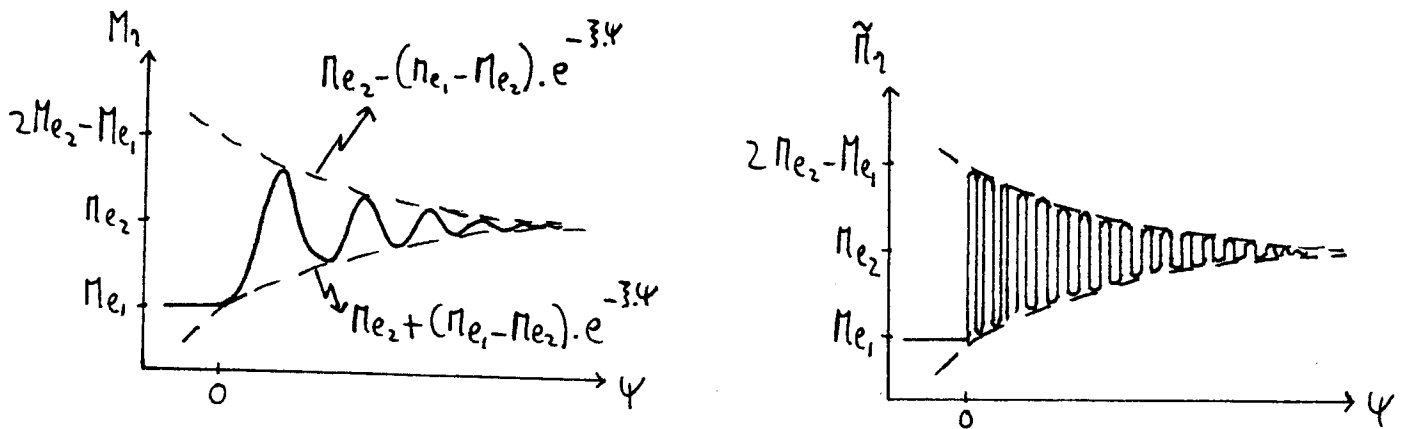
(DE EVENWICHTSKLAPHOEKEN VOLGENS (3.6))

waarin M_{e1} , M_{e2} de excitaties zijn voor respectievelijk de evenwichtstoestanden 1 (net voor de windvlaag) en 2 (na de windvlaag wanneer de trilling is uitgedempt)

Het bladwortelmoment \tilde{M}_r voor een stijf blad kan verkregen worden door in (3.19) K naar oneindig te laten gaan:

$$\tilde{M}_r(\psi) = M_{e2} + (M_{e1} - M_{e2}) \cdot e^{-\frac{k}{I} \cdot \psi} \cdot \cos(\sqrt{1 + \xi + \frac{k}{I \cdot \Omega^2} - (\frac{k}{I} \cdot \psi)^2} \cdot \psi)$$

NET $k \rightarrow \infty$ (3.20)



Figuur 3.4: Het bladwortelmoment M_r en \tilde{M}_r voor respectievelijk het scharnier-veer blad en het ∞ -stijf blad bij een windvlaag, als functie van de azimuthhoek ψ .

Ten gevolge van het feit dat $K \rightarrow \infty$ gaat ook $\tilde{\omega}_b$ naar oneindig waardoor de trilling (3.20) een oneindig grote frequentie krijgt (zie figuur 3.4). Dit houdt in dat op tijdstip $t=0$ ($\psi=0$) \tilde{M}_r plotseling van Me_1 naar $2.Me_2 - Me_1$ schiet. Het voordeel van het gebruik van een scharnier-veer blad is nu dat volgens de figuur deze plotselinge veranderingen in M_r worden afgevlakt. De maximale waarde van M_r zal niet zo veel afnemen, aangezien die ook bij het scharnier-veer blad bepaald wordt door de omhullende:

$$Me_2 + (Me_1 - Me_2) \cdot e^{-3.4\psi}$$

De aerodynamische damping is de oorzaak van het afvlakken van het bladwortelmoment. Deze zorgt ervoor dat het blad de toegevoerde energie niet plotseling hoeft te verwerken, maar dat de energie opname wordt uitgesmeerd in de tijd (een gedeelte van de energie wordt in de klapbeweging gestopt). Een andere manier om het afvlakken te verklaren (en dat al in §2.5.1 ter sprake is gekomen) is dat de klapsnelheid $\dot{\beta}.r$ van het blad de stapvormige toename in de windsnelheid tegenwerkt, zie U_p (1.38).

3.2.4 Getallenvoorbeeld

In tabel 3.2 wordt het voorafgaande kwalitatief en kwantitatief samengevat. In tabel 3.3 worden de reductiefactoren f_c en f_p

Tabel 3.2: Het effect van de toepassing van een scharnier-veer blad ten opzichte van een ω -stijf blad, op het bladwortelmoment M_r voor drie excitatievormen.

<u>constante excitatie</u>	<u>periodieke excitatie</u>	<u>windvlaag</u>
reductiefactor $f_c =$	reductiefactor $f_p =$	afvlakken van de stapvorm
$\frac{K/(I \cdot \Omega^2)}{1 + \xi + K/(I \cdot \Omega^2)}$	$\frac{K/(I \cdot \Omega^2)}{\sqrt{((\xi + K/(I \cdot \Omega^2))^2 + (\gamma/2 \cdot t_4)^2)}}$	
door centrifugaalwerking	door aerodynamische demping en centrifugaalwerking (alleen excentriciteits-term)	door aerodynamische demping (klapsnelheid)

verkregen via de 2^e orde benadering vergeleken met de (volgens de formules van §3.1 en de resultaten van tabel 3.1) berekende waarden voor de windturbines A₂ en B₂. De overeenkomst is vrij goed met uitzondering van $f_p = 0,95$ bij windmolen A₂ (bij U=40 m/s). Dit is te wijten aan het feit dat dan de periodieke excitatietermen M_e (2.34) met β_0 erin (2.25) relatief groot worden (zoals reeds vermeld zijn deze termen niet meegenomen in uitdrukking (3.14) voor f_p).

Tabel 3.3: De reductiefactoren voor de twee windturbines A₂ en B₂ (scharnier+veer blad) onder verschillende excitaties; ter vergelijking worden ook de benaderingen voor f_c en f_p gegeven volgens respectievelijk (3.10) en (3.14).

reductie- factor	excitatievorm	A ₂		B ₂	
		berekend	benadering	berekend	benadering
f_c	1) alleen rechte aanstroming	0,36	0,36	0,23	0,23
f_p	7) alle excitaties	0,69	0,65	0,56	0,52
f_p	9) storm + alle excitaties	0,95	"	0,57	"

3.3 Het aandrijvend moment

Naast het bladwortelmoment in de klaprichting is er ook een moment in het rotorvlak, die de windturbine aandrijft (torque): M_Q . Dit aandrijvend moment zorgt altijd voor een stationaire interne belasting van de bladen en rotoras (inclusief tandwielkast), wat in het ontwerp verrekend dient te zijn. Of een variatie in M_Q de as ook dynamisch belast hangt af van de aard van de belasting die aan de as wordt gekoppeld. Indien er geen belasting aanwezig is (vrijloop) of als de belasting variaties in het toerental zonder meer toelaat zal er geen extra aswringing kunnen optreden ten gevolge van een verandering in M_Q . Indien echter de belasting een (welbepaalde) constante hoeksnelheid oplegt aan de as (bijvoorbeeld een aan het openbare net gekoppelde synchrone generator) dan zal elke variatie in M_Q de as intern belasten op torsie. In de rest van dit hoofdstuk wordt er verondersteld dat een variatie in M_Q de as niet dynamisch belast.

De grootte van het aandrijvend moment M_Q per blad kan analoog aan het klapmoment bepaald worden. Voor het aerodynamische gedeelte geldt (zie figuur 1.16):

$$M_Q = \int_0^R s \cdot (dL \sin \varphi - dD \cos \varphi) \approx \int_0^R s \cdot \psi \, dL \quad (3.21)$$

Op gelijke wijze als (1.54) kan dit herschreven worden tot:

$$M_Q = \frac{1}{2} \gamma \cdot I \cdot R^2 \cdot \int_0^1 \left\{ y \cdot \frac{c(y)}{c_1} \cdot \frac{u_p^2}{R^2 R^2} - y^2 \cdot \frac{c(y)}{c_1} \cdot \frac{u_p}{R \cdot R} \cdot \Theta(y) \right\} dy \quad (3.22)$$

Invullen van (1.38) levert tenslotte:

$$\frac{M_Q}{I \cdot R^2} = \frac{\gamma}{2} \left\{ A^2 \cdot t_2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot t_3 + B^2 \cdot t_4 + A \cdot (-\Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4) + B \cdot (-\Theta_1 \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5) \right\}$$

$$\text{MET } A = \frac{\sin \delta \cdot \sin \varphi}{\lambda} \cdot \beta + \frac{\cos \delta \cdot \epsilon}{\lambda} \quad (3.23)$$

$$\text{EN } B = - \left(\frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot R \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \beta + \frac{\cos \delta}{\lambda} \cdot R \cdot R \cdot (\cos \varphi + \hat{q} \cdot \sin \varphi + \beta') \right)$$

De azimuthonafhankelijke term hierin is bij benadering (de kruistermen worden verwaarloosd) gelijk aan:

$$M_Q = \frac{\lambda}{2} \cdot I \cdot \Omega^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\cos \delta - a}{\lambda} \right)^2 \cdot t_2 + \frac{\cos \delta - a}{\lambda} \cdot (-\Theta_1 \cdot t_3 + \Theta_0 \cdot t_4) \right\} \quad (3.24)$$

Dit resultaat had ook afgeleid kunnen worden met behulp van de bekende uitdrukking voor het gemiddelde geleverde vermogen van een windturbine:

$$P = \Omega \cdot \sum_{k=0}^{N-1} M_Q \quad (3.25)$$

waarbij er over N bladen gesommeerd wordt.

Hieruit volgt voor het aandrijvend moment per blad:

$$M_Q = \frac{1}{N} \cdot \frac{P}{\Omega} \quad (3.26)$$

MET $P = C_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot u^3$

De vermogenscoëfficiënt C_p volgt uit de axiale impulstheorie (voor scheve aanstroming):

$$C_p = (\cos \delta - a) \cdot C_D \quad (\text{VERMOGEN IS SNELHEID NAAL KRACHT}) \quad (3.27)$$

MET $C_D = 4 \cdot a \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot a \cdot \cos \delta + a^2}$ VOLGENS (1.52)

Hiermee is M_Q afgeleid via de bladelementtheorie (3.24) en de axiale impulstheorie (3.26). Gelijkstellen levert de al bekende vergelijking (1.60) op, voor de axiale inductiefactor a . Indien het vermogen bekend is kan met behulp van (3.25) tot en met (3.27) de nauwkeurigheid van a volgens (1.60) gecontroleerd worden.

Voor windturbine B2 is het aandrijvend moment M_Q bepaald volgens de bladelementtheorie (3.24), onder diverse condities. Met behulp van (3.26) kan dan ook het geleverde vermogen P en de vermogenscoëfficiënt C_p berekend worden (zie tabel 3.4). De waarden voor C_p vallen nogal hoog uit omdat er geen rekening is gehouden met de profiefweerstand (voor dit verslag is het niet van primair belang om een correcte uitdrukking voor het geleverde vermogen te vinden). Zoals in §2.3 werd vermeld werkt het δ_3 -mechanisme als een vermogensregelaar. (Dat wil zeggen dat het geleverde vermogen

zoveel mogelijk constant gehouden wordt).

Let op: de tabelwaarden voor M_Q en P bij storm ($U=40$ m/s) zijn louter fictief omdat ze slechts gelden onder de onrealistische aannamen dat $\Omega = \text{constant}$ en dat de molen niet uit de wind gedraaid wordt (én de bladen in vaanstand gezet worden) door een beveiligingsmechanisme.

Omdat we nu de grootte van het aandrijvend moment weten kan ook de bewegingsvergelijking voor de aandrijfas behandeld worden:

$$I_{\text{Tot.}} \dot{\Omega} = N \cdot M_Q - M_{\text{LAST}} \quad (3.28)$$

Hierin is I_{tot} het totale traagheidsmoment; dus de som van het traagheidsmoment van rotor, tandwielkast en generator. Het moment van de generator is weergegeven met M_{ast} . Via bladhoekverstelling en/of regeling van de last kan de rotorhoeksnelheid constant gehouden worden. Wanneer een andere regelstrategie wordt gevolgd (bijvoorbeeld $\lambda = \text{constant}$) is de gemaakte aanname dat Ω constant is niet meer correct.

In geval van windturbine B wordt I_{tot} geschat op 1800 N.m.s² en als bij een storing de belasting plotseling wegvalt wordt (3.28):

$$\dot{\Omega} = N \cdot M_Q / I_{\text{tot}} = 1,25 \text{ rad/s}^2 \quad \text{voor } M_Q = 750 \text{ N.m (zie tabel 3.4)}$$

Tabel 3.4: Het aandrijvend moment M_Q (per blad), vermogen P (voor de gehele windturbine) en vermogenscoëfficiënt C_P voor windturbine B₂ (scharnier+veer blad), volgens de bladelementtheorie onder verschillende condities.

U (m/s)	conditie δ_3 (°)	δ (°)	M_Q (kNm)	P (kW)	C_P (-)
10	0	0	0,75	27	0,55
10	0	10	0,71	26	0,52
10	0	20	0,62	22	0,46
10	0	30	0,48	17	0,36
40	0	0	23	820	0,26
40	0	10	22	790	0,25
40	30	0	20	740	0,23
40	30	10	20	710	0,23

Indien de rotorhoeksnelheid oorspronkelijk gelijk was aan 12 m/s zal dan Ω na 1 omwenteling (0,52 s) gestegen zijn tot 12,7 rad/s; oftewel een toename met 6 %. Ondanks het feit dat Ω nu niet meer constant is kunnen toch de in hoofdstuk 2 en 3 afgeleide formules gebruikt worden via de al eerder toegepaste quasistationaire benadering: voor elk tijdstip dient in de uitdrukkingen voor de klaphoeken, voor Ω de op dat moment geldige waarde genomen te worden. Dus de klaphoeken zijn alleen afhankelijk van de momentane waarde van Ω en veranderen mee met de in de tijd toenemende Ω .

Indien de rotorhoeksnelheid (periodiek) snel verandert (met een frequentie van minstens orde grootte (ω_b) is de quasistationaire benadering niet meer geldig en verandert bewegingsvergelijking (1.45) in een erg ingewikkelde niet-lineaire differentiaalvergelijking ten gevolge van de $\Omega(t)$ termen (hoeksnelheid als functie van de tijd). Deze differentiaalvergelijking kan alleen numeriek opgelost worden.

3.4 Het coriolismoment

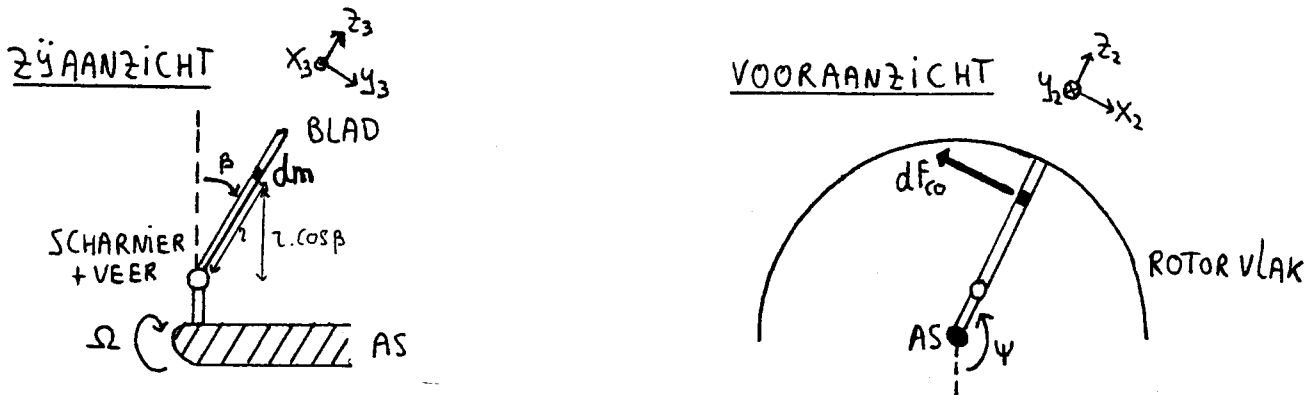
Naast het aerodynamische moment (3.23) treedt er een extra periodiek moment op ten gevolge van de klapbeweging: het coriolismoment. Evenals de centrifugaalkracht is de corioliskracht een schijnkracht en volgt uit de dynamische vergelijking van Euler (in de y-richting; zie appendix 1):

$$M_{Co} = I \cdot \dot{\omega}_y + I \cdot \omega_x \cdot \omega_z + m_b \cdot (\bar{r}_g \times \bar{a}_s)_y \approx 2 \cdot I \cdot \Omega \cdot \beta \cdot \dot{\beta}$$

$$\text{MET } \bar{\omega}_b = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \\ -\Omega \cdot \cos \beta \\ -\Omega \cdot \sin \beta \end{bmatrix} \quad \text{VOLGENS (1.19) MET } \dot{\gamma} = 0 \quad (3.29)$$

$$\text{EN } (\bar{r}_g \times \bar{a}_s)_y = 0 \quad \text{INNERS } \bar{r}_g = [0, 0, x_g \cdot R] \\ \text{EN } \bar{a}_s = [0, \Omega^2 \cdot e \cdot R \cdot \sin \beta, -\Omega^2 \cdot e \cdot R \cdot \cos \beta] \quad (\text{§1.1})$$

Deze uitdrukking kan ook afgeleid worden uit de definitie voor de corioliskracht (zie figuur 3.5):



Figuur 3.5: De corioliskracht dF_{co} op een bladelement dm , ten gevolge van de klappbeweging $\dot{\beta}$ en rotorhoeksnelheid Ω .

$$\vec{F}_{co} = -2 \cdot m \cdot \vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}$$

MET $\vec{v}_{rel} = \dot{\beta} \cdot r$ DE RELATIEVE SNELHEID (T.O.V. $X_2 Y_2 Z_2$ OFTEWEL (3.30) HET SCHARNIER) T.G.V. DE KLAPBEWEGING

EN Ω DE HOEKSNELHEID VAN $X_2 Y_2 Z_2$

Er volgt nu:

$$dF_{co} = -2 \cdot \Omega \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dm = 2 \cdot \Omega \cdot r \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta} \cdot dm \approx 2 \cdot \Omega \cdot r \cdot \beta \cdot \dot{\beta} \cdot dm$$

$$\text{EN DUS } M_{co} = \int_0^{R \cdot (1-e)} r dF_{co} = 2 \cdot I \cdot \Omega \cdot \beta \cdot \dot{\beta} \quad (\text{IDENTIEK AAN (3.29) N.B.V. (6)}) \quad (3.31)$$

$$\text{MET } s = r \cdot \cos \beta + e \cdot R$$

Indien door de aan de rotor gekoppelde belasting de rotorhoeksnelheid Ω constant wordt gehouden zal, zoals reeds vermeld, het coriolismoment een aswringing veroorzaken. Door het aanbrengen van een vrijheidsgraad in het rotorvlak (de zogenaamde lag) kan de rotor van het variërend coriolismoment ontlast worden. Dit kan gebeuren via een extra scharnier; dit is in de helicopterbouw de gebruikelijke oplossing. Analooq aan de klappbeweging kan de bewegingsvergelijking in de lagrichting bepaald worden. Hierbij blijkt dat er in deze richting nauwelijks aerodynamische demping optreedt zodat er dempers in de constructie opgenomen dienen te worden. Tevens dient ervoor gezorgd te worden dat er geen instabiliteiten kunnen ontstaan ten gevolge van de

koppeling tussen de lagbeweging en de andere vrijheidsgraden: de klapbeweging en eventueel bladhoekverstelling. Voorts kan de lagbeweging in combinatie met de toren leiden tot instabiel gedrag: de zogenaamde grondresonantie. Dit is het gevolg van het feit dat de bladen in het rotorvlak kunnen buigen. Hierdoor zal het zwaartepunt van de rotor in het algemeen niet meer samenvallen met de as. Wanneer de lagbeweging zodanig is dat het zwaartepunt om de as gaat cirkelen kan hierdoor de gondel en toren gaan meetrillen, waardoor er een gekoppelde trilling ontstaat (die instabiel kan zijn). Op de lagbeweging zal in dit verslag niet dieper worden ingegaan.

Het effect van het coriolis- en aerodynamisch moment is dat het aandrijvend moment M_Q periodiek is. Dit houdt in dat ook hierdoor het afgegeven vermogen varieert. Als dit ongewenst is (bijvoorbeeld bij koppeling aan het openbare net) kan dit vermeden worden door de as en tandwielkast flexibel te maken. Een andere oplossing is om de (periodieke) overtollige energie tijdelijk op te slaan in de rotorbeweging door toe te laten dat deze kan versnellen (en vertragen); zodat de rotor als vliegwiel fungeert.

Concluderend kan gesteld worden dat door het beperken van het bladwortelmoment via een klapscharnier, de klapbeweging tevens een variërend moment veroorzaakt in het rotorvlak (de wet van behoud van ellende slaat ook hier toe). Dit variërend moment ten gevolge van de klapsnelheid (voor een blad) zal nu kwantitatief behandeld worden. Uit (3.23) en (3.29) volgt:

$$\Delta \Pi_Q = \Pi_{C0} + \tilde{\Pi}_Q \quad \text{HET TOTALE VARIËREND MOMENT (IN HET ROTORVLAK)}$$

T.G.V. DE KLAPSNELHEID

$$\text{MET } \Pi_{C0} = I \cdot \Omega^2 \cdot \beta^1 \cdot 2\beta \quad \text{CORIOLIS MOMENT (3.29)}$$

$$\text{EN } \tilde{\Pi}_Q = -I \cdot \Omega^2 \cdot \beta^1 \cdot \gamma \cdot \left\{ \frac{\cos \delta - \eta}{\lambda} \cdot t_3 + \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \beta \cdot \sin \psi + \frac{1}{2} (-\theta_1 \cdot t_4 + \theta_0 \cdot t_5) \right. \quad (3.32)$$

$$\left. - \frac{R \cdot R}{\lambda} \cdot t_4 \cdot \sin \delta \cdot \beta \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi - \frac{R \cdot R}{\lambda} \cdot t_4 \cdot \cos \delta \cdot \cos \psi - \frac{1}{2} \cdot t_4 \cdot \beta^1 \right\}$$

(OFTEWEL $\tilde{\Pi}_Q$ BEVAT ALLE TERMEN VAN Π_Q VAN (3.23) MET β^1 ERIN)

Het moment \tilde{M}_Q wordt veroorzaakt door een verandering van de hoek $\psi = U_p / U_t$ ten gevolge van de klapsnelheid $-\beta^1 \cdot r$ (1.38). Door de klapbeweging neemt dus de aanstromingshoek α af en dientengevolge ook de lift en het aandrijvend moment.

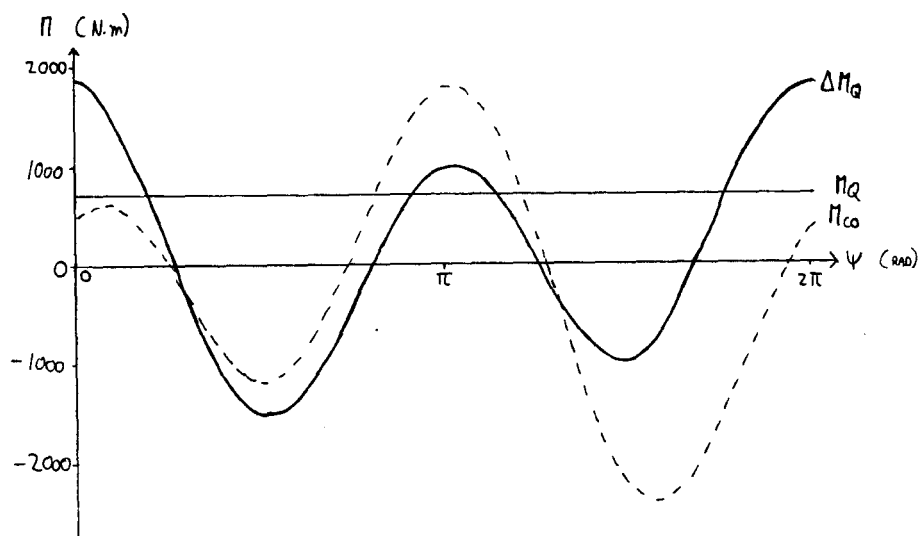
Met behulp van de uitdrukking voor β (1.10) en enkele goniöformules kan (3.32) geschreven worden als harmonische met grondfrequentie Ω .

Voor windturbine B (per blad) geldt onder invloed van alle excitaties volgens (3.29) en (3.32):

$$\Delta M_Q = 330 + 360 \cdot \cos \psi - 270 \cdot \sin \psi + 1200 \cdot \cos 2\psi - 60 \cdot \sin 2\psi + 3 \cdot \cos 3\psi - 12 \cdot \sin 3\psi - 0,1 \cdot \cos 4\psi - 0,4 \cdot \sin 4\psi \quad (3.33)$$

$$M_{Co} = -600 \cdot \cos \psi + 470 \cdot \sin \psi + 1270 \cdot \cos 2\psi + 300 \cdot \sin 2\psi \quad (3.34)$$

(zie ook figuur 3.6)



Figuur 3.6: Het coriolismoment M_{Co} en het totale variërend moment in het rotorvlak (ten gevolge van de klapsnelheid) ΔM_Q als functie van de azimuthhoek ψ , voor windturbine B; ter vergelijking wordt tevens het gemiddelde aandrijvend moment M_Q (3.24) weergegeven. (De gegeven waarden zijn geldig voor een blad).

Afhankelijk van het aantal bladen zullen er bepaalde harmonische wegvallen bij de sommatie over de rotorschijf (analoog aan §1.6). Bijvoorbeeld als de rotor uit 2 bladen bestaat blijven de 2^e, 4^e orde termen over.

In het geval van windturbine B is $N=3$ zodat alleen de 3^e orde termen overblijven bij de bladsommatie. Dus door het aantal bladen groter of gelijk aan 3 te nemen kan de variatie in het totaal geleverde vermogen (tot nul) gereduceerd worden.

Tabel 3.5: De maximale absolute waarden (per blad) voor het aandrijvend moment ΔM_Q (3.32) en het coriolismoment M_{Co} voor windturbine B_2 (scharnier+veer blad) onder verschillende excitaties; ter vergelijking wordt ook weer M_Q volgens (3.24) vermeld.

excitatie	$ \Delta M_Q $ max (kNm)	$ M_{Co} $ max (kNm)	M_Q (3.24) (kNm)
1) alleen rechte aanstroming	0	0	0,75
7) alle excitaties	1,9	2,3	0,71
9) storm + alle excitaties	4,4	6,4	22
11) storm + alle excitaties + δ_3	3,4	4,3	20

In tabel 3.5 worden de maximale absolute waarden voor ΔM_Q en M_{Co} vermeld voor een enkel blad, bij een viertal verschillende excitaties. Deze dienen vergeleken te worden met het aandrijvend moment M_Q volgens (3.24), of tabel 3.4. Ten gevolge van de klapvrijheid blijkt M_Q vrij fors te kunnen variëren wat leidt tot een grote interne materiaalbelasting. In het geval van $U=10$ m/s met alle excitaties kan ΔM_Q zelfs ruim 2,5 keer zo groot worden dan het gemiddelde aandrijvend moment M_Q . Deze grote variatie in het aandrijvend moment wordt vooral veroorzaakt door het kruien. (Voor windturbine-A is q veel kleiner en is ΔM_Q hooguit 10% van M_Q gemiddeld). Bij het ontwerpen van een windmolen met een vaanmechanisme dient men hiermee rekening te houden. Uit de tabel blijkt verder dat ΔM_Q in het algemeen kleiner is dan het coriolismoment M_{Co} ; oftewel de term \tilde{M}_Q in (3.32) ten gevolge van de afname van de lift (ten gevolge van de klapbeweging) beperkt het ongunstige effect van M_{Co} enigszins.

Aangezien ΔM_Q evenredig is met β' zal deze variabele term van het aandrijvend moment toenemen indien de veerstijfheid kleiner worden; immers dan neemt zowel de klaphoek als de klapsnelheid toe. Om ΔM_Q zoveel mogelijk te beperken dient K dus juist zo groot mogelijk genomen te worden in tegenstelling tot het geval van M_r . Voor de keuze van K zullen deze twee effecten tegen elkaar afgewogen dienen te worden.

3.5 Het moment op gondel en toren

Het moment dat op de bladen werkt wordt, via de naaf doorgegeven aan de gondel (en toren). Met behulp van de coördinatentransformatie (1.13) volgt na bladsommatie over N bladen het moment voor de gondel (ten opzichte van $X_1 Y_1 Z_1$):

$$\bar{M}_{\text{GONDEL}} = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \beta \cdot \sin \psi & -\cos \beta \cdot \sin \psi \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \psi & -\sin \beta \cdot \cos \psi & \cos \beta \cdot \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -M_r \\ -M_Q \\ -M_\theta \end{bmatrix} \approx \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} -M_r \cdot \cos \psi \\ -M_Q \\ -M_r \cdot \sin \psi \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

MET M_θ HET BLADTORSIEMOMENT

M_θ wordt verwaarloosd ten opzichte van M_r en M_Q . Met gebruik van (3.1) volgt er:

$$M_x = \sum_{k=0}^{N-1} K \cdot \left(-\frac{1}{2} \beta_{1c} - \beta_0 \cdot \cos \psi - \frac{1}{2} \beta_{1c} \cdot \cos 2\psi - \frac{1}{2} \beta_{1s} \cdot \sin 2\psi \right) \quad \text{PITCHING MOMENT} \quad (3.36)$$

$$M_y = \sum_{k=0}^{N-1} -M_Q \quad \text{MET } M_Q \text{ DESOM VAN (3.24) EN (3.32)} \quad \text{AANDRIJVEND MOMENT (3.37)}$$

$$M_z = \sum_{k=0}^{N-1} K \cdot \left(-\frac{1}{2} \beta_{1s} - \beta_0 \cdot \sin \psi + \frac{1}{2} \beta_{1s} \cdot \cos 2\psi - \frac{1}{2} \beta_{1c} \cdot \sin 2\psi \right) \quad \text{YAWING MOMENT} \quad (3.38)$$

Voor alle duidelijkheid wordt erop gewezen dat (3.36) tot en met (3.38) alleen geldig zijn voor evenwichtstoestanden (als het instationair gedrag is uitgedempt) en niet toegepast mogen worden tijdens bijvoorbeeld windstoten.

Vergelijking (3.36) en (3.38) laten zien dat 1-P excitaties voor het blad (onder andere scheve aanstroming) die leiden tot de kantelhoeken β_{1c} en β_{1s} , aan de gondel (per blad) worden doorgegeven als 2-P excitaties alsmede een constant moment.

Aangezien de veerstijfheid K de verhouding β_{1s}/β_{1c} (2.8) en (2.14) beïnvloedt, kan ook de verhouding tussen M_x en M_z veranderd worden via K .

Een constante belasting op het blad (rechte aanstroming) resulteert

per blad in een 1-P excitatie voor de gondel via de klaphoek β_0 .

Omdat er over alle bladen gesommeerd dient te worden is het weer afhankelijk van het aantal bladen welke harmonische doorgegeven worden aan de gondel plus toren.

Het moment M_y is het totale aandrijvend moment op de as en is in de vorige twee paragrafen al besproken. Vergelijking (3.37) is in feite al toegepast in (3.26).

De twee andere componenten van het moment werken op de gondel en toren. De gondel wordt als het ware "meegetrokken" met de scheefstand van de rotor (β_{1c} en β_{1s}). M_x probeert om de gondel om de X_1 -as te laten kantelen: het pitching moment. M_z werkt om de Z_1 -as en is het yawing moment. De fundering en de toren zelf dienen deze momenten te weerstaan. Naast het gebruik van flexibele bladen wordt ook wel uitgegaan van flexibele torens, die onder invloed van genoemde momenten doorbuigen en torderen. Met een flexibele toren wordt de gehele windturbine constructie flexibel en dient voor het beschrijven van het gedrag een nieuwe allesomvattende, bewegingsvergelijking afgeleid te worden. Hierop wordt niet verder ingegaan.

Het gevolg van de optredende momenten (3.35) voor de windturbine is dat het kruimechanisme het yawing moment M_z op moet vangen. Indien er geen kruimechanisme aanwezig is en de gondel vrij kan roteren, zal de gondel onder invloed van het yawing moment gaan draaien. Dit uit de wind draaien gaan net zo lang door totdat er evenwicht is met het terugwerkende moment ten gevolge van de scheve aanstroming. Stel door een of andere excitatie (bijvoorbeeld windgradiënt of gravitatie) is β_{1s} positief zodat

$$M_{\text{yawing}} = -N \cdot 1/2 \cdot K \cdot \beta_{1s}$$

(het gemiddelde moment van de harmonische in (3.38) is nul) de gondel om de Z -as (in negatieve richting) gaat draaien. De hierdoor veroorzaakte scheve aanstroming (met δ negatief, zie figuur 2.1) zorgt ervoor dat volgens (2.13) β_{1s} afneemt; als β_{1s} gelijk aan nul is geworden, is er evenwicht. Een soortgelijk verhaal kan gehouden worden als een excitatie β_{1s} negatief maakt. De constante scheve aanstromingshoek δ waarbij er evenwicht bestaat wordt de yawhoek genoemd. Deze δ_{yaw} wordt simpelweg bepaald door de uitdrukking voor β_{1s} ten gevolge van de desbetreffende excitatie en scheve aanstroming gelijk te stellen aan nul.

Bijvoorbeeld in het geval van alleen gravitatie wordt de yawhoek

gevonden door (2.7) gelijk te nemen aan minus (2.13), waaruit volgt:

$$\delta_{YAW} = \frac{\lambda \cdot X_g \cdot R \cdot m_b \cdot g}{I \cdot \Omega^2 \cdot \epsilon + K} \cdot \frac{t_4}{t_3} \quad (3.39)$$

MET $\cos \delta_{YAW} \approx 1$ EN $\sin \delta_{YAW} \approx \delta_{YAW}$
 EN DETERMINANT Δ VOLGENS (2.7) ONGEVEER GELIJK AAN
 Δ VOLGENS (2.13)

Voor molen B is dan ten gevolge van de gravitatie δ_{yaw} gelijk aan $9,8^\circ$. Een soortgelijke uitdrukking als (3.39) kan afgeleid worden in geval van alleen een windgradiënt. Dan blijkt dat voor windturbine B er geen evenwichtstoestand meer mogelijk is en is er een extra kruimechanisme (bijvoorbeeld een windvaan) nodig om de molen op de wind te houden.

Het terugwerkende yawing moment ten gevolge van scheve aanstroming kan opgevat worden als een bijdrage aan het totale zelfrichtend moment (dat ook bij windturbines zonder klapscharnier optreedt). Er is sprake van een zekere analogie met §2.5.2. In die paragraaf werd aangetoond dat ten gevolge van de flexibele rotorconstructie een eventuele optredende asymmetrische aanstroming resulteert in een bladresponsie dat de oorspronkelijke asymmetrie (volledig) opheft (2.48). Ook in het geval van de kruibeweging blijkt dat het blad ("vanzelf") een zodanige beweging uitvoert wat resulteert in een gondelmoment dat de asymmetrie (bijvoorbeeld scheve aanstroming) tegenwerkt.

De bijdrage aan het zelfrichtend moment (in de Z_1 -richting) is volgens (3.38) en (2.13) gelijk aan:

$$M_{ZELFRICHTEND} = -\frac{1}{2} \cdot N \cdot K \cdot \rho_0 \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot \frac{\epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}}{\left(\epsilon + \frac{K}{I \cdot \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2} \cdot t_4\right)^2} \quad (3.40)$$

Voor windturbine B is voor $\delta = 10^\circ$ de bijdrage aan het zelfrichtend moment volgens (3.40) gelijk aan -27 N.m.

Voor windturbines met stijve bladen zonder klapscharnier ($K \rightarrow \infty$) maar wel met een kegelhoek β_0 wordt uitdrukking (3.40):

$$M_{ZELFRICHTEND} = -\frac{t}{4} \cdot N \cdot \rho_0 \cdot \frac{\sin \delta}{\lambda} \cdot t_3 \cdot I \cdot \Omega^2 \approx -\frac{\rho \cdot C_{L\alpha} \cdot C \cdot R^4 \cdot \Omega^2 \cdot N \cdot \beta_0}{12 \cdot \lambda} \cdot \delta \quad (3.41)$$

VOOR KLEINE HOEKEN δ EN (CONSTANTE) BLADKOORDE

voor kleine hoeken δ en constante bladkooorde.

(Het zelfrichtend moment (3.41) volgt ook meteen uit $M_z = -N.M_r \sin \psi$ (3.35) en de excitatie ($M_r = M_e$ voor een stijf blad) ten gevolge van de scheve aanstroming (2.15).

Voor een windturbine met $K \rightarrow \infty$ en dezelfde geometrie als windturbine B is, indien de kegelhoek $\beta_0 = 5^\circ$ is en de scheve aanstromingshoek $\delta = 10^\circ$ bedraagt, het zelfrichtend moment volgens (3.41) gelijk aan -140 N.m ; zodat deze stijve rotor stabielere op de wind staat dan de flexibele rotor.

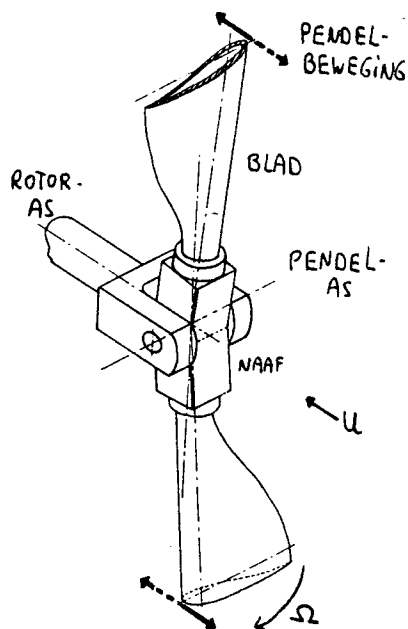
N.B.: -In de berekening voor het yawing moment is geen rekening gehouden met een eventuele yawarm (rotor-toren afstand f) waardoor een zijdelingse kracht op de windturbine ook voor een moment zorgt.

-Een belangrijke bijdrage in het zelfrichtend moment wordt veroorzaakt doordat de geïnduceerde snelheid niet uniform over de rotorschijf is verdeeld. Dit effect valt ook buiten het bestek van dit verslag.

Naast de momenten (3.35) geeft de naaf ook de spanningen en dwarskrachten, die op de bladen werken, door; bijvoorbeeld de aerodynamische dwarskracht D_{ax} (1.53) en het gewicht van de rotor. Voor een verdere uitwerking van de belastingen op toren en fundatie wordt verwezen naar de desbetreffende literatuur.

Analoog aan de bladen kan de gondel ontlast worden van de optredende momenten door de naaf scharnierend te monteren. Een bij windturbines toegepaste techniek is om twee bladen stijf aan de naaf te bevestigen, terwijl de naaf scharnierend wordt opgehangen: de zogenaamde pendelnaaf (ookwel: wiprotor of see-saw rotor met teetering hub; zie figuur 3.7). Deze constructiemethode is simpeler (slechts 1 centraal scharnier nodig) en dus goedkoper dan die waarbij de bladen onafhankelijk van elkaar kunnen scharnieren. De onderling vaste bevestiging van beide bladen geeft geen problemen; immers de bladen bewegen volgens (1.10) toch al in een plat vlak (namelijk het tipvlak) met 180° faseverschil (met $\beta_0 = 0$ en ook excentriciteit $e = 0$).

De centrifugaalkrachten van beide bladen houden elkaar via het middenstuk (naaf) in evenwicht. Er is dus geen veerwerking zodat de bladen niet meer kunnen reageren op windvlagen (maar dus wel op 1-P excitaties). Een methode om ook het bladwortelmoment te verkleinen is om de pendelnaaf te voorzien van een vaste kegelhoek β_0 (preconing). Het optredende bladwortelmoment wordt dan verminderd door



Figuur 3.7: De pendelnaaf.

het zo ontstane centrifugaalmoment. Hierbij dient bedacht te worden dat de centrifugaalwerking blijft bestaan bij het plotseling wegvallen van de wind (downgust). De pendelnaaf dient daarom bestand te zijn tegen buigmomenten naar voren.

De methode van preconing wordt ook toegepast bij stijve rotorconstructies.

Tot nu toe is er in deze paragraaf van een evenwichtstoestand voor β uitgegaan, zodat de uitdrukkingen uit hoofdstuk 2 gebruikt mogen worden. In geval van bijvoorbeeld windstoten is het gedrag dynamisch van aard. De belasting op de bladen is nu niet langer meer een 1-P excitatie maar beslaat een groot frequentiegebied. Een analytische uitwerking zou kunnen geschieden via de 2^e orde benadering. Als slot van deze paragraaf volstaan we met een opmerking over het belangrijkste aspect van het instationaire gedrag, namelijk mogelijke instabiliteiten. Zoals reeds vermeld zal het blad ten gevolge van de windvlagen voornamelijk in zijn eigenfrequentie ω_b worden aangeslagen (resonantie). Hieruit volgt samen met (3.35) dat er hoofdzakelijk een tweetal frequenties worden doorgegeven aan de gondel plus toren, namelijk:

$$\omega_b + \Omega \text{ en } \omega_b - \Omega$$

met gebruik van de gonioformules voor producten, onder andere:

$$\cos \psi \cdot \cos \omega_b \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \cos (\omega_b + \Omega) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \cos (\omega_b - \Omega) \cdot t \quad (3.42)$$

$$\text{MET } \psi = \Omega \cdot t$$

Bij het bepalen van het totale gondelmoment dient weer over het aantal bladen gesommeerd te worden. Hierbij dient nu de algemene vergelijking (A.18), met n niet geheel, uit de appendix gebruikt te worden. (Deze vergelijking geeft in feite een soort versterkingsfactor $\sin(n \cdot \pi) / \sin(n \cdot \pi / N)$ aan, waarmee de desbetreffende frequentie n wordt doorgegeven aan gondel plus toren). Naast de door de gondel doorgegeven excitaties wordt de toren ook direct belast door de wind. Een belangrijke periodieke excitatie hiervan is die ten gevolge van de bladpassage met frequentie $N \cdot \Omega$ (de bladpasseerfrequentie).

Voor de periodieke excitaties die de toren in zijn eigenfrequentie aanslaan zijn van belang. Bij het ontwerp zal ervoor gezorgd moeten worden dat de stijfheid van de toren zodanig is dat de excitaties weerstaan worden en de eigenfrequentie zodanig dat er geen instabiel gedrag kan ontstaan. Dit laatste komt er in de praktijk op neer dat de eigenfrequentie niet mag samenvallen met een dominante excitatiefrequentie en duidelijk moet afwijken van de eigenfrequenties van de andere componenten van de constructie (gondel en transmissie). Indien men de eigenfrequentie van de toren onder de laagste excitatiefrequentie kiest spreekt men van een slappe toren; indien de eigenfrequentie van de toren boven de hoogste excitatiefrequentie ligt noemt men de toren stijf.

HOOFDSTUK 4: HET GEDRAG VAN EEN FLEXIBEL BLAD

In het voorafgaande is steeds uitgegaan van het scharnier-veer blad. Een flexibel gedrag van de rotor kan ook verkregen worden door de bladen zelf flexibel te maken en die stijf aan de naaf te bevestigen. (Ook een tussenvorm is mogelijk: een stijf blad met alleen de bladwortel flexibel). Een voordeel hiervan is dat de rotorconstructie eenvoudiger wordt. Daarom is men in de heliporterbouw de laatste jaren overgegaan op scharnierloze rotors. De bladhoekverstelling kan eventueel geschieden via tordering van het flexibele blad.

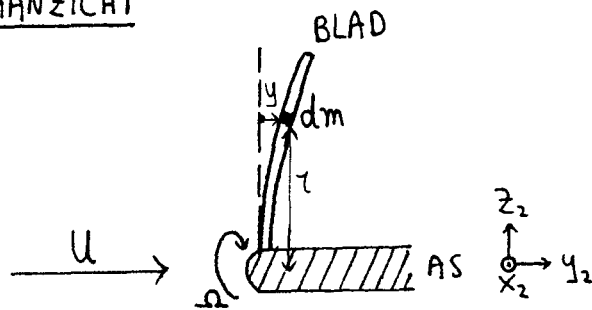
In dit hoofdstuk wordt het gedrag van een flexibel blad summier weergegeven. Zie voor een uitgebreide behandeling [2], hoofdstuk 9. Het belang van dit hoofdstuk is om aan te tonen dat ten eerste, in geval het blad flexibel is, een analytische behandeling niet meer mogelijk is zodat men gebruik dient te maken van de computer.

Ten tweede dat bij een eerste orde benadering het computergebruik omzeild kan worden omdat het gedrag van het flexibele blad benaderd kan worden door een equivalent scharnier-veer blad.

N.B.: In de heliporterbouwliteratuur worden deze flexibele bladen juist aangeduid met "rigid" (stijf). Het woord "rigid" slaat dan op het feit dat er geen (klap)scharnieren aanwezig zijn.

4.1 De bewegingsvergelijking van een flexibel blad

Het blad zal onder invloed van onder andere de aerodynamische krachten uit het rotorvlak buigen. De uitwijking van een bladelement noemen we $Y(r,t)$ en is dus een functie van de straal van het desbetreffende blad en de tijd (zie figuur 4.1; deze figuur is te vergelijken met figuur 1.1 voor het scharnier-veer blad). Omdat de excentriciteit gelijk aan nul is is er nu geen verwarring meer mogelijk omtrent de straal (onderscheid r en s); in dit hoofdstuk zal r gebruikt worden voor de afstand tot de as. De krachten die op een

ZY AANZICHT

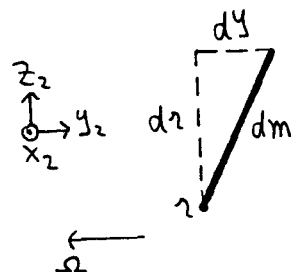
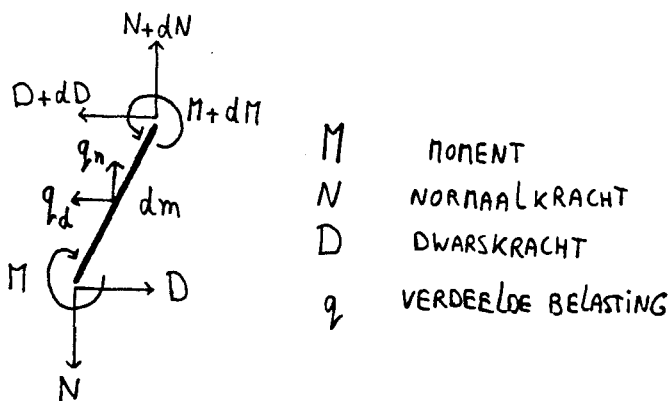
Figuur 4.1: De buiging Y (op afstand r) van het flexibele blad.

bladelement werken zijn weergegeven in figuur 4.2. Als de gravitatie wordt verwaarloosd bestaat de verdeelde belasting (kracht per lengte eenheid in normaalrichting) q_n alleen uit een centrifugaal term:

$$q_n = \mu \cdot \Omega^2 \cdot r \quad (4.1)$$

MET μ DE MASSA PER LENGTE EENHEID

De verdeelde belasting q_d (dwarsrichting) bestaat uit de aerodynamische- en traagheidskrachten. De bewegingsvergelijking kan nu afgeleid worden uit de evenwichtsvergelijkingen:

ZY AANZICHT

Figuur 4.2: De optredende krachten en momenten op een bladelement dm (van figuur 4.1).

$$\begin{cases} N + dN - N + q_n \cdot dr = 0 \\ D + dD - D + q_d \cdot dr - \mu \cdot dr \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \\ M + dM - M + D \cdot dr - N \cdot dy = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

MET N NORMAAL KRACHT
 D DWARS KRACHT
 EN M BUIGMOMENT

Hierbij is uitgegaan dat de uitwijkingen klein blijven zodat de massatraagheidskrachten ten gevolge van de hoekverdraaiing verwaarloosd kunnen worden (bij het moment evenwicht); tevens blijft de straal r van een massadeeltje constant. (Ook de materiaaldemping wordt verwaarloosd).

Uit (4.1) en (4.2) volgt meteen voor de normaalkracht:

$$N = \int_0^R \mu \cdot \Omega^2 \cdot r \cdot dr \quad (4.3)$$

Eliminatie van D levert:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} = -\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(N \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) = q_d - \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(N \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \quad (4.4)$$

Uit de elasticiteitstheorie volgt het verband tussen het buigmoment M en de uitwijking y (een constitutieve vergelijking):

$$M = E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \quad (4.5)$$

MET $E \cdot I$ DE STYFHEID

Als we voor de verdeelde belasting $\partial F / \partial r$ schrijven, krijgen we tenslotte de gevraagde vergelijking:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(N \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial r} \quad (4.6)$$

BUIGING CENTRIFUGAAL WERKING TRAAGHEID BELASTING

met $dN/dr = -qn$

Zowel de stijfheid $E.I$ als de massadichtheid μ zullen in het algemeen functies zijn van r . (Het blad is door de twee functies $\mu(r)$ en $E.I(r)$ vastgelegd).

4.2 De bladmodes en eigenfrequenties

In deze paragraaf alsook in §4.3 gaan we er vanuit dat er op het blad geen luchtkrachten werken (het blad bevindt zich in vacuüm). Bij afwezigheid van aerodynamische en andere belastingen wordt (4.6):

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(E.I. \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(N. \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \mu. \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Deze homogene vergelijking kan opgelost worden door te stellen dat:

$$y(r,t) = X(r). Z(t) \quad (4.8)$$

Invullen van (4.8) in (4.7) en scheiding van de variabelen r en t (en vervolgens delen door $Y=X.Z$ en linker- en rechterlid gelijkstellen aan $\lambda^2 \cdot \Omega^2$) levert twee aparte vergelijkingen op voor X en Z :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left(E.I. \frac{d^2 x}{dx^2} \right) - R^2 \frac{d}{dx} \left(N. \frac{dx}{dx} \right) - \mu. \lambda^2. \Omega^2. R^4. X = 0 & (4.9) \\ \frac{d^2 z}{d\psi^2} + \lambda^2. z = 0 & (4.10) \end{cases}$$

MET $x = \frac{r}{R}$ DIMENSIELOZE STRAAL

$\psi = \Omega t$ AZIJKHOEK

EN λ EEN CONSTATE (NIET TE VERWARREN MET DE SNEELOPENDHEID)

In vergelijking (4.10) kan de vergelijking voor een harmonische oscillator herkend worden met als bekende oplossing:

$$Z(\psi) = Z_0 \cdot e^{i\lambda\psi} \quad (4.11)$$

MET $\omega_b = \lambda \cdot \Omega$ EIGEN FREQUENTIE

$Z(\psi)$ is op te vatten als de klaphoek van het flexibele blad. Via (4.9) kunnen de blad(buigings)vormen X oftewel modes bepaald worden voor de diverse waarden voor λ . Bij vergelijking (4.9) horen nog de volgende randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \text{BLADWORTEL } (x=0): \quad X=0 \quad \text{EN} \quad \frac{dX}{dx} = 0 \\ \text{(ONDAT HET BLAD INGEKLEED IS)} \\ \text{TIP } (x=1): \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \quad \text{EN} \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0 \quad (4.12) \\ \text{(RESPECTIEVELYK MOMENT } M \text{ EN DWARSKRACHT } D \text{ NUL)} \end{aligned}$$

Indien het flexibele blad scharnierend is opgehangen zijn de randvoorwaarden voor de bladwortel ($x=0$) als volgt

$$X=0 \quad \text{EN} \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \quad (\text{MOMENT } M \text{ NUL}) \quad (4.13)$$

Als gevolg van de randvoorwaarden bestaat er slechts voor bepaalde waarden van λ een oplossing X van (4.9); dit zijn respectievelijk de eigenwaarden en bijbehorende eigenfuncties. Als de excentriciteit $e=0$ is geldt voor de 1^e mode (wat te controleren is door invullen in (4.9) waardoor (4.3) ontstaat):

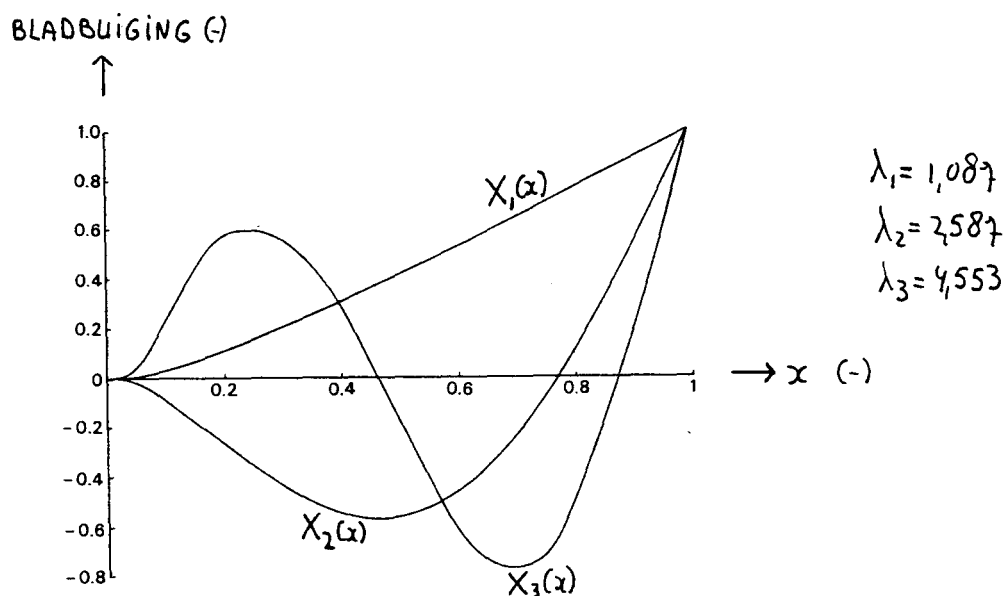
$$X_1(x) = x \quad \text{MET} \quad \lambda_1 = 1 \quad (4.14)$$

oftewel het blad is een rechte lijn met eigenfrequentie gelijk aan Ω . Bladmode 1 komt dus overeen met het in de vorige hoofdstukken behandelde stijve blad met tipuitwijking $Y=R\beta$. (Voor $\lambda_0=0$ is de oplossing $X_0=0$; oftewel de, vrij oninteressante, stationaire situatie waarin het blad niet uit het rotorvlak buigt).

Resumerend kan er gesteld worden dat de oplossing van (4.7) bestaat uit verschillende modes X_n met eigenfrequentie $\omega_n = \lambda_n \cdot \Omega$ (zie figuur 4.3). Voor de modes kan een orthogonale eigenschap afgeleid worden:

$$\int_0^1 \mu \cdot X_m \cdot X_n \, dx = \begin{cases} 0 & \text{ALS } m \neq n \\ \rho_n & \text{ALS } m = n \end{cases} \quad (4.15)$$

MET ρ_n EEN SOORT NORMERINGSFACOR VOOR DE n^e MODE



Figuur 4.3: Typische bladmodes X_n en bijbehorende eigenfrequenties ω_n voor een ingeklemd flexibel blad.

4.3 De berekening van de verschillende bladmodes en bijbehorende eigenfrequenties

Uitgaande van een uniforme stijfheids- en massaverdeling verandert de vergelijking voor een onbelast roterend blad (4.9) in (met gebruik making van (4.3)):

$$\kappa \cdot \frac{d^4 X_n}{dx^4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \cdot \frac{dX_n}{dx} \right\} - \lambda_n^2 \cdot X_n = 0 \quad (4.16)$$

MET $\kappa = \frac{EI}{\mu \cdot r^2 \cdot R^4}$ EEN DIMENSIELOOS GETAL

Van deze vergelijking is helaas geen analytische oplossing bekend, zodat zelfs voor het meest eenvoudige blad de vergelijking numeriek opgelost moet worden. Uit berekeningen (voor een helicopterblad [9]) volgt dat de diverse bladvormen volgens (4.16) niet al te veel afwijken van die voor een niet-roterend blad (die in trilling wordt gebracht). Bij een niet-roterend blad verdwijnt het centrifugaal effect ($N=0$) en is, voor enkele specifieke massa- en stijfheidsverdelingen, wel een analytische uitdrukking bekend. Voor een eerste benadering voor de modes van een roterend blad kunnen dus de modes van een niet-roterend blad genomen worden. De numerieke methoden om vergelijking (4.9) op te lossen kunnen in een tweetal groepen ingedeeld worden. De eerste methode gaat uit van een bepaalde set functies die de bladvorm dienen te benaderen. Bij de tweede methode wordt het blad verdeeld in een aantal elementen waarvoor de bewegingsvergelijkingen worden opgesteld. De partiële differentiaalvergelijking (4.9) wordt in beide gevallen vervangen door een stelsel vergelijkingen. Voorbeelden van deze twee methoden worden nu achtereenvolgens behandeld.

4.3.1 De Rayleigh-Ritz methode

Deze methode is gebaseerd op het feit dat bepaalde partiële differentiaalvergelijkingen omgezet kunnen worden in een minimalisatieprobleem. Stel we definiëren de volgende functionaal:

$$J(X) = \int_0^1 L(x, X, \frac{dX}{dx}) dx \quad (4.17)$$

met L de Lagrangiaan: het verschil tussen de kinetische- en potentiële energie van het blad. Volgens de variatierekening leidt het minimaliseren van J (bij gegeven randvoorwaarden $X(0)$ en $X(1)$) tot de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial (\frac{dX}{dx})} = 0 \quad (4.18)$$

waarbij in dit geval de mode $X(x)$ de vrijheidsgraad is.

Bewegingsvergelijking (4.9) kan analoog omgezet worden in een equivalent minimaliseringsprobleem. Een benadering voor de oplossing van het minimaliseringsprobleem kan verkregen worden door te stellen dat het minimum te schrijven is als een lineaire combinatie van N basisfuncties φ_i (te vergelijken met Fourierreeksontwikkeling):

$$X(x) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \varphi_i(x)$$

(4.19)

MET $\varphi_i(x)$ BASISFUNCTIES DIE AAN DE RANDVOORWAARDEN VOLDOEN
EN a_i COËFFICIËNTEN

Wil (4.19) een functie zijn die de functionaal J minimaal maakt, dan moet gelden dat:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \quad \text{VOOR } i=1 \text{ TOT } N \quad (4.20)$$

Kortom de bewegingsvergelijking is nu omgezet in een stelsel van N vergelijkingen voor de onbekende coëfficiënten a_i , dat numeriek opgelost kan worden. De verkregen benadering is des te beter naarmate men meer basisfuncties φ_i neemt.

Deze methode hangt samen met het principe van Rayleigh dat stelt dat een 1^e orde fout in de benadering X_n leidt tot een 2^e orde fout in de berekende eigenfrequentie λ_n . Dat wil zeggen dat met een niet al te beste benadering voor de bladvorm, de bijbehorende berekende eigenfrequentie toch vrij nauwkeurig is. De uitdrukking voor de eigenfrequentie wordt verkregen door de uitdrukking van de kinetische energie van het blad gelijk te stellen aan die van de potentiële (= elastische) energie, in de situatie dat het blad harmonisch trilt. Voor elke mode n geldt (zie figuur 4.4):

$$\omega_{b,n}^2 = \omega_{o,n}^2 + \gamma_n \cdot \Omega^2$$

$$\text{MET } \gamma_n = \frac{\int_0^l \mu \cdot x \cdot \int_0^x \left(\frac{dx_n}{dx}\right)^2 dx dx}{\int_0^l \mu \cdot X_n^2 dx} \quad \begin{array}{l} \text{EEN CONSTATE FACTOR} \\ \text{(FREQUENTIECOËFFICIËNT)} \end{array} \quad (4.21)$$

EN $\omega_{o,n}$ DE EIGENFREQUENTIE VAN HET NIET-ROTTEREND BLAD

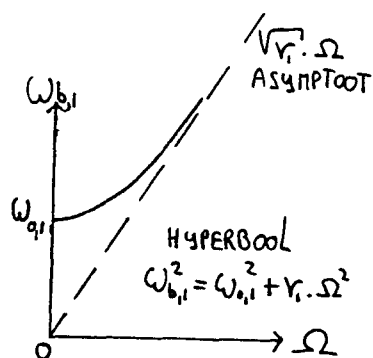
De eigenfrequentie neemt dus toe bij toenemende Ω . Dit komt omdat bij een grotere rotorhoeksnelheid de normaalspanning in het blad toeneemt ten gevolge van de centrifugaalkracht ("opstijven van het blad"). Dit effect is te vergelijken met het opspannen van bijvoorbeeld een gitaarsnaar, waarbij de toonhoogte toeneemt.

Voor grote waarden van Ω nadert ω_b voor het flexibele blad de eigenfrequentie voor een scharnierend blad (zonder veer) (1.29):

$$\omega_b = \sqrt{1+\xi} \cdot \Omega \quad \text{als } \xi = \gamma_n - 1$$

(de stippellijn in figuur 4.4).

Indien het scharnierend blad tevens wordt uitgerust met een veer (met $K = I \cdot \omega_{0,n}^2$) dan vallen de eigenfrequenties van het flexibele blad (4.21) en het scharnier-veer blad (1.29) precies samen. Door de uitbreiding van het scharnierend blad met een veer wordt juist het scharnier-veer blad verkregen dat in de vorige hoofdstukken uitgebreid besproken is! Uit de gelijkheid van de eigenfrequenties kan men concluderen dat het dynamische gedrag van het flexibele blad vergelijkbaar is met dat van het overeenkomstige scharnier-veer blad (zie ook §4.7).



Figuur 4.4: De eigenfrequentie van een flexibel blad ω_b als functie van de rotorhoeksnelheid Ω ; met γ_i een frequentiefactor.

4.3.2 De Myklestad methode

Het roterend blad wordt nu opgesplitst in N elementen (niet noodzakelijk van gelijke lengte) waarbij gesteld wordt dat de stijfheid uniform over elk element is verdeeld; de massa's worden verondersteld geconcentreerd te zijn op de grenzen van de elementen.

Zoals in §4.1 (4.2) worden nu per bladelement de evenwichtsvergelijkingen opgeschreven, uitgaande dat het blad harmonisch trilt met frequentie ω . In plaats van een partiële differentiaalvergelijking wordt nu een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen verkregen. Als de momenten en krachten op elk bladelement bekend worden verondersteld kan de buiging Y_i van elk element i worden uitgedrukt met behulp van de formules uit de balkentheorie (vergeetmijnetjes):

$$\begin{cases} Y_i = \frac{l_i^3}{3 \cdot (E.I)_i} \cdot D & \text{TEN GEVOLGE VAN DWARSKRACHT } D \\ Y_i = \frac{l_i^2}{2 \cdot (E.I)_i} \cdot M & \text{" " MOMENT } M \end{cases} \quad (4.22)$$

MET l_i DE LENGTE VAN HET i^e ELEMENT
 EN $(E.I)_i$ DE STIJFHEID " "

Met behulp van (4.22) kan er een verband gevonden worden tussen uitwijking Y_i en Y_{i+1} van het naburige element. Via substitutie van de al afgeleide vergelijkingen per bladelement wordt nu een recurrente betrekking verkregen voor het moment M_i . Uitgaande van een gegeven waarde voor de frequentie ω kunnen dan de krachten, momenten en buiging voor elk bladelement bepaald worden. De moeilijkheid is nu om die waarde voor ω te vinden die een oplossing $X(x)$ geeft die voldoet aan de randvoorwaarden. Dit kan het best gerealiseerd worden via een handige transformatie naar nieuwe variabelen, waarmee de randvoorwaarden meteen in de recurrente betrekking worden opgenomen.

Het voordeel van deze methode is dat elke bladmode X_n apart bepaald kan worden. Dit in tegenstelling tot de Rayleigh-Ritz methode waarbij bijvoorbeeld voor het bepalen van de 5^e bladmode er zeker 10 basisfuncties nodig zijn om van enige nauwkeurigheid zeker te zijn.

4.4 De oplossing van de bewegingsvergelijking

Nadat in §4.2 en §4.3 de luchtkrachten achterwege zijn gebleven (4.9) keren we nu terug naar het probleem voor een flexibel blad dat wel aerodynamisch belast wordt (4.6). Er wordt verondersteld dat de oplossing als volgt te schrijven is:

$$y(x, \psi) = R \cdot \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot Z_n(\psi) \quad (4.23)$$

MET X_n DE MODEN DIE AAN (4.9) VOLDOEN

Na substitutie van (4.23) in (4.6) met gebruikmaking van de orthogonale eigenschap (4.15) volgt er (na enig herschrijven) een vergelijking voor $Z_n(\psi)$:

$$\frac{d^2 Z_n}{d\psi^2} + \lambda_n^2 \cdot Z_n = \frac{1}{R^2 \cdot \Omega^2 \cdot \rho_n} \cdot \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x} \cdot X_n(x) dx \quad (4.24)$$

MET ρ_n VOLGENS (4.15)

EN $\frac{\partial F}{\partial x}$ DE (AERODYNAMISCHE) BELASTING (IN HET ALGEMEEN EEN PERIODIEKE FUNCTIE VAN ψ)

Indien $\partial F / \partial x$ gelijk aan nul is, dan zijn de functies Z_n weer gelijk aan de harmonische (4.11). Het probleem is nu dat elke Z_n via (4.24) niet apart bepaald kan worden. Dit komt door het feit dat de bladbelasting $\partial F / \partial x$ afhankelijk is van de klapbeweging Y (dat volgens (4.23) in het algemeen een functie is van alle $Z_n(\psi)$); immers de functies $\partial Z_n / \partial \psi$ tezamen bepalen de aanstromingshoek α . Het rechterlid van (4.24) bevat dus alle functies Z_n . Via een convergentieproces kan (4.24) opgelost worden. Men kiest eerst een benadering voor de bladbeweging (bijvoorbeeld die voor een stijf, scharnierend, blad (4.14)). Vervolgens wordt de (aerodynamische) belasting $\partial F / \partial x$ berekend waarmee het rechterlid van (4.24) bepaald kan worden; en daarna ook Z_n (voor alle n te beschouwen bladmoden), voor een kleine stap $\Delta\psi$ volgens (4.24). Met deze nieuwe waarden voor alle Z_n wordt de bladbelasting $\partial F / \partial x$ opnieuw uitgerekend en kan Z_n weer volgens (4.24) voor de volgende stap $\Delta\psi$ bepaald worden. Dit proces dient net zo lang voortgezet te worden totdat $Z_n(\psi)$ naar de gevraagde oplossing convergeert. Het zal duidelijk zijn dat ook deze oplossingsmethode numeriek aangepakt dient te worden.

Een ander nadeel van deze methode is dat volgens (4.24) ook de hogere orde aerodynamische krachten bekend dienen te zijn. Deze ontstaan omdat het blad nu trilt met hogere frequenties (voor de n^e mode is $\omega_b = \lambda_n \cdot \Omega$), waarbij de aanstromingshoek van het blad met dezelfde frequentie varieert. Bij hoge frequenties mag de quasistationaire uitdrukking voor Ma volgens §1.5 niet meer toegepast worden ($Q^* > 0,05$) en dienen de instationaire aerodynamische krachten bepaald te worden.

Aangezien het zeer moeilijk is, zo niet onmogelijk, deze krachten analytisch weer te geven, heeft het weinig zin om, bij een analytische behandeling, in het bepalen van de bladvorm wel veel modes mee te nemen. Voor een eerste analytische benadering is het daarom praktisch om slechts 1 mode te beschouwen (zie §4.7, waar aangetoond wordt dat deze aanpak niet alleen praktisch maar ook geoorloofd is).

4.5 Het bladwortelmoment

Het bladwortelmoment $M_r = M(0, t)$ voor een flexibel blad bestaat uit een aerodynamische term verminderd met de centrifugaalterm (dat het blad weer recht wil trekken) en de traagheidsterm:

$$M(0, t) = \int_0^R \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \mu \cdot \Omega^2 \cdot z - \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \cdot r \, dr \quad (4.25)$$

Met behulp van de bladvergelijking (4.6), bladmodes volgens (4.9) en veronderstelde oplossing $Y(r, t)$ volgens (4.23) kan (4.25) herleid worden tot:

$$M(0, t) = \Omega^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2 - 1) \cdot z_n \cdot \int_0^R \mu \cdot r \cdot X_n \, dr \quad (4.26)$$

Voor het bepalen van het bladwortelmoment dienen dus alle bladmodes X_n met bijbehorende eigenfrequenties λ_n bekend te zijn evenals de oplossingen z_n van de bewegingsvergelijking (4.24). Deze complexe uitdrukking (4.26) voor het bladwortelmoment dient vergeleken te worden met de uitdrukking $M = K \cdot \beta$ (3.1) voor het scharnierveer model, waarin alle optredende momenten verwerkt zijn.

Als alleen de 1^e mode wordt beschouwd geldt:

(4.27)

$$M(0,t) = (\lambda_1^2 - 1) \cdot \omega^2 \cdot R^3 \cdot Z_1 \cdot \int_0^l \mu \cdot x \cdot X_1 dx$$

4.6 De belastingsverdeling langs het blad

Voor de eenvoud behandelen we eerst het stationaire geval (alles is tijdsonafhankelijk) van een niet-roterend blad. Stel de totale verdeling van de verdeelde belasting q_d (onder andere de aerodynamische krachten en gravitatie) is bekend over het blad. Dan is volgens (4.2) tevens de verdeling van de dwarskracht bekend (ten gevolge van die belasting):

$$D(r) = \int_r^R q_d dr \quad (4.28)$$

Vervolgens kan het moment bepaald worden via:

$$M(r) = \int_r^R D dr \quad (4.29)$$

Omgekeerd kan D uit M en q_d uit D bepaald worden via differentiatie.

Als voorbeeld behandelen we nu de verdeling langs het blad van het aerodynamisch moment; M_a als functie van x (afstand tot de as):

$$M_a(x) = R \cdot \int_x^R (\tilde{x} - x) dl$$

MET \tilde{x} EEN "DUMMY" INTEGRATIE VARIABELE (AFSTAND TOT DE AS); TER
ONDSCHIEDING MET DE (VASTE) INTEGRATIE ONDERGREN x (4.30)
EN $R \cdot (\tilde{x} - x)$ DE ARM VAN HET MOMENT

Voor $x=0$ verandert (4.30) in de reeds bekende uitdrukking (1.44) voor het bladwortelmoment:

$$M_a(0) = R \cdot \int_0^l \tilde{x} \, dL$$

In het algemeen kan het aerodynamisch moment geschreven worden als een soort machtreeks in x (zie bijvoorbeeld (1.42), waarin in plaats van x de variabele nog met y wordt aangeduid):

$$M_a(x) = R \cdot \int_x^l \left\{ a_0(\tilde{x}-x) + a_1 \tilde{x}(\tilde{x}-x) + a_2 \tilde{x}^2(\tilde{x}-x) + a_3 \tilde{x}^3(\tilde{x}-x) + \dots \right\} d\tilde{x} \quad (4.31)$$

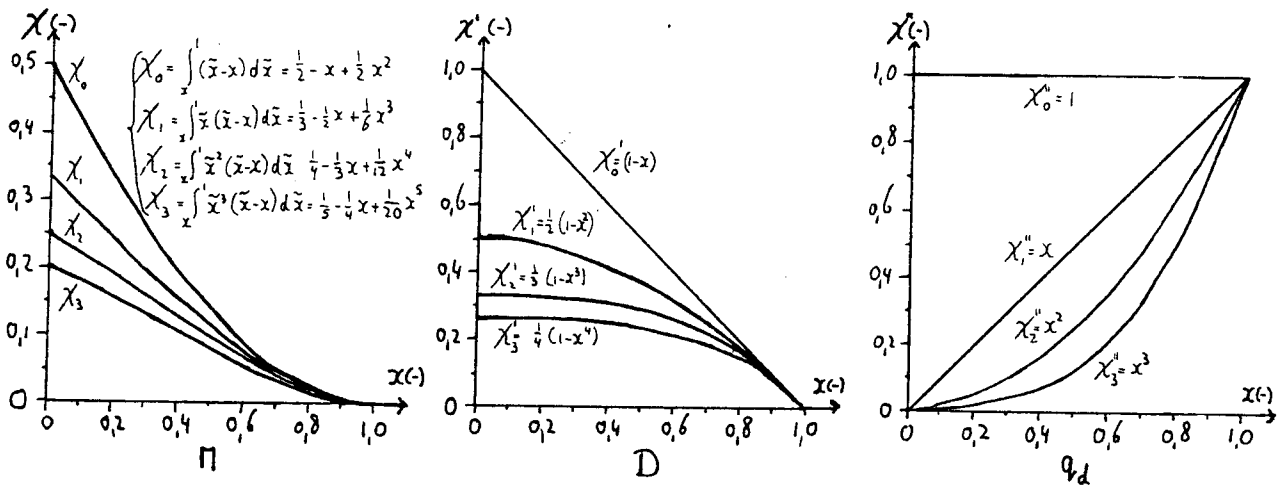
NET $dL(\tilde{x}) = (a_0 + a_1 \tilde{x} + a_2 \tilde{x}^2 + a_3 \tilde{x}^3 + \dots) d\tilde{x}$

EN a_i WILLEKEURIGE COEFFICIENTEN

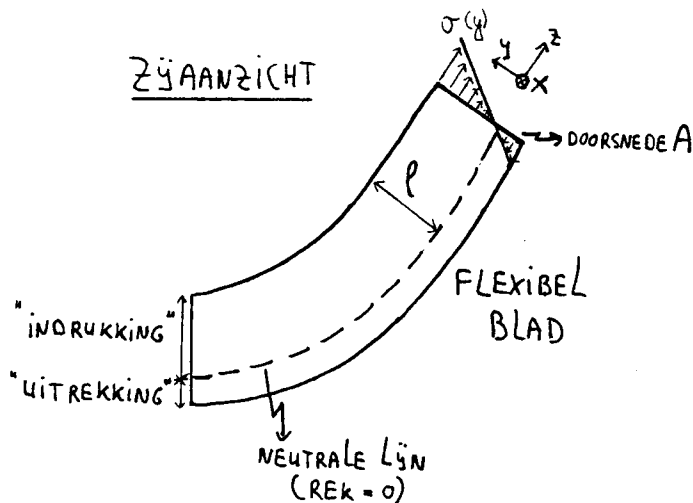
Uitwerken van (4.31) en respectievelijk 1 en 2 maal differentiëren levert, zoals gezegd, de verdelingen van het buigmoment, dwarskracht en verdeelde belasting. Indien dit alles term voor term geschiedt dan blijkt elke term z'n eigen karakteristieke verdeling te bezitten (zie figuur 4.5). Voor het concrete geval van het aerodynamische moment M_a volgens (1.44) is met behulp van (1.42) en figuur 4.5 te concluderen dat de termen van (1.44) met t_3 erin de bekende driehoeksbelasting ($\chi_1'' = x$) hebben; de termen met t_4 hebben een kwadratische verdeling ($\chi_2'' = x^2$) en tenslotte de term met t_5 erin is verdeeld volgens $\chi_3'' = x^3$ (de dubbele accent betekent hier 2 maal differentiëren naar x). Uit de figuur volgt verder dat, zoals te verwachten was, bij ingeklemde bladen het moment maximaal is bij de bladwortel.

Belastingen ten gevolge van traagheid, gravitatie en centrifugaalkrachten zijn afhankelijk van de massa. Daardoor zijn ook de verdelingen van deze belastingen afhankelijk van de massaverdeling langs het blad. Uitgaande van een bepaalde massaverdeling kunnen dan ook hier weer de belastingverdelingen bepaald worden met behulp van (4.28) en (4.29).

Voor een roterend blad moet ook rekening gehouden worden met de variërende doorbuiging Z en de centrifugaalwerking. Analoog aan (4.25) geldt voor het moment op afstand r_0 :



Figuur 4.5: De belastingsverdelingen χ_1 (buigmoment M), eerste afgeleide χ_1' (dwarskracht D) en tweede afgeleide χ_1'' (verdeelde belasting q_d) langs het blad (dus als functie van x).



Figuur 4.6: De verdeling van de normaalspanning σ over de doorsnede A (als functie van y : afstand tot de neutrale lijn) ten gevolge van buiging; met l de maximale afstand tot de neutrale lijn.

$$M(r_0, t) = \int_{r_0}^R \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \mu \cdot \Omega^2 \cdot z - \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \cdot (r - r_0) dr \quad (4.32)$$

MET $\frac{\partial F}{\partial r}$ DE SOM VAN ALLE VERDEELDE BELASTINGEN (O.a. DE LUCHTKRACHTEN)

Als voor een bladelement het (externe) moment bekend is kan de doorbuiging $Y(r)$ berekend worden met (4.5) en de maximale (interne) normaalspanning σ (normaalkracht per oppervlakte eenheid; zie figuur 4.6) met:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{M \cdot \rho}{I_{zz}} \quad \text{GELDIG VOOR BLADEN MET UNIFORME DOORSNEDE}$$

MET ρ DE MAXIMALE AFSTAND TOT DE NEUTRALE LIJN (DIT IS EEN HOOFDTRAAGHEIDSAS) (4.33)

EN $I_{zz} = \iint_A y^2 dA$ HET OPPERVLAKTE-TRAAGHEIDSMOMENT T.O.V. DE z -AS (NEUTRALE LIJN); OOKWEL HET LINEAIR TRAAGHEIDSMOMENT BENOEMD

Naast de normaalspanning ten gevolge van het buigmoment (4.31) levert ook de centrifugaalkracht (4.3) en de gravitatiekracht een (kleine) bijdrage aan de totale normaalspanning. In het algemeen zijn de (schuif)krachten bij sterkteberekeningen te verwaarlozen ten opzichte van de buigmomenten.

Het doel van deze elasticiteitsberekeningen (waarop we niet nader ingaan, omdat het een heel onderzoek op zich is) is tweeledig. Ten eerste is het nodig om de maximale normaalspanning te bepalen onder verschillende belastingen (niet alleen bij normale omstandigheden maar ook bij stormen) om na te gaan of het blad en de rest van de constructie in staat is deze belastingen te weerstaan (sterkteberekeningen). Hierbij zijn vooral de periodieke belastingen van belang aangezien die aanleiding geven tot vermoeiing. Ten tweede zijn er stijfheidsberekeningen nodig voor het bepalen van de maximale vervormingen en, wat belangrijker is, om de eigenfrequenties te berekenen; zodat voorspeld kan worden bij welke excitatie er resonanties ontstaan. De stijfheid van de constructie dient zodanig te zijn dat er geen instabiliteiten kunnen ontstaan (bijvoorbeeld flutter en divergentie).

4.7 Het equivalente scharnier-veer model

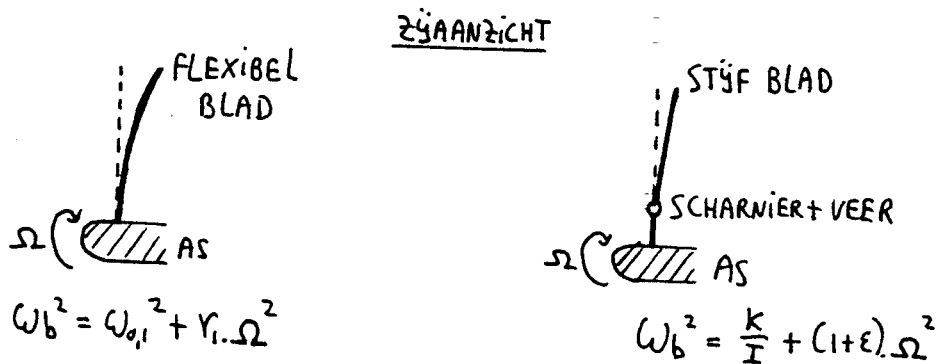
In het voorafgaande is gebleken dat het gedrag van een flexibel blad een complexe zaak is. Gelukkig blijkt in de praktijk ([2], §9.10) dat de bijdrage van de 1^e mode in (4.23) domineert, zodat het blad bij benadering als stijf opgevat kan worden. Immers X_1 is (behalve bij de wortel) bij benadering een rechte lijn (zie figuur 4.3) overeenkomstig de vorm van een stijf blad met excentriciteit e ; met volgens (1.16):

$$e = \frac{\varepsilon \cdot I}{m_b \cdot x_g \cdot R^2} \quad (4.34)$$

Naast de bladvorm is, zoals in §4.3.1 is aangetoond, ook de dynamica van het flexibele blad bij benadering gelijk aan dat van een scharnier-veer blad

Het gedrag van het flexibele blad kan dus benaderd worden met een voor dat blad overeenkomstige scharnier-veer blad; waarvan het gedrag analytisch bepaald kan worden (zie de voorafgaande hoofdstukken). Dit equivalent scharnier-veer blad (zie figuur 4.7) dient te voldoen aan:

$$\begin{cases} \varepsilon = \gamma_1 - 1 \\ k = I \cdot \omega_{o,1}^2 \end{cases} \quad \text{OF TEWEL} \quad \begin{cases} e = \frac{(\gamma_1 - 1) \cdot I}{m_b \cdot x_g \cdot R^2} \\ k = I \cdot \omega_{o,1}^2 \end{cases} \quad (4.35)$$



Figuur 4.7: Het flexibele blad en het equivalent scharnier-veer blad met de formules voor de eigenfrequenties ω_b ; indien $k = I \cdot \omega_{o,1}^2$ en $\varepsilon = \gamma_1 - 1$ dan zijn beide uitdrukkingen identiek.

Als de stijfheids- en massaverdeling van het flexibele blad bekend zijn, kan $\omega_{0,1}$ berekend worden; γ_n volgt uit (4.21).

Daarnaast kan de eigenfrequentie van het blad ook experimenteel bepaald worden of via de grafische methode van Yntema [6].

Het equivalent scharnier-veer blad voldoet dus aan (4.35) en bezit dezelfde straal R , traagheidsmoment I , zwaartepunt x_g , koorde $c(x)$, bladhoek $\Theta(x)$ en helling van de liftkromme CL_α als het oorspronkelijke flexibele blad. Het flexibele blad dat beschreven dient te worden met oneindig veel bladmodes X_n en bijbehorende eigenfrequenties ω_n is zo (via het flexibele blad met alleen de 1^e mode) teruggebracht tot het scharnier-veer blad met één enkele bladmode X_1 en één eigenfrequentie ω_b . Hiermee worden tevens de grenzen van het model duidelijk. Bij excitatiefrequenties in de buurt van Ω zal het model vrij goed voldoen; bij hogere frequenties gaan echter bij het flexibele blad ook de andere bladmodes een rol van betekenis spelen zodat de geldigheid van het model steeds minder wordt. In het navolgende zal de overeenkomst tussen het equivalente scharnier-veer blad en het werkelijke blad, numeriek gezien, nader onderzocht worden.

De nauwkeurigheid van de benadering van het flexibele blad door het scharnier-veer model kan beschouwd worden door nadere uitwerking van de bewegingsvergelijking van een flexibel blad (4.24), waarbij gemakshalve slechts 1 mode wordt beschouwd. In geval van 1 mode is (4.24) gelijk aan:

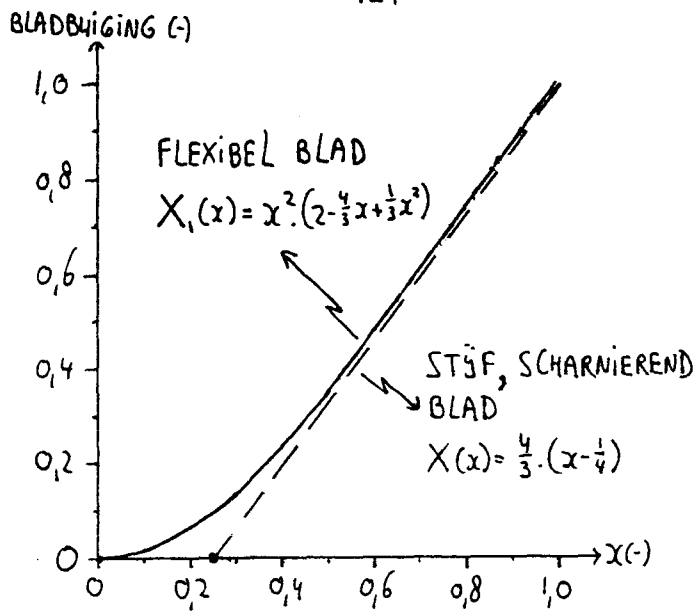
$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} + \lambda_1^2 z_1 = \frac{1}{R^2 \cdot \Omega^2 \rho_1} \cdot \int_0^1 \frac{dF}{dx} \cdot X_1 dx \quad (4.36)$$

Als benadering voor de bladvorm (mode) X_1 nemen we een polynoom met zo'n laag mogelijke orde die aan de randvoorwaarden (4.12) voldoet (zie figuur 4.8):

$$X_1(x) = x^2 \cdot \left(2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right) \quad (4.37)$$

MET $X_1(1) = 1$

De term $\partial F / \partial r = 1/R \cdot \partial F / \partial x$ is de liftkracht per lengte eenheid, en kan analoog aan §1.5 uitgewerkt worden. Als voorbeeld wordt de



Figuur 4.8: Een benadering van de 1^e bladmode X_1 ; ter vergelijking is ook de bladmode weergegeven van een stijf blad met een excentriciteit $e=0,25$.

aerodynamische dempingsterm bepaald. In plaats van $\dot{\beta} \cdot r = R \cdot x \cdot d\beta / d\psi \cdot \Omega$ (voor een stijf scharnierend blad met $e=0$) is de klapsnelheid nu gelijk aan:

$$\dot{y} = R \cdot X_1 \cdot \frac{dz_1}{d\psi} \cdot \Omega$$

INNERS $y(x, \psi) = R \cdot X_1(x) \cdot z_1(\psi)$ (4.38)

Met behulp van (1.40) en (1.41) volgt voor de bijdrage van de klapsnelheid aan de lift:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{L\alpha} \cdot c(x) \cdot U_p \cdot U_t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{L\alpha} \cdot \Omega^2 \cdot R^2 \cdot \frac{dz_1}{d\psi} \cdot x \cdot c(x) \cdot X_1$$

MET $U_t = \Omega \cdot r$ EN $U_p = \dot{y}$ (4.38)

(4.39)

en dus

$$\frac{1}{R^2 \cdot \Omega^2 \cdot \rho_1} \cdot \int_0^1 \frac{dF}{dx} \cdot X_1 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz_1}{d\psi} \cdot \frac{\int_0^1 \mu \cdot x^2 dx}{\int_0^1 \mu \cdot X_1^2 dx} \cdot \int_0^1 x \cdot \frac{c(x)}{c_2} \cdot X_1^2 dx$$

(4.40)

MET $\gamma = \frac{\rho \cdot C_{L\alpha} \cdot c_2 \cdot R^4}{I}$ GETAL VAN LOCK

$I = R^3 \cdot \int_0^1 \mu \cdot x^2 dx$ TRAAGHEIDSMOMENT

EN $\rho_1 = \int_0^1 \mu \cdot X_1^2 dx$ NORMERINGSFACOR (4.15)

In geval van uniforme massaverdeling en constante koorde wordt (4.40) na substitutie van (4.37):

$$\frac{1}{R^2 \Omega^2 \rho_1} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x} X_1 dx = 0,1337 \cdot f \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \psi} \quad (4.41)$$

immers $\int_0^1 \mu x^2 dx = \frac{1}{3} \mu$; $f_1 = \int_0^1 \mu X_1^2 dx = 0,2568 \mu$ EN $\int_0^1 x X_1^2 dx = 0,2160$

Ingevuld in (4.36) geeft (4.41) de aerodynamische demping weer voor het flexibele blad, dat te vergelijken is met de term

$$\gamma/2 \cdot t_4 \cdot \beta' = 0,125 \cdot \gamma \cdot d\beta/d\psi$$

van (1.45).

N.B.: De dempingsterm uit (1.45) volgt natuurlijk ook uit (4.40) door voor de bladmode $X_1 = x$ (stijf blad) te nemen; dan immers

$$\int_0^1 \mu X_1^2 dx = \int_0^1 \mu x^2 dx \quad \text{en} \quad \int_0^1 x \cdot c(x)/c_r \cdot X_1^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = 1/4$$

Op dezelfde wijze kan elke term in de excitatie (rechterlid van (4.36)) bepaald worden (zie [3] voor uitwerking van de windgradiënt belasting). Er zal dan een bewegingsvergelijking verkregen worden dat overeenkomt met (1.45) (met λ^2 in plaats van $1 + \xi + K/(I \cdot \Omega^2)$) waarbij wel de diverse coëfficiënten gewijzigd zijn. De oplossing van de bewegingsvergelijking kan dan weer met de formules van hoofdstuk 2 berekend worden, via

$$z_1(\psi) = \beta_0 + \beta_{1c} \cdot \cos \psi + \beta_{1s} \cdot \sin \psi \quad (4.42)$$

Uit dit alles zal blijken dat de tipuitwijkingen in het algemeen volgens het model (veel) te laag geschat worden ten opzichte van het werkelijke (flexibele) blad. Dit komt door de kromming van het flexibele blad (bij de bladwortel); het verschil wordt steeds groter wanneer ook de hogere modes (doorzweepen van de tip) van invloed zijn. Aangezien de tipdoorbuiging van belang is voor de torenconstructie (tuidraden!) dient dit beter bepaald te worden. Een redelijke schatting kan als volgt verkregen worden: belast een niet-roterend blad met een bekend gewicht op 2/3 van de straal (dit is ongeveer het aangrijpingspunt van de aerodynamische krachten). Meet de ontstane uitwijking en vergelijk dit met de uitwijking die met behulp van het

scharnier-veer model vrij eenvoudig bepaald kan worden (3.1). Hiermee wordt dan een factor verkregen waarmee de met het model bepaalde tipuitwijkingen vermenigvuldigd dient te worden als schatting voor de werkelijke tipuitwijking van het flexibele blad bij windturbine bedrijf.

Dat het bladwortelmoment met het model goed beschreven wordt blijkt uit het volgende. Invullen van de bladvorm X_1 volgens (4.37) in (4.27) levert het bladwortelmoment voor een flexibel (met uniforme massaverdeling : μ is constant):

$$M(\omega, t) = (\lambda_1^2 - 1) \cdot \omega^2 \cdot R^3 \cdot \mu \cdot Z_1 \cdot \rho_1 r \delta g$$

MET Z_1 VOLGENS (4.36) (4.43)

EN $\lambda_1 = \omega b = \frac{\omega b}{\omega}$

Voor het bladwortelmoment van het scharnier-veer model geldt (3.1):

$$M(\omega, t) = k \cdot \beta = I \cdot \omega_{0,1}^2 \cdot \beta = I \cdot (\omega_{b,1}^2 - r_1 \cdot \omega^2) \cdot \beta$$
(4.44)

met behulp van (4.21) en (4.35).

Gemakshalve nemen we voor het equivalente scharnier-veer blad ook een uniforme massaverdeling aan (1.9) zodat uit (4.35) volgt:

$$e = (r_1 - 1) \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 - e) \quad \text{OFTEWEL} \quad e = \frac{r_1 - 1}{r_1 + 1}$$
(4.45)

(N.B.: Ten gevolge van de keuze voor een uniforme massaverdeling van het scharnier-veer blad is het nu niet meer mogelijk om zowel m_b als x_g én I van het scharnier-veer model gelijk te nemen aan die van het flexibele blad).

Invullen van (4.37) in (4.21) levert $\gamma_1 = 1,16$ en dus volgens (4.45) $e = 0,096$. Hiermee wordt (4.44) nu gelijk aan:

$$M(\omega, t) = (\lambda_1^2 - 1,16) \cdot \omega^2 \cdot R^3 \cdot \mu \cdot \beta \cdot 0,246$$

MET $\lambda_1 = \omega b_{1,1}$ (4.46)

EN $I = \frac{1}{3} \cdot \mu \cdot R^3 \cdot (1 - e)^3 = 0,246 \cdot \mu \cdot R^3$

De overeenkomst tussen het bladwortelmoment voor het flexibele blad (4.43) en dat voor het overeenkomstig scharnier-veer model (4.36) blijkt vrij goed te zijn; in aanmerking genomen dat X_1 volgens (4.37) slechts een benadering is voor de werkelijke 1^e mode die voldoet aan (4.9).

De belastingsverdeling langs het blad volgt niet uit het scharnier-veer model. Immers omdat dan het blad oneindig stijf verondersteld wordt, mag (4.33) niet meer toegepast worden zodat de normaalspanning niet meer afgeleid kan worden. Dit is echter niet erg aangezien bij ingeklemde bladen het bladwortelmoment het grootst is, zodat voor sterkteberekeningen alleen dit moment interessant is.

Samengevat kan gesteld worden dat het equivalente scharnier-veer model de eigenfrequentie (per definitie) en bladwortelmoment van het flexibele blad vrij goed benadert; dit geldt in mindere mate ook voor de tipuitwijkingen.

HOOFDSTUK 5: METINGEN AAN EEN SCHARNIER-VEER BLAD

In dit hoofdstuk worden de metingen besproken die zijn verricht aan een model rotor, aangedreven door de wind (in de windtunnel) of door een motor (ventilatortoestand). Het doel van deze metingen is om te controleren of de vereenvoudigde theorie van hoofdstuk 2 het klappedrag nog wel goed beschrijft. Daarbij is het ons in eerste instantie niet te doen om een precies kwantitatief vergelijk maar meer om te bepalen of de theorie het klappedrag in grote lijnen correct weergeeft. Hierdoor kunnen er minder zware eisen gesteld worden aan de proefopstelling.

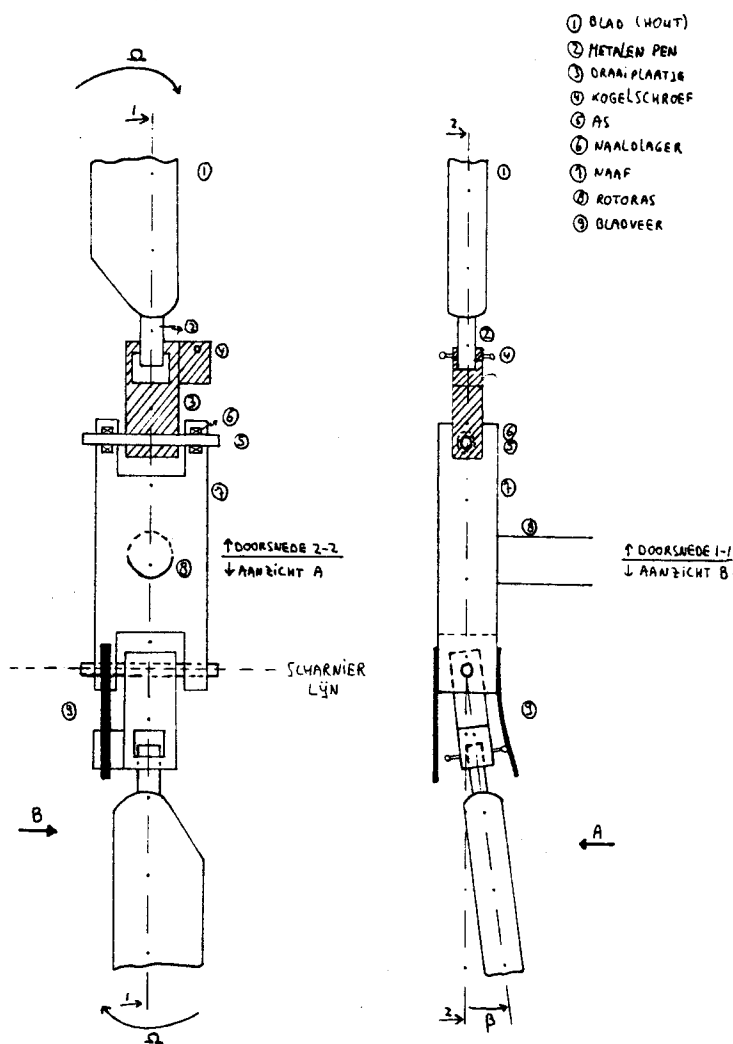
De klaphoeken zijn gemeten als functie van de rotorhoeksnelheid bij rechte en scheve aanstroming (voor enkele verschillende windsnelheden en scheve aanstromingshoeken) en in ventilatortoestand (bij erg lage hoeksnelheden om de gravitatie invloed te bepalen); dit alles is gedaan voor diverse waarden voor de bladhoek en veersterkte.

Voordat in §5.3 verder ingegaan zal worden op de verkregen meetresultaten zal eerst de modelrotor en de opzet van de metingen behandeld worden.

5.1 De modelrotor en de klaphoekmeter

5.1.1 De modelrotor

In figuur 5.1 is een principe tekening te zien van de gebruikte 2-bladige modelrotor ($\phi 1,45$ m); die afgezien van de bladen geconstrueerd is in de werkplaats. De vereiste bewegingsvrijheid van het blad in klapprichting wordt verkregen via een as met naaldlager, waarvan de wrijving verwaarloosd wordt. Het voordeel van een naaldlager boven bijvoorbeeld een kort flexibel element is dat het torsiestijf is zodat er in geen geval torsieflutter (zie eventueel appendix 4) kan optreden.



Figuur 5.1: Principetekening van de twee-bladige modelrotor. De rotor is symmetrisch; het bovenste gedeelte van de tekening is in doorsnede (zie hartlijnen 1 en 2) getekend (zonder bladveren); het onderste gedeelte in aanzicht (zie pijlen A en B).

Toelichting:

- het houten blad is via een metalen pen ingeklemd in het draaiplaatje (bladhoekverstelling mogelijk).
- het draaiplaatje zit vast aan de as zodat het ten opzichte van de naaf kan draaien door middel van de naaldlagers (klapbeweging). Het draaiplaatje heeft dus een veelzijdige functie: het zorgt ervoor dat het blad een klapbeweging kan uitvoeren en het maakt bladhoekverstelling mogelijk; bovendien worden de kogelschroeven erop bevestigd.
- definitie van $\beta=0$: als de verbindingslijn massamiddelpunt blad-middelpunt as (het scharnierpunt) loodrecht op de rotoras staat (de centrifugaalkracht probeert het blad in deze positie te brengen). De constructie is nu zodanig dat dan tevens de zwaartelij van het blad (hartlijn 2) loodrecht op de rotoras staat.
- de klapbeweging wordt tegengewerkt door bladveren die vastgeklemd zijn aan de naaf; via een kogelschroef op het draaiplaatje drukt het klappende blad tegen de bladveer vóór óf tegen de bladveer achter het blad.
- de naaf draait met de rotoras mee (met rotorhoeksnelheid Ω).

Voor de veerwerking zorgen bladveren. Omdat, in tegenstelling tot een fysische veer, in de praktijk één enkele veer niet tegelijkertijd geschikt is voor én trekken én drukken zijn er zowel vóór als achter het blad, bladveren nodig. De veersterkte kan gevariëerd worden door bladveren van verschillende dikte te gebruiken of via het veranderen van het aantal. De bladveren worden stevig ingeklemd op de naaf; via een kogelschroef (aanslag) drukt het blad tegen de bladveer. Het gebruik van de kogelschroef voldoet aan de twee eisen die aan de bladveer constructie gesteld kunnen worden:

1) Het uiteinde van de bladveer moet vrij kunnen draaien omdat bij dubbele inklemming de bladveer wordt vervormd en de veersterkte niet meer lineair is met de klaphoek.

2) Door de buiging van de bladveer wordt de afstand tussen inklemming (op de naaf) en de aanslag gewijzigd zodat de bladveer langs de aanslag moet kunnen schuiven (met verwaarloosbare wrijving).

De kogelschroeven kunnen er verder in of juist eruit gedraaid worden zodat ze zo afgesteld kunnen worden dat in de nulstand van het blad (dat wil zeggen $\beta=0$ oftewel het blad staat loodrecht op de rotoras) de kogelschroeven nèt tegen beide bladveren drukken. Indien $\beta>0$ drukt het blad dan alleen nog maar tegen de achterste bladveer; voor $\beta<0$ alleen nog tegen de voorste.

De bladen zijn via een inklemming verbonden aan de naaf, waardoor het mogelijk is de bladhoek traploos te variëren.

Om te zorgen dat de te meten klaphoeken zo groot mogelijk zijn dienen er bladen genomen te worden waarvan het getal van Lock χ groot is; dat wil zeggen een lang, smal blad dat licht is en met een grote waarde voor Cl_α . Gekozen is voor houten bladen die oorspronkelijk bedoeld zijn als onderdeel van een helicopterbouwmodel ("Champion" van het merk Schlüter, bestaande uit 7 lagen hout waaronder balsa en abachi; de massa van het houten blad bedraagt 141 g, lengte 615 mm, koorde 65 mm en de dikte is 9 mm). De bladen bezitten een symmetrisch NACA profiel (vermoedelijk NACA 0015). Om het oppervlak glad te maken en ter bescherming zijn de bladen met behulp van een föhn van een krimpkouss voorzien. Om inklemming mogelijk te maken worden de bladen voorzien van een metalen pen.

In tabel 5.1 worden de parameters van de rotor opgesomd (zie eventueel ook figuur 1.1 voor de definities van R en e). Hierbij

Tabel 5.1: De diverse parameters van de modelrotor.rotorparameters

$N=2$
 $R=0,724$ m
 $c_r=0,065$ m
 $c_0=0$ m
 $\Theta_r =$ instelbaar
 $\Theta_0=0^\circ$
 $m_b=0,304$ kg
 $x_g=0,250$
 $I=0,0231$ N.m.s²
 $CL_\alpha=4,9$ rad⁻¹

afgeleide parameters

$\sigma=0,0572$
 $\chi=4,74$
 $\xi=0,132$
 $t_2=0,5$
 $t_3=0,33$
 $t_4=0,25$
 $t_5=0,2$

bladophanging

K variabel; combinaties mogelijk van een aantal bladveren van 0,06 en 1,3 N.m/rad

$e=0,0760$
 $\delta_3=0^\circ$

kunnen de volgende opmerkingen geplaatst worden:

- de parameters m_b , x_g en I hebben betrekking op het bladgedeelte dat scharniert (dat wil zeggen het houten blad plus de metalen pen plus het draaiplaatje van figuur 5.1).
- Θ_r : in te stellen met behulp van een hoekmeter.
- x_g : te meten via balanceren van het blad op een spitse punt.
- I : via het meten van de trillingstijd T te bepalen indien het blad (zonder bladveer), in klapproductie, slingert (blad in onderste stand: $\Psi=0$ en $\Omega=0$). De bewegingsvergelijking van het blad (1.45) wordt dan teruggebracht tot dat van een slinger:

$$I \cdot \ddot{\beta} + m_b \cdot g \cdot r_g \cdot \beta = 0$$

$$\text{MET } \omega = \sqrt{(m_b \cdot g \cdot r_g) / I} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{OF TEWEL } I = \frac{m_b \cdot g \cdot r_g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \quad (5.1)$$

De demping (luchtweerstand) wordt hierbij verwaarloosd, wat gerechtvaardigd is gezien het feit dat bij de proef de trilling vrij langzaam uitdempt.

N.B.: 1) Omdat het blad nu niet roteert is er geen sprake van lift en dus ook niet van aerodynamische demping voor het klappende blad in de zin van §1.5!.

2) Het traagheidsmoment is ook te berekenen via de regel van Steiner: $I = m_b \cdot r_g^2 + I_g$ met I_g het traagheidsmoment ten opzichte van het massamiddelpunt; voor een uniforme staaf geldt $I_g = 1/12 \cdot m_b \cdot R^2$.

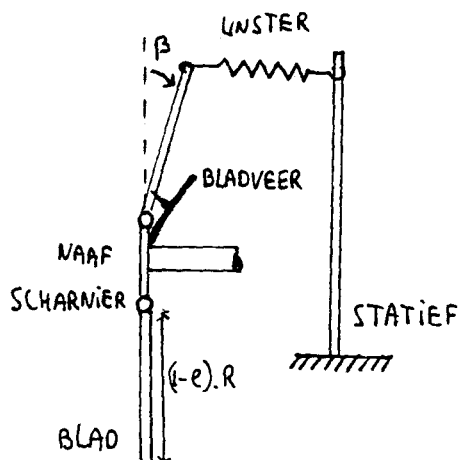
Door het opplakken van wat tape op het blad zijn de twee bladen zowel statisch (gelijke m_b) als dynamisch (gelijke I) uitgebalanceerd. (Voor het op straal r aan te brengen massa \tilde{m} geldt dat $\tilde{m} = m_{b,1} - m_{b,2}$ en de straal r volgt uit $\tilde{m} \cdot r^2 = I_1 - I_2$; waarbij de indices 1 en 2 op respectievelijk blad 1 en 2 duiden).

- CL_α : de waarde hiervan is opgezocht in [16]; geldig voor Reynoldswaarden tussen $4 \cdot 10^4$ en $3 \cdot 10^6$.
- K : een schatting van de veersterkte kan gemaakt worden met behulp van de vergeet-mij-nietjes (balkentheorie). De bladveren zijn geijkt (in dezelfde positie als bij de latere klaphoekmetingen) met behulp van een unster die aan het blad trekt (figuur 5.2).

Voor het veermoment geldt:

$$M_r = F_{unster} \cdot R \cdot (1 - e) \quad (5.2)$$

Voor diverse waarden van β (te meten met de hoekmeter) is de kracht F bepaald. In het werkgebied ($0-15^\circ$) is het veermoment inderdaad



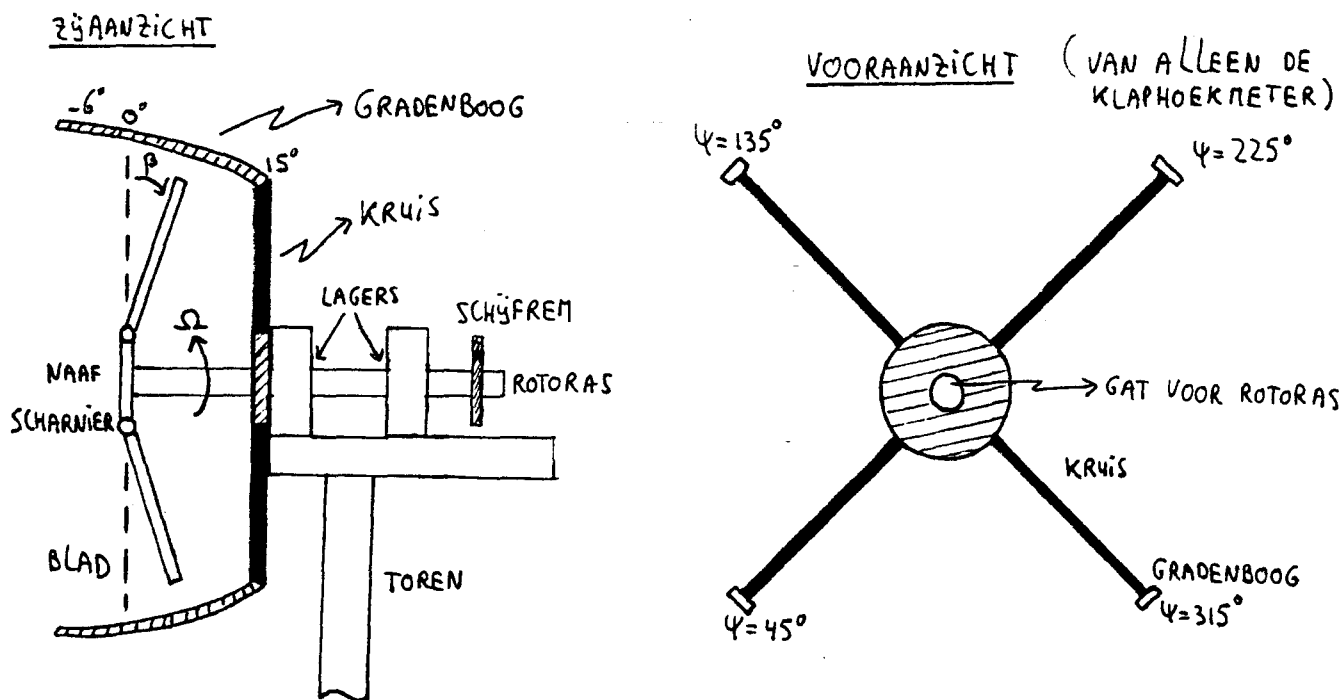
Figuur 5.2: Het gebruik van de unster bij de ijking van de bladveren ($\Omega=0$).

lineair met de klaphoek β ($Mv=K.\beta$ volgens (1.22)) en de veersterkte is evenredig met het aantal gebruikte bladveren.

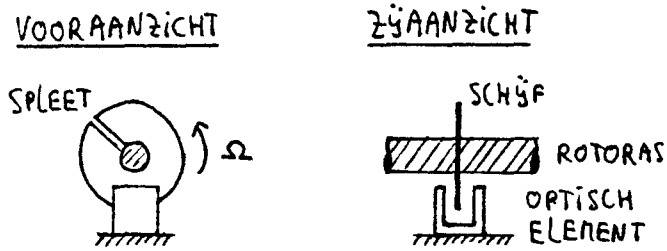
Voor de metingen kan gebruik gemaakt worden van bladveren van twee verschillende diktes, waarvan de veersterkte K (met onnauwkeurigheid $< 5\%$) in de tabel is weergegeven. (Om een grote veerstijfheid te verkrijgen worden er in plaats van één dikke meerdere dunne gebruikt om vervorming van de bladveren te voorkomen).

5.1.2 De klaphoekmeter

Bij de metingen gaan we er vanuit dat de klaphoek β te schrijven is volgens (1.10): $\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cdot \cos\psi + \beta_{1s} \cdot \sin\psi$. Om de drie klaphoekcoëfficiënten β_0 , β_{1c} en β_{1s} te kunnen bepalen dient β voor tenminste 3 waarden van de azimuthhoek ψ gemeten te worden. In de gebruikte meetopstelling worden de klaphoeken op 4 plaatsen in het rotorvlak gemeten, zodat de 4^e waarde gebruikt kan worden om de nauwkeurigheid van de meting te berekenen. De klaphoeken worden bepaald met behulp van een klaphoekmeter bestaande uit een kruis met aan de uiteinden gradenbogen (zie figuur 5.3). Het kruis zit om de rotoras heen



Figuur 5.3: De klaphoekmeter bestaande uit een kruis met vier gradenbogen.



Figuur 5.4: Het optisch element en de schijf met spleet nodig om de stroboscoop te triggeren. (De schijf zit tussen de twee lagers in van figuur 5.3).

en is via de bok (toren) met de vaste wereld verbonden. Op de vier gradenbogen zijn hele en halve graden streepjes aangebracht die lopen van -6° tot $+15^\circ$; een groter bereik heeft geen zin omdat dan namelijk het blad tegen de bok aanklapt. De bogen kunnen nog wat verschoven worden zodat het nulpunt ($\beta=0$) correct kan worden ingesteld.

Indien we de klaphoeken op $\psi=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ en 315° weergeven als respectievelijk $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ en β_4 volgt met behulp van (1.10) voor de klaphoekcoëfficiënten:

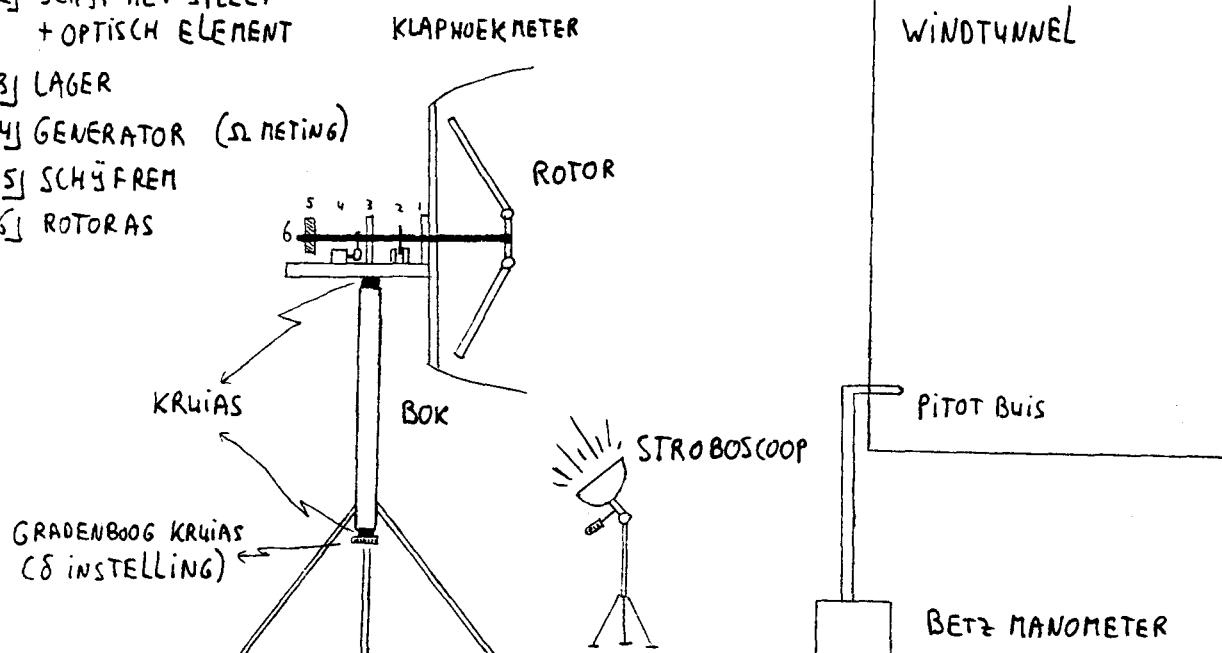
$$\begin{array}{ll}
 \beta_0 & \text{GEMIDDELDE VAN } \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_3) \text{ EN } \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_4) \\
 \beta_{1c} & \text{" } \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (\beta_1 - \beta_2) \text{ EN } \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (-\beta_3 + \beta_4) \\
 \beta_{1s} & \text{" } \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (\beta_1 - \beta_4) \text{ EN } \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (-\beta_2 - \beta_3)
 \end{array} \quad (5.3)$$

Uit (5.3) volgt tevens de nauwkeurigheid van de bepaalde klaphoekcoëfficiënten.

Om de klaphoeken gemakkelijk te kunnen aflezen is op de tip van één van de bladen een wit markeringsstreepje aangebracht (op een zwarte ondergrond). Met behulp van een stroboscoop met fase instelling kan nu het witte streepje op het blad precies bij elk van de vier gradenbogen "stil" gezet worden. (De ruimte zelf is verduisterd). Het signaal dat nodig is om de stroboscoop te triggeren wordt verkregen van een optisch element. Dit element is aan de vaste wereld gemonteerd en na detectie van de spleet in een schijfje (dat met de rotoras meedraait), wordt een puls gegenereerd (zie figuur 5.4). Door met behulp van een verrekijker in het rotorvlak te kijken (achter een gazen scherm rondom de rotor) kunnen de klaphoeken nu op $0,1^\circ$ afgelezen worden.

- 1] LAGER
- 2] SCHIJF MET SPLEET + OPTISCH ELEMENT

- 3] LAGER
- 4] GENERATOR (Ω METING)
- 5] SCHIJFREM
- 6] ROTORAS



Figuur 5.5: Een schematisch overzicht van de windturbinemeting. Het lagerblok (inclusief rotor en klaphoekmeter) kan ten opzichte van de bok (op de 3 poten) draaien door middel van de kruias.

5.2 De meetopstelling

5.2.1 De windtunnelmeting

In de open windtunnel van het Instituut voor Windenergie van de T.H. Delft ($\phi 2,2$ m) is gemeten bij rechte en scheve aanstroming. Voor scheve aanstroming kan de rotor onder de gewenste hoek vastgezet worden op de kruias van de bok (figuur 5.5). De windsnelheid van de windtunnel kan gevarieerd worden van 0 tot ongeveer 13 m/s en wordt afgelezen met behulp van een aan een pitotbuis gekoppelde Betz-manometer. Voor verdere gegevens omtrent het meten in de windtunnel zie [15].

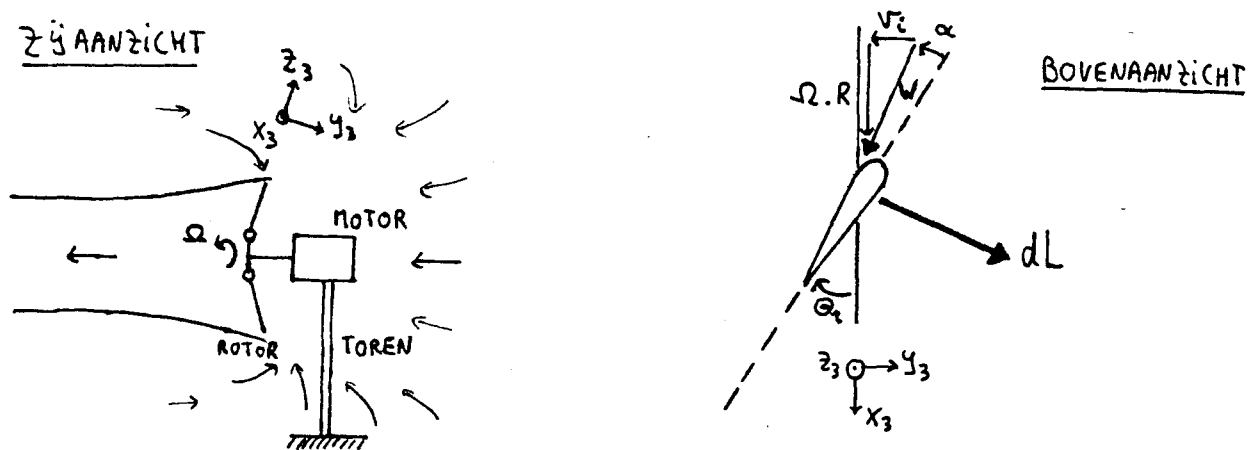
De rotorhoeksnelheid kan gevarieerd worden met behulp van een schijfrem. Via het opvoeren van de druk van de remblokjes op de schijf (die met de rotoras meedraait) kan de rotorhoeksnelheid vanaf vrijloop ($\lambda=10$) tot nul gereduceerd worden. De hoeksnelheid wordt gemeten met behulp van een kleine generator die aan de rotoras gekoppeld is en een spanning afgeeft die lineair is met Ω .

Om te zorgen dat de in hoofdstuk 1 geïntroduceerde aerodynamische theorie geldig is (onder andere (1.40)) en dat er geen loslating optreedt dient op $r=0,7.R$ het Reynoldsgetal groter te zijn dan 10^5 ; met $Re=v.c/\nu$ waarin c de bladkoorde is en $v=\Omega.r$ de snelheid van het bladelement op straal r . Met een kinematische viscositeit ν van $1,5 \cdot 10^{-5}$ volgt dan meteen dat de rotorhoeksnelheid boven de 46 rad/s dient te liggen.

5.2.2 De meting in ventilatortoestand

Bij ventilatortoestand wordt de rotor (bij een omgevingsnelheid gelijk aan nul) aangedreven door een kleine motor (50 W) waarvan het toerental van 0 tot ongeveer 12 rad/s instelbaar is ("variomatic"). Hiermee is het mogelijk om te meten met grote bladhoeken en kleine hoeksnelheden waardoor de klaphoeken groot zullen zijn. Zelfs het meten zonder bladveren is nu mogelijk: na opstarten met de bladen in horizontale positie (waardoor ze niet vóór- of achterover klappen) komt de rotor zo snel op toeren dat het centrifugaaleffect voor de benodigde veerwerking zorgt (en de bladen ook in verticale stand nergens tegen aan zullen klappen).

Bij deze meetserie is de invloed van de gravitatie bepaald. Hiervoor is volgens (1.23) een zekere kegelhoek β_0 vereist die wordt verkregen door het blad een bepaalde bladhoek te geven (zie figuur 5.6). In de ventilator toestand wordt er langs de motor lucht



Figuur 5.6: De modelrotor in ventilatortoestand en de definitie van α_r

aangezogen; doordat de bladhoek groter dan nul is krijgt het blad nu een kegelhoek ten gevolge van de optredende liftkrachten; indien $\Theta < 0$ zal de rotor lucht van de andere zijde aanzuigen en klapt het blad juist de andere kant op).

Omdat de rotor nu door een motor wordt aangedreven in plaats van door de wind mag de theorie van §1.5 niet zonder meer worden toegepast; met name uitdrukking (1.60) voor de axiale inductiefactor a . Bovendien kan er geen snelheid meer gedefiniëerd worden omdat er geen sprake meer is van een ongestoorde windsnelheid U . Een uitdrukking voor a geldig voor een rotor in ventilator toestand kan verkregen worden met een analoge afleiding als van §1.5.

De uitdrukking volgens de impulstheorie voor de axiale weerstandskracht D_{ax} blijft gelijk aan (1.51):

$$D_{ax} = \frac{dm}{dt} \cdot 2 \cdot v_i \quad (5.4)$$

De massaverandering is nu gelijk aan:

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v_i \quad (5.5)$$

De uitdrukking voor D_{ax} volgens de bladelementtheorie kan verkregen worden door in (1.58) de term $\cos \delta / \lambda = (U \cdot \cos \delta) / (\Omega \cdot R)$ gelijk aan nul te stellen:

$$D_{ax} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot C_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot (L \alpha \cdot \Omega^2 \cdot R^2 \cdot \left(-\frac{v_i}{\Omega R} + \Theta_r \cdot t_3 - \Theta_0 \cdot t_4 \right)) \quad (5.6)$$

(Het minteken voor Θ_r in (1.58) verandert in een plus teken overeenkomstig de tekenconventie van Θ_r volgens figuur 5.6). Gelijkstellen van beide uitdrukkingen voor D_{ax} levert nu meteen een vierkantsvergelijking op voor de geïnduceerde snelheid v_i .

Analoog hieraan dienen de uitdrukkingen voor de klaphoeken aangepast te worden: de term $((1-a)/\lambda \cdot t_3 - \Theta_r \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5)$ volgens (2.7) verandert daarbij in $(-v_i / (\Omega \cdot R) \cdot t_3 + \Theta_r \cdot t_4 + \Theta_0 \cdot t_5)$

Bij de gegeven theoretische waarden in de grafieken van de volgende paragraaf is gebruik gemaakt van deze aangepaste formules.

5.3 De meetresultaten

5.3.1 Rechte aanstroming

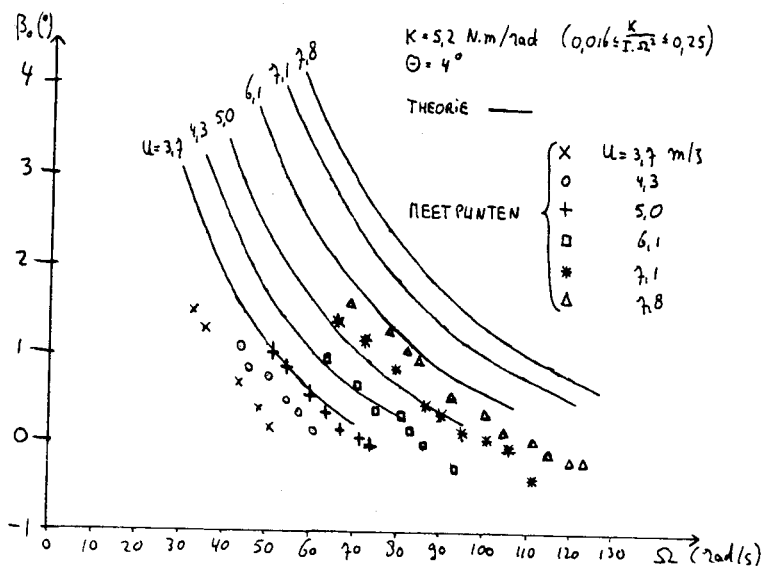
Onder invloed van rechte aanstroming zal volgens de theorie de rotor een kegelhoek β_0 beschrijven. In figuur 5.7 tot en met 5.9 worden de gemeten kegelhoeken uitgezet als functie van de rotorhoeksnelheid (en als parameter de windsnelheid) en vergeleken met de theoretische waarden voor een drietal combinaties van bladhoek en veersterkte. Ook het kengetal $K/(I.\Omega^2)$ wordt vermeld; de veersterkte wordt klein genomen om te zorgen dat de klaphoeken groot zijn.

De gemeten klaphoeken zijn afgelezen op $0,1^\circ$ nauwkeurig; de variatie in de klaphoek (onder andere ten gevolge van een lichte trilling van de bok) tijdens de meetduur (ongeveer 10 s oftewel ruwweg 100 omwentelingen) blijft binnen dit bereik. De aangegeven onnauwkeurigheid in alle grafieken van 5.3 volgt uit (5.3). De onnauwkeurigheid van U (ter plaatse van de pitotbuis) en Ω is 1% of kleiner.

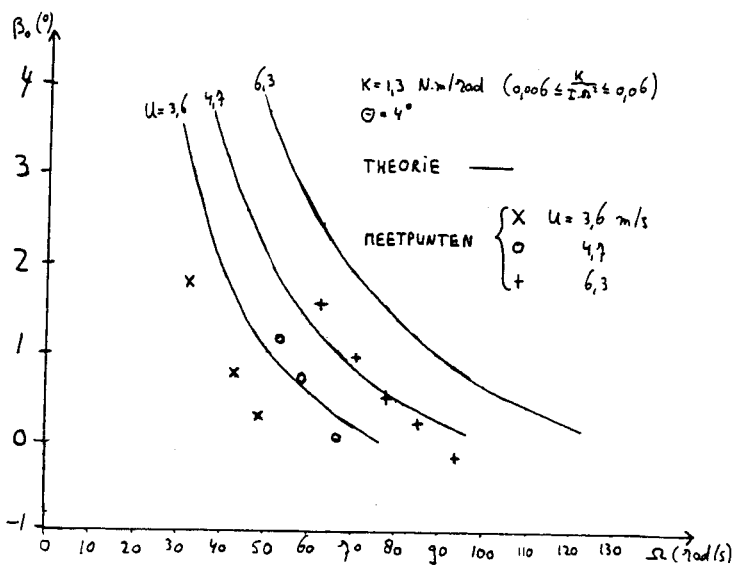
Bij de meting kunnen de volgende systematische meetfouten gemaakt zijn:

- 1) De waarde van Cl_α voor het blad is niet direct gemeten maar in [16] opgezocht; een fout van Cl_α van 20% zal volgens de theorie in een fout van de kegelhoek resulteren ter grootte van $0,2^\circ$.
- 2) Bij het instellen van de bladhoek wordt er vanuit gegaan dat het meetvlak loodrecht op de rotoras staat; een fout van 1° in Θ zorgt voor een fout in β_0 van $0,5^\circ$.
- 3) Bij het gebruik van de bladveerconstructie treedt wat hysteresis op: indien het blad in stilstand ($\Omega=0$) een tik krijgt zal het niet precies weer op 0° tot rust komen (maximale afwijking ongeveer $0,3^\circ$).

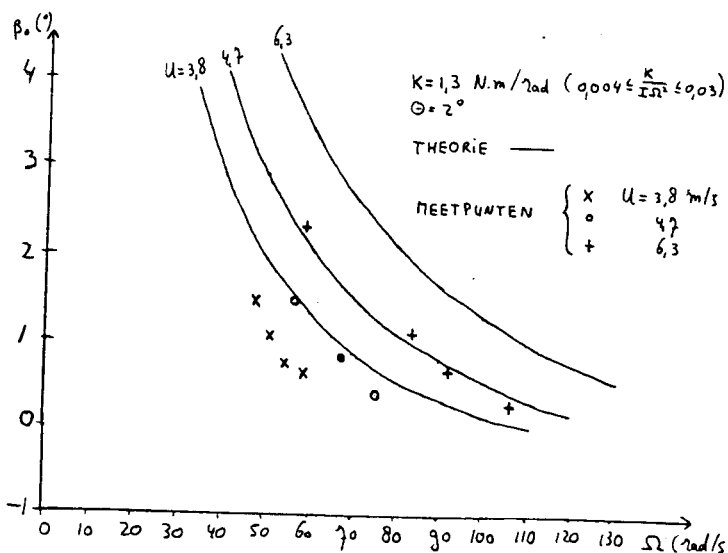
Uit de grafieken blijkt dat de theorie de Ω - en U -afhankelijkheid van β_0 goed beschrijft; voor al de drie de combinaties van K en Θ . (Zie ook figuur 5.10 dat een kopie is van figuur 5.7 met dat verschil dat bij alle meetpunten 1° is opgeteld; zodat de overeenkomst tussen het verloop van de theoretische krommen en de Ω -



5.7



5.8

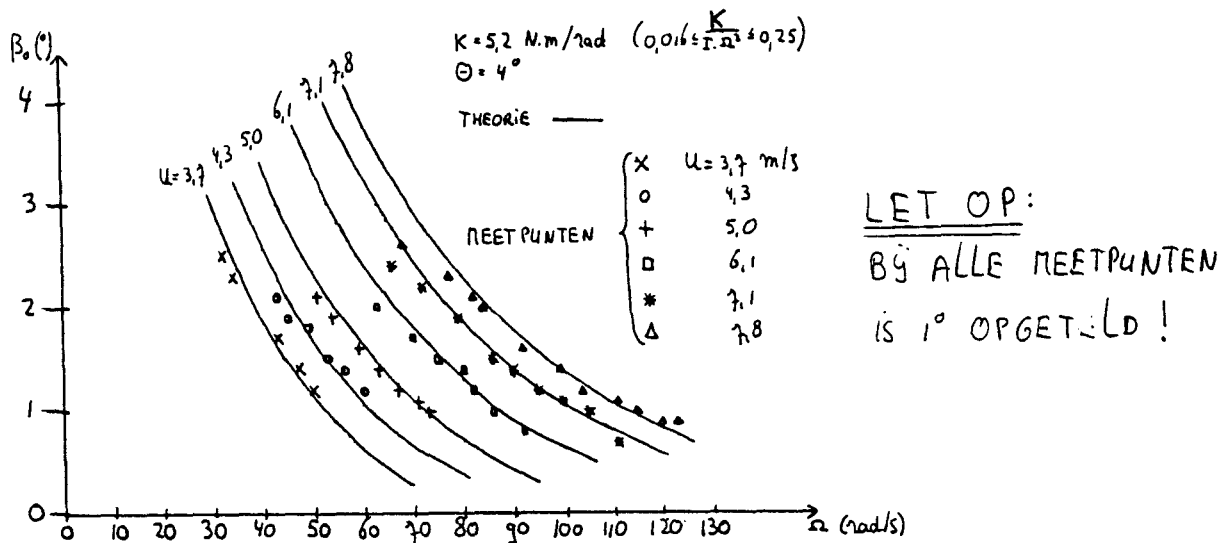


5.9

Figuur 5.7: De kegelhoek β_0 bij rechte aanstroming als functie van de rotorhoeksnelheid Ω en met als parameter de windsnelheid U . (De onnauwkeurigheid van de meetpunten valt binnen de symboolgrenzen). $K=5,2 \text{ N.m/rad}$ en $\Theta=4^\circ$.

Figuur 5.8: Idem met $K=1,3 \text{ N.m/rad}$ en $\Theta=4^\circ$.

Figuur 5.9: Idem met $K=1,3 \text{ N.m/rad}$ en $\Theta=2^\circ$.



Figuur 5.10: Een kopie van figuur 5.7; waarbij bij alle meetpunten 1° is opgeteld! Dit is gedaan om te illustreren dat het verloop van de theoretische krommen de Ω - en U -afhankelijkheid van de meetpunten goed beschrijft.

afhankelijkheid van de meetpunten, beter tot uitdrukking komt). Aangenomen dat bovenstaande systematische fouten niet zijn opgetreden zijn de voorspellingen van de klaphoeken volgens de theorie ongeveer 1° te hoog.

Naast de kegelhoek is er bij deze meetserie ook een cyclische klaphoek gemeten: $\beta_{1c} = -0.4^\circ \pm 0.2^\circ$ en $\beta_{1s} = 0^\circ$ (bij de gedane metingen vrijwel onafhankelijk van U , Ω , K en Θ). Om dit met de theorie te kunnen verklaren dient er behalve de rechte aanstroming een (onbekende) excitatie aanwezig geweest te zijn; bijvoorbeeld een (horizontale) windgradiënt ten gevolge van een asymmetrie van de stroming (turbulentie) van de windtunnel. Echter om een klaphoek van -0.4° te verklaren zou dan de windsterkte over de windtunnelbreedte (van links naar rechts) moeten toenemen van 6 naar 7 m/s wat zeker niet het geval is; de variatie is hooguit 0,3 m/s.

Ten gevolge van de gravitatie voorspelt de theorie cyclische klaphoeken orde grootte kleiner dan 0.4° zodat de gravitatie ook niet de oorzaak kan vormen voor het achterover klappen van de rotor ($\beta_{1c} < 0$).

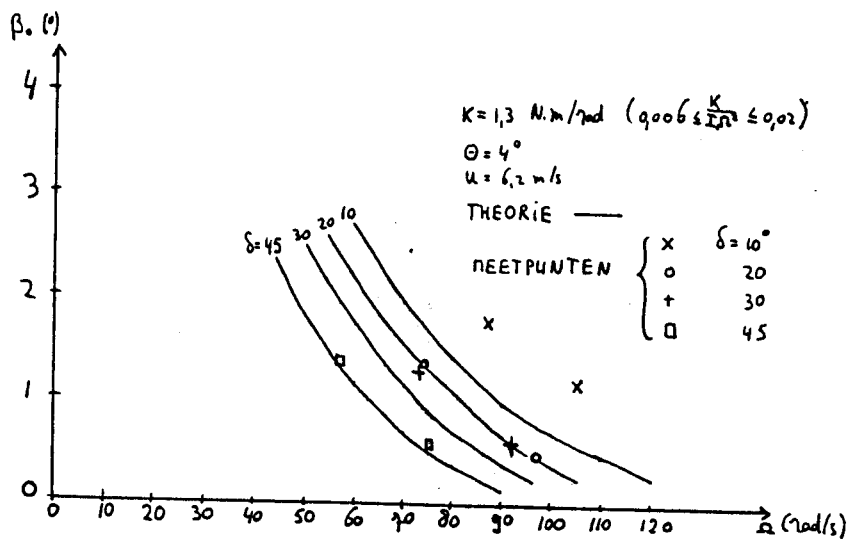
Een andere mogelijke verklaring is dat er een systematische fout is gemaakt bij de nulpuntsinstelling van de gradenbogen, zodat ten onrechte een cyclische klaphoek wordt gemeten. Echter omdat alle vier de gradenbogen op dezelfde wijze zijn ingesteld is niet eenvoudig in te zien hoe zo een cyclische klaphoek zou kunnen zijn geïntroduceerd. (Bij de instelling van de gradenbogen wordt het blad, waarvan de klaphoeken gemeten zullen worden, loodrecht op de naaf gehouden. Door een scheve stand van de naaf ten opzichte van de rotoras of door een scheve stand van de rotoras zelf wordt hierdoor een systematische fout ingevoerd. Echter deze fout heeft uitsluitend betrekking op de kegelhoek en niet op de cyclische klaphoeken).

Gezien de geringe grootte van de klaphoekcoëfficiënt β_{1c} en de grote onnauwkeurigheid daarvan, heeft het niet veel zin om nog verder stil te staan bij dit niet interpreteerbare meetresultaat.

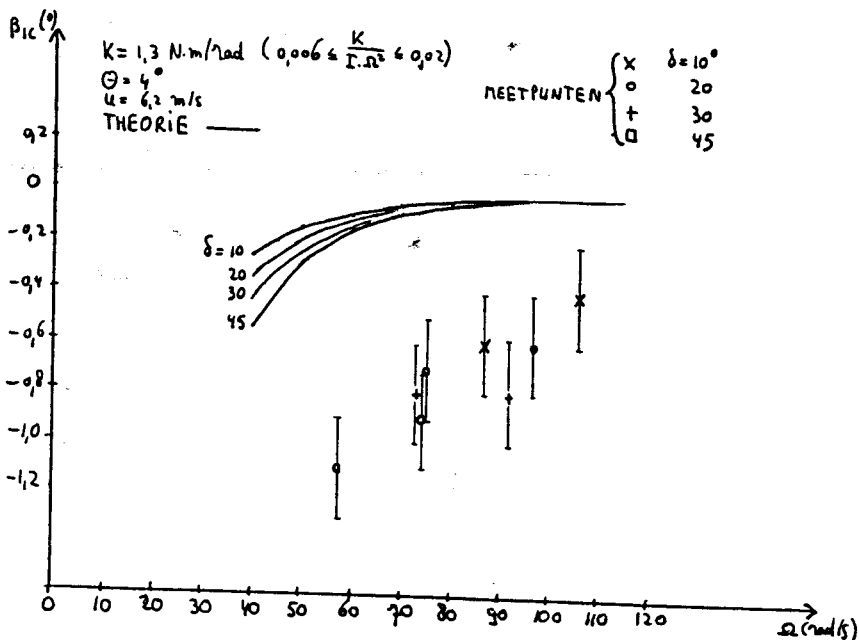
5.3.2 Scheve aanstroming

In figuur 5.11 zijn de klaphoekcoëfficiënten β_0 , β_{1c} en β_{1s} te zien voor een viertal scheve aanstromingshoeken. Het verloop van de theoretische waarden voor de kegelhoek β_0 voldoet redelijk, zowel wat de Ω - als de δ -afhankelijkheid betreft. Voor de cyclische klaphoeken β_{1c} en β_{1s} kan eigenlijk alleen gezegd worden dat de theorie kleine hoeken voorspelt terwijl er inderdaad kleine hoeken worden gemeten. Vanwege de geringe grootte in de gemeten waarden van β_{1c} en β_{1s} en de grote onnauwkeurigheid kan er niet veel zinnigs uit de metingen geconcludeerd worden; behalve dat de meetmethode niet goed is.

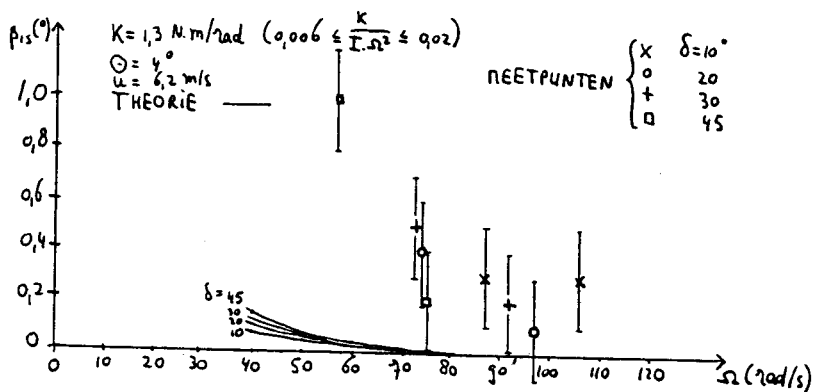
Het probleem bij de windtunnelmeting is dat er bij lage hoeksnelheden (waarbij de klaphoeken groot zullen zijn omdat dan de centrifugaalkracht klein is) niet gemeten kan worden. Dit komt door de specifieke vorm van de koppel-toeren kromme van een windturbine (figuur 5.12). Door verhoging van de remkracht kan de snellopendheid verkleind worden tot λ_1 ; indien de remkracht nog groter wordt is een stabiel werkpunt niet meer mogelijk en gaat de windturbine naar stilstand.



a)

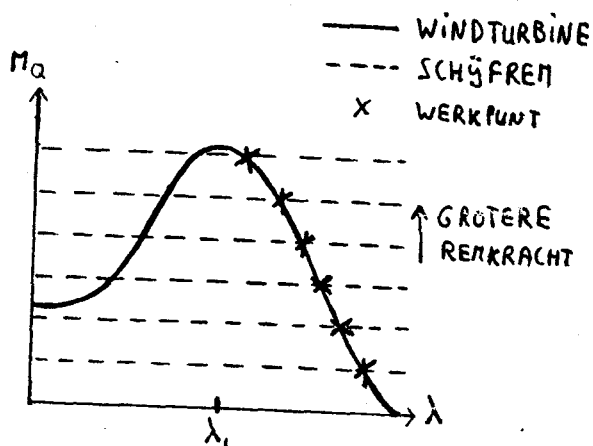


b)



c)

Figuur 5.11: a) De kegelhoek β_0 bij scheve aanstroming als functie van de rotorhoeksnelheid Ω en met als parameter de scheve aanstromingshoek δ .
 b) Idem voor de cyclische klaphoek β_{1c} .
 c) Idem voor de cyclische klaphoek β_{1s} .



Figuur 5.12: De M_Q - λ karakteristiek van een windturbine en het tegenwerkend moment van de schijfrem (voor verschillende remkrachten).

Een andere manier om de klaphoeken te vergroten is het verkleinen van de bladhoek. Echter het probleem hierbij is dat dan de windturbine niet meer aanloopt.

Vanwege deze moeilijkheden is afgezien van de metingen van de klaphoeken in geval van een windgradiënt. Bovendien zal het aanbrengen van een nette (lineaire) windgradiënt op zich al moeilijk genoeg zijn.

Ook de invloed van het kruien is niet bepaald omdat dat een andere meetmethode voor de klaphoek vereist. Immers de klaphoekmeter draait bij het kruien mee zodat de klaphoeken niet meer afgelezen kunnen worden. Bovendien zal het lastig zijn om de kruisnelheid mooi constant te houden zodat een stationaire situatie (wat betreft de klappbeweging) bereikt kan worden.

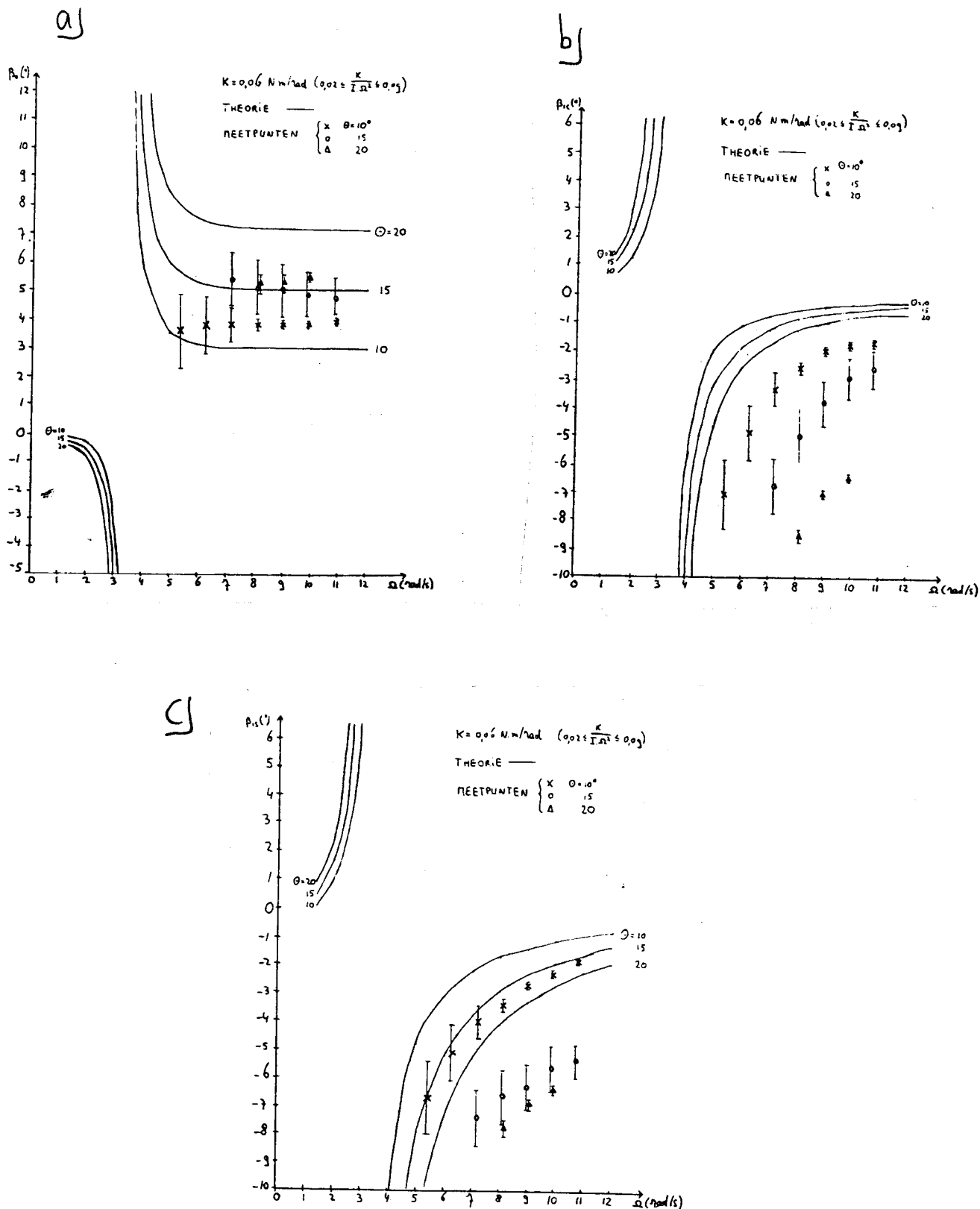
Dat er geen metingen zijn verricht in geval van windgradiënt en kruien is op zich niet zo heel erg. Het doel van de metingen is immers om de vereenvoudigde theorie betreffende het klappend blad te controleren. Daarvoor is het in principe voldoende om de klaphoeken te meten onder invloed van één enkele (periodieke) excitatie; waarvoor we de gravitatie invloed nemen bij ventilatorstoestand (zie volgende paragraaf). Door de modelrotor met een motor aan te drijven kan er wel bij lage hoeksnelheden gemeten worden en kan de bladhoek elke gewenste waarde gegeven worden.

5.3.3 Gravitatie

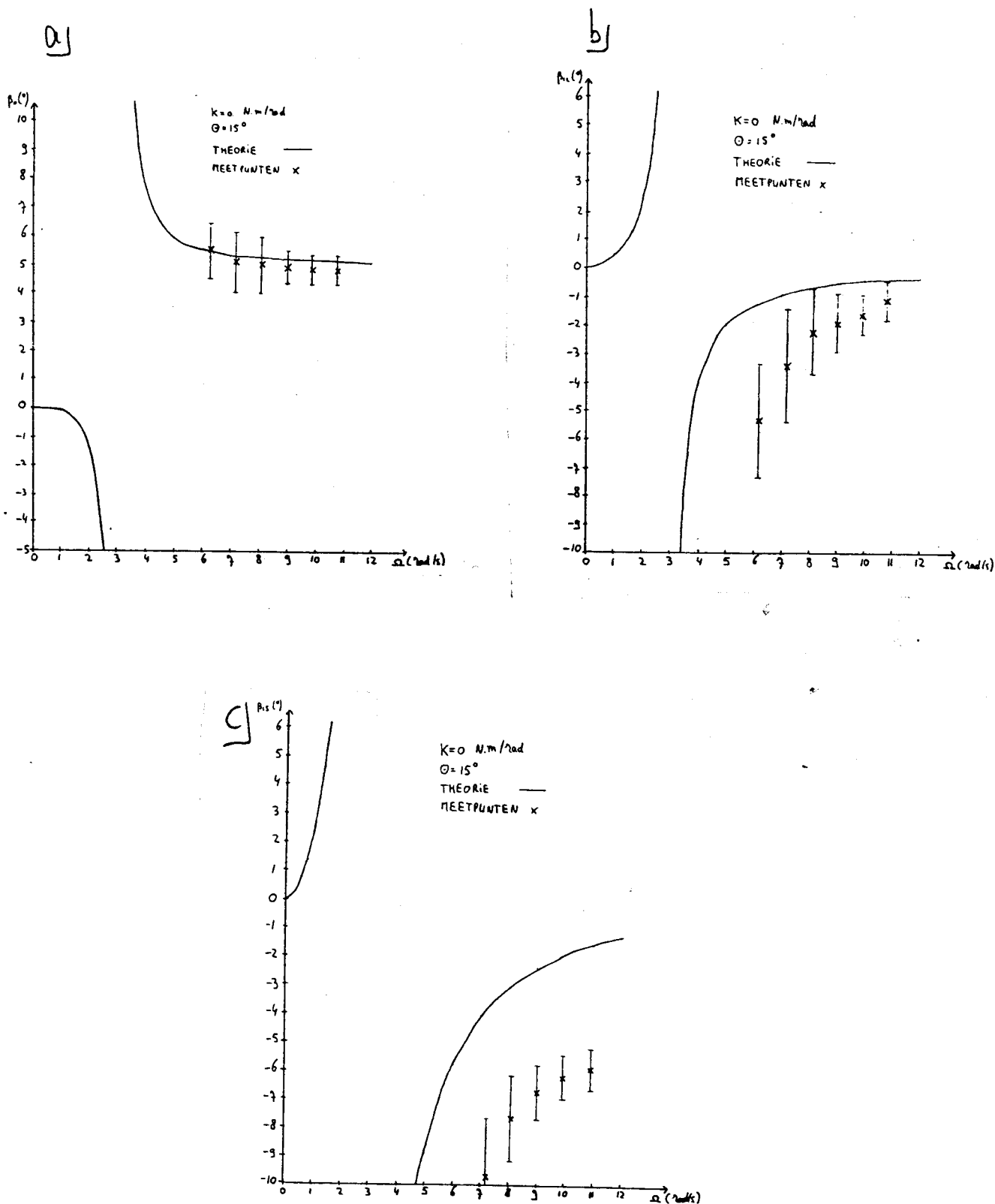
Bij ventilatorstoestand is de invloed van de gravitatie op de klaphoeken bepaald; zie figuur 5.13 waar de klaphoekcoëfficiënten β_0 , β_{1c} en β_{1s} zijn uitgezet als functie van de rotorhoeksnelheid (met als parameter de bladhoek) indien $K=0,06$ N.m/rad. In figuur 5.14 zijn de klaphoeken uitgezet in geval de bladveren ontbreken ($K=0$), zodat de scharnier-veer constructie gereduceerd wordt tot enkel het scharnier. Om te zorgen dat de klaphoeken groot zijn wordt er gemeten bij lage hoeksnelheden en grote waarden voor de bladhoek. Aan het eind van §1.4 is gebleken dat de gravitatie zelfs een instabiliteit kan veroorzaken. Met behulp van (2.7) kan berekend worden bij welke hoeksnelheid dit gebeurt via het gelijkstellen van de noemer aan nul. Het bestaan van zo'n kritisch toerental volgt ook duidelijk uit de theoretische krommen van grafiek 5.12: bij $\Omega=3,5$ rad/s is de klapresponsie oneindig groot. Bij de metingen kunnen er nu grote klaphoeken verkregen worden door het toerental zodanig te verlagen dat het kritische toerental wordt benaderd. Metingen onder het kritische toerental bleken niet mogelijk omdat dan na het opstarten van de rotor het blad wild op en neer gaat schommelen en al ergens tegen aanklapt voordat de evenwichtstoestand wordt bereikt.

De theorie voorspelt de Ω - en Θ -afhankelijkheid van de klaphoekcoëfficiënten β_0 , β_{1c} en β_{1s} vrij redelijk. Getalsmatig gezien wijken de theoretische krommen (vooral die voor de cyclische klaphoeken) nogal af van de gemeten waarden.

Met betrekking tot de gebruikte modelrotor en klaphoekmeter kan er tot slot geconcludeerd worden dat de klaphoeken goed te meten zijn bij ventilatorstoestand. Voor windtunnelexperimenten is de rotor minder geschikt omdat bij lage hoeksnelheden en kleine bladhoeken niet gemeten kan worden omdat de rotor dan respectievelijk stopt of niet aanloopt.



Figuur 5.13: a) De kegelhoek β_0 onder invloed van de gravitatie als functie van de rotorhoeksnelheid Ω en met als parameter de bladhoek θ . De rotor wordt met behulp van een motor aangedreven.
 $K = 0,06 \text{ N.m/rad}$.
 b) Idem voor de cyclische klaphoek β_{1c} .
 c) Idem voor de cyclische klaphoek β_{1s} .



Figuur 5.14: a) De kegelhoek β_0 onder invloed van de gravitatie als functie van de rotorhoeksnelheid Ω . De rotor wordt met behulp van een motor aangedreven. $K=0 \text{ N.m/rad}$ en $\Theta=15^\circ$.
 b) Idem voor de cyclische klaphoek β_{1c} .
 c) Idem voor de cyclische klaphoek β_{1s} .

HOOFDSTUK 6: STATE-OF-THE-ART, SUGGESTIES VOOR VERDER ONDERZOEK EN CONCLUSIES

6.1 State-of-the-art

Voordat in de volgende paragrafen achtereenvolgens de suggesties voor verder onderzoek en conclusies aan bod komen wordt in deze paragraaf de stand van zaken weergegeven met betrekking tot de kennis omtrent flexibele rotorsystemen. Hiertoe zal eerst de inhoud geschetst worden van literatuur [1] plus [2]. Mijn verslag behandelt slechts een beperkt gedeelte van de onderwerpen die in deze literatuur aan bod komen; in tegenstelling tot [1] en [2] heb ik het 2^e orde model veel meer benadrukt.

Aangezien het fundamenteel onderzoek aan helicopterrotoren een langere historie kent en tevens (veel) verder is gevorderd ten opzichte van het onderzoek aan windturbines, zal tevens in het kort de state-of-the-art van het helicopteronderzoek worden vermeld.

Stoddard [1]

Mijn verslag is grotendeels gebaseerd op dit promotieverslag over het dynamisch gedrag van windturbines. De markante verschillen zijn:

- De afleiding van de bewegingsvergelijking voor het scharnierend blad geschiedt enigszins anders. Er wordt uitgegaan van de krachten die aangrijpen op een bladelement dm , waarna er over het blad geïntegreerd wordt. (Het uiteindelijke resultaat is natuurlijk wel gelijk en komt overeen met (1.45)).
- Er wordt uitgegaan van bladen met constante koorde, zonder δ mechanisme en de invloed van de windgradiënt wordt verwaarloosd.
- Naast de bewegingsvergelijking in de klaprichting worden ook vergelijkingen afgeleid voor de lag en bladhoekvrijheidsgraad.
- Er is bovendien een hoofdstuk dat de aero-elastische instabiliteiten analytisch behandelt; waaronder de flap-lag, pitch-lag en pitch-flap instabiliteit (met pitch de bladhoekvrijheidsgraad) evenals de interacties tussen rotor en toren.

Bramwell [2]

Dit is een helicopterleerboek. Behalve enkele specifieke onderwerpen zoals stabiliteit en besturing van een helicopter is de gepresenteerde theorie in principe ook toe te passen op een windturbine.

- Bij de bewegingsvergelijking voor het blad wordt uitgegaan van een blad met constante koorde en *wrong* en zonder een veer (en met de rotor natuurlijk in een horizontale positie); de invloed van windgradiënt en gravitatie wordt verwaarloosd.

- Ook in dit boek worden de bewegingsvergelijkingen voor lag en torsie behandeld alsook de aero-elastische instabiliteiten.

- Een apart hoofdstuk is gewijd aan het gedrag van flexibele bladen.

- Het belangrijkste verschil met mijn verslag en [1] is dat uitgegaan wordt van een veel betere (instationaire) theorie om de aerodynamische krachten te bepalen die op het blad werken. Vooral bij onderzoek naar mogelijke instabiliteiten is het nodig om uit te gaan van een goede aerodynamische theorie; in de berekening van de klaphoeken spelen de instationaire aerodynamische krachten een geringere rol (zie de opmerking betreffende de gereduceerde frequentie ω^* uit §1.5).

- In de helicoptertechniek gebruikt men (uitgebreide) computerprogramma's om de differentiaalvergelijking, die de beweging beschrijft, op te lossen; waarbij indien mogelijk allerlei coëfficiënten aangepast worden aan resultaten, verkregen uit metingen aan modelrotors. Tevens kan er numeriek gecontroleerd worden welke benaderingen er geoorloofd zijn.

Helicopteronderzoek

Een overzicht betreffende de stand van zaken in de helicoptertheorie kan gevonden worden in [12] en [13]. Bij helicopterrotors heeft zich een ontwikkeling voltrokken van volledig scharnierende bladophangsystemen (articulated hub: bestaande uit scharnieren, dempers en een mechanisme ten behoeve van de bladhoekverstelling) via systemen met flexbeams in plaats van de flap en lag scharnieren (hingeless; sinds de jaren '60) naar systemen waarbij ook de bladhoekverstelling plaatsvindt via een flexibel element (bearingless; in de jaren '70 geïntroduceerd). De voordelen van het gebruik van flexbeams is dat de constructie eenvoudiger, lichter en goedkoper wordt en dat de rotor minder onderhoud nodig

heeft. (Een ander voordeel specifiek voor helicopters is dat de luchtweerstand van de rotor in voorwaartse vlucht aanzienlijk gereduceerd wordt en dat via de optredende bladwortelmomenten de helicopter sneller reageert op de stuursignalen).

Het grote nadeel van hingeless en bearingless rotors is dat er nu nieuwe (in vergelijking met articulated hubs) aero-elastische instabiliteiten geïntroduceerd worden. Het huidige onderzoek concentreert zich daarom hoofdzakelijk op het vinden van de stabiliteitsgrenzen (wat betreft frequentie en demping van de vrijheidsgraden); zowel numeriek als via metingen aan modelrotoren. Tevens vindt er onderzoek plaats naar samengestelde materialen composiet: zoals flexbeams met ingebouwde demping en andere speciale eigenschappen om de instabiliteiten te vermijden.

6.2 Suggesties voor verder onderzoek

Windtunnel metingen met een nieuwe modelrotor

Zoals uit de meetresultaten blijkt is de gebruikte modelrotor niet goed geschikt voor het bepalen van de (cyclische) klaphoeken. Een en ander kan verbeterd worden door het getal van Lock te vergroten. Een manier om χ groter te maken is om de massa te verkleinen: bijvoorbeeld door de bladen hol te maken of bladen te nemen van een nog lichter materiaal dan hout (schuimplastic); tegelijkertijd dienen dan ook de bladhoekverstelling en de scharnierconstructie lichter gemaakt te worden.

Een andere verbetering aan de meetopstelling kan verkregen worden door de klaphoek direct te meten met bijvoorbeeld een potentiometer aan het blad. Het elektrische meetsignaal dient dan wel van het roterende blad afgetapt te worden. Dit kan geschieden via een slepring of door een (meedraaiende) zender op de rotor. Het voordeel van deze wijze van meten is dat de meting nauwkeuriger is en dat dan de klaphoek β direct als functie van de azimuthhoek ψ bekend is (en op een oscilloscoop zichtbaar te maken). De klaphoekcoëfficiënten β_0 , β_{1c} en β_{1s} kunnen eventueel direct via wat electronica uit het elektrische signaal bepaald worden. Tevens biedt

deze meetopzet de mogelijkheid om het transiëntgedrag (bijvoorbeeld responsie op een windvlaag) te onderzoeken.

Tenslotte kan via momentmetingen in lagrichting (coriolismoment) en op de gondel plus toren, met behulp van rekstrookjes de vereenvoudigde theorie ook daarop gecontroleerd worden.

Het schrijven van een eenvoudig computerprogramma

Het analytisch model zou behalve met metingen ook vergeleken kunnen worden met de resultaten van een computerprogramma. Dit programma dient dan gebaseerd te zijn op bewegingsvergelijking (1.24) en voor het uitwerken van het aerodynamisch moment is aanname (1.41) niet meer nodig omdat Ma nu rechtstreeks via (1.39) te berekenen is. Verder is het mogelijk om bijvoorbeeld de $Cl-\alpha$ karakteristiek van een zeker blad via polynoombenadering in te voeren en de bewegingsvergelijking aan te passen aan onder andere scheefstand van de rotoras (tilthoek) en rotoronbalans.

Via het vergelijken van de uitvoer van dit programma met de analytische uitdrukkingen is de invloed van allerlei benaderingen waaronder (1.41) te achterhalen. Een andere toepassing van het programma is dat nu ook het gedrag van het scharnier-veer blad te bepalen is bij langzaamlopers. Ook de responsie op a-periodieke belastingen (zoals een windvlaag en torenschaduw) zijn nu vrij eenvoudig te berekenen.

Om het geschikt te maken voor het ontwerpen van windturbines kan het simpele computerprogramma later desgewenst steeds verder verbeterd en uitgebreid worden; bijvoorbeeld via het gebruik van een betere aerodynamische theorie voor het bepalen van het aerodynamisch moment Ma . Een verdere uitwerking hiervan kan onder andere gevonden worden in de helicopterliteratuur; zie eventueel ook appendix 3 waarin de probleemstelling betreffende de luchtstroming door een rotor wordt aangestipt.

Ook aan de hand van verkregen meetgegevens kan het programma steeds aangepast worden.

Bij het gebruik van het nu omvangrijk geworden computerprogramma dient men er wel op bedacht te zijn om de fysica niet uit het oog te verliezen.

Een analytische behandeling van de aero-elastische instabiliteiten

Analoog aan wat in dit rapport gedaan is ten aanzien van de bladresponsie zouden ook de aero-elastische instabiliteiten zoals flutter en divergentie analytisch behandeld kunnen worden (of eventueel met behulp van een simpel computerprogramma). Daarbij gaat het om het bepalen van de stabiliteitsgrenzen (die men in de praktijk dus beslist niet mag overschrijden) bij gegeven bladparameters. Voor een eerste introductie met flutter en divergentie wordt verwezen naar appendix 4 en [11], hoofdstuk A.16.

6.3 Conclusies

- 1) Het scharnier-veer blad is bij benadering een 2^e orde systeem, dat wordt aangeslagen met een frequentie net onder zijn eigenfrequentie.
- 2) Uitgaande van een lineaire bewegingsvergelijking kunnen er analytische uitdrukkingen afgeleid worden waarmee de klaphoeken en (bladwortel) momenten voor een gegeven windturbine, snel en eenvoudig berekend kunnen worden.
- 3) Voor een grote molen (diameter groter dan ±10 m) treden de grootste klaphoeken (en dus ook momenten) op ten gevolge van de windgradiënt. Voor een (kleine) windturbine die is uitgerust met een vaanmechanisme is de grootste belasting het gyroscopisch effect ten gevolge van het kruien.
- 4) Het bladwortelmoment wordt bij gebruik van het scharnier-veer blad beperkt; bij een
 - constante excitatie door de centrifugaal werking;
 - periodieke excitatie door de centrifugaal werking plus aerodynamische demping;
 - a-periodieke excitatie door de aerodynamische demping (klapsnelheid).
- 5) De grootte van de tipuitwijking en het bladwortelmoment van een flexibel blad onder een gegeven excitatie kan benaderd worden met de (direct te berekenen) waarden voor een scharnier-veer blad, dat dezelfde eigenfrequentie bezit.
- 6) Met de gebruikte modelrotor inclusief de klaphoekmeter is goed te meten in geval die door een motor wordt aangedreven; voor windtunnelexperimenten is de rotor minder geschikt.
- 7) De theoretische waarden stemmen globaal gezien overeen met de gemeten klaphoeken van de 2-bladige modelrotor ($\emptyset 1,45$ m) bij rechte en scheve aanstroming (in de windtunnel) en onder invloed van de gravitatie (bij aandrijving door een motor).

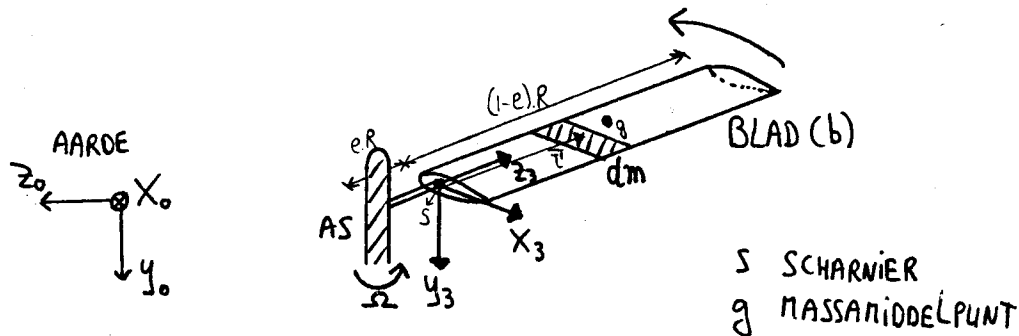
LITERATUURLIJST

- [1] F. Stoddard, Structural dynamics, stability and control of high aspect ratio windturbine generators, Ph.D. dissertation, University of Massachusetts, '79.
- [2] A. Bramwell, Helicopter dynamics, Edward Arnold, London, '76.
- [3] Th. v. Holten en J. Kooman, Ontwerpmethode voor de berekening van prestaties en klapbeweging van flexibele windturbinebladen, memorandum M-453, werkgroep windenergie T.H. Delft, afdeling L&R, '83.
- [4] E. Lysen, Introduction to windenergy, C.W.D. 82-1 (Consultancy services Wind energy Developing countries), Amersfoort, '82.
- [5] W. Jansen en P. Smulders, Rotor design for horizontal axis windmills, C.W.D. 77-1, Amersfoort, '77.
- [6] R. Yntema, Simplified procedures and charts for the rapid estimation of bending frequencies of rotating beams, NACA TN-3459, '55.
- [7] H. Forsching, Grundlagen der Aeroelastik, Springer-Verlag, '74
- [8] M. Cheney, U.T.R.C. 8-kW windturbine tests, J. Energy, vol. 5, no. 2 (blz. 122-128), '81.
- [9] C. Looijesteijn, Behaviour and operating experience with a line commutated converter coupled to a 25 m horizontal axis windturbine, E.C.N. 84-023, Petten '84.
- [10] J. Beurskens e.a., Windenergie, dictaat 3323 T.H.E., '74.

- [11] F. Fockens e.a., Windenergie conversiesystemen, college w79, Multidisciplinair Energie Centrum, T.H. Delft, '84.
- [12] R. Ormiston, Investigations of hingeless rotor stability, Vertica, vol. 7, nr. 2, blz. 143-181, '83.
- [13] P. Friedmann, Formulation and solution of rotary-wing aeroelastic stability response problems, Vertica, vol. 7, nr. 2, blz. 101-141, '83.
- [14] W. Kuik, Een twee graden van vrijheidsmodel voor het beschrijven van het aero-elastisch gedrag van een tipvane windturbine rotor, memorandum M-428, T.H. Delft, '82.
- [15] A. Kragten, Handleiding voor de windtunnel en de koppelmeetopstelling voor windrotoren van de T.H. Delft afd. vliegtuigbouw, windenergiegroep T.H.E., R-464-D, '84.
- [16] A. Hageman, Catalogue of aerodynamic characteristics of airfoils in the Reynolds number range 10^4 - 10^6 , windenergiegroep T.H.E., R-443-D, '80.

APPENDIX 1: AFLEIDING VAN DE DYNAMISCHE VERGELIJKINGEN VAN EULER

Er wordt uitgegaan van een blad dat (op afstand $e.R$) scharnierend aan de as is bevestigd, zodanig dat het om de X_3 -as kan roteren (zie figuur A.1). Voor het met het blad meebewegend assenstelsel kiezen we het hoofdtraagheidsassenstelsel $X_3Y_3Z_3$. Ten opzichte van de aarde $X_0Y_0Z_0$ bezit dit assenstelsel een hoeksnelheid $\bar{\omega}$.



Figuur A.1: Het hoofdtraagheidsassenstelsel $X_3Y_3Z_3$ van het roterende blad, met als oorsprong het scharnier.

Aangezien afstand, snelheid, versnelling en dergelijke relatieve grootheden zijn, dient in de afleiding van de bewegingsvergelijking aangegeven te worden ten opzichte waarvan ze gedefiniëerd zijn. Met een accent (') worden de relatieve grootheden aangeduid, dat wil zeggen ten opzichte van het scharnier (dit is de oorsprong van het roterend assenstelsel); zonder accent zijn de grootheden absoluut, dat wil zeggen ten opzichte van de aarde.

Er zal nu eerst een uitdrukking afgeleid worden voor het relatief impulsmoment \bar{L}' van het blad:

$$\bar{L}' = \int_0^{R.(1-e)} (\bar{r}' \times \bar{v}') dm$$

MET $\bar{v}' = \frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v} - \bar{v}_s$ (A.1)

\bar{v}_s SNELHEID SCHARNIER } TEN OPZICHTE VAN DE AARDE
 \bar{v} SNELHEID VAN HET MASSADEELTJE }

EN DUS \bar{v}' SNELHEID VAN HET MASSADEELTJE TEN OPZICHTE VAN HET SCHARNIER (DE INTEGRATIE LOOPT VANAF HET SCHARNIER)

Uit (A.1) volgt:

$$\frac{d\bar{L}'}{dt} = \int_0^{R.(1-e)} \left(\frac{d\bar{r}'}{dt} \times \bar{v}' \right) dm + \int_0^{R.(1-e)} \left(\bar{r}' \times \frac{d\bar{v}'}{dt} \right) dm$$
 (A.2)

Met

$$d\bar{r}'/dt * \bar{v}' = d\bar{r}'/dt * d\bar{r}'/dt = 0$$

$$\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_s$$

en $\bar{a}_s = d\bar{v}_s/dt$ versnelling van het scharnier

volgt uit (A.2):

$$\frac{d\bar{L}'}{dt} = \int_0^{R.(1-e)} \left(\bar{r}' \times \frac{d\bar{v}'}{dt} \right) dm - \int_0^{R.(1-e)} \left(\bar{r}' \times \bar{a}_s \right) dm$$
 (A.3)

Hierin is de eerste term in het rechterlid het uitwendig krachtmoment ten opzichte van het scharnier:

$$\bar{M}' = \int_0^{R.(1-e)} \bar{r}' \times d\bar{F}$$

MET $d\bar{F} = dm \cdot \frac{d\bar{v}'}{dt} = dm \cdot \bar{a}$ DE UITWENDIGE KRACHT OP MASSADEELTJE dm (A.4)

Uiteindelijk krijgen we zo de volgende uitdrukking voor het relatieve impulsmoment:

$$\frac{d\bar{L}'}{dt} = \bar{M}' - m_b \cdot \bar{r}'_g \times \bar{a}_s$$

MET m_b MASSA VAN HET BLAD (A.5)
 EN $\bar{r}'_g = \frac{1}{m_b} \cdot \int_0^{R.(1-e)} \bar{r}' dm$ HET MASSAMIDDELPUNT VAN HET BLAD

Om nu de bewegingsvergelijking voor het blad te krijgen maken we gebruik van een algemene uitdrukking uit de vectorrekening. Voor een willekeurige vector \bar{A} geldt:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{A} \quad (\text{A.6})$$

Dit is een relatie tussen de verandering van \bar{A} per tijdseenheid ten opzichte van de aarde ($d\bar{A}/dt$) en de verandering van dezelfde vector ten opzichte van het roterende assenstelsel ($\partial \bar{A}/\partial t$); als de hoeksnelheid van het roterende stelsel ten opzichte van de aarde gelijk is aan $\bar{\omega}$. (Voor een star lichaam geldt voor de relatieve tijdsafgeleide $\partial \bar{r}'/\partial t = 0$).

Toegepast op de vector \bar{L}' levert dit:

$$\frac{d\bar{L}'}{dt} = \frac{\partial \bar{L}'}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{L}' \quad (\text{A.7})$$

Let op: in $d\bar{L}'/dt$ is \bar{L}' het relatieve impulsmoment (dat wil zeggen gerelateerd aan het scharnier) terwijl de tijdsafgeleide d/dt ten opzichte van de aarde is.

Drukken we de vectoren in (A.7) uit in coördinaten ten opzichte van het roterende assenstelsel $X_3 Y_3 Z_3$ dan geldt:

$$\begin{aligned} \bar{L}' &= [I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z] \quad (\text{INNERS } X_3 Y_3 Z_3 \text{ IS EEN HOOFDTRAAGHEIDS-} \\ &\quad \text{ASSENSTELSEL}) \\ \text{MET } \bar{\omega} &= [\omega_x, \omega_y, \omega_z] \\ \text{EN } \bar{I} &= [I_x, I_y, I_z] \quad \text{TRAAGHEIDSMOMENT VAN HET BLAD} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Voor het traagheidsmoment \bar{I} geldt:

$$\begin{cases} I_x = \int_0^{R(1-e)} (y^2 + z^2) dm \\ I_y = \int_0^{R(1-e)} (x^2 + z^2) dm \\ I_z = \int_0^{R(1-e)} (x^2 + y^2) dm \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Invullen van (A.8) in (A.7) levert:

$$\frac{d\bar{l}'}{dt} = \begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ I_y \dot{\omega}_y \\ I_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ (I_z - I_x) \omega_x \omega_z \\ (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Via het gelijkstellen van de uitdrukkingen (A.5) en (A.10) voor het relatief impulsmoment L' krijgen we de gevraagde bewegingsvergelijking van het roterend blad; de zogenaamde (uitgebreide) dynamische vergelijkingen van Euler:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + m b (\gamma_y a_z - \gamma_z a_y) = M_x \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z + m b (\gamma_z a_x - \gamma_x a_z) = M_y \\ I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + m b (\gamma_x a_y - \gamma_y a_x) = M_z \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

NET $\bar{M}' = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$, $\bar{\gamma}' = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$ EN $\bar{a}_s = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$

(UITGEDRUKT IN $X_3 Y_3 Z_3$ COÖRDINATEN)

waarbij deze drie vectoren zijn uitgedrukt in $X_3 Y_3 Z_3$ coördinaten.

Let op: \bar{a}_s is de absolute versnelling van het scharnier ten opzichte van de aarde, echter uitgedrukt in coördinaten ten opzichte van het roterend assenstelsel $X_3 Y_3 Z_3$ de relatieve versnelling \bar{a}_s' is per definitie gelijk aan nul.

In de praktijk zal het massamiddelpunt gelijk zijn aan $\bar{r}_g' = [0, 0, x_g \cdot R]$ (met $x_g = r_g / R$ de dimensieloze straal) en voor het traagheidsmoment zal gelden:

$$\begin{cases} I_y \approx I_x + I_z \quad (\text{als het blad dun is}) \text{ en} \\ I_x \approx I_y \approx I \\ I_z \ll I \quad (\text{als het blad ook smal is}). \end{cases}$$

$$\text{met } I = \int_0^{R(1-e)} (r')^2 dm = \int_0^{R(1-e)} z^2 dm$$

Indien de as roteert met rotorhoeksnelheid Ω is de grootte van de versnelling van het scharnier \bar{a}_s gelijk aan $\Omega^2 \cdot e \cdot R$ en gericht van het scharnier naar de as toe. Als nu ook het uitwendig krachtmoment \bar{M}' bekend is, geeft (A.11) een vergelijking voor de hoeksnelheid $\bar{\omega}$ van het scharnierend blad, waaruit de bladbeweging volgt.

APPENDIX 2: SOMMATIE OVER HET AANTAL BLADEN

We gaan er vanuit dat de rotor uit N bladen bestaat die gelijkmatig over de rotorschijf verdeeld zijn. Wanneer nu de periodieke bijdrage van een gegeven blad aan bijvoorbeeld het aandrijvend moment $M \cdot \cos(n \cdot \Psi)$ (met $n = \omega/\Omega$ dimensieloze frequentie) bedraagt, dan zal dat voor het volgende blad gelijk zijn aan $M \cdot \cos(n \cdot (\Psi + 2 \cdot \pi/N))$. Over het gehele rotorvlak gesommeerd wordt dan het totale aandrijvend moment:

$$M_{\text{tot}} = M \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left\{ n \cdot \left(\Psi + \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N} \right) \right\} \quad (\text{A.12})$$

MET k DE SOMMATIE VARIABELE

Stel nu:

$$A = \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left\{ n \cdot \left(\Psi + \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N} \right) \right\} \quad \text{EN} \quad B = \sum_{k=0}^{N-1} \sin \left\{ n \cdot \left(\Psi + \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N} \right) \right\} \quad (\text{A.13})$$

zodat:

$$A + i \cdot B = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \cdot n \cdot \left(\Psi + \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N} \right)} = e^{i \cdot n \cdot \Psi} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot k / N} = e^{i \cdot n \cdot \Psi} \cdot \frac{e^{i \cdot n \cdot 2 \cdot \pi} - 1}{e^{i \cdot n \cdot 2 \cdot \pi / N} - 1} \quad (\text{A.14})$$

MET i HET IMAGINAIR BASISGETAL

waarbij de bekende formule voor een meetkundige reeks is gebruikt met reden

$$e^{i \cdot n \cdot 2 \cdot \pi / N}$$

- Als n geen geheel getal is dan geldt er:

$$A + iB = e^{i \cdot n \cdot \Psi} \cdot \frac{e^{i \cdot n \cdot \pi} \cdot (e^{i \cdot n \cdot \pi} - e^{-i \cdot n \cdot \pi})}{e^{i \cdot n \cdot \pi / N} \cdot (e^{i \cdot n \cdot \pi / N} - e^{-i \cdot n \cdot \pi / N})} = e^{i \cdot n \cdot \left(\Psi + \pi - \frac{\pi}{N} \right)} \cdot \frac{(e^{i \cdot n \cdot \pi} - e^{-i \cdot n \cdot \pi})}{(e^{i \cdot n \cdot \pi / N} - e^{-i \cdot n \cdot \pi / N})} \quad (\text{A.15})$$

$$= \left[\cos \left\{ n \cdot \left(\Psi + \frac{N-1}{N} \cdot \pi \right) \right\} + i \cdot \sin \left\{ n \cdot \left(\Psi + \frac{N-1}{N} \cdot \pi \right) \right\} \right] \cdot \frac{\sin n \cdot \pi}{\sin \frac{n \cdot \pi}{N}}$$

- Als n een geheel getal is maar geen veelvoud van N dan volgt meteen uit (A.14):

$$A + iB = 0 \quad (\text{A.16})$$

- In het geval dat n een veelvoud is van N kan (A.14) met behulp van l'Hopital uitgewerkt worden:

$$A + iB = e^{i \cdot n \cdot \psi} \cdot \frac{\frac{d}{dn}(e^{i \cdot n \cdot 2\pi} - 1)}{\frac{d}{dn}(e^{i \cdot n \cdot 2\pi/N} - 1)} \Bigg|_{n=m \cdot N} = e^{i \cdot n \cdot \psi} \cdot \frac{i \cdot 2\pi \cdot e^{i \cdot n \cdot 2\pi}}{i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot e^{i \cdot n \cdot 2\pi/N}} \Bigg|_{n=m \cdot N}$$

$$= N \cdot e^{i \cdot n \cdot \psi} = N \cdot \{ \cos n\psi + i \sin n\psi \}$$

(A.17)

MET n EEN GEHEEL GETAL

Samengevat worden de volgende uitdrukkingen verkregen:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos \left\{ n \cdot \left(\psi + \frac{2\pi k}{N} \right) \right\} = \begin{cases} \frac{\sin n \cdot \pi}{\sin \frac{n \cdot \pi}{N}} \cdot \cos \left\{ n \cdot \left(\psi + \frac{N-1}{N} \cdot \pi \right) \right\} & \text{- ALS } n \text{ NIET GEHEEL IS} \\ 0 & \text{- ALS } n \text{ GEHEEL IS MAAR GEEN VEELVOUD VAN } N \\ N \cdot \cos n \cdot \psi & \text{- ALS } n \text{ EEN VEELVOUD IS VAN } N \end{cases}$$

EN

(A.18)

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin \left\{ n \cdot \left(\psi + \frac{2\pi k}{N} \right) \right\} = \begin{cases} \frac{\sin n \cdot \pi}{\sin \frac{n \cdot \pi}{N}} \cdot \sin \left\{ n \cdot \left(\psi + \frac{N-1}{N} \cdot \pi \right) \right\} & \text{- ALS } n \text{ NIET GEHEEL IS} \\ 0 & \text{- ALS } n \text{ GEHEEL IS MAAR GEEN VEELVOUD VAN } N \\ N \cdot \sin n \cdot \psi & \text{- ALS } n \text{ EEN VEELVOUD IS VAN } N \end{cases}$$

Vergelijking (A.18) geeft dus voor elke frequentie $n.\Omega$ (met $\psi = \Omega.t$) zowel de vermenigvuldigingsfactor

$$\sin(n.\pi)/\sin(n.\pi/N) \quad (\leq N)$$

als de fase

$$(N-1)/N. \pi$$

aan, waarmee de uitdrukking voor één blad aangepast dient te worden, om de totale som te verkrijgen.

Als de frequentie n geheel is zal bij de sommatie alleen iets overblijven indien n tevens een veelvoud is van het aantal bladen N (de sommatie werkt als een filter).

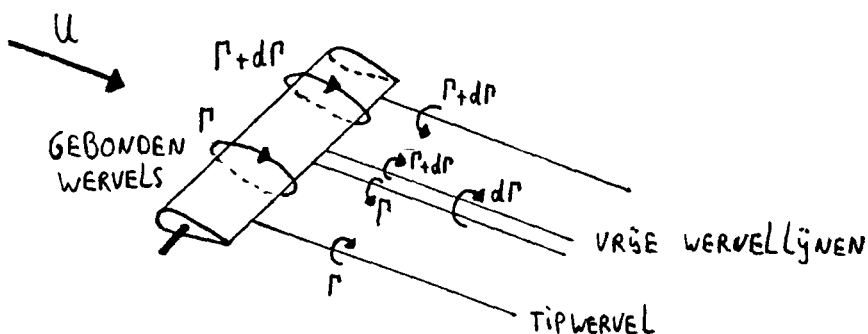
APPENDIX 3: DE LUCHTSTROMING DOOR EEN ROTOR

In deze appendix wordt besproken hoe de stroming door een rotor bepaald kan worden. Indien een vleugelprofiel van een rotor wordt aangestroomd ontstaan er gebonden wervels (dragende wervels) met sterkte Γ die nog kan variëren over de spanwijdte. Volgens de theorie van Helmholtz kan een wervel niet midden in de stroming eindigen zodat er ook vrije wervellijnen (onder andere de tipwervel) van het profiel afkomen (zie figuur A.2). Als zowel de gebonden wervels als de wervellijnen bekend zijn kan de geïnduceerde snelheid op elk punt P meteen berekend worden met behulp van Biot-Savart:

$$dv_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\vec{e} \times d\vec{s}}{e^3} \quad (\text{A.19})$$

MET e DE AFSTAND TUSSEN DE WERVELLIJN EN HET PUNT P
EN ds EEN STUKJE VAN DE WERVELLIJN MET CIRCULATIE Γ

De totale geïnduceerde snelheid v_i volgt dan uit integratie over alle wervellijnen. Het grote probleem is nu dat de verdeling van de wervellijnen niet zonder meer te bepalen is, maar afhangt van de stroming door de rotor. En omdat de geïnduceerde snelheid een essentieel deel vormt van de stroming door de rotor betekent dit dat de uitdrukkingen die de luchtstroming beschrijven onderling gekoppeld zijn; wat het probleem analytisch onoplosbaar maakt. De koppeling kan als volgt anschouwelijker gemaakt worden. Volgens de



Figuur A.2: De vrije en gebonden wervels bij aanstroming van een bladelement.

bladelementtheorie geldt er voor de lift voor een bladelement dr:

$$dL = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W^2 \cdot CL \cdot c \cdot dr \quad (\text{A.20})$$

Volgens Kutta-Joukovsky is de lift gelijk aan:

$$dL = \rho \cdot W \cdot \Gamma \cdot dr \quad (\text{A.21})$$

MET Γ DE CIRCULATIE VAN HET BLADELEMENT

Uit (A.20) en (A.21) volgt:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \cdot W \cdot CL \cdot c = \frac{1}{2} \cdot W \cdot CL \cdot \alpha \cdot c \quad (\text{A.22})$$

MET α AFHANKELIJK VAN v_i (ZIE EVENTUEEL (1.38) t/m (4.41))

De geïnduceerde snelheid v_i die via α in (A.22) voorkomt is volgens Biot-Savart (A.19) een functie van Γ waaruit blijkt dat (A.22) een impliciete vergelijking voor Γ (of v_i) is.

In geval van scheve aanstroming (bij helicopters: voorwaartse vlucht) en/of kruien wordt het probleem nog ingewikkelder omdat dan de uitdrukkingen azimuth (tijds) afhankelijk zijn (zie U_p volgens (1.38)). Dit houdt in dat er door het blad wervels worden geproduceerd die loslaten. Een direct gevolg hiervan is dat v_i nu niet meer uniform over het rotoroppervlak is.

Een mogelijkheid om bovenstaande moeilijkheid te omzeilen is door te veronderstellen dat er een oneindig aantal bladen zijn zodat de rotor te vervangen is door een zogenaamde "trekkende schijf" (actuator disk). Dit maakt toepassing van de (simpele) impulstheorie mogelijk; deze handelingswijze is in hoofdstuk 1 toegepast.

Een tweede mogelijkheid om het probleem aan te pakken is door expliciet uit te gaan van een bepaalde vorm van het zog. Hiermee kan dan de geïnduceerde snelheid berekend worden. Een voorbeeld van deze methode is de theorie van Theodorsen; zie [2] voor een verdere behandeling van dit alles.

APPENDIX 4: AERO-ELASTISCHE INSTABILITEITEN

De aero-elastische instabiliteiten kunnen in een tweetal groepen ingedeeld worden: divergentie en flutter; die nu achtereenvolgens behandeld zullen worden.

Divergentie

Divergentie kan omschreven worden als het (stationaire) verschijnsel dat bij een verstoring van het blad uit zijn evenwichtspositie (omdat bijvoorbeeld de aanstromingshoek toeneemt) de verandering van het aerodynamisch torsiemoment (dus in de draairichting) zodanig is dat de verstoring versterkt wordt (dus mee-in plaats van tegenkoppeling); wat niet gecompenseerd kan worden door het elastische moment van de bladverdraaiing, waardoor het blad tenslotte breekt.

In geval van een 2e orde systeem zou men van divergentie kunnen spreken indien de tegenwerkende veerkracht ontbreekt.

Flutter

Een klassiek voorbeeld van flutter is de zogenaamde torsieflutter dat op kan treden bij vliegtuigbladen alsook bij bruggen! (Dit flutterverschijnsel is te vermijden door de zwaartelijn van het blad zover mogelijk naar voren te plaatsen). Flutter is het verschijnsel dat er een koppeling optreedt tussen de trillingsvormen van 2 of meer vrijheidsgraden (bij de klassieke torsieflutter zijn dat de vrijheidsgraden van torsie en flap). De koppeling ontstaat wanneer de eigenfrequenties dicht bij elkaar komen te liggen en er een zodanige uitwisseling van energie plaatsvindt dat, netto gezien, het blad energie uit de stroming opneemt; totdat het stuk trilt.

In geval van een 2e orde systeem zou men van flutter kunnen spreken indien de demping negatief is.

N.B.: Bovenstaande aero-elastische instabiliteiten dienen niet verward te worden met resonantie. Resonantie treedt op wanneer de frequentie van de door een excitatie opgedwongen trilling samenvalt met de eigenfrequentie van het systeem. Alleen bij afwezigheid van demping zal de amplitude van de trilling oneindig groot worden; doordat in de praktijk altijd wel enige demping aanwezig is hoeft resonantie in

principe geen probleem te vormen.

Nu de begrippen divergentie en flutter bekend zijn zal in het navolgende aangegeven worden hoe bepaald kan worden onder welke omstandigheden deze instabiliteiten zullen optreden. Als voorbeeld van de totstandkoming van de koppeling tussen twee trillingsvormen zal de flap-lag interactie beschreven worden. Lag is de vrijheidsgraad in het rotorvlak; de hoekverdraaiing die het blad maakt ten opzichte van de rotoras wordt aangeduid met de variabele β . Dat beide trillingen gekoppeld zijn volgt uit het feit dat de lagbeweging onder andere afhankelijk is van de klapsnelheid $\dot{\beta}$ via het optredend coriolismoment (3.29). De klapbeweging wordt op zijn beurt door de lagvrijheidsgraad beïnvloedt door bijvoorbeeld de verandering in de centrifugaalwerking omdat de rotorhoeknelheid van een blad nu gelijk is aan $\Omega + \dot{\beta}$.

In het algemeen zal de homogene bewegingsvergelijking dat het startgedrag van een gekoppelde trilling beschrijft als volgt luiden (gelineairiseerd):

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \ddot{\beta} + a_{12} \cdot \dot{\beta} + a_{13} \cdot \beta & + & b_{11} \cdot \ddot{\beta} + b_{12} \cdot \dot{\beta} + b_{13} \cdot \beta = 0 \\ a_{12} \cdot \ddot{\beta} + a_{22} \cdot \dot{\beta} + a_{23} \cdot \beta & + & b_{21} \cdot \ddot{\beta} + b_{22} \cdot \dot{\beta} + b_{23} \cdot \beta = 0 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

De coëfficiënten a_{ii} en b_{ii} zullen in het algemeen nog afhangen van de rotorhoeknelheid Ω . Evenals de differentiaalvergelijking voor een 2^e orde systeem kan nu de oplossing gevonden worden via substitutie van de (gekoppelde) trilling $\beta = \tilde{\beta} \cdot e^{s \cdot t}$ en $\beta = \tilde{\beta} \cdot e^{s \cdot t}$ (met $s = i \cdot \omega + \lambda$ een complex getal; ω is de frequentie en λ de demping).

Na deling door $e^{s \cdot t}$ wordt (A.23) in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot s^2 + a_{12} \cdot s + a_{13} & b_{11} \cdot s^2 + b_{12} \cdot s + b_{13} \\ a_{12} \cdot s^2 + a_{22} \cdot s + a_{23} & b_{21} \cdot s^2 + b_{22} \cdot s + b_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Volgens de regel van Cramer is er alleen een oplossing ongelijk $\beta = 0$ én $\beta = 0$ indien de determinant gelijk is aan nul. Dit resulteert in

een 4^e graadsvergelijking in s :

$$S^4 + A.S^3 + B.S^2 + C.S + D = 0$$

$$\begin{aligned} \text{REEL} \quad A &= (a_{11}.b_{22} + a_{12}.b_{21} - a_{21}.b_{12} - a_{22}.b_{11}) / (a_{11}.b_{21} - a_{21}.b_{11}) \\ B &= (a_{11}.b_{23} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{21} - a_{21}.b_{13} - a_{22}.b_{12} - a_{23}.b_{11}) / (a_{11}.b_{21} - a_{21}.b_{11}) \quad (\text{A.25}) \\ C &= (a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{22} - a_{22}.b_{13} - a_{23}.b_{12}) / (a_{11}.b_{21} - a_{21}.b_{11}) \\ \text{EN} \quad D &= (a_{13}.b_{23} - a_{23}.b_{13}) / (a_{11}.b_{21} - a_{21}.b_{11}) \end{aligned}$$

Zoals we gezien hebben is divergentie een stationaire instabiliteit zodat die dus optreedt bij $\omega=0$. Indien nu de variabele λ positief is, is de oplossing gelijk aan $\beta = \tilde{\beta}.e^{\lambda.t}$: een divergente trilling (de amplitude neemt alsmaar toe). De divergentiegrens treedt op als precies geldt dat $\lambda=0$ oftewel $s=0$. Invullen in (A.25) levert dan meteen: $D=0$. Dit is een vergelijking in ω met coëfficiënten die afhankelijk zijn van de bladparameters. De oplossing geeft de waarde van het toerental vanaf waar er divergentie zal optreden.

Flutter is een dynamische instabiliteit ($\omega \neq 0$) en treedt op als λ weer positief is. De fluttergrens wordt bepaald door $\lambda=0$ dus als $s=i.\omega$. Invullen in (A.25) en splitsing van het reële en imaginaire gedeelte levert:

$$\text{REËEL} : \quad \omega^4 - B.\omega^2 + D = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\text{IMAGINAIR} : \quad -A.\omega^3 + C.\omega = 0 \quad (\text{A.27})$$

Uit (A.27) volgt $\omega^2 = C/A$ en invullen in (A.26) geeft:

$$\frac{C^2}{A^2} - \frac{BC}{A} + D = 0 \quad \text{dus} \quad C^2 - A.B.C + A^2.D = 0 \quad (\text{A.28})$$

Uit deze laatste vergelijking kan dan het fluttertoerental berekend worden (als functie van de bladhoek Θ).

Een andere mogelijkheid om het divergentie- en flutter toerental te

bepalen is om eerst de frequentie ω en demping λ met behulp van (A.25) als functie van de rotorhoeksnelheid Ω uit te zetten in een grafiek. Uit zo'n grafiek volgt dan meteen het divergentie en flutter toerental met behulp van de voorwaarde $\lambda=0$.

Een uitgebreidere behandeling voor het bepalen van de stabiliteitsgrenzen kan gevonden worden in [14].

APPENDIX 5: SYMBOLENLIJST EN INDICES

<u>symbool</u>	<u>beschrijving</u>	<u>eenheid</u>
a	-axiale inductiefactor $a=v_i/U$ -versnelling	- m/s ²
A	oppervlakte	m ²
c(x)	bladkoorde	m
c ₀	lineaire bladkoorde factor	m
C _D	axiale weerstandscoëfficiënt	-
	$C_D = \frac{D_{ax}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \pi \cdot R^2}$	
C _L	liftcoëfficiënt	-
	$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W^2 \cdot \pi \cdot R^2}$	
C _{Lα}	helling van liftkromme	1/rad
	$C_{L\alpha} = \frac{dC_L}{d\alpha}$	
C _P	vermogenscoëfficiënt	-
	$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^3 \cdot \pi \cdot R^2}$	
D	-(aerodynamische) weerstand -dwarskracht	N N
e	excentriciteit van klapscharnier	-
E, I	stijfheid	N.m ²
f	rotor-toren afstand (yawarm)	m
f _n	normeringsfactor n ^e mode	-
F	kracht	N
g	valversnelling	m/s ²
H(ω)	frequentieresponsie	-
i	ingangssignaal	-
I	traagheidsmoment	N.m.s ²
k	windgradiëntcoëfficiënt	1/m
K	veerstijfheid	N.m/rad
l	lengte	m
L	-lift -impulsmoment	N N.m.s
m	massa	kg

<u>symbool</u>	<u>beschrijving</u>	<u>eenheid</u>
M	krachtmoment	N.m
N	-aantal bladen	-
	-normaalkracht	N
P	vermogen	J/s
q	hoeksnelheid kruibeweging	rad/s
\hat{q}	dimensieloze hoeksnelheid kruibeweging $\hat{q}=q/\Omega$	-
qd	verdeelde belasting in dwarsrichting	N/m
qn	verdeelde belasting in normaalrichting	N/m
r	straal (vanaf het scharnier)	m
R	rotorstraal	m
s	straal (vanaf de as)	m
t	tijd	s
tn	n^e tapsheidintegraal	-
u	uitgangssignaal	-
U	ongestoorde windsnelheid	m/s
Up	relatieve aanstroomsnelheid loodrecht (perpendiculair) op het bladelement	m/s
Us	relatieve aanstroomsnelheid in lengterichting (span) van het bladelement	m/s
Ut	relatieve aanstroomsnelheid parallel (tangentiëel) aan het bladelement	m/s
vi	geïnduceerde axiale snelheid	m/s
V	resultante van U en vi	m/s
W	relatieve aanstroomsnelheid ten opzichte van het bladelement	m/s
x	dimensieloze straal (vanaf scharnier) $x=r/R$	-
Xn	n^e mode van flexibel blad (eigenfrequentie)	-
y	dimensieloze straal (vanaf de as) $y=s/R$	-
Y(r,t)	uitwijking van flexibel blad	m
Zn(ψ)	klaphoek n^e mode van flexibel blad	rad
α	aanstroombhoek van W ten opzichte van bladelement	rad
$\beta(\psi)$	klaphoek	rad
β_0	statische klaphoek (kegelhoek)	rad
β_{1c}	cyclische klaphoek (kantelhoek tipvlak om horizontale as)	rad

<u>symbool</u>	<u>beschrijving</u>	<u>eenheid</u>
β_{1s}	cyclische klaphoek (kantelhoek tipvlak om verticale as)	rad
β_d	dynamische klaphoek (totale cyclische klaphoek)	rad
γ	getal van Lock $\gamma = \frac{\rho \cdot C_{L\alpha} \cdot c_1 \cdot R^4}{I}$	-
Γ	circulatie $\Gamma = \oint v dl$	m ² /s
δ	scheve aanstromingshoek U ten opzichte van rotor	rad
δ_3	hoek scheve klapas	rad
Δ	determinant	-
ξ	excentriciteitscoëfficiënt $\xi = \frac{\gamma b \cdot e \cdot x_g \cdot R^2}{I}$	-
$\Theta(x)$	bladhoek (verstelling)	rad
Θ_0	lineaire bladhoek factor	rad
λ	-snellopendheid $\lambda = \Omega \cdot R / U$ -dimensieloze eigenfrequentie (eigenwaarde) $\lambda = \omega / \Omega$	-
μ	massa per lengte eenheid	kg/m
ν_n	frequentie factor n ^e mode	-
ζ	dempingscoëfficiënt	-
ρ	dichtheid	kg/m ³
σ	-solidity $\sigma = (N \cdot c_r) / (\pi \cdot R)$ -normaalspanning	- N/m ²
τ	krachtmoment	N.m
ϕ	-hoek van W ten opzichte van bladcoördinaten -fasehoek	rad rad
ψ	azimuthhoek	rad
ω	-hoeksnelheid -(eigen)frequentie	rad/s rad/s
ω_0	eigenfrequentie niet-roterend blad	rad/s
$\hat{\omega}$	dimensieloze hoeksnelheid/(eigen)frequentie $\hat{\omega} = \omega / \Omega$	-
Ω	rotorhoeksnelheid	rad/s

<u>indices</u>	<u>beschrijving</u>
a	aerodynamisch
b	blad
c	centrifugaal
co	coriolis
e	excitatie
g	-gravitatie
	-massamiddelpunt (centre of gravity)
Q	torque
r	bladwortel (root)
s	scharnier
t	tip
v	veer