

MASTER

De α_1 - γ en ρ_0 - γ hoekcorrelatiefunctie voor inelastische verstoring aan even-even kernen

Tolsma, L.D.

Award date:
1966

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

DE α' - γ EN p' - γ HOEKCORRELATIEFUNCTIE
VOOR INELASTISCHE VERSTROOING
AAN EVEN-EVEN KERNEN.

Technische Hogeschool Eindhoven, N-K 005 november 1965.

Afstudeerverslag van L.D. Tolsma.

INHOUD

I	Inleiding.	1
---	------------	---

DEEL I

Inelastische verstrooiing van spin 0 deeltjes aan even-even kernen.

II	Inelastische α -verstrooiing aan even-even kernen. De experimentele α - γ hoekcorrelatiefunctie.	9
III	Plane-wave Born approximatie en Distorted-wave Born approximatie voor A) Verstrooiing van een deeltje aan een potentiaal $V(r)$ B) Verstrooiing van een spin 0 deeltje aan een meer-deeltjes systeem.	15 20
IV	Toepassingen van de distorted-wave Born approximatie. A) Werkwijze. B) Ruwe berekeningen.	25 26
	Appendix A: De differentiële werkzame doorsnede.	36

DEEL II

Inelastische verstrooiing van gepolariseerde spin $\frac{1}{2}$ deeltjes aan even-even kernen.

V	De verstrooiingsgolf functie voor verstrooiing van het V^{de} spin $\frac{1}{2}$ deeltje uit een bundel aan een even-even kern, De amplitudematrix.	37
VI	De dichtheidsmatrix van het systeem <u>voor</u> de reactie. De dichtheidsmatrix van het systeem <u>na</u> de reactie. De differentiële werkzame doorsnede van de verstrooide spin $\frac{1}{2}$ deeltjes.	41 44 48
VII	Deëxcitatie van het 2^+ niveau. De p - γ hoekcorrelatiefunctie.	50 53
VIII	Bespreking van de p - γ hoekcorrelatiefunctie. A) De vorm van de p - γ hoekcorrelatiefunctie. B) Verificatie van het gedrag van de hoekcorrelatiefunctie m.b.v. symmetriebeschouwingen. C) Verdere consequenties van het gedrag van de hoekcorrelatiefunctie, die volgen uit de behoudswet van het impulsmoment van de z-as. D) De in experimentele grootheden tot uiting komende relatieve fasen van de verstrooiingsamplituden.	58 59 62 66

Figuur VI-1.

71

Figuur VI-2.

72

Figuur VII-1.

73

Appendix B.

74

I Inleiding

Wanneer een targetkern met massagetal A_1 en atoomnummer Z_1 beschoten wordt door een kerndeeltje met massagetal A_2 en atoomnummer Z_2 dan wordt het verloop van de botsing beschreven door golf functies, die de coördinaten bevatten van het totale systeem van $A_1 + A_2$ nucleonen. Deze verzameling nucleonen, die tijdens de botsing met elkaar wisselwerken, pleegt men in het algemeen aan te duiden met "het tussensysteem". De levensduur van dit tussensysteem is afhankelijk van de energie van het projectiel. Is deze energie laag (< 1 MeV) dan vertoont de totale werkzame doorsnede scherpe resonanties met een breedte die varieert tussen 1 eV en enkele keV, wat in figuur I-1 te zien is.

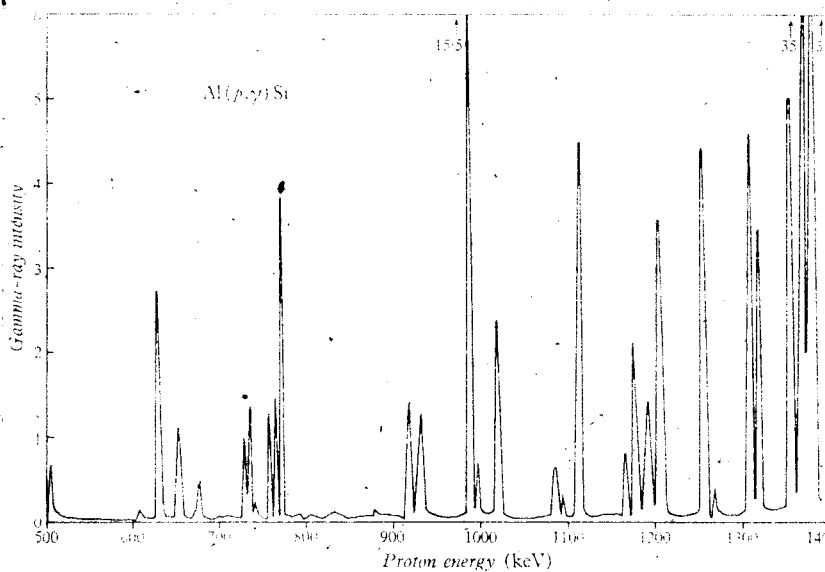


Fig. 15.4. Resonant yield of γ -radiation in the reaction $^{27}\text{Al}(p,\gamma)^{28}\text{Si}$. The peaks indicate virtual levels at an excitation of about 12 MeV in the nucleus ^{28}Si (Brostrom *et al.*, *Phys. Rev.*, 71, 661, 1947).

fig. I-1

In het hogere energiegebied (> 10 MeV) daarentegen belooft deze breedte van de resonanties enkele MeV, wat te zien is in figuur I-2. De linkerhelling van de brede resonantie is in deze figuur niet weergegeven. Op deze brede resonantie is een rimpel gesuperponeerd. In een later stadium van deze inleiding komen we op deze snelle fluctuaties (z.g. Ericson fluctuaties) terug.

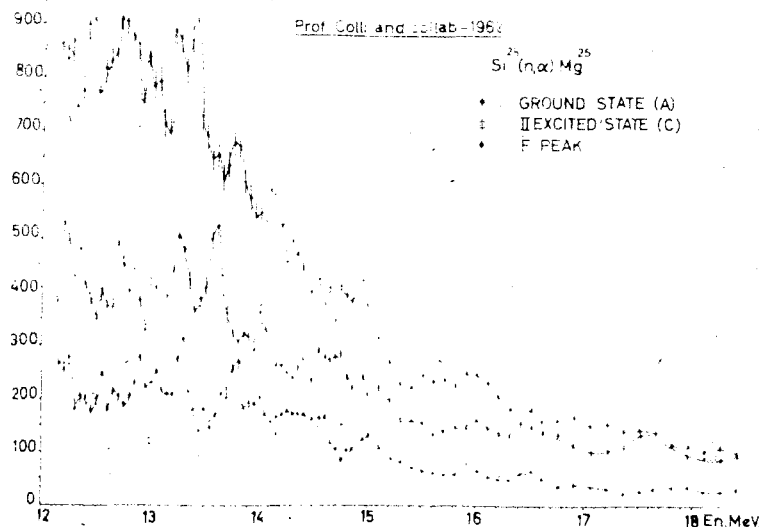


Fig. 7. Cross-section for transition to ground state (A) and two excited states of Mg^{25} from $Si^{28}(n, \alpha)Mg^{25}$ reactions as function of incident neutrons. Ref. (7).

fig. I-2

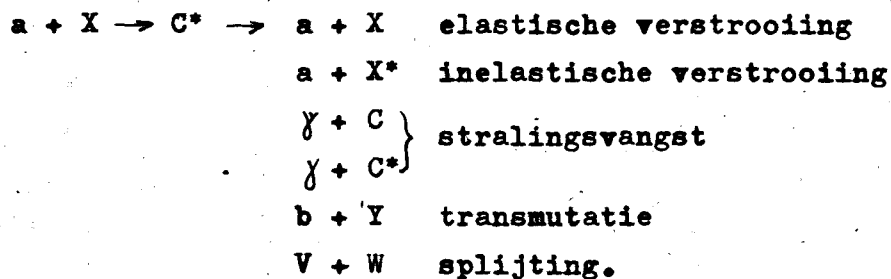
Wij kunnen de levensduur van het tussensysteem d.w.z. de interactietijd bepalen d.m.v. de relatie $\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E}$, die het verband aangeeft tussen deze levensduur en de breedte ΔE van de resonanties. Bij lage energieën heeft deze levensduur de grootte-orde van $10^{-15} - 10^{-18}$ sec., terwijl hij voor het hogere energiegebied ongeveer 10^{-22} sec. bedraagt. Aan de hand van deze verschillende interactietijden kan men zich van het botsingsmechanisme de volgende voorstellingen maken —

De genoemde scherpe resonanties in de totale werkzame doorsned — die zich voordoen wanneer middelzware en zware kernen beschoten worden door laag energetische projectielen (< 1 MeV) worden op bevredigende wijze verklaard door het "Compound Nucleus Model", dat in 1936 het eerst door N. Bohr geïntroduceerd werd. In dit model wordt aangenomen dat in dit lage energiegebied het projectiel door de aanzienlijke interactietijd ($10^{-15} - 10^{-18}$ sec.) met vele nucleonen van de targetkern tot een wisselwerking kan komen. Hierbij zal het projectiel tot een volledige energieoverdracht komen, waarbij zijn energie over de vele nucleonen

van het tussensysteem verdeeld wordt. Het projectiel smelt hier a.h.w. ineen met de targetkern. Bij een gelijkmatige verdeling van de energie over de vele nucleonen krijgt voor niet te hoge projectielenergieën geen enkel nucleon van het tussensysteem voldoende energie om te worden geëmitteerd. Door statistische fluctuaties echter kan een nucleon of nucleongroep alsnog uitgezonden worden, waarbij het (de) uitgezonden nucleon(en) niet meer "weet"(en) door wat voor soort projectiel het tussensysteem gevormd is. Dit wordt mathematisch uitgedrukt door de "compound nucleus" formule:

$$\sigma_{a \rightarrow b} = \sigma_{CN(a)} \cdot P_{CN(b)} \quad (I-1)$$

Hierin drukt $\sigma_{a \rightarrow b}$ de werkzame doorsnede uit voor het proces, waarin a het ingangskanaal en b het uitgangskanaal karakteriseert. M.a.w. a en b duiden de aard van de inkomende en uitgaande deeltjes aan. Verder is $\sigma_{CN(a)}$ de werkzame doorsnede voor de vorming van de compound nucleus vanuit het ingangskanaal a. De factor $P_{CN(b)}$ stelt de kans voor op verval van de compound nucleus via kanaal b. De emissie van nucleonen is echter niet de enige vervalmogelijkheid van het tussensysteem. Verval kan ook plaats hebben door b.v. γ -emissie. In het onderstaand staatje worden de verschillende vervalmogelijkheden opgesomd. Hierin stelt a het projectiel, X de targetkern en C* de geëxciteerde samengestelde (=compound) kern voor:



Voor het hogere energiegebied (> 10 MeV) waar de verschillende breder wordende resonantiepieken in de totale werkzame doorsnede elkaar allengs gaan overlappen, werden ter verklaring hiervan de ideeën van Bohr op een meer statistische wijze onderzocht. Dit gaf aanleiding tot het "Statistisch Model van de Compound Kern", dat verder ontwikkeld werd door Weisskopf en anderen. Een gevolg van de statistische veronderstellingen in dit model is, dat de wijze waarop de compound kern in een aantal reactieproducten vervalt evenals in het lage energiegebied onafhankelijk is van de manier, waarop de compound kern tot stand komt. Dit wordt ook hier uitgedrukt door een formule van de vorm (I-1).

Het statistisch model kon echter niet alle verschijnselen in dit hogere energiegebied verklaren. Zo gaf de experimentele differentiële werkzame doorsnede (hoekverdeling) van de verstrooide deeltjes in veel gevallen een sterk maximum in voorwaartse richting te zien. Als voorbeeld geven we de (α, α') hoekverdeling voor verstrooiing aan ^{12}C . Dit sterke maximum suggereert een sterke correlatie tussen de vorming en verval van het tussensysteem. Nog een kenmerk is de voorkeur voor emissie van deeltjes die overeenkomen met het projectiel. Ook blijkt uit de energieverdeling van de geëmitteerde deeltjes dat er een voorkeur bestaat voor emissie van hoog energetische deeltjes, wat eveneens in strijd is met het statistisch model.

Bovenstaande afwijkingen van het statistisch model schrijft men toe aan processen (de z.g. directe interacties of directe reactieprocessen), die plaats hebben in een tijd, welke veel korter is dan de typische compound nucleus interactietijden. Deze tijd komt, om de gedachten te bepalen, overeen met de tijd, welke het projectiel nodig heeft om een gebied ter grootte van het kernmedium te passeren en is van dezelfde grootte-orde als de m.b.v. de onzekerheidsrelatie bepaalde interactietijd.

$$\tau = \frac{2R}{v} = \frac{2R}{\sqrt{\frac{2E}{m_a}}} \approx \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ MeV}}{4 \cdot \frac{1000 \text{ MeV}}{c^2}}}} \approx 10^{-22} \text{ sec.}$$

De snellere ("Ericson"-)fluctuaties, die de werkzame doorsnede van fig. I-2 te zien geeft, schrijft men toe aan compound-nucleus effecten, die in het lage-energiegebied overheersend zijn, maar die voor het onderhavige energiegebied naar de achtergrond zijn gedrongen.

Het model waarmee deze directe reactieprocessen beschreven worden, wordt het "Directe Reactie Model" genoemd. Men neemt in dit directe reactie model aan, dat de overgang van het ingangskanaal naar

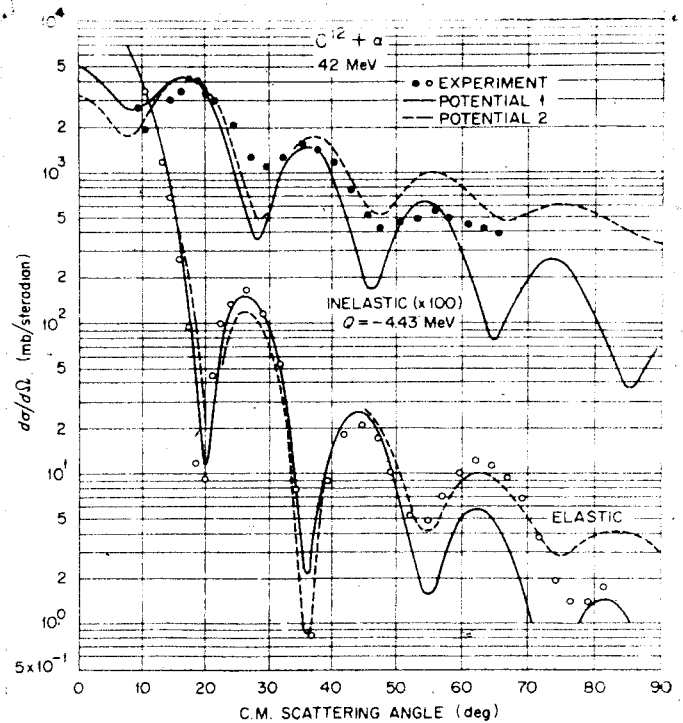


Fig. 3. Comparison of the theoretical elastic and inelastic differential cross-sections with the preliminary experimental data of Naqib ⁶⁾

fig. I-3

het uitgangskanaal plaatsheeft door een z.g. inelastische interactie, die slechts de variabelen bevat van een klein aantal nucleonen, of variabelen die de vorm van het "oppervlak" van de targetkern beschrijven. De beweging van het projectiel vóór deze inelastische interactie wordt beschreven door aan te nemen dat het projectiel de kern beschouwt als een optisch medium met absorptie- en refractie-eigenschappen. Eenzelfde veronderstelling wordt gemaakt met betrekking tot de beweging van de uittredende deeltjes. Datgene waartoe de genoemde inelastische interactie zelf aanleiding kan geven kan men als volgt zeer globaal indelen:

1) Eén deeltjes reacties.

De inelastische interactie heeft slechts plaats met één nucleon van de targetkern.

2) Collectieve reacties.

Na de inelastische interactie blijft de kern in een aangeslagen rotatie- of vibratietoestand achter.

3) Stripping.

Hierbij blijft een gedeelte van het projectiel in het kernmedium achter. B.v. (d.p) of (d.n) reacties.

Een ruwe indruk van de hoekverdeling der uittredende deeltjes, die het directe reactie model voorspelt kan men verkrijgen door een aantal vereenvoudigende veronderstellingen.

- a. De inelastische interactie vindt uitsluitend plaats aan het oppervlak van de kern (straal R). Dit correspondeert met de veronderstelling dat de absorptie in het kernmedium groot is.
- b. De beweging van de inkomende en uitgaande deeltjes wordt beschreven door de vlakke golven $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}$ (zie hoofdstuk III). Deze golven worden dus buiten het kernoppervlak onvervormd gedacht.

Met deze benaderingen wordt de differentiële werkzame doorsnede voor b.v. inelastische verstrooiing aan even-even kernen gegeven door (Voor $o^+ \rightarrow LM$ excitatie, waarin L het totale impulsmoment van de kern, inclusief de intrinsieke spins van de nucleonen voorstelt):

$$\sigma(\vec{k}, \vec{k}') \underset{o \rightarrow LM}{\propto} |f_L(KR)|^2 \quad (I-2)$$

Hierin is K de grootte van de impulsoverdracht (gedeeld door \hbar). Een illustratie van (I-2) wordt door figuur I-4 gegeven. Op de afleiding van bovenstaande uitdrukking voor de differentiële werkzame doorsnede komen we later terug.

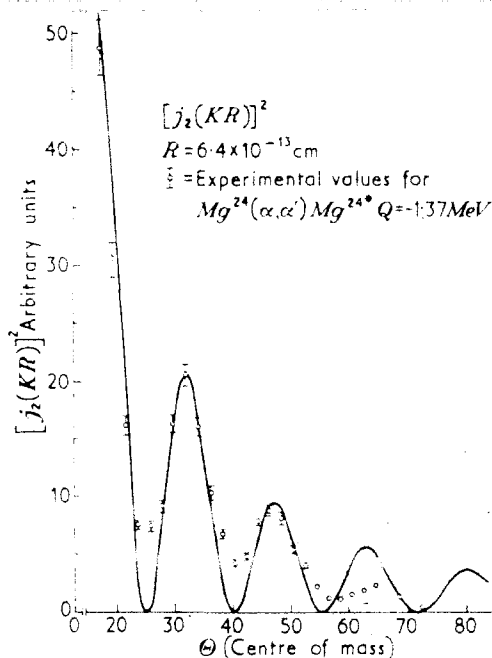


FIG. 7. Angular distribution of the alpha particles from the $Mg^{24}(\alpha, \alpha')Mg^{24*}$ reaction. The incident alpha particle energy is 31.5 MeV. The Q value is -1.37 MeV. These results were obtained by H. J. Watters.²

² H. J. Watters, *Phys. Rev.* **103**, 1770 (1956).

fig. I-4

In het algemeen geeft de experimentele hoekverdeling aan de hand van bovenstaande theoretische uitdrukking reeds zonder berekening m.b.v. een computer aan hoe groot de impulsmomentoverdracht L is. Uit het vervolg zal echter blijken dat de benaderingen a) en b) voor het beschrijven van de α - γ hoekcorrelatie in het $(\alpha, \alpha' \gamma)$ proces te grof zijn. Deze benaderingen voeren namelijk voor een vaste α -verstrooiingsrichting tot een deëxcitatie γ -patroon, dat symmetrisch is om \vec{k} , in tegenstelling tot de experimentele resultaten.

In deel I van dit verslag behandelen wij de inelastische verstrooiing van spin 0 deeltjes, zoals α -deeltjes, aan even-even kernen. In hoofdstuk II bespreken we de excitatie van een 2^+ niveau t.g.v. een inelastische α -verstrooiing en de daarna plaatsvindende deëxcitatie van dit niveau. Bij deze deëxcitatie wordt γ -straling uitgezonden. Aan dit hoofdstuk zijn tevens de experimentele resultaten van de α - γ hoekcorrelatiefunctie toegevoegd voor een kernreactie waarbij de projectielenergie 42 MeV bedraagt en de targetkern door ^{12}C gevormd wordt. In hoofdstuk III a) behandelen we de "Plane-Wave Born Approximatie" (P.W.B.A.) en de "Distorted-Wave Born Approximatie" (D.W.B.A.) voor verstrooiing van een deeltje aan een potentiaal $V(\vec{r})$. De hierbij verkregen resultaten zijn met geringe wijzigingen ook geldig voor

verstrooiing van een spin 0 deeltje aan een meer-deeltjes systeem (hoofdstuk III b)). De D.W.B.A. toegepast op verstrooiing aan een meer-deeltjes systeem vormt het startpunt van de meeste directe-reactie-model berekeningen. In hoofdstuk IV bekijken we eerst de werkwijze, die men gewoonlijk volgt bij de toepassing van de D.W.B.A. Vervolgens stappen we in dit hoofdstuk over op ruwe berekeningen om

- 1) M.b.v. de benaderingen a) en b) te komen tot de uitdrukking (I-2) voor de differentiële werkzame doorsnede voor inelastische verstrooiing van spin 0 deeltjes aan even-even kernen.
- 2) M.b.v. een verfijning van de benadering b) en een extra vereenvoudiging te geraken tot een bevredigende verklaring van een experimenteel resultaat, dat een asymmetrie van het deëxcitatie γ -patroon t.o.v. \vec{K} te zien geeft.

In deel II van dit verslag behandelen wij de inelastische verstrooiing van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes aan even-even kernen. Verstrooiingsprocessen, die geïnduceerd worden door spin $\frac{1}{2}$ deeltjes staan tegenwoordig sterk in de belangstelling, omdat ze informatie kunnen geven over spin-afhankelijke interacties tussen projectiel en targetkern. In hoofdstuk V geven wij de verstrooiingsgolf functie voor verstrooiing van een spin $\frac{1}{2}$ deeltje aan de hand van de verstrooiingsgolf functie, die in hoofdstuk III naar voren gekomen is bij de beschrijving van de verstrooiing van een spin 0 deeltje. In dit hoofdstuk komt ook de verstrooiingsamplitude, die de verstrooiing van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes kenmerkt, ter sprake. Voorbeelden van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes zijn protonen en ^3H kernen. In hoofdstuk VI wordt aangegeven, dat wij m.b.v. de z.g. "dichtheidsmatrix" een bundel gepolariseerde spin $\frac{1}{2}$ deeltjes zodanig kunnen beschrijven, dat het (gemiddelde) gedrag van experimentele grootheden, zoals de differentiële werkzame doorsnede van de verstrooide spin $\frac{1}{2}$ deeltjes en de hoekcorrelatiefunctie, te beschrijven en/of te voorspellen is. In dit hoofdstuk geven we tevens de uitdrukking voor deze differentiële werkzame doorsnede. Wij vinden dan het bekende resultaat, dat de differentiële werkzame doorsnede onafhankelijk is van de longitudinale component van de polarisatievector en bovendien onafhankelijk is van de transversale component van de polarisatievector in het reactievlak, d.i. het vlak door de vectoren \vec{k}_i en \vec{k}_f . Meting van de differentiële werkzame doorsnede geeft ons bepaalde grootheden in handen, die ook voorkomen in de hoekcorrelatiefunctie. Deze functie wordt in hoofdstuk VII afgeleid, nadat eerst in dit hoofdstuk de deëxcitatie van de targetkern besproken is. De hoekcorrelatiefunctie geeft het verband aan tussen het deëxcitatie γ -patroon en de verstrooiingsrichting van de verstrooide spin $\frac{1}{2}$ deeltjes. Uit deze functie blijkt dat:

- a) De γ -intensiteit in het reactievlak onafhankelijk is van de componenten van de polarisatievector in dit vlak.
- b) De γ -intensiteit in de richting van de quantisatie-as, loodrecht op het reactievlak, onafhankelijk is van de componenten van de polarisatievector in het reactievlak.
- c) De γ -intensiteit in de richting van de quantisatie-as ongelijk is aan nul, dankzij de spinafhankelijkheid van de spin $\frac{1}{2}$ deeltje - targetkern interactie.
- d) Er alleen bepaalde relatieve fasen van de verstrooiingsamplituden in de experimentele proton - γ hoekcorrelatie tot uiting komen, die gemakkelijk m.b.v. een schema aan te geven zijn.

Referenties:

- 1) N. Austern in : Fast Neutron Physics, deel II.
- 2) C.A. Levinson in : Nuclear Spectroscopy, deel B.
- 3) R.G. Sachs : Nuclear Theory.

D E E L I

INELASTISCHE VERSTROOIING VAN
SPIN O DEELTJES AAN EVEN-EVEN KERNEN.

II Inelastische α -verstrooiing aan even-even kernen. De experimentele

α' - γ hoekcorrelatiefunctie.

Bij het experiment, waarvan straks de resultaten aan de orde komen, is α -verstrooiing uitgevoerd aan ^{12}C ($E = 42$, $Q = -4,43$ MeV). Bij dit experiment selecteert men uit het energiespectrum van de verstrooide α -deeltjes die α' 's, die de kern achterlaten in de eerste aangeslagen toestand van 4,43 MeV. (Kinetische energieverlies in het zwaartepunt-systeem is gelijk aan $-Q$). Deze aangeslagen toestand is, zoals de eerste aangeslagen toestanden van nagenoeg alle even-even kernen een 2^+ toestand. De begintoestand van alle even-even kernen is een 0^+ toestand.

De aangeslagen kern zal weer naar zijn grondniveau terugvallen, waarbij γ -straling uitgezonden wordt. Schematisch wordt dit als volgt voorgesteld:

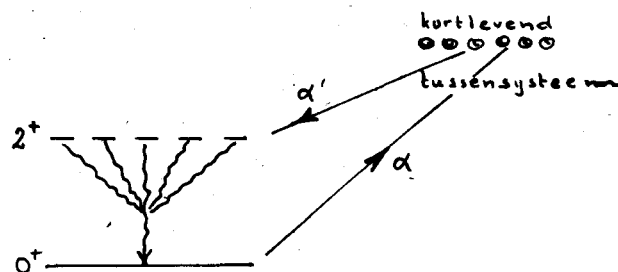
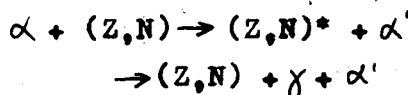


fig. II-1

Het 2^+ niveau heeft 5 magnetische subniveaus, zoals in figuur II-1 is aangegeven. Voor vaste α -verstrooiingsrichting is de aangeslagen toestand waarin de kern achterblijft een superpositie van de magnetische subtoestanden, elk met amplitude α_m , die we in het vervolg de bezettingsamplitude zullen noemen. (α_m is evenredig met de verstrooiingsamplitude $f(\hat{k}, \hat{k}_f)_{0 \rightarrow 2m}$, die later nog aan de orde komt).

Wij zijn nu speciaal geïnteresseerd in een mogelijk hoekcorrelatie tussen de geëmitteerde α -deeltjes en de deëxcitatie γ -straling. De spins van de kerntoestanden, die bij de verstrooiing een rol spelen zijn bekend. Dit maakt het eenvoudiger om uit de experimentele α' - γ hoekcorrelatie iets te leren over het reactiemechanisme, dat de stralende kerntoestanden veroorzaakt.

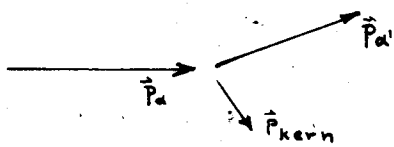
De vijf subniveaus in bovenstaande figuur mogen we beschouwen als coherente bronnen, die γ -straling uitzenden. Dit zal daarom aanleiding geven tot een zeker interferentiepatroon. Indien de bezettingsamplituden α_m van deze niveaus afhankelijk zouden zijn van de α -verstrooiingshoek $\varphi_{\alpha'}$, d.i. de hoek tussen de verstrooide α -deeltjes en de bewegingsrichting van de inkomende α -deeltjes,

dan is het duidelijk dat dit zich voordoet in een correlatie tussen het interferentiepatroon van de γ -straling en de verstrooiingshoek $\varphi_{\alpha'}$. Het interferentiepatroon van de γ -straling, uitgezonden door de stralende kern, blijkt experimenteel de vorm te hebben van de functie $A + B \sin^2 2(\varphi_{\gamma} - \varphi_0)$, gemeten in het reactievlak bij één bepaalde waarde van de verstrooiingshoek. De hoek φ_{γ} zal nog nader in dit vlak aangegeven worden. Er blijkt nu inderdaad een correlatie tussen dit patroon en de verstrooiingshoek te bestaan, die zich in de symmetriehoek φ_0 en in A en B manifesteert. Hieruit volgt dus dat α_m afhankelijk is van $\varphi_{\alpha'}$. Naast deze afhankelijkheid blijkt α_m ook nog afhankelijk te zijn van de projectielenergie. Wij zullen straks meer verantwoord op bovenstaande functie terugkomen.

Een andere bron om informatie omtrent het reactiemechanisme te verkrijgen is de (α, α') hoekcorrelatie, d.w.z. de differentieële werkzame doorsnede of wel de α' -hoekverdeling. Voorbeelden voor een dergelijke hoekverdeling worden gegeven door de figuren I-3 en I-4.

Teneinde een exactere behandeling mogelijk te maken voeren wij enkele conventies in:

a) Bij de botsing zal sprake zijn van een terugstoot en een daarmee corresponderende energie. In verband hiermee biedt het voordeel om



in de berekeningen over te stappen van laboratorium coördinaten op de coördinaten van het totale massamiddelpunt en relatieve coördinaten. Op de hamiltonfunctie $\frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

passen we daarom de volgende transformatie toe:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{p} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$$

Hij gaat dan over in: $\frac{P^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$ met

$m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$, de gereduceerde massa. De eerste term vertegenwoordigt de

vrije beweging van het massamiddelpunt en kan dus beschreven

worden met een vlakke golf als factor in de totale golf functie.

In de berekeningen zullen wij ons verder beperken tot de resterende termen waar de interne hamiltonfuncties en interne nucleon-coördinaten van projectiel en kern gemakshalve niet vermeld zijn.

b) Een tweede conventie die wij zullen invoeren is die voor de oriëntatie van het coördinatenstelsel. Hierbij laten we ons leiden door de Baselconventie en door een regel van A. Bohr (Nuclear Physics

10('59) 486), die als volgt luidt: $P_i e^{im_i \pi} = P_f e^{im_f \pi}$

Deze regel mag slechts gehanteerd worden, wanneer de kwantisatie-as loodrecht op het reactievlak, d.i. het vlak door de vectoren \vec{k}_i en \vec{k}_f ,

gekozen is. (zie figuur II-2) De richting van \vec{k}_i komt overeen met de bewegingsrichting van het inkomende α -deeltje, terwijl de richting van \vec{k}_f overeenkomt met de bewegingsrichting van het verstrooide α -deeltje. De Baselconventie schrijft voor, dat de $+z$ richting evenwijdig moet zijn aan de vector $\vec{k}_i \times \vec{k}_f$. P_i en P_f zijn de producten van de intrinsieke pariteiten van de begin- resp. de eindtoestand. Voor de botsing wordt de som van de projecties van de spins, die bij projectiel en targetkern behoren, op de kwantisatie-as loodrecht op het reactievlak weergegeven door m_i . Hetzelfde geldt voor m_f maar dan voor na de botsing. De bovenstaande

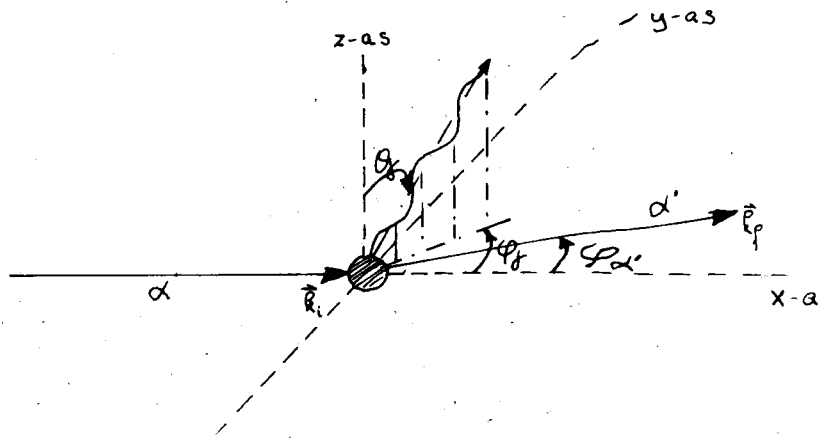


fig. II-2

regel zullen wij vervolgens illustreren aan een tweetal voorbeelden voor verstrooiing aan genoemde targetkernen.

1) Het projectiel is een α -deeltje.

Voor de botsing bedragen de spins van het α -deeltje en targetkern beide nul, na de botsing zijn deze resp. 0 en 2 (projectie m) geworden. De intrinsieke pariteiten veranderen door de botsing niet en we krijgen dus: $+1 = +e^{i m \pi} \rightarrow m = 0, -2, +2$.

Dus alleen de $m = 0, -2, +2$ subniveaus worden bezet. Bij een andere keuze van de z -as zouden $\alpha_{\pm 1}$ in het algemeen niet nul geweest zijn.

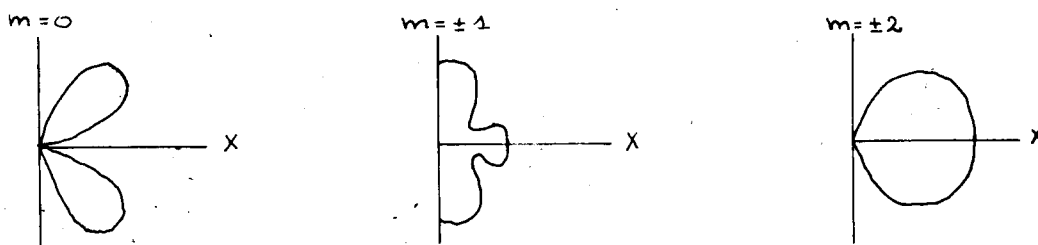
2) Het projectiel is een proton.

Bij protonen zal zich eenzelfde situatie als bij α -projectielen voordoen, wanneer de m waarde van het proton gedurende de botsing maar niet verandert. Verandert deze echter wel dan krijgen we:

$+e^{\pm i \frac{1}{2} \pi} = +e^{i(m \mp \frac{1}{2} \pi)} \rightarrow m = +1 \text{ en } m = -1$. M.a.w. ten gevolge van spin-flip worden alleen de subniveaus $m = -1$ en $m = +1$ bezet en de overige niet.

(zie deel II).

Op dit moment verdient het aanbeveling om de stralingspatronen van $l = 2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2$ multipolen voor de geest te halen. Deze patronen worden in de volgende polaire diagrammen weergegeven. (Ze zijn rotatie-symmetrisch om de z -as).



Wanneer de meting van het interferentiepatroon van de stralende subniveaus beperkt blijft tot het reactievlak, dan volgt uit deze figuren (in combinatie met $\alpha_{\pm 1} = 0$), dat alleen bijdragen van de $m = \pm 2$ subniveaus te verwachten zijn. Teneinde dit interferentiepatroon beter te kunnen interpreteren mogen we volgens de klassieke theorie van het e.m. veld ons voorstellen dat de $m = 2$ straling wordt geproduceerd door een in de positieve richting om de z-as draaiende quadrupool, terwijl de $m = -2$ straling opgewekt wordt door een quadrupool, die in de negatieve richting met dezelfde frequentie draait. Het is duidelijk dat de vorm van het interferentiepatroon volledig bepaald wordt door de relatieve sterkte en fase van beide quadrupolen, d.w.z. α_{+2} en α_{-2} . Deze sterkte en fase zijn op hun beurt weer afhankelijk van de hoek waaronder het projectiel verstrooid wordt, zoals wij zullen zien.

Vervolgens zullen wij enige aandacht besteden aan de α' -hoekcorrelatiefunctie. Uit de berekeningen van deel II blijkt, dat voor deze hoekcorrelatiefunctie de volgende vorm afgeleid kan worden:

$$W(\theta_j, \varphi_j; \varphi_0) = \frac{5}{8\pi} \sum_{m m'} \alpha_m \alpha_{m'}^* \left\{ D_{m, m'+1}^{(2)*}(\varphi_j, \theta_j) D_{m', m'+1}^{(2)}(\varphi_0, \theta_0) + D_{m, m'-1}^{(2)*}(\varphi_j, \theta_j) D_{m', m'-1}^{(2)}(\varphi_0, \theta_0) \right\}$$

Hierin stellen de functies $D_{m, m'+1}^{(2)}(\varphi_j, \theta_j)$ de elementen voor van de representatiematrix voor een rotatie $R_j = (\varphi_j, \theta_j)$. Deze uitdrukking is niet gebaseerd op een speciaal kernmodel.

Uitwerking voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ (reactievlak) levert de volgende functie op:

$$W(\varphi_j; \varphi_0) = \frac{5}{16\pi} \left\{ (a_{+2} - a_{-2})^2 + 4a_{+2} a_{-2} \sin^2 2(\varphi_j - \frac{\delta_{-2} - \delta_{+2}}{4}) \right\} \equiv A + B \sin^2 2(\varphi_j - \varphi_0).$$

Hierin zijn a_m en $e^{i\delta_m}$ gedefinieerd door:

$$\alpha_m \equiv |\alpha_m| e^{i\delta_m} \equiv a_m e^{i\delta_m}$$

In de volgende twee figuren geven wij de experimentele waarden aan van de α' -hoekcorrelatiefunctie en van de parameters, die in deze functie voorkomen voor inelastische verstrooiing aan ^{12}C .

In figuur II-4 is het deëxcitatie γ -patroon voor verschillende vaste waarden van $\varphi_{\alpha'}$ gegeven. We zien ook dat de symmetriehoek φ_0 sterk afhankelijk is van de verstrooiingshoek $\varphi_{\alpha'}$. Hoe deze afhankelijkheid verloopt blijkt uit figuur II-5a, die ons toont dat φ_0 afneemt met toenemende hoek $\varphi_{\alpha'}$.

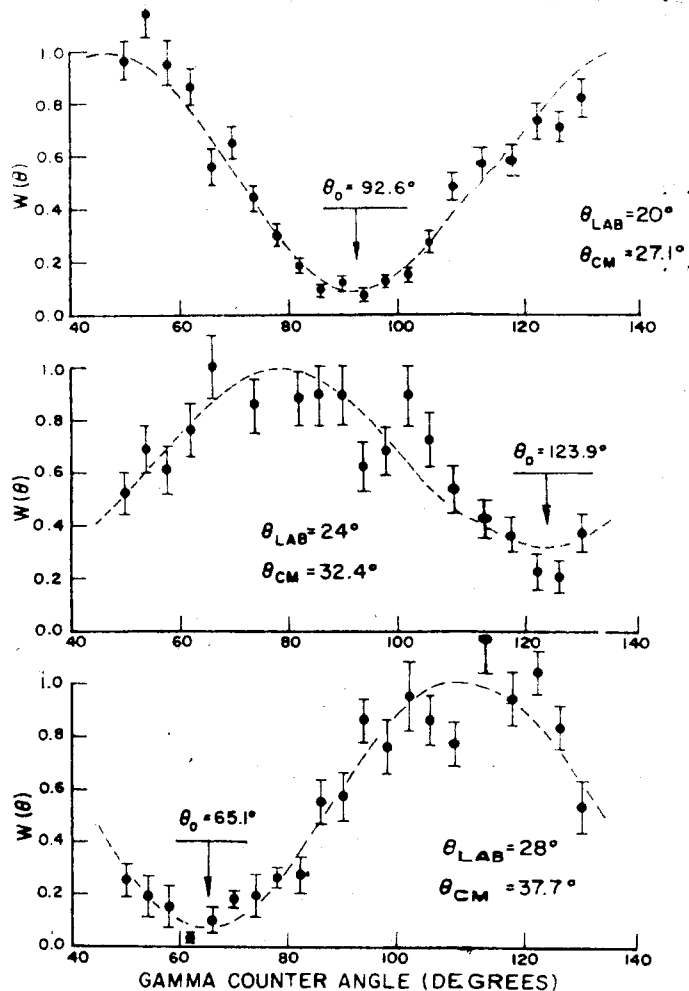


Fig. 1. Alpha-gamma angular correlation patterns for excitation of the 4.43 level of C^{12} for alpha-particle scattering angles of 27.1° , 32.4° , and 37.7° in the center-of-mass system. Notice the large shift of θ_0 in this small interval of $\theta_{\alpha'}$ and the apparently large value of A/B at $\theta_{\alpha'} = 32.4^\circ$.

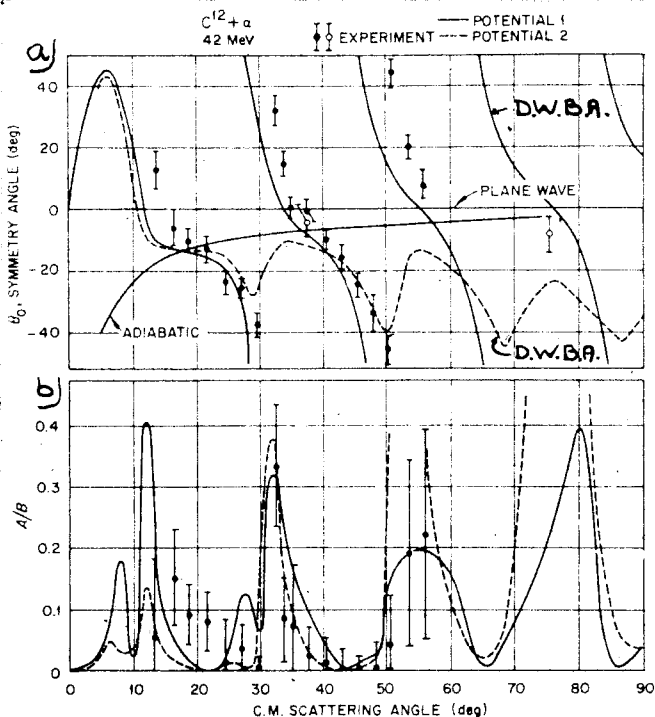


Fig. 2. Plots of symmetry angle, θ_0 , and the ratio A/B , versus center-of-mass scattering angle, $\theta_{\alpha'}$, for 42-MeV alpha particles exciting the 4.43 MeV level of C^{12} . The theoretical curves were calculated as described in the text.

fig. II-4

Ook blijkt uit figuur II-5a, dat het ons m.b.v. de D.W.B.A. gelukt om de experimentele resultaten op bevredigende wijze te beschrijven. Dit is de reden waarom wij de D.W.B. bespreken. Figuur II-5b geeft ons het verloop te zien van A/B . Dit verloop zal niet onze aandacht krijgen.

fig. II-5

Tenslotte zullen wij zonder afleiding nog de theoretische α' -f hoekcorrelatiefunctie geven van de verschillende auteurs, die zich met dit verschijnsel bezig gehouden hebben.

Blair en Wilets laten zien, dat in de adiabatische benadering (d.w.z. de passeertijd van het projectiel is klein t.o.v. de in hun kernmodel voorkomende periode van de kernrotatie of vibratie) de grootheden a_{+2} en a_{-2} aan elkaar gelijk worden en dat φ_0 gelijk wordt aan de adiabatische terugstoothoek φ_R . Hieronder wordt verstaan de hoek, die de impulsoverdracht $\hbar \vec{K} = \hbar (\vec{k}_i - \vec{k}_f)$ maakt met de invalrichting van de projectielen, als de projectielenergie groot is in vergelijking met de aanslagenergie van de kern m.a.w. als $k_i \approx k_f$. De hoekcorrelatiefunctie gaat dan over in:

$$W(\varphi_f, \varphi_{\alpha'}) = \frac{5}{4\pi} a_2^2 \sin^2 2(\varphi_f - \varphi_R)$$

(zie I.S. Blair en L. Wilets, Phys. Rev. 121(1961) 1493).

Satchler heeft een beschrijving gegeven m.b.v. de plane-wave Born approximatie, wat leidde tot:

$$W(\varphi_f, \varphi_{\alpha'}) = \frac{15}{32\pi} \sin^2 2(\varphi_f - \varphi_K)$$

hierin is φ_K de werkelijke terugstoothoek.

(zie G.R. Satchler, Proc. Phys. Soc. A68 (1955) 1037)

Een algemenere beschrijving geven McDaniels et al. met de distorted-wave Born approximatie. Een afleiding van de D.W.B.A. zal in het volgende hoofdstuk worden gegeven.

Referenties:

- 1) F.H. Schmidt et al. in Nuclear Physics 52 (1964) 353
- 2) A. Bohr in Nuclear Physics 10 (1959) 486
- 3) D.K. McDaniels et al. in Physics Letters 1 (1962) 295.

III De plane-wave Born approximatie
en distorted-wave Born approximatie.

A) Verstrooiing van een deeltje aan een potentiaal $V(\vec{r})$

P.W.B.A.

De D.W.B.A. speelt in verstrooiingsproblemen een zeer belangrijke rol. De mathematische uitdrukkingen in deze benaderingsmethode zijn gecompliceerd van aard. Daarom wordt deze methode eerst behandeld voor het eenvoudige geval van verstrooiing van een deeltje aan een potentiaal $V(\vec{r})$. Hierna zullen we overstappen op verstrooiing aan een meer-deeltjes systeem. Wij zullen evenwel de behandeling van de D.W.B.A. laten voorafgaan door die van de P.W.B.A. om het mathematische pad te effenen en om inzicht te verkrijgen in de werkwijze van deze soort benaderingsmethode.

De verstrooiing aan $V(\vec{r})$ is elastisch van aard. In het meer-deeltjes probleem moeten we echter naast deze elastische ook nog inelastische verstrooiing onderscheiden en reacties waarbij inkomende en uitgaande deeltjes verschillend zijn.

De energie van het inkomende deeltje (met massa m) bedraagt $E = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$, waarin \vec{k}_i de golfvector van dit deeltje voorstelt. Als $\psi(\vec{r})$ de stationaire golf functie is, die het verstrooiingsverschijnsel beschrijft, dan voldoet deze functie aan de volgende Schrödinger vergelijking

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (1)$$

waaruit volgt

$$\left\{ \Delta + k_i^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}) = 0$$

en

$$\left\{ \Delta + k_i^2 \right\} \psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int -4\pi \delta(\vec{r}' - \vec{r}) V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (2)$$

De golf functie $\psi(\vec{r})$ is formeel te schrijven als een willekeurige oplossing van de vergelijking met rechterlid nul, een "homogene oplossing" en een "particuliere oplossing" van de vergelijking met inbegrip van het rechterlid. Een dergelijke homogene oplossing is een willekeurige superpositie van vlakke golven met dezelfde grootte ($= k_i$) van de golfvector, terwijl een particuliere oplossing te vinden is door te bedenken dat de vergelijking

$$\{\Delta + k_i^2\} g_0(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3)$$

de volgende uitdrukking als oplossing kent:

$$g_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{i k_i |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4)$$

Als algemene oplossing voor (2) kunnen we m.b.v. (4) dan de volgende uitdrukking noteren:

$$\psi(\vec{r}) = \text{willekeurige hom. oplossing} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i k_i |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (5)$$

Om na te gaan welke willekeurige homogene oplossing in het rechterlid vermeld moet worden, laten we ons leiden door de randvoorwaarden. Als randvoorwaarde bij de vergelijking (1) stellen we de eis dat $\psi(\vec{r})$ voor $r \rightarrow \infty$ het karakter moet hebben van een invallende vlakke golf en een uitgaande verstrooide golf, dus de vorm moet hebben van:

$$\psi(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{i k_i r}}{r} \quad (6)$$

De grootte $f(\theta, \varphi)$ in (6) noemen we de verstrooiingsamplitude. Het kwadraat van de absolute waarde hiervan geeft de differentiële werkzame doorsnede aan. Dit is voor ons een zeer belangrijke grootte. Terzijde: Met het oog op de bruikbaarheid in het vervolg van dit verslag werken we nu het volgende uit:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'\}^{1/2} = r \left\{ 1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right\}^{1/2}$$

voor $r \rightarrow \infty$ passen we de volgende reeksontwikkeling toe:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) + \dots \right\} = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$$

Dit ingevuld in (4) geeft:

$$\frac{e^{i k_i |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{i k_i r}}{r} e^{-i k_i \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} \equiv \frac{e^{i k_i r}}{r} e^{-i \vec{k}_p \cdot \vec{r}'} \quad (7)$$

met $\vec{k}_p \equiv k_i \frac{\vec{r}}{r}$ (D.i. de golfvector in de richting \vec{r} ter grootte k_i). De randvoorwaarde geeft ons aan de hand van de asymptotische vorm van vergelijking (5) en (7) de vorm van de willekeurige "homogene oplossing".

$$\psi(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i k_i r}}{r} e^{-i \vec{k}_p \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Dus

$$\psi(\vec{r}) = e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i k_i |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Hiermede hebben we de D.V. (1) plus randvoorwaarde (6) omgezet in een integraalvergelijking. Ondere zekere voorwaarden (voldoende kleine $V(\vec{r})$) kan een oplossing m.b.v. iteratie gevonden worden, wat leidt tot de reeksontwikkeling:

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} V(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' + \dots$$

$$+ \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi_1(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \text{enz.}$$

De Born benadering bestaat nu hierin, dat wij alleen de eerste twee termen meenemen en dus voor $\psi(\vec{r})$ de volgende uitdrukking krijgen:

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' \quad (8)$$

Een afschatting van de omstandigheden waaronder de Born benadering toegepast mag worden, wordt gegeven door $V_0 \ll \frac{\hbar^2 k_i}{m a}$, waarin V_0 de gemiddelde diepte is van de potentiaal, terwijl a de afstand voorstelt waarover de potentiaal werkzaam is. (zie Messiah, Quantum Mechanics, pag. 813 en 814). Uit de asymptotische vorm van (8) (m.b.v. (6) en (7)) volgt direct de verstrooiingsamplitude in de P.W.B.A.

$$f(\theta, \varphi) \equiv f(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} d\vec{r}'$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\vec{r}'$$

met $\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ (D.i. de impulsverdracht)

De verstrooiingsamplitude is dus de Fourier getransformeerde van het potentiaal. We zien dat $f(\theta, \varphi)$ in deze benadering de vorm heeft van een storingsrekening-matrixelement met $V(\vec{r}')$ als storing en de vlakke golven $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'}$ en $e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'}$ als ongestoorde golf functies.

D.W.B.A.

Vervolgens stappen we over op de distorted-wave Born benadering. We gaan opnieuw uit van de Schrödinger vergelijking (1)

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

of te wel

$$\left\{ \Delta + k_i^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}) = 0$$

Wij stellen ons nu voor dat $V(\vec{r})$ een potentiaal is, waarvoor de stationaire verstrooiingsgolffuncties $\psi(\vec{r})$ moeilijk te berekenen zijn. Dit zal bijvoorbeeld zo zijn als $V(\vec{r})$ niet bolsymmetrisch is. In een dergelijk geval kan men proberen $V(\vec{r})$ te vervangen door een benaderende potentiaal $V_0(\vec{r})$, die voor de berekening van de functies $\psi(\vec{r})$ minder moeilijkheden oplevert, wat b.v. het geval is als $V_0(\vec{r})$ bolsymmetrisch is. Bij de berekening van de verstrooiingsamplitude $f(\theta, \varphi)$ voor $V(\vec{r})$ komt het er dan op neer, dat wij $f(\theta, \varphi)$ benaderen met de $f_0(\theta, \varphi)$ van $V_0(\vec{r})$ plus een correctie, die volgt uit de D.W.B.A. Op grond van het bovenstaande schrijven we daarom de Schrödinger vergelijking in de volgende vorm:

$$\left\{ \Delta + k_i^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0(\vec{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} (V(\vec{r}) - V_0(\vec{r})) \right\} \psi(\vec{r}) = 0$$

of

$$\left\{ \Delta + k_i^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} (V(\vec{r}) - V_0(\vec{r})) \psi(\vec{r})$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int -4\pi \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} \psi(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (10)$$

Ook hier bestaat $\psi(\vec{r})$ uit een willekeurige "homogene oplossing" plus een "particuliere oplossing". Eveneens laten we ons hier leiden door de randvoorwaarde, die zegt dat $\psi(\vec{r})$ voor $r \rightarrow \infty$ het volgende karakter moet hebben:

$$\psi(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{i k_i r}}{r}$$

Om een integraalvergelijking te vinden beschouwen we eerst vergelijking (10) met het rechterlid gelijk aan nul:

$$\left\{ \Delta + k_i^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0(\vec{r}) \right\} u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) = 0 \quad (11)$$

De functie $u_{\vec{k}_i}(\vec{r})$ is de golffunctie met de randvoorwaarde

$$u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + f_0(\theta, \varphi) \frac{e^{i k_i r}}{r}$$

die de verstrooiing beschrijft aan de eenvoudiger potentiaal $V_0(\vec{r})$

De grootheid $f_0(\theta, \varphi)$ is de verstrooiingsamplitude voor verstrooiing aan deze potentiaal.

Als de greense functie $g(\vec{r}, \vec{r}')$ een oplossing is van de vergelijking

$$\left\{ \Delta + k_i^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0(\vec{r}) \right\} g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

met de randvoorwaarde: $g(\vec{r}, \vec{r}') \underset{r \rightarrow \infty}{\sim}$ uitlopende golf dan is de $\psi(\vec{r})$ van vgl. (10) formeel te schrijven als:

$$\psi(\vec{r}) = \text{willekeurige hom. oplossing} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int g(\vec{r}, \vec{r}') \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} \psi(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (12)$$

Bij deze uitdrukking plaatsen we de volgende opmerkingen:

- a) Zoals het asymptotisch gedrag van $g_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ gegeven wordt door $\frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}{r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'}$ zo kan men bewijzen, dat het asymptotisch gedrag van $g(\vec{r}, \vec{r}')$ overeenkomt met $\frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}{r} u_{-\vec{k}_f}(\vec{r}')$
- b) Onder de oplossingen van de homogene vergelijking (11) is er maar één, die beantwoordt aan de randvoorwaarde voor $\psi(\vec{r})$ en deze oplossing is $u_{\vec{k}_i}(\vec{r})$

Hiermee gaat voor $r \rightarrow \infty$ (12) over in:

$$\psi(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}{r} u_{-\vec{k}_f}(\vec{r}') \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

en dus

$$\psi(\vec{r}) = u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int g(\vec{r}, \vec{r}') \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Dit is opnieuw een integraalvergelijking, die voor voldoende kleine $\{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\}$ m.b.v. iteratie is op te lossen. In de eerste orde "distorted-wave Born approximatie" krijgen we:

$$\psi(\vec{r}) = u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int g(\vec{r}, \vec{r}') \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} u_{-\vec{k}_f}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

terwijl de asymptotische vorm er uit komt te zien als:

$$\psi(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}{r} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}{r} u_{-\vec{k}_f}(\vec{r}') \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} u_{\vec{k}_i}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Voor de verstrooiingsamplitude bij verstrooiing aan $V(\vec{r})$ krijgen we dus: $f(\theta, \varphi) \simeq f_0(\theta, \varphi) + 1^{\text{ste}}$ orde D.W.B.A. correctie. Zodoende

$$f(\theta, \varphi) \simeq f_0(\theta, \varphi) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int u_{-\vec{k}_f}(\vec{r}') \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} u_{\vec{k}_i}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (14)$$

Juist zoals bij de P.W.B.A. kan men proberen de integraal te interpreteren als een storingsrekening-matrixelement:

$$\int \left(u_{-\vec{k}_f}^*(\vec{r}') \right)^* \{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\} u_{\vec{k}_i}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

In deze integraal is $\{V(\vec{r}') - V_0(\vec{r}')\}$ de storingshamiltoniaan, terwijl men $u_{\vec{k}_i}(\vec{r}')$ en $u_{-\vec{k}_f}^*(\vec{r}')$ op zou willen vatten als de ongestoorde golven.

Intuïtief zou men verwachten dat $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ en $u_{-\vec{k}}(\vec{r})$ de ongestoorde golven zouden moeten zijn. De golf functies $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ en $u_{-\vec{k}}^*(\vec{r})$ zijn echter niet identiek, zoals blijkt uit de volgende vergelijkingen:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\vec{r}) \right\} u_{\vec{k}}(\vec{r}) = E u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{met randvoorwaarde} \quad u_{\vec{k}}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int_0^{(D,\varphi)} \frac{e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}}{r}$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\vec{r}) \right\} u_{-\vec{k}}(\vec{r}) = E u_{-\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad u_{-\vec{k}}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int_0^{(\pi-\theta, \varphi+\pi)} \frac{e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}}{r}$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0^*(\vec{r}) \right\} u_{-\vec{k}}^*(\vec{r}) = E u_{-\vec{k}}^*(\vec{r}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad u_{-\vec{k}}^*(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int_0^{(\pi-\theta, \varphi+\pi)} \frac{e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}}{r}$$

De ongestoorde golf $u_{-\vec{k}}^*(\vec{r})$ is dus een verstrooiingsoplossing voor de potentiaal $V_0^*(\vec{r})$ met het asymptotische gedrag: $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{inkomende}$ bolgolf en ontstaat uit $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ door ruimteinversie en tijdonkeer.

In de literatuur zijn verschillende plaatsen aan te geven waar ten onrechte i.p.v. $u_{-\vec{k}}^*(\vec{r})$ de functie $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ in de berekeningen toegepast is. (Een opmerking hierover vindt men in "Internal Conversion Angular Correlation" van M.E. Rose, L.C. Biedenharn en G.B. Arfken in Phys. Rev. 85 (1952) 5). In verband hiermee willen wij nog vermelden dat G. Breit en H.A. Bethe d.m.v. een tijdafhankelijke beschrijving van het verstrooiingsproces m.b.v. golfpakketjes de keuze van $u_{-\vec{k}}^*(\vec{r})$ plausibel hebben gemaakt (Phys. Rev. 93 (1954) 888).

B) Verstrooiing van een spin 0 deeltje aan een meer-deeltjes systeem.

P.W.B.A.

Na deze inleidende behandeling van de P.W.B.A. en de D.W.B.A. komen we toe aan ons eigenlijk probleem, waarin we inelastische verstrooiing van een spin 0 deeltje aan een meer-deeltjes systeem moeten bekijken. Verstrooiing dus, waarin de wisselwerking van projectiel en nucleonen van de targetkern een inwendige energiemutatie van kern en/of projectiel teweeg brengt. We laten hierbij terwille van de eenvoud reacties buiten beschouwing, waarbij de samenstelling van de deeltjes gewijzigd wordt en verwaarlozen verder de interne structuur van ons projectiel. Deze beperkingen doen geen afbreuk aan de algemeenheid van het navolgende betoog. De targetkern bestaat uit A deeltjes, die door de positie-, spin- en isospin-variabelen \vec{r}_i beschreven worden. De wisselwerking tussen projectiel en nucleonen wordt gegeven door de functie $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A, \vec{r})$.

Voor de Schrödinger vergelijking noteren we vervolgens de uitdrukking:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{r}) + H(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \right\} \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{r}) = E \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{r}) \quad (15)$$

of

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}_1, \vec{r}) + H(\vec{r}_1) \right\} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}) = E \psi(\vec{r}_1, \vec{r})$$

Hierin staat \vec{r}_1 in de plaats van $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$, terwijl de totale energie van het systeem gelijk is aan $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_0$. Normeren we de energie E_0 van de grondtoestand van de targetkern op nul, dan wordt de totale energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. De functie $\psi(\vec{r}_1, \vec{r})$, die de verstrooiing van het spin 0 deeltje beschrijft, zal op grote afstanden van het verstrooiingscentrum ($r \rightarrow \infty$) het karakter dragen van een som van productfuncties van inwendige kerneigenfuncties $\phi_n(\vec{r}_1)$ en golf functies van de relatieve beweging. Als oplossing van (15) krijgen we daarom op grote afstanden

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \phi_0(\vec{r}_1) + \sum_n f(\vec{k}, \vec{q}_n) \frac{e^{i\vec{q}_n \cdot \vec{r}}}{r} \phi_n(\vec{r}_1) \quad (16)$$

In de bovenstaande uitdrukking wordt verondersteld dat de excitatie van de targetkern plaats heeft vanuit de toestand $\phi_0(\vec{r}_1)$ naar een mogelijke discrete eindtoestand $\phi_n(\vec{r}_1)$. Het somteken in deze uitdrukking duidt aan dat we naast elástische verstrooiing excitaties naar meerdere niveaus onderscheiden.

Aan de hand van (16) kunnen we thans de uitdrukking voor de differentiële werkzame doorsnede voor een $0 \rightarrow n \equiv L, M$ proces geven:

$$\sigma(\vec{k}, \vec{q}_n) = \frac{k_f}{k_i} \sum_{L, M} |f(\vec{k}, \vec{q}_n)|^2 \quad (17)$$

(Voorbeelden van de differentiële werkzame doorsnede voor een $0^+ \rightarrow 2^+$ proces worden in figuren I-3 en I-4 gegeven. De afleiding van (17) wordt in appendix A gegeven).

We herschrijven de Schrödinger vergelijking (15) in de volgende vorm:

$$\left\{ \Delta + k_i^2 - \frac{2m}{\hbar^2} H(\vec{r}_1) \right\} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}_1, \vec{r}) \psi(\vec{r}_1, \vec{r})$$

Beschouwen we $V(\vec{r}_1, \vec{r})$ in het rechterlid van deze uitdrukking als storing, dan krijgt de verstrooiingsamplitude voor het meer-deeltjes systeem in de P.W.B.A., naar analogie van (9), de volgende vorm:

$$\int_{\vec{0} \rightarrow \vec{n}} (\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} \langle \Phi_n(\vec{r}_i) | V(\vec{r}_i, \vec{r}') | \Phi_0(\vec{r}_i) \rangle e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' \quad (18)$$

Het matrixelement $\langle || \rangle$ in deze uitdrukking is te vereenvoudigen door te bedenken dat de potentiaal $V(\vec{r}_i, \vec{r}')$ zich leent voor een multipoolontwikkeling daar deze potentiaal een scalaire grootheid is en dus onder simultane rotatie van \vec{r}_i en \vec{r}' onveranderd blijft.

$$V(\vec{r}_i, \vec{r}') = \sum_{l, m_l} (-1)^{m_l} h_{l, -m_l}(\vec{r}_i, r') Y_{l, m_l}(\theta, \varphi) \quad (19)$$

Dit substitueren we in het matrixelement en krijgen dan:

$$\langle \Phi_n(\vec{r}_i) | \sum_{l, m_l} (-1)^{m_l} h_{l, -m_l}(\vec{r}_i, r') Y_{l, m_l}(\theta, \varphi) | \Phi_0(\vec{r}_i) \rangle$$

wat gelijk is aan

$$\sum_{l, m_l} (-1)^{m_l} Y_{l, m_l}(\theta, \varphi) \langle \Phi_n(\vec{r}_i) | h_{l, -m_l}(\vec{r}_i, r') | \Phi_0(\vec{r}_i) \rangle$$

en overgaat in

$$\sum_{l, m_l} (-1)^{-m_l} Y_{l, -m_l}(\theta, \varphi) \langle \Phi_n(\vec{r}_i) | h_{l, m_l}(\vec{r}_i, r') | \Phi_0(\vec{r}_i) \rangle \quad (20)$$

Om aan de opzet van dit verslag te beantwoorden beperken we ons tot inelastische verstrooiing, waarbij een $0^+ \rightarrow L (=2^+)$ overgang plaats heeft. (L is het totale impulsmoment van de targetkern, inclusief de intrinsieke spins van de nucleonen). De uitdrukking (20) gaat dan over in:

$$\sum_{l, m_l} (-1)^{-m_l} Y_{l, -m_l}(\theta, \varphi) \langle \Phi_{LM}(\vec{r}_i) | h_{l, m_l}(\vec{r}_i, r') | \Phi_0(\vec{r}_i) \rangle \quad (21)$$

Het Wigner-Eckart theorema zegt, dat van deze som slechts die term ongelijk aan nul is, welke overeenstemt met $l = L$ en $m_l = M$. Bovendien volgt uit het W-E theorema dat dit matrixelement onafhankelijk is van M maar nog wel afhankelijk van L. Daarvandaan dat (21) overgaat in:

$$(-1)^{-M} Y_{L, -M}(\theta, \varphi) \langle \Phi_{LM}(\vec{r}_i) | h_{LM}(\vec{r}_i, r') | \Phi_0(\vec{r}_i) \rangle$$

wat we gelijk stellen aan

$$Y_{LM}^*(\theta, \varphi) \cdot F_L(r) \quad (22)$$

De functie $F_L(r)$ wordt dikwijls vormfactor genoemd. In de P.W.B.A. komen de specifieke eigenschappen van de targetkern slechts in $F_L(r)$ tot uiting. In deze benadering komt dus het verschil tussen b.v. de targetkernen ^{12}C en ^{24}Mg naar voren in een verschil der vormfactoren. De verstrooiingsamplitude (18) krijgt met (22) dan de volgende vorm:

$$\int_{0 \rightarrow LM} (\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} F_L(r) Y_{LM}^*(\theta, \varphi) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (23)$$

D.W.B.A.

Een betere beschrijving van het verstrooiingsverschijnsel wordt door de distorted-wave Born approximatie gegeven. In deze benadering beschouwen we opnieuw niet de gehele interactiepotentiaal als storing, doch slechts een gedeelte hiervan. Daartoe schrijven we de Schrödinger vergelijking (15) als volgt op:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\vec{r}) + (V(\vec{r}_i, \vec{r}) - V_0(\vec{r})) + H(\vec{r}_i) \right\} \psi(\vec{r}_i, \vec{r}) = E \psi(\vec{r}_i, \vec{r})$$

Als algemene oplossing krijgen we voor deze vergelijking gelijksoortige oplossingen als in (16). In de uitdrukking voor de verstrooiingsamplitude kunnen we evenwel voor de inkomende en uitgaande deeltjes, naar analogie van de D.W.B.A. behandeling voor verstrooiing aan $V(\vec{r})$, geen vlakke golven gebruiken. Wij moeten ook hier overgaan op vervormde golven, aangezien de vlakke golven vervormd worden door dat deel van de potentiaal, dat niet als storing wordt beschouwd. (Dit deel van de potentiaal hebben we $V_0(\vec{r})$ genoemd). De vervormde golf functies voor de inkomende en uitgaande deeltjes worden resp. met $u_{\vec{k}_i}(\vec{r})$ en $u_{-\vec{k}_f}^+(\vec{r})$ aangeduid. Naar analogie van (14) komt de verstrooiingsamplitude voor inelastische verstrooiing van een spin 0 deeltje aan een meer-deeltjes systeem in de D.W.B.A. er dan als volgt uit te zien:

$$\begin{aligned} \int_{0 \rightarrow n} (\vec{k}_i, \vec{k}_f) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int u_{-\vec{k}_f}^+(\vec{r}) \langle \phi_n(\vec{r}_i) | V(\vec{r}_i, \vec{r}) - V_0(\vec{r}) | \phi_0(\vec{r}_i) \rangle u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) d\vec{r} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int u_{-\vec{k}_f}^+(\vec{r}) \langle \phi_n(\vec{r}_i) | V(\vec{r}_i, \vec{r}) | \phi_0(\vec{r}_i) \rangle u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) d\vec{r} \end{aligned} \quad (24)$$

Met (19), (21) en (22) gaat de inelastische verstrooiingsamplitude in de D.W.B.A. (24) over in:

$$f(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U_{-\hat{\mathbf{e}}_f}(\mathbf{r}) F_L(r) Y_{LM}^*(\theta, \varphi) U_{\hat{\mathbf{e}}_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (25)$$

De bij de P.W.B.A. gemaakte opmerkingen over $F_L(r)$ zijn ook hier van kracht. In hoofdstuk IV zullen we zien welke vorm voor $F_L(r)$ gekozen kan worden.

Referenties:

- 1) A. Messiah, Quantum Mechanics.

IV Toepassingen van de P.W.B.A.

Aan de hand van de verkregen inelastische verstrooiingsamplitude zullen wij in paragraaf A van dit hoofdstuk de werkwijze bij de toepassing van de D.W.B.A. bespreken. In paragraaf B zullen wij enkele ruwe berekeningen m.b.v. deze benaderingsmethode uitvoeren.

A. Werkwijze

Wij herschrijven de inelastische verstrooiingsamplitude in de D.W.B.A.:

$$\int_{0 \rightarrow LM} (\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int u_{-\vec{k}_f}(\vec{r}) \bar{F}_L(r) V_{LM}^*(\theta, \varphi) u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{III-25})$$

De procedure die men gewoonlijk volgt gaat uit van een veronderstelling over het gedrag van de targetkern bij de inelastische interactie. Deze veronderstelling leidt dan tot een bepaalde keuze van $\bar{F}_L(r)$. Zo wordt bijvoorbeeld in het (α, α') proces algemeen aangenomen, dat de targetkern een collectieve excitatie ondergaat. Aan de hand van deze veronderstelling doet het collectief model de volgende suggestie voor de vorm van:

$$\bar{F}_L(r) = \beta_L R \frac{\partial V_0(r)}{\partial r} \quad (1)$$

Hierin stelt R de gemiddelde straal van de targetkern voor, terwijl β_L een parameter is die de deformatie van de kern karakteriseert. (N. Austern, Selected Topics in Nuclear Theory pag. 53). De bolsymmetrische potentiaal $V_0(r)$ wordt bepaald aan de hand van de experimentele resultaten, die bij elastische verstrooiing van hetzelfde projectiel met dezelfde projectielenergie aan dezelfde targetkern verkregen worden. De vorm van $V_0(r)$ wordt namelijk zodanig gekozen, dat optimale overeenstemming wordt bereikt tussen de theoretische differentiële werkzame doorsnede voor (elastische) verstrooiing aan $V_0(r)$ en de experimenteel verkregen differentiële werkzame doorsnede voor elastische verstrooiing.

Om deze theoretische differentiële werkzame doorsnede te kunnen bepalen moeten de functies $u_{\vec{k}_i}(\vec{r})$ en $u_{-\vec{k}_f}(\vec{r})$ in principe bekend zijn. Deze verstrooiingsgolf-functies zijn echter slechts te berekenen wanneer $V_0(r)$ bekend is. Men zal begrijpen, dat een soort "probeer" procedure uitgevoerd moet worden om tot de gewenste vorm van $V_0(r)$ te komen. De onderste kurve in figuur IV-1 toont ons aan dat een dergelijke procedure goed uitvoerbaar is.

Als $V_0(r)$ bekend is dan kunnen wij m.b.v. de gekozen vorm voor $F_l(r)$ in (2) de theoretische inelastische verstrooiingsamplitude berekenen. Bij deze berekening kiezen we de parameter β_l in (1) zodanig, dat we optimale overeenstemming tussen de theoretische en de experimentele differentiële werkzame doorsnede voor inelastische verstrooiing verkrijgen. Hierbij dienen we ons wel te bedenken, dat β_l^2 alleen de gehele differentiële werkzame doorsnede vermenigvuldigd, onafhankelijk van de verstrooiingshoek. Een mooi voorbeeld hiervan zien we in figuur IV-1.

De D.W.B.A. doet ons tevens een middel aan de hand om het verloop van de symmetriehoek $\varphi_0 = \frac{\delta_{-2} - \delta_{+2}}{4}$ met toenemende verstrooiingshoek φ_d , zoals door figuur II-5a weergegeven wordt, te beschrijven. De grootheden δ_{+2} en δ_{-2} duiden resp. de fasen aan van de verstrooiingsamplituden $f_{0 \rightarrow 2,2}(\vec{k}_i, \vec{k}_f)$ en $f_{0 \rightarrow 2,-2}(\vec{k}_i, \vec{k}_f)$.

B. Ruwe berekeningen.

Wij kunnen de inelastische verstrooiingsamplitude (III-25) voor een gegeven verstrooiingsproces niet exact uitrekenen zonder gebruik te maken van de faciliteiten die een computer ons biedt. Wanneer evenwel een aantal vereenvoudigende veronderstellingen m.b.t. het directe reactie model worden ingevoerd, blijkt dat de verstrooiingsamplitude

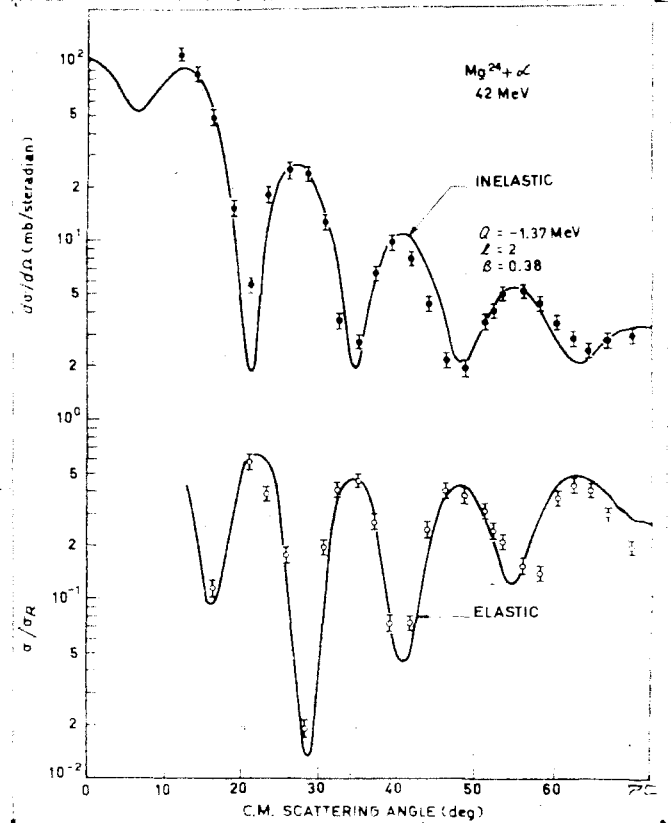


fig. IV-1

zich analytisch laat berekenen.

In het eerste deel van deze paragraaf gaan we uit van de reeds in hoofdstuk I genoemde vereenvoudigende veronderstellingen om hiermede te komen tot de uitdrukking (I-2) van de differentiële werkzame doorsnede. Tevens vinden we dan het resultaat $\varphi_0 = \varphi_k$, m.a.w. het deëxcitatie γ -patroon zou symmetrisch zijn om \vec{k} .

Dit laatste resultaat is in strijd met het experimentele verloop van φ_0 (zie fig. II-5a), m.a.w. het deëxcitatie γ -patroon vertoont een asymmetrie t.o.v. \vec{k} . Daarvandaan zullen we voor het verklaren van het experimentele verloop van φ_0 iets minder eenvoudige veronderstellingen moeten maken ten aanzien van de distorted waves en deze niet mogen vervangen door onvervormde vlakke golven. Dit doen we in het tweede deel van deze paragraaf.

1) Afleiding van de uitdrukking $\sigma_{0 \rightarrow L}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) \propto |f_L(kR)|^2$

Wij gaan uit van de inelastische verstrooiingsamplitude in de D.W.B.A.

$$\sigma_{0 \rightarrow LM}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int u_{-\vec{k}_f}(\vec{r}) F_L(r) Y_{LM}(\theta, \varphi) u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{III-25})$$

en recapitulieren de in hoofdstuk I genoemde vereenvoudigende veronderstellingen m.b.t. het directe reactie model.

- a) De golven die corresponderen met de inkomende en uitgaande deeltjes worden buiten het kernoppervlak onvervormd gedacht.
- b) Vanwege de veronderstelde grote absorptie in het kernmedium vindt de inelastische interactie uitsluitend plaats aan het kernoppervlak. Preciezer uitgedrukt: vindt uitsluitend plaats in een klein radieel interval ΔR , zodanig dat in elke richting de factor $e^{i\vec{R} \cdot \vec{r}}$ over het interval als constante beschouwd mag worden. De factor $e^{i\vec{R} \cdot \vec{r}}$ mag dan uit de radiële integraal gehaald worden.

Met deze veronderstellingen gaat de bovenstaande uitdrukking over in:

$$\begin{aligned} \sigma_{0 \rightarrow LM}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{\text{bol}} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{r}} F_L(r) Y_{LM}^*(\theta, \varphi) r^2 d(\cos\theta) d\varphi dr \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{\text{bolopp.}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} Y_{LM}^*(\theta, \varphi) d(\cos\theta) d\varphi \int_{r \in R} F_L(r) r^2 dr \quad (2) \\ &\quad \text{constant.} \end{aligned}$$

Hierin heeft de vector \vec{R} de grootte R , terwijl zijn richting door de hoeken θ en φ wordt aangegeven (zie fig. IV-2). De vlakke golf $e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ laat zich vervolgens als een reeksontwikkeling van bolfuncties schrijven, waardoor (2) overgaat in

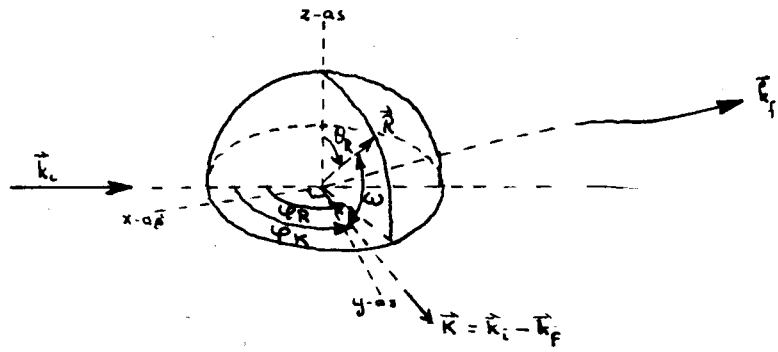


fig. IV-2

$$f_{0 \rightarrow LM}(\vec{e}_i, \vec{e}_f) = \text{const} \int \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(kR) Y_{l0}(\omega) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d(\cos\theta) d\varphi \quad (3)$$

De functie $j_l(kR)$ stelt een sferische besselfunctie voor, terwijl ω de hoek aangeeft tussen de vectoren \vec{R} en \vec{k} . Bij een vaste verstrooiingsrichting \vec{e}_f is \vec{k} en vaste vector, die in figuur IV-2 door de hoeken $\theta_k = \frac{\pi}{2}$ en φ_k vastgelegd wordt. De x-as van dit coördinatenstelsel is langs de buiten bisectrice van de vectoren \vec{k}_i en $-\vec{e}_f$ gekozen. De z-as staat loodrecht op het reactievlak. Als we op de bolfunctie $Y_{l0}(\omega)$ het additietheorema toepassen gaat (3) over in:

$$\begin{aligned} f_{0 \rightarrow LM}(\vec{e}_i, \vec{e}_f) &= \text{const} \int \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(kR) \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta_k, \varphi_k) Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l0}(\omega) d(\cos\theta) d\varphi \\ &= \text{const} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} 4\pi i^l j_l(kR) Y_{lm}^*(\frac{\pi}{2}, \varphi_k) \int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d(\cos\theta) d\varphi \\ &= \text{const} i^l j_l(kR) Y_{lm}^*(\frac{\pi}{2}, \varphi_k) \delta_{l,l} \delta_{m,m} \\ &= \text{const} i^l j_l(kR) Y_{lm}^*(\frac{\pi}{2}, 0) e^{-im\varphi_k} \end{aligned} \quad (4)$$

De differentiële werkzame doorsnede, die de hoekverdeling der verstrooide α -deeltjes aangeeft, is dan m.b.v. (III-17)

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{e}_i, \vec{e}_f)_{0 \rightarrow L} &= \frac{P_f}{P_i} \sum_M |f_{0 \rightarrow LM}(\vec{e}_i, \vec{e}_f)|^2 \\ &= \frac{P_f}{P_i} |\text{const}|^2 \sum_M |Y_{LM}^*(\frac{\pi}{2}, 0)|^2 \cdot |j_L(kR)|^2 \propto |j_L(kR)|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Q.E.D.

Als we ons bij de integratie van $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ in (2) niet beperkt hadden in radiële richting, dan had (5) er algemener uitgezien, namelijk:

$$f_{0 \rightarrow LM}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot 4\pi \cdot L^3 Y_{LM}^*(\frac{\pi}{2}, 0) e^{-im\varphi_K} \int F_L(r) j_L(kr) r^2 dr$$

Voor het $0^+ \rightarrow 2^+$ verstrooiingsproces levert dit op:

$$f_{0 \rightarrow 2, +2}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) \equiv |f_{0 \rightarrow 2, +2}(\vec{k}_i, \vec{k}_f)| e^{i\delta_{+2}} = \text{const} e^{-2i\varphi_K} \quad (6)$$

en

$$f_{0 \rightarrow 2, -2}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) \equiv |f_{0 \rightarrow 2, -2}(\vec{k}_i, \vec{k}_f)| e^{i\delta_{-2}} = \text{const} e^{+2i\varphi_K} \quad (7)$$

De symmetriehoek, die in het interferentiepatroon van de deëxcitatie γ -straling $(A + B \sin^2 2(\varphi_\gamma - \varphi_0))$ voorkomt en die gelijk is aan $\frac{\delta_{-2} - \delta_{+2}}{4}$, krijgt dan m.b.v. (6) en (7) de waarde

$$\varphi_0 \equiv \frac{\delta_{-2} - \delta_{+2}}{4} = \frac{2\varphi_K + 2\varphi_K}{4} = \varphi_K$$

Dit is ook de waarde die Satchler et al. m.b.v. de P.W.B.A. voor de symmetriehoek φ_0 kreeg. We zien dus dat dit resultaat reeds bereikt wordt zonder te veronderstellen dat de inelastische interactie plaats heeft op het kernoppervlak. Dit resultaat is evenwel niet in overeenstemming met het experimenteel gevonden verloop van φ_0 (zie fig. II-5a). Dit experimenteel gevonden verloop van φ_0 zullen wij in het volgende deel van deze paragraaf verklaren.

2) Verklaring van het experimenteel gevonden verloop van de symmetriehoek φ_0 .

Door Inglis (2) is al eerder een poging gedaan om een verklaring te geven door het verloop van φ_0 . Wij willen in het navolgende proberen wat meer kwantitatieve resultaten te vinden dan Inglis. Wij gaan daartoe uit van de inelastische verstrooiingsamplitude in de D.W.B.A.:

$$f_{0 \rightarrow LM}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int u_{-q}^{(F)} F_L(r) Y_{LM}^*(\theta, \varphi) u_q^{(F)} dF \quad (\text{III-25})$$

en van de volgende vereenvoudigende veronderstellingen.

- We nemen de veronderstelling 1-b) in het eerste deel van deze paragraaf in zijn geheel over.
- Daar de integratie van uitdrukking (III-25) met analytische methoden (d.w.z. zonder computer) over het gehele kernoppervlak moeilijk is, voeren we de integratie alleen uit in het reactievlak ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

De leidraad hierbij is, dat (zoals Inglis heeft opgemerkt) de fase van de integraal in (III-25) voor iedere φ als functie van θ stationair is voor $\theta = \frac{\pi}{L}$. Als de distorted waves $u_{\vec{k}}(r)$ en $u_{-\vec{k}}(r)$ veel oscillaties vertonen over het kernoppervlak, dan zal de belangrijkste bijdrage tot de integraal komen van de directe omgeving van de stationaire punten $\theta = \frac{\pi}{L}$. Op dit ogenblik wordt een meer systematische aanpak geprobeerd om te laten zien in welke benadering men kan volstaan met een integratie in het reactievlak.

Met deze veronderstellingen gaat uitdrukking (III-25) voor het onderhavige verstrooiingsproces ($L = 2$) over in:

$$f(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} Y_{2M}^{(\frac{\pi}{2}, 0)} \int_{r=R}^{\infty} F_2(r) r dr \int u_{-\vec{k}_f}(r) \cdot u_{\vec{k}_i}(r) e^{-im\varphi} d\varphi \quad (8)$$

De constante $Y_{2M}^{(\frac{\pi}{2}, 0)}$ is ongelijk aan nul voor $M = 0$ en ± 2 en heeft voor $M = \pm 2$ dezelfde waarde. Wij interesseren ons alleen voor de verstrooiingsamplituden voor $M = \pm 2$, omdat het $M = 0$ niveau geen bijdrage levert tot de γ -intensiteit in het reactievlak.

In het model van Inglis worden de maxima en minima in de differentiële werkzame doorsnede van de verstrooide α -deeltjes veroorzaakt door interferentie van de golven, die inelastisch verstrooid worden aan de randen van de vectoren, die nabij de punten $+\vec{R} (= R, \varphi_R)$ en $-\vec{R} (= R, \varphi_R - \pi)$ gelegen zijn. Deze positievectoren zijn in onderstaande figuur aangegeven en liggen langs de bisectrice van de vectoren \vec{k}_i en \vec{k}_f , d.i. de adiabatische terugstoot richting.

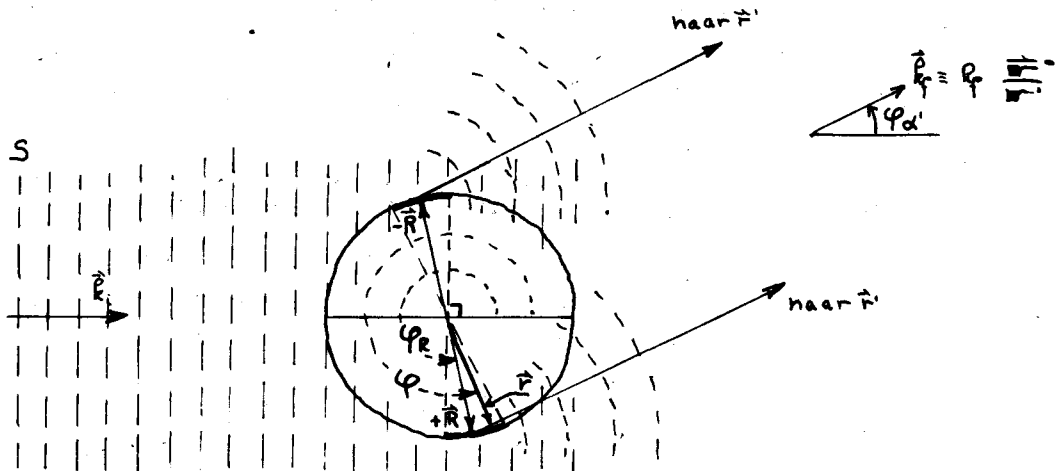


Fig. IV-3. Interferentie van golven, die verstrooid zijn aan de punten $+\vec{R}$ en $-\vec{R}$.

Maxima en minima komen in observatiepunten \vec{r}' van de verstrooide α 's voor als de "optische weglengten" $\delta(+\vec{R})$ en $\delta(-\vec{R})$ een onderling verschil vertonen van respectievelijk $n \cdot 2\pi$ en $(n + \frac{1}{2}) \cdot 2\pi$. De "optische weglengte" $\delta(\vec{r})$ wordt hier gedefinieerd als een dimensieloze grootheid en komt overeen met $2\pi \times$ het aantal golfperioden tussen een willekeurig inkomend golffront S en het observatiepunt \vec{r}' van het verstrooide α -deeltje. De golfperioden worden geteld langs de inkomende golf tussen S en het punt \vec{r} op het kernoppervlak en langs de uitgaande golf tussen de punten \vec{r} en \vec{r}' .

In ons model komt de optische weglengte $\delta(\vec{r})$, op een irrelevante constante na, die onafhankelijk van \vec{r} is, overeen met de fase van het product $u_{\vec{k}_i}(\vec{r}) \cdot u_{-\vec{k}_f}(\vec{r})$ van de vlakke golven $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ en $e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}$, die aan het kernoppervlak vervormd worden. De absolute waarde van dit product noemen we $A(\vec{r})$. We stellen, dat de grootheden $A(\vec{r})$ en $\delta(\vec{r})$ alleen afhankelijk zijn van de variabele φ , daar we hebben aangenomen dat de inelastische interactie uitsluitend plaats heeft aan het kernoppervlak.

Wanneer wij het gedrag van de golven $u_{\vec{k}_i}(\vec{r})$ en $u_{-\vec{k}_f}(\vec{r})$ in de buurt van het kernoppervlak nagaan, dan kunnen wij voor $A(\vec{r})$ en $\delta(\vec{r})$ bepaalde uitdrukkingen afleiden. Evenals Inglis nemen wij daartoe aan, dat de golf met golfvector \vec{k}_i , gezien vanuit de richting \vec{e}_i , zich langs de "achterkant" van het kernoppervlak voortplant, waarbij de amplitude afneemt, terwijl de golflengte dezelfde blijft. Hetzelfde geldt voor de golf met golfvector $-\vec{k}_f$ wanneer de kern bekeken wordt vanuit de verstrooiingsrichting.

Daar de amplituden afnemen voeren we als benadering in, dat de grootheid $A(\vec{r})$ gelijk aan nul is buiten de twee sectoren, die symmetrisch t.o.v. de punten $+\vec{R}$ (de schaduw sector) en $-\vec{R}$ (de heldere sector) gelegen zijn en die zich uitstrekken over een hoek $\Delta\varphi$. Binnen deze sectoren stellen wij respectievelijk $A(\vec{r})$ gelijk aan de positieve constanten A_- en A_+ . Aangezien in de heldere sector de inkomende en uitgaande golven elkaar meer overlappen dan in de schaduw sector, is $A_- > A_+$.

Wij hebben verondersteld, dat de golflengten van de golven $u_{\vec{k}_i}(\vec{r})$ en $u_{-\vec{k}_f}(\vec{r})$ langs de randen van de sectoren overeenkomen met de golflengten van deze golven in het oneindige. Daar de golfgetallen, d.w.z. het aantal golfperioden per lengte eenheid, van deze golven in het oneindige gelijk zijn aan $\frac{k_i}{2\pi}$ en $\frac{k_f}{2\pi}$ komt de optische weglengte $\delta(\vec{r})$ in de schaduw sector overeen met:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(+\vec{R}) + k_i(\varphi - \varphi_R) \cdot R - k_f(\varphi - \varphi_R) \cdot R = \delta(+\vec{R}) + c(\varphi - \varphi_R),$$

terwijl in de heldere sector de optische weglengte $\delta(\vec{r})$ overeenkomt met:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(-\vec{R}) - r_i(\varphi - \varphi_R - \pi) \cdot R + r_f(\varphi - \varphi_R - \pi) \cdot R = \delta(-\vec{R}) - c(\varphi - \varphi_R - \pi)$$

De parameter $c = (r_i - r_f) \cdot R$ geeft aan in hoeverre het verstrooiingsproces niet adiabatisch is.

De optische weglengten $\delta(\pm \vec{R})$ zijn op de volgende wijze gelieerd aan de verstrooiingshoek φ_α :

$$\delta(\pm \vec{R}) = \delta_0 \pm \frac{1}{2}(r_i + r_f)\varphi_\alpha \cdot R$$

waarin δ_0 de optische weglengte $\delta(+\vec{R}) = \delta(-\vec{R})$ is voor verstrooiing in voorwaartse richting.

Met het bovenstaande gaat (8) over in:

$$\begin{aligned} \int_{\substack{\vec{r}_i, \vec{r}_f \\ 0 \rightarrow \infty}} &= \text{const} \int_{r \leq R} A(\vec{r}) e^{i\delta(\vec{r})} e^{-in\varphi} d\varphi \\ &= \text{const} \left[A_+ e^{i\{\delta(+\vec{R}) - c\varphi_R\}} \int_{\varphi_R - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_R + \frac{\Delta\varphi}{2}} e^{-i(m-c)\varphi} d\varphi + A_- e^{i\{\delta(-\vec{R}) + c(\varphi_R + \pi)\}} \int_{\varphi_R - \pi - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_R - \pi + \frac{\Delta\varphi}{2}} e^{-i(m+c)\varphi} d\varphi \right] \\ &= \text{const} \left[\frac{A_+ 2 \sin \frac{1}{2}(m-c)\Delta\varphi}{m-c} e^{i\{\delta(+\vec{R}) - m\varphi_R\}} + \frac{A_- 2 \sin \frac{1}{2}(m+c)\Delta\varphi}{m+c} e^{i\{\delta(-\vec{R}) - m\varphi_R\}} \right] \\ &= \text{const} e^{i\{\delta(-\vec{R}) - m\varphi_R\}} \times \\ &\quad \left(\frac{A_+ \sin \frac{1}{2}(m-c)\Delta\varphi}{m-c} + \frac{A_- \sin \frac{1}{2}(m+c)\Delta\varphi}{m+c} \right) - \left(\frac{A_- \sin \frac{1}{2}(m-c)\Delta\varphi}{m-c} - \frac{A_+ \sin \frac{1}{2}(m+c)\Delta\varphi}{m+c} \right) + \\ &\quad \left(\frac{A_+ \sin \frac{1}{2}(m-c)\Delta\varphi}{m-c} + \frac{A_+ \sin \frac{1}{2}(m+c)\Delta\varphi}{m+c} \right) + \left(\frac{A_+ \sin \frac{1}{2}(m-c)\Delta\varphi}{m-c} - \frac{A_+ \sin \frac{1}{2}(m+c)\Delta\varphi}{m+c} \right) e^{i\{\delta(+\vec{R}) - \delta(-\vec{R})\}} \end{aligned}$$

Wij voeren de volgende verkorte notatie in voor deze uitdrukking

$$\int_{\vec{r}_i, \vec{r}_f} = \text{const} e^{i\delta(-\vec{R})} e^{-in\varphi_R} \left\{ (a_{-}(m) - b_{-}(m)) + (a_{+}(m) + b_{+}(m)) e^{i\delta} \right\} \quad (9)$$

waarin $\delta \equiv \delta(+\vec{R}) - \delta(-\vec{R}) = (k_i + k_p) R \varphi_\alpha$,

en

$$a_{\pm}(M) = A_{\pm} \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2}(M-c)\Delta\varphi}{M-c} + \frac{\sin \frac{1}{2}(M+c)\Delta\varphi}{M+c} \right\} \quad (10-a)$$

$$b_{\pm}(M) = A_{\pm} \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2}(M-c)\Delta\varphi}{M-c} - \frac{\sin \frac{1}{2}(M+c)\Delta\varphi}{M+c} \right\} \quad (10-b)$$

Wij merken op, dat (10-a) symmetrisch is onder de transformatie $M \rightarrow -M$, terwijl (10-b) antisymmetrisch is onder deze transformatie. Tevens zien we, dat voor $c = 0$ d.w.z. voor een adiabatisch reactieproces de parameters b_{\pm} nul zijn. De verstrooiingsamplituden $f_{0 \rightarrow 2, \pm 2}(\vec{k}, \vec{k}_p)$ en $f_{0 \rightarrow 2, -2}(\vec{k}, \vec{k}_p)$ zien er m.b.v. (9) en de bovenstaande opmerkingen als volgt uit:

$$\begin{aligned} f_{0 \rightarrow 2, \pm 2}(\vec{k}, \vec{k}_p) &\equiv \left| f_{0 \rightarrow 2, \pm 2}(\vec{k}, \vec{k}_p) \right| e^{i\delta_{\pm 2}} = \text{const} e^{-2i\varphi_R} \{ (a_- - b_-) + (a_+ + b_+) e^{i\delta} \} \\ &\rightarrow (a_- - b_-) + (a_+ + b_+) e^{i\delta} = \text{const} e^{i(\delta_{\pm 2} + 2\varphi_R)} \end{aligned} \quad (11-a)$$

en

$$\begin{aligned} f_{0 \rightarrow 2, -2}(\vec{k}, \vec{k}_p) &\equiv \left| f_{0 \rightarrow 2, -2}(\vec{k}, \vec{k}_p) \right| e^{i\delta_{-2}} = \text{const} e^{+2i\varphi_R} \{ (a_- + b_-) + (a_+ - b_+) e^{i\delta} \} \\ &\rightarrow (a_- + b_-) + (a_+ - b_+) e^{i\delta} = \text{const} e^{i(\delta_{-2} - 2\varphi_R)} \end{aligned} \quad (11-b)$$

Terwille van de eenvoud hebben wij in bovenstaande uitdrukkingen i.p.v. $a_{\pm}(2)$ en $b_{\pm}(2)$ respectievelijk a_{\pm} en b_{\pm} geschreven. Is de energieoverdracht voldoende klein, zodat $(2 \pm c)\Delta\varphi < 2\pi$, dan zijn de parameters a_+ , a_- , b_+ en b_- alle positief, terwijl $a_- > a_+$, $b_- > b_+$, $a_+ > b_+$ en $a_- > b_-$.

De grootheden $(a_- - b_-) + (a_+ + b_+) e^{i\delta}$ en $(a_- + b_-) + (a_+ - b_+) e^{i\delta}$ zijn in het complexe vlak uitgezet. (De getrokken vectoren in figuur IV-4).

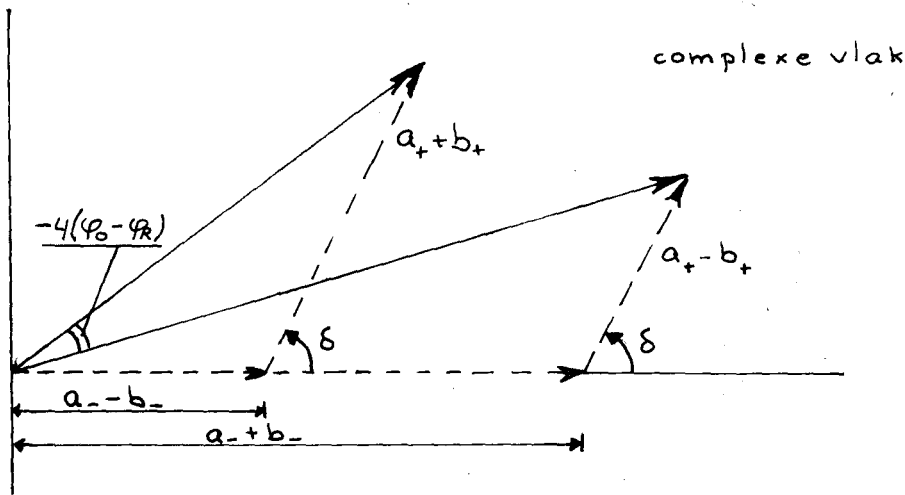


Fig. IV-4. Gedrag van de gamma symmetriehoek φ_0 bij variërende $\delta = (R_+ + R_-)R\varphi_0$.

De hoek tussen deze vectoren volgt uit het rechterlid van (11-a) en (11-b) en bedraagt: $(\delta_{+2} + 2\varphi_R) - (\delta_{-2} - 2\varphi_R) = -(\delta_{-2} - \delta_{+2}) + 4\varphi_R$
 $\equiv -4(\varphi_0 - \varphi_R)$ met $4\varphi_0 = \delta_{-2} - \delta_{+2}$. Als de verstrooiingshoek φ_0 toeneemt, dan geeft dit aanleiding tot een positieve (tegen-klok) rotatie van de twee onderbroken vectoren $(a_{\pm} + b_{\pm})e^{i\delta}$.

De differentiële werkzame doorsnede van de α' -deeltjes is evenredig met de som van de kwadraten van de verstrooiingsamplituden $f_{0 \rightarrow 2, +2}^{(R, \varphi)}$ en $f_{0 \rightarrow 2, 0}^{(R, \varphi)}$. Wij hebben in het complexe vlak alleen de vectoren getekend, die evenredig zijn met de verstrooiingsamplituden $f_{0 \rightarrow 2, +2}^{(R, \varphi)}$ en $f_{0 \rightarrow 2, -2}^{(R, \varphi)}$. Zonder enig bezwaar evenwel zouden wij m.b.v. (9) voor $f_{0 \rightarrow 2, 0}^{(R, \varphi)}$ ook een vector in het complexe vlak kunnen tekenen, (dan is $b_{\pm}(0)$ gelijk aan nul), maar omdat we alleen geïnteresseerd zijn in het verloop van φ_0 met toenemende φ_0 , hebben we ons tot de twee vectoren beperkt, die evenredig zijn met $f_{0 \rightarrow 2, +2}^{(R, \varphi)}$ en $f_{0 \rightarrow 2, -2}^{(R, \varphi)}$.

De differentiële werkzame doorsnede is maximaal als $\delta = 0 \pm n \cdot 360^\circ$ en minimaal als $\delta = 180^\circ \pm n \cdot 360^\circ$, omdat dan de getrokken vectoren uit figuur IV-4 respectievelijk maximaal en minimaal zijn. (Wij kunnen nagaan, dat dit ook geldt voor de niet getekende vector, die evenredig is met $f_{0 \rightarrow 2, 0}^{(R, \varphi)}$).

Is deze werkzame doorsnede maximaal, dan is $\varphi_0 = \varphi_R$. Is hij daarentegen minimaal dan kunnen we de volgende drie verschillende mogelijkheden onderscheiden:

- a) Als $a_- - b_- < a_+ + b_+$ dan is $\varphi_0 - \varphi_R = \pm 45^\circ$ (12-a)
- b) Als $a_- - b_- = a_+ + b_+$ dan is $\varphi_0 - \varphi_R = \pm 22\frac{1}{2}^\circ$ (12-b)
- c) Als $a_- - b_- > a_+ + b_+$ dan is $\varphi_0 - \varphi_R = 0^\circ$ (12-c)

Wij merken op dat de vector $(a_+ - b_+)e^{i\delta}$ altijd in het rechter halfvlak blijft, omdat $a_- > a_+$.

M.b.v. het linkerlid uit (11-a) en (11-b) kunnen wij een uitdrukking afleiden, die $(\varphi_0 - \varphi_R)$ weergeeft als functie van δ . Deze uitdrukking ziet er als volgt uit

$$\varphi_0 - \varphi_R = -\frac{1}{4} \arctg \frac{\sin \delta}{p + q \cos \delta} \quad (13)$$

waarin de positieve parameters p en q gegeven worden door:

$$p = \frac{\frac{1}{2}(a_-^2 - b_-^2 + a_+^2 - b_+^2)}{a_- b_+ + a_+ b_-}, \quad q = \frac{a_- a_+ + b_- b_+}{a_- b_+ + a_+ b_-} \quad (14)$$

De drie verschillende mogelijkheden uitgedrukt in p en q zijn:

$$a_- - b_- < a_+ + b_+ \longrightarrow p < q \quad (15-a)$$

$$a_- - b_- = a_+ + b_+ \longrightarrow p = q \quad (15-b)$$

$$a_- - b_- > a_+ + b_+ \longrightarrow p > q \quad (15-c)$$

In de onderstaande figuur is $\varphi_0 - \varphi_R$ voor deze drie mogelijkheden volgens (13) uitgezet tegen δ .

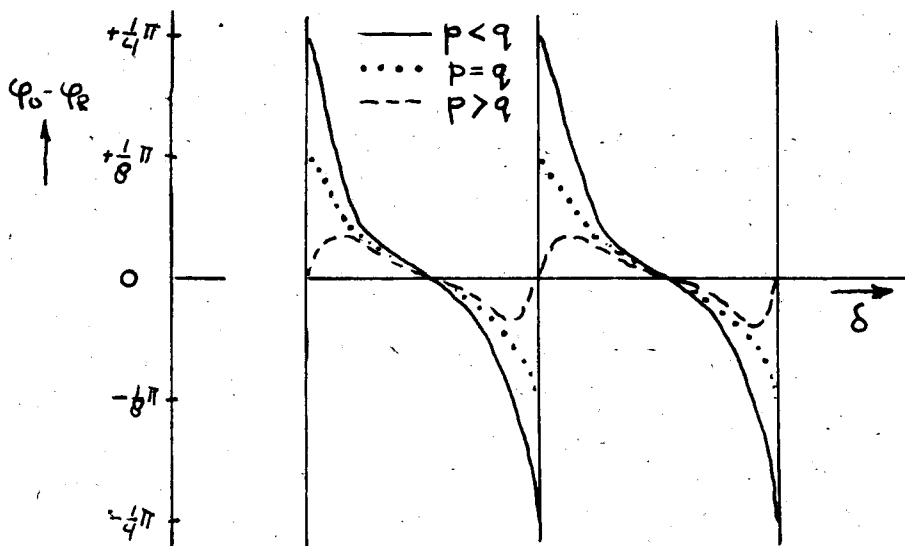


Fig. IV-5

Wij zien, dat het verloop van $\varphi_0 - \varphi_R$ voor het geval dat $p < q$ overeenkomt met het experimenteel bepaalde verloop van φ_0 zoals dat door figuur II-5a weergegeven wordt. Dit moesten we laten zien.

Referenties:

- 1) N. Austern in: Selected Topics in Nuclear Theory.
- 2) D.R. Inglis, Physics Letters 10(1964) 336
- 3) B.J. Verhaar en L.D. Tolsma, Physics Letters 17(1965) 53

De differentiële werkzame doorsnede.

De stationaire verstrooiingsgolffunctie die de verstrooiing van een α -deeltje aan even-even kernen beschrijft, waarbij het 2^+ niveau aangeslagen wordt, ziet er als volgt uit:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{r}_i) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}} \phi_0(\vec{r}_i) + \sum_m f(\vec{k}_i \vec{q}) \phi_{2m}(\vec{r}_i) \frac{e^{i k_F r}}{r}$$

Hierbij hebben we de termen, die de overige reactieprocessen voorstellen, voor de eenvoud weggelaten. De eerste term, waarin de vlakke golf het inkomende α -deeltje met een impuls $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i$ beschrijft, representeert een golffunctie met waarschijnlijkheidsdichtheid 1. De stroomdichtheid, die het aantal deeltjes aangeeft dat per tijdseenheid een oppervlakteenheid passeert, is gelijk aan de snelheid van de deeltjes ($= \frac{\hbar k_i}{m}$) maal de waarschijnlijkheidsdichtheid. De stroomdichtheid voor de reactie is dus $\frac{\hbar k_i}{m}$. De tweede term representeert een golffunctie met een waarschijnlijkheidsdichtheid, die gelijk is aan:

$$\begin{aligned} & \int \left[\sum_m f(\vec{k}_i \vec{q}) \phi_{2m}(\vec{r}_i) \frac{e^{i k_F r}}{r} \right]^* \left[\sum_n f(\vec{k}_i \vec{q}) \phi_{2n}(\vec{r}_i) \frac{e^{i k_F r}}{r} \right] d\vec{r}_i \\ &= \sum_m \sum_n \frac{f(\vec{k}_i \vec{q})^* f(\vec{k}_i \vec{q})}{r^2} \int \phi_{2m}^*(\vec{r}_i) \phi_{2n}(\vec{r}_i) d\vec{r}_i = \sum_m \frac{|f(\vec{k}_i \vec{q})|^2}{r^2} \end{aligned}$$

De stroomdichtheid van de verstrooide deeltjes, die een snelheid $\frac{\hbar k_F}{m}$ hebben, is daarom:

$$\frac{\hbar k_F}{m} \sum_m \frac{|f(\vec{k}_i \vec{q})|^2}{r^2}$$

Het aantal verstrooide deeltjes, dat per tijdseenheid een infinitesimaal ruimtehoekelementje $d\Omega$, dat zich op een afstand r van de targetkern bevindt, passeert wordt dan gegeven door:

$$\frac{\hbar k_F}{m} \sum_m \frac{|f(\vec{k}_i \vec{q})|^2}{r^2} \cdot r^2 d\Omega$$

Als we deze grootheid delen door de inkomende flux per opp. eenheid d.i. $\frac{\hbar k_i}{m}$ dan vinden we $\sigma(\vec{k}_i \vec{q}) \cdot d\Omega$. De differentiële werkzame doorsnede $\sigma(\vec{k}_i \vec{q})$ komt dan overeen met:

$$\sigma(\vec{k}_i \vec{q}) = \frac{k_F}{k_i} \sum_m |f(\vec{k}_i \vec{q})|^2$$

M.a.w., de kans dat er per tijdseenheid een deeltje verstrooid wordt in het infinitesimaal ruimtehoekelementje $d\Omega$ komt overeen met de differentiële werkzame doorsnede $\times d\Omega$ als per tijdseenheid één inkomend deeltje de eenheid van oppervlak passeert.

D E E L II

INELASTISCHE VERSTROOING VAN GEPOLARISEERDE

SPIN $\frac{1}{2}$ DEELTJES AAN EVEN-EVEN KERNEN.

V De verstrooiingsgolf functie voor verstrooiing van het spin $\frac{1}{2}$ deeltje ψ uit een bundel aan een even-even kern. De amplitudematrix.

In hoofdstuk III hebben we gezien, dat de stationaire toestandsgolf functie, die de inelastische α -verstrooiing aan even-even kernen beschreef er als volgt uitzag:

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \phi_0(\vec{r}_i) + \sum_M \int_{0 \rightarrow 2M} f(\vec{k}_i \vec{k}_f) \phi_{2M}(\vec{r}_i) \frac{e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}}{r} \quad (\text{III-16})$$

Voor de eenvoud van de notatie hebben wij in de tweede term van het rechterlid de grondtoestand en andere aangeslagen toestanden niet genoteerd, omdat wij alleen geïnteresseerd zijn in het $0^+ \rightarrow 2^+$ proces. In deze uitdrukking worden de eigenfuncties van de targetkern voor en na de reactie respectievelijk voorgesteld door de functies $\phi_0(\vec{r}_i)$ en $\phi_{2M}(\vec{r}_i)$ met interne coördinaten \vec{r}_i . In (III-16) hebben we de eigenfuncties van het α -projectiel gemakshalve weggelaten. Doen we dit niet en geven we de eigenfuncties van het α -projectiel voor de reactie aan met $\{_{3m}(\vec{q}_i) = \{_{00}(\vec{q}_i)$, dan krijgt de bovenstaande verstrooiingsgolf functie de volgende vorm:

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \phi_0(\vec{r}_i) \{_{00}(\vec{q}_i) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \sum_M \int_{0 \rightarrow 2M} f(\vec{k}_i \vec{k}_f) \phi_{2M}(\vec{r}_i) \{_{00}(\vec{q}_i) \frac{e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}}{r} \quad (1)$$

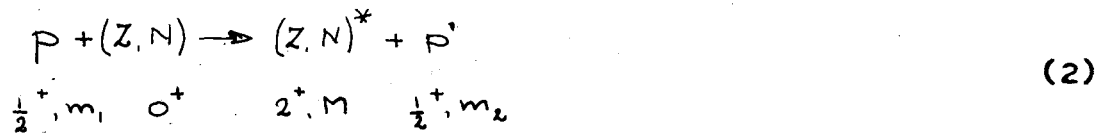
Omdat α -deeltjes een spin 0 hebben wordt de verstrooiing van ieder willekeurig α -deeltje door dezelfde functie (1) beschreven. In het algemeen zeggen wij, dat een verzameling zich in een zuivere toestand bevindt als alle componenten van deze verzameling door dezelfde golf-functie beschreven kunnen worden. De bundel α -deeltjes is dus een verzameling, die zich in een zuivere toestand bevindt.

In dit en de volgende hoofdstukken beschouwen wij een bundel gelijksoortige spin $\frac{1}{2}$ deeltjes. Hier kunnen spin afhankelijke interacties mee bestudeerd worden, die tegenwoordig sterk in de belangstelling staan. Voorbeelden van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes zijn protonen en $^3\text{H}_0$ kernen. In het vervolg van dit verslag zal er meermalen sprake zijn van protonen. Dit is evenwel met geen enkele speciale bedoeling gedaan en men kan daarom hiervoor ook een ander spin $\frac{1}{2}$ deeltje lezen. De spintoestand van een spin $\frac{1}{2}$ deeltje wordt gerepresenteerd door de lineaire combinatie

$\sum_m c_m \{_{\frac{1}{2}m}$ waar $\{_{\frac{1}{2}m}$ eigentoestanden zijn van het spin-impuls moment langs een of andere quantisatie-as met eigenwaarden $m = \pm \frac{1}{2}$. Wij kunnen

bewijzen dat we met iedere spintoestand een ruimtelijke richting mogen associëren, waarlangs deze spintoestand een spinimpulsmoment $\frac{1}{2}$ heeft. We zeggen daarom ook weleens dat deze ruimtelijke richting de oriëntatie van het spinimpulsmoment aangeeft, wat overigens streng quantum mechanisch vanwege de commutatierelaties $\vec{j} \times \vec{j} = i\vec{j}$ niet geoorloofd is. Valt voor een bepaalde spintoestand deze ruimtelijke richting samen met de kwantisatie-as, dan is voor deze spintoestand de coëfficiënt $c_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ gelijk aan nul.

Wij kunnen met betrekking tot een bundel protonen slechts van een zuivere toestand spreken als alle protonen dezelfde ruimtelijke richting bezitten m.a.w. als de bundel volledig gepolariseerd is. Wordt de inelastische p-verstrooiing aan even-even kernen schematisch als volgt voorgesteld



dan kunnen we de stationaire verstrooiingsgolf functie voor elk van de protonen uit een volledig gepolariseerde bundel als volgt noteren:

$$\Psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{m_1} c_{\frac{1}{2} m_1} \phi_0(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} (\vec{q}_1) \\ \frac{1}{2} m_1 \end{matrix} \right\} e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}} + \sum_{M m_2} \left\{ \sum_{m_1} f_{0m_1 \rightarrow M m_2}(\vec{E}, \vec{q}) c_{\frac{1}{2} m_1} \right\} \phi_{2M}(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} (\vec{q}_1) \\ \frac{1}{2} m_2 \end{matrix} \right\} \frac{e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}}}{r} \quad (3)$$

waarin de eigenfuncties van het spin $\frac{1}{2}$ deeltje voorgesteld worden door $\left\{ \begin{matrix} (\vec{q}_1) \\ \frac{1}{2} m \end{matrix} \right\}$ met interne coördinaten \vec{q}_1 . In de praktijk zal een gepolariseerde bundel slechts gedeeltelijk gepolariseerd zijn* d.w.z. de spinimpulsmomenten van de protonen bezitten niet alle dezelfde ruimtelijke richting. In dit geval zeggen we, dat de verzameling protonen zich in een gemengde of onzuivere toestand bevindt. Ook kunnen de protonspins in de bundel "random" verdeeld zijn. Dit wil zeggen, dat de protonspinimpulsmomenten een gelijkmatige verdeling over alle richtingen hebben.

In het algemeen zullen we daarom de stationaire verstrooiingsgolf functie voor verstrooiing van het ν ^{de} proton uit een bundel aan een even-even kern als volgt schrijven

$$\Psi^{(\nu)} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{m_1} c_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} \phi_0(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} (\vec{q}_1) \\ \frac{1}{2} m_1 \end{matrix} \right\} e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}} + \sum_{M m_2} \left\{ \sum_{m_1} f_{0m_1 \rightarrow M m_2}^{(\nu)}(\vec{E}, \vec{q}) c_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} \right\} \phi_{2M}(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} (\vec{q}_1) \\ \frac{1}{2} m_2 \end{matrix} \right\} \frac{e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}}}{r} \quad (4)$$

* Een volledig gepolariseerde bundel is technisch (nog) niet te verwezenlijken.

Het eerste gedeelte van deze uitdrukking representeert de situatie voor de reactie. De toestandsfunctie die deze situatie beschrijft is hier ontwikkeld naar functies $\phi_0(\vec{r}_i) \sum_{m_1} e^{i\vec{q}_i \cdot \vec{r}}_1$ met $c_{\frac{1}{2}m_1}^{(v)}$ als ontwikkelingscoëfficiënt. Een gelijklopende beschouwing gaat op voor het tweede gedeelte, dat de situatie na de reactie beschrijft. Hier wordt de situatie gerepresenteerd door een toestandsfunctie, die ontwikkeld is naar functies $\phi_{2M}(\vec{r}_i) \sum_{m_2} \frac{e^{i\vec{q}_i \cdot \vec{r}}}{r}$ met $\sum_{m_1, 0m_1 \rightarrow mm_2} f(\vec{R}, \vec{q}) c_{\frac{1}{2}m_1}^{(v)}$ als ontwikkelingscoëfficiënt.

De verstrooiingsamplitude $f_{0m_1 \rightarrow mm_2}(\vec{R}, \vec{q})$ vormt een element van de amplitudematrix. Deze representeert in een zeker stelsel van orthonormale basisvectoren de amplitudeoperator. De amplitudeoperator legt een verband tussen de amplitudes van de uitgaande bolgolven en de amplitude van de inkomende vlakke golf. De amplitude-matrix F ziet er voor ons geval als volgt uit:

$$F = \begin{array}{c|cc} M & m_1 & \\ \hline & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline m_2 & & \\ \hline +2 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow +2+\frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow +2+\frac{1}{2} \end{array} \\ +1 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow +1+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow +1-\frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow +1+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow +1-\frac{1}{2} \end{array} \\ 0 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow 0+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow 0-\frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow 0+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow 0-\frac{1}{2} \end{array} \\ -1 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow -1+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow -1-\frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow -1+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow -1-\frac{1}{2} \end{array} \\ -2 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow -2+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow -2-\frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow -2+\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow -2-\frac{1}{2} \end{array} \end{array} \Rightarrow F = \begin{array}{c|cc} M & m_1 & \\ \hline & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline m_2 & & \\ \hline +2 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow +2+\frac{1}{2} \end{array} & 0 \\ +1 & 0 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow +1-\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow +1+\frac{1}{2} \end{array} \\ 0 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow +1-\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow 0+\frac{1}{2} \end{array} & 0 \\ -1 & 0 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow 0-\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow -1+\frac{1}{2} \end{array} \\ -2 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow -1-\frac{1}{2} \\ f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0+\frac{1}{2} \rightarrow -2+\frac{1}{2} \end{array} & 0 \\ & 0 & \begin{array}{l} f(\vec{R}, \vec{q}) \\ 0-\frac{1}{2} \rightarrow -2-\frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

Fig. V-1

Bij de overgang van de eerste naar de tweede matrix hebben we gebruik gemaakt van de regel van A. Bohr (zie hoofdstuk II). Daar wij in het vervolg van dit verslag de geadjungeerde F^+ van de laatste matrix nodig blijken te hebben noteren wij deze:

F^+

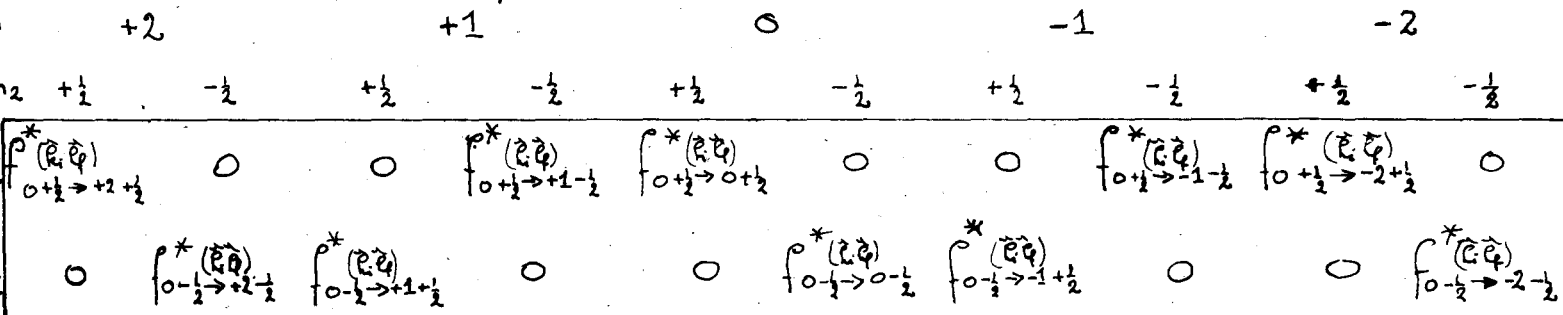


Fig. V-2

Referenties:

- 1) Intern Rapport. N-K 002, april 1963.

VI De dichtheidsmatrix van het systeem voor de reactie en de dichtheidsmatrix van het systeem na de reactie.

De differentieële werkzame doorsnede van de verstrooide spin $\frac{1}{2}$ deeltjes.

De dichtheidsmatrix van het systeem voor de reactie.

In het voorgaande hoofdstuk hebben we gezien, dat de toestandfunctie, die de verstrooiing van één bepaald proton voor de reactie beschrijft er als volgt uitzag:

$$\sum_{m_1} c_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} \phi_0(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} (q) \\ \frac{1}{2} m_1 \end{matrix} \right\} e^{i \vec{p}_1 \cdot \vec{r}} \quad (1)$$

Voor deze toestand schrijven we nu:

$$| \nu \rangle = \sum_{m_1} c_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} | m_1 \rangle$$

Als de bundel, d.i. een fysisch systeem, zich in een zuivere toestand bevindt, dus volledig gepolariseerd is, dan kan de verstrooiing van de bundel of de toestand van het fysisch systeem voor de reactie beschreven worden door een functie (1). (De index ν heeft dan geen zin meer). De toestand van dit systeem wordt bepaald door de twee complexe coëfficiënten $c_{\frac{1}{2} m_1}$. Het aantal reële onafhankelijke parameters in deze coëfficiënten bedraagt dus vier. Het aantal evenwel dat fysisch relevant is bedraagt slechts twee, omdat de fase van de toestandfunctie willekeurig en fysisch niet essentieel is, terwijl ook de normeringsvoorwaarde in acht genomen moet worden. Wij definiëren vervolgens de z.g. dichtheidsmatrix van dit systeem:

$$\rho_{m_1, n_1} = c_{\frac{1}{2} m_1} c_{\frac{1}{2} n_1}^* \quad \text{Sp } \rho = \sum_{m_1} c_{\frac{1}{2} m_1} c_{\frac{1}{2} m_1}^* = 1 \quad (2)$$

Aangezien wij hier te maken hebben met een tweetal ontwikkelingscoëfficiënten $c_{\frac{1}{2} m_1}$, is deze dichtheidsmatrix een 2x2 matrix. De vorm van deze 2x2 matrix wordt bepaald door de twee bovenstaande reële parameters.

De verwachtingswaarde van een operator Q in een zuivere toestand van het systeem wordt m.b.v. het dichtheidsmatrix-formalisme gegeven door:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \langle | \nu \rangle | Q | \nu \rangle = \sum_{m_1, n_1} c_{\frac{1}{2} m_1} c_{\frac{1}{2} n_1}^* \langle n_1 | Q | m_1 \rangle \\ &= \sum_{m_1, n_1} \rho_{m_1, n_1} Q_{n_1, m_1} = \text{Sp}(\rho Q) \end{aligned} \quad (3)$$

Hieruit blijkt dat, als de operator Q hermitisch is en dus de verwachtingswaarde reëel, de dichtheidsmatrix eveneens hermitisch moet zijn. De bovenstaande definitie (2) van de dichtheidsmatrix voldoet hieraan.

Bevindt het systeem zich daarentegen in een gemengde toestand en wij zouden over deze toestand maximale informatie willen inwinnen, dan zouden wij daar $2N'$ reële parameters voor moeten bepalen, als N' het aantal protonen in de bundel is, dat aan het verstrooiingsproces deelneemt. Dit is moeilijk uitvoerbaar en wij zullen met minder informatie over het systeem tevreden moeten zijn, wat inhoudt, dat wij met gemiddelde experimentele grootheden over een groot aantal protonen genoeg moeten nemen. Zoals uit het vervolg van dit verslag zal blijken reduceert deze middeling het aantal van $2N'$ onafhankelijke reële parameters tot drie, die dus de gemengde toestand van het systeem bepalen. De verwachtingswaarde van een operator Q in een gemengde toestand van het systeem wordt daarvandaan verkregen door een middeling van verwachtingswaarden in elk der zuivere toestanden, waaruit het systeem is samengesteld.

Een zuivere toestand van het systeem voor de reactie wordt gerepresenteerd door de toestandfunctie (1). De verwachtingswaarde van de operator Q in deze zuivere toestand wordt aangegeven met $\langle Q \rangle^{(v)}$. M.b.v. (3) krijgen we dus voor de verwachtingswaarde van de operator Q in de gemengde toestand van het systeem de volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned} \langle \bar{Q} \rangle &\equiv \frac{1}{N'} \sum_{v=1}^{N'} \langle Q \rangle^{(v)} = \frac{1}{N'} \sum_{v=1}^{N'} \langle \psi | Q | \psi \rangle^{(v)} = \frac{1}{N'} \sum_{v=1}^{N'} \sum_{m_1, n_1} C_{\frac{1}{2}m_1}^{(v)} C_{\frac{1}{2}n_1}^{(v)*} \langle n_1 | Q | m_1 \rangle \\ &= \sum_{m_1, n_1} \frac{1}{N'} \sum_{v=1}^{N'} C_{\frac{1}{2}m_1}^{(v)} C_{\frac{1}{2}n_1}^{(v)*} \langle n_1 | Q | m_1 \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Wanneer wij de dichtheidsmatrix van de gemengde toestand van het systeem als volgt definiëren

$$\rho_{m_1, n_1} = \frac{1}{N'} \sum_{v=1}^{N'} C_{\frac{1}{2}m_1}^{(v)} C_{\frac{1}{2}n_1}^{(v)*} \quad (5) \quad \text{Sp} \rho = 1 \quad (5a)$$

dan gaat (4) over in:

$$\langle \bar{Q} \rangle = \sum_{m_1, n_1} \rho_{m_1, n_1} Q_{n_1, m_1} = \text{Sp}(\rho Q) \quad (6)$$

Opdat de verwachtingswaarde van een hermitische operator in de gemengde toestand van het systeem ook reëel is, moet de dichtheidsmatrix voor deze gemengde toestand zodanig gedefinieerd worden, dat hij eveneens hermitisch

is. Dit kan men uit (6) afleiden. De bovenstaande definitie (5) van de dichtheidsmatrix voor de gemengde toestand voldoet aan deze eis. Wanneer in het vervolg sprake is van de dichtheidsmatrix dan wordt hier de dichtheidsmatrix voor de gemengde toestand van het systeem mee bedoeld.

Een matrix met twee rijen en kolommen heeft vier elementen. De voorwaarde, dat de dichtheidsmatrix hermitisch moet zijn, beperkt het aantal onafhankelijke reële parameters in deze vier complexe elementen tot vier. Dit aantal wordt door de voorwaarde (5a) verder gereduceerd tot drie. Deze drie reële onafhankelijke parameters zijn de drie parameters, die na de middeling de gemengde toestand van het systeem bepalen. Het blijkt uit het vervolg van dit verslag, dat de dichtheidsmatrix de gemengde toestand van het systeem zodanig weergeeft, dat het gemiddelde gedrag van het systeem in experimenten voorspelbaar wordt. Als zodanig zeggen we, dat zoals een zuivere toestand van het systeem gerepresenteerd wordt door een toestandsfunctie, een gemengde toestand van het systeem gerepresenteerd wordt door de dichtheidsmatrix.

Iedere hermitische 2×2 matrix met spoor 1 kunnen wij schrijven als een lineaire combinatie van vier 2×2 basismatrices. Dus:

$$\rho = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + P_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + P_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + P_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} (1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \quad (7)$$

Als basismatrices zijn hier de eenheidsmatrix en de Paulimatrices σ_x , σ_y en σ_z genomen, terwijl de coëfficiënten P_x , P_{ij} en P_z de componenten blijken te zijn van een axiale vector, de polarisatievector.

Als voorbeeld bepalen wij de verwachtingswaarden van de operatoren s_x , s_{ij} en s_z in een gemengde toestand van het systeem. Deze operatoren vormen de componenten van de spinoperator \vec{S} van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes. Berekening m.b.v. (4) t/m (7) leert dat:

$$\langle \bar{s}_x \rangle = \frac{\hbar}{2} P_x \quad ; \quad \langle \bar{s}_{ij} \rangle = \frac{\hbar}{2} P_{ij} \quad ; \quad \langle \bar{s}_z \rangle = \frac{\hbar}{2} P_z \quad (8)$$

De dichtheidsmatrix (7) krijgt m.b.v. dit resultaat de volgende vorm:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{\hbar} \langle \bar{s}_z \rangle & \frac{2}{\hbar} \langle \bar{s}_x \rangle - \frac{2}{\hbar} i \langle \bar{s}_{ij} \rangle \\ \frac{2}{\hbar} \langle \bar{s}_x \rangle + \frac{2}{\hbar} i \langle \bar{s}_{ij} \rangle & 1 - \frac{2}{\hbar} \langle \bar{s}_z \rangle \end{pmatrix} \quad (9)$$

Naar aanleiding van deze uitdrukking zeggen wij ook wel dat de dichtheidsmatrix de polarisatie van het systeem weergeeft. Voor spin $\frac{1}{2}$ deeltjes wordt deze polarisatie dus gegeven door de verwachtingswaarden van de componenten van de spinoperator m.a.w. door de gemiddelde waarde van de spinvector n.l. $\langle \vec{S} \rangle$, die ons in staat stelt de polarisatie intuïtief voor te stellen. Deze intuïtieve voorstelling van de polarisatie kunnen we ons evenwel niet maken bij niet-relativistische spin 1 deeltjes en bij deeltjes met een hoger spinimpulsmoment, omdat de gemiddelde waarde van de spinvector met zijn drie reële onafhankelijke parameters hier niet voldoende is om de polarisatie van deze deeltjes aan te geven. Zo wordt de polarisatie van niet-relativistische spin 1 deeltjes bepaald door een vectorpolarisatie en een z.g. tensorpolarisatie, die tezamen acht reële onafhankelijke parameters vormen. De acht parameters komen voor in de 3×3 dichtheidsmatrix, die de gemengde toestand van een systeem representeert, dat uit spin 1 deeltjes bestaat.

Wanneer twee systemen A en B met respectievelijk spinimpulsmomenten a en b en bijbehorende eigentoestanden $\{a_{m_a}\}$ en $\{b_{m_b}\}$ nog niet met elkaar in wisselwerking hebben gestaan, dan is de dichtheidsmatrix voor het gecombineerde systeem het directe (kronecker) product van de afzonderlijke dichtheidsmatrices. Dus:

$$\rho_{m_a m_b, n_a n_b} = \rho_{m_a n_a} \cdot \rho_{m_b n_b} \quad (10)$$

In het onderhavige geval mogen we de verstrooiing van het projectiel aan de targetkern voordat de reactie plaats gevonden heeft beschouwen als een gecombineerd systeem van twee niet wisselwerkende systemen met respectievelijke spinmomenten $\frac{1}{2}$ en 0. Aangezien ρ_{00} gelijk is aan één kunnen wij van (9) zeggen, dat het de dichtheidsmatrix van het gehele systeem voor de reactie voorstelt.

Tenslotte willen wij dit eerste gedeelte van het hoofdstuk besluiten met op te merken dat het diagonaalelement $\rho_{m, m}$ van de dichtheidsmatrix de waarschijnlijkheid aangeeft om de bundel protonen in de toestand $\phi_0(\vec{r}) \chi_{\frac{1}{2} m}$ aan te treffen.

De dichtheidsmatrix van het systeem na de reactie.

Vervolgens zoeken wij naar de dichtheidsmatrix van het systeem na de reactie, dat gevormd wordt door de residukernen en verstrooide protonen. Deze twee reactieproducten hebben nu wél met elkaar in wisselwerking gestaan.

Het tweede gedeelte van (V-4) beschreef ons de verstrooiing nadat de reactie plaats gevonden had. Dit gedeelte ziet er voor het ν de proton als volgt uit:

$$\sum_{M m_2} \left\{ \sum_{m_1} f_{0m_1 \rightarrow mm_2}(\vec{k}, \vec{q}) \cdot C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} \right\} \phi_{2M}(\vec{r}) \xi_{\frac{1}{2} m_2}(\vec{q}) \frac{e^{i \vec{q}_f \cdot \vec{r}}}{r} \quad (11)$$

In deze uitdrukking speelt de coëfficiënt $\sum_{m_1} f_{0m_1 \rightarrow mm_2}(\vec{k}, \vec{q}) \cdot C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)}$ dezelfde rol als $C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)}$ in de uitdrukking (1). Analoog aan (5) kunnen we dan de dichtheidsmatrix voor het totale systeem na de reactie als volgt noteren:

$$\begin{aligned} \rho'_{M m_2, N n_2} &= \frac{1}{N'} \sum_{\nu=1}^{N'} \left\{ \sum_{m_1} f_{0m_1 \rightarrow mm_2}(\vec{k}, \vec{q}) \cdot C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} \right\} \left\{ \sum_{n_1} f_{0n_1 \rightarrow Nn_2}(\vec{k}, \vec{q}) \cdot C_{\frac{1}{2} n_1}^{(\nu)} \right\}^* \\ &= \sum_{m_1, n_1} f_{0m_1 \rightarrow mm_2}(\vec{k}, \vec{q}) \cdot \frac{1}{N'} \sum_{\nu=1}^{N'} C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} C_{\frac{1}{2} n_1}^{(\nu)*} f_{0n_1 \rightarrow Nn_2}(\vec{k}, \vec{q})^* \\ &= \sum_{m_1, n_1} f_{0m_1 \rightarrow mm_2}(\vec{k}, \vec{q}) \cdot \rho_{m_1, n_1} \cdot f_{0n_1 \rightarrow Nn_2}(\vec{k}, \vec{q}) \quad (12) \end{aligned}$$

De index in ρ' geeft aan dat de dichtheidsmatrix nog niet genormaliseerd is. In deze uitdrukking vormt ρ_{m_1, n_1} een element van de dichtheidsmatrix ρ_i van het systeem vóór de reactie. Als wij de verstrooiingsamplitude $f_{0m_1 \rightarrow mm_2}(\vec{k}, \vec{q})$ overeen laten komen met het matrixelement $F_{M m_2, 0 m_1}$, dan kunnen wij (12) in matrixnotatie als volgt weergeven:

$$\rho_f' = F \rho_i F^\dagger$$

Voor ons verstrooiingsproces worden de matrices F en F^\dagger respectievelijk gegeven door de figuren V-1 en V-2, terwijl ρ_i overeenkomt met (9). Berekening van ρ_f' hiermee geeft als resultaat een 10×10 matrix, die door figuur VI-1 op pagina 71 weergegeven wordt.

Uitdrukking (6) laat zien, dat we m.b.v. de dichtheidsmatrix de verwachtingswaarde van een operator kunnen bepalen mits het spoor van de matrix 1 is. (Deze eis is een gevolg van het feit, dat de verwachtings-

waarde van de eenheidsoperator altijd 1 is). Daarom wordt de dichtheidsmatrix van het totale systeem na de reactie als volgt genormeerd:

$$\rho_f = \frac{\rho_f'}{S_P \rho_f'} \quad (13)$$

De differentiële werkzame doorsnede van het verstrooiingsproces vinden we door eerst de differentiële werkzame doorsnede voor verstrooiing van het ν^{de} proton te noteren. Deze wordt naar analogie van (III-17) gegeven door

$$\sigma_{0 \rightarrow 2}^{(\nu)}(\vec{R}, \vec{Q}) = \frac{R_P}{R_i} \sum_{M m_2} \left| \sum_{m_1} f_{0 m_1 \rightarrow m m_2}(\vec{R}, \vec{Q}) \cdot C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} \right|^2$$

De differentiële werkzame doorsnede voor de gehele bundel protonen wordt ook hier verkregen door de verschillende $\sigma_{0 \rightarrow 2}^{(\nu)}(\vec{R}, \vec{Q})$ te middelen:

$$\begin{aligned} \sigma_{0 \rightarrow 2}(\vec{R}, \vec{Q}) &= \frac{1}{N'} \sum_{\nu=1}^{N'} \sigma_{0 \rightarrow 2}^{(\nu)}(\vec{R}, \vec{Q}) = \frac{1}{N'} \sum_{\nu=1}^{N'} \frac{R_P}{R_i} \sum_{M m_2} \left| \sum_{m_1} f_{0 m_1 \rightarrow m m_2}(\vec{R}, \vec{Q}) \cdot C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} \right|^2 \\ &= \frac{R_P}{R_i} \sum_{M m_2} \left[\sum_{m_1, n_1} f_{0 m_1 \rightarrow m m_2}(\vec{R}, \vec{Q}) \cdot \frac{1}{N'} \sum_{\nu=1}^{N'} C_{\frac{1}{2} m_1}^{(\nu)} C_{\frac{1}{2} n_1}^{(\nu)*} \cdot f_{0 n_1 \rightarrow m m_2}(\vec{R}, \vec{Q})^* \right] \\ &= \frac{R_P}{R_i} \sum_{M m_2} \rho'_{M m_2, M m_2} = \frac{R_P}{R_i} S_P \rho_f' = \frac{R_P}{R_i} S_P (F \rho_i F^\dagger) \quad (14) \end{aligned}$$

In het voorgaande hebben we gezien dat ρ_f de dichtheidsmatrix is van het systeem, dat bestaat uit de residukernen en verstrooide protonen. De residukern en het verstrooide proton hebben op elkaar ingewerkt. Dit heeft tot gevolg dat ρ_f niet eenvoudigweg het directe product is van de dichtheidsmatrices, die behoren bij de residukernen en de verstrooide protonen. In het eerstkomende hoofdstuk van dit verslag hebben we evenwel alleen de dichtheidsmatrix nodig, die de gemengde toestand van het systeem representeert, dat bestaat uit residukernen. Deze zullen we thans afleiden uit de dichtheidsmatrix ρ_f .

Het matrixelement $\rho_{M(N), N m_2}$ wordt aangeduid m.b.v. indices $M(N)$ en $m_2(n_2)$ die corresponderen met de eigentoestanden $\phi_{2M}(\vec{r}_1)$ ($\phi_{2N}(\vec{r}_2)$) en $\psi_{\frac{1}{2} m_2}(\vec{r}_1)$ ($\psi_{\frac{1}{2} n_2}(\vec{r}_2)$) van respectievelijk de residukern en het verstrooide proton. Een operator Q_P , die alleen in het systeem van residukernen werkzaam is, mag als een operator van het totale systeem beschouwd worden mits hij vermenigvuldigd wordt met de eenheidsoperator 1 van het systeem van ver-

strooide protonen. In matrixtaal is dit het directe product van de matrix, die de operator m.b.v. de basis $\phi_{2M}^{(F_i)}$ in het residukernensysteem representeert en de eenheidsmatrix, die de eenheidsoperator m.b.v. de basis $\{\tilde{q}_i\}_{m_2}$ in het verstrooide protonensysteem representeert. In ons geval wordt dit dus het directe product van een 5x5 matrix met de 2x2 eenheidsmatrix. De verwachtingswaarde van de operator Q_R in het totale systeem is dan volgens (6):

$$\begin{aligned}
 \langle Q_R \rangle &= S_P(\rho_P Q_R) = S_P\{\rho_P(Q_R \cdot 1)\} \\
 &= \sum_{MN} \sum_{m_2 n_2} \rho_{M m_2, N n_2} Q_{NM} \cdot \delta_{n_2 m_2} \\
 &= \sum_{MN} \sum_{m_2} \rho_{M m_2, N m_2} Q_{NM} = \sum_{MN} \rho_{MN}^{(R)} Q_{NM} \equiv S_P(\rho^{(R)} Q_R) \quad (15)
 \end{aligned}$$

waarin dus het element $\rho_{MN}^{(R)}$ van de dichtheidsmatrix $\rho^{(R)}$ gegeven wordt door:

$$\rho_{MN}^{(R)} = \sum_{m_2} \rho_{M m_2, N m_2} \quad (16)$$

De dichtheidsmatrix $\rho^{(R)}$ representeert de gemengde toestand van het systeem, dat bestaat uit de residukernen. Deze matrix wordt door figuur VI-2 op pagina 72 weergegeven. Het aantal residukernen bedraagt N' , omdat elk verstrooid proton slechts één kern aangeslagen heeft.

In de vorige alinea hebben wij de eenheidsoperator van het systeem gekozen, dat bestaat uit de verstrooide protonen. Hiermee geven wij te kennen, dat de polarisatie van de verstrooide protonen niet gemeten wordt. Wordt deze polarisatie daarentegen wél gemeten, dan hadden wij een andere dichtheidsmatrix gekregen.

De mogelijkheid om de protonpolarisatie in coincidentie met de γ -quanten te meten kunnen we gevoeglijk buiten beschouwing laten. Hiervoor zouden namelijk de verstrooide protonen een tweede verstrooiing moeten ondergaan. Daar het meten van p' - γ hoekcorrelaties voor 1x verstrooide protonen reeds zeer lange meettijden vereist, zal het bepalen van p' - γ hoekcorrelaties voor 2x verstrooide protonen praktisch uitgesloten zijn. Dit heeft ons tot de bovenstaande keuze van de eenheidsoperator bewogen.

De differentiële werkzame doorsnede van de verstrooide spin 1 deeltjes.

De differentiële werkzame doorsnede van de verstrooide protonen wordt ons door (14) gegeven:

$$\sigma_{o \rightarrow 2}(\vec{k}, \vec{k}_f) = \frac{e_f}{E_i} S_p (F \rho_i F^\dagger) \quad (14)$$

Aan de hand van figuur VI-1 op pagina 71 kunnen we deze uitdrukking noteren. Dit kunnen we echter ook doen aan de hand van figuur VI-2 op pagina 72 (De sporen van beide matrices komen namelijk met elkaar overeen). Doen we dit laatste, dan voeren we de volgende vereenvoudigende notatie in voor de diagonaalelementen van deze matrix:

$$1 \left(\int_{0+\frac{1}{2}, +2+\frac{1}{2}} (\vec{k}, \vec{k}_f) \int_{0+\frac{1}{2}, +2+\frac{1}{2}}^* (\vec{k}, \vec{k}_f) + \int_{0-\frac{1}{2}, +1-\frac{1}{2}} (\vec{k}, \vec{k}_f) \int_{0-\frac{1}{2}, +1-\frac{1}{2}}^* (\vec{k}, \vec{k}_f) \right) \equiv 1 \cdot A_1; \quad 1 \left(\int_{0-\frac{1}{2}, +1+\frac{1}{2}} (\vec{k}, \vec{k}_f) \int_{0-\frac{1}{2}, +1+\frac{1}{2}}^* (\vec{k}, \vec{k}_f) + \int_{0+\frac{1}{2}, +1-\frac{1}{2}} (\vec{k}, \vec{k}_f) \int_{0+\frac{1}{2}, +1-\frac{1}{2}}^* (\vec{k}, \vec{k}_f) \right) \equiv 1 \cdot A_4 \quad (17)$$

De overige diagonaalelementen, waar de "random" factor 1 voorstaat, geven we respectievelijk aan met: $1 \cdot A_6$; $1 \cdot A_8$ en $1 \cdot A_9$. De diagonaalelementen waar de component P_z van de polarisatievector voorstaat geven we op dezelfde wijze aan met resp. $P_z \cdot E_1$; $P_z \cdot E_4$; $P_z \cdot E_6$; $P_z \cdot E_8$ en $P_z \cdot E_9$. Deze onsystematische becijfering van de diagonaalelementen houdt verband met de systematische becijfering van de vereenvoudigende notaties, die wij m.b.t. de hoekcorrelatiefunctie in het volgende hoofdstuk (zie VII-19) voor alle matrixelementen van $\rho^{(R)}$ invoeren.

M.b.v. de bovenstaande notaties krijgt de differentiële werkzame doorsnede van de verstrooide protonen de volgende vorm:

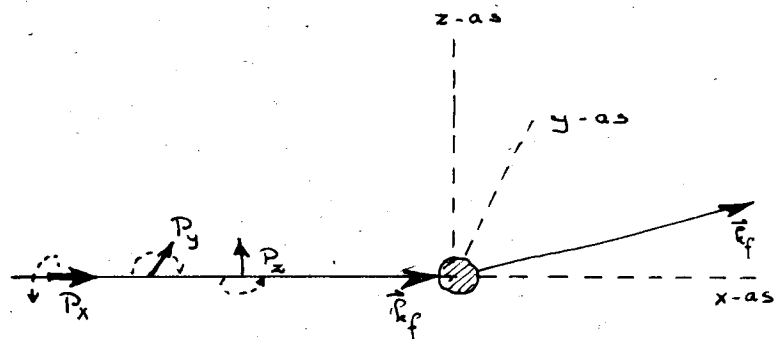
$$\sigma_{o \rightarrow 2}(\vec{k}, \vec{k}_f) = \frac{e_f}{E_i} \left[1 \left\{ (A_1 + A_9) + (A_4 + A_8) + A_6 \right\} + \right. \quad (18-a)$$

$$\left. P_z \left\{ (E_1 + E_9) + (E_4 + E_8) + E_6 \right\} \right] \quad (18-b)$$

Aan de hand van de bovenstaande uitdrukking kunnen wij de volgende conclusies trekken:

a) De differentiële werkzame doorsnede is onafhankelijk van de longitudinale component P_z van de polarisatievector.

b) De differentiële werkzame doorsnede is onafhankelijk van de transversale component P_{\perp} van de polarisatievector in het reactievlak.



Wij kunnen deze conclusies verifiëren m.b.v. symmetriebeschouwingen, gelijksoortig aan die, welke in hoofdstuk VIII m.b.t. de hoekcorrelatiefunctie gehouden worden.

Referenties:

- 1) D.M. Brink en G.R. Satchler: Angular Momentum.
- 2) U. Fano: Reviews of Modern Physics 29 (1957) 74.

VII Deëxcitatie van het 2^+ niveau. De p - γ hoekcorrelatiefunctie.

Het verstrooide proton laat de residukern in het 2^+ niveau achter, m.a.w. de kern is een spin 2 deeltje geworden. De procedure zoals die in de voorgaande twee hoofdstukken gevolgd is voor een verzameling spin $\frac{1}{2}$ deeltjes, kan ook gevolgd worden voor een verzameling spin 2 deeltjes. Daarom bekijken we eerst weer de toestand van het ν^{dc} residukerdeeltje om vervolgens opnieuw tot een middeling over alle N^0 aangeslagen kernen over te gaan, teneinde over waarneembare grootheden te beschikken.

Wij zullen in dit hoofdstuk de beschrijving geven met toestandsvectoren en niet met golffuncties, zoals in de voorgaande hoofdstukken gedaan werd. Dit blijkt namelijk handiger te zijn.

De toestand van het residukerdeeltje ν wordt gerepresenteerd door de toestandsvector $| \nu \rangle$. Evenzo wordt het $2M$ niveau gerepresenteerd door de toestandsvector $| 2M \rangle$. Wellicht is het verhelderend hier op te merken, dat de eigenfunctie $\Phi_{2M}(\vec{r}_i)$ met interne coördinaten \vec{r}_i overeenkomt met het inwendig product $\langle \vec{r}_i | 2M \rangle$ van de vectoren $| \vec{r}_i \rangle$ en $| 2M \rangle$. De toestandsvector van het aangeslagen residukerdeeltje ontbinden we als volgt:

$$| \nu \rangle = \sum_M | 2M \rangle \langle 2M | \nu \rangle \equiv \sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} | 2M \rangle \quad (1)$$

Voor elk residukerdeeltje houden we de volgende normeringsvoorwaarde aan:

$$\sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} \alpha_{2M}^{(\nu)*} = 1 \quad (1-a)$$

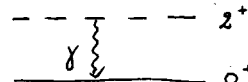
Het aangeslagen $2M$ niveau zal weer naar het grondniveau terugvallen, waarbij elektromagnetische straling van één bepaalde energie uitgezonden wordt.

Het elektromagnetische veld van straling (γ -straling) met een zekere energie, dat een totaal impulsmoment $\vec{j} = \vec{L}_s + \vec{S}_s$ bevat, waarvan de component op de z-as M_s bedraagt (\vec{L}_s is het baanimpulsmoment en \vec{S}_s is de intrinsieke spin van de straling), wordt gegeven door de vectorpotentialiaal $\vec{A}_{L_s M_s}^{E,H}(r, \theta, \varphi)$. Hierin stellen r, θ en φ de sferische coördinaten voor, terwijl k de grootte is van de golfvector. Deze vectorpotentialiaal blijkt een gemeenschappelijke eigenfunctie te zijn van de operatoren \vec{j}^2 en j_z met resp. $L_s(L_s+1)$ en M_s als eigenwaarden. (zie S.A. Moszkowski in alpha-, beta- and gamma-ray spectroscopy deel II uitgegeven door K. Siegbahn). De vectorpotentialiaal $\vec{A}_{L_s M_s}^E(r, \theta, \varphi)$ geeft elektrische 2^{L_s} poolstraling weer, terwijl $\vec{A}_{L_s M_s}^H(r, \theta, \varphi)$ dat doet voor magnetische 2^{L_s} poolstraling.

Daar voor een systeem van kern en γ -stralen de behoudswetten van impulsmoment en pariteit van kracht zijn, kan er slechts elektrische of magnetische straling met zeer bepaalde multipolariteiten optreden bij een overgang van een energieniveau met impulsmoment J_i en pariteit π_i naar een energieniveau met impulsmoment J_f en pariteit π_f . De energie van de straling komt overeen met het energieverval tussen beide niveaus. Bij deze overgang gelden voor de straling de volgende selectieregels:

- a) $|J_i - J_f| \leq L \leq J_i + J_f$
 b) als $\pi_i \pi_f = (-)^L$, dan hebben we te doen met elektrische 2^L straling (2)
 als $\pi_i \pi_f = (-)^{L-1}$, dan hebben we te doen met magnetische 2^L straling

Zo is de electromagnetische straling, die in ons verstrooiingsproces optreedt, met $L=2$ en $\pi = +$ elektrische quadrupool straling, die klassiek correspondeert met de straling van een vibrerende quadrupool.



Aan de hand van het voorgaande kunnen we zeggen, dat de toestanden van een γ -quant beschreven kunnen worden door de energie, door het kwadraat van het totale impulsmoment J^2 , door de z-component van het totale impulsmoment J_z en door de pariteit π . Daarvandaan kan een toestand van een γ -quant gerepresenteerd worden door de toestandsvector $|R L_s M_s \pi\rangle$. Hiermee hebben we de toestand van het γ -quant weergegeven in de z.g. "impulsmoment of sferische representatie". Wij zijn van deze representatie uitgegaan, omdat zij de gegevens van de niveauovergang in de kern in zich draagt.

De overgang van de toestand van de kern voor de deëxcitatie naar de toestand van kern en uitgezonden γ -quant na de deëxcitatie geven we als volgt aan:

$$\sum_M \alpha_{2M}^{(v)} |2M\rangle \implies \sum_M \alpha_{2M}^{(v)} |00\rangle |R 2M+\rangle \quad (3)$$

Hierin representeert de toestandsvector $|00\rangle |R 2M+\rangle$ de toestand van het gecombineerde systeem, dat bestaat uit de kern in de grondtoestand en het uitgezonden γ -quant. Bij deze overgang hebben we gebruik gemaakt van de genoemde behoudswetten.

In de volgende pagina's zullen we onze aandacht vooral vestigen op de vorm van de toestandsvector, die de toestand van het uitgezonden γ -quant representeert.

Deze toestand wordt in (3) met de toestandsvector $|R 2M+\rangle$ in de impulsmoment-representatie weergegeven. Aangezien van het γ -quant in feite niet het impulsmoment of de pariteit gemeten wordt, maar de energie, impuls en eventueel de polarisatie, is het nuttig om over te gaan van de impuls-

moment-representatie naar de z.g. "impuls- of vlakke golf-representatie". Het γ -quant wordt in deze vlakke golf-representatie beschreven door de toestandsvector $|\vec{k}\sigma\rangle$ met de quantumgetallen \vec{k} en σ . Hierin stelt \vec{k} de golfvector van het γ -quant voor. (\vec{k}_p was de golfvector van het verstrooide proton!). De polarisatie σ is hier de component van het intrinsieke impulsmoment (spin) van het γ -quant in de voortplantingsrichting \vec{k} . Deze component van de spin wordt ook wel de helichiteit genoemd. De quantum-elektrodynamica leert, dat het baanimpulsmoment van het γ -quant langs de voortplantingsrichting gelijk is aan nul en dat de helichiteit van het γ -quant (d.i. een spin 1 deeltje) de waarden +1 en -1 kan aannemen. De $\sigma=0$ component ontbreekt hier. Het totale impulsmoment van het γ -quant langs de voortplantingsrichting kan dus alleen de waarden +1 of -1 aannemen.

De overgang van de impulsmoment-representatie naar de vlakke golf-representatie wordt gegeven door

$$|k 2M+\rangle = \sum_{\sigma} \int |\vec{k}\sigma\rangle \langle \vec{k}\sigma | k 2M+\rangle d\Omega_{\vec{k}} \quad (4)$$

Hierin stelt $d\Omega_{\vec{k}}$ het infinitesimaal ruimtehoek-elementje voor, dat behoort bij één bepaalde grootte van de golfvector \vec{k} .

De vlakke golf-representatie bedient zich van een kwantisatie-as z' , die samenvalt met de voortplantingsrichting van het γ -quant. (Fig.VII-1). In figuur VII-1 hebben we de kwantisatie-as z , volgens de Baselconventie, evenwijdig gekozen aan $\vec{k}_i \times \vec{k}_f$. De hoek φ_p is de verstrooiingshoek voor de verstrooide protonen, terwijl de hoeken φ , θ en ψ de z.g. Eulerhoeken zijn, die nog ter sprake zullen komen. De hoeken φ_γ en θ_γ voor de γ -stralen vallen samen met de Eulerhoeken φ en θ .

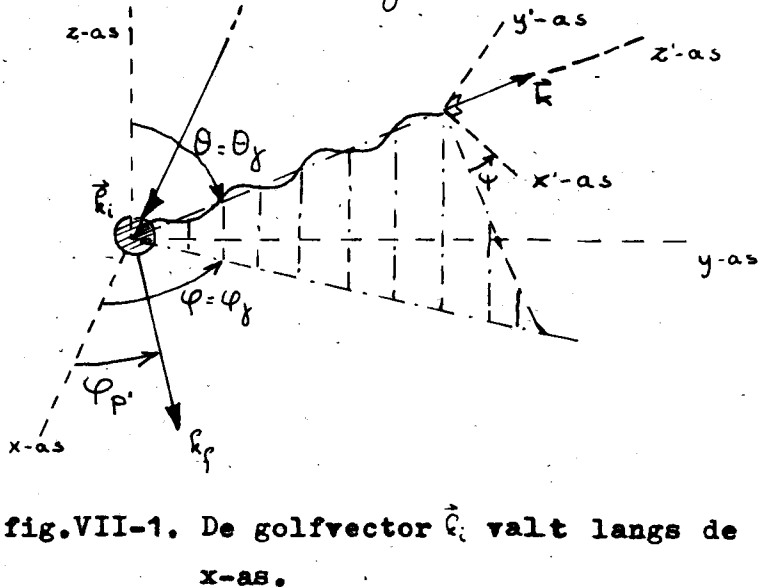


fig.VII-1. De golfvector \vec{k} valt langs de x -as.

In (4) komt de transformatie-coëfficiënt $\langle \vec{k}\sigma | k 2M+\rangle$ voor. Het quantumgetal M hierin is betrokken op de kwantisatie-as z . Deze transformatie-coëfficiënt kan als volgt omschreven worden:

$$\langle \vec{k}\sigma | k 2M+\rangle = \sum_{\mu} \langle \vec{k}\sigma | k 2\mu+\rangle D_{\mu M}^{(2)}(z' \rightarrow z) \quad (5)$$

In deze uitdrukking is μ de component van het totale impulsmoment van het γ -quant langs de z' -as. Voor (5) kunnen we ook noteren:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} \sigma | R 2\mu + \rangle &= \sum_{\mu} \langle \vec{k} \sigma | R 2\mu + \rangle D_{m\mu}^{(2)*} (z \rightarrow z') \\ &= \sum_{\mu} \langle \vec{k} \sigma | R 2\mu + \rangle D_{m\mu}^{(2)*} (\varphi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (6)$$

Hierin correspondeert de functie $D_{m\mu}^{(2)*}(\varphi, \theta, \psi)$ met de totale rotatie $z \rightarrow z'$, die trapsgewijs uitgevoerd wordt: Eerst een rotatie over een hoek φ om de z -as, vervolgens een rotatie over een hoek θ om de y -as en tenslotte een rotatie over een hoek ψ opnieuw om de z -as (zie fig. VII-1). Aangezien de hoeken φ en θ overeenkomen met de hoeken φ_{γ} en θ_{γ} kunnen we voor (4) m.b.v. (6) het volgende schrijven.

$$|R 2\mu + \rangle = \sum_{\sigma} \sum_{\mu} \int |\vec{k} \sigma \rangle \langle \vec{k} \sigma | R 2\mu + \rangle D_{m\mu}^{(2)*}(\varphi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, \psi) d\Omega_{\vec{k}} \quad (7)$$

In de transformatie-coëfficiënt $\langle \vec{k} \sigma | R 2\mu + \rangle$ is σ de z' -component van het impulsmoment van het γ -quant in de vlakke golf-representatie, terwijl μ de z' -component van het impulsmoment van het γ -quant is in de impulsmoment-representatie. Deze coëfficiënt is slechts ongelijk aan nul als σ en μ met elkaar overeenstemmen, dus als μ gelijk is aan $+1$ of -1 . Daarvandaan krijgen we voor (7):

$$\begin{aligned} |R 2\mu + \rangle &= \int \left\{ |\vec{k} + 1 \rangle \langle \vec{k} + 1 | R 2 + 1 + \rangle D_{m, +1}^{(2)*}(\varphi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, \psi) + \right. \\ &\quad \left. |\vec{k} - 1 \rangle \langle \vec{k} - 1 | R 2 - 1 + \rangle D_{m, -1}^{(2)*}(\varphi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, \psi) \right\} d\Omega_{\vec{k}} \end{aligned} \quad (8)$$

In appendix B laten we zien dat de beide transformatie-coëfficiënten in (8) aan elkaar gelijk zijn. (In deze appendix gaan we o.a. uit van de conventie dat $\psi = 0$). Voor (8) schrijven we dan:

$$|R 2\mu + \rangle = \int \langle \vec{k} + 1 | R 2 + 1 + \rangle \left\{ D_{m, +1}^{(2)*}(\varphi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, 0) |\vec{k} + 1 \rangle + D_{m, -1}^{(2)*}(\varphi_{\gamma}, \theta_{\gamma}, 0) |\vec{k} - 1 \rangle \right\} d\Omega_{\vec{k}} \quad (9)$$

Hiermee hebben we de toestandsvector van het γ -quant in een door ons gewenste vorm gegoten.

De p' - γ hoekcorrelatiefunctie.

Met bovenstaande vorm van de toestandsvector van het uitgezonden γ -quant, wordt de toestand, die ontstaan is na de deëxcitatie van de aangeslagen

kern ν aan de hand van (3) gerepresenteerd door de volgende uitdrukking:

$$\sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} |00\rangle |R 2M+\rangle = \sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} \int \langle \bar{R}+1 | R 2+1+\rangle \left\{ \mathcal{D}_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) |00\rangle |\bar{R}-1+\rangle + \mathcal{D}_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) |00\rangle |\bar{R}-1-\rangle \right\} d\Omega_{\bar{R}} \\ = \langle 1 | \rangle \sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} \mathcal{D}_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) |00\rangle |\bar{R}+1+\rangle d\Omega_{\bar{R}} + \langle 1 | \rangle \sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} \mathcal{D}_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) |00\rangle |\bar{R}-1-\rangle d\Omega_{\bar{R}} \quad (10)$$

De waarschijnlijkheid, waarmee wij een γ -quant van één bepaalde energie, dat t.g.v. de deëxcitatie van het residukerndeeltje ν uitgezonden wordt aan zullen treffen in het infinitesimaal ruimtehoekelementje $d\Omega_{\bar{R}} \equiv \sin\theta_f d\theta_f d\varphi_f$ wordt m.b.v. (10) gegeven door:

$$W^{(\nu)}(\varphi_f, \theta_f) = \langle 1 | \rangle^2 \left| \sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} \mathcal{D}_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) \right|^2 + \langle 1 | \rangle^2 \left| \sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} \mathcal{D}_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) \right|^2 \quad (11)$$

of

$$W^{(\nu)}(\varphi_f, \theta_f) = \langle 1 | \rangle^2 \sum_{MN} \alpha_{2M}^{(\nu)} \alpha_{2N}^{(\nu)*} \left\{ \mathcal{D}_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) \mathcal{D}_{N,+1}^{(2)}(\varphi_f, \theta_f) + \mathcal{D}_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) \mathcal{D}_{N,-1}^{(2)}(\varphi_f, \theta_f) \right\} \quad (12)$$

Om dus een uitdrukking voor de kans op een γ -quant of voor de intensiteit van de γ -stralen te verkrijgen, worden de gekwadraterde coëfficiënten van de basisvectoren $|00\rangle |\bar{R}+1+\rangle$ en $|00\rangle |\bar{R}-1-\rangle$ incoherent opgeteld. Hetgeen we aan γ -intensiteit meten wordt m.a.w. gevormd door de gesuperponeerde intensiteiten van de rechts ($G=+1$) respectievelijk links ($G=-1$) circulair gepolariseerde γ -stralen.

De uitdrukking voor de intensiteit van de γ -stralen is nog niet genormeerd. Ten behoeve van deze normering bedenken we, dat we met de normeringsvoorwaarde (1-a)

$$\sum_M \alpha_{2M}^{(\nu)} \alpha_{2M}^{(\nu)*} = 1$$

aangeven, dat we bij waarneming van een verstrooid proton, met zekerheid weten dat het residukerndeeltje ν aangeslagen is. En dus dat de kans op een γ -quant van één bepaalde energie in de ruimte gelijk is aan één. Dus:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} W^{(\nu)}(\varphi_f, \theta_f) \sin\theta_f d\theta_f d\varphi_f = 1 \quad (13)$$

Met deze uitdrukking kunnen we de transformatie-coëfficiënt $\langle \bar{R}+1 | R 2+1+\rangle$ in (12) bepalen:

$$\langle 1 | \rangle^2 \sum_{MN} \alpha_{2M}^{(\nu)} \alpha_{2N}^{(\nu)*} \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{D}_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) \mathcal{D}_{N,+1}^{(2)}(\varphi_f, \theta_f) \sin\theta_f d\theta_f d\varphi_f + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{D}_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_f, \theta_f) \mathcal{D}_{N,-1}^{(2)}(\varphi_f, \theta_f) \sin\theta_f d\theta_f d\varphi_f \right\} = 1$$

Door de orthonormaliteit van de D-functies gaat dit over in:

$$\langle 1 \rangle^2 \sum_{MN} \alpha_{2M}^{(v)} \alpha_{2N}^{(v)*} \left\{ \frac{4\pi}{2 \cdot 2 + 1} \delta_{M,N} + \frac{4\pi}{2 \cdot 2 + 1} \delta_{M,N} \right\} = 1$$

en dus

$$\langle 1 \rangle^2 \frac{8\pi}{5} \sum_M \alpha_{2M}^{(v)} \alpha_{2M}^{(v)*} = 1$$

M.b.v. de normeringsvoorwaarde (1-a) volgt hieruit, dat de waarde van de transformatie-coëfficiënt $\langle \vec{k}+1 | k 2+1+ \rangle$ gelijk is aan $\sqrt{\frac{5}{8\pi}}$ (14)

De gemiddelde kans op een γ -quant van één bepaalde energie in een ruimtehoekelementje $d\Omega$, na deëxcitatie van het systeem van N' residukerndeeltjes, wordt volgens de procedure, die we ook reeds bij de dichtheidsmatrix gevolgd hebben m.b.v. (12), gegeven door:

$$\begin{aligned} W(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) &= \frac{1}{N'} \sum_{\nu=1}^{N'} W^{(\nu)}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) \\ &= \frac{5}{8\pi} \sum_{MN} \frac{1}{N'} \sum_{\nu=1}^{N'} \alpha_{2M}^{(\nu)} \alpha_{2N}^{(\nu)*} \left\{ D_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) D_{N,+1}^{(2)}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) + D_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) D_{N,-1}^{(2)}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Tot nu toe sloeg de deëxcitatie van de aangeslagen kern op situaties, waarbij de vorming van de aangeslagen kern niet ter sprake kwam.

Vervolgens bekijken we een situatie, waarbij de vorming van de aangeslagen kern wel ter sprake komt en speciaal die, waarbij deze vorming geschiedt door inelastische verstrooiing van een proton in een zekere richting. Voor deze situatie schrijven we i.p.v. (15) de volgende uitdrukking:

$$W(\vec{k}, \vec{q}; \varphi_\gamma, \theta_\gamma) = \frac{5}{8\pi} \sum_{MN} \rho_{MN}(\vec{k}, \vec{q}) \left\{ D_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) D_{N,+1}^{(2)}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) + D_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) D_{N,-1}^{(2)}(\varphi_\gamma, \theta_\gamma) \right\} \quad (16)$$

Hierin is $\rho_{MN}(\vec{k}, \vec{q})$ het matrixelement van de dichtheidsmatrix, die de onzuivere toestand van het systeem representeert, dat bestaat uit de N' (door de verstrooide protonen) aangeslagen residukerndeeltjes. Dit element komt overeen met het genormaliseerde matrixelement van de dichtheidsmatrix $\rho^{(R)}$ uit VI-15. Dus:

$$\rho_{MN}(\vec{k}, \vec{q}) = \frac{\rho_{MN}^*(\vec{k}, \vec{q})}{S_p \rho_f} = \frac{r_p}{r_i} \frac{\rho_{MN}^*(\vec{k}, \vec{q})}{\rho_{0 \rightarrow 2}(\vec{k}, \vec{q})} \quad (17)$$

Hierin stemt $\rho_{MN}^*(\vec{k}, \vec{q})$ overeen met het matrixelement (M,N) uit figuur VI-2 op pagina 72, terwijl $S_p \rho_f$ het spoor van deze matrix is. $\rho_{0 \rightarrow 2}(\vec{k}, \vec{q})$ is de differentiële werkzame doorsnede van de verstrooide protonen. M.b.v. (17)

gaat (16) over in:

$$W(\vec{r}_i, \vec{r}_j; \theta, \varphi) = \frac{5k_F}{8\pi k_i} \frac{1}{\int_{0 \rightarrow 2}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)} \sum_{MN} O'_{MN}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \left\{ D_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_i, \theta_i) D_{N,+1}^{(2)}(\varphi_j, \theta_j) + D_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_i, \theta_i) D_{N,-1}^{(2)}(\varphi_j, \theta_j) \right\} \quad (18)$$

Deze uitdrukking wordt de p' - j hoekcorrelatiefunctie genoemd.

De verschillende termen $O'_{MN}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \left\{ D_{M,+1}^{(2)*}(\varphi_i, \theta_i) D_{N,+1}^{(2)}(\varphi_j, \theta_j) + D_{M,-1}^{(2)*}(\varphi_i, \theta_i) D_{N,-1}^{(2)}(\varphi_j, \theta_j) \right\}$ uit deze som zijn in figuur VII-1 op pagina 73 weergegeven. Alvorens over deze termen te sommeren voeren wij de volgende vereenvoudigende notaties in:

$$\begin{aligned} 1 \left(+ \int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \int_{0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) &\equiv 1 \cdot A_1 ; \\ 1 \left(+ \int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \int_{0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0-\frac{1}{2}, 0-\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) &\equiv 1 \cdot A_2 e^{+i\alpha_2} ; \text{ enz.} \\ P_x \left(+ \int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \int_{0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) &\equiv P_x \cdot B_1 e^{+i\beta_1} ; \\ P_x \left(+ \int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \int_{0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0+\frac{1}{2}, -1-\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) &\equiv P_x \cdot B_2 e^{+i\beta_2} ; \text{ enz.} \\ i P_y \left(- \int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \int_{0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) &\equiv P_y \cdot D_1 e^{+i\delta_1} ; \text{ enz.} \\ P_z \left(+ \int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) - \int_{0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \int_{0-\frac{1}{2}, 0-\frac{1}{2}}^*(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) &\equiv P_z \cdot F_2 e^{+i\epsilon_2} ; \text{ enz.} \end{aligned} \quad (19)$$

Welke volgorde we bij de bovenstaande becijfering van de notaties aangehouden hebben, is aan de hand van figuur VII-1 uit onderstaande uitdrukking op te maken. M.b.v. deze notaties ziet de p' - j hoekcorrelatiefunctie er als volgt uit:

$$W(\vec{r}_i, \vec{r}_j; \theta_j, \varphi_j) = \frac{5k_F}{8\pi k_i} \frac{1}{\int_{0 \rightarrow 2}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)} \times$$

$$1 \left[+\frac{1}{2} \{A_1 + A_3\} \{1 - \cos^4 \theta_j\} - \sqrt{6} \{A_2 \cos(2\varphi_j + \alpha_2) + A_7 \cos(2\varphi_j + \alpha_7)\} \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_j + \right.$$

$$- A_3 \cos(4\varphi_j + \alpha_3) \sin^2 \theta_j \{1 - \cos^2 \theta_j\} + \frac{1}{2} \{A_4 + A_8\} \{4 \cos^4 \theta_j - 3 \cos^2 \theta_j + 1\} +$$

$$\left. - A_5 \cos(2\varphi_j + \alpha_5) \{4 \cos^4 \theta_j - 5 \cos^2 \theta_j + 1\} + 3 A_6 \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_j \right] + \quad (20-a)$$

$$\begin{aligned}
& + P_x \left[-2 \{ B_1 \cos(\varphi_j + \beta_1) - B_6 \cos(\varphi_j + \beta_6) \} \sin \theta_j \cos^3 \theta_j + \right. \\
& \quad - 2 \{ B_2 \cos(3\varphi_j + \beta_2) - B_4 \cos(3\varphi_j + \beta_4) \} \sin \theta_j \cos \theta_j \{ 1 - \cos^2 \theta_j \} + \\
& \quad \left. - \sqrt{6} \{ B_3 \cos(\varphi_j + \beta_3) - B_5 \cos(\varphi_j + \beta_5) \} \sin \theta_j \cos \theta_j \{ 1 - 2 \cos^2 \theta_j \} \right] + \quad (20-b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_y \left[-2 \{ D_1 \cos(\varphi_j + \delta_1) - D_6 \cos(\varphi_j + \delta_6) \} \sin \theta_j \cos^3 \theta_j + \right. \\
& \quad - 2 \{ D_2 \cos(3\varphi_j + \delta_2) - D_4 \cos(3\varphi_j + \delta_4) \} \sin \theta_j \cos \theta_j \{ 1 - \cos^2 \theta_j \} + \\
& \quad \left. - \sqrt{6} \{ D_3 \cos(\varphi_j + \delta_3) - D_5 \cos(\varphi_j + \delta_5) \} \sin \theta_j \cos \theta_j \{ 1 - 2 \cos^2 \theta_j \} \right] + \quad (20-d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_z \left[+ \frac{1}{2} \{ E_1 + E_9 \} \{ 1 - \cos^4 \theta_j \} - \sqrt{6} \{ E_2 \cos(2\varphi_j + \epsilon_2) + E_7 \cos(2\varphi_j + \epsilon_7) \} \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_j + \right. \\
& \quad - E_3 \cos(4\varphi_j + \epsilon_3) \sin^2 \theta_j \{ 1 - \cos^2 \theta_j \} + \frac{1}{2} \{ E_4 + E_8 \} \{ 4 \cos^4 \theta_j - 3 \cos^2 \theta_j + 1 \} + \\
& \quad \left. - E_5 \cos(2\varphi_j + \epsilon_5) \{ 4 \cos^4 \theta_j - 5 \cos^2 \theta_j + 1 \} + 3 E_6 \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_j \right] \quad (20-e)
\end{aligned}$$

Dit is dus een algemene uitdrukking voor de p' - γ hoekcorrelatiefunctie voor verstrooiing van gepolariseerde protonen aan even-even kernen, waarbij alleen de aanslag van het 2^+ niveau bekeken wordt.

Referenties:

- 1) S.A. Moszkowski in alpha-, beta- and gamma-ray spectroscopy, deel II.
- 2) D.M. Brink en G.R. Satchler: Angular Momentum.

VIII Bespreking van de p' - γ hoekcorrelatiefunctie.

A. De vorm van de p' - γ hoekcorrelatiefunctie.

a) In het reactievlak, d.w.z. $\Theta_\gamma = \frac{\pi}{2}$

In dit vlak krijgt de hoekcorrelatiefunctie, de z.g. reactievlak-correlatiefunctie, de volgende vorm:

$$W(\vec{k}_i, \vec{k}_\gamma; \frac{\pi}{2}, \varphi_\gamma) = \frac{5 R_F}{8\pi k_i \sum_{\sigma \rightarrow 2} (R_\sigma)} \times \left\{ \frac{1}{2}(A_1 + A_3) - A_3 \cos(4\varphi_\gamma + \alpha_3) + \frac{1}{2}(A_4 + A_8) - A_5 \cos(2\varphi_\gamma + \alpha_5) \right\} \quad (1a)$$

$$P_z \left\{ \frac{1}{2}(E_1 + E_3) - E_3 \cos(4\varphi_\gamma + \epsilon_3) + \frac{1}{2}(E_4 + E_8) - E_5 \cos(2\varphi_\gamma + \epsilon_5) \right\} \quad (1b)$$

Het P_x en P_{ij} gedeelte van de bundel spin $\frac{1}{2}$ deeltjes leveren dus geen bijdrage tot de reactievlak-correlatiefunctie. In deze correlatiefunctie karakteriseren de termen $(A_1 + A_3)$, $A_3 \cos(4\varphi_\gamma + \alpha_3)$ en $(E_1 + E_3)$, $E_3 \cos(4\varphi_\gamma + \epsilon_3)$ de onderhavige directe kernreactie, voor zover de protonspins niet van richting veranderen, terwijl de termen $(A_4 + A_8)$, $A_5 \cos(2\varphi_\gamma + \alpha_5)$ en $(E_4 + E_8)$, $E_5 \cos(2\varphi_\gamma + \epsilon_5)$ de z.g. spin-flip weergeven. Deze laatste termen zouden dus ontbreken als de interactie tussen kern en proton spin-onafhankelijk was.

We kunnen reeds aan de hand van eenvoudige symmetriebeschouwingen laten zien, dat de reactievlak-correlatiefunctie onafhankelijk is van het P_x en P_{ij} gedeelte in de bundel. Dit wordt in paragraaf B behandeld.

b) In een punt op de kwantisatie-as, d.w.z. $\Theta_\gamma = 0$

Voor een punt op de kwantisatie-as reduceert de hoekcorrelatiefunctie, die hier de z-as-correlatiefunctie genoemd wordt, tot de volgende vorm:

$$W(\vec{k}_i, \vec{k}_\gamma; 0, 0) = \frac{5 R_F}{8\pi k_i \sum_{\sigma \rightarrow 2} (R_\sigma)} \left\{ (A_4 + A_8) + P_z (E_4 + E_8) \right\} \quad (2)$$

Het P_x en P_{ij} gedeelte van de bundel levert dus opnieuw geen bijdrage. Ook dit is aan de hand van symmetriebeschouwingen eenvoudig in te zien (zie paragraaf B). Bovendien is opvallend, dat in deze uitdrukking alleen maar spin-flip termen voorkomen. De γ -intensiteit in de z-richting is dus uitsluitend ongelijk aan nul dankzij de spinafhankelijkheid van de proton-kern interactie. In paragraaf C zullen wij dit aspect van de reactie nader bekijken.

Vervolgens bekijken we figuur VII-1. We zien, dat de factoren 1 en P_z uitsluitend voor producten staan, die de volgende vorm hebben:

$$f_{0+\frac{1}{2},-}(\vec{k}, \vec{q}) \times f_{0+\frac{1}{2},-}^*(\vec{k}, \vec{q}) \quad \text{of} \quad f_{0-\frac{1}{2},-}(\vec{k}, \vec{q}) \times f_{0-\frac{1}{2},-}^*(\vec{k}, \vec{q})$$

De twee verstrooiingsamplituden hebben steeds gemeenschappelijke waarden voor m_1 en n_1 . In de hoekcorrelatiefunctie en in de differentiële werkzame doorsnede komen dus uitsluitend de relatieve fasen van dit soort verstrooiingsamplituden tot uiting.

We zien tevens, dat de factoren P_x en P_{ij} daarentegen alleen voor producten staan van de volgende vorm:

$$f_{0+\frac{1}{2},-}(\vec{k}, \vec{q}) \times f_{0-\frac{1}{2},-}^*(\vec{k}, \vec{q}) \quad \text{of} \quad f_{0-\frac{1}{2},-}(\vec{k}, \vec{q}) \times f_{0+\frac{1}{2},-}^*(\vec{k}, \vec{q})$$

De twee verstrooiingsamplituden hebben hier tegengestelde waarden voor m_1 en n_1 .

In paragraaf D zullen we het bovenstaande uitvoeriger bekijken.

B. Verificatie van het gedrag van hoekcorrelatiefunctie m.b.v. symmetrie-beschouwingen.

a) In het reactievlak.

In paragraaf A hebben we gezien, dat de reactievlak-correlatiefunctie reduceert tot een aantal termen die afkomstig zijn van het "random" en P_z gedeelte van de bundel spin $\frac{1}{2}$ deeltjes. Op grond van symmetrieoverwegingen kunnen we inzien dat deze correlatiefunctie geen bijdrage bevat van het P_x en P_{ij} gedeelte van de bundel. Wij merken daartoe op dat de hoekcorrelatiefunctie (VII-20) een lineaire functie is van de polarisatievector-componenten P_x , P_{ij} en P_z . Dus:

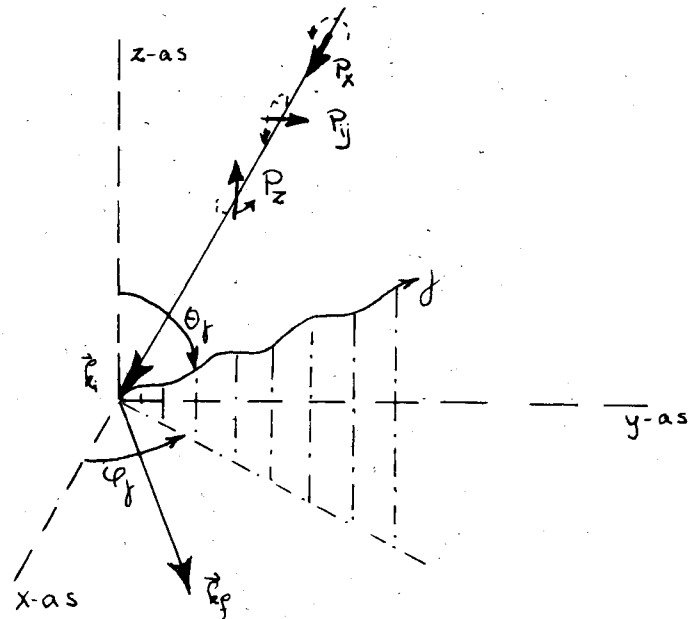


fig. VIII-1.

$$W(\vec{k}, \vec{q}; \theta_f, \varphi_f) \equiv W_1(\vec{k}, \vec{q}; \theta_f, \varphi_f) + P_x \cdot W_P(\vec{k}, \vec{q}; \theta_f, \varphi_f) + P_y \cdot W_{P_y}(\vec{k}, \vec{q}; \theta_f, \varphi_f) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{k}, \vec{q}; \theta_f, \varphi_f). \quad (3)$$

en

$$W(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) = W_1(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) + P_x \cdot W_{P_x}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) + P_y \cdot W_{P_y}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) \quad (4)$$

Reflecteren we de inkomende gepolariseerde bundel t.o.v. het x-ij vlak (zie fig. VIII-1), dan zal de functiewaarde van de hoekcorrelatiefunctie, die behoort bij de gereflecteerde inkomende bundel overeenkomen met de gereflecteerde functiewaarde van de hoekcorrelatiefunctie, die behoort bij de niet gereflecteerde inkomende bundel. Wij moeten ons bij deze reflectieoperatie wel realiseren, dat de polarisatievector een axiale vector is. Daarvandaan zullen P_x en P_{ij} van teken omkeren. Aldus krijgen we:

$$W(\vec{E}, \vec{E}; \pi - \theta_j, \varphi_1) = W_1(\vec{E}, \vec{E}; \pi - \theta_j, \varphi_1) + P_x \cdot W_{P_x}(\vec{E}, \vec{E}; \pi - \theta_j, \varphi_1) + P_y \cdot W_{P_y}(\vec{E}, \vec{E}; \pi - \theta_j, \varphi_1) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{E}, \vec{E}; \pi - \theta_j, \varphi_1) \quad (5)$$

$$= W_1(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1) + P_x \cdot W_{P_x}(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1) - P_y \cdot W_{P_y}(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1) \quad (6)$$

en voor $\theta_j = \frac{\pi}{2}$

$$W(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) = W_1(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) - P_x \cdot W_{P_x}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) - P_y \cdot W_{P_y}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1) \quad (7)$$

Vergelijken we de uitdrukkingen (4) en (7) met elkaar, dan moeten we tot de conclusie komen, dat de functies $W_{P_x}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1)$ en $W_{P_y}(\vec{E}, \vec{E}; \frac{\pi}{2}, \varphi_1)$ gelijk zijn aan nul en dus de bijdrage van P_x en P_{ij} tot de intensiteit van de γ -stralen in het reactievlak nihil. We kunnen ook tot deze conclusie komen door op te merken, dat uit (3) en (6) blijkt, dat de functies $W_1(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1)$ en $W_{P_z}(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1)$ t.o.v. het reactievlak symmetrisch zijn, terwijl de functies $W_{P_x}(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1)$ en $W_{P_y}(\vec{E}, \vec{E}; \theta_j, \varphi_1)$ antisymmetrisch t.o.v. dit vlak zijn en dus nul in het vlak zelf. Dit symmetrisch respectievelijk antisymmetrisch karakter van de functies W_1 , W_{P_z} en W_{P_x} , W_{P_y} wordt bevestigd door de algemene uitdrukking (VII-20) van de hoekcorrelatiefunctie.

b) Op de quantisatie-as z.

Aan de hand van de volgende beschouwing kunnen we inzien, dat de z-as-correlatiefunctie geen bijdrage ontvangt van het P_x en P_{ij} gedeelte van de bundel, zoals bleek uit (2). Als een overgang tussen twee discrete energieniveaus aanleiding geeft tot uitzending van een γ -quant, dan heeft dit γ -quant één bepaalde pariteit (In ons geval is deze pariteit even, maar dit is voor het volgende argument niet essentieel).

Dit heeft tot gevolg, dat de waarde van de intensiteit van de γ -stralen in twee diametraal t.o.v. de targetkern gelegen punten in de ruimte met elkaar overeen moeten stemmen. Dit geldt eveneens voor twee punten op de quantisatie-as. Daarvandaan:

$$W(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) = W(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0) \quad (8)$$

of naar analogie van (3)

$$W_1(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) + P_x \cdot W_{P_x}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) + P_y \cdot W_{P_y}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) \quad (8a)$$

$$= W_1(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0) + P_x \cdot W_{P_x}(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0) + P_y \cdot W_{P_y}(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0) \quad (8b)$$

Wanneer wij vervolgens van dezelfde redenering gebruik maken, die ook tot de uitdrukking (6) geleid heeft, dan kunnen wij $W(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0)$ de volgende vorm geven:

$$W(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0) = W_1(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) - P_x \cdot W_{P_x}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) - P_y \cdot W_{P_y}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0) + P_z \cdot W_{P_z}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0). \quad (9)$$

Deze uitdrukking moet overeenkomen met (8a). Dit kan alleen als de functies $W_{P_x}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0)$ en $W_{P_y}(\vec{r}_i, \vec{q}; 0, 0)$ gelijk aan nul zijn. Dit geldt eveneens voor de functies $W_{P_x}(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0)$ en $W_{P_y}(\vec{r}_i, \vec{q}; \pi, 0)$. Ook hier kunnen we tot deze conclusie komen door op te merken, zoals ook door (VII-20) bevestigd wordt, dat de functies W_{P_x} en W_{P_y} antisymmetrisch en de functies W_1 en W_{P_z} symmetrisch zijn t.o.v. de punten op de $+z$ -as en op de $-z$ -as. Dit laatste kunnen wij inzien door uit te gaan van de redenering, die ook tot de uitdrukking (8) geleid heeft en door tevens gebruik te maken van de reeds gevonden eigenschappen, dat de functies W_{P_x} , $W_{P_{ij}}$ en W_1 , W_{P_z} antisymmetrisch resp. symmetrisch zijn t.o.v. het reactievlak.

Met het bovenstaande hebben we dus aangetoond, dat het P_x en P_{ij} gedeelte van de bundel geen bijdrage leveren tot de intensiteit van de γ -stralen op de quantisatie-as.

C. Verdere consequenties voor de hoekcorrelatiefunctie, die volgen uit de behoudswet van het impulsmoment om de z-as.

Deze paragraaf is grotendeels gewijd aan de staving van de volgende beweringen:

- 1) Protonen, die geen spin-flip ondergaan, slaan uitsluitend de $M = 0 \pm 2$ subniveaus aan en geven geen aanleiding tot een bijdrage aan de γ -intensiteit langs de quantisatie-as.
- 2) Protonen, die wel spin-flip ondergaan, slaan alleen de $M = \pm 1$ subniveaus aan en geven wel aanleiding tot een bijdrage aan de γ -intensiteit langs de quantisatie-as. M.a.w. alleen de spinafhankelijkheid van de proton-kern interactie geeft aanleiding tot een γ -intensiteit langs de quantisatie-as.

Zowel voor als na de reactie kan de relatieve beweging van de betreffende reactieproducten op betrekkelijk grote afstand van de kern weergegeven worden door respectievelijk de vlakke golven $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ en $e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}$. Een vlakke golf kan als som van partiële bolgolven geschreven worden:

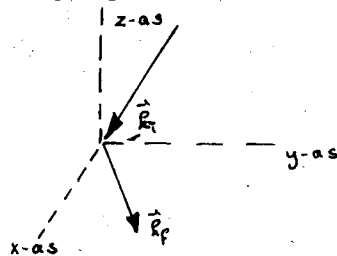


Fig. VIII-2

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(kr) Y_l^m(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}) \quad (10-a)$$

$$= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(kr) Y_l^m(\theta_k, \varphi_k) Y_l^m(\hat{r}) \quad (10-b)$$

Hierin stellen \hat{k} en \hat{r} de eenheidsvectoren voor langs de golfvector \vec{k} en de positievector \vec{r} . De bolfuncties $Y_l^m(\theta, \varphi)$ zijn de gemeenschappelijke eigenfuncties van de differentiaal operatoren \hat{L}^2 en L_z met respectievelijke eigenwaarden $l(l+1)\hbar^2$ en $m\hbar$ ($l=0, 1, 2, \dots, \infty$; $m=-l, -l+1, \dots, +l$). Wanneer de golfvector \vec{k} een hoek $\theta_k = \frac{\pi}{2}$ maakt met de quantisatie-as, wat zowel voor \vec{k}_i als voor \vec{k}_f het geval is (zie fig. VIII-2), dan gaat (10-b) over in:

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(kr) Y_l^m\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_k\right) Y_l^m(\hat{r}) \quad (11)$$

Het blijkt, dat de bolfunctie $Y_l^m\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_k\right)$ in (11) ongelijk aan nul is als $(l+m)$ even is. Zowel voor de inkomende als voor de uitgaande vlakke golf hebben we daarom de volgende voorwaarden gevonden

$$l_1 + m_1 \quad \text{even} \quad (12-a)$$

$$l_f + m_f \quad \text{even} \quad (12-b)$$

De pariteit van de relatieve beweging der reactieproducten verkrijgen we door de pariteitsoperator P te laten werken op uitdrukking (10-b):

$$\begin{aligned} P 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^{m*}(\theta_k, \varphi_k) Y_{\ell}^m(\hat{r}) &= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^{m*}(\theta_k, \varphi_k) Y_{\ell}^m(-\hat{r}) \\ &= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) (-1)^{\ell} Y_{\ell}^{m*}(\theta_k, \varphi_k) Y_{\ell}^m(\hat{r}) \end{aligned}$$

De pariteit van de relatieve beweging of de "baanpariteit" is dus $(-1)^{\ell}$. De wet van behoud van pariteit toegepast op het reactieproces levert ons dan de volgende relatie op:

$$P_i (-1)^{l_i} = P_f (-1)^{l_f}$$

Hierin zijn P_i en P_f de producten van de intrinsieke pariteiten van de begin- resp. de eindproducten. Voor ons reactieproces zijn beide intrinsieke pariteiten even, vandaar dat deze relatie overgaat in:

$$(-1)^{l_i} = (-1)^{l_f} \quad (13)$$

De behoudswet voor het totale impulsmoment levert ons de volgende reactie op:

$$\{(\vec{\ell} + \vec{s})\}_{\text{begintoestand}}^2 = \{(\vec{\ell} + (\vec{L} + \vec{s}))\}_{\text{eindtoestand}}^2$$

Hierin is \vec{s} het spinimpulsmoment van het proton en \vec{L} het totale impulsmoment van de kern na de reactie. Aangezien $L = 2$ en $s = \frac{1}{2}$ volgt hieruit:

$$l_1 = l_f + 3, l_f + 2, l_f + 1, l_f, l_f - 1, l_f - 2, l_f - 3$$

De voorwaarde (13) reduceert het aantal mogelijkheden voor l_1 echter tot

$$\begin{aligned} l_1 &= l_f + 2 \\ &= l_f \\ &= l_f - 2 \end{aligned} \quad (14)$$

Wij herhalen de voorwaarden (12) voor de inkomende en uitgaande vlakke golf:

$$\begin{aligned} l_1 + m_1 &\quad \text{even of } l_f + m_1 + 2, l_f + m_1 \quad \text{en } l_f + m_1 - 2 \quad \text{even} \\ l_f + m_f &\quad \text{even.} \end{aligned}$$

Hieruit trekken we de conclusie, dat $m_i - m_f \equiv \Delta m_1$, dit wil zeggen dat de baanimpulsmomentoverdracht langs de quantisatie-as van het proton aan de kern even is. M.b.v. dit resultaat kunnen wij de beweringen staven, die wij in het begin van deze paragraaf gesteld hebben. Dit doen we

in de volgende twee alinea's.

Wanneer het verstrooide proton met een spinimpulsmoment in de $\pm z$ richting geen spinomkering (spin-flip) ondergaan heeft, dan beperkt de impulsmomentoverdracht langs de quantisatie-as van dit proton aan de kern zich tot de baanimpulsmomentoverdracht Δm_e . Aangezien Δm_e even is en dus o.a. $+2$, 0 en -2 kan bedragen, geeft deze impulsmomentoverdracht slechts aanleiding tot de aangeslagen $M = 0, \pm 2$ subniveaus van de 2^+ toestand van de kern. Wanneer deze niveaus vervolgens terugvallen naar de grondtoestand, onder uitzending van γ -quanta, dan zullen er evenwel geen γ -quanta in de richting van de quantisatie-as uitgezonden worden. De wet van behoud van impulsmoment verbiedt dit. Volgens deze wet namelijk moet de impulsmomentoverdracht langs de quantisatie-as van de kern aan de γ -quanta overeenkomen met het impulsmoment langs deze as van de γ -quanta. Dit impulsmoment van de γ -quanta bedraagt ± 1 . De impulsmomentoverdracht langs de quantisatie-as van de kern aan de γ -quanta kan daarentegen slechts $0, \pm 2$ bedragen, omdat alleen de $M = 0, \pm 2$ subniveaus van de kern aangeslagen zijn. Dientengevolge zullen bij deëxcitatie van deze subniveaus geen γ -quanta in de richting van de quantisatie-as uitgezonden worden. De protonen, die geen spin-flip ondergaan, slaan dus uitsluitend de $M = \pm 2$ subniveaus aan en geven geen aanleiding tot een bijdrage aan de γ -intensiteit langs de quantisatie-as. De verstrooiing van deze protonen wordt gekarakteriseerd door de verstrooiingsamplitude $f_{0m_1 \rightarrow \pm 2m_2}(\hat{k}, \hat{q})$, met $M = 0, \pm 2$ en $\pm m_1 = \pm m_2$.

Heeft het verstrooide proton met een spinimpulsmoment langs de $\pm z$ richting daarentegen wel spinomkering ondergaan, dan bedraagt de impulsmomentoverdracht langs de quantisatie-as van dit proton aan de kern $\Delta m_e \pm 1$. Aangezien deze impulsmomentoverdracht oneven is en o.a. $+1$ en -1 kan bedragen, worden tengevolge van deze overdracht de $M = \pm 1$ subniveaus aangeslagen. Wanneer vervolgens deze niveaus onder uitzending van γ -quanta naar het grondniveau terugvallen, dan is de kern wel in staat om aan de uitgezonden γ -quanta een impulsmoment langs de quantisatie-as van ± 1 over te dragen. De deëxcitatie van de $M = \pm 1$ niveaus zal daarvandaan aanleiding geven tot een γ -intensiteit in de richting van de quantisatie-as. Wij kunnen dus tot de conclusie komen, dat de protonen, die wel spin-flip ondergaan, alleen de $M = \pm 1$ subniveaus aanslaan en aanleiding geven tot een bijdrage aan de γ -intensiteit langs de quantisatie-as. De verstrooiing van deze protonen wordt gekarakteriseerd door de verstrooiingsamplitude $f_{0m_1 \rightarrow \pm 1m_2}(\hat{k}, \hat{q})$ met $M = \pm 1$ en $\pm m_1 = \pm m_2$.

Op de volgende pagina hebben wij datgene wat in de laatste twee alinea's besproken is, nogmaals overzichtelijk weergegeven.

D. De in experimentele grootheden tot uiting komende relatieve fasen van de verstrooiingsamplituden.

Wij willen in deze paragraaf laten zien, dat de in experimentele grootheden, zoals de differentiële werkzame doorsnede en de hoekcorrelatiefunctie, tot uiting komende relatieve fasen van de verstrooiingsamplituden m.b.v. een schema gemakkelijk aan te geven zijn. De wijze, waarop de verstrooiingsamplituden in kolom 7 van het overzicht op pagina 65 gerangschikt staan stelt ons daartoe in staat. We zullen evenwel eerst terugkomen op hetgeen we in paragraaf A van dit hoofdstuk over de relatieve fasen van verstrooiingsamplituden geschreven hebben.

a) In paragraaf A hebben we gezien, dat in de 1 - en P_z -termen van b.v. de hoekcorrelatiefunctie alleen de relatieve fasen van die verstrooiingsamplituden tot uiting komen, die de verstrooiing karakteriseren van een spin-up proton (of van een spin-down proton). De factoren 1 en P_z staan n.l. alleen voor producten van de volgende vorm:

$$\int_{0+\frac{1}{2},-} (\vec{e}, \vec{q}) \times \int_{0+\frac{1}{2},-}^* (\vec{e}, \vec{q}) \quad \text{en} \quad \int_{0-\frac{1}{2},-} (\vec{e}, \vec{q}) \times \int_{0-\frac{1}{2},-}^* (\vec{e}, \vec{q}) \quad (15)$$

b) Evenzo hebben we gezien, dat in de P_x - en P_{ij} -termen uitsluitend de fasen tussen die verstrooiingsamplituden tot uiting komen, die de verstrooiing karakteriseren van een spin-up en spin-down proton. De factoren P_x en P_{ij} staan hier alleen voor producten van de vorm:

$$\int_{0+\frac{1}{2},-} (\vec{e}, \vec{q}) \times \int_{0-\frac{1}{2},-}^* (\vec{e}, \vec{q}) \quad \text{en} \quad \int_{0-\frac{1}{2},-} (\vec{e}, \vec{q}) \times \int_{0+\frac{1}{2},-}^* (\vec{e}, \vec{q}) \quad (16)$$

Om het bovenstaande in te zien beschouwen we het volgende:

In hoofdstuk VI hebben we gezien, dat het gemiddelde gedrag van een bundel in experimenten voorspelbaar wordt wanneer we de vorm van de dichtheidsmatrix van de bundel, d.w.z. wanneer we P_x , P_{ij} en P_z kennen. Het betref hier het gemiddelde bedrag en niet het individuele gedrag van de protonen in de bundel. (17)

a') Om het onder a) vermelde in te zien voeren wij een experiment uit met een protonbundel, waarvan de protonen alleen in de z-richting gepolariseerd zijn. Met dit experiment kunnen wij b.v. de genoemde experimentele grootheden bepalen. Dezelfde waarden voor de experimentele grootheden hadden we evenwel ook kunnen verkrijgen door deze protonbundel op grond van (17) vervangen te denken door twee volledig gepolariseerde deelbundels om vervolgens de experimentele grootheden met deze twee deelbundels apart te bepalen en daarna een gemiddelde te nemen. De ene deelbundel is in de +z-richting gepolariseerd en omvat het $\frac{1}{2}(1+P_z)$ gedeelte

van de oorspronkelijke protonbundel, terwijl de andere deelbundel in de -z-richting gepolariseerd is en het $\frac{1}{2}(1-P_z)$ gedeelte van de oorspronkelijke bundel omvat.

De dichtheidsmatrix van de twee deelbundels tesamen komt overeen met de dichtheidsmatrix van de oorspronkelijke protonbundel. De stationaire verstrooiingsgolf functie voor een spin-up proton ziet er als volgt uit (zie hoofdstuk V)

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \phi_0(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} \vec{q}_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}} + \sum_{m m_2} \int_{0+\frac{1}{2}, m m_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} \phi_{2M}(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} \vec{q}_1 \\ \frac{1}{2} m_2 \end{matrix} \right\} \frac{e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}}}{r}$$

In de experimentele grootheden, die we verkrijgen met de spin-up deelbundel komen dus verstrooiingsamplituden voor in de volgende combinaties:

$$\int_{0+\frac{1}{2}, m m_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} \times \int_{0+\frac{1}{2}, n n_2}^{*(\vec{q}, \vec{q})} \quad (18-a)$$

Evenzo komen in de experimentele grootheden, die we verkrijgen met de spin-down deelbundel combinaties van de verstrooiingsamplituden voor van de vorm:

$$\int_{0-\frac{1}{2}, m m_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} \times \int_{0-\frac{1}{2}, n n_2}^{*(\vec{q}, \vec{q})} \quad (18-b)$$

Willen wij een resultaat krijgen, dat overeenkomt met het resultaat, dat wij verkregen hadden met de oorspronkelijke protonbundel, dan moeten wij (18-a) en (18-b), respectievelijk gewogen met de gewichten $\frac{1}{2}(1+P_z)$ en $\frac{1}{2}(1-P_z)$, bij elkaar optellen. Hiermee zijn de producten (15), die in het formeel verkregen resultaat voorkomen, thuisgebracht.

b') Om het onder b) vermelde in te zien voeren wij opnieuw een experiment uit. Dit keer evenwel met de protonbundel, waarvan de protonen alleen in de x-richting gepolariseerd zijn. Wij kunnen vervolgens de procedure, die wij onder a') m.b.t. een z-protonbundel gevolgd hebben, ook hier toepassen. De verhouding van de aantallen deeltjes in de twee deelbundels is nu $\frac{1}{2}(1+P_x) : \frac{1}{2}(1-P_x)$. De stationaire verstrooiingsgolf functie van een proton gepolariseerd in de +x-richting ziet er als volgt uit (zie hoofdstuk V):

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \phi_0(\vec{r}_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left\{ \begin{matrix} \vec{q}_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \vec{q}_1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \right) e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m m_2} \left(\int_{0+\frac{1}{2}, m m_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} - \int_{0-\frac{1}{2}, m m_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} \right) \phi_{2M}(\vec{r}_1) \left\{ \begin{matrix} \vec{q}_1 \\ \frac{1}{2} m_2 \end{matrix} \right\} \frac{e^{i\vec{q}_1 \cdot \vec{r}}}{r}$$

In de experimentele grootheden, die wij verkrijgen met de deelbundel, waarvan alleen de protonen in de +x-richting gepolariseerd zijn, komen daarvandaan de verstrooiingsamplituden alleen voor in de combinaties:

$$\left(\int_{0+\frac{1}{2}, m m_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} - \int_{0-\frac{1}{2}, m m_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} \right) \left(\int_{0+\frac{1}{2}, n n_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} - \int_{0-\frac{1}{2}, n n_2}^{(\vec{q}, \vec{q})} \right)^* \quad (19-a)$$

De stationaire verstrooiingsgolf functie van een proton, gepolariseerd in de -x-richting ziet er als volgt uit:

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \phi_0(\vec{r}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \end{matrix} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{Mm_2} \left(\begin{matrix} f_{0+\frac{1}{2}, Mm_2} \\ f_{0-\frac{1}{2}, Mm_2} \end{matrix} \right) \phi_{2M}(\vec{r}) \begin{matrix} \chi_{\frac{1}{2}, m_2} \\ \chi_{\frac{1}{2}, -m_2} \end{matrix} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}$$

In de experimentele grootheden komen daarom ook de volgende combinaties van verstrooiingsamplituden voor:

$$\left(f_{0+\frac{1}{2}, Mm_2} + f_{0-\frac{1}{2}, Mm_2} \right) \left(f_{0+\frac{1}{2}, Nm_2} + f_{0-\frac{1}{2}, Nm_2} \right)^* \quad (19-b)$$

Willen wij een resultaat krijgen, dat overeenkomt met het resultaat, dat wij verkregen hadden met de oorspronkelijke x-protonbundel, dan moeten wij (19-a) en (19-b), respectievelijk gewogen met gewichten $\frac{1}{2}(1+P_x)$ en $\frac{1}{2}(1-P_x)$, bij elkaar optellen. In het eindresultaat komen dan de volgende combinaties van verstrooiingsamplituden voor:

$$f_{0+\frac{1}{2}, Mm_2} \times f_{0-\frac{1}{2}, Nm_2}^* \quad \text{en} \quad f_{0-\frac{1}{2}, Mm_2} \times f_{0+\frac{1}{2}, Nm_2}^*$$

Hiermee hebben we eveneens de producten (16), die in het formeel verkregen resultaat voorkomen, thuisgebracht. Eenzelfde beschouwing kunnen wij houden voor een protonbundel, waarvan de protonen alleen in de ij-richting gepolariseerd zijn.

M.b.v. de beschouwingen a') en b') kunnen wij aan de hand van het overzicht op pagina 65 gemakkelijk vaststellen welke combinaties van de verstrooiingsamplituden (dus welke relatieve fasen) met welke factoren 1, P_x , P_{ij} en P_z vermenigvuldigd in de experimentele grootheden voorkomen.

De verstrooiingsamplituden in kolom 7 van het bovengenoemde overzicht worden verdeeld in vier groepen I, II, III en IV.

1 en P_z protonen: De verstrooiingsamplituden, die in groep I(III) voorkomen karakteriseren de verstrooiing van een spin-up (spin-down)proton, dat geen spinomkering ondergaat. Op grond van de beschouwing a') zullen in de experimentele grootheden combinaties van verstrooiingsamplituden uit groep I(III) voorkomen en vermenigvuldigd zijn met de factoren 1 en P_z . Het aantal relatieve fasen bedraagt dus drie (drie).

De verstrooiingsamplituden, die in groep II(IV) voorkomen karakteriseren de verstrooiing van een spin-up (down) proton, dat wel spinomkering ondergaat. Ook hier is beschouwing a') van toepassing, vandaar dat in de experimentele grootheden combinaties van verstrooiingsamplituden uit groep II(IV) zullen voorkomen en vermenigvuldigd zijn met de factoren 1 en P_z . Hier bedraagt het aantal relatieve fasen één (één).

Combinaties van verstrooiingsamplituden uit groep I(III) met verstrooiingsamplituden uit groep II(IV) hebben ook de vorm (15). Deze combinaties komen evenwel pas in de experimentele grootheden voor

als tevens de polarisatie van de verstrooide bundel bepaald wordt, m.a.w. wanneer de dichtheidsmatrix van het systeem na de reactie (fig. VI-1) niet gecontraheerd wordt. Deze combinaties worden dan vermenigvuldigd met de factoren 1 en P_z . Aangezien wij de polarisatie van de verstrooide bundel niet meten (en daarom de dichtheidsmatrix contraheren) komen dergelijke combinaties in de experimentele grootheden van ons verstrooiingsproces niet voor.

P_x en P_{ij} protonen: We hebben gezien, dat wanneer de spintoestand van een proton niet overeenkomt met een spin-up of spin-down toestand, hij dan ontbonden kan worden in deze twee lineair onafhankelijke toestanden. Dergelijke protonen worden in de opvallende bundel vertegenwoordigd door de polarisatiecomponenten P_x en P_{ij} . Op grond van de beschouwing b') zullen t.g.v. deze ontbinding in de experimentele grootheden slechts combinaties voorkomen van verstrooiingsamplituden uit groep I(II) met verstrooiingsamplituden uit de groepen III en IV, welke vermenigvuldigd zijn met de factoren P_x en P_{ij} . De combinaties van verstrooiingsamplituden uit groep I(II) met die uit groep III(IV) vallen evenwel weg, omdat wij de polarisatie van de verstrooide bundel niet meten. Het aantal relatieve fasen bedraagt hier zes (zes).

In de figuur op pagina 70 hebben wij het bovenstaande samengevat. De interpretatie van deze figuur luidt als volgt:

Wanneer wij de polarisatie van de verstrooide bundel niet meten dan komen in de experimentele grootheden alleen combinaties voor van twee verstrooiingsamplituden, die voorkomen in de rijen en kolommen, welke door een getrokken factor aan elkaar gekoppeld zijn. In de experimentele grootheden is deze factor vermenigvuldigd met de mogelijke combinaties. Zo komen bijvoorbeeld in de experimentele grootheden combinaties voor van verstrooiingsamplituden uit kolom I' met verstrooiingsamplituden uit rij IV. Deze combinaties zijn in de experimentele grootheden vermenigvuldigd met de factoren P_x en P_{ij} .

Wordt daarentegen de polarisatie van de verstrooide bundel wél gemeten, dan komen in de experimentele grootheden ook nog combinaties voor van twee verstrooiingsamplituden, die stammen uit de rijen en kolommen, welke door een onderbroken factor aan elkaar gekoppeld zijn.

		I'			II'		III'			IV'	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		$\int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0+\frac{1}{2}, -2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0-\frac{1}{2}, -2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	$\int_{0-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$
I	1	$\int_{0+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$									
	2	$\int_{0+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	1, P _z		1, P _z		P _x , P _y			P _x , P _y	
	3	$\int_{0+\frac{1}{2}, -2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$									
II	4	$\int_{0+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	1, P _z		1, P _z		P _x , P _y			P _x , P _y	
	5	$\int_{0+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$									
III	6	$\int_{0-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$									
	7	$\int_{0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	P _x , P _y		P _x , P _y		1, P _z			1, P _z	
	8	$\int_{0-\frac{1}{2}, -2+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$									
IV	9	$\int_{0-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$	P _x , P _y		P _x , P _y		1, P _z			1, P _z	
	10	$\int_{0-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}}^{(R, P)}$									

De relatie tussen de transformatie-coëfficiënten $\langle \vec{R}+1 | R_{L+1\pi} \rangle$ en $\langle \vec{R}-1 | R_{L-1\pi} \rangle$

Tussen de coëfficiënten $\langle \vec{R}+1 | R_{L+1\pi} \rangle$ en $\langle \vec{R}-1 | R_{L-1\pi} \rangle$ bestaat een relatie. Deze relatie wordt bepaald door de conventies, dat $\psi = 0$ (zie fig. B-1) en dat de reflectieoperator Y (reflectie t.o.v. het $z'-x'$ vlak), werkend op de toestandsvector $|\vec{R}+1\rangle$ het volgende resultaat oplevert:

$$Y|\vec{R}+1\rangle = -|\vec{R}-1\rangle \quad \text{of} \quad Y|\vec{R}-1\rangle = -|\vec{R}+1\rangle \quad (\text{B-1})$$

In het onderstaande maken we gebruik van de eigenschappen dat $Y^2=1$ en dat $Y = e^{-i\pi J_y} P$, d.w.z. een reflectie operatie t.o.v. het $z'-x'$ vlak komt overeen met een inversieoperatie t.o.v. O' gevolgd door een rotatieoperatie over een hoek π om de $y'-as$. Wij gaan uit van de transformatie-coëfficiënt

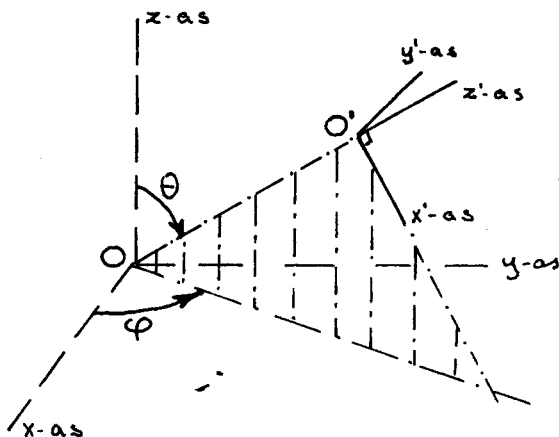


fig. B-1

$$\begin{aligned} \langle \vec{R}-1 | R_{L-1\pi} \rangle &= \langle \vec{R}-1 | Y Y | R_{L-1\pi} \rangle \\ &= \langle \vec{R}-1 | Y e^{-i\pi J_y} P | R_{L-1\pi} \rangle \\ &= -\pi \langle \vec{R}+1 | e^{-i\pi J_y} | R_{L-1\pi} \rangle \end{aligned}$$

Wanneer wij gebruik maken van de "volledigheidsrelatie", dan kunnen wij hiervoor schrijven:

$$\begin{aligned} \langle \vec{R}-1 | R_{L-1\pi} \rangle &= -\pi \langle \vec{R}+1 | R_{L+1\pi} \rangle \langle R_{L+1\pi} | e^{-i\pi J_y} | R_{L-1\pi} \rangle \\ &= -\pi \langle \vec{R}+1 | R_{L+1\pi} \rangle \alpha_{+1,-1}^{L(\pi)} = -\pi \langle \vec{R}+1 | R_{L+1\pi} \rangle (-1)^{L-1} \end{aligned}$$

of

$$\langle \vec{R}-1 | R_{L-1\pi} \rangle = \pi (-1)^L \langle \vec{R}+1 | R_{L+1\pi} \rangle \quad (\text{B-2})$$

Voor ons geval waarin L gelijk is aan 2 en π even, gaat dit over in:

$$\langle \vec{R}-1 | R_{2-1+} \rangle = \langle \vec{R}+1 | R_{2+1+} \rangle \quad (\text{B-3})$$

Referenties:

- 1) M. Jacob and G.C. Wick, Annals of Physics 7(1959) 404.