

MASTER

Gegeneraliseerd-Newtonse stationaire stromingen in starre bloedvatmodellen

Baaijens, J.P.W.

Award date:
1989

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Interuniversitair project Atherosclerose

Gegeneraliseerd-Newtonse stationaire stromingen in
starre bloedvatmodellen
Deel I Afstudeerverslag

J.P.W. Baaijens
Eindhoven, oktober 1989

Afstudeerdocenten: prof. dr. ir. J.D. Janssen (W)
 prof. dr. ir. G. Vossers (N)

Begeleiding: dr. ir. A.A. van Steenhoven

intern rapport:WFW 89.052 en: R-1022-A

Technische Universiteit Eindhoven

Samenvatting

Deze studie is uitgevoerd in het kader van het interuniversitair project "Atherosclerose". Het project richt zich met name op de beschrijving van de stroming in de halsslagadervertakking. In het tot nu verrichte onderzoek is aangenomen dat bloed zich als een Newtonse vloeistof gedraagt. Gebleken is echter dat bloed niet-Newtonse materiaaleigenschappen heeft. Een betere kennis van de invloed van deze eigenschap van bloed op het stromingsbeeld in bloedvaten kan het inzicht in het ontstaan van aderverkalking vergroten. Dit is ook van belang bij de detectie van aderverkalking m.b.v. ultrasone geluidstechnieken.

In dit afstudeeronderzoek is het niet-Newtonse gedrag van bloed beschreven met twee zogenaamde gegeneraliseerd Newtonse modellen: het machtwetmodel en het Cassonmodel. Voor drie starre geometrieën (ronde rechte buis, divergerende buis, 2d-vertakking) is voor $Re = 300$ numeriek de invloed van deze modellen op stationaire snelheidsprofielen onderzocht. Ook is het drukverloop en het verloop van de wandschuifspanning nader geanalyseerd. Voor deze problemen bleken er t.o.v. de Newtonse situatie slechts geringe maar niet verwaarloosbare, verschillen op te treden in het stromingsbeeld. Aan de stroming door een ronde rechte buis zijn ook inleidende experimenten gedaan met twee modelvloeistoffen: kaliumthiocyanaat als Newtonse vloeistof en Separan als op bloed gelijkende niet-Newtonse vloeistof. Hieruit bleek dat Separan zich goed door het machtwetmodel laat beschrijven.

Ondanks dit resultaat is er nog geen definitief antwoord mogelijk op de vraag hoe groot de invloed van het niet-Newtonse karakter van bloed is op de stroming in de halsslagadervertakking. Tegen zowel het machtwetmodel als het Cassonmodel gelden enkele bezwaren. Zo is met name het niet in rekening brengen van geheugeneffecten een principiële gebrek van deze modellen. Ook mogen deze modellen eigenlijk niet toegepast worden op stromingen met loslaatgebieden. Daarom is er een verdere experimentele validatie nodig.

Inhoudsopgave

	Samenvatting	
0	Inleiding	0.1
	Symbolenlijst	S.1
1	Gegeneraliseerd Newtons materiaalgedrag	1.1
	1.0 Inleiding	1.1
	1.1 Rheologische grondbeginselen	1.1
	1.2 Parameterwaarden voor bloed	1.5
	1.3 Discussie	1.9
2	Numerieke methode	2.1
	2.0 Inleiding	2.1
	2.1 Mathematische formulering van het fysische stromingsprobleem	2.1
	2.2 Dimensieloze getallen	2.2
	2.3 Linearisatie van de viskeuze termen	2.3
	2.4 Discretisatie van de Navier–Stokesvergelijking volgens de eindige elementenmethode	2.6
	2.5 Enkele praktische aspecten	2.7
3	Berekeningen	3.1
	3.0 Inleiding	3.1
	3.1 Ronde rechte buis	3.1
	3.1.1 Analytische berekeningen	3.1
	3.1.2 Numerieke berekeningen	3.5
	3.1.3 Resultaten	3.7
	3.2 Divergerende buis	3.11
	3.3 2–D Vertakking	3.16
	3.4 Discussie	3.25
4	Experimenten	4.1
	4.0 Inleiding	4.1
	4.1 Meetmethode	4.1
	4.2 Meetopstelling	4.5
	4.3 Resultaten	4.6
	4.4 Discussie	4.9
5	Conclusies en voortgang	5.1

Literatuurlijst		L.1
Appendix 1	Het principe van de eindige elementen methode	A.1.1
Appendix 2	Reiner–Rivlin vloeistoffen	A.2.1
Appendix 3	Reken– en verwerkingsprogramma (zie deel II, "Appendix 3 bij afstudeerverslag")	A.3.1

Symbolenlijst

d	diameter van een buis
V	karakteristieke snelheid
L	karakteristieke lengte
λ	interne tijd van een vloeistof
η	dynamische viscositeit
ρ	dichtheid
C	parameter in het machtwetmodel
n	macht in het machtwetmodel
τ_y	vloeispanning, parameter in het Cassonmodel
η_c	Cassonviscositeit, parameter in het Cassonmodel
Q	debiet
u_{ax}	axiale snelheid
u_{se}	secundaire snelheid
u_m	gemiddelde snelheid ($u_m = Q/\pi(\frac{1}{2}d)^2$)
Re	Reynoldsgetal ($V L \rho/\eta$)
W	Weissenberggetal ($\lambda V/L$)
Y	Cassongetal ($\tau_y 2\pi d/\eta_c u_m$)

0 Inleiding

Dit afstudeeronderzoek vond plaats in het kader van het interuniversitair project "Atherosclerose". Atherosclerose is een ziekte die gekenmerkt wordt door processen als het inwendig verdikken van de vaatwand, de opeenhoping van vetten en calcium in de extracellulaire matrix, en de toename van de gladde spiercellen. Dit leidt er vaak toe dat de zieke ader vernauwd wordt en uiteindelijk zelfs dat het vat geheel wordt afgesloten. In een vroeg stadium van de ziekte kan atherosclerotische plaquevorming het ontstaan van tromboses veroorzaken. Fragmenten kunnen van de trombose afbreken en kleinere aders stroomafwaarts beschadigen. Behalve biochemische factoren zijn ook hydrodynamische factoren belangrijk voor het ontstaan van aderverkalking. Afzettingen en blokkades treden het meest op in bochten en vertakkingen van aders. De stroming verandert daar, er ontstaan wervels en terugstroomgebieden.

Het doel van het atheroscleroseproject is het ontwikkelen van een methode om in een vroegtijdig stadium aderverkalking te detecteren. Tot voor kort werd voor de klinische diagnose van atherosclerose gebruik gemaakt van contrast-angiografie: een invasieve behandeling. Omdat deze methode een zeker risico heeft (weliswaar klein) kan het niet gebruikt worden voor asymptomatische of follow-up patienten. Daarom zijn recentelijk niet-invasieve detectiemethoden ontwikkeld, gebaseerd op de detectie van verstoringen in het stromingsbeeld die geïnduceerd zijn door continue of gepulseerde Doppler geluidsgolven. Door de gecompliceerde stromingspatronen in bochten en vertakkingen is het vaak moeilijk om deze verstoringen te onderscheiden van de stromingsfenomenen die gewoonlijk op deze plaatsen optreden. Om methoden te ontwikkelen, die atherosclerotische vernauwingen in een vroegtijdig stadium van de ziekte kunnen aantonen, is het nodig om een gedetailleerd inzicht in dit gecompliceerde stromingsbeeld te krijgen; vooral zijn de invloed van geometrische veranderingen en kleine vernauwingen op de stromingspatronen belangrijk.

Daarnaast is het onderzoek van de stromingsverschijnselen in bochten en vertakkingen van belang voor een gedeeltelijke verklaring van het feit dat juist op die plaatsen het proces van aderverkalking begint. Verondersteld wordt (Liepsch [7]), dat hoge en lage schuifspanningen samen verantwoordelijk zijn voor de aanhechting en afzetting van bloedplaatjes en vetten; op de eerste plaats worden bloedcellen beschadigd of wordt hun oppervlak veranderd in gebieden met hoge schuifspanningen (b.v. het eerder genoemde grensgebied). Vervolgens blijven de deeltjes aan de wand plakken, en vormen zij afzettingen in gebieden met lage schuifspanningen. Ook zijn de schuifspanningen op het

grensgebied van de hoofdstroming en de terugstroming van groot belang, evenals de punten waarin de stroming stilstaat of waar stroomlijnen splitsen of weer samenkomen. De tijdsduur van het verblijf van de deeltjes in een terugstroomgebied is eveneens een belangrijke faktor.

Bij het onderzoek naar de stroming in bloedvaten zijn een aantal parameters afzonderlijk belangrijk:

- het soort stroming: stationair/pulsvormig;
- de elasticiteit van de wand: star/elastisch;
- de viscositeit van de vloeistof: Newtons/niet—Newtons.

In het tot nu toe verrichtte onderzoek binnen dit project is steeds verondersteld dat bloed zich als een Newtonse vloeistof (d.w.z. met een constante viscositeit) kan worden beschouwd. Uit experimenten is echter gebleken dat bloed zich als een niet—Newtonse vloeistof gedraagt. Deze eigenschap kan grote consequenties hebben voor het stromingsbeeld in aders. Zo vond Liepsch [7] voor een stationaire stroming in een star glazen model van een 90° splitsing erg verrassende verschillen in de snelheidsprofielen tussen een Newtonse vloeistof en een niet—Newtonse modelvloeistof *Separan* (waarvan de viscositeitsfunctie sterk lijkt op die van bloed).

Als voorbereiding op een mogelijk uitgebreidere studie naar de invloed van de niet—Newtonse karakteristieken van bloed op de stromingsfenomenen in de halsslagadervertakking is in dit afstudeerproject m.b.v. het programmapakket *Sepran* numeriek de invloed van het niet—Newtonse gedrag van bloed op stationaire snelheidsprofielen in een aantal verschillende starre geometrieën (ronde rechte buis, divergerende buis, 2—d vertakking) onderzocht. In een geometrie (ronde rechte buis) is dit ook experimenteel onderzocht. Bloed is daarbij beschreven met twee zgn. gegeneraliseerd Newtonse modellen: het machtwetmodel en het Cassonmodel. Bij de experimenten is *Separan* als modelvloeistof voor bloed gebruikt. De resultaten voor de niet—Newtonse media zullen steeds vergeleken worden met die behorend bij een Newtons medium.

1 Gegeneraliseerd–Newtons materiaalgedrag

1.0 Inleiding

Dit hoofdstuk behandelt de theorie van het gegeneraliseerd Newtons materiaalgedrag, en de wijze waarop zij in deze studie is toegepast bij de beschrijving van het niet-Newtonse gedrag van bloed. In paragraaf 1.1 wordt eerst het onderscheid besproken tussen Newtonse en niet-Newtonse vloeistoffen. In deze studie zijn twee gegeneraliseerd Newtonse modellen gebruikt: het machtwetmodel en het Cassonmodel. Hierna wordt in par. 1.2 aangegeven hoe de parameterwaarden van deze modellen voor bloed zijn bepaald. Voor het machtwetmodel is er discussie over de gekozen parameterwaarden. Paragraaf 1.3 gaat over de principiële bezwaren die verbonden zijn aan het machtwetmodel en aan het Cassonmodel. Ook wordt beargumenteerd waarom in deze studie, ondanks de genoemde bezwaren, toch gekozen is voor deze modellen.

1.1 Rheologische grondbeginselen

De rheologie bestudeert het gedrag van stromende stoffen. We onderscheiden twee groepen vloeistoffen: Newtonse en niet Newtonse vloeistoffen. Een vloeistof wordt gekarakteriseerd door zijn constitutieve vergelijking. In het algemeen wordt daartoe eerst de spanningstensor als volgt opgesplitst:

$$(1.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{t}$$

waarin: $\boldsymbol{\sigma}$: de Cauchy spanningstensor,
 p : de hydrostatische druk,
 \mathbf{I} : de eenheidstensor,
 \mathbf{t} : de deviatorische spanningstensor.

Voor Newtonse vloeistoffen wordt \mathbf{t} dan gegeven door de constitutieve relatie:

$$(1.2) \quad \mathbf{t} = 2\eta\mathbf{D}$$

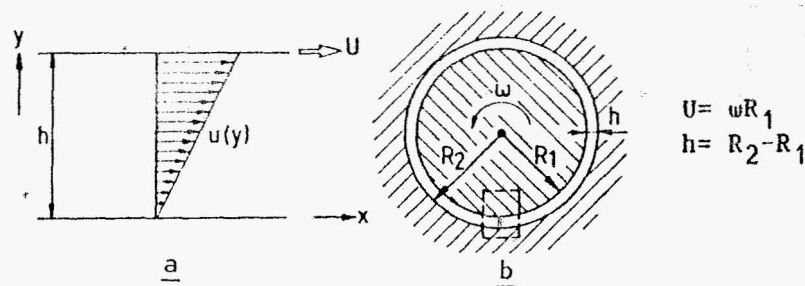
waarin: η : de dynamische viscositeit (een constante),
 \mathbf{D} : de deformatiesnelheidstensor gedefinieerd als $\frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^c)$,

$$\text{met } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \vec{v} = (u, v, w).$$

Vloeistoffen waarvoor relatie (1.2) niet geldt heten niet-Newtonse vloeistoffen. Beschrijven we een vloeistof met een constitutieve vergelijking van de vorm (1.2) waarbij η niet een konstante is maar een functie van de invarianten I_D, II_D, III_D van de tensor D , dan spreken we van een ggeneraliseerd Newtonse vloeistof. Dit is een vorm van niet-Newton's gedrag, het behoort tot de klasse van viscoïnelastische of Reiner-Rivlin vloeistoffen. De constitutieve vergelijking voor deze klasse van vloeistoffen wordt gegeven door:

$$(1.3) \quad t = \alpha I + \beta D + \gamma D^2,$$

waarin α, β , en γ een functie zijn van de invarianten van de tensor D (zie ook appendix 2). Een constitutieve relatie van de vorm (1.3) bevat een aantal materiaalparameters. Om deze te kunnen bepalen wordt in het algemeen gebruik gemaakt van een enkelvoudige afschuifstrooming (b.v. een Couette viscosimeter).



Figuur 1.1 a Enkelvoudige afschuifstrooming met
b als voorbeeld de Couettestrooming.

Hierin is dan de matrixrepresentatie van D t.o.v een cartesisch coördinatensysteem:

$$(1.4) \quad D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{du}{dy} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{du}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \frac{du}{dy} = \kappa.$$

De grootheid κ wordt de afschuifsnelheid (in het engels: "shear rate") genoemd. In zo'n stroming is er dan ook slechts een schuifspanning, genaamd τ . Dat betekent dat de te zoeken constitutieve relatie tussen de deviatorische spanningstensor \mathbf{t} en de deformatiesnelheidstensor D zich versimpelt van $\mathbf{t} = \mathbf{t}(D)$ tot $\tau = \tau(\kappa)$. Voor een Newtonse vloeistof geldt dat in een enkelvoudige afschuifstroming de schuifspanning evenredig is met de afschuifsnelheid:

$$(1.5) \quad \tau = \eta \kappa, \quad \eta = \text{konstante.}$$

Voor een generaliseerd Newtonse vloeistof geldt dan daarentegen:

$$(1.6) \quad \tau = \eta(\kappa) \kappa, \quad \eta(\kappa) = \text{schijnbare viscositeit.}$$

Relatie (1.6) behoort tot de klasse van Reiner–Rivlin vloeistoffen met $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \eta(\kappa)$. Om aansluiting te zoeken met de bestaande studies aan bloedstromingen zullen in deze studie twee generaliseerd Newtonse modellen gebruikt worden: het machtwetmodel en het Cassonmodel. Beide relaties zijn in wezen empirische relaties, volgend uit de fit van data τ versus κ . Voor een enkelvoudige afschuifstroming zien deze relaties er als volgt uit:

–machtwetmodel:

$$(1.7) \quad \eta = C |\kappa|^{n-1},$$

–Cassonmodel:

$$(1.8) \quad |\tau|^{1/2} = |\tau_y|^{1/2} + |\eta_c \kappa|^{1/2}.$$

met τ_y : yieldstress.

De relaties (1.7) en (1.8) gelden voor een enkelvoudige afschuifstroming; deze kunnen we als volgt generaliseren voor een willekeurige stroming.

$$(1.2) \quad \mathbf{t} = 2\eta D$$

$$(1.9) \quad \eta = \eta(I_D, II_D, III_D),$$

Hier is η alleen een functie van de invarianten van D , zodat deze onafhankelijk is van de keuze van het coördinatensysteem. Voor I_D , II_D en III_D geldt (t.o.v. een willekeurige basis $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ van de drie-dimensionale ruimte):

$$(1.10.a) \quad I_D = \text{tr}(D),$$

$$(1.10.b) \quad II_D = 1/(\vec{c}_1 \cdot (\vec{c}_2 \times \vec{c}_3)) [\vec{c}_1 \cdot (D \cdot \vec{c}_2) \times (D \cdot \vec{c}_3) + \vec{c}_2 \cdot (D \cdot \vec{c}_3) \times (D \cdot \vec{c}_1) + \vec{c}_3 \cdot (D \cdot \vec{c}_1) \times (D \cdot \vec{c}_2)]$$

$$(1.10.c) \quad III_D = \det(D).$$

Als de vloeistof incompressibel is dan geldt:

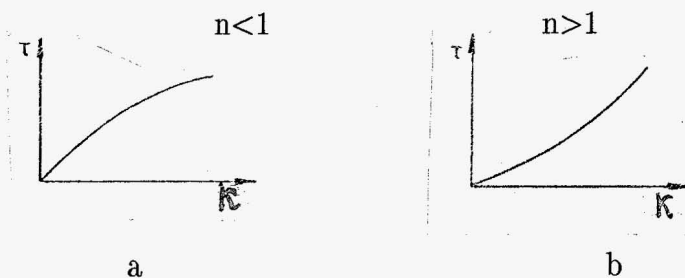
$$(1.11) \quad I_D = \text{tr}(D) = 0.$$

Voor een enkelvoudige afschuifstroming geldt (zie (1.4):

$$(1.12) \quad III_D = \det(D) = 0.$$

Voor een enkelvoudige incompressibele afschuifstroming geldt dus:

$$(1.13) \quad \eta = \eta(II_D).$$

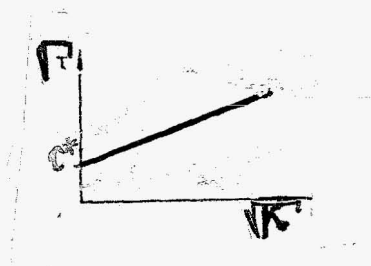


Figuur 1.2

Afschuifspanning als functie van de afschuifsnellheid voor een machtwetvloeistof (a. pseudoplast, b. dilatant).

Voor een twee-dimensionale stroming heeft de tweede invariant in cartesische coördinaten de volgende vorm:

$$(1.14) \quad \Pi_D = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$



Figuur 1.3 Afschuifspanning als functie van de afschuifsnelheid voor een Casson vloeistof

Voor een enkelvoudige afschuifstroming met alleen $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ geldt:

$$(1.15) \quad |\kappa| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = (4\Pi_D)^{\frac{1}{2}}$$

Met deze uitdrukking kunnen we de afschuifsnelheid generaliseren. We gebruiken daartoe de grootheid $K = (4\Pi_D)^{\frac{1}{2}}$. Hiermee vinden we dan voor het machtwetmodel cq het Cassonmodel:

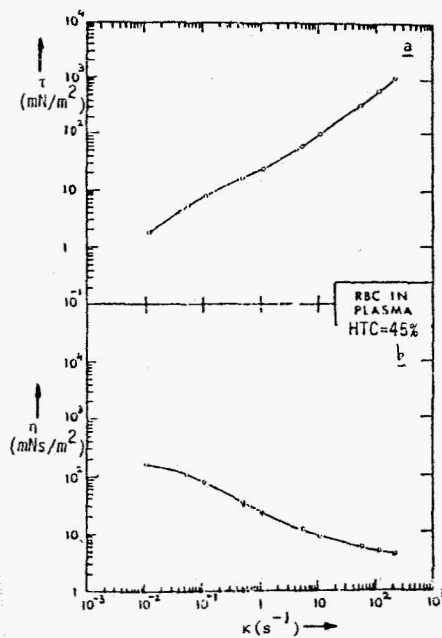
$$(1.16) \quad \eta = C K^{n-1},$$

$$(1.17) \quad \tau_y^{\frac{1}{2}} = \tau_c^{\frac{1}{2}} + \eta_c K^{\frac{1}{2}}.$$

De relaties (1.16) en (1.17) gelden formeel alleen voor enkelvoudige afschuifstromingen of stromingen die daar sterk op lijken. Gebleken is echter dat toepassing van deze relaties op complexere stromingen ook tot goede resultaten kan leiden.

1.2 Parameterwaarden voor bloed

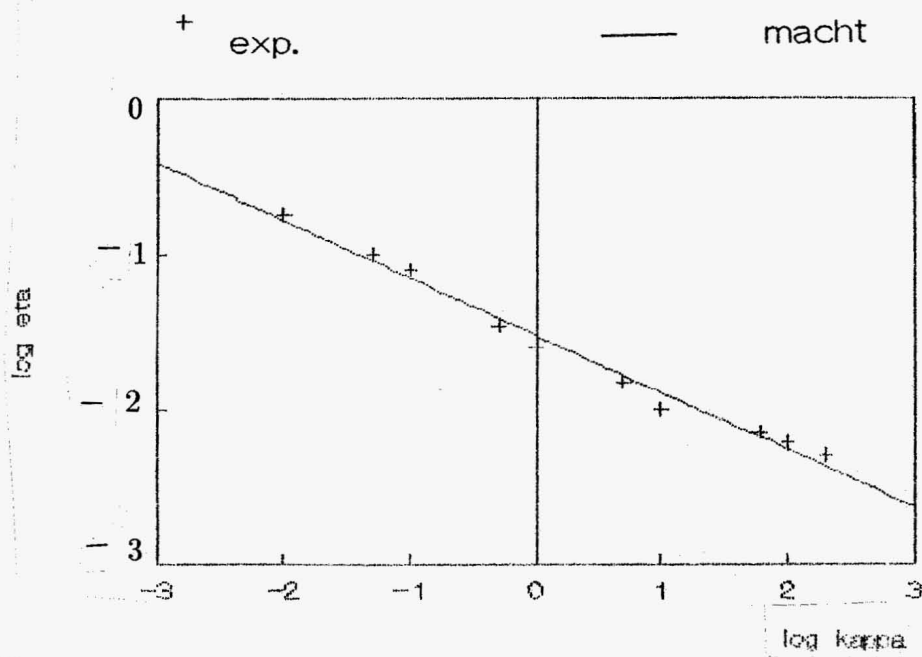
Voor bloed gelden experimentele data zoals weergegeven in figuur 1.4. Het verloop van de viscositeit als functie van de afschuifsnelheid wordt beïnvloed door de rouleaux vorming bij lage afschuifsnelheden en de vervorming van de rode bloedcellen bij hoge afschuifsnelheden.



Figuur 1.4 Typisch verloop van schuifspanning τ en viscositeit η tegen afschuifsnelheid κ voor 45% RBC in plasma, uit [14].

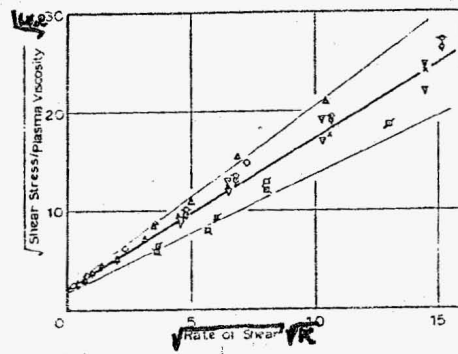
Dit soort metingen zijn gebruikt om de onbekende parameters in de relaties geldend voor het machtwetmodel en het Cassonmodel te schatten. In figuur 1.5 zijn de experimentele data weergegeven die gebruikt zijn voor de fit van het machtwetmodel. Hieruit volgde de schatting:

$$C = 0.030 \pm 0.002 \text{ en } n = 0.63 \pm 0.02;$$



Figuur 1.5

Machtwet-fit op experimentele data in figuur (1.4).



Figuur 1.6

Cassonfit op experimentele data uit [16].

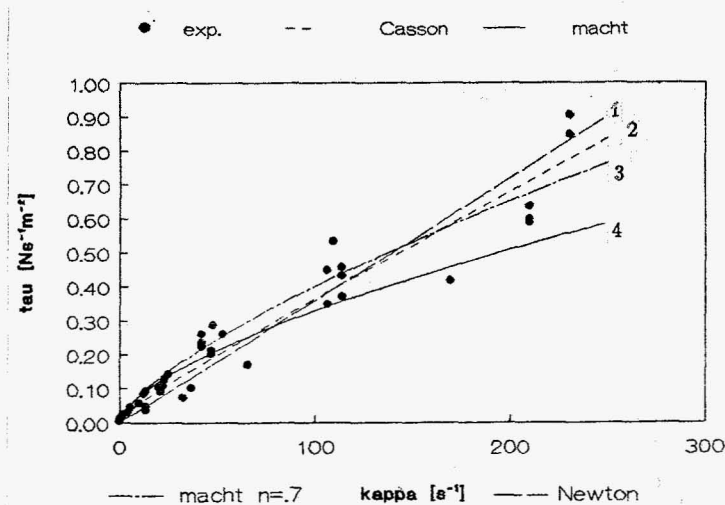
In figuur 1.6 zijn (andere) data weergegeven gebruikt voor de fit van het Cassonmodel:

$$\tau_y = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}, \eta_c = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2}.$$

Deze fit stond bij de figuur in het betreffende artikel vermeld, zonder foutschatting voor de parameters τ_y en η_c . Ook op deze data is de machtwetrelatie gefit met als uitkomst:

$$C = 0.028 \quad \text{en} \quad n = 0.63$$

In figuur 1.7 zijn tenslotte de experimentele data uit en figuur 1.6 weergegeven samen met de fits voor het Newtonse model (curve 1), het Cassonmodel (curve 2), en het machtwetmodel (curve 3). Uit deze figuur blijkt dat met name de machtwetfit voor voor grote waarden van κ ($\kappa > 100 \text{ s}^{-1}$) sterk afwijkt van die voor het Newtonse en Cassonmodel. De oorzaak hiervoor moet waarschijnlijk worden gezocht in de ongelijkmatige verdeling van data punten over de κ range. Om de invloed van de macht n te schatten is ook een fit gedaan bij $n=7$. De resulterende kromme (curve 3 met $C = 0.016$) is eveneens weergegeven in figuur 1.7. Hieruit blijkt dat de waarde van n het verloop van de fitcurve voor grote κ waarden aanzienlijk beïnvloedt en dat het fitresultaat op het oog bezien niet slechter voldoet dan de parameterset voor curve 4. De onzekerheid over de waarde voor n is ook terug te vinden in [16], waar gesteld wordt dat $0.68 < n < 0.8$. In deze studie zal gebruik worden gemaakt van $n = 0.63$, omdat die wiskundig het beste past bij de datasets uit fig. 1.5 / 1.6. Bovendien deze waarde te beschouwen als ondergrens. De bovengrens ($n=1$) zal ook steeds worden meegenomen. De werkelijkheid zal dus waarschijnlijk tussen de te vinden resultaten inliggen. Het gevonden grote verschil tussen de curve 1 en 2 enerzijds en curve 3 anderzijds voor met name grote κ waarden, impliceert ook dat de eventueel te vinden verschillen in stromingsverschijnselen niet alleen een gevolg zijn van het gekozen materiaalmodel, maar ook van de fit parameters.



Figuur 1.7

De schuifspanning als functie van de afschuifsnelheid voor experimentele data uit figuur 1.6 behorende bij bloed. Ook zijn enkele fitcurves aangegeven (zie ook tekst).

Samengevat geldt dat in deze studie als constitutieve modellen zullen worden gebruikt:

$$(1.18) \quad t = 2(3.6 \cdot 10^{-3}) D \text{ (Newtons model);}$$

$$(1.19) \quad t = 2(0.03 K^{0.63}) D \text{ (machtwet model);}$$

$$(1.20) \quad t = 2((4.8 \cdot 10^{-3})^{\frac{1}{2}} + (2.8 \cdot 10^{-3} K)^{\frac{1}{2}})^2 D \text{ (Cassonmodel).}$$

1.3 Discussie

Aan de in deze studie gekozen materiaalmodellen zijn een aantal bezwaren verbonden. Ten eerste voldoet het machtwetmodel niet voor de limiet situaties κ (of K) gaat naar nul of oneindig. Afhankelijk van de waarde van n gaat dan η ook naar nul of oneindig. Dit stemt niet overeen met de experimentele waarnemingen. Ten tweede wordt bij het machtwetmodel de dimensie van de constante C bepaald door de waarde van de macht n , wat fysisch erg ongelukkig is. Ten derde volgt de yieldstress bij het Cassonmodel uit metingen bij kleine waarden van de afschuifsnelheid. De meetnauwkeurigheid is daar echter zo gering dat niet met zekerheid te stellen is dat de yieldstress echt bestaat. En ten vierde is de generalisatie van de 1D relaties naar 2D via de tweede invariant van D alleen exact bij enkelvoudige afschuifstromingen. Dat betekent dat voor de afgeleiden moet gelden:

$$(1.21) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \text{ en } \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ll \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Dit beperkt de klasse van te analyseren stromingsproblemen aanzienlijk. Met name in loslaatgebieden is het maar zeer de vraag of deze aanname daar geldt.

Nog principieler is de vraag of de stroming van een niet-Newtonse vloeistof überhaupt m.b.v. een Reiner-Rivlin relatie (verg. 1.3) te beschrijven is. Hierbij spelen de volgende overwegingen een rol. Een constitutieve relatie moet aan een aantal mathematisch-fysische criteria, waarvan de objectiviteitseis de strengste is, voldoen. Zoals aangetoond in appendix 2 is dat inderdaad het geval voor een Reiner-Rivlin vloeistof. Verder is relatie 1.3 een constitutieve vergelijking voor viscoïnelastische media. Dat betekent dat viscoelastische fenomenen (o.a. geheugeneffecten) buiten beschouwing worden gelaten. Echter ook in een stationaire stroming treedt vanwege de invloed van de convectieve term vertraging en versnelling van vloeistof op. De hiermee samenhangende stromingsfenomenen worden gekarakteriseerd door het Weissenberggetal:

$$(1.22) \quad W = \frac{\lambda V}{L},$$

met λ een karakteristieke relaxatietijd van het medium en V en L een karakteristieke snelheid en lengtemaat van de stroming. Het is de vraag in hoeverre de impliciete aanname $W=0$ voor met name de stroming in een divergerende en convergerende geometrie fysisch juist is. In Kuiken [5] wordt bovendien betoogd dat chemisch-enkelvoudige media zonder geheugen lineair moeten zijn, zodat te verwachten is dat de niet-lineaire, viskeuze media een (klein) geheugen hebben. Dit volgt ook uit de dimensiebeschouwing van vergelijking (1.3):

$$[\beta] = [\text{kg/s m}], [\gamma] = [\text{kg/m}];$$

het quotient γ/β heeft, net zoals overigens τ_y/η_c bij het Cassonmodel, de dimensie van tijd. Met het niet-lineair zijn van het viskeuze medium is dus een natuurlijke tijd verbonden, hetgeen in strijd is met de gemaakte aanname van het viscoïnelastisch zijn van dat medium. Een constitutieve vergelijking van het soort 1.3 is daarom fysisch onjuist. Een meer algemener materiaalmodel, zoals het differentiaal-type of simple fluid, voldoen wel aan de te stellen voorwaarden.

Ondanks de genoemde bezwaren, zal in het vervolg van deze studie toch gewerkt worden met respectievelijk de Newtonse relatie, de machtwet relatie en de Casson-relatie. Hiervoor zijn twee motieven: in de literatuur zijn door Liepsch [6,7] een aantal (vaak experimentele) studies beschreven waarin het machtwetmodel gebruikt is om de gebruikte modelvloeistof (Separan) te karakteriseren. Op de tweede plaats zijn in het programmapakket Sepran, waarmee de bewegingsvergelijkingen voor de vloeistof numeriek zullen worden opgelost, op dit moment naast het Newtonse model alleen deze twee gegeneraliseerd Newtonse materiaalmodellen geïmplementeerd. De genoemde relaties bieden de mogelijkheid om ervaring op te doen met dit nieuwe onderzoeksterrein en geven een eerste schatting van de invloed van niet-Newtonse effecten op het stromingsgedrag in de halsslagadervertakking. In het vervolgonderzoek dient echter de keuze van de constitutieve vergelijking opnieuw ter discussie te staan.

2 Numerieke methode

2.0 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt allereerst nader ingegaan op mathematische vergelijkingen die de vloeistofstroming beschrijven (par. 2.2). Bij de analyse van de stromingsverschijnselen zijn dimensieloze parameters die de vloeistof karakteriseren zeer behulpzaam. Door een juiste keuze van die parameters wordt het aantal zinvol te variëren parameters sterk gereduceerd en wordt een vergelijking met andere studies mogelijk gemaakt. In par. 2.2 worden de gekozen dimensieloze getallen omschreven en toegelicht. De enig echte complicerende factor bij het gebruik van een gegeneraliseerd Newtons materiaalmodel t.o.v. het Newtonse model is de niet-lineaire viscositeitsterm. In par.2.3 wordt de wijze waarop zij wordt gelijkeneariseerd toegelicht. Vervolgens wordt in par.2.4 de discretisatie van het totale stelsel vergelijkingen m.b.v. de Eindige Elementenmethode besproken. Tenslotte wordt in par. 2.5 ingegaan op de keuze van het gebruikt element en het convergentie criterium.

2.1 Mathematische formulering van het fysische stromingsprobleem

Een isotherme incompressibele stationaire stroming wordt beschreven door:

–de impulsvergelijking:

$$(2.1) \quad \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \nabla \cdot \mathbf{t} + \nabla p = 0,$$

waarin: ρ de dichtheid, \vec{v} de snelheidsvector, \mathbf{t} de deviatorische spanningstensor, p de druk;

–de continuïteitsvergelijking:

$$(2.2) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

met als constitutieve vergelijkingen:

– Newtons model:

$$(2.3) \quad \mathbf{t} = 2\eta D,$$

met: $D = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla(\vec{v}^T));$

– gegeneraliseerd Newtonse modellen:

$$(2.4) \quad t = 2\eta(D)D.$$

In deze studie is gebruik gemaakt van twee gegeneraliseerd Newtonse modellen:

–machtwetmodel:

$$(2.5) \quad \eta = C K^{n-1}; K = 4(II_D)^{\frac{1}{2}}.$$

–Cassonmodel:

$$(2.6) \quad \eta = \eta_c (1 + [(\tau_y/\eta_c)K^{-1}]^{\frac{1}{2}})^2$$

Substitutie van de Newtonse constitutieve relatie in de impulsvergelijking geeft de Navier–Stokes vergelijking:

$$(2.7) \quad \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \eta \nabla^2 \vec{v} + \nabla p = 0.$$

De term $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ representeert de dichtheid van de stationaire traagheidskrachten (samenhangend met de convectie van impuls) in de vloeistofstroming, de term ∇p staat voor de de dichtheid van de drukkrachten en de term $\eta \nabla^2 \vec{v}$ voor de dichtheid van de wrijvingskrachten.

2.2 Dimensieloze getallen

De meest voor de hand liggende dimensieloze grootheid is het Reynoldsgetal. Dat is een maat voor de verhouding van de stationaire traagheidskrachten tot de viskeuze krachten. Liepsch en Moravec geven in [7] de volgende definitie van het Reynoldsgetal voor de stroming door een ronde rechte buis:

$$(2.8) \quad Re = \frac{u_m d \rho}{\eta_m}$$

met : u_m de gemiddelde vloeistofsnelheid,
 $\eta_m = \frac{\tau(\kappa_m)}{\kappa_m}$ de representatieve viscositeit,
 $\kappa_m = \frac{2\pi u_m}{d}$ de gemiddelde afschuifnelheid,
 d de diameter van de buis.

Substitutie van het machtwetmodel (1.7) in (2.8) geeft:

$$(2.9) \quad \text{Re}_{mw} = \left(\frac{2\pi\rho}{C}\right) \left(\frac{d}{2\pi}\right)^n u_m^{2-n}.$$

Substitutie van het Cassonmodel (1.8) in (2.8) geeft:

$$(2.10) \quad \text{Re}_C = \frac{2\pi u_m^2}{\tau_y + 2\sqrt{(\tau_y \eta_c 2\pi u_m d^{-1}) + \eta_c 2\pi u_m d^{-1}}}.$$

Een andere zinvolle dimensieloze parameter is die welke het niet-Newtonse karakter van de vloeistof beschrijft. Bij het machtwetmodel is dat de macht n . Voor het Cassonmodel is een definitie van zo'n parameter ook mogelijk, door uit te gaan van de beschrijvende relatie:

$$(1.8) \quad |\tau|^{\frac{1}{2}} = |\tau_y|^{\frac{1}{2}} + |\eta_c \kappa|^{\frac{1}{2}}.$$

Met de verhouding van de yieldstress t.o.v de puur viskeuze term definiëren we het zgn. Cassongetal:

$$(2.11) \quad Y = \frac{\tau_y d}{\eta_c 2\pi u_m}.$$

Niet-Newtonse stromingen vertonen in het algemeen vloeistofgeheugeneffecten. Bij het beschrijven van deze stromingen is het gebruikelijk om het dimensieloze Weissenberggetal te definiëren. Dit getal geeft de verhouding weer van de interne tijd van het medium en een karakteristieke tijd van de stroming:

$$(2.12) \quad W = \frac{\lambda V}{L},$$

waarin: λ een karakteristieke tijd van de vloeistof (een maat voor het geheugen van de vloeistof) zoals bijvoorbeeld gedefinieerd in het Maxwell model voor niet-Newtonse stromingen, zie [14], V een karakteristieke snelheid van de vloeistof, en L een karakteristieke lengte van de geometrie. In de in dit onderzoek uitgevoerde analyses zullen we impliciet aannemen dat $W=0$.

2.3 Linearisatie van de viskeuze termen

De niet-lineaire convectieve termen in de Navier-Stokes vergelijking worden hierbij gelineariseerd met behulp van de Newton iteratie (zie ook van Steenhoven [13]). Indien een gegeneraliseerd Newtons model als constitutieve vergelijking gebruikt wordt bevatten de vergelijkingen (2.1) niet-lineaire viskeuze termen. Deze termen zijn van de vorm $\eta(u) \frac{\delta u}{\delta x}$.

Om de eindige elementen methode toe te kunnen passen moeten deze termen gelineariseerd worden. Dat kan bijvoorbeeld d.m.v. Picard iteratieschema:

$$(2.13) \quad \eta_{m+1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{m+1} \simeq \eta_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{m+1}.$$

Het voordeel van dit schema is dat bij toepassing hiervan bij het machtwetmodel in fysische problemen in een groot gebied van waarden voor de macht n convergentie optreedt (Damsteegt [2]); het schema heeft als nadeel dat het slechts lineair convergeert. Om een convergentieproces te krijgen dat kwadratisch convergeert kunnen we uitgaan van de Newton linearisatie:

$$(2.14) \quad \eta_{m+1} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{m+1} \simeq \eta_{m+1} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_m + \eta_m \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{m+1} - \eta_m \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_m.$$

De term met η_{m+1} is nu nog steeds niet lineair; zij hangt immers af van D_{m+1} . Daarom

lineariseren we deze ook; daarvoor gebruiken we de Newton-Raphson methode. Stel η is een functie van \vec{A} , met \vec{A} een vektor die snelheden en snelheidsafgeleiden bevat. Dan volgt:

$$(2.15) \quad \eta_{m+1} \simeq \eta_m + (\vec{A}_{m+1} - \vec{A}_m) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vec{A}} \right) \Big|_m + \frac{1}{2} (\vec{A}_{m+1} - \vec{A}_m)^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \vec{A}^2} \right) \Big|_m.$$

Als $\vec{A}_{m+1} \simeq \vec{A}_m$ (dus als we de echte oplossing dicht benaderen) dan is de laatste term klein t.o.v. de voorgaande. Verwaarlozen we deze term, dan blijft de fout in (2.14) van de tweede orde. Substitutie van (2.15) in (2.14) geeft (2.16):

$$(2.16) \quad \eta_{m+1} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{m+1} \simeq \eta_m \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{m+1} + (\vec{A}_{m+1} - \vec{A}_m) \left. \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vec{A}} \right) \right|_m \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_m.$$

Het voordeel van dit schema is dat het kwadratisch convergeert; het nadeel is dat bij toepassing van dit schema in fysische problemen niet altijd convergentie optreedt. De oorzaak hiervan is gelegen in het veel kleinere convergentiegebied van de Newton methode t.o.v. de Picard methode.

In (2.16) moet de term $((\vec{A}_{m+1} - \vec{A}_m) (\partial \eta / \partial \vec{A}))$ nog verder uitgewerkt worden. Voor een tweedimensionale stroming van een gegeneraliseerd Newtonse vloeistof geldt in cartesische coördinaten:

$$(2.17) \quad A^T = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$(2.18) \quad \frac{\partial \eta}{\partial \vec{A}} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial K} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial \vec{A}} \right),$$

$$(2.19.a) \quad \frac{\partial K}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = 2 \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$(2.19.b) \quad \frac{\partial K}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)} = 2 \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$(2.19.c) \quad \frac{\partial K}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

met voor het machtwetmodel:

$$(2.20) \quad \frac{\partial \eta}{\partial K} = (n-1) C K^{n-2},$$

en voor het Cassonmodel:

$$(2.21) \quad \frac{\partial \eta}{\partial K} = \tau_y (K^{-3/2} - K^{-2})$$

Voor een gedetailleerde beschrijving van de wijze waarop deze linearisaties in Sepran (zie

ook par. 2.4) zijn geïmplementeerd wordt verwezen naar Damsteegt [2]. Voor de linearisatie van de viskeuze termen wordt als volgt gebruik gemaakt van de linearisatieschema's. Voor het machtwetmodel: $0 < n < 1$ Picard, $n > 1$ Newton–Raphson; voor het Cassonmodel: Picard.

2.4 Discretisatie van de Navier–Stokes vergelijking volgens de Eindige Elementenmethode.

Voor het numeriek oplossen van de Navier–Stokes vergelijking is gebruik gemaakt van de Eindige Elementen Methode. De berekeningen zijn gedaan met het programmapakket Sepran. Appendix 1 bevat een beknopte uitleg van deze methode, voor een uitgebreide beschrijving wordt verwezen naar van Steenhoven [13]. Discretisatie van de vergelijkingen (2.1) en (2.2) volgens de directe methode levert als Galerkin vergelijkingen (in matrix-vorm):

– impulsvergelijkingen:

$$(2.22) \quad S(\vec{u})\vec{u} + N(\vec{u})\vec{u} + L^T \vec{p} = \vec{0}$$

– continuïteitsvergelijkingen:

$$(2.23) \quad L\vec{u} = \vec{0}$$

waarbij: \vec{u} de gediscrètiseerde snelheid, S de spanningsmatrix (voor een gegeneraliseerd Newtonse vloeistof is S een functie van \vec{u}), $N(\vec{u})$ de convectiematrix, L de divergentie-matrix.

De discretisatie van de Navier Stokes vergelijking volgens de directe methode heeft als belangrijk nadeel dat het stelsel vergelijkingen zeer groot wordt, omdat er in de meeste knooppunten drie onbekenden zijn, en dus veel rekentijd vraagt. Bovendien bevat de hoofddiagonaal nullen omdat de drukonbekenden niet in de continuïteitsvergelijking voorkomen. Hierdoor moet het tijdrovende partial pivoting worden toegepast. Daarom wordt de boetefunctiemethode gebruikt waardoor het stelsel vergelijkingen voor de snelheid en de druk ontkoppeld wordt. Het principe van deze methode is om in het stelsel vergelijkingen de continuïteitsvergelijking te vervangen door de volgende relatie tussen \vec{u} en p :

$$(2.24) \quad \epsilon p + \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

waarbij ϵ een zeer kleine parameter is. Door deze aanname is het mogelijk de druk in de snelheid uit te drukken en te substitueren in (2.22). Zo geeft de boetefunctiemethode in gediscretiseerde vorm als vergelijkingen:

$$(2.25) \quad S(\vec{u})\vec{u} + N(\vec{u})\vec{u} + \frac{1}{\epsilon}L^T M_p^{-1}L\vec{u} = \vec{0},$$

en de druk wordt berekend uit:

$$(2.26) \quad \epsilon M_p \vec{p} = L\vec{u}.$$

De matrix M_p is genaamd de drukstijfheidsmatrix; ϵ moet zodanig gekozen worden dat $\epsilon P = O(10^{-6})$. Een nadeel van deze methode is dat de oplossing van het probleem afhankelijk is van de keuze van de waarde voor ϵ .

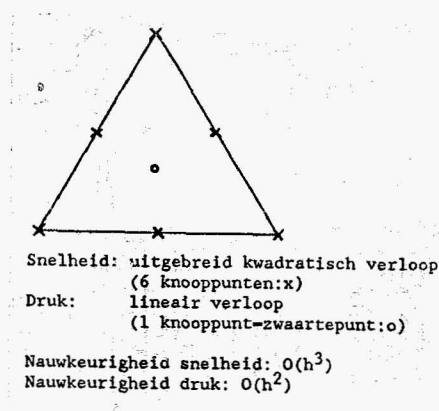
2.5 Enkele praktische aspecten.

Voor de discretisatie in de plaats is het gemodificeerde Crouzeix–Raviart element met 6 knooppunten voor de snelheid en 1 knooppunt voor de druk gebruikt (zie figuur 2.1). Er is ook een groep elementen die Taylor–Hood elementen genoemd worden. Het gebruik van dit Crouzeix–Raviart element heeft als voordeel, t.o.v. Taylor–Hood elementen, dat voor dit element per element voldaan wordt aan de continuïteitsvoorwaarde. Dit is fysisch erg aantrekkelijk. Voor de snelheid heeft dit element een nauwkeurigheid $O(h^3)$ en voor de druk $O(h^2)$. De keuze van de elementenverdelingen en van het aantal elementen worden in hoofdstuk 3 per probleem besproken. Daarbij speelde de opmerking van Damsteegt [2], dat in gebieden met grote κ de elementenverdeling verfijnd moet worden, een rol. Op de uitstroomrand zijn een aantal keuzes mogelijk voor de te gebruiken randvoorwaarden:

- $u = v =$ Voorgescreven; dit heeft echter oscillaties in de oplossing tot gevolg,
- $\frac{\partial u}{\partial n} = v = 0$: Een volledig ontwikkelde stroming, dit is correct als inderdaad de stroming volledig ontwikkeld is. Het gebruik van deze randvoorwaarde kan dan echter leiden tot veel vrijheidsgraden in een gebied van relatief gering belang. Een oplossing kan verkorting van het uitstroomkanaal zijn, echter met het risico dat er in de oplossing in het uitstroomkanaal oscillaties optreden.
- $\sigma_n = \sigma_t = 0$: Spanningsvrije uitstroming. Dit heeft op de uitstroomrand fysisch geen

zinvolle betekenis, maar gebleken is dat de invloed van deze randvoorwaarde op de numerieke oplossing vlak voor de rand weinig invloed heeft. Hiermee kan een korter uitstroomdeel worden gebruikt (zie v.d. Vosse [15]).

De uiteindelijke keuze wordt in hoofdstuk 3 per probleem nader toegelicht.



Figuur 2.1 Het gemodificeerde Crouzeix–Raviart element.

Het stelsel vergelijkingen (2.24) wordt iteratief opgelost m.b.v. de in het voorgaande besproken linearisaties. Als startoplossing nemen we de oplossing van de Stokesvergelijking (Navier–Stokes vergelijking waaruit de convectieve termen zijn weggelaten):

$$(2.27) \quad S \vec{u} + L^T \vec{p} = \vec{0}.$$

In het geval van gegeneraliseerd Newtonse modellen is het vaak voordelig om in de eerste iteratieslag een Newtons model te gebruiken (om het aantal iteraties te beperken).

Het iteratieproces wordt beëindigt als het maximale verschil tussen de oplossing na slag I en de oplossing na slag $I-1$ kleiner is dan een zelf te kiezen waarde (bv.: als de snelheid een waarde heeft in de orde 10^{-1} dan wordt voor dat maximale verschil vaak 10^{-6} gekozen):

$$(2.28) \quad \|u^{i+1} - u^{i-1}\|_{\infty} \leq 10^{-6}.$$

3 Berekeningen

3.0 Inleiding

Om de invloed van het niet-Newtonse karakter van bloed op stationaire snelheidsprofielen in de halsslagader te onderzoeken zijn voor enkele geometrieën berekeningen gedaan met naast de Newtonse ook twee gegeneraliseerd Newtonse constitutieve modellen. Allereerst zijn als testprobleem berekeningen gedaan aan de stroming door een ronde rechte buis (par. 3.1). De stroming door een ronde rechte buis is een interessant testprobleem, omdat voor dit probleem analytische oplossingen mogelijk zijn. Hierdoor kunnen analytische, numerieke en experimentele snelheidsprofielen met elkaar vergeleken worden. Het betekent ook dat een test mogelijk is voor het numerieke programma. Vervolgens zijn numeriek berekeningen gedaan aan de stroming in een divergerende buis (par.3.2), en in de 2d-vertakking (par. 3.3). Het bijzondere van de divergerende buis is dat ondanks de eenvoudige geometrie toch grote loslaatgebieden optreden. We verwachten dat juist daar de niet-Newtonse modellen tot grote verschillen t.o.v. de Newtonse situatie leiden. De 2d-vertakking is gekozen als vereenvoudigde representant van de 3d vertakking. Bovendien is voor deze drie geometrieën voor de Newtonse situatie een vergelijking van de resultaten mogelijk met resultaten uit de literatuur (ronde rechte buis: Damsteegt [2], divergerende buis: Ter Huurne [4], 2d-vertakking: Rindt [10]), hetgeen gebeurt in par. 3.3. In deze paragraaf worden tenslotte enige conclusies getrokken uit de resultaten zoals besproken in dit hoofdstuk.

3.1 Ronde rechte buis

3.1.1 Analytische berekeningen

Voor de stationaire incompressibele volledig ontwikkelde en laminaire stroming in een ronde rechte buis geldt als bewegingsvergelijking (zie van Steenhoven [14]):

$$(3.1) \quad \frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau_{rz})$$

met: z, r : axiale, respectievelijk radiale coördinaat,

τ_{rz} : schuifspanning in stroming in z -richting loodrecht op de r -coördinaat,

p :druk.

Vanwege het volledig ontwikkeld zijn van de stroming is de druk geen functie van r
Integratie van de bewegingsvergelijking van 0 naar r levert dan:

$$(3.2) \quad \tau_{rz} = \frac{1}{2} r \frac{dp}{dz}$$

Dus de schuifspanning in de buis varieert lineair met de afstand tot de buisas,
onafhankelijk van de constitutieve relatie van de vloeistof. Als constitutieve
vergelijkingen stellen we:

– Newtonmodel:

$$(3.3) \quad \tau_{rz} = \eta \frac{du}{dr},$$

– machtwetmodel:

$$(3.4) \quad \tau_{rz} = C \left(\left| \frac{du}{dr} \right| \right)^n,$$

– Cassonmodel:

$$(3.5) \quad |\tau_{rz}|^{\frac{1}{2}} = |\tau_y|^{\frac{1}{2}} + (\eta_c \left| \frac{du}{dr} \right|)^{\frac{1}{2}}.$$

Invullen van de constitutieve vergelijking in de geïntegreerde bewegingsvergelijking en
integratie daarvan over r van r tot R levert met behulp van de randvoorwaarde $u = 0$ op
de wand als snelheidsverdeling:

– voor het Newtonmodel:

$$(3.6) \quad u(r) = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dz} \right) (R^2 - r^2),$$

– voor het machtwetmodel:

$$(3.7) \quad u(r) = -\left(\frac{1}{2C} \left| \frac{dp}{dz} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{-1} (R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1}),$$

—voor het Cassonmodel:

$$(3.8) \quad u(r) = \frac{1}{\eta_c} |\tau_y| (R-r) - \frac{1}{\eta_c} \frac{2}{3} (2 |\tau_y| \left| \frac{dp}{dz} \right|)^{\frac{1}{2}} (R^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{4\eta} \left| \frac{dp}{dz} \right| (R^2 - r^2),$$

voor $r_c < r < R$,

$$(3.9) \quad u(r) = u(r_c) \text{ voor } 0 < r < r_c,$$

$$(3.10) \quad r_c = 2\tau_y \left(\left| \frac{dp}{dz} \right| \right)^{-1}.$$

In de bovenstaande uitdrukkingen voor de snelheidsverdeling $u(r)$ komen termen met dp/dz voor. Deze kunnen we uitdrukken in de gemiddelde snelheid u_m ; daartoe gaan we uit van de volumestroom \dot{V} :

$$(3.11) \quad \dot{V} = 2\pi \int_0^R u(r) r \, dr = u_m \pi R^2$$

Substitutie van de verschillende snelheidsverdelingen (3.7) t/m (3.10) in vergelijking (3.11) levert na integratie:

— voor een Newtonse vloeistof:

$$(3.12) \quad u_m = \frac{1}{8\eta} \left| \frac{dp}{dz} \right| R^2$$

— voor een machtwetvloeistof:

$$(3.13) \quad u_m = \left[\left(\frac{1}{2C} \left| \frac{dp}{dz} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{-1} \right] (1+n)/(1+3n) R^{\frac{1}{n}+1}$$

— voor een Cassonvloeistof:

$$(3.14) \quad \dot{V} = 2\pi \int_0^R u(r) r dr = 2\pi \int_0^{r_c} u(r) r dr + 2\pi \int_{r_c}^R u(r) r dr$$

Omdat $r_c = r_c(\tau_y, |\frac{dp}{dz}|)$ levert integreren van de snelheidsverdeling voor het Casson-model een vergelijking op die niet lineair is in $|\frac{dp}{dz}|$. Om een oplossing te vinden voor $|\frac{dp}{dz}|$ moeten we deze vergelijking numeriek oplossen. Uit de resultaten van de numerieke berekeningen zal echter blijken (voor de in deze studie gebruikte materiaalparameters), dat de waarde van $|\frac{dp}{dz}|$ voor een volledig ontwikkelde stroming in een ronde rechte buis onafhankelijk is van de gebruikte constitutieve relatie (zie par. 3.2.1). Hieruit volgt dat we voor het Cassonmodel $|\frac{dp}{dz}|$ kunnen berekenen uit de analytische uitdrukking (3.1.5) voor het Newtonmodel. Dit geeft (Schram, [11]):

$$(3.15) \quad \left| \frac{dp}{dz} \right| = \frac{16 \rho u_m^2}{Re R}$$

Met $u_m = 0.13 \text{ ms}^{-1}$, $R = 0.004 \text{ m}$, $Re = 300$, $\rho = 1050 \text{ kgms}^{-3}$ geeft dit: $|\frac{dp}{dz}| = 237.0 \text{ Nm}^3$ en $r_c = 4.11 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.01 R$.

We kunnen nu met de gevonden uitdrukkingen voor $|\frac{dp}{dz}|$ uitdrukkingen geven voor de snelheidsverdelingen behorende bij de verschillende constitutieve modellen:

–voor het Newtonse model:

$$(3.16) \quad u(r) = 2u_m (1 - (r/R)^2),$$

–voor het machtwetmodel:

$$(3.17) \quad u(r) = u_m (1+3n)/(1+n) (1 - (r/R)^{\frac{1}{n}+1}),$$

–voor het Cassonmodel:

$$(3.18) \quad u(r) = \frac{1}{\eta_c} |\tau_y| (R-r) - \frac{1}{\eta_c} \frac{2}{3} (2|\tau_y| |\frac{dp}{dz}|)^{\frac{1}{2}} (R^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{4\eta_c} |\frac{dp}{dz}| (R^2 - r^2).$$

voor $r_c < r < R$,

en

$$(3.19) \quad u(r) = u(r_c) \text{ voor } 0 < r < r_c.$$

De resultaten van de berekeningen met vergelijking (3.16) t/m (3.19) worden in de par. 3.1.2 vergeleken met de uitkomsten van de numerieke berekeningen.

3.1.2 Numerieke berekeningen

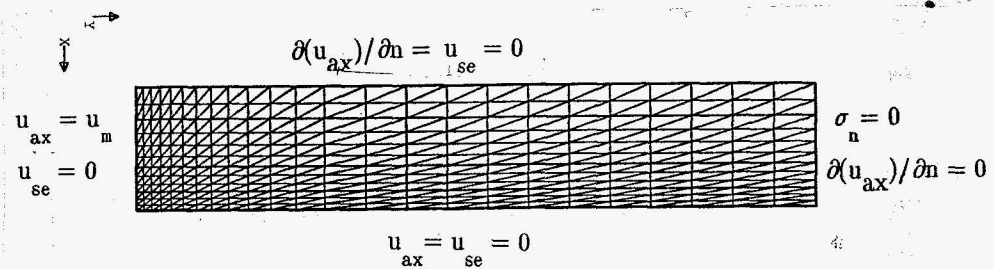
De berekeningen zijn gedaan voor $Re = 300$. Als waarde voor de Newtonse viscositeit is gebruikt: $\eta = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$. Voor het machtwetmodel is uitgegaan van de gekozen waarde voor het Reynoldsgetal en de waarde voor de parameter n uit het model de parameter C berekend. De berekeningen voor het Cassonmodel zijn gedaan voor de waarden $Y=0.000, 0.105, 0.050$ en 1.000 . De stationaire stroming in de halsslaga-dervertakking wordt beschreven door $Re = 300, Y = 0.105$ (Cassonmodel), $n = 0.63$ (machtwetmodel), η (Newtons model).

De stromingsgeometrie, de elementenverdeling en de randvoorwaarden zoals gebruikt bij de numerieke berekeningen zijn weergegeven in figuur 3.1. De schaalfactor in de radiale richting is hierbij een faktor 2.5 zo groot als die in de axiale richting. Uit symmetrieoverwegingen is de halve buis genomen. De diameter is 8 mm, overeenkomend met de diameter van de communis. Een vlak instroomprofiel is gebruikt als randvoorwaarde op de instroomrand. Om een volledig ontwikkelde stromings situatie te bereiken moet de lengte van de buis voldoende groot zijn: als vuistregel wordt in het geval van een Newtonse vloeistof vaak gebruikt: $l = 0.045 Re d$. Omdat deze regel niet zondermeer geldt voor gegeneraliseerd Newtonse vloeistoffen, is hier voor de lengte van de buis gekozen: $l = 0.075 Re d$. De keuze van de faktor 0.075 is arbitrair maar, zoals zal blijken, voldoende groot. Het totale gebied is in twee deelgebieden opgedeeld:

- gebied 1 voor $z < 0.01\text{m}$ met 12 elementen in radiale richting en 6 elementen in axiale richting;
- gebied 2 voor $z > 0.01 \text{ m}$ met eveneens 12 elementen in radiale richting en 20 elementen in axiale richting.

De verdeling van het totale gebied in twee deelgebieden maakte het mogelijk om aan de instroomrand een verfijnde elementverdeling te gebruiken. Hierdoor kan beter rekening

gehouden worden met instroomverschijnselen. Voor het gehele gebied geldt dat aan de wand de elementverdeling is verfijnd, zodanig dat de lengte in radiale richting van een element aan de symmetrieas 3 maal zo groot is als die lengte van een element aan de wand. Door deze verfijning wordt beter rekening gehouden met de relatief grote snelheidsgradienten die aan de wand optreden. Dit is met name van belang bij de gegeneraliseerd Newtonse modellen: de viscositeit is dan immers afhankelijk van de afschuifsnellheid.



Figuur 3.1 Geometrie, elementenverdeling en randvoorwaarden zoals gebruikt bij de berekeningen aan de ronde rechte buis. De posities zijn aangegeven waarop de axiale snelheden aan de ronde rechte buis. De posities zijn aangegeven waarop de axiale snelheden zijn uitgewerkt.

Berekeningen zijn op verschillende manieren uitgewerkt:

- a) de axiale snelheidsprofielen (numeriek en analytisch) worden op $z = 0.01$ m en $z = 0.18$ m gegeven. Hierbij correspondeert positie $z = 0.01$ met een positie vlakbij de instroming, positie $z = 0.18$ correspondeert met de uitstroomrand (figuur 3.2 en 3.3);
- b) het drukverloop op de symmetrieas (figuur 3.4);
- c) het verloop van de wandschuifspanning (figuur 3.5).

In alle figuren worden de resultaten dimensieloos gepresenteerd:

- de axiale of radiale afstand is dimensieloos gemaakt met de diameter d van de buis;
- de druk is dimensieloos gemaakt met (ρu_m^2) ;
- de wandschuifspanning is dimensieloos gemaakt met de analytische waarde voor de wandschuifspanning voor een incompressibele volledig ontwikkelde laminaire

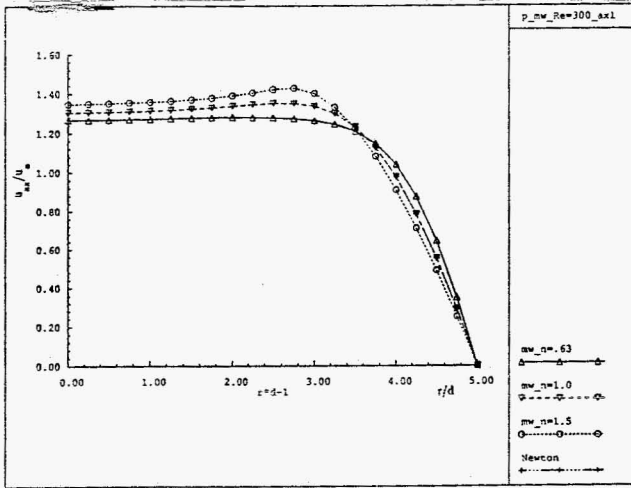
stroming door een ronde rechte buis :

$$(3.20) \quad \tau_w = 8 \rho u_m^2 / \text{Re}$$

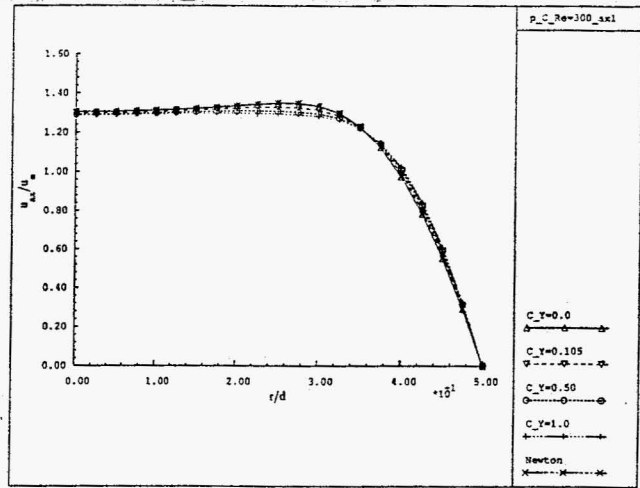
3.1.3 Resultaten

We zien uit de figuren 3.2.a/b/c en 3.3.a/b/f/d/e voor de axiale snelheidsprofielen dat de snelheidsprofielen voor het Newtonse model, het Cassonmodel met $Y = 0.0$ en het machtwetmodel met $n = 1.0$ samenvallen, zoals verwacht. Verder vertonen de snelheidsprofielen een bobbel voor $r/d \approx 3$. Deze bobbel is het gevolg van de discontinuïteit van de randvoorwaarde op de wand in het punt $(0.004, 0.0)$: daar is een vlak instroomprofiel op de instroomrand voorgeschreven terwijl op het overige deel van de wand als randvoorwaarde $u = v = 0$ is voorgeschreven. Dit verschijnsel wordt ook besproken door Damsteegt [2, p.20]: "Deze bobbel is een opvallend fenomeen dat voorkomt bij lage waarden van Re en in wat mindere mate voor grote ReDe vloeistof aan de wand zal na de intree zeer sterk afgeremd worden zodat een grote hoeveelheid van de wand weg zal moeten stromen, waardoor de bobbel ontstaat. ...Als het snelheidsprofiel op de instroomrand nabij de wand wordt afgerond, verdwijnt de bobbel al snel. Experimenteel is de bobbel ook nooit aangetoond bij zuiver viskeuze media. Numeriek wel,..." Ook valt op dat in het geval van het machtwetmodel en $n > 1$ deze bobbel in grootte toeneemt; voor $n < 1$ wordt hij juist kleiner. In het geval van het Cassonmodel zien we dat voor toenemende waarde van Y de bobbel kleiner wordt. Ook zien we dat, als bloed beschreven wordt met het machtwetmodel als constitutieve vergelijking dit resulteert in grotere afwijkingen van het Newtonse snelheidsprofiel dan wanneer het Cassonmodel gebruikt wordt (fig. 3.4, 3.7 en 3.10); Figuur 3.5 t/m 3.7 geven de numerieke snelheidsprofielen op de uitstroomrand, 3.8 t/m 3.10 de analytische. Hieruit blijkt dat er best forse verschillen zijn tussen de profielen voor de verschillende constitutieve relaties. De invloed van de gegeneraliseerd Newtonse modellen op de axiale snelheidsprofielen op de uitstroomrand is duidelijk: er treden grotere snelheidsgradienten op aan de wand; omdat voor de drie modellen het debiet konstant is betekent dit ook lagere topwaarden. Verder zijn de analytische snelheidsprofielen in zeer goede overeenstemming met de numerieke. Dit blijkt uit het feit dat de axiale snelheden op de symmetrieas goed overeenstemmen, evenals de vorm van de profielen.

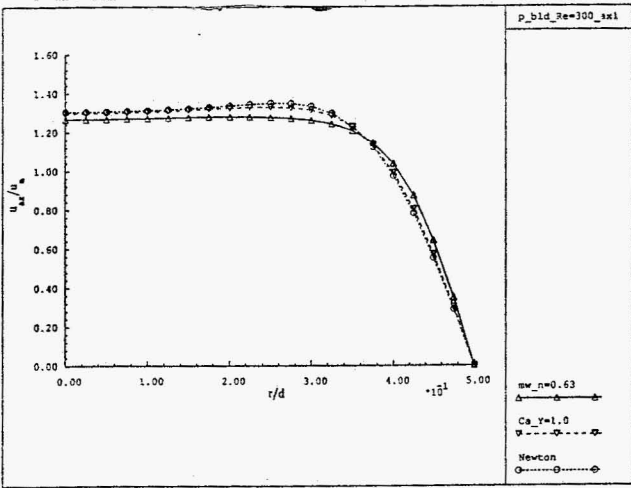
Uit de figuren m.b.t. het drukverloop op de symmetrieas (figuur 3.11 t/m figuur 3.13)



a



b



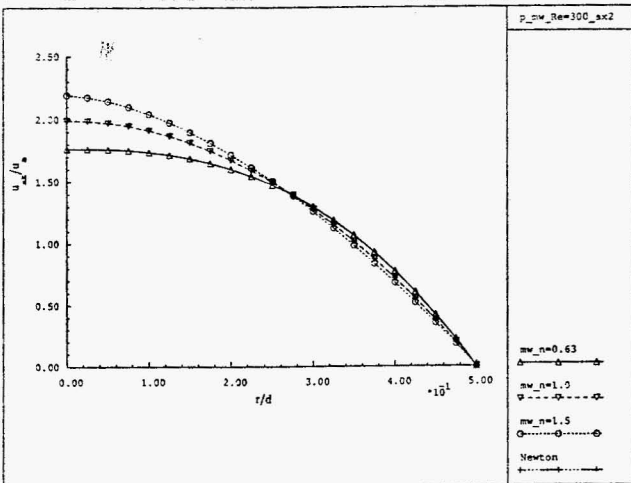
c

Figuur 3.2

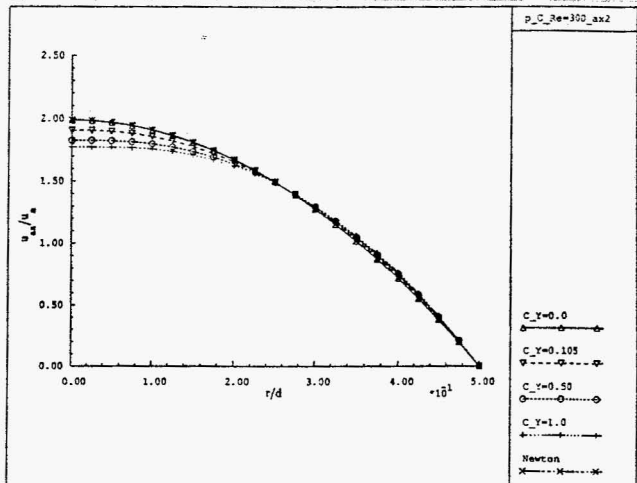
Numerieke axiale snelheden op $z = 0.01$ m in de ronde rechte buis voor berekeningen met het machtwetmodel (a.), Cassonmodel (b.), bloedparameterwaarden (c.).

Figuur 3.3

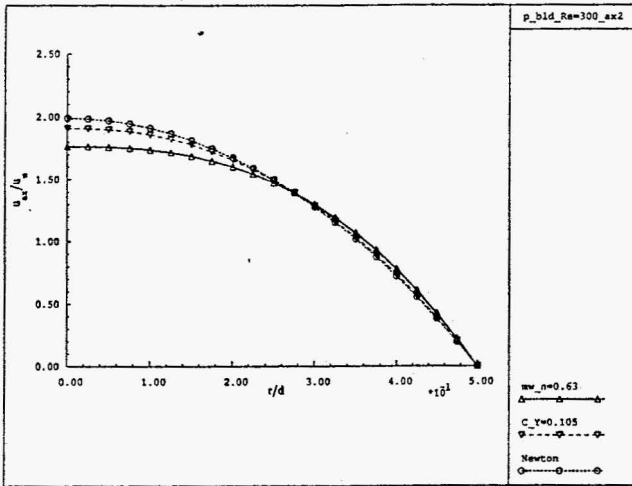
Numerieke axiale snelheden op $z = 0.18$ m in de ronde rechte buis voor berekeningen met het machtwetmodel (a.), Cassonmodel (b.), bloedparameterwaarden (c.);



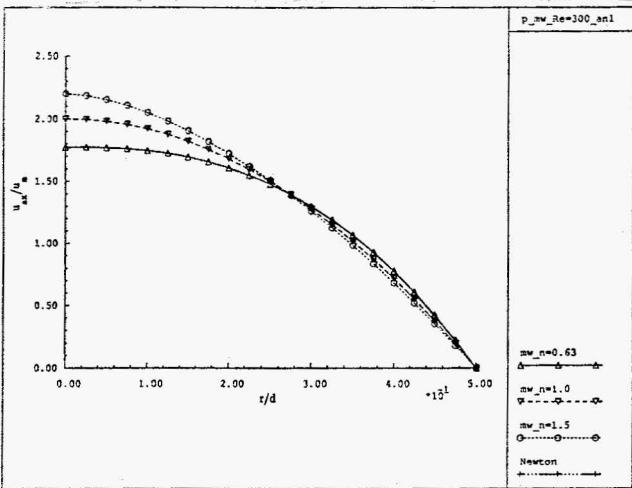
a



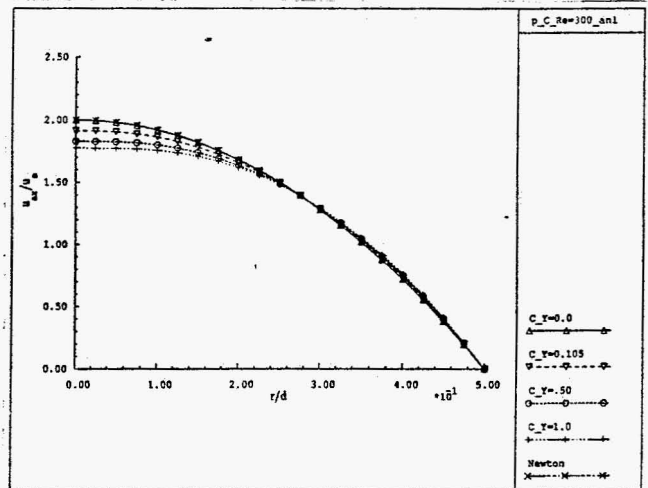
b



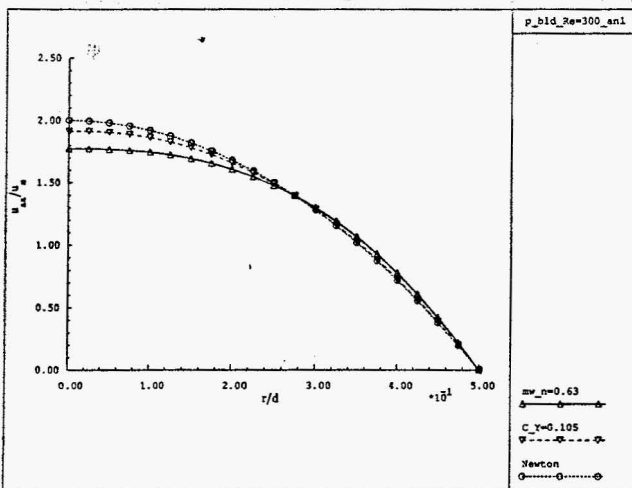
c



d

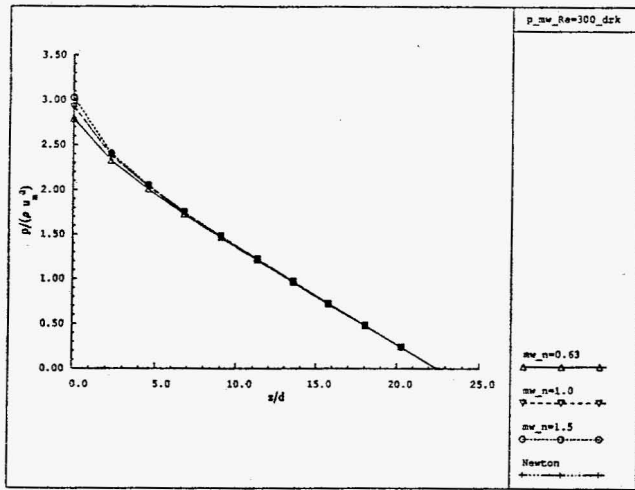


e

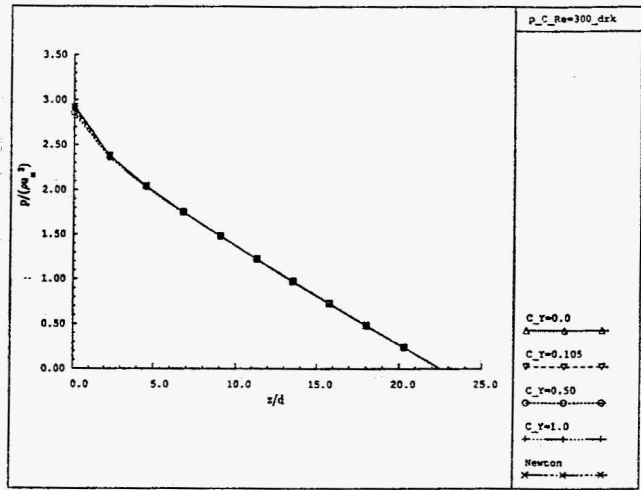


f

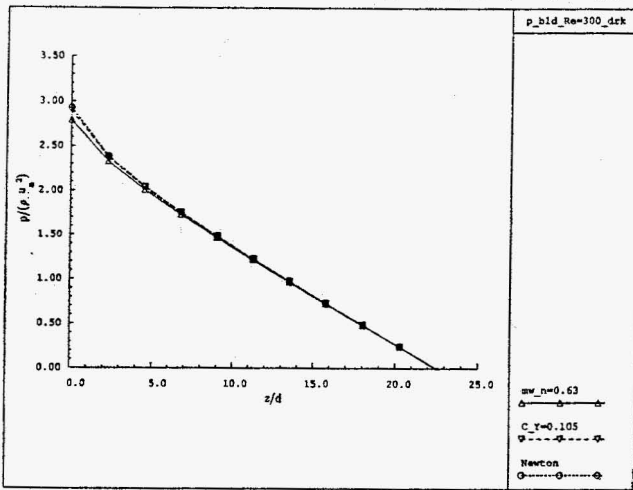
analytische axiale snelheden op
 $z = 0.18 \text{ m}$ voor berekeningen
 met het machtwetmodel (d.), Casson
 model (e.), bloedparameterwaarden (f.).



a

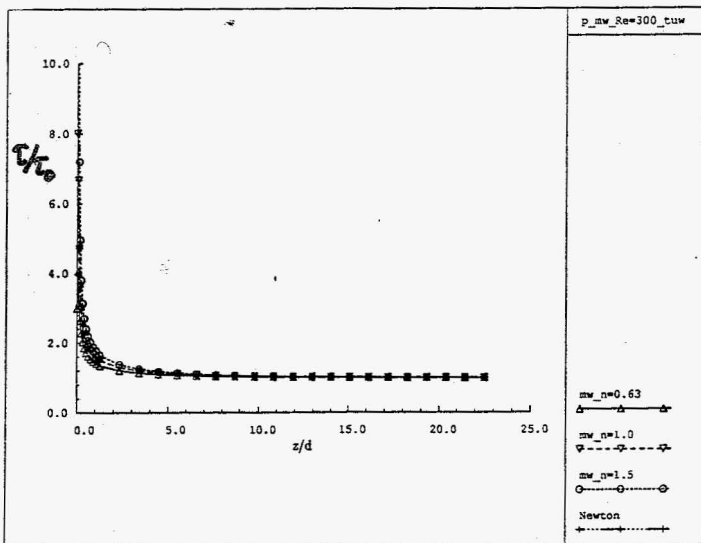


b



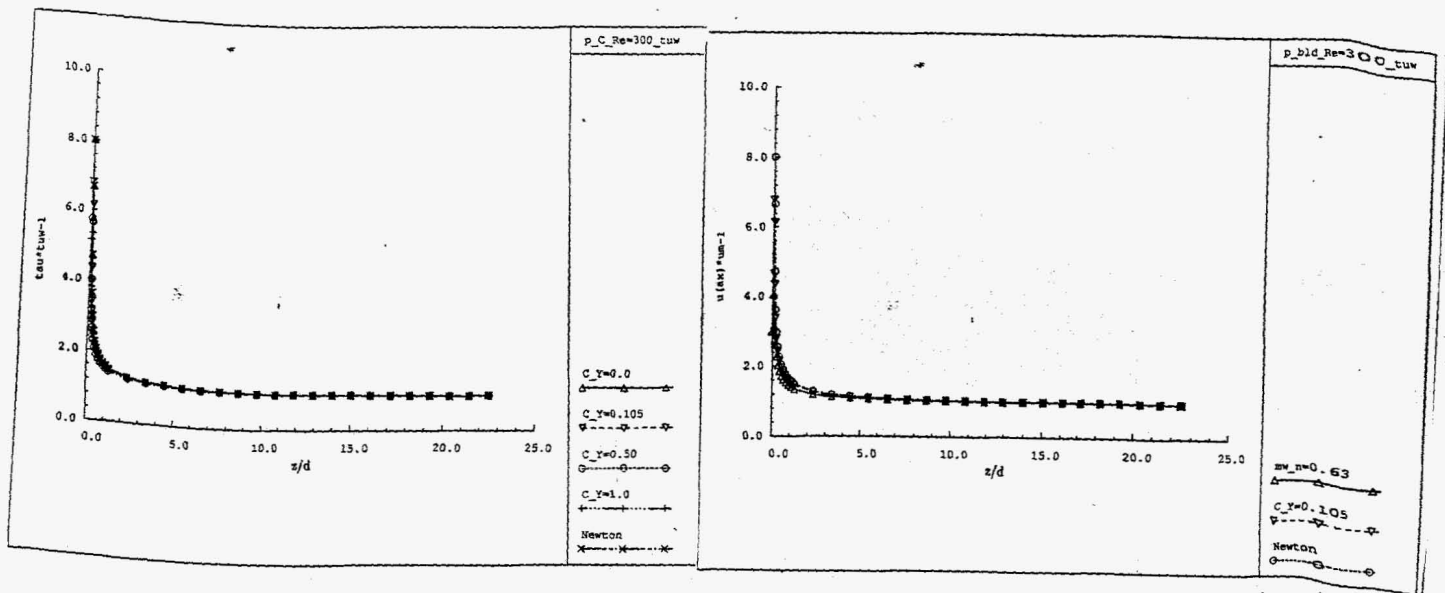
c

Figuur 3.4 Drukverloop op symmetrieas in de ronde rechte buis voor berekeningen met het machtwetmodel (a.), Casson model (b.), bloedparameterwaarden (c.).



a

Figuur 3.5 Het verloop van de wandschuifspanning in de ronde rechte buis voor berekeningen met het machtwetmodel (a.), Cassonmodel (b.), bloedparameterwaarden (c.).



b

c

blijkt dat het machtwetmodel, het Cassonmodel of het Newtonse model slechts kleine verschillen geven. Ook geldt dat als de stroming volledig ontwikkeld is, het drukverloop op de symmetrieas onafhankelijk is van de gebruikte constitutieve relatie.

Uit de figuren m.b.t. de wandschuifspanning (figuur 3.5) blijkt dat de wandschuifspanning slechts gering beïnvloed wordt door de constitutieve vergelijking. Als we bloed beschrijven met het machtwetmodel of het Cassonmodel geeft dit geringe verschillen in het verloop van de wandschuifspanning t.o.v. het Newtonse model; de verschillen zijn het grootst voor het machtwetmodel. Omdat de wandschuifspanning dimensieloos is gemaakt met de analytische uitdrukking voor een volledig ontwikkelde stroming, gaat de dimensieloze wandschuifspanning voor grote x/d naar 1.

3.2 Divergerende buis

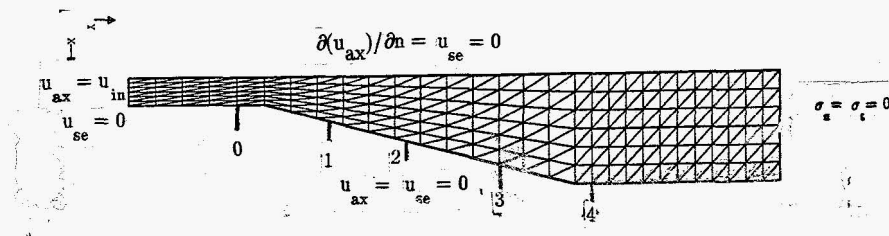
Als tweede geometrie is de stroming in een divergerende buis met een halve taperhoek van 1.5 graden onderzocht. De elementenverdeling die gebruikt is bij de berekeningen voor de divergerende buis is die welke ook in het onderzoek van ter Huurne is gebruikt, zie figuur 3.6. In totaal zijn 696 elementen gebruikt, met 1475 knooppunten.

Als randvoorwaarden zijn voorgeschreven:

- op de instroomrand: $u_{ax} =$ volledig ontwikkelde snelheidsprofiel, volgend uit de analytische uitdrukkingen (3.16 t/m 3.19) voor de verschillende constitutieve

- vergelijkingen, en $u_{se} = 0$;
- op de wand: $u_{ax} = u_{se} = 0$;
- op de uitstroomrand: $\sigma_n = \sigma_t = 0$;
- op de symmetrieas: $\frac{\partial u_{ax}}{\partial n} = u_{se} = 0$.

Op 5 posities is de axiale en secundaire snelheid langs een lijn uitgewerkt: positie 0 is vlak voor het divergerende deel van de buis, positie 1 is aan het begin van het divergerende deel, positie 2 is in het midden van het divergerende deel, en positie 3 aan het einde hiervan. Positie 4 bevindt zich juist aan het begin van het uitstroomkanaal. Er is aan de wand geen verfijning toegepast, omdat in dit geval de snelheidsgradiënten door het terugstroomgebied klein zijn. Gekozen is om voor alle berekeningen uit te gaan van $Re=1200$ op de instroomrand. Voor het Newtonse model geldt dan $Re = 300$ in het uitstroomkanaal, zodat daar de situatie dan overeenstemt met die in de halsslagadervertakking. De berekeningen zijn gedaan met de bij bloed behorende parameterwaarden voor het machtwetmodel ($n = 0.63$), het Cassonmodel ($Y = 0.105$) en voor het Newtonse model ($\eta = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$). De resultaten zijn uitgewerkt d.m.v. een stroomlijnenfiguur (fig.3.7), de snelheidsprofielen (axiaal en secundair) op 5 lijnen (fig.3.8 en 3.9), het drukverloop op de symmetrieas (fig.3.10), en het verloop van de wandschuifspanning (fig.3.11).



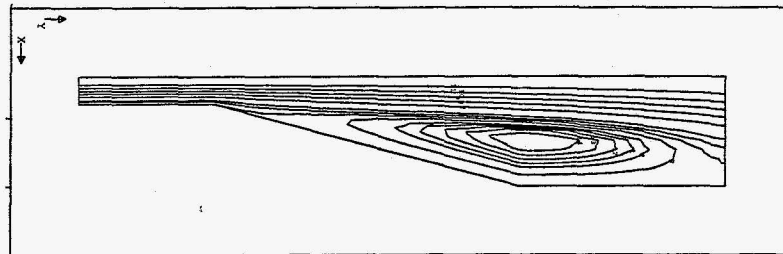
Figuur 3.6

Geometrie, elementenverdeling en randvoorwaarden zoals gebruikt bij de numerieke berekeningen aan de divergerende buis. De posities zijn aangegeven waarop de axiale en secundaire snelheden zijn uitgewerkt (0: = 0.04 m, 1: = .075 m, 2: z = .105 m, 3: z = .135 m, 4: z = .170 m.).

De stroomlijnen in fig. 3.7 geven een heel goed visueel inzicht in de stromings situatie

in de divergerende buis. Het terugstroomgebied is duidelijk te zien.

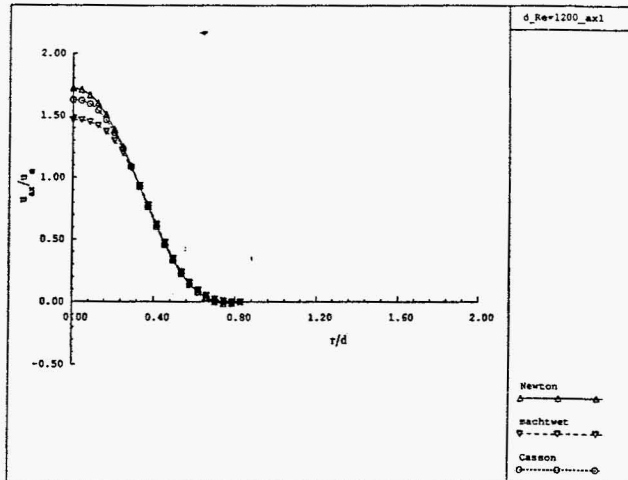
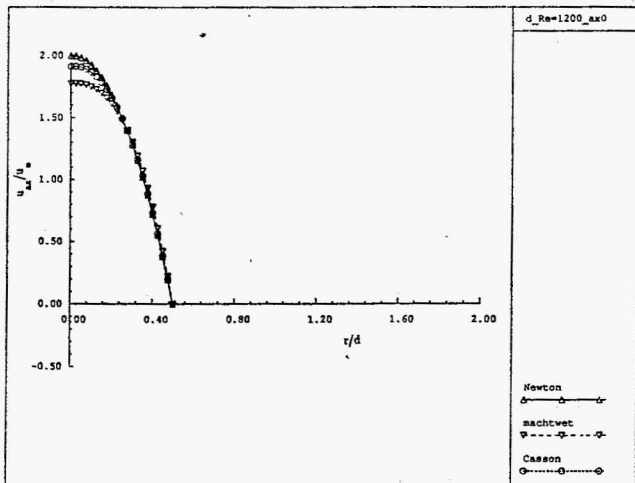
Uit de axiale snelheidsprofielen (fig. 3.8) en secundaire snelheidsprofielen (fig. 3.9) blijkt dat op positie 0 (dus vlak voor het divergerende deel) een zeer gering stroomopwaartseffekt zichtbaar is: de axiale snelheidsprofielen wijken enigszins af van de profielen die bij een volledig ontwikkelde stroming horen en er zijn reeds (kleine) secundaire snelheden. Naarmate de vloeistof verder door de buis stroomt (positie 1 t/m 4) zien we dat er tussen de modellen onderling duidelijke verschillen ontstaan, met name op positie 4. Zoals reeds bleek uit de stroomlijnenfiguur ontstaat er door het divergeren van de buiswand een terugstroomgebied: dit is ook te zien in de snelheidsprofielen (negatieve axiale en secundaire snelheden geven terugstroming aan). We zien ook dat de secundaire snelheden zeer klein zijn t.o.v. de axiale snelheden (merk op dat de assen van



Figuur 3.7 Stroomlijnenpatroon voor de berekening met het Cassonmodel.

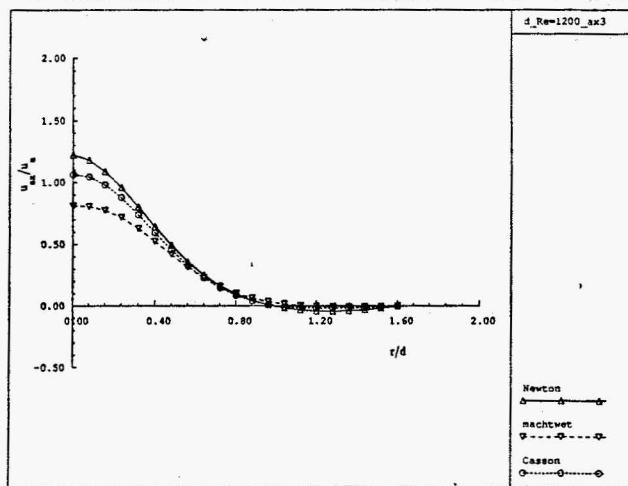
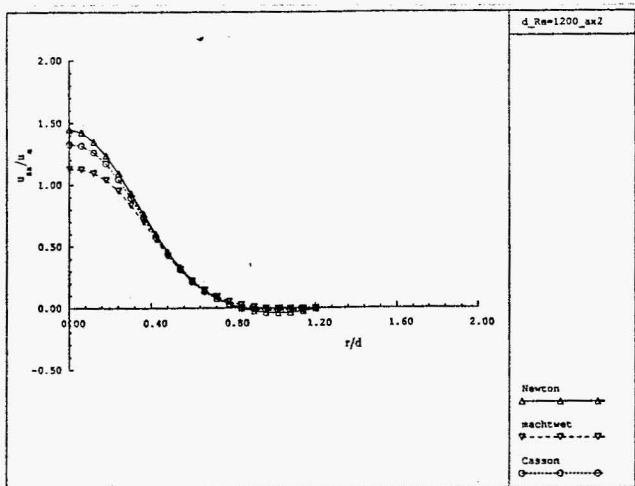
de figuren voor de axiale en de secundaire snelheid verschillend geschaald zijn). De gegeneraliseerd Newtonse modellen leveren op alle posities axiale snelheidsprofielen op met lagere maxima en kleinere terugstroomgebieden dan het Newtonse model. Zoals in de rechte buis wijken de profielen voor het machtwetmodel meer af van de Newtonse profielen dan voor het Cassonmodel: de axiale snelheidsprofielen hebben voor het machtwetmodel lagere maxima en ook is het terugstroomgebied kleiner.

Uit het drukverloop (fig. 3.10) blijkt dat het eerste deel gevormd wordt door een rechte dalende lijn, tot de overgang instroomkanaal–divergerend kanaal. De drukval in dit deel van de buis komt overeen met de drukval voor een volledig ontwikkelde stroming. Hier is een gering verschil aanwezig tussen de gegeneraliseerd Newtonse modellen enerzijds en het Newtonse model anderzijds: het Newtonse model geeft hogere drukwaarden. In het divergerende deel neemt de druk weer toe, in overeenstemming met de wet van Bernouilli. De verschillen tussen de gegeneraliseerd Newtonse modellen en het



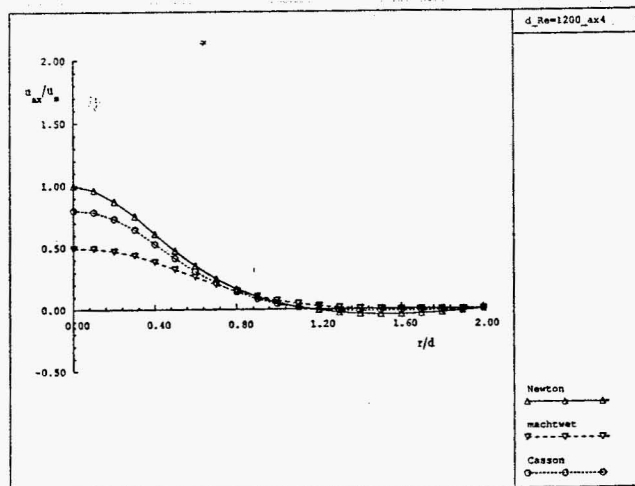
a

b



c

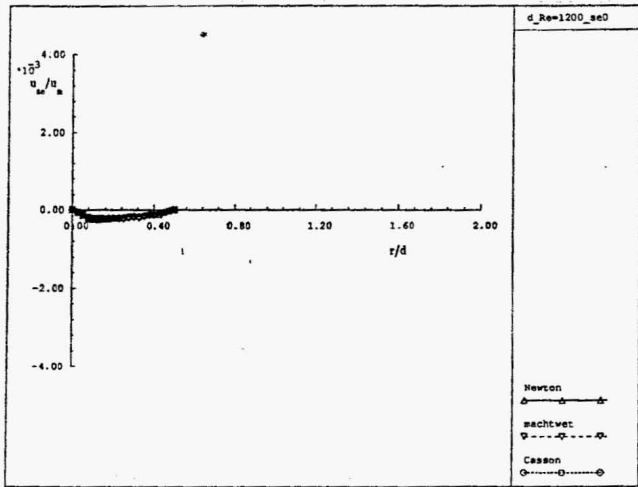
d



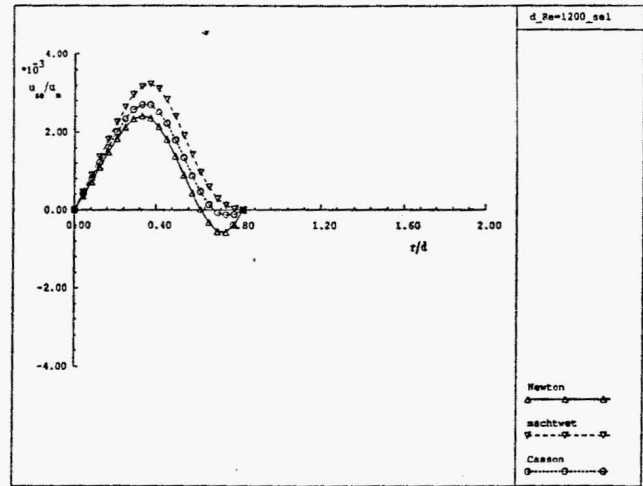
e

Figuur 3.8

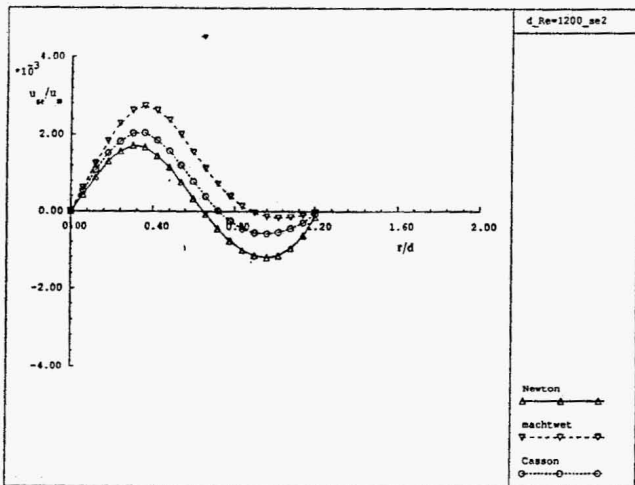
Axiale snelheden in de divergerende buis op a) positie 0, b) pos.1, c) pos.2, d) pos.3, e) pos.4.



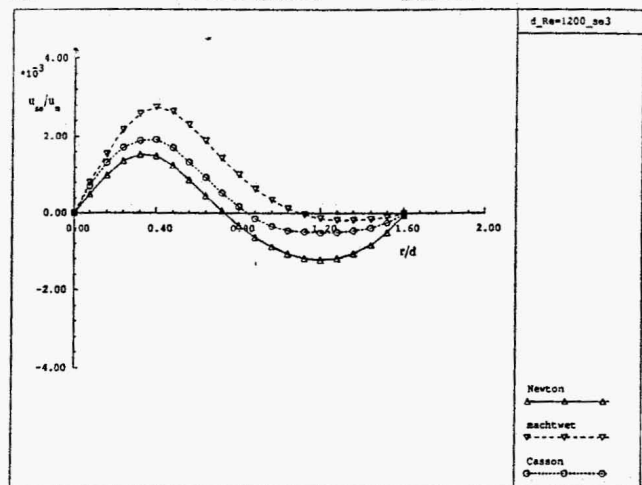
a



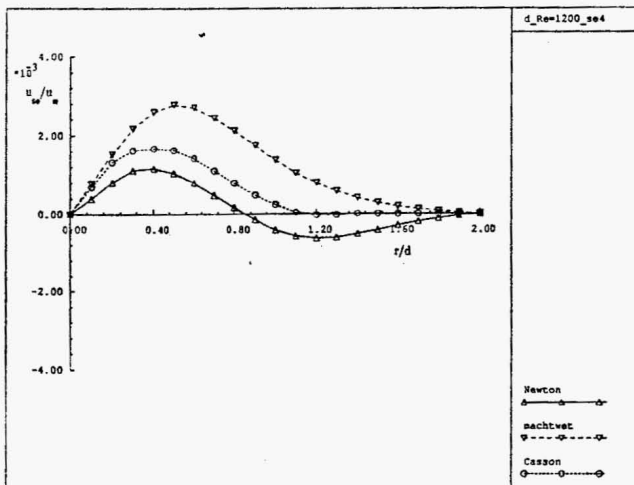
b



c



d



e

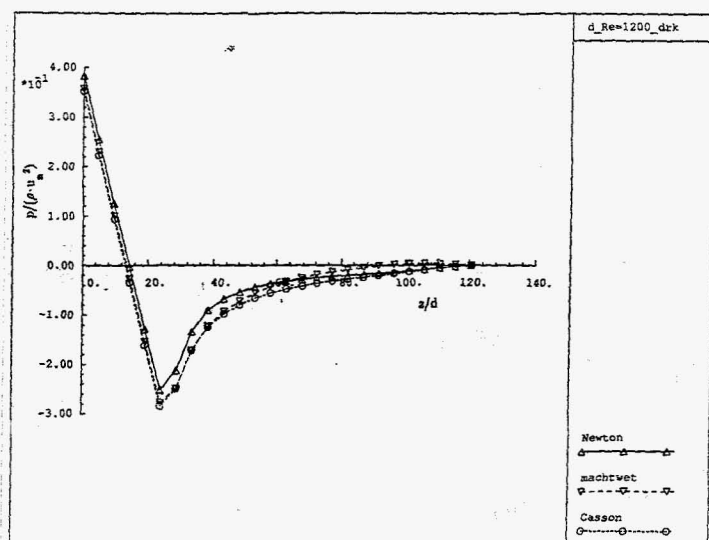
Figuur 3.9

Secundaire snelheden in de divergerende buis op a) positie 0, b) pos.1, c) pos.2, d) pos.3, e) pos.4.

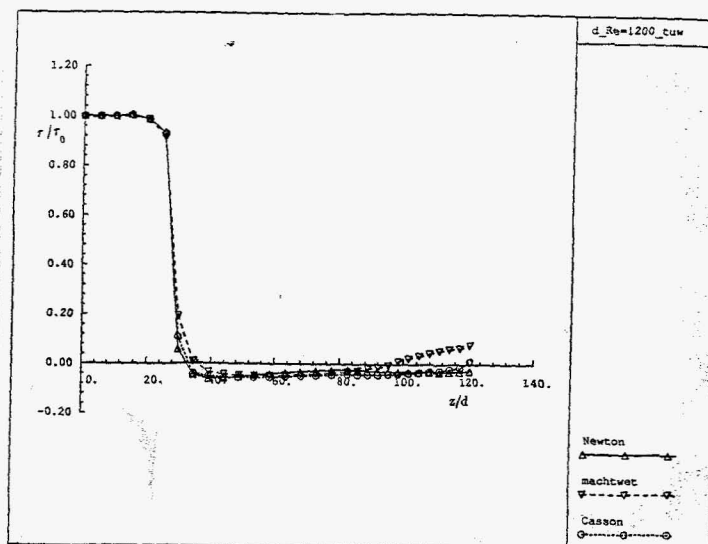
= 300 (gedefinieerd op de diameter van het instroomkanaal) een numerieke analyse verricht van de stationaire stroming in het genoemde model van de halsslagader-vertakking, met als constitutieve vergelijkingen voor bloed naast het Newtonse model - ook het machtwetmodel en het Cassonmodel. De gekozen waarde van het Reynoldsgetal komt overeen met met de fysiologische waarde tijdens de einddiastolische fase van de hartcyclus. In figuur 3.13 is in een schematische tekening aangegeven welke randvoorwaarden zijn voorgeschreven. Als instroomrandvoorwaarde is gekozen voor een volledig ontwikkelde profiel; dit is bereikt door het instroomdeel van de communis te verlengen met een lengte $l = 0.075 (Re d)$ en aan het begin daarvan een vlak instroomprofiel voor te schrijven met $u_{ax} = .13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Op de uitstroomranden is gekozen voor spanningsvrije uitstroming. Fig. 3.13 geeft de elementenverdeling in de omgeving van de vertakking zoals ook gebruikt door Rindt [10]. Hij had onderzocht wat het optimum was tussen de fijnheid van de elementenverdeling en rekentijd. We merken op dat rond de apex, waar relatief grote snelheidsgradiënten optreden, de elementenverdeling verfijnd is. Voor het totale probleem zijn 742 elementen met 1599 knooppunten gebruikt.

De resultaten van de berekeningen zijn als volgt uitgewerkt. In figuur 3.12 zijn een aantal lijnen in de geometrie getekend, de labels C1.5, I0, I1, I2, E0, E1 geven hierin de lijnen aan waarlangs de axiale en secundaire snelheden zijn uitgewerkt (C = communis, I = interna, E = externa terwijl de getallen refereren naar de axiale afstand in communis diameters tot het meetrooster in de communis (naar Rindt [10])). De symbolen PC, PI, PE geven de lijnen aan waarlangs het drukverloop is uitgewerkt, terwijl TOW, TIW, TEW en TBW de randen aangeven waarlangs de wandschuifspanning is uitgewerkt.

De richting van de positieve axiale snelheden is triviaal, voor de secundaire snelheden is enige toelichting nodig. In figuur 3.12 zijn de lijnen aangegeven waarlangs de snelheden zijn uitgewerkt; de labels van de lijnen zijn geschreven aan het begin van de lijnen, met als positieve richting voor de secundaire snelheden: van dit punt naar het snijpunt van de lijn met de andere wand. Voor de positie x/d moeten we een onderscheid maken tussen de figuren voor de snelheid of de druk enerzijds en de wandschuifspanning anderzijds. Er geldt algemeen: $x/d = 0$ in de punten aangegeven met '*' (merk op dat het snijpunt van de centrummassen ook tot de lijn gelabeld met 'PC' behoort, maar dat dan geldt $x/d \neq 0$). In de figuren met snelheidsprofielen of met drukverlopen representeert x/d de dimensieloze coördinaat langs de lijnen waarlangs de snelheid of de druk is uitgewerkt. Voor de figuren met de wandschuifspanning representeert x/d de dimensieloze x -coördinaat van het bij de geometrie behorende coördinatenstelsel.



Figuur 3.10 Drukverloop op de symmetrieas in de divergerende buis.



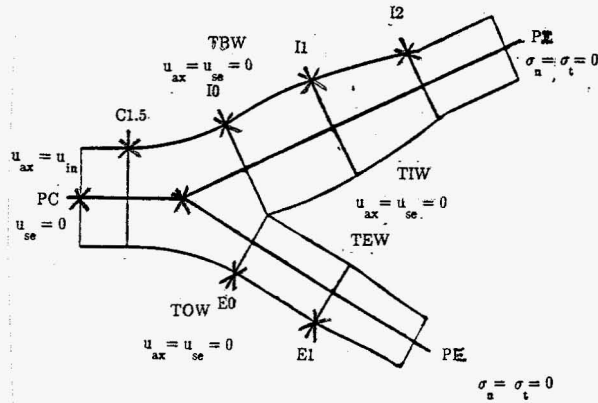
Figuur 3.11 Verloop van de wandschuifspanning in de divergerende buis.

Cassonmodel zijn dan iets groter geworden. Vervolgens worden in het uitstroomkanaal de verschillen weer kleiner: wel geeft het machtwetmodel daar hogere drukwaarden geeft dan het Cassonmodel of het Newtonse model. Ten gevolge van de voorgeschreven randvoorwaarde wordt de druk 0 op de uitstroomrand.

De verschillende constitutieve vergelijkingen geven slechts geringe verschillen te zien in het verloop van de wandschuifspanning (fig. 3.11). Het divergeren van de stroming heeft grote gevolgen voor de wandschuifspanning: deze neemt aan het begin van het divergerende kanaal plotseling af van $+1$ naar -1 ; we zien echter nauwelijks verschil tussen de verschillende modellen. In het uitstroomkanaal zijn de wandschuifspanningen alleen voor het machtwetmodel positief. Dit is in overeenstemming met de snelheidsprofielen en het drukverloop: er vindt hier voor het machtwetmodel geen terugstroming plaats, dus zijn de wandschuifspanningen positief.

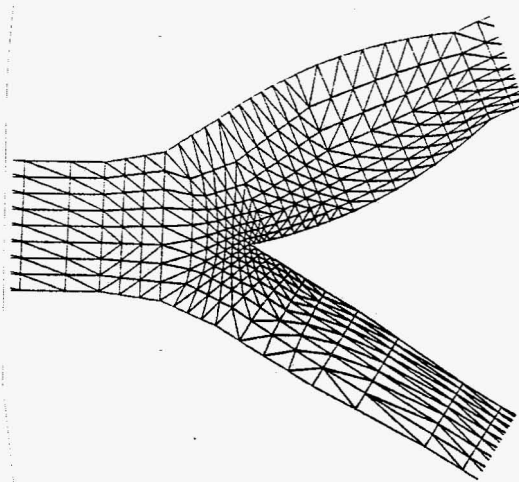
3.2.3 2-d Vertakking

De halsslagadervertakking bestaat uit een hoofdtak, de communis, die asymmetrisch splitst in twee takken, de interna en de externa. In deze studie wordt een tweedimensionaal model van de halsslagadervertakking beschouwd, gebaseerd op de data van Bharadvaj et al. (1982). Figuur 3.12 geeft een schematische tekening van deze geometrie met daarin aangegeven een aantal karakteristieke afmetingen. In deze studie is voor Re

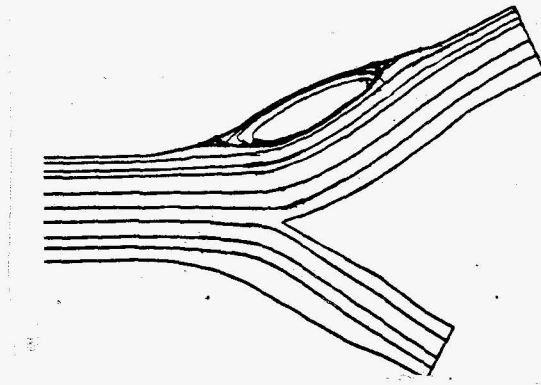


Figuur 3.12 Schematische tekening van de geometrie van de 2d-vertakking zoals gebruikt bij de numerieke berekeningen. Aangegeven zijn de voorgeschreven randvoorwaarden en de lijnen waarlangs de axiale en secundaire snelheden (C1.5, I0, I1, I2, E0, E1), het drukverloop (PC, PI, PE), en de wandschuifspanning (TOW, TIW, TEW, TBW) zijn uitgewerkt.

Het stroomlijnenpatroon (figuur 3.14) laat duidelijk zien hoe de stroming in de 2-d vertakking verloopt. Opvallend is het terugstroomgebied in de interna.



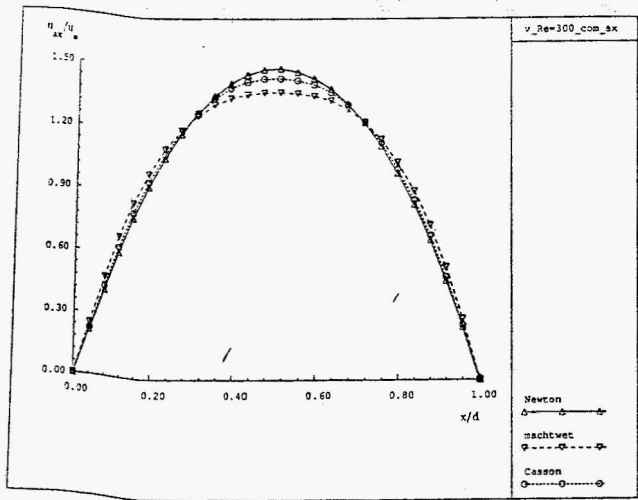
Figuur 3.13 Elementenverdeling in de omgeving van de vertakking.



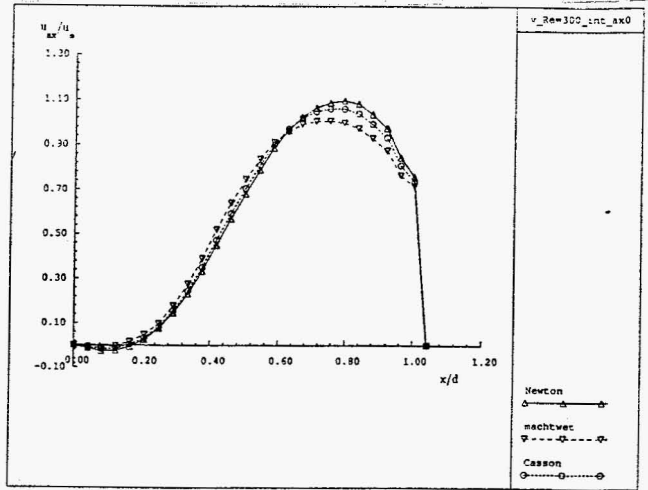
Figuur 3.14 Stroomlijnenpatroon voor de berekening met het Cassonmodel.

De snelheidsprofielen (fig. 3.15 (axiaal) en 3.16 (secundair)) geven het volgende beeld. In de communis is de invloed van de vertakking reeds merkbaar; voor een volledig ontwikkelde stroming geldt immers dat de maximale axiale snelheid $1.5 u_m$ bedraagt, en dat de secundaire snelheid gelijk is aan nul; op positie C1.5 is die axiale snelheid een fractie kleiner dan 1.5 en is de secundaire snelheid niet nul (wel heel klein). De secundaire snelheid heeft hier een positieve waarde; dat betekent dat de stroming dan gericht is naar de externa; hierdoor ontstaat een grotere volumestroom in deze tak dan verwacht op grond van de geometrie alleen. In de interna zien we dat er op positie I0 en I1 een terugstroomgebied bestaat (negatieve axiale snelheden), dat op positie I0 groter is dan op positie I1. Dit terugstroomgebied was ook reeds te zien in figuur 3.14. Bij de apex zien we een grote snelheidsgradient in de axiale snelheidsprofielen. De secundaire snelheden zijn hier een orde groter dan in de communis. Op positie I0 zijn de secundaire snelheden positief, de vloeistof stroomt naar de "divider wall" toe; dit is het gevolg van de centrifugaalkrachten. Op positie I1 zijn de secundaire snelheden negatief: hier volgt de vloeistof de geometrie van de interna. Op positie I2 duiden de positieve secundaire snelheden de invloed van de tapering van de wand aan. De axiale snelheid is in de externa overal positief: er vindt dus geen terugstroming plaats. Uit de negatieve secundaire snelheden blijkt de invloed van de centrifugaalkrachten: de vloeistof stroomt naar de "divider wall" toe. Ook hier zien we een grote snelheidsgradient bij de apex.

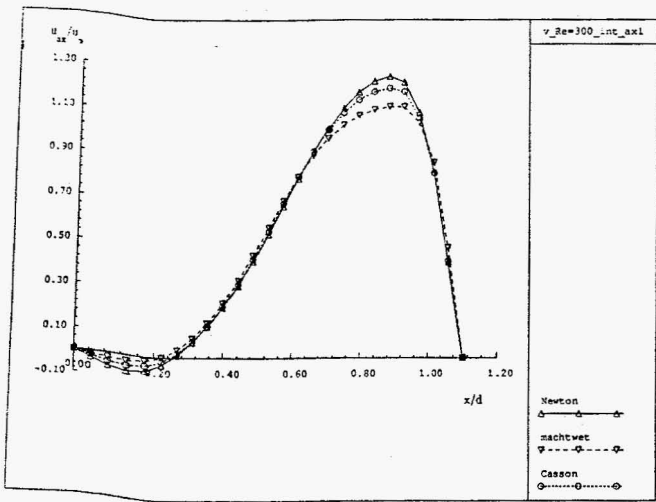
Uit het drukverloop in figuur 3.17.a blijkt dat de druk in de communis eerst afneemt volgens een rechte lijn; de drukval komt hier overeen met de waarde voor een volledig ontwikkelde stroming. Als het rechte deel van de communiswand overgaat in het gekromde deel bereikt de druk zijn minimum. Na dit minimum neemt de druk van $x/d =$



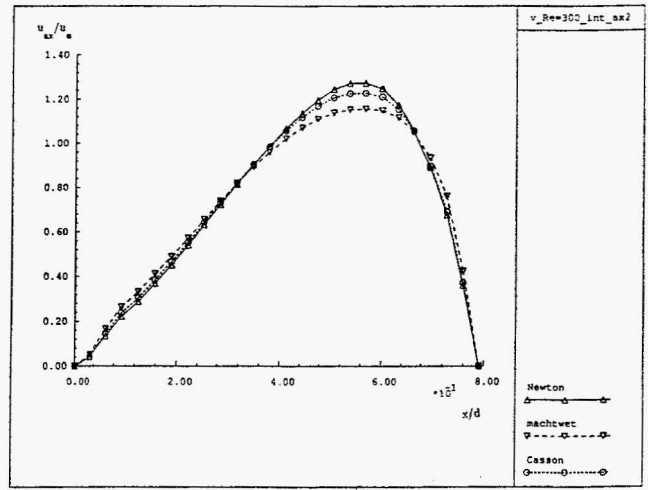
a



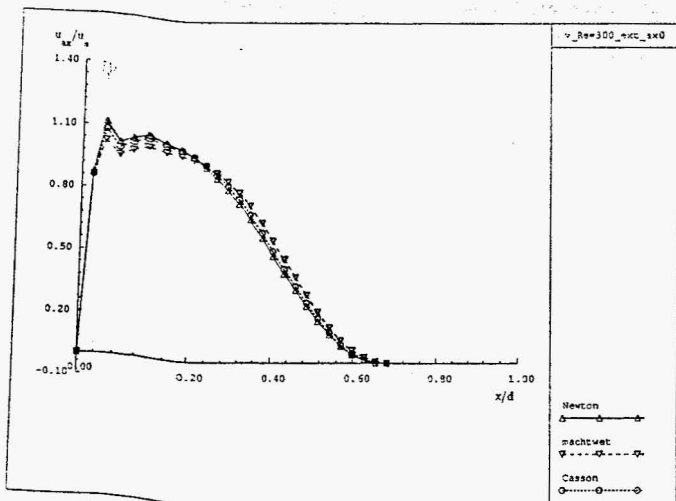
b



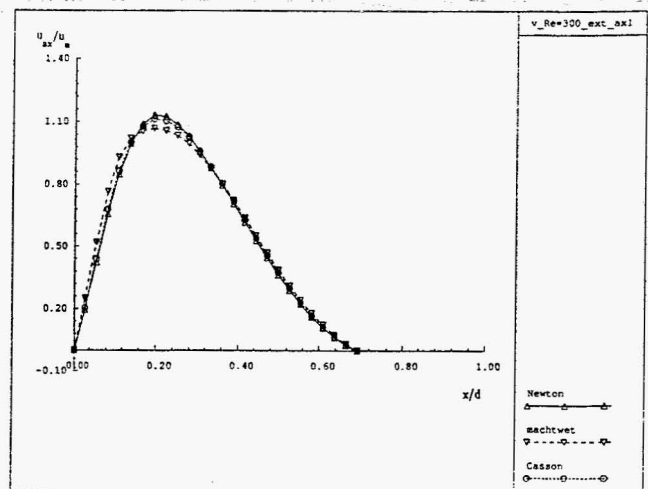
c



d



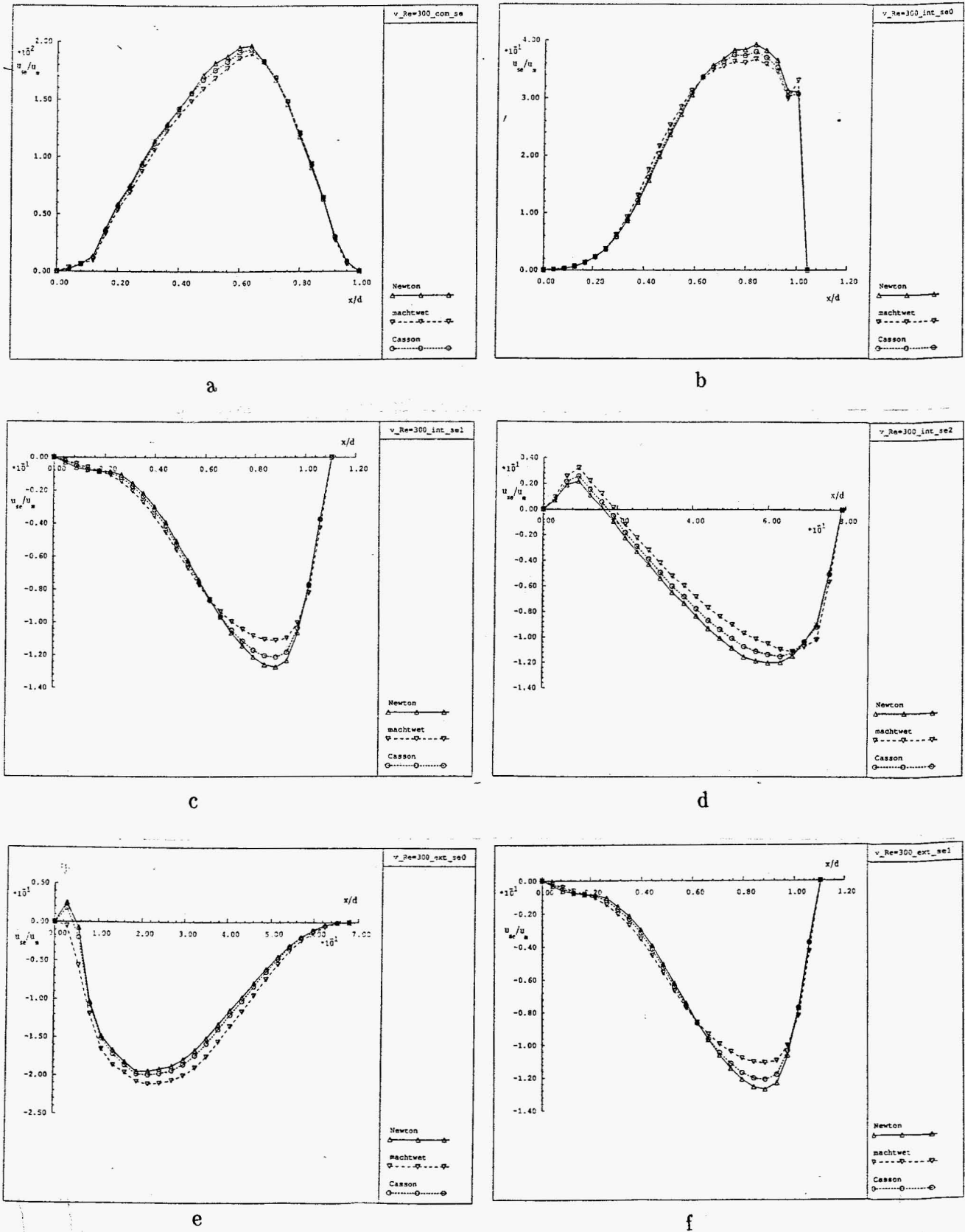
e



f

Figuur 3.15

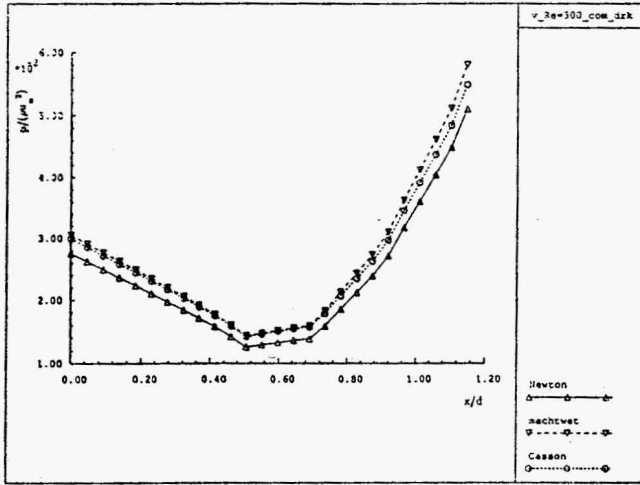
Axiale snelheden in de 2d-vertakking op a) positie C1.5, b) pos. I0, c) pos. I1, d) pos. I2, e) pos. E0, f) pos. E1.



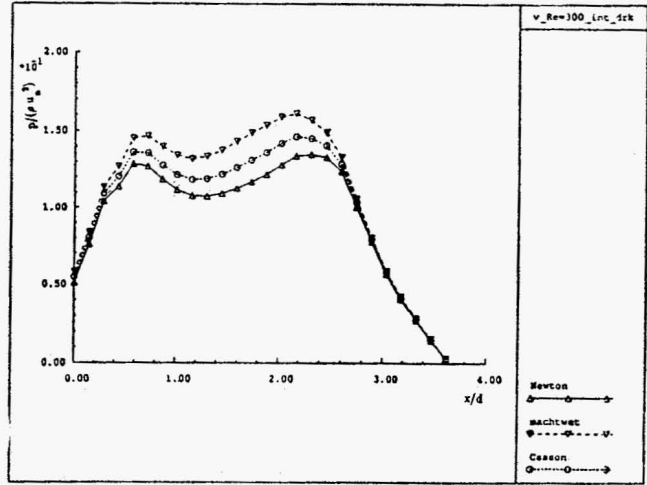
Figuur 3.16 Secundaire snelheden in de 2d-vertakking op a) positie C1.5, b) pos. I0, c) pos. I1, d) pos. I2, e) pos. E0.

0.6 tot 1.2 weer toe: dit is een stroomopwaartseffekt t.g.v. splitsing in de stroming. Bij de apex wordt de snelheid nul, en daardoor neemt de druk toe (stuwpunt). Het terugstroomgebied in de interna zien we ook terug in het drukverloop langs de as PI (fig. 3.17.b) als een lichtgolvend plateaugebied; in dat gebied geven het machtwetmodel en het Cassonmodel hogere drukwaarden dan het Newtonse model. Nabij de apex heeft het drukverloop in de externa een piek (fig. 3.17.c); daarna neemt de druk af. Het machtwetmodel en het Cassonmodel geven dan hogere drukwaarden dan het Newtonse model. Het totale drukverloop in de 2d vertakking wordt ook geïllustreerd door de drukcontourlijnen in figuur 3.17.d. De in de figuur getekende pijlen geven de richting van de positieve drukgradiënten aan. We zien duidelijk dat nabij de apex de druk stijgt, en dat daarmee ook de relatief hoge drukken in de interna en de externa samenhangen.

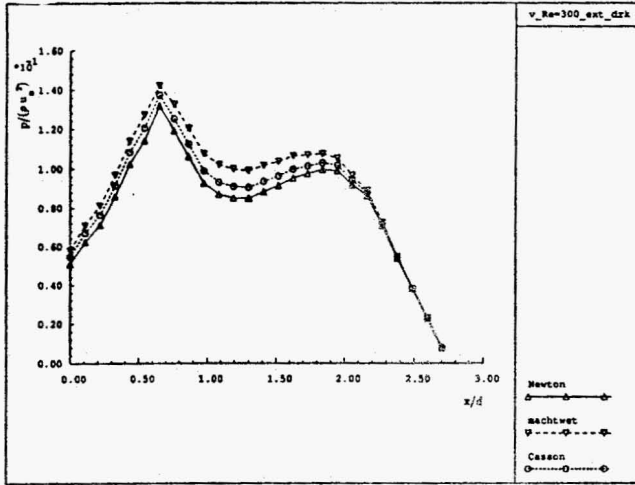
Het verloop van de wandschuifspanningen is weergegeven in fig. 3.18. Langs de bovenwand treden in een klein gebied lage schuifspanningen op; dit gebied correspondeert met de overgang communis – externa. Alleen voor het Newtonse model zijn er negatieve wandschuifspanningen, hetgeen duidt op terugstroming. Vlak na de apex is de wandschuifspanning in de interna voor het machtwetmodel duidelijk kleiner dan voor het Cassonmodel of het Newtonse model. Daarna zijn de wandschuifspanningen hier voor het Cassonmodel en het machtwetmodel lager dan voor het Newtonse model; de verschillen zijn echter gering. Bij de apex heeft het verloop van de wandschuifspanning in de externa een piek; het maximum van deze piek is voor het machtwetmodel opvallend kleiner dan voor het Cassonmodel en het Newtonse model. Voor grotere waarden van x/d zijn de verschillen tussen de modellen onderling gering. Langs de onderwand zien we een gebied met negatieve wandschuifspanningen: dit correspondeert met het terugstroomgebied; het machtwetmodel en het Cassonmodel geven daar t.o.v. het Newtonse model lagere wandschuifspanningen.



a



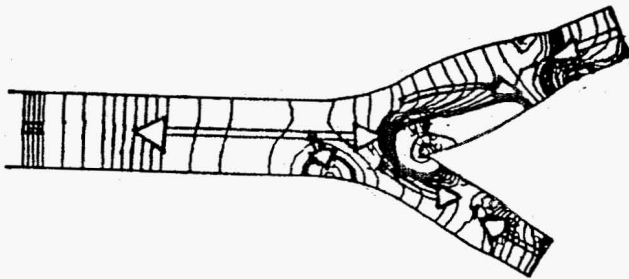
b



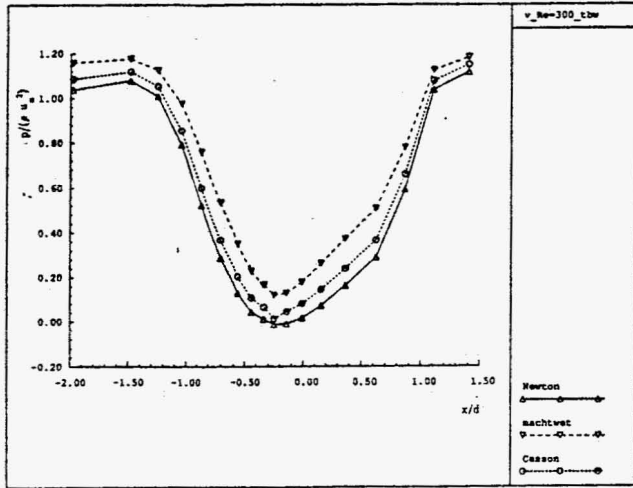
c

Figuur 3.17

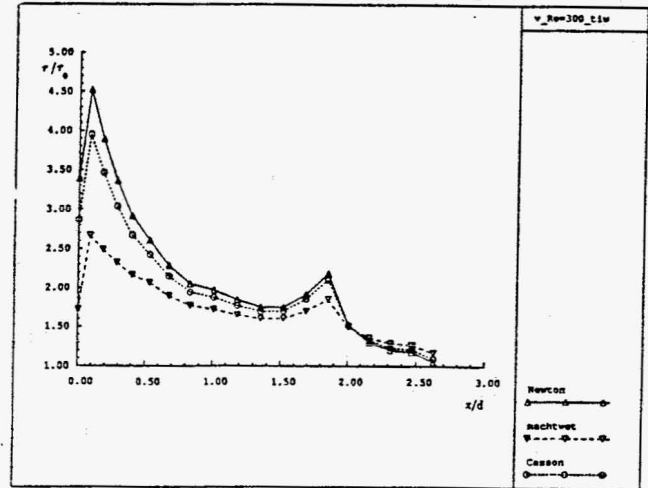
Drukverloop op de centrummassen in de 2d-vertakking: a) PC, b) PI, c) PE.



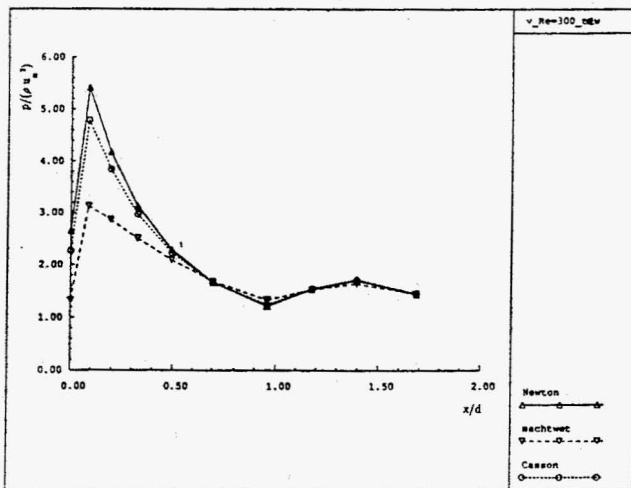
d Drukcontourlijnen in de 2d-vertakking voor de berekening met het Cassonmodel.



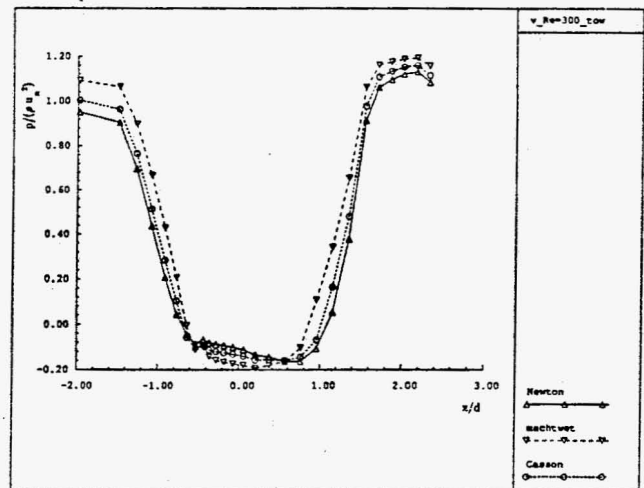
a



b



c



d

Figuur 3.18

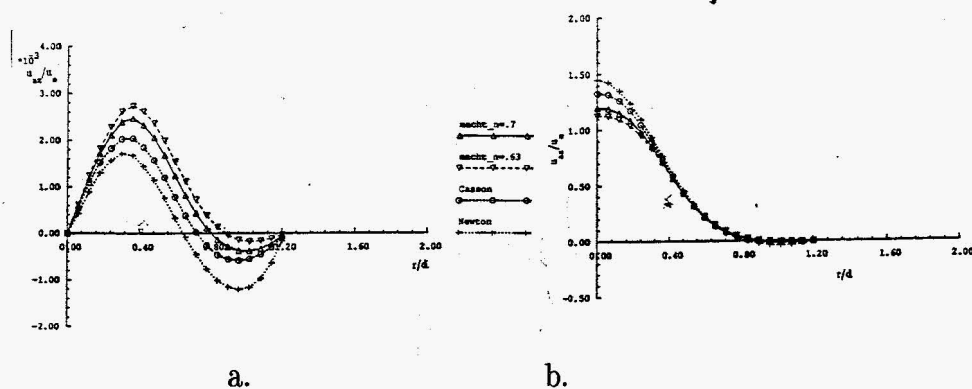
Verloop van de wandschuifspanning
in de 2d-vertakking langs rand
a) TBW, b) TIW, c) TEW, d) TOW.

3.4 Discussie

Voor de in de par. 3.1 en 3.2 verkregen resultaten is wat betreft de Newtonse berekeningen ook een vergelijking mogelijk met resultaten uit de literatuur. Damsteegt [2] beschrijft zowel de stroming door een ronde rechte buis als door een kanaal met als constitutieve vergelijkingen: Newtons model, machtwetmodel en het zogenaamde Carreau-model. Hij noemt dezelfde analytische relatie voor $u(r)$ voor het machtwetmodel als in deze studie. Ook de numerieke snelheidsprofielen voor de stroming door een ronde rechte buis voor $Re_{mw} = 300$ stemmen overeen met de profielen in par. 3.1. Van belang is dat Damsteegt bij zijn berekeningen met Sepran een logaritmische elementenverdeling gebruikte, zodanig dat deze aan de wand en langs de instroomrand verfijnd was. Verder schreef hij op de randen dezelfde randvoorwaarden voor als in deze studie. Ter Huurne [4] beschrijft o.a. de stationaire stroming door een divergerende buis voor een Newtonse vloeistof voor verschillende Reynoldsgetallen, gedefinieerd op de diameter van de grootste straal. Zij schreef een parabolisch profiel voor als randvoorwaarde op de instroomrand en een volledig ontwikkeld profiel op de uitstroomrand. Deze laatste randvoorwaarde bleek correct te zijn, want verlenging van het uitstroomkanaal was niet van invloed op de oplossing. Ze vond voor kleine Re getallen ($Re = 37, 110, 160, 200$) een zeer goede overeenkomst tussen experimentele en numerieke snelheidsprofielen. Boven $Re = 110$ treedt er in de divergerende buis loslating aan de wand op. Voor de hogere Re getallen ($Re = 270, 345, 410, 475$) vond ze geen goede overeenkomst meer tussen numerieke en experimentele snelheidsprofielen. Voor $Re = 270$ bleek dit het gevolg te zijn van een fout in de bepaling van het Reynoldsgetal. Voor de hogere Reynoldsgetallen lag de oorzaak in stromingsinstabiliteiten die niet beschreven worden door de stationaire Navier–Stokes vergelijking, zoals gebruikt bij de berekeningen, maar door de instationaire Navier–Stokes vergelijking. Hoewel de twee situaties niet exact hetzelfde zijn komen voor $Re = 270$ haar numerieke resultaten goed overeen met de resultaten in par. 3.3 (voor $Re = 300$) in het uitstroomkanaal en spanningsvrije uitstroming). Rindt [10] tenslotte beschrijft o.a. stationaire stroming in een 2d vertakking voor $Re = 640$, met op de uitstroomrand een volledig ontwikkeld stroming als randvoorwaarde. Hij vond dat in de externa de experimentele snelheden consequent groter waren dan de numerieke. Vergelijken we zijn resultaten met die in par. 3.3 (rekening houdend met de verschillen in het Reynoldsgetal) dan zien we een goede overeenkomst. Een opvallend verschil is echter de aanwezigheid van een redelijk groot terugstroomgebied in de externa. Dit zien we niet terug in par.3.3. De oorzaak hiervan is waarschijnlijk het grotere Reynoldsgetal

(640 t.o.v. 300).

Naar aanleiding van de resultaten in par. 3.1 t/m par. 3.3 kunnen we concluderen dat als we bloed beschrijven met het machtwetmodel of het Cassonmodel dit geringe verschillen geeft in het stromingsbeeld t.o.v. de Newtonse situatie, hoewel ze niet verwaarloosbaar zijn. Voor het machtwetmodel was nog niet duidelijk of de keuze voor de parameter n goed was, en ook niet hoe groot de invloed van n op de oplossing is (zie ook par. 1.2). Om dit duidelijker te maken is een berekening gedaan voor de divergerende buis met het machtwetmodel met $n = 0.7$. Het is in fig. 3.20 uitgewerkt. Deze figuur toont het axiale snelheidsprofiel op pos. 2 (dus in het midden van de divergerende buis) voor de berekening met $n = 0.63$ en $n = 0.70$. We zien slechts een gering verschil tussen beide profielen; de oorzaak voor de gevonden verschillen tussen de berekeningen voor bloed de bij bloed behorende parameterwaarden voor het machtwetmodel enerzijds en het Cassonmodel en het Newtonse model anderzijds ligt dus waarschijnlijk voornamelijk in de aard van het machtwetmodel. Op grond van deze resultaten is echter om een aantal redenen nog geen definitief antwoord te geven op de vraag hoe groot het belang is van het niet-Newtonse karakter van bloed bij het analyseren van de stroming in de halsslagadervertakking. Ten eerste vanwege de in par. 1.3 genoemde fysische bezwaren tegen het Reiner-Rivlin model. Ten tweede omdat dit model alleen de afschuif-snelheidsafhankelijke viscositeit in rekening brengt. Ten derde: in deze studie zijn alleen 2d of rotatiesymmetrische stationaire problemen beschouwd, dus geen 3d en instationaire problemen. En ten vierde: voor een gefundeerde discussie zijn experimentele verificaties van de verrichtte berekeningen noodzakelijk.



Figuur 3.20

Axiaal (a.) en secundair (b.) snelheidsprofiel voor de berekeningen met de divergerende buis uitgewerkt in het midden van het divergerende deel (pos. 2).

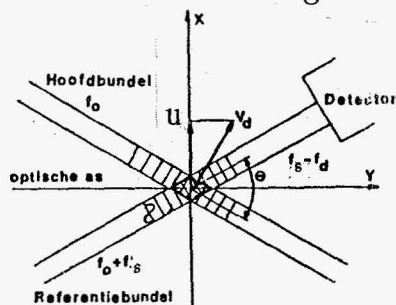
4 Experimenten

4.0 Inleiding

Een experimentele validatie van de numerieke resultaten is van essentieel belang. Alleen dan is een uitspraak mogelijk over het feit of een in principe fysisch onjuist constitutief model (machtwetmodel/Cassonmodel) onder bepaalde condities toch zinvol gebruikt kan worden voor de beschrijving van de stroming in vereenvoudigde geometrieën. In dit hoofdstuk wordt daartoe een eerste verkenning uitgevoerd. Eerst worden de meetmethode (par.4.1) en de meetopstelling besproken. De experimenten zijn beperkt tot LDA metingen volgens de zogenaamde referentiebundelmethode aan een ronde rechte buis. Hoewel de berekeningen in hoofdstuk 3 aanleiding geven tot metingen aan ook een divergerende buis en een 2d-vertakking, was dat binnen het tijdsbestek van dit afstudeeronderzoek niet mogelijk. Voor zowel een Newtonse (kaliumthiocyanaat) als een niet-Newtonse (Separan) meetvloeistof is het volledig ontwikkelde snelheidsprofiel gemeten. De resultaten zijn het onderwerp van par. 4.3. Voor beide vloeistoffen worden de gemeten en numeriek berekende snelheidsprofielen met elkaar vergeleken. Tenslotte zullen in par. 4.4 enkele conclusies en aanbevelingen worden gegeven.

4.1 Meetmethode

Om vloeistofsnelheden te meten is in deze studie gebruik gemaakt van Laser-Doppler snelheidsmetingen volgens de referentiebundelmethode. Met deze methode is het mogelijk om zowel de grootte als de richting van de snelheden te meten binnen een zeer klein meetvolume (karakteristieke lengte $\approx 100 \mu\text{m}$), zonder de stroming te verstoren. Het principe van deze methode is schematisch getekend in figuur 4.1. Hier wordt kort



Figuur 4.1

Schematische tekening van een LDA opstelling volgens de referentiebundelmethode.

ingegaan op deze techniek; voor een uitgebreide beschrijving wordt verwezen naar Corver [1]. Er zijn twee invallende bundels die elkaar onder een hoek γ snijden. Het laserlicht van de hoofdbundel met frequentie ω_0 wordt verstrooid door de bewegende deeltjes binnen het snijvolume van de bundels in het meetvolume. De deeltjes met axiale snelheid u veroorzaken hierdoor een Dopplerverschuiving:

$$(4.1) \quad \omega_d = 2 k \sin(\gamma/2) u \ll \omega_0,$$

met k het golfgetal en $\gamma/2$ de hoek tussen de hoofdbundel en de richting van het verstrooide licht. Het laserlicht van de referentiebundel met frequentie $\omega_0 + \omega_s$ ($\omega_s \ll \omega_0$), dat in de richting van de detector wordt verstrooid, ondergaat geen frequentieverschuiving (ω_s wordt de voorverschuivingsfrequentie genoemd). De intensiteit van het licht dat op de detector valt blijkt vanwege de optische menging de volgende vorm te hebben (Corver [1]):

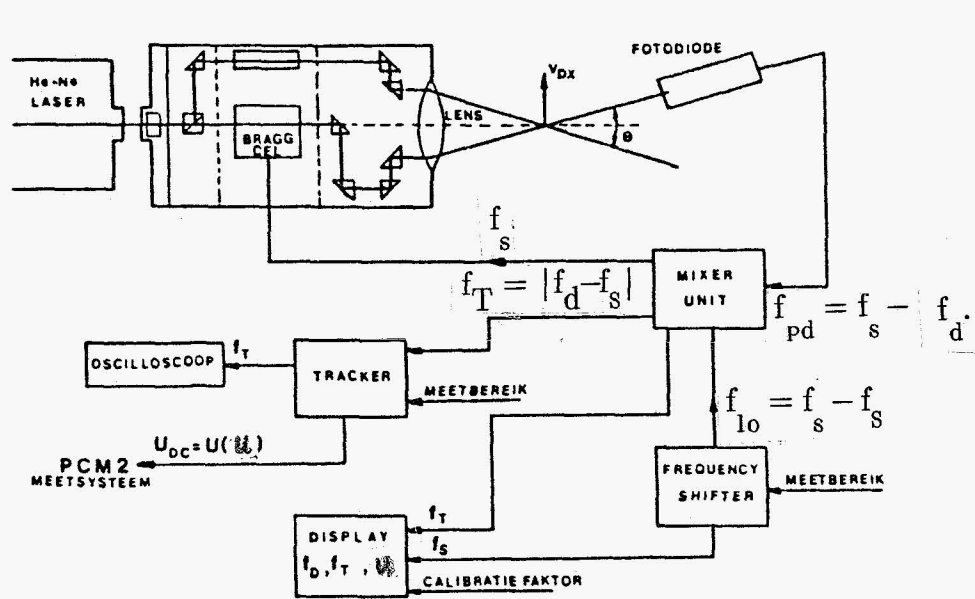
$$(4.2) \quad I \approx I_0 + I_1 \cos[(2\pi f_s - 2\pi f_d)t + \psi] + \text{termen } O(f_0), \text{ met:}$$

$$(4.3) \quad f_s - f_d = f_s - 2f_0 (u/c) \sin(\gamma/2).$$

De fotodetector kan intensiteitsvariatië met frequenties van de grootte-orde van het laserlicht niet volgen. Het resultaat is dan ook een fotostroom die in de tijd varieert met een frequentie $(f_s - f_d)$. Op deze manier wordt dus de snelheidscomponent gemeten in het vlak loodrecht op de bisectrice van de hoek tussen de bundels. Door het gebruik van een voorverschuivingsfrequentie ω_s geven twee even grote maar tegengesteld gerichte snelheidscomponenten u een verschillende frequentieverschuiving. Zonder voorverschuivingsfrequentie zou alleen een niet te detecteren faseverschil ter grootte π ontstaan.

Er is gebruik gemaakt van het DISA-LDA systeem; dit is schematisch getekend in figuur 4.2. Het systeem bestaat uit een optisch deel en een elektronisch deel. In het optische deel produceert een 5 mW He-Ne laser ($\lambda = 632.8$ nm) een monochromatische lichtbundel, die gesplitst wordt in twee bundels van gelijke intensiteit en onderling loodrechte polarisatierichting. Een van de bundels wordt door een Braggcel geleid en krijgt zo een frequentieverschuiving van 40 MHz. De andere bundel wordt door een glazen staaf geleid om de optische weglengte gelijk te maken. De bundels worden evenwijdig verschoven, zodat ze symmetrisch ten opzichte van de optische as door de

lens gaan. Na deze lens zouden de bundels elkaar in lucht onder een hoek van 25.5°



Figuur 4.2

Een schematische tekening van het optische en elektronische deel van het DISA-LDA systeem.

snijden. Door de overgang lucht-perspex neemt deze hoek echter in het perspexmodel af tot 17.1° . Het meetvolume is dan 0.4 mm lang en heeft een diameter van 0.06 mm. De totale intensiteit van het licht wordt in de richting van de referentiebundel gemeten door de fotodetector. Dit licht bevat twee orthogonale componenten, het verstrooide licht van de hoofdbundel met frequentie $f_0 + f_d$ en het onverstrooide licht van de referentiebundel met frequentie $f_0 + f_s$. Beide componenten worden door een instelbaar polarisatiefilter met een gelijke intensiteit doorgelaten. De optimale stand van het filter wordt gevonden door het signaal van de detector op een oscilloscoop weer te geven. Uit (4.3) volgt dat de frequentie van de detectorstroom een directe maat is voor de gemeten snelheid. Voor het detektorsignaal f_{pd} geldt: $f_{pd} = f_s - f_d$. In het elektronische deel van het DISA systeem wordt dit signaal in de frequency shifter vermenigvuldigd met de frequentie f_{10} , met $f_{10} = f_s - f_s$. De frequentie shift f_s is instelbaar tussen de 10 kHz en 9 MHz. De grootte van f_s wordt bepaald door het gewenste meetbereik, dat wordt ingesteld op de tracker unit. Het uitgangssignaal $f_T = |f_d - f_s|$ van de mixer unit gaat naar de tracker unit. Deze bepaalt de frequentie van het meetsignaal door het signaal f_T te vergelijken met een inwen-

dig gegenereerd signaal. Snelheidsvariati es tot een frequentie van 5 kHz kunnen zo gevolgd worden. De tracker geeft een analoge spanning U_{dc} af, evenredig met de frequentie van het meetsignaal.

Het PCM2 meetsysteem vertaalt de gelijkspanning U_{dc} naar een snelheid. Voor een uitgebreide beschrijving van dit systeem wordt verwezen naar Massuger [8]. Op de tracker unit moet ook de calibratiefactor ingesteld worden. Deze wordt gegeven door:

$$(4.4) \quad (\lambda_0/2)\sin(\gamma/2).$$

Op de display van de tracker unit kan dan de snelheid afgelezen worden. Voordat de metingen begonnen worden moeten eerst enkele specificaties in PCM2 worden ingevoerd: de samplefrequentie, het aantal samples, en het aantal perioden. Dan wordt een test-meting uitgevoerd. Het meetsignaal wordt dan aangepast aan het meetbereik van -5 tot $+5$ Volt. Vervolgens wordt een calibratie uitgevoerd door bij twee verschillende meetsignalen de grootte van de signalen in PCM2 in te voeren. De meetdata worden weggeschreven naar meetfiles. Omdat in ieder meetpunt meerdere metingen zijn gedaan kan een gemiddelde worden berekend en een bijbehorende waarde voor de standaarddeviatie. Met het programma Biasco kunnen deze gemiddelde binaire files omgezet worden in een leesbare Ascii file. Met het programma Slide kunnen dan grafieken getekend worden. De traversering van het model m.b.v de drie stappenmotoren wordt bereikt door in het programma de gewenste verplaatsing in te voeren.

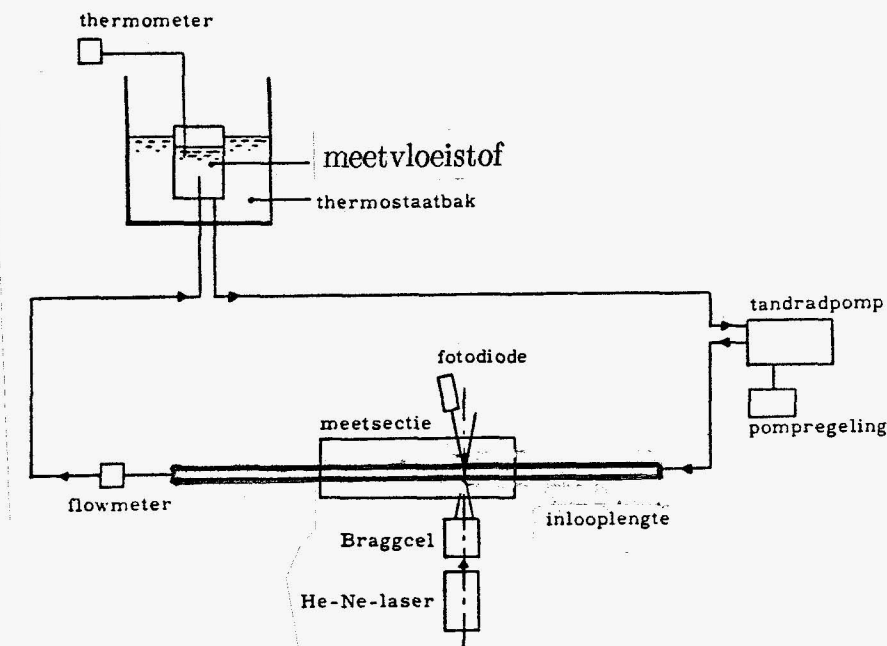
Bij de snelheidsmetingen volgens de LDA methode zijn er een aantal systematische foutenbronnen (ter Huurne [4]):

- de plaatsbepaling van het meetvolume, de positie van de buis-as kan kan bepaald worden met een afwijking ± 0.05 mm in de y- en z-richting en ± 0.2 mm in de x-richting (=axiaal);
- het discreet zijn van de stappenmotoren veroorzaakt bij de traversering van het model een meetfout van maximaal 0.06 mm in de y- en z-richting, in de axiale richting is deze verwaarloosbaar;
- bij het meten van axiale snelheden kunnen fouten ten gevolge van een verkeerde detector instelling verwaarloosd worden;
- fouten ten gevolge van afwijkingen van de stand van de optische as en het al dan niet volledig snijden van de bundels zijn verwaarloosbaar; de maximale afwijking in de bepaling van de snelheid ten gevolge van de fout in de bepaling van de snijhoek van de bundels is een 0.5 %;

- bij de meting van de axiale snelheden is de fout ten gevolge van het niet exact in het bundelvlak liggen van deze snelheidscomponent verwaarloosbaar.

4.2 Meetopstelling

Figuur 4.3 geeft een schematische tekening van het stromingscircuit. Het voorraadvat met de meetvloeistof wordt op een constante temperatuur van 40°C gehouden doordat het in een bak met warm water is gehangen. De tandradpomp zorgt ervoor dat de vloeistof door het circuit wordt rondgepompt. De opstelling bevat ook een electromagnetische flowmeter (Transflow-601). Hiermee kan het debiet gemeten worden. Het model is gemaakt van perspex; de buis in het blok perspex heeft een diameter van 4 mm een lengte van 65 mm, en een inlooptuk met een lengte van 450 mm. Het Reynoldsgetal varieert bij de metingen tussen 75 en 100. Met $l = 0.075 \text{ Re } d$ volgt dan dat de stroming volledig ontwikkeld is.



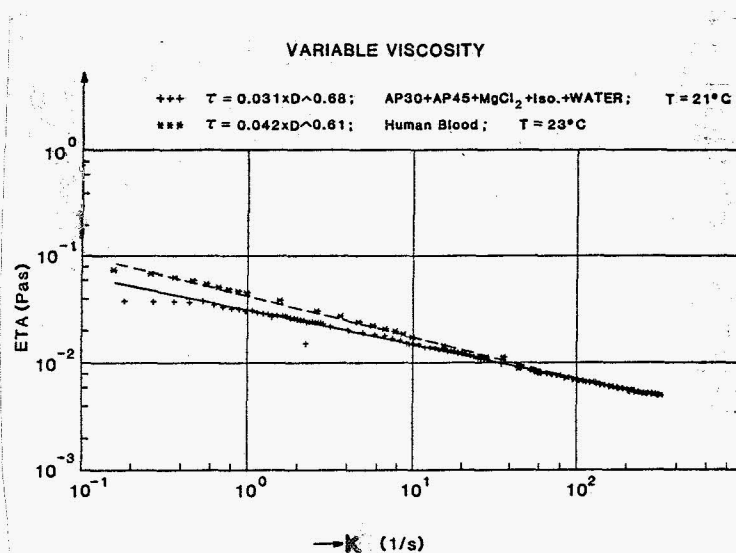
Figuur 4.3 Schematische tekening van het stromingscircuit.

Als meetvloeistof zijn twee vloeistoffen gebruikt:

- een oplossing van 71.3 % kaliumthiocyanaat in water als Newtonse vloeistof. Deze oplossing heeft een brekingsindex van 1.493 (gelijk aan die van perspex), een

dynamische viscositeit $\eta =$ en een dichtheid $\rho = 1.4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

- Separan ($\rho = .995 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) als niet-Newtonse vloeistof. Deze vloeistof is door Liepsch ontwikkeld en heeft een viscositeitsfunctie die sterk lijkt op die van bloed. Een machtswetfit die door Liepsch [6, p.121] wordt gegeven is: $C=0.021$, $n=0.74$. Deze vloeistof heeft een brekingsindex van 1.355, en is dus niet gelijk aan die van perspex. Er worden ook andere parameterwaarden genoemd; deze hebben niet op hetzelfde Separanmengsel betrekking als dat in dit onderzoek gebruikt is. Illustratief is figuur 4.4, welke zowel de viscositeitscurve toont voor menselijk bloed als voor het Separan-mengsel met $C = 0.031$, $n = 0.68$.

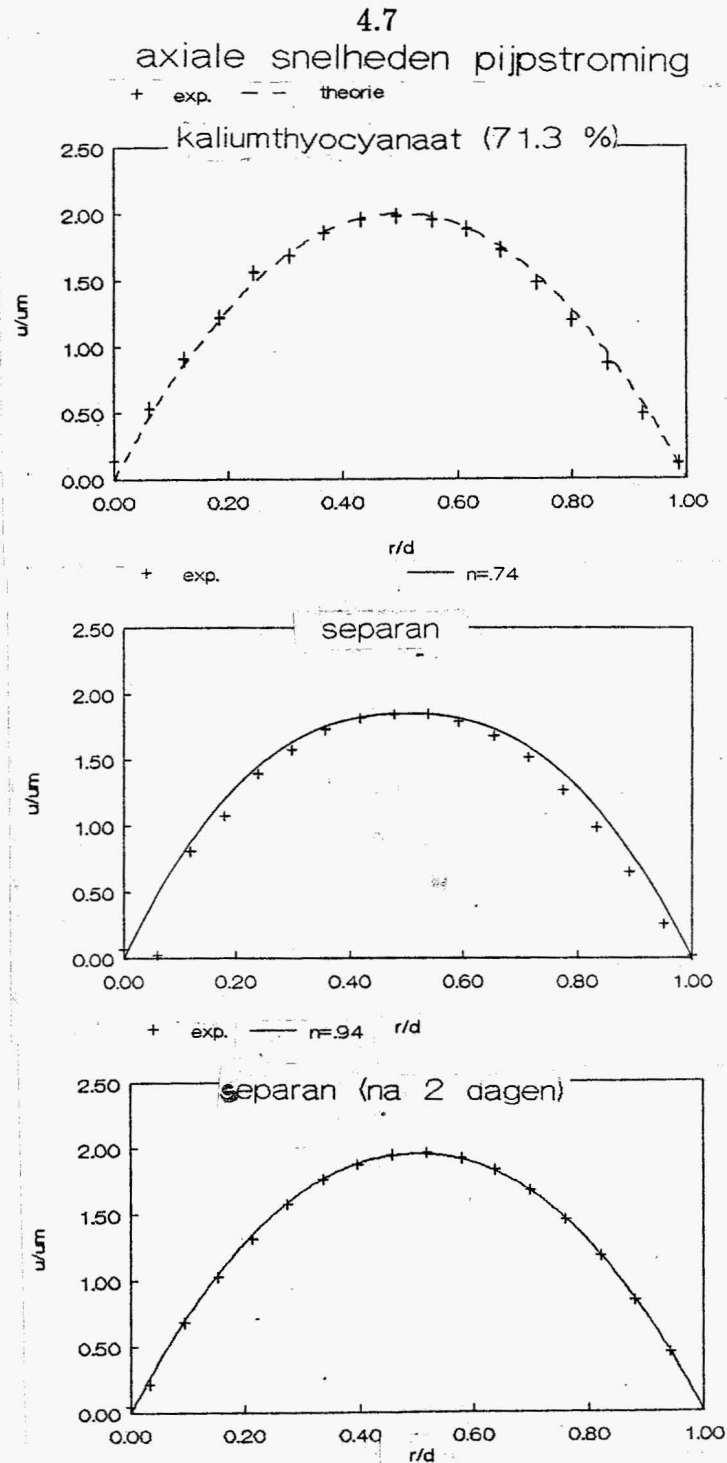


Figuur 4.4 Viscositeitsfuncties voor een Separan-mengsel ($n = .68$) en menselijk bloed met een hematocriet waarde van 45 % bij een temperatuur van 23°C (uit [6]).

Het is nog niet gelukt om een mengsel te vinden waarvan zowel de viscositeit als de brekingsindex voldoen aan de gestelde eisen. Het mengen van Separan met kaliumthiocyanaat gaat nog niet goed. Ook is onzeker of dan de viscositeitsfunctie nog overeenstemt met die van bloed. In onze groep is nog geen experimentele mogelijkheid voorhanden om deze functie te meten.

4.3 Resultaten

De snelheidsmetingen zijn verricht in het symmetrievlak op een lijn over de doorsnede



Figuur 4.4

Experimentele en theoretische volledig ontwikkelde axiale snelheidsprofielen in een ronde rechte buis voor a) kaliumthiocyanaat, b) Separan, c) "oude" Separan oplossing.

van de buis. Bij de metingen met beide media gold: $R_{\text{buis}} = 4.1 \pm 0.1 \text{ mm}$,
 $Q = 0.41 \pm 0.02 \text{ l/min}$. Uit $Q = u_m \pi R^2$ volgt dan: $u_m = 0.132 \text{ m/s}$.

Het resultaat voor de meting aan kaliumthiocyanaat staan in figuur 4.5.a. We zien een zeer goede overeenkomst tussen de experimentele en theoretische waarden. Het theoretisch snelheidsprofiel volgt uit de uitdrukking (3.16) voor een Newtonse vloeistof. Voor Separan staan de resultaten in figuur 4.5.b. Daar zien we een redelijke overeenkomst tussen de experimentele waarden en de theoretische waarden. Hier is het theoretische profiel bepaald uit uitdrukking (3.17) voor een machtwetvloeistof. Uit de verhouding $u_{\max} / 2u_m$ vinden we $n = 0.74 \pm 0.02$, in goede overeenstemming met de door Liepsch gegeven waarde. Het bij deze uitdrukking behorende profiel is echter niet de beste fitcurve. Opvallend is ook het meetpunt voor $r/d = 0.5$; waarschijnlijk is hier twee maal op $r/d = 0.0$ gemeten. Bij herhaling van dit experiment na 2 dagen bleek dat de Separan vloeistof veel minder viskeus was geworden. Dit is duidelijk terug te zien in figuur 4.5.c: het profiel heeft nu een hogere topwaarde en het profiel is vrijwel parabolisch zoals voor een Newtonse vloeistof. Voor n werd nu een waarde van 0.94 gevonden. We zien ook dat dan het meetpunt op $r/d = 0.5$ veel beter past bij de overige ten opzichte van de eerste meting.

De viskeuze eigenschappen van Separan kunnen blijkbaar veranderen; hiervoor zijn twee verklaringen mogelijk:

- Separan is volgens de specificaties over een periode van ongeveer 5 dagen stabiel, de eerste meting was 4 dagen na aanmaak van de vloeistof, de tweede na 6 dagen. Het zou kunnen zijn dat bij de tweede meting de viskeuze eigenschappen van Separan door chemische processen waren veranderd.
- De vloeistof wordt met een tandradpomp door de opstelling gepompt. Deze pomp kan de lange polymeerketens verbreken en zo de viskeuze eigenschappen veranderen.

Om de tweede hypothese te testen is een experiment met een Haake kogelvalviscosimeter uitgevoerd voor zowel de Separan oplossing uit de opstelling als de even oude oplossing uit de fles waarin hij was aangemaakt. Voor kogel nr.2 bleek een duidelijk verschil in valtijd tussen de twee vloeistoffen:

- Separan uit de opstelling: $t = 36$ s;
- Separan uit de fles: $t = 62$ s.

Liepsch [6] vermeldt dat hij bij zijn experimenten een systeem met een overloopvat gebruikte om de vloeistof door de opstelling te pompen. Op die manier kan dit probleem voorkomen worden.

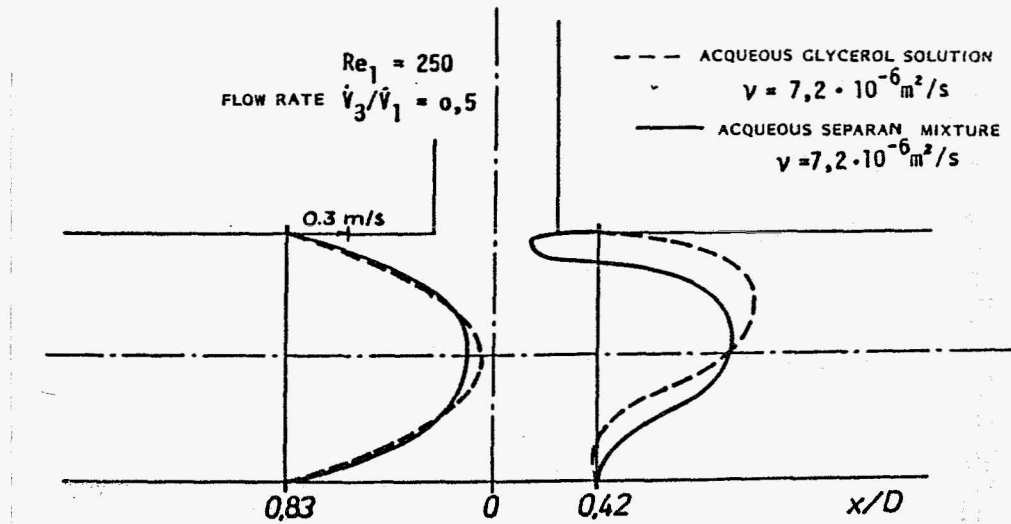
5 Conclusies en voortgang

Als we de stroming van bloed in een ronde rechte buis, divergerende buis of 2d-vertakking beschrijven met het machtwetmodel of het Cassonmodel als constitutief model geeft dit geringe, maar niet verwaarloosbare, verschillen in het stromingsbeeld t.o.v. de Newtonse situatie. De juistheid van de berekeningen aan de ronde rechte buis wordt bevestigd door de experimentele resultaten met twee modelvloeistoffen: kaliumthiocyanaat als Newtonse vloeistof en Separan als niet-Newtonse vloeistof. Als we Separan beschrijven met het machtwetmodel met $n = 0.74$ is er een goede overeenkomst tussen numerieke, analytische en experimentele resultaten.

Op grond van deze resultaten is echter om een aantal redenen nog geen definitief antwoord te geven op de vraag hoe groot het belang is van het niet-Newtonse karakter van bloed bij het analyseren van de stroming in de halslagadervertakking. Dat hangt ten eerste samen met de in par.1.3 genoemde principiële fysische bezwaren tegen het Reiner-Rivlin model. Daarnaast mogen eigenlijk het machtwetmodel en het Cassonmodel niet toegepast worden op stromingen met loslaatgebieden. Een verdere experimentele validatie is dan ook zeker op zijn plaats. In dit verband zijn ook de experimentele resultaten die Liepsch [6,7] eerder vond het vermelden waard. Hij beschrijft toont van belang. Hij beschrijft een serie metingen aan een stationaire stroming voor en na een 90° vertakking en vond erg opmerkelijke verschillen tussen de snelheidsprofielen voor een Newtonse vloeistof (glycerine oplossing in water) en een niet-Newtonse vloeistof (Separan), zie figuur 5.1. Na het T stuk zien we dat de terugstroomgebieden van de Newtonse en de niet-Newtonse vloeistof zich aan verschillende zijden van de buis bevinden.

Het onderzoek naar de invloed van het niet-Newtonse gedrag van bloed op de stroming in de halslagadervertakking moet dan ook in een aantal richtingen worden voortgezet. Er moet gezocht worden naar een ander constitutief model, dat niet de bezwaren heeft welke tegen het Reiner-Rivlin model gelden (met name het niet in rekening brengen van geheugeneffecten), en dat ook in Separan kan worden geïmplementeerd. Het Maxwell model heeft niet die principiële bezwaren, maar het is nog onduidelijk of dat model al in bruikbare vorm in Separan is geïmplementeerd. Bovendien is het nog niet duidelijk welke andere niet-Newtonse effecten voor bloed van belang zijn. Verder zijn voor een goede validatie experimentele gegevens van de stroming van de niet-Newtonse vloeistof in complexe geometrieën noodzakelijk. Bij experimenten met een niet-Newtonse vloeistof zoals Separan is de beschikbaarheid van een viscosimeter essentieel. En moet het gebruik

van tandradpompen, die de polymeerketens kapot slaan, worden vermeden. Er is ook behoefte aan een vloeistof waarvan zowel de viskeuze eigenschappen als de brekingsindex aan de eisen voor de modelvloeistof voldoen. Tenslotte dienen als vervolg op de 2d stationaire problemen 3d en instationaire problemen onderzocht te worden.



Figuur 5.1

Snelheidsprofielen voor en na een 90° T-stuk. Het intree Reynoldsgetal was 250. We zien een vergelijking van een Newtonse en niet-Newtonse op bloed gelijkende vloeistof (met dezelfde representatieve kinematische viscositeit als de Newtonse vloeistof) voor een stationaire stroming (uit [7]).

Dankwoord

Op deze plaats wil ik iedereen bedanken die mij gedurende mijn studie tot steun is geweest. Met name gedurende mijn afstudeerperiode: Anton van Steenhoven, Peter Reuderink, Joost Horsten, Leo Wouters, Frank, Peter, en mijn ouders.

Literatuurlijst

- [1] W.A.J.M. Corver,
Enige aspecten van laser doppler metingen,
intern rapport TUE, (1982).
- [2] J.A.G.P. Damsteegt,
Numerieke simulatie van de stroming van een gegeneraliseerd Newtons fluidum, d.I
en II, intern rapport TUD, 1984
- [3] S.C. Hunter,
Mechanics of continuous media, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1983.
- [4] C.E. Huurne, ter,
De stationaire stroming in convergerende en divergerende buizen, intern rapport
TUE,1988.
- [5] G.D.C. Kuiken , H.J. Merk,
Rheologie der fluida, deel B, Kontinuumstheorie der reologisch enkelvoudige fluida,
collegedictaat THD, 1978.
- [6] D.W. Liesch,
Fortschritt—berichte VDI,Stroemungsuntersuchungen an modellen menschlicher
blutgefaess—systeme; Reihe 7: stroemungstechnik nr. 113,1987.
- [7] D.W. Liesch, S. Moravec,
Pulsatile flow of Non—Newtonian fluid in distensible models of human arteries,
Biorheology, 21,571—586, 1984.
- [8] R. Massuger,
Gebruikersprogramma voor het meetsysteem PCM2,
intern rapport TUE, (1987).

- [9] S. Moravec, D.W. Liepsch,
Flow investigations in a model of a three dimensional human artery with Newtonian and non-Newtonian fluids, Part I, *Biorheologie*,20: 745-759,1983.
- [10] Rindt, C.C.M.,
Een experimentele en numerieke analyse van een (in)stationaire stroming in een 2-dimensionaal model van de halslagadervertakking, intern rapport, TUE, 1985.
- [11] P.P.J.M. Schram, P.T. Smulders,
Fysische Transportverschijnselen, collegedictaat TUE.
- [12] G. Segal,
Septran user manual, Leidschendam, SEPRA, 1984.
- [13] A.A. van Steenhoven,
De toepassing van de eindige elementenmethode bij stromingsproblemen, college-dictaat TUE, (1984).
- [14] A.A. van Steenhoven,
Rheologie en microcirculatie, collegediktaat TUE,1984.
- [15] F.N. v.d. Vosse,
Numerical analysis of carotid artery Flow, proefschrift TUE, (1987).
- [16] R.L. Whitmore,
Rheology of the circulation, Pergamon Press, Oxford, 1968.

Appendix 1 Het principe van de eindige elementenmethode

Het principe van de eindige elementenmethode kan als volgt beschreven worden. We beschouwen de differentiaalvergelijking:

$$(A.1.1) \quad Lu(x,y) = f(x,y) \text{ op het gebied } \Omega,$$

en:

$$(A.1.2) \quad u(x,y) = 0 \text{ op rand } \Gamma.$$

Voor de oplossing u van de differentiaalvergelijking geldt dan ook:

$$(A.1.3) \quad \int_{\Omega} w (Lu-f) \, dx dy = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

indien voor $w(x,y)$ elke willekeurige functie mag worden ingevuld. We kunnen hiervoor nu een benaderingsoplossing construeren door voor N onafhankelijke functies $w_j(x,y)$ te eisen dat:

$$(A.1.4) \quad \int_{\Omega} w (Lu-f) \, dx dy = 0, \quad j=1, \dots, N.$$

Schrijven we de benaderingsoplossing van de differentiaalvergelijking als een lineaire combinatie van N basisfuncties, d.w.z.:

$$(A.1.5) \quad \tilde{u}(x,y) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x,y)$$

en substitueren we deze op de plaats van u in vergelijking (A.1.4), dan gaat de oorspronkelijke partiele differentiaalvergelijking over in een oplosbaar stelsel van N vergelijkingen met N onbekenden.

Deze benaderingsmethode heet de methode van de gewogen residuen. De daarbinnen meest gebruikte keuze voor de weegfuncties w_i is die volgens de methode van Galerkin:

A.1.2

$$(A.1.6) \quad w_j(x,y) = \varphi_j(x,y)$$

Zij geeft dan als stelsel vergelijkingen:

$$(A.1.7) \quad \int_j \varphi_j (L\tilde{u}-f) dx dy = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N.$$

De basisfuncties φ_j worden geconstrueerd volgens de eindige elementen methode.

Daartoe wordt het gebied Ω verdeeld in deelgebieden die niet even groot hoeven te zijn. Deze deelgebieden noemen we elementen. Aan deze elementen worden de volgende eisen gesteld:

- i) het zijn er een eindig aantal: e_k met $k=1, \dots, N$,
- ii) er vindt geen overlap plaats,
- iii) het gehele gebied Ω wordt opgespannen door alle elementen tezamen.

In ieder element kiezen we een aantal punten; deze punten noemen we basispunten of knooppunten. We kiezen de basisfunctie φ_i zo dat ze:

- i) een is in het i -de knooppunt en nul in de andere knooppunten,
- ii) een voorgeschreven gedrag per element heeft, bijvoorbeeld lineair of kwadratisch hetgeen afhankelijk is van het aantal basispunten,
- iii) continu in Ω is.

Als we nu de integratie van (A.1.7) uitvoeren dan worden de vergelijkingen eerst partieel geïntegreerd, vervolgens worden de randvoorwaarden ingevuld. Dit leidt tot de zgn. Galerkin vergelijkingen.

Appendix 2 Reiner–Rivlin vloeistoffen

Voor een Reiner–Rivlin vloeistof wordt de constitutieve relatie gegeven door:

$$(A.2.1) \quad \mathbf{t} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2,$$

waarin \mathbf{t} de deviatorische spanningstensor is, \mathbf{D} de deformatiesnelheidstensor en waarbij α, β , en γ een functie zijn van de invarianten van de tensor \mathbf{D} . Deze appendix is een samenvatting van hoofdstuk 7 uit Hunter [3]. Aangegeven wordt hoe de relatie (A.2.1) is afgeleid en op welke fysische principes hij is gebaseerd. De constitutieve vergelijking voor een vloeistof in beweging schrijven we in de algemene vorm:

$$(A.2.2) \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{t}$$

met: $p = p(\rho, \theta)$: de druk, als functie van de dichtheid ρ en de temperatuur θ ;
 \mathbf{t} : de deviatorische spanningstensor; deze term verdwijnt in de afwezigheid van beweging en is dus een functie van het snelheidsveld.

We zoeken nu naar een expliciete uitdrukking voor de tensor \mathbf{t} . Deze spanningstensor moet voldoen aan het zgn. objectiviteitsprincipe (eng.: "material frame indifference"): door alle waarnemers wordt dezelfde spanningstensor gemeten onafhankelijk van hun relatieve bewegingen. Deze eis heeft twee consequenties voor \mathbf{t} :

- i) \mathbf{t} kan geen directe functie zijn van de snelheden, omdat dit zou leiden tot het resultaat dat \mathbf{t} verschillend zou zijn voor waarnemers in verschillende (bewegende) referentiesystemen. We nemen aan dat \mathbf{t} een functie is van de ruimtelijke afgeleiden van het snelheidsveld, dus:

$$(A.2.3) \quad \mathbf{t} = f\left(\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial x_s}, \rho, \theta\right).$$

De grootheden $\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial x_s}$ (zie ook Schram [11], p. 26) zijn een maat voor de manier waarop continuumselementen vervormen (en roteren). Aanname (A.2.3) impliceert dat de vloeistof geen "geheugen" heeft voor toestanden in het verleden, en veronderstelt dat de deviatorische spanning volledig bepaald wordt door de huidige beweging. De grootheden $\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial x_s}$ kunnen we herschrijven tot:

$$(A.2.4) \quad \frac{\partial v_r}{\partial x_s} = d_{rs} + \omega_{rs},$$

met d_{rs} en ω_{rs} het symmetrische cq. het antisymmetrische deel van de tensor gevormd door de grootheden $\frac{\partial v_r}{\partial x_s}$; d_{rs} correspondeert met de deformaties van het materiaal (i.e. componenten van de deformatiesnelheidstensor D , ω_{rs} met de rotaties van het materiaal. Relatie (A.2.3) wordt nu in matrixvorm:

$$(A.2.5) \quad \mathbf{t} = \mathbf{f}(D, \Omega, \rho, \theta).$$

ii) \mathbf{t} is geen functie van Ω (bewijs: Hunter [3], p.125– p.126). We kunnen (A.2.5) schrijven als:

$$(A.2.6) \quad \mathbf{t} = \mathbf{f}(D, \rho, \theta).$$

Relatie (A.2.6) impliceert dat de vloeistof isotroop is (bewijs: Hunter [3], p. 13*). Nu hebben we een relatie gevonden tussen twee tensoren: \mathbf{t} en D . We zoeken verder naar een meer expliciete relatie. We nemen aan dat geldt:

$$(A.2.1) \quad \mathbf{t} = \alpha \mathbf{I} + \beta D + \gamma D^2.$$

Dit is een intuïtieve (van latijn: intueri = met de geest nauwkeurig beschouwen) of inductieve relatie (van latijn: induco = invoeren), waarbij min of meer gevoelsmatig een constitutiemodel is gesteld (er bestaan ook deductieve (van latijn: deduco = afleiden) relaties). Voor α, β, γ kiezen we dat ze een functie zijn van I_D, II_D, III_D (zodat een uitdrukking voor \mathbf{t} ontstaat die onafhankelijk is van de keuze van een coördinatensysteem):

$$(A.2.7.a) \quad \alpha = \alpha(I_D, II_D, III_D, \rho, \theta),$$

$$(A.2.7.b) \quad \beta = \beta(I_D, II_D, III_D, \rho, \theta),$$

$$(A.2.7.c) \quad \gamma = \gamma(I_D, II_D, III_D, \rho, \theta).$$

A.2.3

Het is op verschillende manieren te bewijzen dat relatie (A.2.1) voor een isotrope tensor D mathematisch correct is. Zowel in Hunter [3] als in Kuiken [5] wordt het bewijs van Serrin (1959) gegeven. Hier geven we de essentie van dat bewijs. We definiëren daartoe de matrixrepresentatie van de tensor D ten opzichte van een zogenaamd hoofdassencoördinatensysteem; de isotropetensor D is dan diagonaal van vorm met als enige componenten de eigenwaarden van de tensor. Als de tensor D diagonaal van vorm is, dan is de tensor t dat ook (bewijs: Hunter [3], p. 13). De hoofdassen van de deviatorische spanningstensor vallen dus samen met deze van de deformatiesnelheidstensor. In een hoofdassenrepresentatie is (A.2.6) equivalent met drie vergelijkingen van de vorm:

$$(A.2.8.a) \quad t(1) = \varphi[d(1), d(2), d(3), \rho, \theta],$$

$$(A.2.8.b) \quad t(2) = \varphi[d(2), d(3), d(1), \rho, \theta],$$

$$(A.2.8.c) \quad t(3) = \varphi[d(3), d(1), d(2), \rho, \theta],$$

met $t(i)$, $i=1,2,3$ de eigenwaarden van t en $d(i)$, $i = 1,2,3$ de eigenwaarden van D . Vanwege de isotropievoorwaarde is er slechts een functie φ betrokken bij de drie vergelijkingen. Het is mogelijk om deze functie op velerlei manieren te kiezen; hier kiezen we:

$$(A.2.9.a) \quad \varphi[d(1), d(2), d(3), \rho, \theta] = \alpha + \beta d(1) + \gamma d^2(1),$$

$$(A.2.9.b) \quad \varphi[d(2), d(3), d(1), \rho, \theta] = \alpha + \beta d(2) + \gamma d^2(2),$$

$$(A.2.9.c) \quad \varphi[d(3), d(1), d(2), \rho, \theta] = \alpha + \beta d(3) + \gamma d^2(3),$$

Aangetoond kan worden dat deze keus altijd (d.w.z. er is altijd een oplossing voor α, β en γ) mogelijk is (zie Hunter [3]).

Het is eenvoudig in te zien dat het machtwetmodel en het Cassonmodel in de categorie vloeistoffen beschreven door vergelijking A.2.1, zij zijn immers van de vorm :

$$(A.2.10) \quad t = 2\eta D,$$

waarbij:

$$(A.2.11) \quad \alpha = \gamma = 0, \text{ en } \beta = \eta = \eta(I_D, II_D, III_D).$$

Interuniversitair project Atherosclerose

Gegeneraliseerd-Newtonse stationaire stromingen in
starre bloedvatmodellen

Deel II: Appendix 3 bij deel I, afstudeerverslag

J.P.W. Baaijens

Eindhoven, oktober 1989

Afstudeerdocenten: prof. dr. ir. J.D. Janssen (W)
 prof. dr. ir. G. Vossers (N)

Begeleiding: dr. ir. A.A. van Steenhoven

intern rapport:WFW 89.052 en: R-1022-A

Technische Universiteit Eindhoven

Appendix 3 Reken- en verwerkingsprogramma's

PROBLEMS.F (rekenprogramma op Alliant)

```

program sepran
*****
c Dit programma berekent de (benaderings)oplossing van de vloeistof-
c bewegingsvergelijkingen voor een ronde rechte buis, een diver-
c gerende buis, of een 2d-vertakking.
c Aan de standaardinvoerfile moet aan het eind worden toegevoegd
c (in deze volgorde):
c -um (gemiddelde vloeistofsnelheid op de instroomrand),
c -eps (boetefunctieparameter),
c -rho (vloeistofdichtheid),
c -d (diameter buis),
c -Re (Re getal),
c -modelv2 (geeft aan welk vloeistofmodel gebruikt wordt bij het
c oplossen van de Navier-Stokes vergelijking: 1 = Newtons, 2=
c machtwet, 4= Casson), C (parameter C uit het machtwetmodel) of Y
c (Cassongetal, als het Cassonmodel gebruikt wordt).
c Invoer:
c -standaardinvoerfile.
c Opmerkingen:
c -voor de divergerende buis wordt de oplossing voor stapsgewijs
c opgehoogde Reynoldsgetallen berekend Re = 300, Re = 700, Re =1200;
c voor ieder Reynoldsgetal wordt een file <probleem.plf> gegene-
c reerd.
c -voor de 2d-vertakking wordt de oplossing berekend voor
c Re=300 en dan voor Re=640.
c *****

implicit double precision (a-h,o-z)
dimension kmesh(100),kprob(100),intmat(5),matr(5),isol(5),
v      irhsd(5),iwork(10),work(10),iuser(100),user(100),
v      contln(20),ipres(5),istrm(5),iold(5),uit(2),ihelp(5),
v      rey(10)
real*8 mpar
character*72 filnam,num,name
character*9 string
integer spgenv,numarr,nm
common/cmcdpi/irefwr,irefre,irefer
common/cum/um,d,modelv2,mpar,rho,p,q,r,s,re,filnam
string = '123456789'

kmesh(1)=100
kprob(1)=100
iuser(1)=100
user(1)=100
contln(1)=20

rey(1)=300.
rey(2)=700.
rey(3)=1200.

```


A.3.2

```

c  Pijp:
c  call start(0,0,1,1)

c  Divergerende buis of 2d-vertakking:
call start(1,0,1,1)

call mesh(0,iinput,rinput,kmesh)

call prinrv(ivectr,kmesh,kprob,4,-1,'coordinaten')
call prini2(kmesh,ivectr,1)

call probdf(0,kprob,kmesh,iinput)
call commat(1,kmesh,kprob,intmat)

c  Niet-standaard parameters inlezen uit invoerfile:

read(irefre,*)um,eps,rho,d,re,modelv2,mpar

c  File <probleem.plf> openen (zie subroutine wrfil): voor
c  divergerende buis wordt een 'plf'-file geopend met de naam:
c  <probleem.plf> waarbij het laatste karakter van 'probleem'
c  vervangen is door k (=1,2,3).

k=1
iref = 24
lnam = spgenv(5,filnam)
filnam(lnam-2:lnam) = 'plf'
if (filnam(1:1).eq.'d') then
  filnam(lnam-4:lnam-4)= string(k:k)
endif
write(*,*)'filnam= ',filnam(1:lnam)
open(iref,file=filnam(1:lnam))

c  *****
c  Rvw invoeren;
c  rvw beschikbaar voor:
c  - pijp
c  - divergerende buis.
c  *****

c  Rvw voor pijp:

if (filnam(1:1).eq.'p') then
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,2,3,2,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,um,1,1,2,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,1,6,1,0)
endif

c  Rvw voor divergerende buis:

if (filnam(1:1).eq.'d') then
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,2,4,2,0)
  call bvalue(1,2,kmesh,kprob,isol,value,1,1,2,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,1,4,1,0)

```

```

    call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,6,8,1,0)
endif

c   Rvw voor 2d-vertakking:

if (filnam(1:1).eq.'v') then
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,1,5,1,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,1,5,2,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,7,12,1,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,7,12,2,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,14,18,1,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,14,18,2,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,27,29,2,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,27,29,1,0)
  call bvalue(0,2,kmesh,kprob,isol,0d0,29,29,1,0)
  call bvalue(2,2,kmesh,kprob,isol,value,28,28,1,0)
endif

do 10 i=1,10
  work(i)=0d0
  iwork(i)=0
10 continue

c   *****
c   Oplossen Stokes-vergelijking (met Newtons vloeistof model,
c   modelv=1):
c   *****

  work(1)=eps
  work(2)=rho
  modelv=1
  iwork(7)=modelv
  k=1
  if (filnam(1:1).eq.'d') then
    re=reyn(k)
  endif

c   Newtonse viscositeit bloed berekenen:

  work(8)=um*d*rho/re

  write(irefwr,*)'eta Newtons:',work(8)
  write(*,*)'eta Newtons:',work(8)

c   call fil100(1,iuser,user,kprob,8,iwork,work)
  call system(1,matr,intmat,kmesh,kprob,irhsd,isol,
v      iuser,user,islold,ielhlp)
  call solve(1,matr,isol,irhsd,intmat,kprob)

c   itype=1: mesh

  itype=1
  call wrfil(iref,itype,ivec,ivec,kmesh,kprob)

```

A.3.4

```

c *****
c Oplossen Navier-Stokes vergelijking (met als vloeistof model:
c Newtons (modelv=1), machtwet model (modelv=2), Casson model
c (modelv=4); bij de niet-Newtonse modellen de eerste iteratie
c uitvoeren met het Newtonse model):
c *****

c Begin iteratielus:

50 continue

c convectieve term lineariseren met Newtonse methode:

iwork(3)=2

if ((filnam(1:1).ne.'p').and.(k.gt.1)) then

c Oplossing voor vorig Reynoldsgetal inlezen uit achtergrondgeheugen:

call readbs(numarr,isol,ihelp)

endif

if (modelv2.eq.1) then
  if (filnam(1:1).eq.'d') then
    re=reyn(k)
  endif
  if ((filnam(1:1).eq.'v').and.(k.gt.1)) then
    re=700.
  endif
  work(7)=modelv2
  work(8)=um*d*rho/re
  write(irefwr,*)'eta Newtons:',work(8)
  write(*,*)'eta Newtons:',work(8)
  iter1=1
endif

c P,q,r,s zijn hulpvariabelen:

p=2*3.14*(um**2)*rho
s=(2*3.14/d)*um

c De eerste iteratie voor berekeningen met niet-Newtonse modellen
c uitvoeren met Newtonse model:

call commat(2,kmesh,kprob,intmat)
if (((modelv2.eq.2).or.(modelv2.eq.4)).and.(re.eq.300.))then
  iwork(7)=1
call copyvc(isol,iold)
call fil100(1,iuser,user,kprob,8,iwork,work)
call system(-1,matr,intmat,kmesh,kprob,irhsd,isol,
v      iuser,user,iold,ielhlp)
call solve(1,matr,isol,irhsd,intmat,kprob)

```

```

iter1=2
endif

```

- c De parameter C van het machtwet model berekenen:

```

if (modelv2.eq.2) then
  if (filnam(1:1).eq.'d') then
    re=rey(k)
  endif
  if ((filnam(1:1).eq.'v').and.(k.gt.1)) then
    re=700.
  endif
  iwork(7)=modelv2
  work(8)=p/(re*(s**mpar))
  work(9)=mpar
  write(*,*)'n=',work(9)
  write(irefwr,*)'c=',work(8)
  write(*,*)'c=',work(8)
endif

```

- c De Cassonviskositeit en de yieldstress berekenen:

```

if (modelv2.eq.4) then
  if (filnam(1:1).eq.'d') then
    re=rey(k)
  endif
  if ((filnam(1:1).eq.'v').and.(k.gt.1)) then
    re=640.
  endif
  q=mpar*um/d
  r=2*dsqrt(q)*dsqrt(s)
  iwork(7)=modelv2
  work(8)=p/((q+r+s)*re)
  work(9)=2
  work(10)=q*work(8)
  eta=work(8)
  tau=work(10)
  write(irefwr,*)'eta Casson=',work(8),'tau=',work(10)
  write(*,*)'eta Casson=',work(8),'tau=',work(10)
endif

```

```

write(*,*)p,q,r,s

```

```

do 100 iter=iter1,40
  niter=iter
  call copyvc(isol,iold)
  if (iwork(7).eq.1) then
    call fil100(1,iuser,user,kprob,8,iwork,work)
  endif
  if (iwork(7).eq.2) then
    call fil100(1,iuser,user,kprob,9,iwork,work)
  endif
  if (iwork(7).eq.4) then
    call fil100(1,iuser,user,kprob,10,iwork,work)
  endif

```

```

endif
call system(-1,matr,intmat,kmesh,kprob,irhsd,isol,iuser,
v      user,iold,ielhlp)
call solve(1,matr,isol,irhsd,intmat,kprob)
call diffvc(0,isol,iold,kprob,difmax)
write(irefwr,*)'difmax=',difmax
write(*,*)'difmax=',difmax
if (difmax.lt.1d-6) then
  goto 110
endif
100 continue
110 write(irefwr,120)niter
120 format(' number of iterations=',i3)
  write(*,121)niter
121 format(' number of iterations=',i3)
125 continue

c  Nieuwe 'plf'-file openen waar oplossingen voor hogere Re-getallen
c  naar toegeschreven worden:

if ((filnam(1:1).ne.'p').and.(k.gt.1)) then
  iref = 24
  filnam(lnam-2:lnam) = 'plf'
  filnam(lnam-4:lnam-4) =string(k:k)
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
endif

c  itype=3: snelheid

itype=3
call wrfil(iref,itype,isol,ivec,kmesh,kprob)

call prinrv(isol,kmesh,kprob,4,0,'oplossing')

call stream(1,ivec,istrm,0,psiphi,kmesh,kprob,isol)
call deriva(ichois,1,ix,1,ivec,ipres,kmesh,kprob,
v      isol,isol,iuser,user,ielhlp)

call prinrv(ipres,kmesh,kprob,4,0,'drukwaarden')
call prinrv(istrm,kmesh,kprob,4,0,'stroomfunctie')

c  itype=2: druk

itype=2
call wrfil(iref,itype,ipres,ivec,kmesh,kprob)

if (filnam(1:1).eq.'p') then
  call finish(0)
endif

if (filnam(1:1).eq.'d') then
  call writbs(0,0,numarr,name,isol,ihelp)
  k=k+1
  if (k.ne.4)then

```

```

    goto 50
  endif
  close(iref)
  call finish(1)
endif

if (filnam(1:1).eq.'v') then
  call writbs(0,0,numarr,name,isol,ihelp)
  k=k+1
  if (k.ne.3)then
    goto 50
  endif
  close(iref)
  call finish(1)
endif

close(iref)
end

c *****
c
c Subroutine wrfil
c Joost Horsten
c
c Deze subroutine schrijft de met itype corresponderende
c arrays naar een file <probleem.plf>; deze file kan naar de
c Appollo gecopieerd worden, waarna met het programma
c postproc.f plots gemaakt kunnen worden van deze arrays.
c
c
c itype = 1 : mesh
c         2 : druk
c         3 : snelheid
c         4 : user array
c
c gebruik de volgende regels in het hoofdprogramma om
c 'plf'-file te openen
c
c iref=24
c lnam=spgenv(5,filnam)
c filnam(lnam-2:lnam)='plf'
c open(iref,file=filnam(1:lnam))
c
c *****

subroutine wrfil(iref,itype,ivec,rvec,kmesh,kprob)
integer iref,itype,ivec(*),kmesh(*),kprob(*)
double precision rvec(*)
c character(*) text

common/cmcdpi/irefwr,irefre,irefer
integer irefwr,irefre,irefer

integer i,n

```

```

if ((itype.lt.1).or.(itype.gt.4)) then
  write(irefwr,*)'*** Error in WRFIL: illegal value ',
&      'of itype =',itype
  return
endif

write(iref,*)itype
c  write(iref,*)text

goto (100,200,200,400)itype

100 call meshwr(iref,kmesh)
return

200 call prinsl(ivec,kmesh,kprob,iref)
return

400 n=idint(rvec(1))
write(iref,*)n
write(iref,*)(rvec(i),i=1,n)
return

end

c *****
c Funcbc wordt gebruikt om de randvoorwaarde op de instroomrand
c voor te schrijven:
c - divergerende buis: het volledig ontwikkelde snelheidsprofiel
c in een ronde rechte buis (analytisch,verschillend profiel
c afhankelijk van de constitutieve vergelijking);
c - 2-d vertakking: het volledig ontwikkelde snelheidsprofiel tussen
c 2 oneindig grote vlakke platen voor een Newtonse vloeistof;
c *****

function funcbc(ichois,x,y,z)
implicit double precision (a-h,o-z)
real*8 mpar
common/cum/um,d,modelv2,mpar,rho,p,q,r,s,re

if (ichois.eq.1) then
  if (modelv2.eq.1) then

    funcbc=2*um*(1d0-((x*x)/((.5*d)*(.5*d))))

  endif
  if (modelv2.eq.2) then

    funcbc=((1+(3*mpar))/(1+mpar))*um*(1-((x/(.5*d))**(1+1/mpar)))

  endif
  if (modelv2.eq.4) then

    p=2*3.14*(um**2)*rho
    s=(2*3.14/d)*um

```

```

q=mpar*um/d
r=2*dsqrt(q)*dsqrt(s)

eta=p/((q+r+s)*re)
tau=q*eta
drkgrd=(64/re)*(1/d)*.5*rho*(um**2)
str=.5*d

a1=-(1/eta)*tau
a2=(1/eta)*(dsqrt(tau))*(dsqrt(drkgrd))*2/3*1.41421
a3=-(1/(4*eta))*drkgrd
a4=-a1*str-a2*(str**1.5)-a3*(str**2)

funcbc=a1*x+a2*(x**1.5)+a3*(x**2)+a4

endif
endif
if (ichois.eq.2) then
  str=.5*d
  funcbc=1.5*um*((1-((x+0.0014)/str)**2))
endif
end

```

c *****

```

double precision function pow(x,y)
implicit double precision (a-h,o-z)

pow=dexp(y*dlog(x))

end

```

POSTPROC.F (verwerkingsprogramma op Appollo)

```

c *****
c Dit programma verzorgt de postprocessing van de door het programma
c <probleem.f> op de Alliant berekende oplossing van de Navier-
c Stokes vergelijking; dit houdt in:
c - het plotten van het mesh, het snelheidsveld en contourlijnen
c   voor de druk;
c - het maken van arrays met axiale snelheden (pijpstroming en
c   divergerende buis) en secundaire snelheden (divergerende buis)
c   en de druk op de symmetrieas m.b.v. subroutine Lindat;
c - het naar files schrijven van deze profielen;
c - het berekenen van het debiet voor de pijpstroming op instroom-
c   rand en uitstroomrand, voor de divergerende buis op alle
c   randen.
c Invoer:
c - <probleem.dat>: invoerfile van het rekenprogramma;
c - <probleem.plf>: uitvoerfile van het rekenprogramma;
c - <pijp.in>: invoerfile voor pijpstroming voor subroutine Lindat,
c   axiale snelheden;
c - <pijldr.in>: invoerfile voor pijpstroming voor subroutine

```



```

c   Lindat,druk op symmetrieas;
c   - <divax.in>: invoerfile voor divergerende buis voor subroutine
c   Lindat,axiale snelheden;
c   - <divse.in>: invoerfile voor divergerende buis voor subroutine
c   Lindat,secundaire snelheden;
c   - <divdr.in>: invoerfile voor divergerende buis voor subroutine
c   Lindat,druk op symmetrieas;
c   - <vcomax.in>:
c   - <vcomse.in>:
c   - <vintax.in>:
c   - <vintse.in>:
c   - <vextax.in>:
c   - <vextse.in>:
c   - <vcomdr.in>:
c   - <vintdr.in>:
c   - <vextdr.in>:
c   Uitvoer:
c   - <probleem.out>: standaarduitvoerfile;
c   - <probleem.plt>: standaardplotfile;
c   - <probleem.drk>: bevat de druk op de symmetrieas en de
c   z-coördinaten (pijpstroming,divergerende buis);
c   - <probleem.tuw>: bevat de wandschuifspanningen en de z-
c   coördinaten van de punten waarin de wandschuifspanningen
c   berekend zijn (pijpstroming,divergerende buis);
c   - <probleem.tow>: bevat de wandschuifspanningen en de z-
c   coördinaten van de punten waarin de wandschuifspanningen
c   berekend zijn op de onderwand van de 2d-vertakking;
c   - <probleem.tzw>: bevat de wandschuifspanningen en de z-
c   coördinaten van de punten waarin de wandschuifspanningen
c   berekend zijn op de zijwand van de 2d-vertakking;
c   - <probleem.tbw>: bevat de wandschuifspanningen en de z-
c   coördinaten van de punten waarin de wandschuifspanningen
c   berekend zijn op de bovenwand van de 2d-vertakking;
c   - <probleem.axn>: bevat de axiale snelheden op lijn n;
c   - <probleem.sen>: bevat de secundaire snelheden op lijn n;
c   - <probleem.axn>: bevat de axiale snelheden op lijn n, met n=1 t/m
c   nmax (divergerende buis: nmax=5; 2d-vertakking: nmax=24, 1 t/m
c   8: communis, 9 t/m 16: externa, 17 t/m24: interna).
c   - <probleem.sen>: file die de secundaire snelheden bevat op lijn
c   n, met n=1 t/m nmax (divergerende buis: nmax=5; 2d-vertakking:
c   nmax=24, 1 t/m 8: communis, 9 t/m 16: externa, 17 t/m24:
c   interna).
c   Opmerking:
c   - de coördinaten, de druk, de wandschuifspanning, de axiale snel-
c   heden en de secundaire snelheden zijn dimensieloos gemaakt.
c   *****

```

```

program postproc

```

```

implicit double precision (a-h,o-z)
dimension xvalue(4000),yvalue(4000),contln(50),iinput(4000),
v      rinput(4000),kmesh(100),kprob(100),ivec(5),user(200),
v      iuser(200),ipres(5),a(200),b(200),icurvs(3),funcx(4000),
v      funcy(4000),ioutvc(5),work(200),iwork(200),fx(4000),

```

```

v      fy(4000)
integer indcol,spgenv,ierr,itYPE,lNAM,iref,i,iivec
real*8 mpar
character*72 filnam,text
common/cmcdpi/irefwr,irefre,irefer
common/cplot/xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax,jmax,jmark,
v      jkader,jtimes
common/cfunk/um,rho,re,d,parm,modelv2,c,eta,tau,etan
kmesh(1)=100
kprob(1)=100
iuser(1)=200
user(1)=200
iinput(1)=4000
rinput(1)=4000
xvalue(1)=4000
yvalue(1)=4000
contln(1)=50
funcx(1)=4000
funcy(1)=4000

c  include 'sepran.com'

      iref=24

c  divergerende buis
c  plotfm=-1000.
c  yfact=0.1
c  factor=0d0

c  2d-vertakking

      plotfm=25
      yfact=1
      factor=0d0
      call start(0,1,0,0)

      lnam=spgenv(5,filnam)
      filnam(lnam-2:lnam)='plf'
      open(iref,file=filnam(1:lnam))

      call mesh(0,iinput,rinput,kmesh)
      call probdf(2,kprob,kmesh,iinput)

      do 10 i=1,10
      work(i)=0d0
      iwork(i)=0
10 continue

c  niet-standaard invoer inlezen uit invoerfile:

      read(irefre,*)um,eps,rho,d,re,modelv2,parm

      work(1)=eps
      work(2)=rho

```

```
iwork(3)=2
```

- c Newtonse viscositeit bloed berekenen:

```
if (modelv2.eq.1) then
  iwork(7)=modelv2
  work(8)=um*d*rho/re
  etan=work(8)
endif

p=2*3.14*(um**2)*rho
pp= 2*3.14*pow(um,2.)*rho
write(*,*)'pp=',pp,'p=',p
s=(2*3.14/d)*um
```

```
if (modelv2.eq.2) then
```

- c parameter C van het machtwet model berekenen:

```
  iwork(7)=modelv2
  work(8)=p/(re*(pow(s,parm)))
  ww=p/(re*(s**parm))
  write(*,*)'ww',ww
  c=work(8)
  work(9)=parm
  write(*,*)'n=',work(9)
  write(irefwr,*)'c=',work(8)
  write(*,*)'c=',work(8)
endif
```

- c Cassonviscositeit en de yieldstress berekenen:

```
if (modelv2.eq.4) then
  q=parm*um/d
  r=2*dsqrt(q)*dsqrt(s)
  iwork(7)=modelv2
  work(8)=p/((q+r+s)*re)
  work(9)=2
  work(10)=q*work(8)
  eta = work(8)
  tau = work(10)
endif

if (iwork(7).eq.1) then
  call fil100(1,iuser,user,kprob,8,iwork,work)
endif
if (iwork(7).eq.2) then
  call fil100(1,iuser,user,kprob,9,iwork,work)
endif
if (iwork(7).eq.4) then
  call fil100(1,iuser,user,kprob,10,iwork,work)
endif
```

```

100 call rdfile(iref,itype,ivec,user,kmesh,kprob,ierr)
   if ((ierr.lt.0).or.(ierr.gt.1)) then
       write(irefwr,*)'*** Error in reading data file'
       stop
   endif
   if (ierr.eq.1) goto 9000

   goto (1000,2000,3000,4000)itype

1000 continue
   jmark=5
c   plotfm=20d0
c   yfact=2d-1
   call plotm2(10,kmesh,iuser,plotfm,yfact)
   call probdf(1,kprob,kmesh,iinput)
   goto 100

2000 continue
c   call plotc2(1,kmesh,kprob,ivec,contln,0,
c   &          indcol,plotfm,yfact,0)
   if (filnam(1:1).eq.'p') then
       contln(6)=0.
       contln(7)=4.
       contln(8)=8.
       contln(9)=12.
       contln(10)=16.
       contln(11)=20.
       contln(12)=24.
       contln(13)=28.
       contln(14)=32.
       contln(15)=36.
   end if
   if (filnam(1:1).eq.'d') then
       contln(6)=0.25
       contln(7)=0.50
       contln(8)=0.75
       contln(9)=1.00
       contln(10)=1.25
       contln(11)=1.50
       contln(12)=1.75
       contln(13)=2.00
       contln(14)=2.25
       contln(15)=2.5
   endif
   if (filnam(1:1).eq.'v') then
       goto 60
   endif
   contln(6)=-0.60
   contln(7)=-0.50
   contln(8)=-0.40
   contln(9)=-0.30
   contln(10)=0.20
   contln(11)=-0.10
   contln(12)=0.01

```

```

contln(13)=0.02
contln(14)=0.5
contln(15)=1
contln(16)=1.3
contln(17)=1.6
contln(18)=1.7
contln(19)=1.8
contln(20)=1.9
contln(21)=2
contln(22)=2.1
contln(23)=2.2
contln(24)=2.4
contln(25)=2.6
contln(26)=2.8
contln(27)=2.85
contln(28)=2.90
contln(29)=2.95
contln(30)=3.00
contln(31)=4.0
contln(32)=5.0
contln(33)=6.0
contln(34)=7.0
contln(35)=9
contln(36)=10
contln(37)=15
contln(38)=25
contln(39)=-.03
contln(40)=-.06
contln(41)=-.09
c   endif
60  continue
   call plotc1(1,kmesh,kprob,ivec,contln,36,plotfm,yfact,0)
   call prinrv(ivec,kmesh,kprob,4,0,'druk')
c   Drukverloop op symmetrieas berekenen:

iref=30
ichois=1
if (filnam(1:1).eq.'p') then
  open(iref,file='pijldr.in')
  filnam(lnam-2:lnam)='drk'
endif
if (filnam(1:1).eq.'d') then
  open(iref,file='divdr.in')
  filnam(lnam-2:lnam)='drk'
endif
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  open(iref,file='vcomdr.in')
  filnam(lnam-2:lnam)='cdk'
endif
write(*,*)'lindat druk communis'
call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,
v         ivec,xvalue,yvalue,iref)
close(iref)
iref=31

```

```

open(iref,file=filnam(1:lnam))
do 140 i=6,31
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/(rho*(um**2))
  write(iref,*)a(i),b(i)
140 continue
close(iref)
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  iref=32
  open(iref,file='vextdr.in')
  filnam(lnam-2:lnam)='edk'
  call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,
v      ivec,xvalue,yvalue,iref)
  close(iref)
  iref=33
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  do 142 i=6,31
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/(rho*(um**2))
    write(iref,*)a(i),b(i)
142  continue
  close(iref)
  iref=34
  open(iref,file='vintdr.in')
  filnam(lnam-2:lnam)='idk'
  call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,
v      ivec,xvalue,yvalue,iref)
  close(iref)
  iref=34
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  do 144 i=6,31
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/(rho*(um**2))
    write(iref,*)a(i),b(i)
144  continue
  close(iref)
endif
iref=24
goto 100

3000 continue
c  plotfm=-1.44d3
c  yfact=0.04125d0
  call plotvc(1,2,ivec,ivec,kmesh,
&      kprob,plotfm,yfact,factor)

c  Wandschuijspanning berekenen (pijpstroming,divergerende buis,
c  onderrand 2d-vertakking):

  call deriva(ichois,5,ix,jdegfd,iivec,ioutvc,
v      kmesh,kprob,ivec,ivec,iuser,user,ielhlp)
  call prinrv(ioutvc,kmesh,kprob,2,0,'stress')
  icurvs(1)=-1
  if (filnam(1:1).eq.'p') then

```

```

    icurvs(2)=2
    icurvs(3)=3
    filnam(lnam-2:lnam)='tuw'
endif
if (filnam(1:1).eq.'d') then
    icurvs(2)=2
    icurvs(3)=4
    filnam(lnam-2:lnam)='tuw'
endif
if (filnam(1:1).eq.'v') then
    icurvs(2)=1
    icurvs(3)=5
    filnam(lnam-2:lnam)='tow'
endif
call compcr(0,kmesh,kprob,ioutvc,-4,icurvs,funcx,
v          funcy)
iref=37
open(iref,file=filnam(1:lnam))
imax=5+funcx(5)
k=0

do 155 i=6,imax
    if (filnam(1:1).ne.'v')then
c    z-coordinaat selecteren

        if ((2*(i/2)).ne.i) then
            k=k+1
            fx(k)=funcx(i)/d
        endif
    endif
    if (filnam(1:1).eq.'v')then

c    x-coordinaat selecteren:

        if ((2*(i/2)).eq.i) then
            k=k+1
            fx(k)=funcx(i)/d
        endif
    endif
155 continue
    imax=5+funcy(5)
do 165 i=6,imax

c    dimensieloos maken met analytische waarde
c    voor de wandschuifspanning voor een Newtonse stroming:

    tuw=-((um**2)*rho*8/re)
    tw=-(6*(um**2)*rho)/(re)
    if (filnam(1:1).ne.'v') then
        fy(i)=funcy(i)/tuw
    endif
    if (filnam(1:1).eq.'v') then
        fy(i)=funcy(i)/tw

```

```

endif
k=i-5
write(iref,*)fx(k),fy(i)
165 continue
close(iref)

```

c Wandschuifspanning berekenen op bovenrand interna (2d-vertakking):

```

if (filnam(1:1).eq.'v') then
  icurvs(1)=-2
  icurvs(2)=9
  icurvs(3)=7

  call compcr(0,kmesh,kprob,ioutvc,-4,icurvs,funcx,
v      funcy)

```

```

  filnam(lnam-2:lnam)='tiw'
  iref=38
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  imax=5+funcx(5)
  k=0

```

c x-coördinaat selecteren:

```

do 168 i=6,imax
  if ((2*(i/2)).eq.i) then
    k=k+1
    fx(k)=funcx(i)/d
  endif
168 continue
  imax=5+funcy(5)
  do 169 i=6,imax
    fy(i)=-funcy(i)/tw
    k=i-5
    write(iref,*)fx(k),fy(i)
169 continue
close(iref)

```

c Wandschuifspanning berekenen op onderrand externa (2d-vertakking):

```

  icurvs(1)=-1
  icurvs(2)=10
  icurvs(3)=12

  call compcr(0,kmesh,kprob,ioutvc,-4,icurvs,funcx,
v      funcy)

```

```

  filnam(lnam-2:lnam)='tew'
  iref=39
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  imax=5+funcx(5)
  k=0

```

c x-coördinaat selecteren:


```

do 170 i=6,imax
  if ((2*(i/2)).eq.i) then
    k=k+1
    fx(k)=funcx(i)/d
  endif
170  continue
    imax=5+funcy(5)
do 171 i=6,imax
  fy(i)=funcy(i)/tw
  k=i-5
  write(iref,*)fx(k),fy(i)
171  continue
    close(iref)

```

c Wandschuifspanning berekenen op bovenrand (2d-vertakking):

```

icurvs(1)=-2
icurvs(2)=18
icurvs(3)=14

call compcr(0,kmesh,kprob,ioutvc,-4,icurvs,funcx,
v      funcy)

```

```

filnam(lnam-2:lnam)='tbw'
iref=40
open(iref,file=filnam(1:lnam))
imax=5+funcx(5)
k=0

```

c x-coördinaat selecteren:

```

do 172 i=6,imax
  if ((2*(i/2)).eq.i) then
    k=k+1
    fx(k)=funcx(i)/d
  endif
172  continue
    imax=5+funcy(5)
do 173 i=6,imax
  fy(i)=-funcy(i)/tw
  k=i-5
  write(iref,*)fx(k),fy(i)
173  continue
    close(iref)
endif

```

c Axiale snelheid op verschillende lijnen berekenen (pijpstroming,
c divergerende buis, communis 2-d vertakking):

```

ichois=1
iref=41
if (filnam(1:1).eq.'p') then
  open(iref,file='pijp.in')
  idelta=20
endif

```

```

if (filnam(1:1).eq.'d') then
  open(iref,file='divax.in')
  idelta=20
endif
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  open(iref,file='vcomax.in')
  idelta=25
endif
call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,ivec,
v      xvalue,yvalue,iref)
close(iref)
iref=42
filnam(lnam-2:lnam)='ax1'
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  filnam(lnam-2:lnam)='ca1'
endif
open(iref,file=filnam(1:lnam))
ibegin=6
imax=ibegin+idelta
do 175 i=ibegin,imax
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/um
  write(iref,*)a(i),b(i)
175 continue
close(iref)
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  goto 215
endif
ibegin=imax+1
imax=ibegin+idelta
iref=43
filnam(lnam-2:lnam)='ax2'
open(iref,file=filnam(1:lnam))
do 180 i=ibegin,imax
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/um
  write(iref,*)a(i),b(i)
180 continue
close(iref)

if (filnam(1:1).eq.'d') then
  ibegin=imax+1
  imax=ibegin+idelta
  iref=45
  filnam(lnam-2:lnam)='ax3'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  do 190 i=ibegin,imax
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/um
    write(iref,*)a(i),b(i)
190 continue
close(iref)
ibegin=imax+1
imax=ibegin+idelta

```

```

    iref=50
    filnam(lnam-2:lnam)='ax4'
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    do 200 i=ibegin,imax
        a(i)=xvalue(i)/d
        b(i)=yvalue(i)/um
        write(iref,*)a(i),b(i)
200    continue
    close(iref)
    ibegin=imax+1
    imax=ibegin+idelta
    iref=55
    filnam(lnam-2:lnam)='ax0'
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    do 210 i=ibegin,imax
        a(i)=xvalue(i)/d
        b(i)=yvalue(i)/um
        write(iref,*)a(i),b(i)
210    continue
    close(iref)
    endif

215    continue

    iref=75
    if (filnam(1:1).eq.'d')then
        imax=(idelta+1)*5+5
    endif
    if (filnam(1:1).eq.'v')then
        imax=(idelta+1)*1+5
    endif
    ibegin=6
    filnam(lnam-2:lnam)='axs'
    if (filnam(1:1).eq.'v') then
        filnam(lnam-2:lnam)='cas'
    endif
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    axmax=0.0
    axmin=0.0
    do 245 i=ibegin,imax
        a(i)=xvalue(i)/d
        b(i)=yvalue(i)/um
        if (b(i).gt.axmax)then
            axmax=b(i)
        endif
        if (b(i).lt.axmin)then
            axmin=b(i)
        endif
        write(iref,*)a(i),b(i)
245    continue
    write(irefwr,*)'axmax= ',axmax,' axmin= ',axmin
    write(*,*)'axmax= ',axmax,'axmin= ',axmin
    close(iref)

```

- c Secundaire snelheid op verschillende lijnen berekenen
 c (divergerende buis, communis 2-d vertakking):

```

ichois=1
iref=77
if (filnam(1:1).eq.'d') then
  open(iref,file='divse.in')
  idelta=20
endif
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  open(iref,file='vcomse.in')
  idelta=25
endif
call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,ivec,
v      xvalue,yvalue,iref)
close(iref)
iref=80
filnam(lnam-2:lnam)='se1'
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  filnam(lnam-2:lnam)='cs1'
endif
open(iref,file=filnam(1:lnam))
ibegin=6
imax=ibegin+idelta
do 247 i=ibegin,imax
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/um
  write(iref,*)a(i),b(i)
247 continue
close(iref)
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  goto 257
endif
ibegin=imax+1
imax=ibegin+idelta
iref=90
filnam(lnam-2:lnam)='se2'
open(iref,file=filnam(1:lnam))
do 249 i=ibegin,imax
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/um
  write(iref,*)a(i),b(i)
249 continue
close(iref)

if (filnam(1:1).eq.'d') then
  ibegin=imax+1
  imax=ibegin+idelta
  iref=95
  filnam(lnam-2:lnam)='se3'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  do 251 i=ibegin,imax
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/um
  
```

```

    write(iref,*)a(i),b(i)
251  continue
    close(iref)
    ibegin=imax+1
    imax=ibegin+idelta
    iref=100
    filnam(lnam-2:lnam)='se4'
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    do 253 i=ibegin,imax
        a(i)=xvalue(i)/d
        b(i)=yvalue(i)/um
        write(iref,*)a(i),b(i)
253  continue
    close(iref)
    ibegin=imax+1
    imax=ibegin+idelta
    iref=105
    filnam(lnam-2:lnam)='se0'
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    do 256 i=ibegin,imax
        a(i)=xvalue(i)/d
        b(i)=yvalue(i)/um
        write(iref,*)a(i),b(i)
256  continue
    close(iref)

257  continue

    iref=125
    if (filnam(1:1).eq.'d')then
        imax=89
        filnam(lnam-2:lnam)='ses'
    endif
    if (filnam(1:1).eq.'v')then
        imax=(idelta+1)+5
        filnam(lnam-2:lnam)='css'
    endif
    ibegin=6
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    semax=0.0
    semin=0.0
    do 262 i=ibegin,imax
        a(i)=xvalue(i)/d
        b(i)=yvalue(i)/um
        if (b(i).gt.semax)then
            semax=b(i)
        endif
        if (b(i).lt.semin)then
            semin=b(i)
        endif
        write(iref,*)a(i),b(i)
262  continue
    write(irefwr,*)'semax= ',semax,' semin= ',semin
    write(*,*)'semax= ',semax,' semin= ',semin

```

```

    close(iref)
  endif

c  Axiale snelheid op verschillende lijnen berekenen externa
c  2-d vertakking:

  ichois=1
  iref=130
  if (filnam(1:1).eq.'v') then
    open(iref,file='vextax.in')
    call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,ivec,
v      xvalue,yvalue,iref)
    close(iref)
    iref=135
    filnam(lnam-2:lnam)='ea0'
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    idelta=25
    ibegin=6
    imax=ibegin+idelta
    do 265 i=ibegin,imax
      a(i)=xvalue(i)/d
      b(i)=yvalue(i)/um
      write(iref,*)a(i),b(i)
265  continue
    close(iref)
    ibegin=imax+1
    imax=ibegin+idelta
    iref=140
    filnam(lnam-2:lnam)='ea1'
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    do 270 i=ibegin,imax
      a(i)=xvalue(i)/d
      b(i)=yvalue(i)/um
      write(iref,*)a(i),b(i)
270  continue
    close(iref)
    iref=175
    imax=(idelta+1)*2+5
    ibegin=6
    filnam(lnam-2:lnam)='eax'
    open(iref,file=filnam(1:lnam))
    axmax=0.0
    axmin=0.0
    do 305 i=ibegin,imax
      a(i)=xvalue(i)/d
      b(i)=yvalue(i)/um
      if (b(i).gt.axmax)then
        axmax=b(i)
      endif
      if (b(i).lt.axmin)then
        axmin=b(i)
      endif
      write(iref,*)a(i),b(i)
305  continue

```

```

write(irefwr,*)'eaxmax= ',axmax,' eaxmin= ',axmin
write(*,*)'eaxmax= ',axmax,'eaxmin= ',axmin
close(iref)

```

- c Secundaire snelheid op verschillende lijnen berekenen
c externa 2-d vertakking:

```

      ichois=1
      iref=177
      open(iref,file='vextse.in')
      idelta=25
      call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,ivec,
v          xvalue,yvalue,iref)
      close(iref)
      iref=180
      filnam(lnam-2:lnam)='es0'
      open(iref,file=filnam(1:lnam))
      ibegin=6
      imax=ibegin+idelta
      do 310 i=ibegin,imax
          a(i)=xvalue(i)/d
          b(i)=yvalue(i)/um
          write(iref,*)a(i),b(i)
310      continue
      close(iref)
      ibegin=imax+1
      imax=ibegin+idelta
      iref=190
      filnam(lnam-2:lnam)='es1'
      open(iref,file=filnam(1:lnam))
      do 315 i=ibegin,imax
          a(i)=xvalue(i)/d
          b(i)=yvalue(i)/um
          write(iref,*)a(i),b(i)
315      continue
      close(iref)
      iref=225
      imax=(idelta+1)*2+5
      ibegin=6
      filnam(lnam-2:lnam)='ess'
      open(iref,file=filnam(1:lnam))
      semax=0.0
      semin=0.0
      do 350 i=ibegin,imax
          a(i)=xvalue(i)/d
          b(i)=yvalue(i)/um
          if (b(i).gt.semax)then
              semax=b(i)
          endif
          if (b(i).lt.semin)then
              semin=b(i)
          endif
          write(iref,*)a(i),b(i)
350      continue

```

```

write(irefwr,*)'esmax= ',semax,' esmin= ',semin
write(*,*)'esmax= ',semax,' esmin= ',semin
close(iref)
endif

```

- c Axiale snelheid op verschillende lijnen berekenen interna
c 2-d vertakking:

```

ichois=1
iref=230
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  open(iref,file='vintax.in')
  call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,ivec,
v      xvalue,yvalue,iref)
  close(iref)
  iref=235
  filnam(lnam-2:lnam)='ia0'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  idelta=25
  ibegin=6
  imax=ibegin+idelta
  do 355 i=ibegin,imax
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/um
    write(iref,*)a(i),b(i)
355  continue
  close(iref)
  ibegin=imax+1
  imax=ibegin+idelta
  iref=240
  filnam(lnam-2:lnam)='ia1'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  do 360 i=ibegin,imax
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/um
    write(iref,*)a(i),b(i)
360  continue
  close(iref)
  ibegin=imax+1
  imax=ibegin+idelta
  iref=245
  filnam(lnam-2:lnam)='ia2'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  do 365 i=ibegin,imax
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/um
    write(iref,*)a(i),b(i)
365  continue
  close(iref)
  iref=250
  filnam(lnam-2:lnam)='iax'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  ibegin=6
  imax=(idelta+1)*3+5

```



```

axmax=0.0
axmin=0.0
do 390 i=ibegin,imax
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/um
  if (b(i).gt.axmax)then
    axmax=b(i)
  endif
  if (b(i).lt.axmin)then
    axmin=b(i)
  endif
  write(iref,*)a(i),b(i)
390  continue
  write(irefwr,*)'iaxmax= ',axmax,' iaxmin= ',axmin
  write(*,*)'iaxmax= ',axmax,' iaxmin= ',axmin
  close(iref)

c  Secundaire snelheid op verschillende lijnen berekenen
c  interna 2-d vertakking:

  ichois=1
  iref=270
  open(iref,file='vintse.in')
  idelta=25
  call lindat(ichois,iinput,rinput,kmesh,kprob,ivec,
v      xvalue,yvalue,iref)
  close(iref)
  iref=275
  filnam(lnam-2:lnam)='is0'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  ibegin=6
  imax=ibegin+idelta
  do 395 i=ibegin,imax
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/um
    write(iref,*)a(i),b(i)
395  continue
  close(iref)
  ibegin=imax+1
  imax=ibegin+idelta
  iref=280
  filnam(lnam-2:lnam)='is1'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))
  do 400 i=ibegin,imax
    a(i)=xvalue(i)/d
    b(i)=yvalue(i)/um
    write(iref,*)a(i),b(i)
400  continue
  close(iref)
  ibegin=imax+1
  imax=ibegin+idelta
  iref=285
  filnam(lnam-2:lnam)='is2'
  open(iref,file=filnam(1:lnam))

```

```

do 410 i=ibegin,imax
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/um
write(iref,*)a(i),b(i)
410  continue
close(iref)
iref=300
imax=(idelta+1)*3+5
ibegin=6
filnam(lnam-2:lnam)='iss'
open(iref,file=filnam(1:lnam))
semax=0.0
semin=0.0
do 420 i=ibegin,imax
  a(i)=xvalue(i)/d
  b(i)=yvalue(i)/um
  if (b(i).gt.semax)then
    semax=b(i)
  endif
  if (b(i).lt.semin)then
    semin=b(i)
  endif
  write(iref,*)a(i),b(i)
420  continue
write(irefwr,*)'ismax= ',semax,' ismin= ',semin
write(*,*)'ismax= ',semax,' ismin= ',semin
close(iref)
endif

```

c Stroomfunctie berekenen

```

call stream(1,iivec,istrm,0,psiphi,kmesh,kprob,ivec)
call prinrv(istrm,kmesh,kprob,4,0,'stroomfunctie')
if (filnam(1:1).eq.'v') then
  contln(6) = -2.5d-6
  contln(7) = -1d-6
  contln(8) = -0.5d-6
  contln(9) = -0.1d-6
  contln(10) = 0.0
  contln(11) = 0.1d-6
  contln(12) = 0.5d-6
  contln(13) = 1d-5
  contln(14) = 5d-5
  contln(16) = 1d-4
  contln(17) = 3d-4
  contln(18) = 5d-4
  contln(19) = 7d-4
  contln(20) = 9d-4
  contln(21) = 1d-3
  contln(22) = 1d-3
  contln(23) = 6d-3
  contln(24) = 8d-3
  contln(25) = 1.1d-2
  contln(26) = 1.05d-2

```

```

contln(27) = 1d-2
plotfm = 25d0
factor=1d0
endif
if (filnam(1:1).eq.'d') then
contln(6) = -7d-6
contln(7) = -6.9d-6
contln(8) = -6.7d-6
contln(9) = -6.5d-6
contln(10) = -6.3d-6
contln(11) = -6d-6
contln(12) = -5d-6
contln(13) = -4d-6
contln(14) = -3d-6
contln(15) = -2d-6
contln(16) = -1d-6
contln(17) = -7.1d-6
contln(18) = -7.2d-6
contln(19) = -7.3d-6
plotfm=-1000.
yfact=0.1
endif
factor=0d0
call plotc1(1,kmesh,kprob,istrm,contln,21,plotfm,yfact,factor)

```

- c Debiet op randen berekenen:

```

iref=24
irule=4
idim=1

```

- c Voor pijpstroming in- en uitstroomrand:

```

if (filnam(1:1).eq.'p') then
icurve1=1
icurve2=4
ichois=1
number=2
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve1,
v icurve1,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal instroomrand:',value
write(*,*)'lijnintegraal instroomrand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve2,
v icurve2,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal uitstroomrand is:',value
write(*,*)'lijnintegraal uitstroomrand:',value
endif

```

- c Voor divergerende buis alle randen:

```

if (filnam(1:1).eq.'d') then
icurve1=1
icurve2=5
icurve3=2

```

```

icurve4=4
icurve5=6
icurve6=8
ichois=2
number=1
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve1,
v      icurve1,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal instroomrand:',value
write(*,*)'lijnintegraal instroomrand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve2,
v      icurve2,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal uitstroomrand is:',value
write(*,*)'lijnintegraal uitstroomrand:',value
idim=-1
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve3,
v      icurve4,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal wand:',value
write(*,*)'lijnintegraal wand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve5,
v      icurve6,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal symmetrieas:',value
write(*,*)'lijnintegraal symmetrieas:',value
endif

if (filnam(1:1).eq.'v') then
icurve1=19
icurve2=1
icurve3=5
icurve4=6
icurve5=7
icurve6=12
icurve7=13
icurve8=14
icurve9=18
ichois=2
number=1
irule=3
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve1,
v      icurve1,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal instroomrand:',value
write(*,*)'lijnintegraal instroomwand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve2,
v      icurve3,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal onderrand is:',value
write(*,*)'lijnintegraal onderrand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve4,
v      icurve4,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal interna-uitstroomrand:',value
write(*,*)'lijnintegraal interna-uitstroomrand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve5,
v      icurve6,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal zijrand:',value
write(*,*)'lijnintegraal zijrand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve7,

```

```

v      icurve7,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal externa-uitstroomrand:',value
write(*,*)'lijnintegraal externa-uitstroomrand:',value
value=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icurve8,
v      icurve9,ivec,iuser,user)
write(irefwr,*)'lijnintegraal bovenrand:',value
write(*,*)'lijnintegraal bovenrand:',value
endif
goto 100

4000 continue
goto 100

9000 call finish(0)

end

c *****
c Subroutine rdfil
c Joost Horsten
c Leest invoer in uit file <probleem.plf>.
c *****

subroutine rdfil(iref,ittype,ivec,rvec,kmesh,kprob,ierr)
double precision rvec(*)
integer iref,ierr,ittype,ivec(*),kmesh(*),kprob(*),i,n
common/cmcdpi/irefwr,irefre,irefer

read(iref,*,err=999,end=998)ittype
c read(iref,*)ittype

if ((ittype.lt.1).or.(ittype.gt.4)) then
write(irefwr,*)'*** Error in RDFIL: illegal value ',
& 'of itype =',ittype
stop
endif

goto (100,200,200,400)ittype

100 call meshrd(0,iref,kmesh)
return

200 call reads1(ivec,kmesh,kprob,iref)
return

400 read(iref,*,err=999)n
read(iref,*)(rvec(i),i=1,n)
return

998 ierr=1
return

```

```

999 ierr=2
return

```

```

end

```

```

c *****
c Function pow
c Joost Horsten
c Berekenet x**y; in sommige gevallen nodig ???
c *****

```

```

double precision function pow(x,y)
implicit double precision (a-h,o-z)

```

```

pow=dexp(y*dlog(x))

```

```

end

```

```

c *****
c Function tauw
c Berekenet de analytische waarde voor de wand-
c schuifspanning voor een volledig ontwikkelde
c laminaire stroming in een ronde rechte buis.
c *****

```

```

double precision function tauw()
implicit double precision (a-h,o-z)
common/cfunk/um,rho,re,d,parm,modelv2,c,eta,tau,etan

```

```

str=.5*d
if (modelv2.eq.1) then

    tauw=-(etan*4*um/str)

```

```

endif
if (modelv2.eq.2) then

    z=((1/parm)+1)/(0.5-1/((1/parm)+3))
    y=(0.5*um*(1/str)*z)
    x=y**parm
    tauw=-(x*c)

```

```

endif
if (modelv2.eq.4) then

```

```

    drkgrd=(64/re)*(1/d)*.5*rho*(um**2)

```

```

    a1=-(1/eta)*tau
    a2=(1/eta)*(dsqrt(tau))*(dsqrt(drkgrd))*2/3*1.41421
    a3=-(1/(4*eta))*drkgrd
    a4=-a1*str-a2*pow(str,1.5)-a3*pow(str,2)

```

```

    vgrad=a1+a2*1.5*dsqrt(str)+2*a3*str
    vgrad=abs(vgrad)

```

```
tauw=-(tau+2*dsqrt(tau)*dsqrt(eta*vgrad)+eta*vgrad)
```

```
endif
end
```

Invoerfiles:
VERTNW.DAT

```
mesh2d
points
p 1=( -0.016, 0.00264)
p 2=( -0.016, -0.00544)
p 3=( -0.012, -0.00544)
p 4=( -0.012, 0.00264)
p 5=( -0.00352, -0.00752)
p 6=( 0.00, 0.00)
p 7=( -0.00272, 0.00472)
p 8=( -0.0120, -0.02536)
p 9=( -0.0120, 0.02264)
p10=( 0.00296, -0.01088)
p11=( 0.01256, -0.01360)
p12=( 0.01496, -0.00840)
p13=( 0.00672, -0.00280)
p14=( 0.0188, -0.01648)
p15=( 0.0212, -0.01128)
p16=( -0.0068, -0.03184)
p17=( -0.02776, -0.0768)
p18=( 0.00776, 0.00448)
p19=( 0.01128, 0.00704)
p20=( 0.01360, 0.00840)
p21=( 0.01136, 0.01240)
p22=( 0.00896, 0.01104)
p23=( 0.00504, 0.00928)
p24=( 0.01648, 0.01816)
p25=( 0.03744, 0.06312)
p26=( -0.196, 0.00264)
p27=( -0.196, -0.00544)
curves
c1 = line2(p2, p3, nelm = 1)
c2 = arc2(p3, p5, -p8, nelm = 7, r = 1, f = 0.5)
c3 = arc2(p5, p10, p24, nelm = 7, r=1, f=2)
c4 = arc2(p10, p11, p25, nelm = 6)
c5 = line2(p11, p14, nelm = 5, r = 1, f = 1)
c6 = line2(p14, p15, nelm = 8, r = 1, f = 1)
c7 = line2(p15, p12, nelm = 5, r = 1, f = 1)
c8 = arc2(p12, p13, p17, nelm = 6)
c9 = arc2(p13, p6, p16, nelm = 7, r=1, f=0.5)
c10 = line2(p6, p18, nelm = 6, r = 1, f = 3)
c11 = line2(p18, p19, nelm = 2, r = 1, f = 1)
c12 = line2(p19, p20, nelm = 1, r = 1, f = 1)
c13 = line2(p20, p21, nelm = 8, r = 1, f = 2)
c14 = line2(p21, p22, nelm = 1, r = 1, f = 1)
c15 = line2(p22, p23, nelm = 2)
c16 = line2(p23, p7, nelm = 6, r = 1, f = 0.33)
```

```

c17 = arc2(p7,p4,-p9,nelm=7, r=1, f=2.0)
c18 = line2(p4, p1, nelm = 1)
c19 = line2(p2, p1, nelm = 8, r = 1, f = 1)
c20 = line2(p3, p4, nelm = 8, r = 1, f = 1)
c21 = line2(p5, p6, nelm = 8, r = 1, f = 0.3)
c22 = line2(p10,p13,nelm = 8, r = 1, f = 0.5)
c23 = line2(p11, p12, nelm = 8, r = 1, f = 1)
c24 = line2(p6,p7,nelm=8, r=1, f=2)
c25 = line2(p18,p23,nelm=8, r=1, f=1.5)
c26 = line2(p19,p22,nelm=8, r=1, f=1)
c27 = line2(p1,p26,nelm=10)
c28 = line2(p26,p27,nelm=8)
c29 = line2(p27,p2,nelm=10)
surfaces
s1 = rectangle4(1, 8, c1, c20,c18, -c19)
s2 = general4(c2, c21,c24,c17,-c20)
s3 = rectangle4(7, 8, c3, c22,c9, -c21)
s4 = rectangle4(6, 8, c4,c23,c8,-c22)
s5 = rectangle4(5, 8, c5, c6,c7, -c23)
s6 = rectangle4(6, 8, c10,c25,c16,-c24)
s7 = rectangle4(2,8,c11,c26,c15,-c25)
s8 = rectangle4(1,8,c12,c13,c14,-c26)
s9 = rectangle4(10,8,c29,c19,c27,c28)
meshsurf
selm1 = s1, s9
end
problem
types
elgrp1, (type = 400)
essbouncond
degfd1, degfd2 = curves0(c1,c5)
degfd1, degfd2 = curves0(c7, c12)
degfd1, degfd2 = curves0(c14,c18)
degfd1, degfd2 = curves0(c27,29)
end
.13
1d-6
1.05d3
.00808
300.
1 (=Newtons materiaal model)
0.

```

Enkele Lindat-invoerfiles:

VCOMAX.IN:

```

1
25 3
-0.012 -0.00544 0.000
-0.012 0.00264 0.000
-0.012 -0.00544 1.000
-0.012 -0.00544 0.000
-0.012 -0.00544 0.000
1.000

```


VCOMDR.IN:

```

1
25 0
-0.01600 -0.00128 0.000
-0.00672 -0.00128 0.000
-0.01600 -0.00128 1.000
-0.01600 -0.00128 0.000
-0.01600 -0.00128 0.000
1.000

```

VEXTSE.IN:

```

2
25 2
0.00000 0.00000 0.0000
-0.00300 0.00460 0.0000
0.00000 0.00000 1.0000
0.00000 0.00000 0.0000
0.00000 0.00000 0.0000
1.00000
25 2
0.00672 0.00384 0.0000
0.00384 0.00864 0.0000
0.00672 0.00384 1.0000
0.00672 0.00384 0.0000
0.00672 0.00384 0.0000
1.000

```

VEXTDR.IN:

```

1
25 0
-0.00672 -0.00128 0.000
0.01184 0.01024 0.000
-0.00672 -0.00128 1.000
-0.00672 -0.00128 0.000
-0.00672 -0.00128 0.000
1.000

```

VINTAX.IN:

```

3
25 3
-0.00352 -0.00768 0.000
0.00000 0.00000 0.000
-0.00352 -0.00768 1.000
-0.00352 -0.00768 0.000
-0.00352 -0.00768 0.000
1.000
25 3
0.00352 -0.01120 0.000
0.00750 -0.00320 0.000
0.00352 -0.01120 1.000
0.00352 -0.01120 0.000
0.00352 -0.01120 0.000
1.000
25 3

```

A.3.35

0.01120 -0.01344 0.000
0.01420 -0.00780 0.000
0.01120 -0.01344 1.000
0.01120 -0.01344 0.000
0.01120 -0.01344 0.000
1.000

VINTDR.IN:

1
25 0
-0.00672 -0.00128 0.000
0.01952 -0.01408 0.000
-0.00672 -0.00128 1.000
-0.00672 -0.00128 0.000
-0.00672 -0.00128 0.000
1.000