

MASTER

Minimale RLC-impedantiesynthese met behulp van de theorie der Hurwitzpolynomen

Werter, M.J.

Award date:
1984

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

4627

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

AFDELING DER ELEKTROTECHNIEK

VAKGROEP Theoretische Elektrotechniek

Minimale RLC-impedantiesynthese met behulp
van de theorie der Hurwitzpolynomen,

door

M.J. Werter

ET-7-84

Verslag van een afstudeeronderzoek,
verricht in de vakgroep ET, onder
leiding van ir. S. Tirtoprodjo, in
de periode mei 1983 - mei 1984.

Eindhoven, 13 april 1984.

De afdeling der elektrotechniek van de Technische Hogeschool Eindhoven aanvaardt
geen verantwoordelijkheid voor de inhoud van stage- en afstudeerverslagen.

Samenvatting

Ir. S. Tirtoprodjo heeft bewezen dat voor iedere Hurwitzpolynoom met zijn nulpunten in het open linkerhalfvlak er altijd een andere polynoom kan worden gevonden zodanig dat hun quotiënt bestaat uit een strikt minimaal te realiseren R-L-C-impedantiefunctie.

Het is allang bekend dat de twee functies

$$Z_1(s) = \frac{H(s)}{E(s)} \quad \text{en} \quad Z_2(s) = \frac{H(s)}{O(s)}, \quad \text{met } E(s) \text{ het even deel}$$

van Hurwitzpolynoom $H(s)$ en $O(s)$ het oneven deel, strikt minimaal te realiseren zijn, daar het quotiënt van het even deel met het oneven deel van $H(s)$, evenals zijn omgekeerde reactantiefuncties zijn, waarmee een enkele weerstand in serie geplaatst wordt. Men kan eenvoudig inzien dat alle polen op de imaginaire as liggen.

Ir. S. Tirtoprodjo vond een derde strikt minimaal te realiseren impedantiefunctie $Z_3(s)$, die geen polen op de imaginaire as heeft. Deze oplossing bestaat bij iedere mogelijke Hurwitzpolynoom.

In dit verslag worden nog vele andere oplossingen getoond, waarbij men geleidelijk het aantal polen van de imaginaire as naar het open linkerhalfvlak brengt. Ook andere oplossingen, waarbij alle polen in het open linkerhalfvlak liggen zijn gegenereerd. Alle oplossingen tot en met de 5^e orde zijn in dit verslag gegeven. De uitbreiding tot analoge strikt minimale R-L-C-impedantiefuncties van willekeurige orde zal worden aangetoond.

De praktische toepassingen van deze resultaten liggen op het terrein van de computer aided design van dubbel resistief afgesloten reactantiefilters. Enkele uitgewerkte voorbeelden staan in dit verslag.

Summary

Ir. S. Tirtoprodjo has proved that to any given Hurwitzpolynomial with all its zeros located in the open lefthalfplane another polynomial can allways be found , such that their ratio constitutes a strictly minimal R-L-C-realizable impedance function.

It was known for a long time that the two

rational functions $Z_1(s) = \frac{H(s)}{Ev(s)}$ and $Z_2(s) = \frac{H(s)}{Od(s)}$,

with $Ev(s)$ the even part of Hurwitzpolynomial $H(s)$ and $Od(s)$ the odd part , are strictly minimal realizable , since the quotient of $Ev(s)$ with $Od(s)$ and its inverse are known to constitute reactance functions , with the remainder representing one single resistor.

Here we see by inspection that all the poles lie on the imaginary axis.

Ir. S. Tirtoprodjo found a third , equally strict minimum realizable impedancefunction $Z_3(s)$, having none of its poles located on the imaginary axis.

This solution is valid in combination to any Hurwitzpolynomial.

In this report other solutions than the one given before will be derived , for which a gradual transistion of the poles , from the imaginary axis into the open left halfplane are feasible. Other solutions with all their poles in the open left halfplane are generated.

All solutions up to the 5th order are presented in this report. The extension to equally strict minimal R-L-C-impedancefunctions of any order will be shown.

Practical applications of the obtained results lie in the field of computer aided design for doubly resistor terminated reactance filters. Various worked out examples will be given in this report.

Inhoudsopgave

Titelpagina	blz	1
Samenvatting	blz	2
Summary	blz	3
Inhoudsopgave	blz	4
Hoofdstuk 1 Inleiding	blz	6
Hoofdstuk 2 De probleemstelling		
2.1 Een verklaring van de titel	blz	8
2.2 De Hurwitzvoorwaarden	blz	13
Hoofdstuk 3 De eerste oplossingen		
3.1 De primitieve klasse	blz	16
3.2 De centrum klasse	blz	18
Hoofdstuk 4 Impedantiefuncties tot en met de 5 ^e orde		
4.1 Het klasseringsstelsel	blz	23
4.2 1 ^e orde impedantiefuncties	blz	27
4.3 2 ^e orde impedantiefuncties	blz	28
4.4 3 ^e orde impedantiefuncties	blz	28
4.5 4 ^e orde impedantiefuncties	blz	29
4.6 5 ^e orde impedantiefuncties	blz	30
4.7 Het aantal oplossingen bij orde n	blz	31
Hoofdstuk 5 Enkele nieuwe klassen		
5.1 Klassen zoals de primitieve klasse	blz	35
5.2 Klassen zoals de centrum klasse	blz	39
5.3 De laatste klasse	blz	42

Hoofdstuk 1 Inleiding

Voor de realisering van de algemene n^e orde impedantiefunctie is een schakeling nodig die minimaal $2n+1$ elementen bevat. Er zijn echter schakelingen die met minder elementen al een n^e orde impedantiefunctie kunnen opleveren. Het minimum aantal benodigde elementen is n reactieve elementen en één weerstand. Deze elementen worden gebruikt om de coëfficiënten van de teller van de impedantiefunctie vrij te kunnen kiezen. Deze coëfficiënten moeten echter wel aan de Hurwitz - voorwaarden voldoen. Gevraagd worden alle impedantie - functies die aan deze eisen voldoen.

In hoofdstuk 2 wordt dit probleem exacter geformuleerd. Daarbij wordt ook dieper op de eisen ten aanzien van de Hurwitzvoorwaarden ingegaan.

In hoofdstuk 3 volgen de eerste twee groepen van oplossingen. De eerste groep, de primitieve klasse, is een oplossing die al zeer lang bekend is. De tweede groep, de centrum klasse, is een nieuwe oplossing die door mijn begeleider, Ir. S. Tirtoprodjo, gevonden is.

In hoofdstuk 4 zijn alle oplossingen voor impedantiefuncties tot en met de 5^e graad gegeven. Hier blijkt dat er veel meer oplossingen zijn dan de tot nu bekende. Deze oplossingen worden in klassen ingedeeld.

In hoofdstuk 5 worden naast de formules voor de primitieve en centrum klasse ook die voor impedantie - functies van bepaalde klasse, maar van willekeurige orde, gegeven.

In hoofdstuk 6 volgt een algemene procedure om alle oplossingen van een bepaalde orde te genereren. Hiermee is het probleem uit hoofdstuk 2 opgelost. Er wordt ook een voorbeeld van een oplossing gegeven die niet tot deze categorie behoort.

In hoofdstuk 7 is naar toepassingen van de oplossingen bij filterproblemen gekeken. De schakeling werd op een bron met inwendige weerstand aangesloten. Hierbij werd de vermogensoverdrachtsfunctie bepaald. Bij deze filterontwerpmethode kan de vermogens - overdrachtsfunctie voor bepaalde frequenties worden vastgelegd en zijn er geen eisen ten aanzien van de polen en nulpunten van de impedantiefunctie gesteld.

Een catalogus van de eisen die aan de vermogens - overdrachtsfunctie voor filters tot en met de 4^e orde gesteld kunnen worden, zijn in hoofdstuk 8 gegeven. Ook wordt hier een voorbeeld van een oplossing die niet tot het klasseringsstelsel behoort behandeld.

Hoofdstuk 9 bevat mijn conclusies.

Hoofdstuk 2 De probleemstelling

2.1 Een verklaring van de titel

Bij een schakeling die uit weerstanden, spoelen en condensatoren is opgebouwd hoort een impedantiefunctie $Z(s)$. Deze impedantiefunctie heeft de vorm van een quotiënt van twee polynomen.

$$(2.1) \quad Z(s) = \frac{T(s)}{N(s)}$$

De impedantiefunctie $Z(s)$ bepaalt het volledig gedrag van deze schakeling.

De orde van de impedantiefunctie is gelijk aan de hoogst voorkomende macht in de teller - of noemerpolynoom.

De algemene impedantiefunctie van de 4^e orde wordt door formule (2.2) weergegeven.

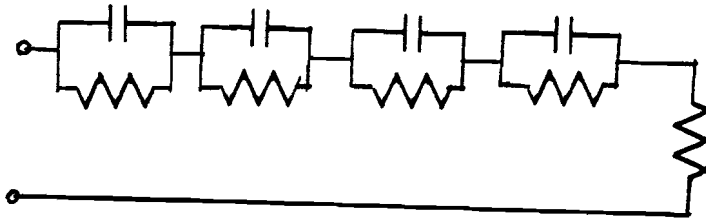
$$(2.2) \quad Z(s) = k \cdot \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4}$$

Een van de termen s^4 mag hierbij vervallen, maar niet beide termen mogen ontbreken.

In formule (2.2) zijn 9 vrijheidsgraden, namelijk de konstante k voor het quotiënt, de coëfficiënten a_1 t/m a_4 in de tellerpolynoom en de coëfficiënten b_1 t/m b_4 van de noemerpolynoom.

Voor de realisering van deze algemene 4^e orde impedantiefunctie is dan ook een schakeling nodig die minimaal 9 elementen bevat.

Een 4^e orde R-C-impedantiefunctie heeft bijvoorbeeld vier condensatoren en vijf weerstanden voor zijn realisatie.



figuur 2.1
4^e orde R-C- impedantie

Er zijn echter bijzondere impedantiefuncties van de 4^e orde die met minder dan 9 elementen gerealiseerd kunnen worden. Het minimum aantal benodigde elementen om toch nog een 4^e orde impedantiefunctie te kunnen krijgen is 5, namelijk 4 reactieve elementen en precies één weerstand.

Met minder elementen kan men nooit een 4^e orde impedantiefunctie krijgen, indien we het minder interessante geval van slechts 4 reactieve elementen buiten beschouwing laten. Deze functie heeft al zijn polen en nulpunten op de imaginaire as liggen.

Bij een schakeling die uit slechts 5 elementen is opgebouwd moeten de vrijheidsgraden van formule (2.2) onderling afhankelijk zijn.

De 5 elementen in de schakeling gaan we gebruiken om de konstante k voor het quotiënt en de parameters a_1 t/m a_4 van de tellerpolynoom onafhankelijk van elkaar te kunnen kiezen. De parameters b_1 t/m b_4 worden dan bepaald door de 5 vrijheidsgraden.

We onderzoeken hoe de coëfficiënten b_1 t/m b_4 van k en a_1 t/m a_4 afhangen. Met andere woorden we zoeken naar de functies f_1 t/m f_4 van formule (2.3).

$$\begin{aligned} (2.3) \quad b_1 &= f_1(k, a_1, a_2, a_3, a_4) \\ b_2 &= f_2(k, a_1, a_2, a_3, a_4) \\ b_3 &= f_3(k, a_1, a_2, a_3, a_4) \\ b_4 &= f_4(k, a_1, a_2, a_3, a_4) \end{aligned}$$

In formule (2.3) is verondersteld dat de coëfficiënten van de tellerpolynoom onafhankelijk van elkaar gekozen kunnen worden. Dit is echter niet mogelijk. De schakeling is opgebouwd uit slechts passieve elementen, zodat de nulpunten van de impedantiefunctie geen positief reëel deel mogen hebben. Aan deze nodige maar niet voldoende eis wordt dan en slechts dan voldaan als de tellerpolynoom een Hurwitzpolynoom is: de coëfficiënten van de teller voldoen aan de Hurwitzvoorwaarden. (zie o.a. Uspensky)

Een uitgebreide weergave van de Hurwitzvoorwaarden wordt in paragraaf 2.2 gegeven.

Hebben we de konstante k en de parameters a_1 t/m a_4 zo gekozen dat aan de Hurwitzvoorwaarden is voldaan, en hebben we vervolgens de parameters b_1 t/m b_4 bepaald, dan moeten we daarna controleren of ook de noemerpolynoom aan de Hurwitzvoorwaarden voldoet en ook of $\operatorname{Re}(Z(s)) > 0$ voor $\operatorname{Re}(s) > 0$ is. (zie o.a. Verkroost)

Wanneer aan al deze eisen is voldaan, is de impedantiefunctie $Z(s)$ te realiseren met 4 reactieve elementen en één passieve weerstand.

Wat tot hier toe voor de 4^e orde impedantiefunctie is bewezen, geldt ook voor willekeurige orde n. De algemene n^e orde impedantiefunctie wordt door formule (2.4) weergegeven.

$$(2.4) \quad z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}$$

Deze impedantiefunctie bevat 2n+1 vrijheidsgraden en kan alleen door een schakeling die minimaal 2n+1 elementen bevat worden gerealiseerd. Er zijn echter bijzondere impedantiefuncties van graad n die met minder elementen gerealiseerd kunnen worden. Het minimum aantal benodigde elementen is n reactieve elementen en precies één weerstand. In dit geval zijn de parameters van formule (2.4) onderling afhankelijk. We wensen de konstante k voor het quotiënt en de coëfficiënten a₁ t/m a_n van de tellerpolynoom onafhankelijk van elkaar te kunnen kiezen. We onderzoeken nu hoe de coëfficiënten b₁ t/m b_n hiervan afhangen. We gaan dus op zoek naar de functies f₁ t/m f_n van formule (2.5).

$$(2.5) \quad \begin{aligned} b_1 &= f_1(k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) \\ b_2 &= f_2(k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) \\ b_3 &= f_3(k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) \\ &\dots \\ &\dots \\ b_n &= f_n(k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

De schakeling mag slechts passieve elementen bevatten zodat de tellerpolynoom een Hurwitzpolynoom moet zijn. Achteraf moet gecontroleerd worden of de functie inderdaad met slechts passieve elementen kan worden opgebouwd.

Samengevat kan het probleem als volgt worden gesteld:

We gaan uitgaande van een Hurwitzpolynoom $T(s)$ zoeken naar een bijbehorende polynoom $N(s)$ zodanig dat de impedantiefunctie $Z(s)$ die het quotiënt is van beide polynomen strikt minimaal te realiseren is.

Hierbij moeten de volgende twee restricties in acht genomen worden.

Restrictie 1 :

De schakeling moet het minimum aantal elementen bevatten, zijnde n reactieve elementen en één passieve weerstand. Andere elementen zoals ideale transformatoren, gekoppelde spoelen, actieve elementen e.d. worden niet toegelaten. De algemene 4^e orde impedantiefunctie is bijvoorbeeld alleen dan met 9 elementen te realiseren als men dit soort elementen wel toelaat. Wil men deze functie met slechts reactieve elementen en passieve weerstanden realiseren dan heeft men veel meer elementen nodig. (zie Weinberg)

De gevonden oplossingen zijn kanonisch omdat het aantal elementen in de schakeling gelijk is aan het aantal vrijheidsgraden van de Hurwitzpolynoom.

Restrictie 2 :

De oplossingen die in dit verslag gegeven worden bestaan allen uit gegeneraliseerde laddernetwerken. Er worden bijvoorbeeld geen kruisschakelingen of overbrugde elementen toegelaten. Dat men met deze schakelingen ook aan de oplossing van het probleem kan bijdragen zal aan de hand van een voorbeeld in paragraaf 6.3 worden aangetoond.

Het uitwerken van het probleem voor bijvoorbeeld overbrugde elementen is mogelijk onderwerp voor nader onderzoek. Ik ben daar in mijn afstudeerperiode niet aan toegekomen.

De probleemstelling is in deze paragraaf vastgelegd. Hiermee kunnen we nu ook de titel van mijn afstudeerverslag verklaren.

We gaan ons in dit verslag bezighouden met impedantiesynthese, waarbij met behulp van de theorie der Hurwitzpolynomen gezocht wordt naar de minimale R-L-C-schakelingen, die de gegeven Hurwitzpolynoom in de teller van hun impedantiefunctie hebben staan.

2.2 De Hurwitzvoorwaarden

We beschouwen functie $f(x)$ uit formule (2.6)

$$(2.6) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Alle nulpunten van deze functie hebben een negatief reëel deel dan en slechts dan als de functie $f(x)$ een Hurwitzpolynoom is: de coëfficiënten moeten aan de Hurwitzvoorwaarden voldoen. Deze voorwaarden staan in formule (2.7) en kan men o.a. in Uspensky, Wylie en Elias vinden.

De coëfficiënten a_i met een index i groter dan n zijn hierbij gelijk aan 0.

$$(2.7) \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n > 0,$$

$$|a_1| > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \dots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Het bewijs van (2.7) wordt voor $n = 3$ door Wylie gegeven en voor algemene orde n door Uspensky. Deze voorwaarden zijn nodige en voldoende voor de ligging van de nulpunten van $f(x)$ in het linkerhalfvlak. De eisen van (2.7) zijn echter niet onafhankelijk van elkaar. Indien we functie $f(x)$ normeren door $a_0 = 1$ te stellen dan zijn de ongelijkheden uit (2.8) voldoende voor de ligging van de nulpunten in het linkerhalfvlak.

$$(2.8) \quad n = 1 : a_1 > 0$$

$$n = 2 : a_1 > 0, a_2 > 0$$

$$n = 3 : a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0$$

$$n = 4 : a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

$$n = 5 : a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0, a_1 a_4 - a_5 > 0,$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 + 2 a_1 a_4 a_5 - a_5^2 > 0$$

De overige eisen zijn hier uit af te leiden.
(zie Elias)

In de volgende hoofdstukken zullen deze eisen aan de tellerpolynoom $T(s)$ worden opgelegd. Ook de noemer van de impedantiefunctie moet aan deze eisen voldoen, hetgeen achteraf na invulling van de teller gecontroleerd moet worden. Het Hurwitz zijn van deze beide polynomen is echter géén voldoende voorwaarde voor de mogelijke passieve realisering van de impedantiefunctie. Daarvoor zijn nog andere eisen nodig. (zie Verkroost)

Hoofdstuk 3 De eerste oplossingen

3.1 De primitieve klasse

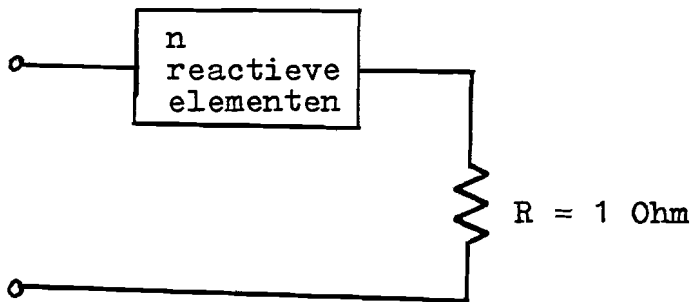
We gaan , uitgaande van een polynoom $T(s)$ die aan de Hurwitzvoorwaarden voldoet , op zoek naar een bijbehorend polynoom $N(s)$, zodanig dat de impedantie-functie $Z(s)$, die het quotiënt van $T(s)$ en $N(s)$ is , minimaal gerealiseerd kan worden.

Een van de oplossingen van dit probleem ligt vrij voor de hand. We noemen deze oplossing de primitieve klasse. Ze is o.a. te vinden bij Storer. We stellen de noemerpolyoom $N(s)$ gelijk aan het oneven gedeelte van $T(s)$. De impedantiefunctie $Z(s)$ is in formule (3.1) uitgewerkt.

$$(3.1) \quad Z(s) = \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{O(s) + E(s)}{O(s)} = 1 + \frac{E(s)}{O(s)} = 1 + Q(s)$$

De functie $Q(s)$ is het quotiënt van het even deel en het oneven deel van een Hurwitzpolynoom en dus een reactantiefunctie. Deze is te realiseren met een aantal reactieve elementen gelijk aan de orde n van de Hurwitzpolynoom. (zie Verkroost)

De totale impedantie wordt opgebouwd uit een weerstand R van 1 ohm in serie met deze n reactieve elementen. De schakeling is in figuur 3.1 getekend. Het bevat inderdaad het minimum aantal elementen en de weerstand is passief.



figuur 3.1
de primitieve klasse

Een tweede oplossing van het probleem krijgen we door de noemerpolyoom $N(s)$ gelijk aan het even deel $E(s)$ van de Hurwitzpolyoom uit de teller te kiezen. In dat geval wordt de impedantiefunctie :

$$(3.2) \quad Z(s) = \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{O(s) + E(s)}{E(s)} = 1 + \frac{O(s)}{E(s)} = 1 + Q'(s)$$

De bijbehorende schakeling bevat ook slechts passieve elementen en heeft eenzelfde configuratie als figuur 3.1

We hebben nu in totaal twee oplossingen van het probleem gevonden. Het nadeel van deze oplossingen is dat hun polen op de imaginaire as liggen. Immers, zij s_0 een nulpunt van $N(s)$ dan geldt :

$$(3.3) \quad N(-s_0) = \pm N(s_0) = 0 \quad \begin{array}{l} + \text{ teken als } N(s) = E(s) \\ - \text{ teken als } N(s) = O(s) \end{array}$$

$-s_0$ is evenals s_0 een nulpunt van $N(s)$. Maar de nulpunten mogen niet in het rechter halfvlak liggen, zodat alleen de punten met $\text{Re}(s_0)$ voldoen. In de volgende paragrafen gaan we op zoek naar oplossingen waarbij er ook polen in het open linker halfvlak liggen.

3.2 De centrum klasse

Mijn begeleider Ir. S. Tirtoprodjo heeft een tweede groep van oplossingen gevonden. Deze is in literatuur-opgave 1) gepubliceerd.

De oplossing zal hier voor de 4^e orde worden afgeleid. We gaan uit van een 4^e Hurwitzpolynoom T(s).

$$(3.4) \quad T(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$
$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

De bijbehorende polynoom N(s) kiezen we één graad lager.

$$(3.5) \quad N(s) = s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3$$

Van impedantiefunctie Z(s) splitsen we de pool in s = oneindig af :

$$(3.6) \quad Z(s) = \frac{T(s)}{N(s)} = s + Z_1(s) =$$
$$= s + \frac{(a_1 - b_1)s^3 + (a_2 - b_2)s^2 + (a_3 - b_3)s + a_4}{s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}$$

We beschouwen de reciproke Y₁(s) van de term Z₁(s). Deze moet weer tot de primitieve klasse behoren. Daartoe moet deze aan vergelijking (3.7) voldoen. De oplossing is in (3.8) gegeven.

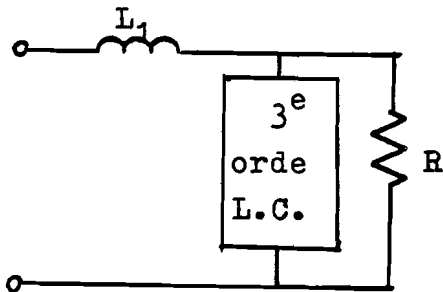
$$(3.7) \quad Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = k \cdot \frac{s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{b_1 s^2 + b_3}$$

$$(3.8) \quad b_1 = a_1$$
$$b_2 = a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}$$
$$b_3 = a_3$$

De functie $N(s)$ wordt dus beschreven met (3.9)

$$(3.9) \quad N(s) = s^3 + a_1 s^2 + \left(a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}\right) s + a_3$$

De totale schakeling is schematisch in figuur 3.2 getekend. De bijbehorende impedantiefunctie staat in formule (3.10)



figuur 3.2

4^e orde centrum klasse

$$(3.10) \quad Z(s) = k \cdot \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{s^3 + a_1 s^2 + \left(a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}\right) s + a_3}$$

In bovenstaande afleiding is er impliciet gebruik gemaakt van het feit dat ook de noemerpolynoom $N(s)$ een Hurwitzpolynoom is. Alleen dan behoort $Y_1(s)$ ook werkelijk tot de primitieve klasse. Het bewijs dat de noemerpolynoom inderdaad aan de Hurwitz-voorwaarden voldoet zal daarom nu achteraf als nog gegeven worden.

Voor dit bewijs gaan we uit van het gegeven dat polynoom $T(s)$ aan de Hurwitzvoorwaarden voldoet.

We vormen functie $Q(s)$ uit formule (3.11), waarvan we weten dat het een reactantiefunctie is.

$$(3.11) \quad Q(s) = \frac{s^4 + a_2 s^2 + a_4}{a_1 s^3 + a_3 s}$$

Van deze reactantiefunctie splitsen we de pool in de oorsprong af :

$$(3.12) \quad Q(s) = \frac{a_4}{a_3 s} + Q_1(s) = \frac{a_4}{a_3 s} + \frac{s^3 + (a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3})s}{a_1 s^2 + a_3}$$

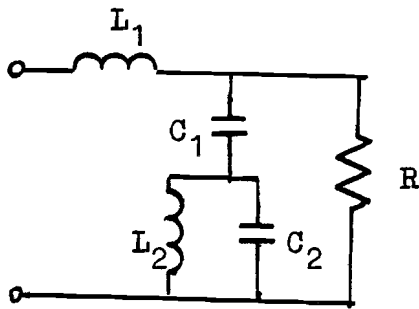
Functie $Q_1(s)$ is dan weer een reactantiefunctie. En de som van de teller - en noemerpolynoom is weer een Hurwitzfunctie.

Hiermee is bewezen dat de polynoom $N(s)$ uit formule (3.9) een Hurwitzpolynoom is.

$$(3.9) \quad N(s) = s^3 + a_1 s^2 + (a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3})s + a_3$$

Ik heb de elementwaarden in dit geval ook uitgewerkt. De schakeling die behoort bij de impedantiefunctie uit formule (3.10) staat in figuur 3.3. De bijbehorende elementwaarden zijn in (3.13) vermeld.

$$(3.10) \quad Z(s) = k \cdot \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{s^3 + a_1 s^2 + (a_2 - a_1 a_4 / a_3) s + a_3}$$



figuur 3.3
4^e orde centrum klasse

$$(3.13) \quad \begin{aligned} L_1 &= k \\ L_2 &= k \cdot \frac{a_1^2 a_4}{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4} \\ R &= k \cdot \frac{a_4}{a_3} \\ C_1 &= \frac{a_3}{k \cdot a_1 a_4} \\ C_2 &= \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4}{k \cdot a_1 a_3 a_4} \end{aligned}$$

Uit de Hurwitzvoorwaarden voor de 4^e orde volgt dat alle elementen inderdaad een positieve waarde hebben.

Voor algemene orde n is eenzelfde afleiding te geven. Men gaat uit van een Hurwitzpolynoom $T(s)$. De bijbehorende polynoom $N(s)$ kiest men een graad lager dan die van de Hurwitzpolynoom.

Van de impedantiefunctie $Z(s)$ splitsen we de pool in $s = \infty$ af. De reciproke functie $Y_1(s)$ van de restterm $Z_1(s)$ moet dan tot de primitieve klasse behoren.

De bijbehorende schakeling heeft een structuur, zoals in figuur 3.2 is weergegeven. Hierbij moet men de 3^e orde L-C-netwerk door een $(n-1)^e$ orde vervangen.

De impedantiefuncties van de centrum klasse zijn :

(3.14) n is even

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + (a_2 - \frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}) s^{n-3} + a_3 s^{n-4} + (a_4 - \frac{a_3 a_n}{a_{n-1}}) s^{n-5} + \dots + (a_{n-2} - \frac{a_{n-3} a_n}{a_{n-1}}) s + a_{n-1}}$$

(3.15) n is oneven

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + (a_1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}) s^{n-2} + a_2 s^{n-3} + (a_3 - \frac{a_2 a_n}{a_{n-1}}) s^{n-4} + a_4 s^{n-5} + \dots + (a_{n-2} - \frac{a_{n-3} a_n}{a_{n-1}}) s + a_{n-1}}$$

Er bestaat nog een andere oplossing. Hierbij kiezen we de polynoom $N(s)$ van gelijke orde als de Hurwitzpolynoom, maar stellen coëfficiënt b_n gelijk aan nul. Voor een 4^e orde Hurwitzpolynoom wordt $N(s)$:

$$(3.16) \quad N(s) = s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s$$

Van de impedantiefunctie $Z(s)$ wordt de pool in de oorsprong afgesplitst.

$$(3.17) \quad Z(s) = \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{a_4}{b_3 s} + Z_1(s) \\ = \frac{a_4}{b_3 s} + \frac{s^3 + (a_1 - \frac{a_4}{b_3})s^2 + (a_2 - \frac{b_1 a_4}{b_3})s + (a_3 - \frac{b_2 a_4}{b_3})}{s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}$$

De reciproke $Y_1(s)$ van restterm $Z_1(s)$ moet weer tot de primitieve klasse behoren.

Dit is het geval indien aan (3.18) wordt voldaan. Uitwerken hiervan levert vergelijking (3.19)

$$(3.18) \quad Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = k \cdot \frac{s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + b_2 s}$$

$$(3.19) \quad b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1^2} \\ b_2 = \frac{a_3}{a_1} \\ b_3 = \frac{a_4}{a_1}$$

Ook dit kan voor algemene orde n worden uitgebreid. Het resultaat staat in (3.20) en (3.21)

(3.20) n is even

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^n + (\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1^2}) s^{n-1} + \frac{a_3}{a_1} s^{n-2} + (\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1^2}) s^{n-3} + \frac{a_5}{a_1} s^{n-4} + \dots \\ \dots + (\frac{a_1 a_{n-2} - a_{n-1}}{a_1^2}) s^3 + \frac{a_{n-1}}{a_1} s^2 + \frac{a_n}{a_1}}$$

(3.21) n is oneven

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^n + (\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1^2}) s^{n-1} + \frac{a_3}{a_1} s^{n-2} + (\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1^2}) s^{n-3} + \frac{a_5}{a_1} s^{n-4} + \dots \\ \dots + \frac{a_{n-2}}{a_1} s^3 + (\frac{a_1 a_{n-1} - a_n}{a_1^2}) s^2 + \frac{a_n}{a_1} s}$$

Totaal hebben we nu vier oplossingen voor iedere orde. De vraag is of dit alle oplossingen zijn. In het volgende hoofdstuk zal dit voor impedantie - functies tot en met de 5^e orde nader onderzocht worden.

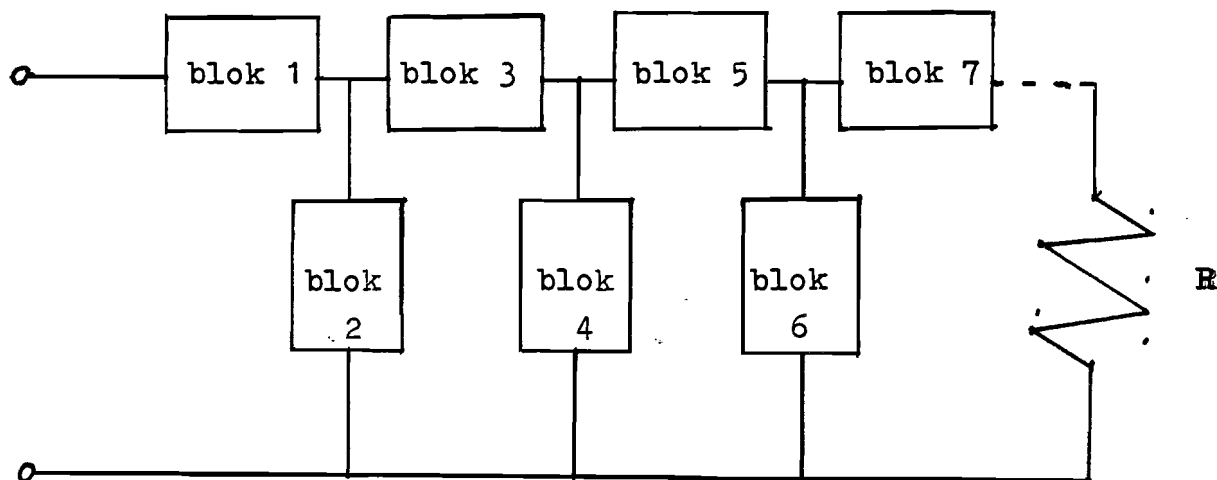
Hoofdstuk 4 Impedantiefuncties tot en met de 5^e orde

4.1 Het klasseringsstelsel

In dit hoofdstuk gaan we alle oplossingen van het probleem, zoals gesteld in hoofdstuk 2, genereren voor impedantiefuncties tot en met de 5^e orde.

Ik ga deze oplossingen in klassen indelen opdat ik ze eenvoudig kan benoemen, en opdat ik later algemene formules voor bepaalde klassen voor willekeurige orde, kan geven.

Bij dit klasseringsstelsel maak ik gebruik van het feit dat slechts gegeneraliseerde laddernetwerken worden gebruikt. De schakelingen hebben altijd een vorm als in figuur 4.1. Hierbij bevat ieder blok een of meer L-C-elementen, die op willekeurige wijze binnen één blok doorverbonden kunnen zijn.



figuur 4.1

De gegeneraliseerde ladderschakeling

Het totaal aantal gebruikte L-C-elementen is gelijk aan de orde n van de impedantiefunctie.

De klassering gaat als volgt :

Bij klasse 0 zijn alle n L-C-elementen in blok 1 geplaatst. De andere blokken bevatten geen elementen. Bij klasse 1 wordt één element in blok 2 geplaatst. Bij klasse 2 komt er een tweede element hierbij. Bij klasse 3 houden we het aantal elementen in blok 1 op $n-2$ en is er één element in blok 2 en één in blok 3.

Bij klasse 4 gaat er weer een element uit het eerste blok en houden we er hier $n-3$ over.

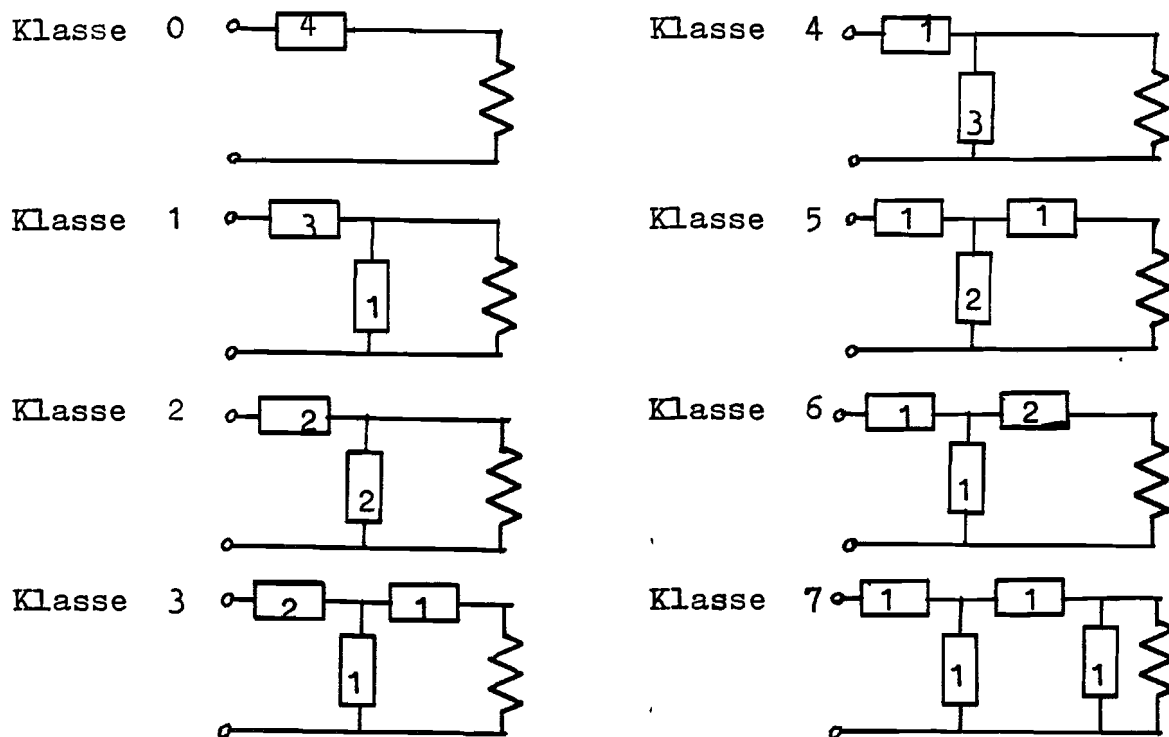
De overige elementen zijn in blok 2.

Bij de volgende klassen voeren we deze drie elementen geleidelijk naar de volgende blokken toe. Dit proces blijven we zo doorzetten totdat we uiteindelijk in ieder blok slechts één element over hebben. De schakeling die we dan gekregen hebben is een echt laddernetwerk.

De formele definitie van het klassenstelsel is :

Indien een schakeling A tot klasse i behoort en een schakeling B tot klasse j dan is $i < j$ dan en slechts dan als A in het blok met het laagste rangnummer, waarin A een ander aantal elementen dan B bezit, A hier meer elementen heeft dan B.

Als voorbeeld worden hier alle klassen bij de 4^e orde getoond. Het cijfer in ieder blok geeft aan hoeveel reactieve elementen er in deze tak van de gegeneraliseerde laddernetwerk zitten.



figuur 4.2

De klassen bij orde 4

Enkele opmerkingen bij dit klasseringsstelsel.

opmerking 1

Het aantal klassen bij orde n is gelijk aan 2^{n-1} .

Bij de 4^e orde zijn er bijvoorbeeld 8 klassen.

Dit is te bewijzen met behulp van volledige inductie.

Voor $n=1$ is er slechts één klasse, namelijk klasse 0.

Stel dat de formule waar is voor gegeven orde n .

De klassen van orde $n+1$ krijg je door :

- A) Verhoog het aantal elementen van het eerste blok met 1 voor iedere klasse, en houdt het aantal elementen in de overige blokken gelijk. Op deze wijze krijg je vanuit orde 3 de eerste kolom van oplossingen uit figuur 4.2.

B) Voer iedere impedantie van elke klasse van orde n als admittantie uit en plaats hier een blok met één element voor.

Op deze wijze krijg je vanuit orde 3 de tweede kolom uit figuur 4.2 van orde 4.

Het totaal aantal klassen bij orde $n+1$ is dan twee keer zo groot als bij orde n , zodat het bewijs geleverd is.

Opmerking 2

De primitieve klasse heeft rangnummer 0.

Bij de primitieve klasse zijn alle L-C-elementen in het eerste blok geplaatst, zoals in hoofdstuk 3 is beschreven. Vandaar dat dit klasse 0 is in dit klasseringsstelsel.

Opmerking 3

De centrum klasse heeft rangnummer 2^{n-2} .

In het voorbeeld van orde 4 heeft de centrum klasse rangnummer 4.

Het bewijs hiervan gaat als volgt :

De centrum klasse is de eerste klasse die tot groep B) van opmerking 1 behoort. Immers na afsplitsing van het eerste blok houdt men een admittantie over die tot klasse 0 behoort.

De helft van het aantal klassen behoort tot groep A) van opmerking 1 en deze klassen komen voor de klassen uit groep B). Daarom heeft de centrum klasse inderdaad rangnummer 2^{n-2} .

Hiermee komen we ook tot de naamgeving van de centrum klasse. Het is eenvoudig in te zien dat er evenveel klassen tussen de primitieve en de centrum klasse zijn als er na de centrum klasse komen: de klasse ligt in het midden van dit klasseringsstelsel.

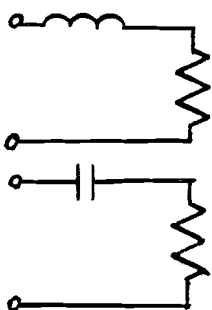
4.2 1^e orde impedantiefuncties

We gaan nu van impedantiefuncties tot en met de 5^e orde de oplossingen van het probleem bepalen. Daartoe heb ik voor een bepaalde orde n bij alle mogelijke gegeneraliseerde laddernetwerken nagegaan, of het mogelijk was om de teller van de bijbehorende impedantiefunctie vrij te kunnen kiezen, binnen de beperkingen die de Hurwitzvoorwaarden opleggen.

De gebruikte schakelingen bevatten n reactieve elementen en één weerstand.

Ik heb vervolgens de noemer van de impedantiefunctie bepaald en heb gecheckd of de elementen positieve waarden onder de gegeven Hurwitzcondities hadden.

Voor n = 1 heb ik slechts twee mogelijkheden gevonden, namelijk één weerstand met één spoel, of één weerstand met één condensator. De schakelingen zijn in figuur 4.3 gegeven en de bijbehorende impedantiefuncties in (4.1) en (4.2).



$$(4.1) \quad Z(s) = R \cdot \frac{s+a_1}{a_1}$$

$$(4.2) \quad Z(s) = R \cdot \frac{s+a_1}{s}$$

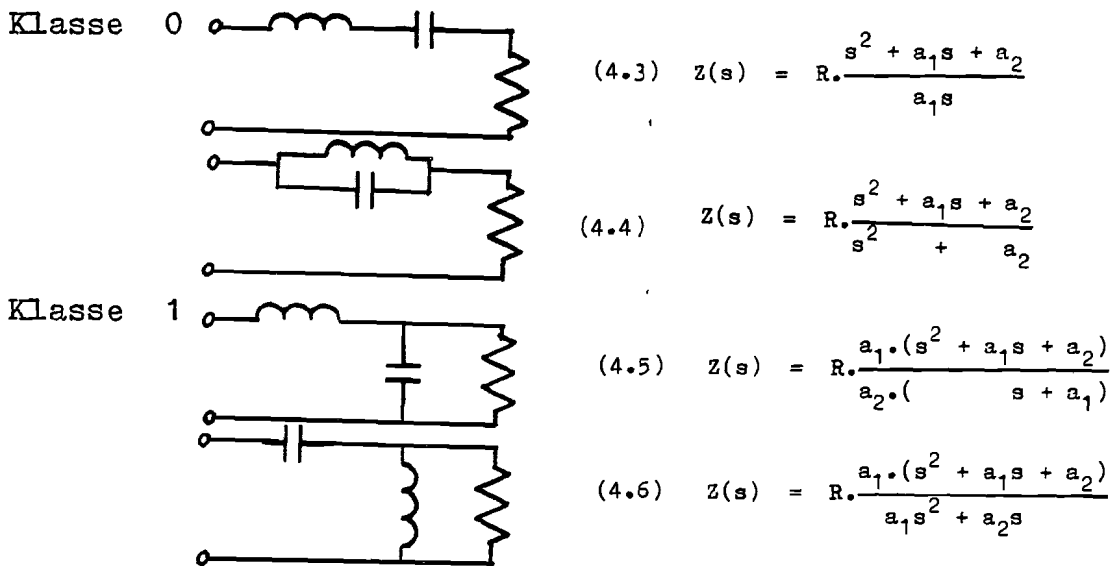
figuur 4.3

Oplossingen van de 1^e orde

Beide oplossingen behoren tot klasse 0 en alle elementwaarden zijn positief, hetgeen eenvoudig te controleren is.

4.3 2^e orde impedantiefuncties

Voor $n = 2$ zijn er totaal vier oplossingen, die ook al in hoofdstuk 3 beschreven waren. De schakelingen staan in figuur 4.4 en de bijbehorende impedantiefuncties zijn de formules (4.3) tot en met (4.6).



figuur 4.4

Oplossingen van de 2^e orde.

Ook hier hebben alle elementen een positieve waarde.

4.4 3^e orde impedantiefuncties

Voor $n = 3$ blijken er naast de 4 oplossingen uit hoofdstuk 3 nog 4 andere oplossingen te zijn. De resultaten hiervan zijn in bijlage I vermeld. De oplossingen zijn weer in klassen ingedeeld en alle elementwaarden zijn onder de gegeven Hurwitzvoorwaarden positief.

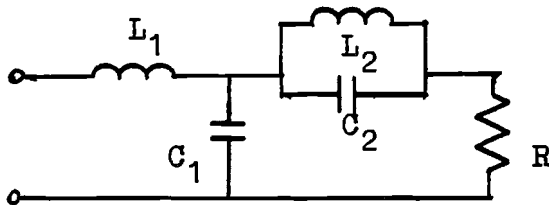
4.5 4^e orde impedantiefuncties

Voor $n = 4$ heb ik maar liefst 20 oplossingen gevonden. Deze oplossingen zijn in bijlage I gegeven.

Bij deze oplossingen doet zich soms iets bijzonders voor. Soms heb je bij één gegeven schakeling en bij één gegeven Hurwitzpolynoom in de teller van de impedantiefunctie twee mogelijke realiseringen. Ter toelichting kies ik als voorbeeld de eerste schakeling van klasse 6. Als Hurwitzpolynoom is de functie in formule (4.7) gekozen.

$$(4.7) \quad T(s) = s^4 + s^3 + 2\frac{1}{2}s^2 + s + 1$$

De schakeling is in figuur 4.5 weergegeven.



figuur 4.5

Schakeling 1 van klasse 6 bij orde 4

Bij deze schakeling zijn de volgende twee dimensioneringen mogelijk, die beide dezelfde Hurwitzpolynoom in de teller van de impedantiefunctie hebben staan:

$$(4.8) \quad z(s) = R \cdot \frac{s^4 + s^3 + 2\frac{1}{2}s^2 + s + 1}{3s^3 + 3s^2 + 1\frac{1}{2}s + 1} \quad (4.9) \quad \begin{aligned} L_1 &= R/3 \\ L_2 &= 2R/3 \\ C_1 &= 3/2R \\ C_2 &= 3/R \end{aligned}$$

$$(4.10) \quad z(s) = R \cdot \frac{s^4 + s^3 + 2\frac{1}{2}s^2 + s + 1}{1\frac{1}{2}s^3 + 1\frac{1}{2}s^2 + 3s + 1} \quad (4.11) \quad \begin{aligned} L_1 &= 2R/3 \\ L_2 &= R/3 \\ C_1 &= 3/R \\ C_2 &= 3/2R \end{aligned}$$

Bij deze schakelingen legt de Hurwitzpolynoom in de teller van de impedantiefunctie de noemerpolynoom dus niet meer eenduidig vast, ondanks identieke configuratie.

Een verklaring voor dit verschijnsel wordt in paragraaf 6.1 gegeven. Bij hogere orde impedantie - functies blijken er in sommige gevallen zelfs meer dan twee oplossingen mogelijk te zijn, bij dezelfde configuratie, en dezelfde waarden van de vrijheids - graden in de teller van de impedantiefunctie.

4.6 5^e orde impedantiefuncties

Voor $n = 5$ zijn er al 48 oplossingen. Ook deze oplossingen staan in bijlage I. Bij de 5^e orde impedantiefuncties deed zich ook het verschijnsel voor dat bij sommige schakelingen bij één gegeven Hurwitzpolynoom twee oplossingen mogelijk waren. Het aantal oplossingen van het probleem zoals dat in hoofdstuk 2 geformuleerd werd stijgt al snel met de orde van de impedantiefunctie.

In het volgende hoofdstuk zal geprobeerd worden om deze oplossingen te catalogiseren. Daarbij proberen we net zoals bij de primitieve en centrum klasse algemene formules te vinden voor de impedantiefunctie voor willekeurige orde n .

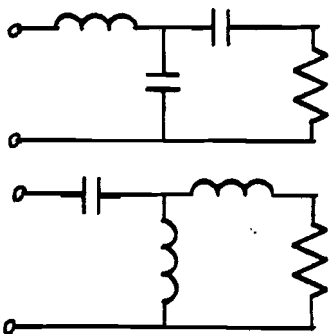
Eerst zal in de volgende paragraaf geprobeerd worden een formule te vinden voor het aantal oplossingen bij een gegeven orde n .

4.7 Het aantal oplossingen bij orde n

In de vorige paragrafen zijn alle oplossingen voor impedantiefuncties tot en met de 5^e graad gegeven. Deze impedantiefuncties staan met de bijbehorende schakelingen overzichtelijk in bijlage I weergegeven.

Bij iedere impedantiefunctie is één bijbehorende schakeling getekend. Er zijn echter nog andere schakelingen die eenzelfde impedantiefunctie kunnen geven. Deze schakelingen hebben een andere configuratie en leveren met een andere dimensionering dezelfde impedantiefunctie op. Deze schakelingen zijn niet in bijlage I opgenomen, omdat ze geen nieuwe liggingen van de polen geven.

Bij de 3^e orde impedantiefuncties zijn er nog twee oplossingen die tot klasse 3 behoren. De schakelingen staan in figuur 4.6 en de bijbehorende impedantiefuncties in de formules (4.12) en (4.13).



$$(4.12) \quad Z(s) = R \cdot \frac{(a_1 a_2 - a_3) \cdot (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}{a_2^2 \cdot (s^2 + a_1 s)}$$

$$(4.13) \quad Z(s) = R \cdot \frac{(a_1 a_2 - a_3) \cdot (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}{a_1^2 \cdot (a_2 s^2 + a_3 s)}$$

figuur 4.6

Twee nieuwe oplossingen bij orde 3

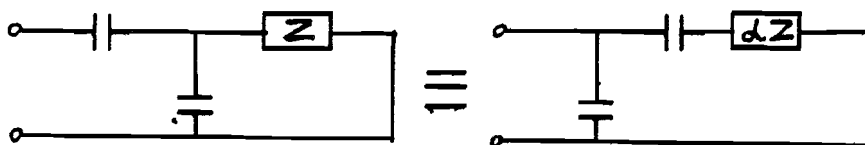
De impedantiefuncties die we hier gekregen hebben zijn precies hetzelfde als de oplossingen uit klasse 1 bij deze orde, indien we formule (4.14) toepassen.

Men krijgt dus geen nieuwe oplossing, maar deze configuratie geeft de mogelijkheid van een andere dimensionering van de elementen.

$$(4.14) \quad R' = \frac{a_1^2 a_2^2}{(a_1 a_2 - a_3)^2} \cdot R$$

Opvallend is wel dat de oplossingen tot verschillende klassen behoren. Als de impedantiefunctie is voorgeschreven ligt daarmee de klasse waarin deze oplossing moet liggen blijkbaar nog niet vast. Beide schakelingen geven eenzelfde impedantie - functie.

Men kan bewijzen dat de transformatie van figuur 4.7 algemeen geldig is. Hetzelfde geldt indien men de condensatoren door spoelen vervangt. De twee equivalente schakelingen behoren echter wel tot verschillende klassen.



figuur 4.7

Twee equivalente schakelingen

Het totaal aantal oplossingen komt hiermee voor $n = 3$ op tien. Voor $n = 1$ en $n = 2$ bleef het aantal gelijk. Voor $n = 4$ wordt het 24, voor $n = 5$: 70 en voor $n = 6$ heb ik via een andere methode, die later behandeld wordt, kunnen bepalen dat er 192 oplossingen zijn.

Zij $A(n)$ het aantal oplossingen bij orde n dan krijgen we de volgende aantallen:

$$\begin{aligned}(4.15) \quad A(1) &= 2 \\ A(2) &= 4 \\ A(3) &= 10 \\ A(4) &= 24 \\ A(5) &= 70 \\ A(6) &= 192\end{aligned}$$

Ik heb geprobeerd een regelmaat in deze getallen te kunnen vinden en vond betrekking (4.16)

$$(4.16) \quad A(n) = (n+2) \cdot A(n-2)$$

Het is mij niet gelukt om deze formule algemeen te bewijzen, maar ik vermoedt dat deze formule algemeen geldig blijft voor willekeurige orde n . In dat geval wordt $A(n)$ door formule (4.17) beschreven.

$$\begin{aligned}(4.17) \quad A(n) &= \frac{(n+2)!!}{2} \quad \text{voor } n \text{ even} \\ &= \frac{(n+2)!!}{3/2} \quad \text{voor } n \text{ oneven}\end{aligned}$$

$x!!$ is de zogenaamde dubbel faculteit functie. Deze functie wordt door (4.18) gedefinieerd.

$$\begin{aligned}(4.18) \quad x!! &= x \cdot (x-2)!! \\ 0!! &= 1!! = 1\end{aligned}$$

Laten we de schakelingen die eenzelfde impedantie - functie, maar met een andere configuratie, buiten beschouwing dan krijgen we een aantal schakelingen $B(n)$. Uit bijlage I is bekend dat :

$$\begin{aligned}(4.19) \quad B(1) &= 2 \\ B(2) &= 4 \\ B(3) &= 8 \\ B(4) &= 20 \\ B(5) &= 48\end{aligned}$$

We vermoeden dat we $B(n)$ door formule (4.20) kunnen weergeven.

$$(4.20) \quad B(n) = \frac{(n+1)!!}{3/4} \text{ voor } n \text{ even} \\ = (n+1)!! \text{ voor } n \text{ oneven}$$

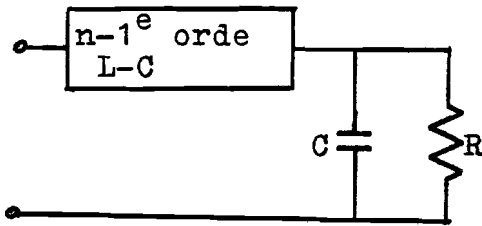
Ook hiervan heb ik geen bewijs kunnen leveren. Mochten de formules voor $A(n)$ en $B(n)$ juist zijn dan neemt het aantal oplossingen zeer snel toe.

Bij $n = 20$ geldt bijvoorbeeld :

$$(4.21) \quad A(20) = 1.85794 \cdot 10^9$$

In het volgende hoofdstuk zal geprobeerd worden deze oplossingen te categoriseren.

Voor klasse 0, de primitieve klasse, zijn in hoofdstuk 3 de algemene formules al gegeven. De eerstvolgende klasse is klasse 1. De schakelingen die hier bijhoren zijn in de figuren 5.1 en 5.2 weergegeven. Bij de impedantiefuncties moeten we onderscheid maken tussen oneven en even orden. De formules voor deze klasse staan in de vergelijkingen (5.1) tot en met (5.4).



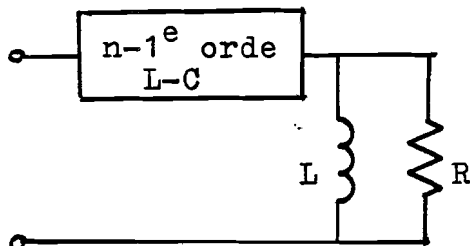
figuur 5.1

(5.1) n is even

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \left(\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^{n-3} + a_1 \left(\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^{n-4} + \left(\frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^{n-5} + \dots + a_1 \left(\frac{a_1 a_{n-2} - a_{n-1}}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^2 + \frac{a_1 a_n}{a_1 a_2 - a_3} s + \frac{a_1^2 a_n}{a_1 a_2 - a_3}}$$

(5.2) n is oneven

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \left(\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^{n-3} + a_1 \left(\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^{n-4} + \left(\frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^{n-5} + \dots + \left(\frac{a_1 a_{n-1} - a_n}{a_1 a_2 - a_3}\right) s^2 + a_1 \left(\frac{a_1 a_{n-1} - a_n}{a_1 a_2 - a_3}\right) s}$$



figuur 5.2

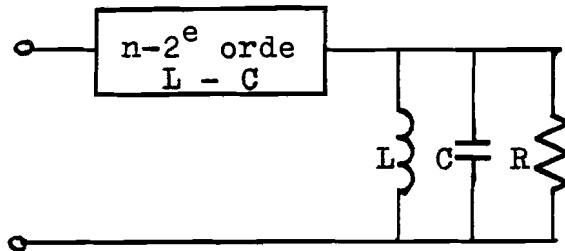
(5.3) n is even

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^n + \frac{a_n}{a_{n-1}} s^{n-1} + \left(\frac{a_2 a_{n-1} - a_1 a_n}{a_{n-1}}\right) s^{n-2} + a_1 \left(\frac{a_2 a_{n-1} - a_1 a_n}{a_{n-1}}\right) s^{n-3} + \left(\frac{a_4 a_{n-1} - a_3 a_n}{a_{n-1}}\right) s^{n-4} + \dots + a_n \cdot \left(\frac{a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n}{a_{n-1}}\right) s}$$

(5.4) n is oneven

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}} s^{n-2} + \left(\frac{a_3 a_{n-1} - a_2 a_n}{a_1 a_{n-1} - a_n}\right) s^{n-3} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \left(\frac{a_3 a_{n-1} - a_2 a_n}{a_1 a_{n-1} - a_n}\right) s^{n-4} + \left(\frac{a_5 a_{n-1} - a_4 a_n}{a_1 a_{n-1} - a_n}\right) s^{n-5} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \left(\frac{a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n}{a_1 a_{n-1} - a_n}\right) s}$$

Dit zijn alle mogelijke oplossingen van klasse 1. Bij klasse 2 zijn de oplossingen vaak niet eenduidig: bij één schakeling en één Hurwitz - polynoom zijn meerdere oplossingen mogelijk. Alleen voor n = even is er een groep oplossingen die wel eenduidig vastligt. De schakeling staat in figuur 5.3 en de impedantiefunctie in formule (5.5).



figuur 5.3

(5.5) n is even

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{(s^2 + a_1 s + \frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}) \cdot (p_0 s^{n-3} + p_1 s^{n-5} + \dots + p_{\frac{n}{2}-2} s)}$$

$$p_0 = a_1 a_2 a_{n-1} - a_1^2 a_n - a_3 a_{n-1}$$

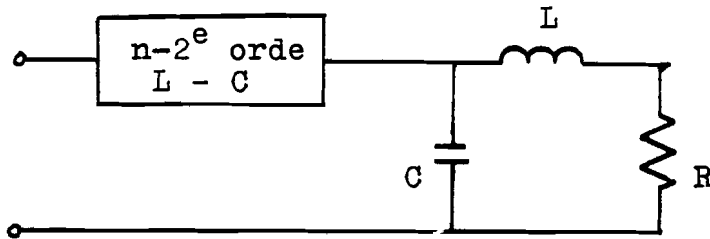
$$p_1 = a_1 a_4 a_{n-1} - a_1 a_3 a_n - a_5 a_{n-1}$$

$$p_2 = a_1 a_6 a_{n-1} - a_1 a_5 a_n - a_7 a_{n-1}$$

• • • • •

$$p_{\frac{n}{2}-2} = a_1 a_{n-2} a_{n-1} - a_1 a_{n-3} a_n - a_{n-1}^2$$

Bij klasse 3 zijn er weer twee oplossingen mogelijk. Ook hiervoor heb ik de algemene formules voor de impedantiefuncties bepaald. De schakelingen staan in figuur 5.4 en 5.5. De formule voor de eerste schakeling staat in formule (5.6). De tweede schakeling heeft een analoge impedantiefunctie.



figuur 5.4

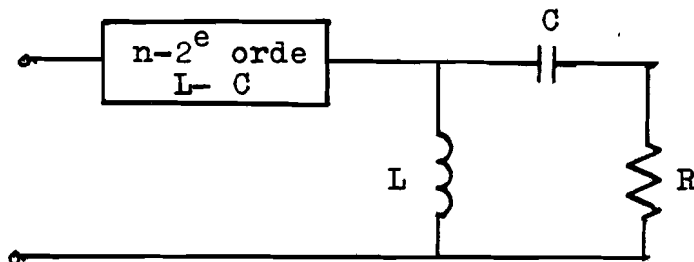
$$(5.6) \quad Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{(s^2 + a_1 s + \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}) \cdot (p_0 s^{n-3} + p_1 s^{n-5} + p_2 s^{n-7} + \dots)}$$

$$p_0 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5$$

$$p_1 = a_1 a_2 a_5 - a_3 a_5 - a_1^2 a_6 + a_1 a_7$$

$$p_2 = a_1 a_2 a_7 - a_3 a_7 - a_1^2 a_8 + a_1 a_9$$

• • • • •



figuur 5.5

Men kan dit proces zo voortzetten door bij iedere klasse te kijken naar de eenduidige oplossingen en deze dan in een algemene formule voor willekeurige orde n te beschrijven. Ik heb dat hier niet verder uitgewerkt maar ben gaan zoeken naar andere klassen van oplossingen, waarvan het rangnummer, evenals dat van de centrum klasse een functie van de orde n is.

5.2 Klassen zoals de centrum klasse

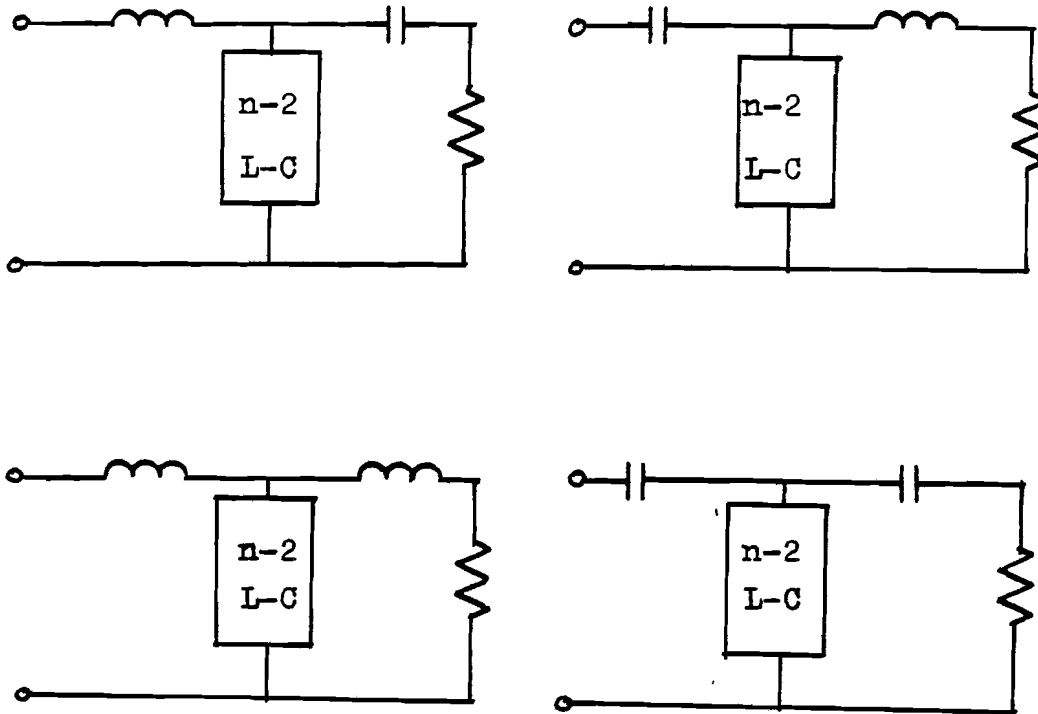
In hoofdstuk 3 is een algemene formule voor de centrum klasse afgeleid. Bij de centrum klasse ligt het rangnummer niet vast, maar hangt van de orde n af. In hoofdstuk 4 hebben we gevonden dat de centrum klasse het rangnummer 2^{n-2} bij orde n heeft.

In deze paragraaf proberen we ook voor andere klassen, waarbij het rangnummer een functie van n is, een algemene formule af te leiden.

Als eerste voorbeeld wordt de klasse met een rangnummer dat één hoger is dan de centrum klasse bekeken. Deze klasse heeft vier oplossingen als n oneven is en slechts twee voor n even.

De schakelingen zijn in figuur 5.6 getekend. De twee laatste schakelingen zijn geen oplossingen als de orde van de impedantiefunctie even is. Dan kan men de teller van deze impedantiefunctie niet vrij kiezen. Dit is wel het geval als n oneven is.

De formules behorende bij de eerste schakeling zijn in (5.7) en (5.8) gegeven. Bij de andere schakelingen horen analoge formules.



figuur 5.6

(5.7) n is even

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + (a_1 - p_1) s^{n-2} + (a_2 - p_2) s^{n-3} + \dots + (a_{n-2} - p_{n-2}) s}$$

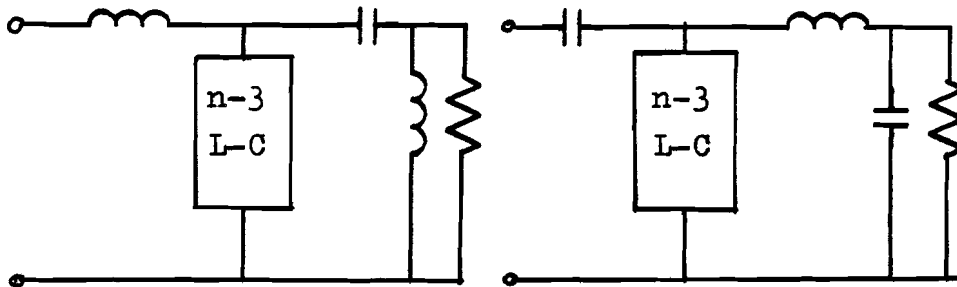
$$\begin{aligned} p_1 &= a_{n-1}^2 / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_2 &= a_{n-1} a_n / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_3 &= a_{n-1} (a_2 a_{n-1} - a_1 a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_4 &= a_n \cdot (a_2 a_{n-1} - a_1 a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_5 &= a_{n-1} (a_4 a_{n-1} - a_3 a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ &\dots \\ p_{n-2} &= a_n \cdot (a_{n-4} a_{n-1} - a_{n-5} a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \end{aligned}$$

(5.8) n is oneven

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + (a_1 - p_1) s^{n-2} + (a_2 - p_2) s^{n-3} + \dots + (a_{n-1} - p_{n-1}) s}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= a_{n-1} (a_1 a_{n-1} - a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_3 &= a_n \cdot (a_1 a_{n-1} - a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_4 &= a_{n-1} (a_3 a_{n-1} - a_2 a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_5 &= a_n \cdot (a_3 a_{n-1} - a_2 a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ &\dots \\ p_{n-3} &= a_{n-1} (a_{n-4} a_{n-1} - a_{n-5} a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \\ p_{n-2} &= a_n \cdot (a_{n-4} a_{n-1} - a_{n-5} a_n) / (a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_n) \end{aligned}$$

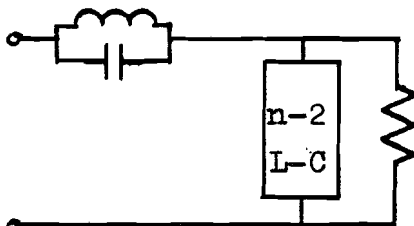
Voor de klasse die drie hoger ligt dan de centrum klasse heb ik ook een algemene formule kunnen afleiden. De bijbehorende schakelingen staan in figuur 5.7. De impedantiefuncties die hier bijhoren zijn zeer complex. Daarom zal ik ze hier niet afdrukken.



figuur 5.7

Een andere klasse waarvoor de algemene formules zijn afgeleid is de kwartair klasse. Deze klasse heeft een rangnummer midden tussen de primitieve en centrumklasse : het rangnummer is 2^{n-3} .

Voor even orden n blijkt de oplossing eenduidig te zijn. De schakeling is in figuur 5.8 gegeven en de bijbehorende impedantiefunctie is in (5.9) te vinden.



figuur 5.8

(5.9) n is even

$$Z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{(s^2 + \frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}) \cdot (p_0 s^{n-2} + p_1 s^{n-3} + p_2 s^{n-4} + \dots + p_{n-2})}$$

$$p_0 = a_1^2 a_{n-1}$$

$$p_1 = a_1 a_2 a_{n-1} - a_1^2 a_n - a_3 a_{n-1}$$

$$p_2 = a_1 a_3 a_{n-1}$$

$$p_3 = a_1 a_4 a_{n-1} - a_1 a_3 a_n - a_5 a_{n-1}$$

$$p_{n-2} = a_1 a_{n-1}^2$$

5.3 De laatste klasse

Een andere klasse waarvoor de algemene formule gevonden is is de laatste klasse. Deze klasse heeft rangnummer $2^{n-1}-1$, zoals in hoofdstuk 4 is afgeleid. De bijbehorende schakeling is een echt laddernetwerk. De gegeneraliseerde ladder-schakeling heeft in iedere tak precies één element.

De afleiding van deze formule is veel gecompliceerder dan de afleidingen van de formules uit de vorige paragrafen. Het geschiedt ook op een volledig andere wijze, vandaar dat hier een aparte paragraaf aan gewijd wordt.

Bij de afleiding van de algemene formule voor de laatste klasse maak ik gebruik van Fujisawa's First Theorem. Dit theorema wordt in Fialkow vermeld. (zie literatuurlijst)

Voordat ik het theorema kan vermelden moeten er eerst enkele afspraken gemaakt worden.

De functie $Z(s)$ beschrijven we met formule (5.10).

$$(5.10) \quad Z(s) = \frac{A(s) + B(s)}{C(s) + D(s)} \quad \begin{array}{l} A(s) \text{ en } C(s) \text{ zijn even} \\ B(s) \text{ en } D(s) \text{ zijn oneven} \end{array}$$

De polynomen $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ en $D(s)$ beschrijven we met formule (5.11).

$$(5.11) \quad \begin{aligned} A(s) &= k_a \sqrt{L} s^2 + a_j^2 \\ B(s) &= k_b \sqrt{L} s^2 + b_j^2 \\ C(s) &= k_c \sqrt{L} s^2 + c_j^2 \\ D(s) &= k_d \sqrt{L} s^2 + d_j^2 \end{aligned}$$

We definiëren de transferpolynoom $T_R(s)$ van impedantie $Z(s)$ als :

$$(5.12) \quad T_R(s) = (A(s)C(s) - B(s)D(s))^{1/2}$$

Het theorema van Fujisawa zegt :

$Z(s)$ is een reactantieladderfunctie afgesloten met een positieve weerstand R dan en slechts dan als $Z(0) = R$ en $Z(s)$ is een complete unipolaire functie met transnulpunten $s_j = j \cdot w_j$ die voldoen aan $0 < b_j \leq w_j$.

De transnulpunten zijn hierbij de nulpunten van de transferpolynoom $T_R(s)$.

In ons geval zijn de nulpunten b_j van de teller - polynoom volledig vrij te kiezen. Aan het theorema kan dan alleen worden voldaan als alle w_j oneindig groot zijn. De functie $T_R(s)$ mag geen nulpunten hebben en moet dus constant zijn.

Als voorbeeld ga ik dit toepassen op de 4^e orde impedantiefunctie. Ik kies de noemerpolynoom $N(s)$ één graad lager dan de tellerpolynoom $T(s)$, zodat impedantiefunctie $Z(s)$ door formule (5.13) beschreven wordt.

$$(5.13) \quad Z(s) = \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}$$

Bij dit voorbeeld zijn :

$$(5.14) \quad \begin{aligned} A(s) &= s^4 + a_2 s^2 + a_4 \\ B(s) &= a_1 s^3 + a_3 s \\ C(s) &= b_1 s^2 + b_3 \\ D(s) &= s^3 + b_2 s \end{aligned}$$

$$(5.15) \quad \begin{aligned} T_R^2(s) &= A(s)C(s) - B(s)D(s) \\ &= (b_1 - a_1)s^6 + (b_3 + a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_3)s^4 + (a_2 b_3 + a_4 b_1 - a_3 b_2)s^2 + a_4 b_3 \end{aligned}$$

De transferpolynoom $T_R(s)$ moet constant zijn.

Hieraan is voldaan als :

$$(5.16) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ -b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De oplossing hiervan is :

$$(5.17) \quad \begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= \frac{a_1 a_2^2 - a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_1 a_2 - a_3} \\ b_3 &= \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4}{a_1 a_2 - a_3} \end{aligned}$$

En hiermee hebben we de gevraagde impedantie - functie gevonden. Wat hier voor $n = 4$ is afgeleid kan ook voor de impedantiefunctie in (5.18) worden uitgevoerd. Men komt dan uiteindelijk op het stelsel lineaire vergelijkingen welke bij (5.19) staan.

$$(5.18) \quad z(s) = \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + b_2 s^{n-3} + \dots + b_{n-2} s + b_{n-1}}$$

$$(5.19) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & a_{2n-7} & \dots & a_{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ -b_2 \\ b_3 \\ -b_4 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_7 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

De coëfficiënten a_i met een index i die groter dan n is zijn hierbij gelijk aan nul.

Door het oplossen van stelsel (5.19) krijgen we de coëfficiënten van de noemer van de impedantie - functie. De oplossing van dit stelsel is eenduidig omdat de determinant van de matrix juist gelijk is aan de Hurwitzdeterminant van orde $n-1$, waarvan bekend is dat deze positief is.

Hiermee is de impedantiefunctie van de laatste klasse eenduidig vastgelegd. Een tweede oplossing vindt men door de noemerpolynoom van dezelfde graad als de teller te kiezen, maar met de laatste coëfficiënt gelijk aan 0.

Hoofdstuk 6 De algemene procedure

6.1 De gegeneraliseerde ladderschakeling

In het vorige hoofdstuk bleek , dat er voor vele klassen formules voor de impedantiefunctie bij willekeurige orde n te vinden zijn.

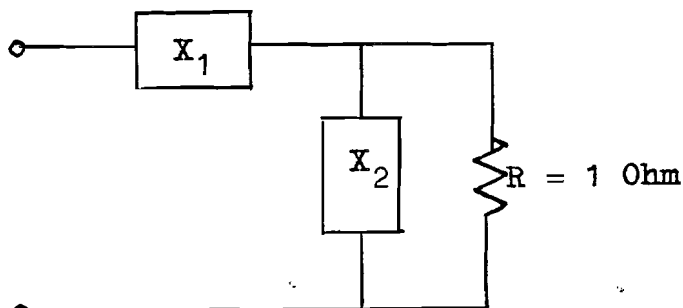
De vraag rijst of het mogelijk is om een procedure te vinden waarmee alle oplossingen gegeneerd kunnen worden. Het antwoord op deze vraag is bevestigend.

De procedure werkt als volgt :

Ga na uit hoeveel blokken de gegeneraliseerde ladderschakeling is opgebouwd.

Is dit één blok dan is alleen de primitieve klasse een oplossing.

Bij twee blokken ziet de schakeling er uit als in figuur 6.1. De weerstand R is op 1 ohm genormeerd.



figuur 6.1

Gegeneraliseerde laddernetwerk bestaande uit twee blokken.

De totale impedantie $Z(s)$ staat in formule (6.1).

$$\begin{aligned} (6.1) \quad Z(s) &= X_1(s) + (X_2(s) // R) \\ &= \frac{X_1(s) \cdot X_2(s) + R \cdot (X_1(s) + X_2(s))}{X_2(s) + R} \end{aligned}$$

In de teller van de impedantiefunctie moet de n^e orde Hurwitzpolynoom $H(s)$ komen te staan. Deze Hurwitzpolynoom splitsen we in zijn even deel $E(s)$ en zijn oneven deel $O(s)$.

$$(6.2) \quad H(s) = E(s) + O(s)$$

We vormen de reactantiefunctie $Q_2(s)$ met formule (6.3). De index 2 slaat op het aantal blokken waaruit de gegeneraliseerde ladder is opgebouwd.

$$(6.3) \quad Q_2(s) = \frac{E(s)}{O(s)}$$

We beschouwen $Q_2(s)$ als de parallelschakeling van $X_1(s)$ met $X_2(s)$ en krijgen :

$$(6.4) \quad Q_2(s) = X_1(s) // X_2(s) = \frac{X_1(s) \cdot X_2(s)}{X_1(s) + X_2(s)}$$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} E(s) &= k(s) \cdot X_1(s) \cdot X_2(s) \\ O(s) &= k(s) \cdot (X_1(s) + X_2(s)) \end{aligned}$$

Zodoende wordt impedantiefunctie $Z(s)$ uit formule (6.1):

$$(6.6) \quad Z(s) = \frac{X_1 X_2 + X_1 + X_2}{X_2 + 1} = \frac{E(s) + O(s)}{k(s) \cdot (X_2(s) + 1)}$$

In de teller van $Z(s)$ staat inderdaad de oorspronkelijke Hurwitzpolynoom. Door $Q_2(s)$ of zijn omgekeerde op alle mogelijke manieren in twee reactantiefuncties te splitsen krijgt men alle mogelijke oplossingen, die de vorm hebben van een gegeneraliseerde ladder-netwerk bestaande uit twee blokken.

Als voorbeeld zal hier een van de impedantiefuncties van klasse 1 bij orde 4 worden afgeleid. De bijbehorende schakeling bestaat uit een gegeneraliseerde ladderschakeling met twee blokken.

De 4^e orde Hurwitzpolynoom $H(s)$ is :

$$(6.7) \quad H(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$

We vormen reactantiefunctie $Q_2(s)$ in formule (6.8).

$$(6.8) \quad Q_2(s) = \frac{a_1 s^3 + a_3 s}{s^4 + a_2 s^2 + a_4}$$

De reciproke van deze functie splitsen we in een som met twee termen door de polen in twee groepen te verdelen. De twee verkregen functies zijn dan nog steeds reactantiefuncties. (zie Verkroost) In dit voorbeeld splitsen we de pool in de oorsprong van de andere polen af.

$$(6.9) \quad \frac{1}{Q_2(s)} = \frac{a_4}{a_3 s} + \frac{s^3 + (a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3})s}{a_1 s^2 + a_3}$$

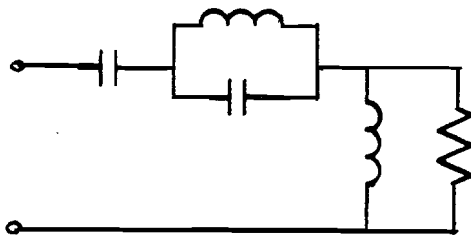
Stel nu :

$$(6.10) \quad X_1(s) = \frac{a_1 s^2 + a_3}{s^3 + (a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3})s}, \quad X_2(s) = \frac{a_3 s}{a_4}$$

Dit vullen we in formule (6.1) in. We krijgen dan de gevraagde impedantiefunctie.

De bijbehorende schakeling staat in figuur 6.2.

$$(6.11) \quad Z(s) = a_3^2 \cdot \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_3^2 s^4 + a_3 a_4 s^3 + a_3 (a_2 a_3 - a_1 a_4) s^2 + a_4 (a_2 a_3 - a_1 a_4) s}$$



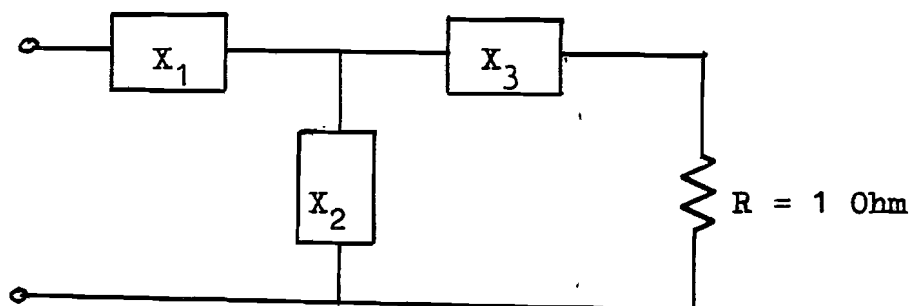
figuur 6.2

Schakeling behorende tot klasse 1 van orde 4

Bovenstaande procedure kan men makkelijk tot drie blokken uitbreiden. De reactantiefunctie $Q_3(s)$ wordt op de bekende manier gevormd en daarna gesplitst volgens :

$$(6.12) \quad Q_3(s) = \frac{E(s)}{O(s)} = X_3(s) + Q_2(s) \\ = X_3(s) + (X_2(s)/X_1(s))$$

De schakeling die gevormd wordt staat in figuur 6.3.



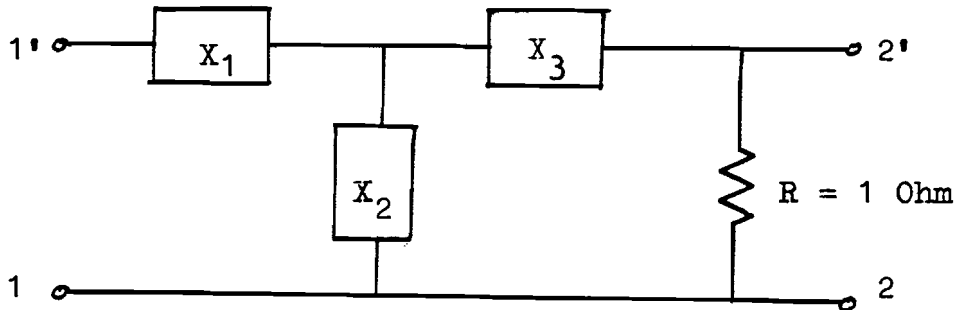
figuur 6.3

Gegeneraliseerde laddernetwerk bestaande uit drie blokken

De impedantiefunctie $Z(s)$ bevat onder bovenstaande procedure de oorspronkelijke Hurwitzpolynoom in de teller. Door $Q_3(s)$ op alle mogelijke manieren te splitsen en dit vervolgens ook voor $Q_2(s)$ te doen krijgt men alle mogelijke oplossingen voor een gegeneraliseerde ladder bestaande uit drie blokken. Het bewijs dat de Hurwitzfunctie inderdaad in de teller van de impedantiefunctie staat is het eenvoudigst met behulp van de tweepoorttheorie te geven.

Het tweede paar klemmen wordt over de weerstand aangesloten, zoals in figuur 6.4 te zien is.

De gevraagde impedantie is de Z_{11} van deze tweepoort.



figuur 6.4

De Y_{22} van deze tweepoort is de admittantie bij kortsluiting van ingang 1.

Deze admittantie is gelijk aan :

$$(6.13) \quad Y_{22}(s) = \frac{1}{Q_3(s)} + \frac{1}{R} = \frac{O(s)}{E(s)} + 1 = \frac{H(s)}{E(s)}$$

De Hurwitzpolynoom staat in de teller van de kortsluitadmittantie $Y_{22}(s)$.

Volgens de tweepoorttheorie is de impedantie $Z_{11}(s)$:

$$(6.14) \quad Z_{11}(s) = \frac{Y_{22}(s)}{\det(Y(s))} = \frac{H(s)}{E(s) \cdot \det(Y(s))}$$

Hieruit blijkt dat de oorspronkelijke Hurwitzfunctie inderdaad weer in de teller van de impedantie - functie staat.

Als voorbeeld zal nu een van de impedantiefuncties van de schakelingen van klasse 3 bij orde 4 worden afgeleid.

De Hurwitzpolynoom $H(s)$ wordt beschreven door formule (6.15) en we vormen de reactantiefunctie $Q_3(s)$ met formule (6.16).

$$(6.15) \quad H(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$

$$(6.16) \quad Q_3(s) = \frac{s^4 + a_2 s^2 + a_4}{a_1 s^3 + a_3 s}$$

Deze splitsen we als volgt :

$$(6.17) \quad Q_3(s) = \frac{s}{a_1} + \frac{(a_2 - \frac{a_3}{a_1})s^2 + a_4}{a_1 s^3 + a_3 s}$$

Door de reciproke van restterm $Q_2(s)$ ook te splitsen krijgen we uiteindelijk de drie reactantiefuncties die in formule (6.18) gegeven staan.

$$(6.18) \quad X_3(s) = \frac{s}{a_1}$$

$$X_2(s) = \frac{(a_1 a_2 - a_3)s}{a_1^2}$$

$$X_1(s) = \frac{(a_1 a_2 - a_3)s^2 + a_1 a_4}{a_1 \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)s} \cdot (a_1 a_2 - a_3)$$

We vullen dit in de formule voor $Z(s)$ in en krijgen formule (6.19).

$$(6.19) \quad Z(s) = \frac{(a_1 a_2 - a_3)^2}{(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)} \cdot \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{a_1 s^3 + a_1^2 s^2 + (a_1 a_2 - a_3)s}$$

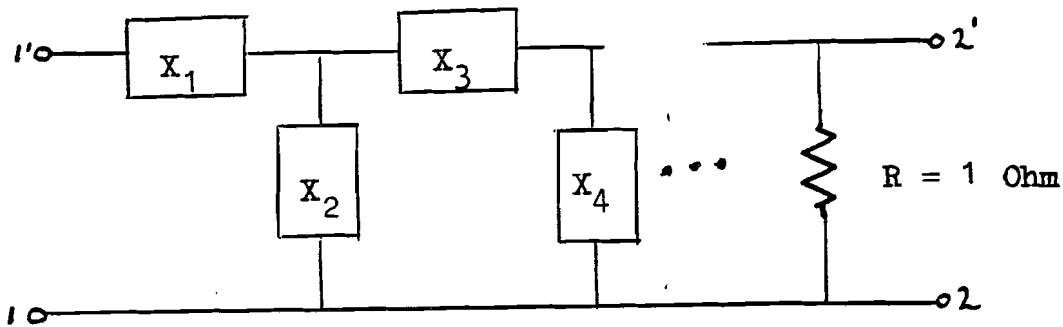
De oorspronkelijke Hurwitzpolynoom staat inderdaad in de teller van impedantiefunctie $Z(s)$.

We kunnen dit nu ook uitbreiden naar een gegeneraliseerde ladderschakeling bestaande uit M blokken.

Daartoe kiezen we $Q_M(s)$ gelijk aan het quotiënt van het even deel met het oneven deel van de Hurwitzpolynoom of omgekeerd. We gaan de polen van $Q_M(s)$ op de volgende manier afsplitsen :

$$(6.20) \quad \begin{aligned} Q_j(s) &= X_j(s) + Q_{j-1}(s) && \text{voor } j \text{ oneven} \\ &= X_j(s) // Q_{j-1}(s) && \text{voor } j \text{ even} \\ Q_1(s) &= X_1(s) \end{aligned}$$

De schakeling is in figuur 6.5 gegeven. De bijbehorende impedantiefunctie bevat de oorspronkelijke Hurwitzpolynoom in de teller. Het bewijs hiervan volgt uit de tweepoorttheorie en loopt geheel analoog aan het geval met $M = 3$. De kortsluitadmittantie $Y_{22}(s)$ volgt uit formule (6.21) en de gevraagde impedantie $Z(s)$ is gelijk aan de openklemimpedantie $Z_{11}(s)$ van de tweepoort in figuur 6.5.



figuur 6.5

Een generaliseerde laddernetwerk

$$(6.21) \quad Y_{22}(s) = \frac{1}{Q_M(s)} + \frac{1}{R} = \frac{H(s)}{E(s)} \quad \text{of} \quad \frac{H(s)}{O(s)}$$

$$(6.22) \quad Z_{11}(s) = \frac{Y_{22}(s)}{\det(Y(s))} = \frac{H(s)}{E(s) \cdot \det Y(s)} \quad \text{of} \quad \frac{H(s)}{O(s) \cdot \det(Y(s))}$$

Impedantiefunctie $Z_{11}(s)$ bevat inderdaad de Hurwitz - polynoom in de teller.

In figuur 6.5 is het van essentieel belang dat het eerste blok met reactantiefunctie $X_1(s)$ niet ontbreekt. Zou dit namelijk het geval zijn dan zou bij de bepaling van $Y_{22}(s)$ blok 2 worden kortgesloten. Bij de schakeling van figuur 6.5 is $Y_{22}(s)$ altijd van orde n en wordt met n reactieve elementen en één passieve weerstand gerealiseerd.

Het toevoegen van het kortgesloten blok 2 geeft meer dan het minimum aantal elementen. We wensen echter alleen de strikt minimale oplossingen te beschouwen, zodat het eerste blok altijd één of meer elementen moet bevatten. Is aan deze voorwaarde voldaan dan is ook impedantie $Z_{11}(s)$ van orde n , waarbij de volledige Hurwitzpolynoom in de teller komt te staan. Er kunnen hier geen extra termen bijkomen door bijvoorbeeld polen van $\det(Y(s))$ want dan zou $Z_{11}(s)$ een tellerpolynoom krijgen met een graad hoger dan n , hetgeen bij dit aantal elementen onmogelijk is.

Men kan nu ook aantonen waarom men soms meerdere oplossingen krijgt bij eenzelfde schakeling en eenzelfde Hurwitzpolynoom in de teller van de impedantiefunctie.

Dit zal aan de hand van een voorbeeld bij klasse 2 van orde 4 duidelijk gemaakt worden. De gegeneraliseerde ladderschakeling bestaat hier uit twee blokken. De reactantiefunctie $Q_2(s)$ is in formule (6.23) gegeven.

$$(6.23) \quad Q_2(s) = \frac{E(s)}{O(s)} = \frac{s^4 + a_2 s^2 + a_4}{a_1 s^3 + a_3 s}$$

Deze reactantiefunctie splitsen we op volgens :

$$(6.24) \quad Q_2(s) = X_1(s) // X_2(s)$$
$$X_1(s) = \frac{s^2 + p_1}{q_1 s}, \quad X_2(s) = \frac{s^2 + p_2}{q_2 s}$$

$p_{1,2}$ is oplossing van $x^2 + a_2 x + a_4$
 $q_{1,2}$ is de bijbehorende residu

Men kan voor $X_1(s)$ zowel de ene oplossing van de kwadratische vergelijking invullen, als de andere. Beide oplossingen leveren dezelfde schakeling op, maar met een verschillende noemerpolynoom.

6.2 Cauersynthese

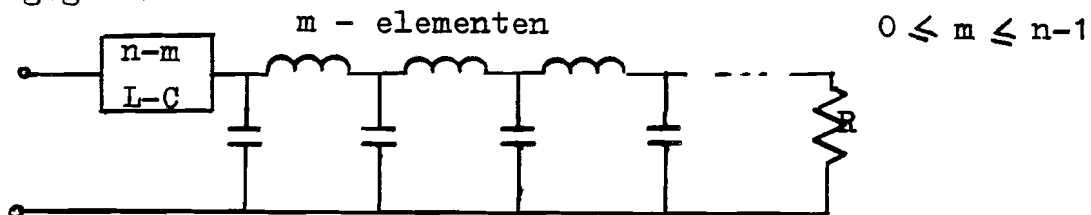
In paragraaf 6.1 is een methode afgeleid, waarmee alle oplossingen van het probleem, zoals dat in hoofdstuk 2 geformuleerd werd, kunnen worden gegenereerd. Hierbij moet men de ligging van de polen van de reactantiefunctie $Q_j(s)$ bepalen. Daarna splitst men deze in twee groepen. Het vinden van de polen komt neer op het bepalen van de nulpunten van een polynoom in s^2 . Voor polynomen tot en met de 4^e graad is het analytisch mogelijk om de nulpunten te bepalen. Voor hogere orde polynomen is dit niet meer mogelijk. (zie o.a. Uspensky). Daar de noemerpolynoom van een reactantiefunctie een polynoom in s^2 is, is het voor impedantiefuncties tot en met de 9^e orde analytisch mogelijk alle oplossingen te vinden. Voor 10^e en hogere orde impedantiefuncties zijn alleen benaderingen met de computer nog mogelijk.

In deze paragraaf vermijden we deze moeilijkheid door ons te beperken tot het afsplitsen van polen in de oorsprong of in oneindig. Ook het gelijktijdig afsplitsen van deze twee polen laten wij toe. Deze methode om de reactantiefunctie te realiseren heet de Cauersynthese, in tegenstelling tot de Fostersynthese, waarbij iedere pool op de imaginaire as afgesplitst mag worden. De impedantiefunctie die we vinden na Cauersynthese op de reactantiefunctie te hebben toegepast heeft altijd een noemerpolynoom die eenduidig bepaald wordt door de Hurwitzpolynoom in de teller en de gegeven schakeling.

We kunnen op deze manier een beperkt aantal oplossingen uit de verzameling van alle oplossingen bepalen. De functies die in hoofdstuk 5 zijn afgeleid behoren allemaal tot deze groep. Het aantal oplossingen blijft bij toepassing van de Cauersynthese bij de 1^e tot de 3^e orde impedantiefuncties gelijk. Bij de 4^e orde krijgen we 18 van de 24 oplossingen en bij de 5^e orde is dit 46 van de 70.

Met behulp van de Cauersynthese kunnen we twee groepen van klassen genereren. De eerste groep van klassen omvat de klassen met rangnummer $2^m - 1$, waarbij m kleiner of gelijk aan $n-1$ is. Tot deze groep behoren o.a. klasse 0, klasse 1, klasse 3 enz.

De bijbehorende schakeling is in figuur 6.6 gegeven.



figuur 6.6

De methode om deze oplossingen te vinden werkt als volgt :

Ga uit van de Hurwitzpolynoom van graad n en vorm de reactantiefunctie $Q_{m+1}(s)$. Splits van deze functie de pool in de oorsprong af en ga over op de omgekeerde van de restfunctie. Hiervan wordt weer de pool in de oorsprong afgesplitst en dit proces wordt zo m x herhaald. De reactantiefunctie die we overhouden wordt met het eerste blok gerealiseerd. Op deze manier krijgen we de algemene formules voor alle klassen die te schrijven zijn als $2^m - 1$.

De noemerpolynoom is hierbij steeds eenduidig afhankelijk van de tellerpolynoom.

De complexiteit van de noemerpolynoom wordt bepaald door het aantal elementen m .

Is $m = 0$ dan heeft de noemer slechts enkelvoudige termen. (zie de formule voor klasse 0)

Is $m = 1$ dan bevat de noemer coëfficiënten, die gelijk zijn aan onderdeterminanten van de Hurwitzdeterminant, die van orde 2×2 zijn. (zie klasse 1)

Bij $m = 2$ bevat deze determinanten van orde 3×3 en in het algemeen heeft de noemer coëfficiënten die gelijk zijn aan onderdeterminanten van orde $(m+1) \times (m+1)$.

Een andere oplossing krijg je door alle spoelen en condensatoren in figuur 6.6 om te wisselen. Bij de Cauersynthese moet je dan steeds de pool in oneindig in plaats van die in nul afsplitsen.

Verder hebben we nog een tweede groep van oplossingen. Het procédé loopt hierbij precies eender als bij de vorige groep van klassen.

Deze groep bevat de klassen met rangnummer :
 $2^{n-2} + 2^{m-1} - 1$.

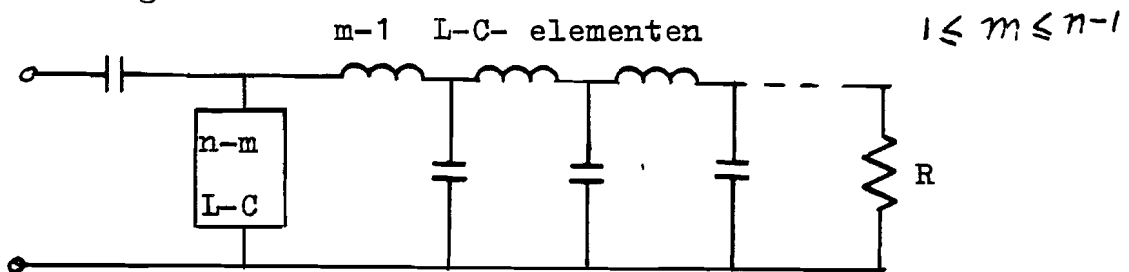
m ligt hierbij tussen 1 en $n-1$.

Hiertoe behoren o.a. de centrum klasse, de klasse na de centrum klasse enz.

De bijbehorende schakeling is in figuur 6.7 gegeven.

Ook de schakeling waarbij alle spoelen door condensatoren zijn vervangen en omgekeerd levert hierbij weer een oplossing, geheel in analogie met het voorafgaande.

Ook de complexiteit van de termen in de noemer neemt weer met het aantal L-C-elementen buiten het blok toe. De centrum klasse bevat coëfficiënten in de noemer die gelijk zijn aan onderdeterminanten van orde 2×2 . De volgende klasse bevat er van 3×3 en in de laatste klasse, waarbij $m = n-1$, is de volledige Hurwitzdeterminant van orde n aanwezig.



figuur 6.7

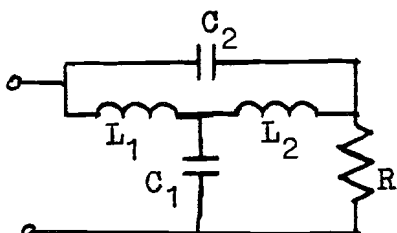
Bij de eerste groep van oplossingen ziet men het aantal polen op de imaginaire as geleidelijk aan afnemen. De primitieve klasse heeft alle polen op de imaginaire as, klasse 1 heeft er één minder en dit aantal neemt zo af totdat er geen polen meer op de imaginaire as aanwezig zijn.

Bij de tweede groep van oplossingen liggen alle polen in het open linkerhalfvlak. Daar gaat men geleidelijk van de centrum naar de laatste klasse over.

Met behulp van de computer is voor een bepaalde ligging van de nulpunten van de impedantiefunctie uitgerekend waar de polen bij de verschillende klassen komen te liggen. Dit gaf het beeld dat de polen naar één punt in het complexe vlak convergeerde naarmate het rangnummer van de klasse toenam. Dit punt lag op de negatieve reële as en had een modulus gelijk aan de grootste modulus van de nulpunten.

6.3 Schakelingen met overbrugde elementen

In dit hoofdstuk is een procedure gegeven om alle oplossingen van het probleem, zoals dat in hoofdstuk 2 geformuleerd is, te genereren. Een van de restricties die bij deze probleemstelling werd gegeven was de beperking tot gegeneraliseerde ladderschakelingen. Deze vormen echter niet de enige oplossing van het probleem. Een andere oplossing wordt in deze paragraaf gegeven. We beschouwen daartoe de schakeling in figuur 6.8



figuur 6.8

De impedantiefunctie van deze schakeling is :

$$(6.25) \quad Z(s) = \frac{s^4 L_1 L_2 C_1 C_2 R + s^3 L_1 L_2 C_1 + s^2 (L_1 C_1 R + L_1 C_2 R + L_2 C_2 R) + s(L_1 + L_2) + R}{s^4 L_1 L_2 C_1 C_2 + s^3 (L_1 + L_2) C_1 C_2 R + s^2 (L_1 C_2 + L_2 C_1 + L_2 C_2) + s C_1 R + 1}$$

Deze impedantiefunctie willen we schrijven als :

$$(6.26) \quad Z(s) = k \cdot \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4}$$

Dit kan met :

$$(6.27) \quad R = k$$

$$L_1 = k \cdot \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4}{(a_1 a_2 - a_3) \cdot a_4}$$

$$L_2 = k \cdot \frac{a_1^2}{a_1 a_2 - a_3}$$

$$C_1 = \frac{(a_1 a_2 - a_3)^2}{k \cdot a_1 (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)}$$

$$C_2 = \frac{1}{k \cdot a_1}$$

De parameters van de noemer worden dan :

$$(6.28) \quad b_1 = \frac{a_3 \cdot (a_1 a_2 - a_3)^2}{a_1^2 \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)}$$

$$b_2 = \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1 a_4 \cdot (a_1 a_2 - a_3)}{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4}$$

$$b_3 = \frac{a_4 \cdot (a_1 a_2 - a_3)^2}{a_1 \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)}$$

$$b_4 = a_4$$

Ook deze brugschakeling is dus een oplossing van het probleem.

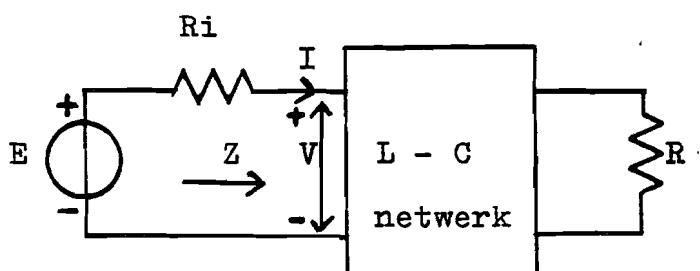
Door brugschakelingen en ook b.v. kruisschakelingen toe te laten krijgt men weer een hele groep van oplossingen. Deze heb ik niet verder onderzocht. Ze kunnen mogelijk onderwerp voor nader onderzoek zijn.

Mij verder beperkende tot de gegeneraliseerde laddernetwerken ga ik in de volgende hoofdstukken kijken naar toepassingen van deze schakelingen bij filterontwerpen.

Hoofdstuk 7 Filtertoepassingen

7.1 Inleiding

We gaan de schakelingen die we in de vorige hoofdstukken gevonden hebben aansluiten op een bron met inwendige weerstand, zoals in figuur 7.1 te zien is. We willen nu weten hoeveel vermogen er in die enkele weerstand, die in de schakeling zit, gedissipeerd wordt. We beschouwen de vermogensoverdracht als functie van de frequentie.



figuur 7.1

Al het actief vermogen dat door de impedantie Z wordt verbruikt is in de weerstand R gedissipeerd. De reactieve elementen kunnen immers geen actief vermogen opnemen.

Dit gedissipeerde vermogen wordt door formule (7.1) beschreven.

$$\begin{aligned}(7.1) \quad P_{\text{diss}} &= \frac{1}{2} \cdot \text{Re}(V \cdot I^*) \\ &= \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot \text{Re}(Z) \\ &= \frac{|E|^2 \cdot \text{Re}(Z)}{2 \cdot |Z + R_i|^2}\end{aligned}$$

Het maximale vermogen dat gedissipeerd kan worden treedt op als aan vergelijking (7.2) is voldaan.

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(Z(j\omega)) &= R_i \\ \operatorname{Im}(Z(j\omega)) &= 0 \end{aligned}$$

Dit vullen we in vergelijking (7.1) in en krijgen :

$$(7.3) \quad P_{\max} = \frac{|E|^2}{8R_i}$$

De relatieve vermogensoverdrachtsfunctie P is gedefinieerd als het quotiënt van $P_{\text{dissipatie}}$ en P_{\max} . Door de betreffende functies in te vullen krijgen we :

$$(7.4) \quad P = \frac{P_{\text{diss}}}{P_{\max}} = \frac{4 \cdot R_i \cdot \operatorname{Re}(Z)}{|Z + R_i|^2}$$

We normeren de inwendige weerstand R_i van de bron op 1 Ohm.

De impedantiefunctie $Z(s)$ gaan we met formule (7.5) beschrijven.

$$(7.5) \quad Z(s) = \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{U_1(s) + sV_1(s)}{U_2(s) + sV_2(s)}$$

$U_1(s)$, $U_2(s)$, $V_1(s)$ en $V_2(s)$ zijn allen even

Hierin vullen we in dat

$$(7.6) \quad s = j\omega \quad \text{en} \quad W = \omega^2$$

zodat

$$(7.7) \quad P(W) = \frac{4(U_1 U_2 + W \cdot V_1 V_2)}{(U_1 + U_2)^2 + W \cdot (V_1 + V_2)^2}$$

In de rest van dit hoofdstuk wordt steeds met $W = \omega^2$ gewerkt omdat de vermogensoverdrachtsfunctie toch een symmetrische functie is.

Het bijzondere van de filterontwerpmethode die verder in dit hoofdstuk gebruikt gaat worden is dat de nulpunten van de impedantiefunctie, die nog vrijheidsgraden zijn, niet vooraf worden vastgelegd. Dit is in tegenstelling tot bijvoorbeeld Butterworth en Chebyshev-filters, waarbij de ligging wel vooraf bepaald is. (zie o.a. Weinberg) Bij de hier gebruikte filterontwerpmethode wordt de vermogensoverdrachtsfunctie voor bepaalde frequenties vastgelegd. Daarna leest men uit een tabel af welke schakelingen in aanmerking komen bij deze eisen.

De eisen betreffende de vermogensoverdrachtsfunctie worden in de parameters van de impedantiefunctie vertaald. Voor de vrijheidsgraden die over blijven wordt nagegaan binnen welke grenzen ze mogen variëren opdat aan de Hurwitzvoorwaarden blijft worden voldaan.

Daarna wordt de vermogensoverdracht met behulp van een computer uitgerekend en getekend voor verschillende waarden van de vrijheidsgraden. Uit deze schare van oplossingen zoekt men de meest geschikte vermogensoverdrachtsfunctie.

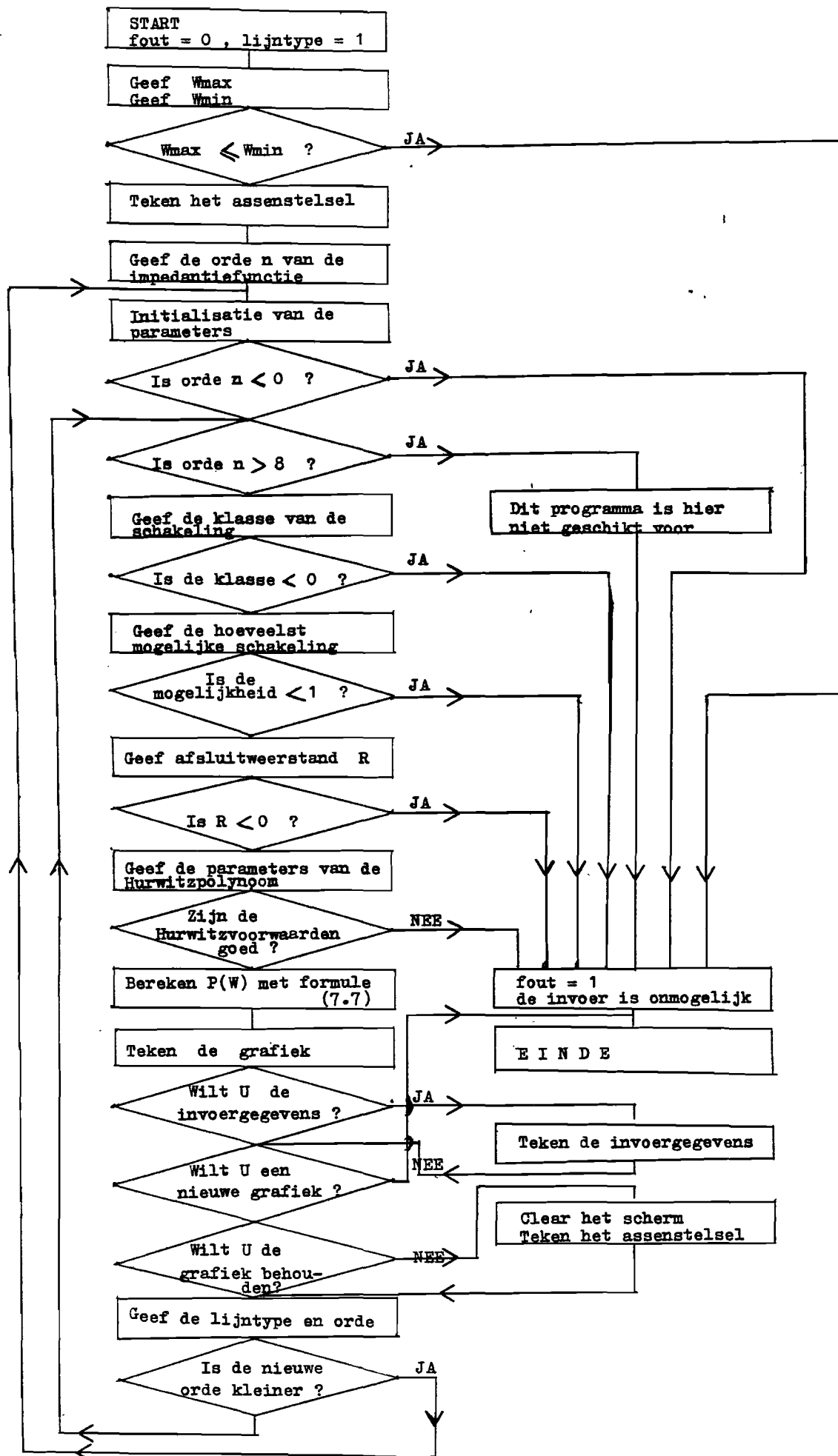
In de volgende paragraaf zal de werking van het computerprogramma worden uitgelegd. Daarna volgen enkele toepassingen van bekende klassen van oplossingen.

In het volgende hoofdstuk wordt een volledig overzicht gegeven van alle mogelijke eisen, die aan filters met maximaal vier reactieve elementen gesteld kunnen worden.

7.2 Het computerprogramma

Ik heb een computerprogramma in de programmeertaal Basic gemaakt, welke de vermogensoverdrachtsfunctie berekent en de resultaten in een grafiek uitzet. Het programma maakt gebruik van formule (7.7). Daartoe zijn van alle in dit verslag voorkomende schakelingen de impedantiefunctie in een procedure opgeslagen, en wel zodanig dat de functie $U_1(s)$, $U_2(s)$, $V_1(s)$ en $V_2(s)$ uit formule (7.5) allen apart opvraagbaar zijn. Deze functies zijn genormeerd op een afsluitweerstand R van 1 Ohm. De waarde van deze weerstand moet in het programma ook ingevoerd worden.

In figuur 7.2 is een flowdiagram van het programma gegeven. Daarin kan men zien dat men eerst het gewenste frequentiebereik moet opgeven. Vervolgens specificeert men de gebruikte schakeling door de orde van de impedantiefunctie te geven, de klasse waartoe de schakeling behoort en welk rangnummer de schakeling binnen deze klasse heeft. Alle gebruikte schakelingen zijn in bijlage I gegeven. Nadat de schakeling gespecificeerd is moeten de afsluitweerstand R en de parameters van de teller van de impedantiefunctie worden opgegeven. De computer controleert vervolgens of aan de Hurwitzvoorwaarden is voldaan en begint dan met de berekening van de overdrachtsfunctie voor 400 punten in het opgegeven frequentiebereik. De waarden worden in een array opgeslagen en vervolgens in een grafiek uitgezet. In deze grafiek kan men de invoergegevens intekenen. Vervolgens kan men het programma nogmaals opstarten of beëindigen.



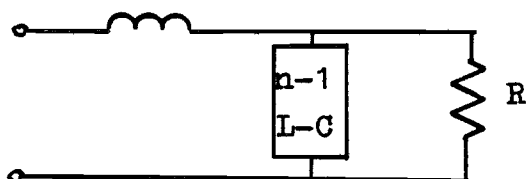
figuur 7.2

7.3 Toepassingen van de centrum klasse

We gaan de schakelingen van de centrum klasse gebruiken als laagdoorlaatfilter. Zoals in paragraaf 7.1 al is aangekondigd mogen we bepaalde eisen aan de vermogensoverdrachtsfunctie stellen. We gaan de vermogensoverdrachtsfunctie voor bepaalde frequenties vastleggen. Als voorbeeld stellen we de volgende eisen aan de overdrachtsfunctie :

$$(7.8) \quad \begin{aligned} P(0) &= 0.8888 \\ P(1) &= 1 \end{aligned}$$

De gebruikte schakeling is in figuur 7.3 weergegeven.



figuur 7.3

Een schakeling van de centrum klasse

Bij $n = 1$ is het onmogelijk om aan al deze eisen te voldoen.

Bij $n = 2$ kunnen we de eisen juist vervullen.

De bijbehorende impedantiefunctie staat in formule (7.9).

$$(7.9) \quad z(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s + 1}$$

Bij $n = 3$ houden we één vrijheidsgraad over. Deze vrijheidsgraad kunnen we gebruiken om een nulpunt W_0 van de vermogensoverdrachtsfunctie vast te leggen. De Hurwitzvoorwaarden eisen wel dat W_0 groter dan 1 is. De impedantiefunctie wordt in dit geval :

$$(7.10) \quad Z(s) = \frac{s^3 + (W_0+1)s^2 + W_0s + 2W_0}{s^2 + (W_0-1)s + W_0} \quad W_0 > 1$$

We kiezen als voorbeeld $W_0 = 1.2$
 Bij $n = 4$ houden we dit nulpunt bij $W_0 = 1.2$.
 We hebben nu weer één vrijheidsgraad over.
 Deze vrijheidsgraad kunnen we variëren binnen grenzen die door de Hurwitzvoorwaarden worden bepaald. Het invullen van de eisen levert de verbanden in formule (7.11) op.

$$(7.11) \quad \begin{aligned} a_1 &= a_3/W_0 \\ a_2 &= (a_3W_0 + a_3 + W_0)/W_0 \\ a_4 &= 2a_3 \\ a_3 &> W_0 \end{aligned}$$

Ik heb de overdrachtsfunctie voor vele waarden van vrijheidsgraad a_3 bepaald. Opvallend hierbij was dat de maximale overdracht in de sperband altijd groter was dan dit maximum bij $n = 3$. Dit is ook eenvoudig te bewijzen. Blijkbaar is de centrum klasse van orde 4 minder geschikt als laagdoorlaatfilter.

Bij $n = 5$ kan men nog een tweede punt aangeven waar de vermogensoverdrachtsfunctie nul is.

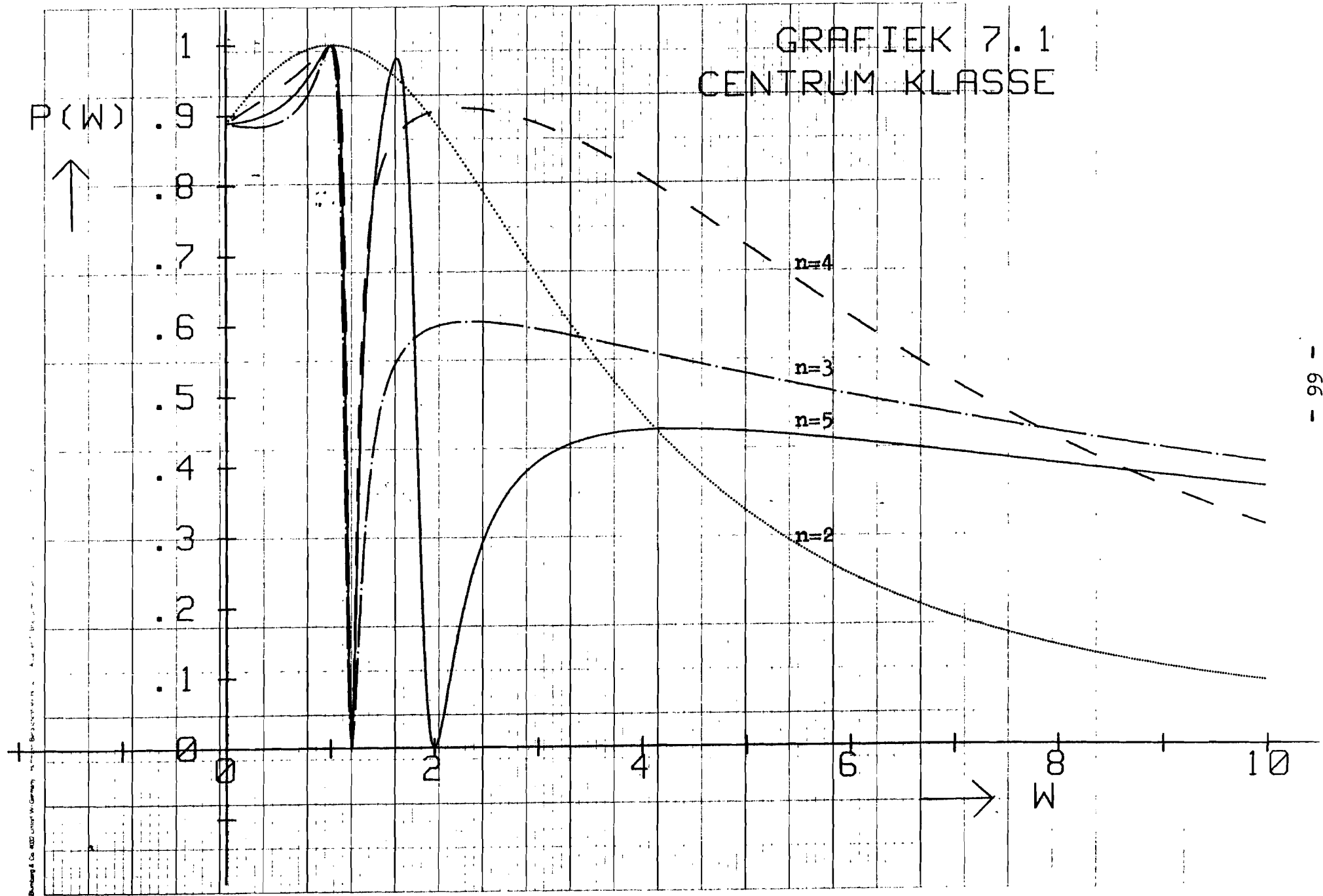
Dit punt noemen we W_1 . We houden dan nog steeds één vrijheidsgraad over, die we binnen bepaalde grenzen kunnen variëren.

De eisen voor de parameters zijn :

$$(7.12) \quad \begin{aligned} a_2 &= W_0 + W_1 \\ a_3 &= W_0 + W_1 + W_0W_1 - 1 + a_1 \\ a_4 &= W_0W_1 \\ a_5 &= 2W_0W_1 \\ W_0+1 &< a_1 < W_1 + 1 \end{aligned}$$

Van iedere orde is er één voorbeeld in grafiek 7.1 gegeven. Hierbij is $W_0=1.2$ en $W_1 = 2$.

GRAFIEK 7.1
CENTRUM KLASSE



Ook hier ligt het maximum van de overdrachtsfunctie in het spergebied altijd hoger dan die voor $n = 3$. Blijkbaar heeft het verhogen van de orde van de impedantiefunctie geen invloed op de demping in het spergebied. Wel kan hiermee de flanksteilheid vergroot worden en de vermogensoverdrachtsfunctie voor bepaalde frequenties volledig onderdrukt worden.

We gaan nu een ander voorbeeld van een toepassing van de centrum klasse geven. We gebruiken weer de schakeling uit figuur 7.3 en gaan een laagdoorlaatfilter ontwerpen. De opgelegde eisen zijn :

$$(7.13) \quad \begin{aligned} P(0) &= 1 \\ P(1) &= 0.997 \end{aligned}$$

Bij $n = 2$ voldoet de impedantiefunctie van formule (7.14).

$$(7.14) \quad Z(s) = \frac{3s^2 + 9s + 30}{10s + 30}$$

Bij $n = 3$ hebben we één vrijheidsgraad om één nulpunt W_0 van de vermogensoverdrachtsfunctie te kiezen. Na invulling van de eisen krijgen we bijvoorbeeld de volgende verbanden :

$$(7.15) \quad \begin{aligned} a_1 &= (W_0 + 9)/3 \\ a_2 &= W_0 \\ a_3 &= 10W_0/3 \end{aligned}$$

We kiezen als voorbeeld W_0 gelijk aan 2.25. Bij $n = 4$ houden we dezelfde eisen en hebben daarom één vrijheidsgraad over :

$$(7.16) \quad \begin{aligned} a_1 &= 4a_3/9 \\ a_2 &= (5a_3 + 3)/3 \\ a_4 &= 10a_3/3 \\ a_3 &> 27/4 \end{aligned}$$

Bij $n = 5$ kunnen we nog een tweede nulpunt van de vermogensoverdrachtsfunctie vastleggen. We houden dan nog steeds één vrijheidsgraad.

Het tweede nulpunt W_1 leggen we bij $W_1 = 4$.

Invullen van deze eisen levert :

$$(7.17) \quad \begin{aligned} a_2 &= 6.25 \\ a_4 &= 9 \\ a_5 &= 30 \\ a_3 &= a_1 + 18.75 \\ 3.75 &< a_1 < 4.333 \end{aligned}$$

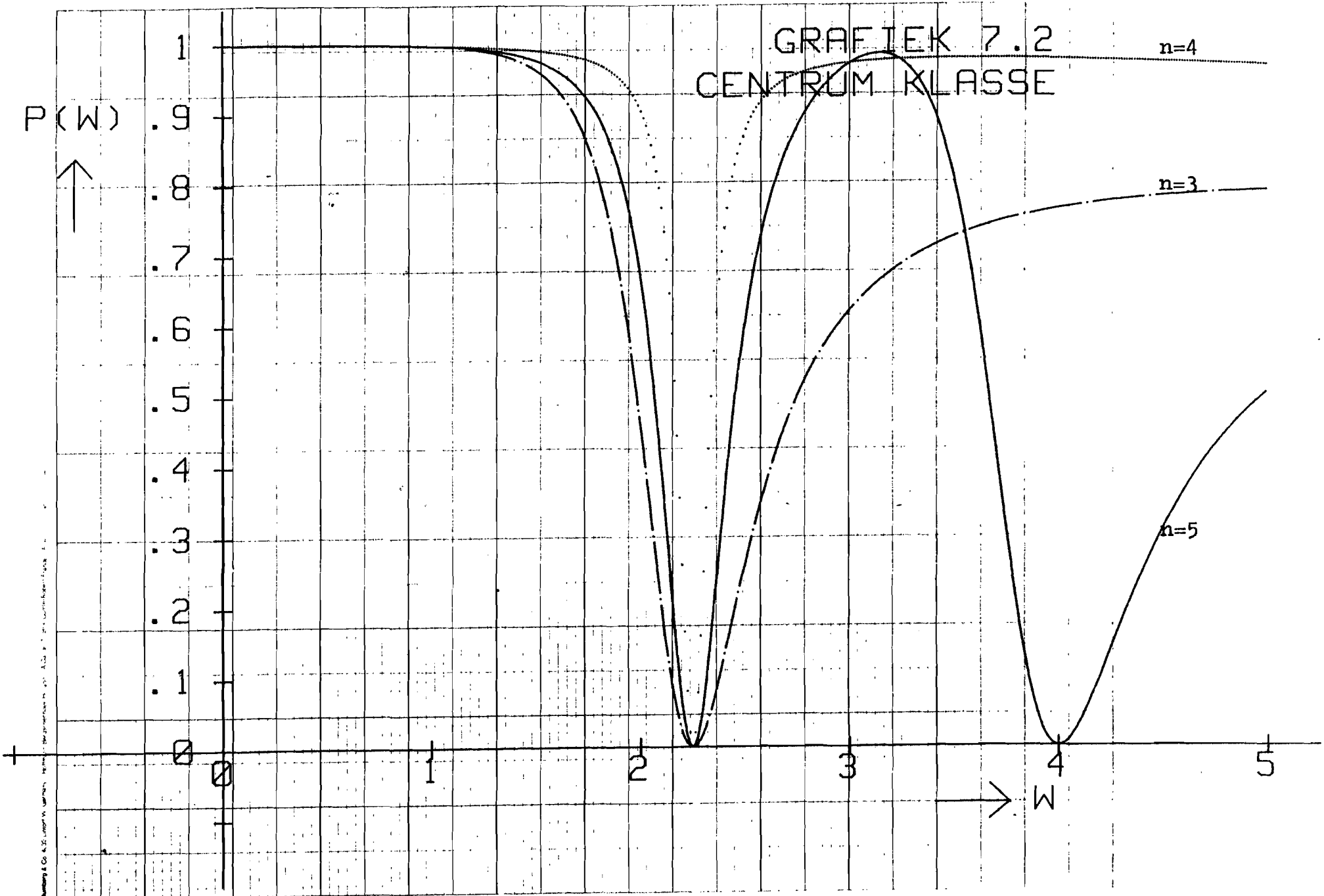
Bij $n = 6$ hebben we al twee vrijheidsgraden.

En bij $n = 7$ krijgen we nog een derde nulpunt erbij. Dit kan zo worden uitgebreid tot willekeurige orde n . Enkele resultaten hiervan zijn in grafiek 7.2 gegeven.

Opvallend hierbij is dat de maximale opslinging in het sfergebied voor $n = 3$ het kleinste blijft. Met hogere orde impedantiefuncties is het onmogelijk om dit te onderdrukken. De enige mogelijkheid om toch succes hierbij te krijgen is het overgaan op andere klasse van schakelingen.

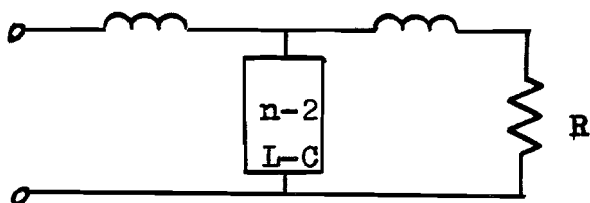
Met de centrum klasse kun je wel de vermogensoverdrachtsfunctoe voor verschillende frequenties gelijk aan nul maken. Tussen twee nulpunten treedt echter altijd weer een grote opslinging op.

Samengevat kunnen we concluderen dat de centrum klasse minder geschikt is als laagdoorlaatfilter. Het filter is wel geschikt voor het sperren van zeer bepaalde frequenties en ook de zeer hoge frequenties worden onderdrukt.



7.4 Toepassingen van de klasse na de centrum klasse

We wensen weer een laagdoorlaatfilter te ontwerpen en gebruiken hiervoor een van de schakelingen van de klasse na de centrum klasse. De gebruikte schakeling heeft een structuur zoals in figuur 7.4 staat. Deze schakeling is alleen dan zo te gebruiken als de bijbehorende impedantiefunctie een oneven orde n heeft. Bij de even orden voldoet deze schakeling niet aan de eisen van hoofdstuk 2.



figuur 7.4

De eisen die we aan dit filter stellen zijn :

$$(7.18) \quad \begin{aligned} P(0) &= 1 \\ P(1) &= 1 \end{aligned}$$

Invulling van deze eisen bij $n = 3$ levert de voorwaarden van formule (7.19) op. Er is dus nog één vrijheidsgraad over, die we kunnen variëren binnen de aangegeven grenzen.

$$(7.19) \quad \begin{aligned} a_2 &= a_1^2 + 1 \\ a_3 &= \frac{1}{2}a_1 \cdot (a_1^2 + 1) \\ a_1 &> 0 \end{aligned}$$

Bij $n = 5$ kunnen we nog een punt W_0 aangeven waarvoor de vermogensoverdrachtsfunctie nul wordt. De Hurwitzvoorwaarden eisen wel dat W_0 groter dan 1 moet zijn. Als voorbeeld kiezen we :

$$(7.20) \quad P(W_0) = P(2) = 0$$

Deze eis levert de volgende voorwaarden op :

$$(7.21) \quad \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2}a_5 + 1 \\ a_3 &= a_5 + 1 \\ a_4 &= 2 \cdot a_5 \\ a_5 &> 1 \end{aligned}$$

Een voorbeeld hiervan is in grafiek 7.3 te zien. Er blijkt dat voor een zekere frequentie W_1 geldt dat $P(W_1) = 1$. Deze frequentie W_1 is groter dan W_0 . In bovenstaand voorbeeld geldt formule (7.22).

$$(7.22) \quad P\left(\frac{1}{2}a_5 - 1\right) = 1$$

Het filter laat dus een bepaalde pilootfrequentie volledig door.

Bij $n = 7$ zijn er zelfs twee frequenties, waarvoor de vermogensoverdrachtsfunctie nul wordt. Er zijn ook twee frequenties waar de vermogensoverdrachtsfunctie maximaal wordt. Voor zowel één frequentie tussen de twee opgegeven nulpunten als voor één groter dan deze punten wordt de relatieve vermogensoverdrachtsfunctie $P(W)$ gelijk aan 1.

De plaats waar de extrema optreden kan men nog met de vrijheidsgraden variëren. Dit aantal vrijheidsgraden is juist gelijk aan het aantal extrema.

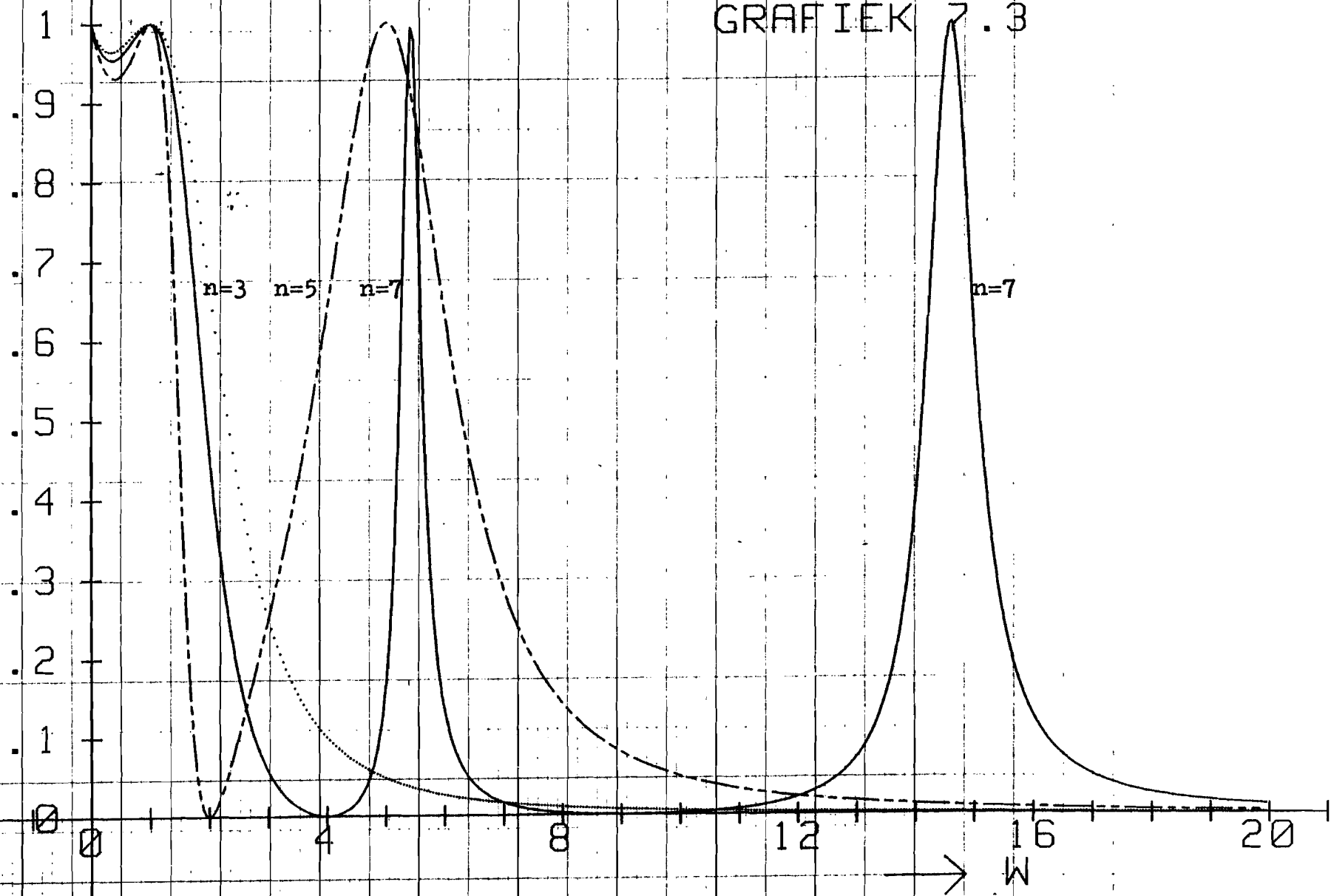
Een voorbeeld van het bovenstaande is in grafiek 7.3 te zien.

Bij $n = 5$ is naast de eisen van formule (7.18) voldaan aan $P(2)=0$ en $P(5)=1$.

Bij $n = 7$ wordt voldaan aan $P(4) = P(9) = 0$ en $P(5.5) = P(15) = 1$.

GRAFIEK 7.3

P(W)



7.5 Het realiseren van enkele bekende filters

Een veel in de literatuur voorkomend filter is het Maximaal vlakke of Butterworth filter. (zie o.a. Holt)
 We gaan dit filter onder bedrijfsomstandigheden realiseren. De bijbehorende vermogensoverdrachtsfunctie is in formule (7.23) gegeven.

$$(7.23) \quad P(w) = \frac{1}{1 + w^{2n}}$$

Uit formule (7.4) is bekend dat in dit geval geldt :

$$(7.24) \quad P(jw) = \frac{1}{1 + w^{2n}} = \frac{2 \cdot (T \cdot N^* + T^* \cdot N)}{|T + N|^2}$$

Dit is equivalent aan vergelijking (7.25).

$$(7.25) \quad 1 - P(jw) = \frac{w^{2n}}{1 + w^{2n}} = \frac{T \cdot T^* + N \cdot N^* - T \cdot N^* - T^* \cdot N}{|T + N|^2}$$

Aan de teller van vergelijking (7.25) kan alleen worden voldaan als :

$$(7.26) \quad \begin{aligned} T(jw) &= N(jw) + (jw)^n \\ T(s) &= N(s) + s^n \end{aligned}$$

We definiëren de functie $X(s)$ volgens formule (7.27).

$$(7.27) \quad X(s) = T(s) + N(s)$$

Er wordt dan aan de voorwaarde in de noemer van vergelijking (7.25) voldaan als :

$$(7.28) \quad X(s) \cdot X(-s) = 1 + (-1)^n s^{2n}$$

$X(s)$ is dan de bekende Butterworthpolynoom.
 (zie Weinberg)

Uit de voorwaarden uit de formules (7.26) en (7.28) volgt nu :

$$(7.29) \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0 \\ a_i = b_i \quad \text{voor } i > 0$$

$$a_i = \frac{1}{2} \cdot \text{Butterworth-coëfficiënt}$$

Als voorbeeld wordt nu naar de 3^e orde impedantie-functie gekeken.

De 3^e orde Butterworthpolynoom is :

$$(7.30) \quad n = 3 \\ X(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

De bijbehorende impedantiefunctie wordt nu volgens formule (7.29) :

$$(7.31) \quad Z(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + \frac{1}{2}}{s^2 + s + \frac{1}{2}}$$

De schakeling die deze impedantiefunctie moet realiseren is het volledige laddernetwerk uit de laatste klasse. Dit is namelijk de enige schakeling waarbij de bijbehorende functie P(W) geen nulpunten heeft.

Met de derde orde ladderschakeling kan de impedantiefunctie in formule (7.31) inderdaad gerealiseerd worden. Het resultaat is in grafiek 7.4 te zien.

Ook bij hogere orde oplossingen geeft de volledige ladderschakeling inderdaad de mogelijkheid om de Butterworth-karakteristiek te realiseren.

Een ander veel voorkomend filter is het Equal-ripple of Chebyshev-filter. De vermogensoverdrachts-karakteristiek heeft hierbij een bepaalde rimpel in het doorlaatgebied.

In de sperband valt de vermogensoverdrachtsfunctie zo steil mogelijk af.

De vermogensoverdrachtsfunctie is in formule (7.32) weergegeven.

$$(7.32) \quad P(W) = \frac{1}{1 + e^{2h(W)}}$$

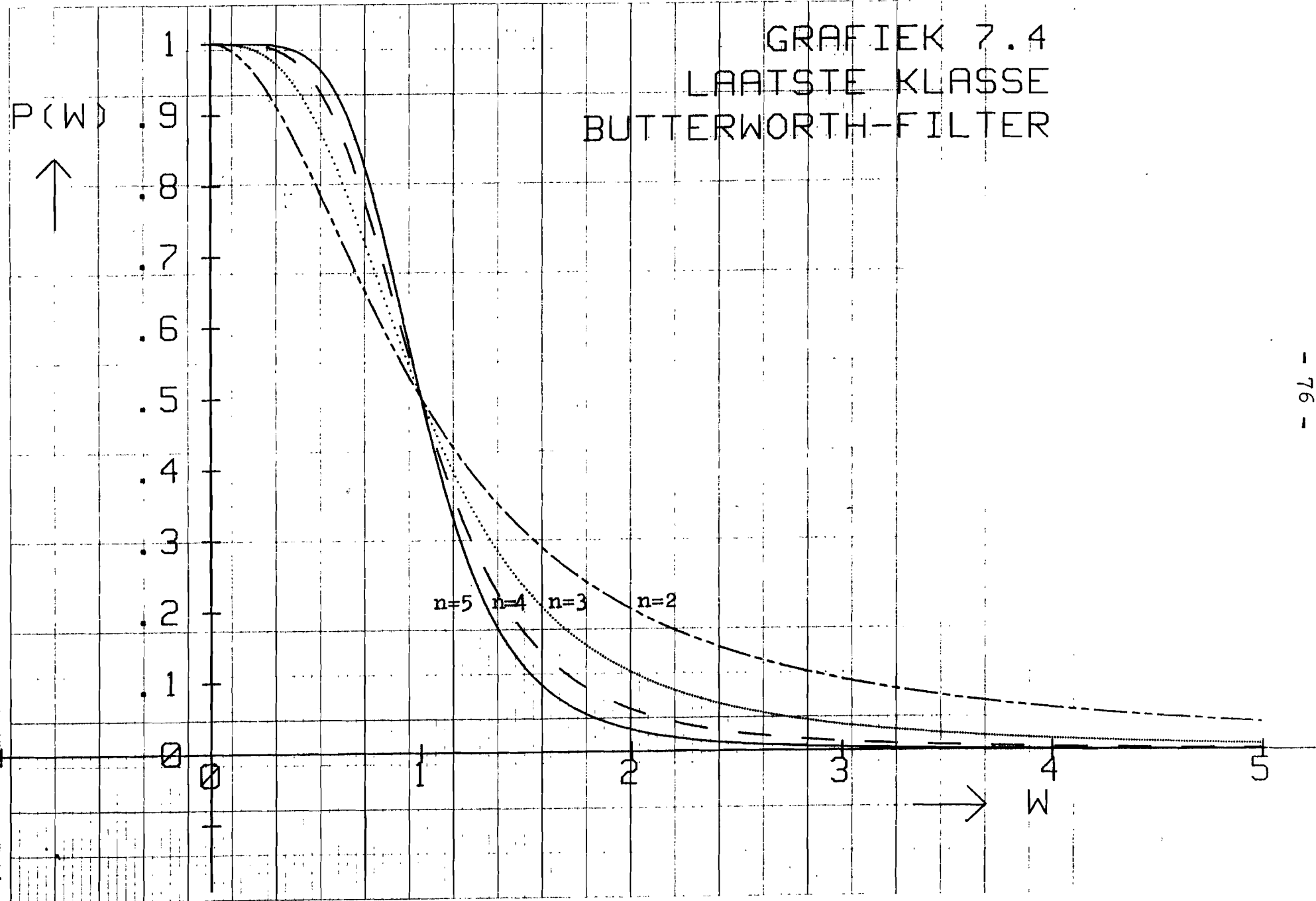
$h(W)$ is Chebyshev-polynoom

Deze functie heeft weer geen nulpunten, zodat alleen het volledige laddernetwerk in aanmerking komt om deze functie te realiseren. Het blijkt inderdaad met deze schakeling mogelijk om de functie van formule (7.32) te realiseren.

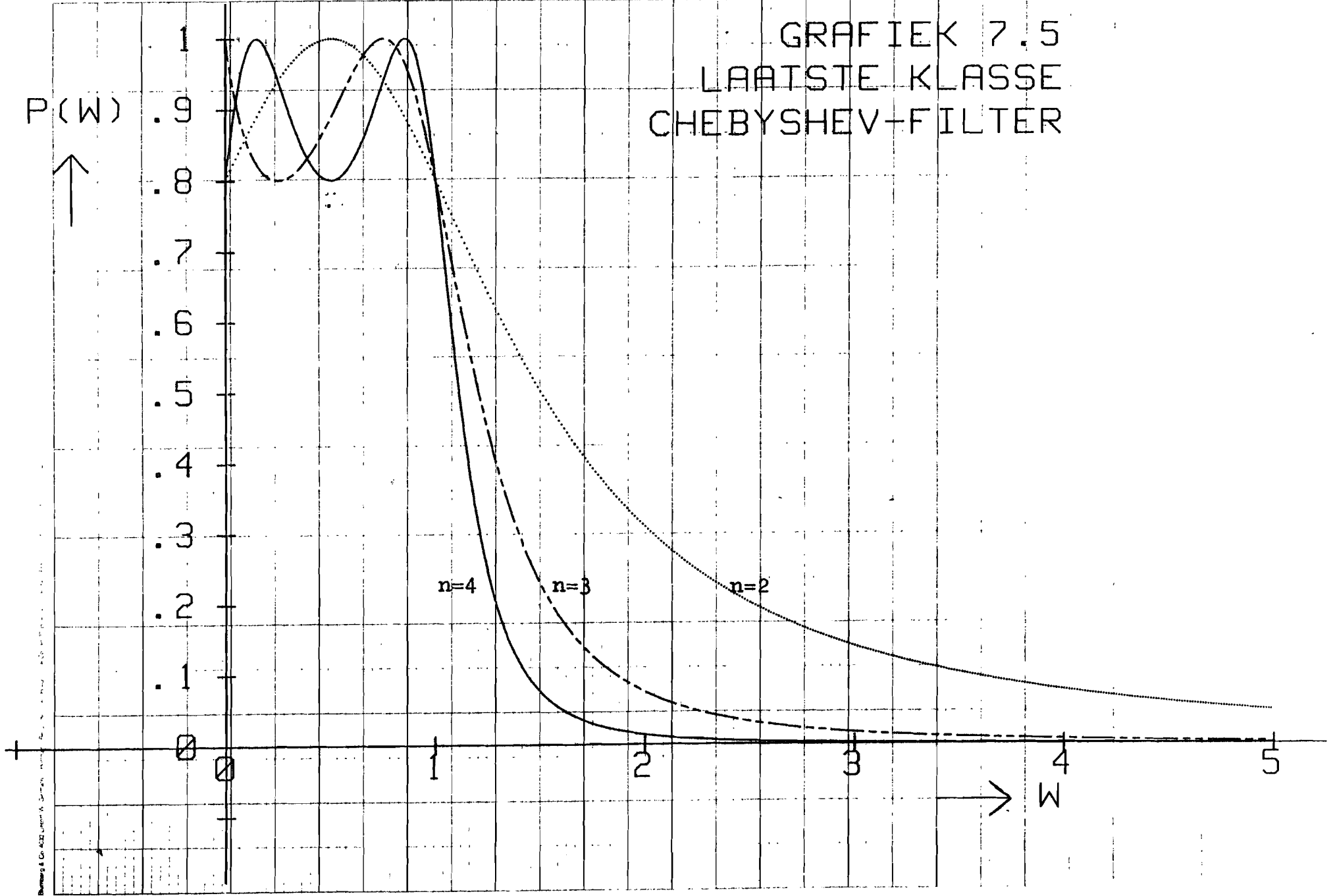
Ik heb de Chebyshev-functies tot en met de vierde orde uitgewerkt bij $e = \frac{1}{2}$. Het resultaat is in grafiek 7.5 weergegeven.

In deze paragraaf is geprobeerd duidelijk te maken dat ook reeds bekende filterkarakteristieken op deze wijze gerealiseerd kunnen worden. De functie $P(W)$ is hierbij van tevoren bekend. Deze functie wordt gelijk gesteld aan de uitdrukking voor $P(W)$ uit formule (7.7). Door deze vergelijkingen op te lossen krijgt men de benodigde parameters van de Hurwitzpolynoom in de teller van de impedantiefunctie van de schakeling. Deze parameters kan men in de computer invoeren waarna de gevraagde filterkarakteristieken eruit rollen.

GRAFIEK 7.4
LAATSTE KLASSE
BUTTERWORTH-FILTER



GRAFIEK 7.5
LAATSTE KLASSE
CHEBYSHEV-FILTER



Hoofdstuk 8 Een catalogus van filterontwerpen

8.1 De ontwerpeisen

In hoofdstuk 7 hebben we gezien dat we bij het filterontwerpen bepaalde eisen aan de frequentiekaracteristiek mogen leggen. Wat voor eisen er mogelijk zijn zal in deze paragraaf voor filters met ten hoogste vier reactieve elementen worden duidelijk gemaakt.

Nadat deze eisen in de parameters van de impedantiefunctie zijn uitgedrukt gaan we onderzoeken binnen welke grenzen de overige vrijheidsgraden gevarieerd mogen worden zodanig dat aan de Hurwitzvoorwaarden blijft worden voldaan. Deze waarden voeren we in de computer en een schare van oplossingen rolt hieruit.

Bij de eisen die we aan de relatieve vermogens - overdrachtsfunctie $P(W)$ stellen kijken we speciaal naar het gedrag van W bij de oorsprong en als W naar oneindig nadert. Verder hebben de frequenties waar de overdrachtsfunctie $P(W)$ gelijk aan 0 of gelijk aan 1 is onze bijzondere aandacht.

In tabel 8.1 worden voor alle impedantiefuncties tot en met de vierde orde aangegeven hoe het gedrag bij $W=0$ en $W=\infty$ is en het aantal punten waarvoor $P(W)=0$ of $P(W)=1$.

De schakeling wordt gekarakteriseerd door naast de orde, zijn klasse en volgnummer te geven. Dit zijn de twee cijfers uit de tweede kolom.

Indien in de kolom $P(0)$ een R staat heeft $P(0)$ een waarde tussen 0 en 1. Staat in deze kolom een 1 dan kan $P(0)$ ook de waarde 1 aannemen. Voor de kolom $P(\infty)$ geldt hetzelfde. In de kolom $P(W)=0$ staat het aantal punten waar de overdrachtsfunctie 0 wordt en in de kolom $P(W)=1$ staat het maximum aantal punten waar $P(W)$ gelijk aan 1 kan zijn.

orde	schakeling	$P(0)$	$P(\infty)$	$P(W)=0$	$P(W)=1$
1	0.1	1	0	-	-
	0.2	0	1	-	-
2	0.1	0	0	-	1
	0.2	1	1	1	-
	1.1	R	0	-	1
	1.2	0	R	-	1
3	0.1	1	0	1	1
	0.2	0	1	1	1
	1.1	0	0	-	1
	1.2	0	0	-	1
	2.1	R	0	1	1
	2.2	0	R	1	1
	3.1	R	0	-	1
	3.2	0	R	-	1
4	0.1	1	1	2	1
	0.2	0	0	1	1
	1.1	R	0	1	1
	1.2	0	R	1	1
	2.1	0	0	-	2
	2.2	1	1	2	-
	2.3/4	0	0	1	1
	3.1	0	0	-	2
	3.2	0	0	-	2
	4.1	R	0	1	1
	4.2	0	R	1	1
	5.1	0	0	1	1
	5.2	0	0	1	1
	6.1/2	1	0	1	1
6.3/4	0	1	1	1	
7.1	R	0	-	2	
7.2	0	R	-	2	

tabel 8.1

8.2 Een voorbeeld van een filterontwerp

We zullen nu een voorbeeld van een toepassing van deze catalogus bij het filterontwerpen laten zien. We wensen een laagdoorlaatfilter te realiseren met de volgende specificaties :

$$(8.1) \quad \begin{aligned} P(0) &= 1 \\ P(1) &= 1 \\ P(2) &= 0 \end{aligned}$$

Dit zijn in totaal vier eisen daar de tweede eis een dubbele eis is. Aan de tweede eis wordt alleen voldaan als gelijktijdig :

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(Z(j,1)) &= 1 \\ \operatorname{Im}(Z(j,1)) &= 0 \end{aligned}$$

We wensen nog één vrijheidsgraad over te houden om later het beste filter uit te zoeken. Daarom moeten we in tabel 8.1 gaan zoeken onder de 4^e orde filters welke mogelijk aan deze eisen kan voldoen. Dit blijken alleen de schakelingen van klasse 6 nummer 1 en 2 te zijn.

Bij beide filters voeren we de eisen in. Vervolgens bepalen we binnen welke grenzen de vrijheidsgraad gevariëerd mag worden.

Voor schakeling 6.1 levert het invullen van de eisen de voorwaarden (8.3) op.

$$(8.3) \quad R = 1 \quad \Omega$$
$$a_1 = \frac{a_2 - 1}{2a_2 - 2W_0 - 1}$$
$$a_3 = \frac{(2W_0 - 1) \cdot (a_2 - W_0)}{2a_2 - 2W_0 - 1}$$
$$a_4 = a_2 W_0 - W_0^2$$
$$W_0 + \frac{1}{2} < a_2 < 2W_0$$

Voor schakeling 6.2 krijgt men exact dezelfde voorwaarden, alleen moet vrijheidsgraad a_2 hierbij groter zijn dan $2W_0$.

Deze eisen zijn in de computer ingevoerd en een schare van karakteristieken kwam hieruit. Het resultaat is in de grafieken 8.1 en 8.2 te zien.

Men kan eenvoudig zien dat aan de gegeven specificaties van formule (8.1) is voldaan.

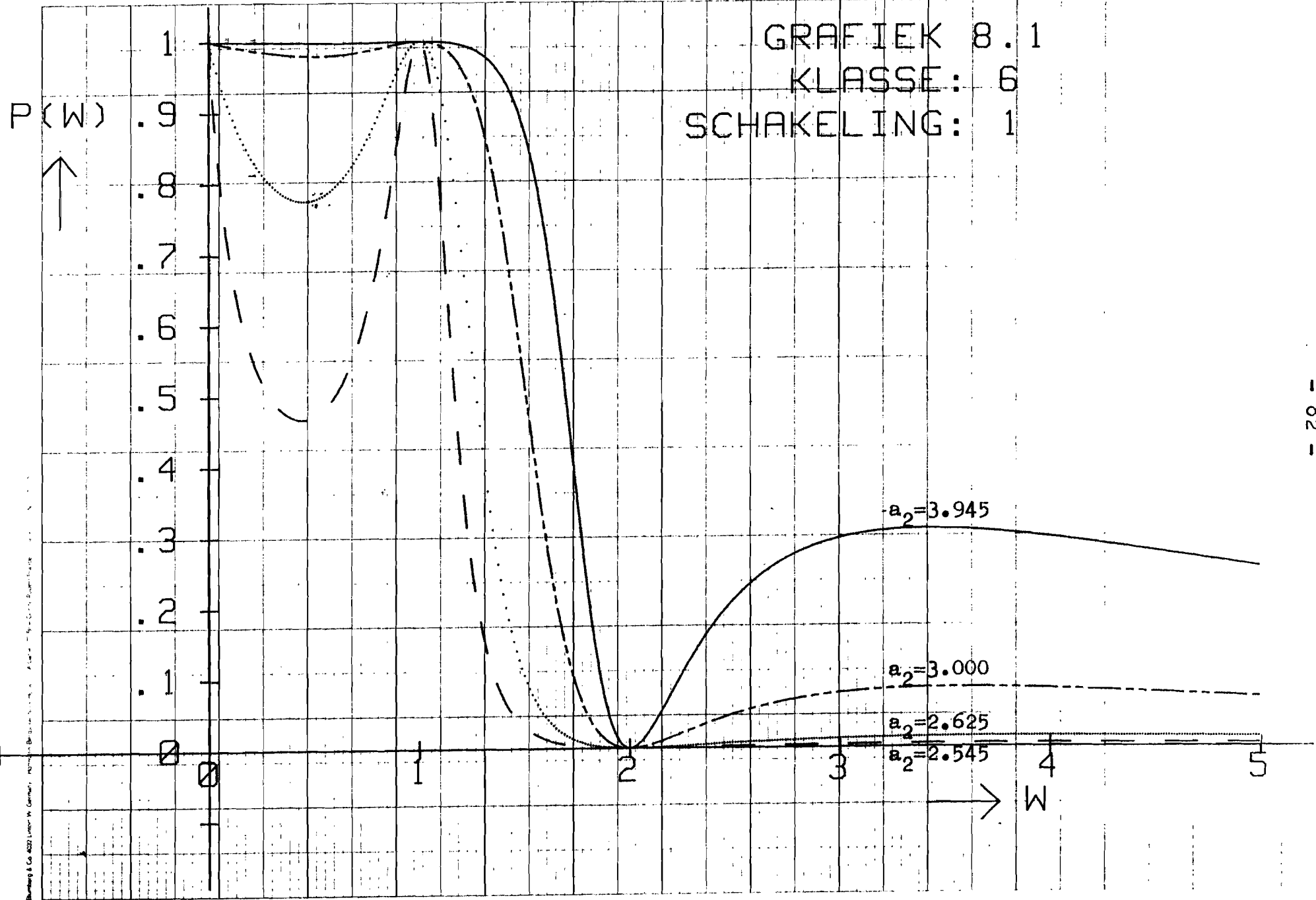
We zien ook dat schakeling 6.2 vrij slecht in de sperband is. Deze schakeling is minder geschikt als laagdoorlaatfilter.

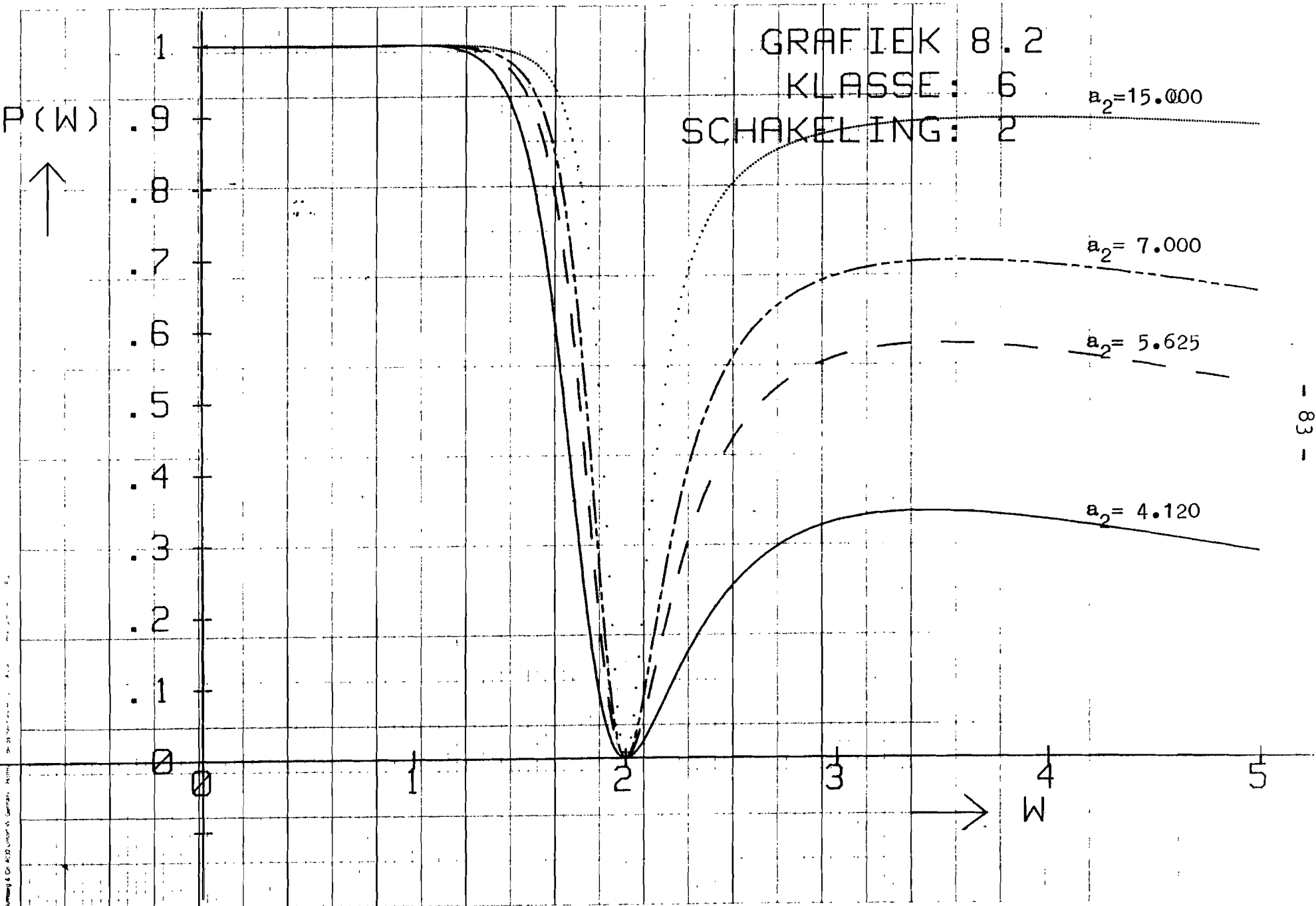
Schakeling 6.1 geeft veel betere resultaten in het spergebied, vooral als we vrijheidsgraad a_2 naar 2.5 laten naderen. Maar dan wordt de overdracht in het doorlaatgebied verslechterd.

Men moet dus een bepaald compromis vinden tussen de eisen voor het doorlaatgebied en de sperband. Worden hier nog extra eisen aan gesteld dan zoeken we onder deze schare van oplossingen naar de optimale oplossing.

Mocht dit geen succes hebben dan bestaat er altijd nog de mogelijkheid om iets van de opgegeven specificaties (8.1) af te wijken. Het verschuiven van de frequenties waarvoor $P(W) = 0$ of $P(W) = 1$ is op de computer zeer eenvoudig uit te voeren.

GRAFIEK 8.1
 KLASSE: 6
 SCHAKELING: 1





8.3 Het plaatsen van de Hurwitzpolynoom in de noemer

In dit verslag heb ik de Hurwitzpolynoom, waar iedere keer van wordt uitgegaan, in de teller van de impedantiefunctie geplaatst. De vraag is in hoeverre dit een beperking is en of men nieuwe mogelijkheden krijgt door de Hurwitzpolynoom in de noemer van de impedantiefunctie te plaatsen.

We wensen de impedantiefunctie $Z'(s)$, die door formule (8.4) beschreven wordt, te realiseren, waarbij $H(s)$ een Hurwitzpolynoom is en $G(s)$ een bijbehorende polynoom.

$$(8.4) \quad Z'(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$$

De admittantie van deze schakeling is weer een van de eerder in dit verslag gevonden functies. We krijgen de schakeling die bij impedantiefunctie $Z'(s)$ hoort via de transformatie van formule (8.5).

$$(8.5) \quad Z'(s) = Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$$

Met andere woorden, spoelen worden vervangen door condensatoren en omgekeerd, weerstanden worden geleidingen en serie- en parallelschakeling wordt verwisseld.

De vermogensoverdrachtsfunctie $P'(W)$ behorende bij impedantiefunctie $Z'(s)$ wordt beschreven door formule (8.6).

$$(8.6) \quad P'(W) = \frac{4 \cdot \text{Re}(Z') \cdot \text{Re}(Z')}{|Z' + Ri'|^2} = \frac{2 \cdot \text{Re}(Z') \cdot (Z' + Z'^*)}{(Z' + Ri')(Z'^* + Ri')} \\ = \frac{2 \cdot \text{Re}(Z'^* + Z)}{(Ri + Z) \cdot (Ri + Z'^*)} = P(W)$$

Uit formule (8.6) blijkt dat het voor de vermogensoverdrachtsfunctie niet uitmaakt of we met de schakeling behorende bij impedantie $Z(s)$ of die behorende bij $Z'(s)$ te maken hebben. In beide gevallen krijg je precies dezelfde vermogensoverdrachtsfunctie.

Het gebruik van de tweede schakeling heeft wel een ander voordeel. Om de voorwaarden van tabel 8.1 te verkrijgen wordt er vaak geëist dat afsluitweerstand R groter dan de weerstand van de bron R_i moet zijn. Door bovenbeschreven transformatie hierop toe te passen is het ook mogelijk voor weerstanden R kleiner dan de bronweerstand om aan deze eisen te voldoen.

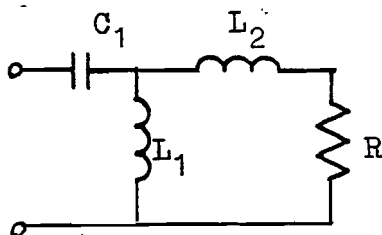
Dit zal aan de hand van het volgende voorbeeld worden verduidelijkt.

Stel we wensen met een 3^e orde Hurwitzfilter een karakteristiek te realiseren die aan de volgende eisen voldoet :

$$(8.7) \quad \begin{aligned} P(0) &= 0 \\ P(1) &= 1 \end{aligned}$$

Dit kan met behulp van de schakeling in figuur 8.1 alleen als de afsluitweerstand R groter dan 1 Ohm is.

We kiezen bijvoorbeeld $R = 8$ Ohm en krijgen dan de oplossing van formule (8.8).



$$(8.8) \quad \begin{aligned} R &= 8 \text{ Ohm} \\ C_1 &= 1/3 \text{ F} \\ L_1 &= 4 \text{ H} \\ L_2 &= 4 \text{ H} \end{aligned}$$

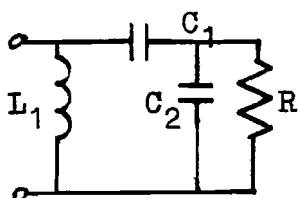
figuur 8.1

Indien afsluitweerstand R kleiner dan 1 Ohm is , is het met de schakeling van figuur 8.1 onmogelijk om aan de eisen van (8.7) te voldoen.

Dit kan wel met de schakeling die je krijgt door de in deze paragraaf beschreven transformatie toe te passen.

Het resultaat is in figuur 8.2 te zien.

We kiezen als voorbeeld $R = 1/8$ Ohm en krijgen dan de oplossing van formule (8.9).

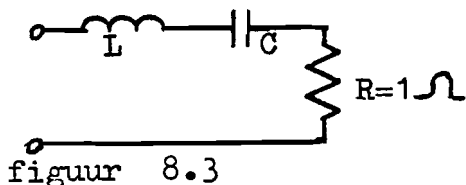


$$(8.9) \quad \begin{aligned} R &= 1/8 \text{ Ohm} \\ L_1 &= 1/3 \text{ H} \\ C_1 &= 4 \text{ F} \\ C_2 &= 4 \text{ F} \end{aligned}$$

figuur 8.2

Alleen als weerstand R een waarde van 1 Ohm heeft voldoen geen van beide schakelingen. Maar dan kan men al met een tweede orde filter aan de eisen van formule (8.7) voldoen.

De oplossing is in figuur 8.3 gegeven en de bijbehorende formule in uitdrukking (8.10).



$$(8.10) \quad \begin{aligned} R &= 1 \text{ ohm} \\ L &= 1/C \\ L \text{ in H, } C \text{ in F} \end{aligned}$$

figuur 8.3

Uit dit voorbeeld blijkt het voordeel van het overgaan op het plaatsen van de Hurwitzpolynoom in de noemer van de impedantiefunctie.

8.4 Filterfuncties bij een niet-gegeneraliseerd ladderennetwerk

Ik heb ook de vermogensoverdrachtsfunctie bekeken bij een voorbeeld van een schakeling die niet tot de gegeneraliseerde ladderennetwerken behoort. Ik heb hiervoor de schakeling uit paragraaf 6.3 gebruikt. Bij de vermogensoverdrachtsfunctie deed zich iets bijzonders voor. Bij een ladderennetwerk treden de nulpunten van de overdrachtsfunctie altijd op als de impedantie van een van de blokken in een serietak oneindig wordt of die van een in een paralleltak gelijk aan nul. De nulpunten van de vermogensoverdrachtsfunctie worden door de schakeling opgelegd. Bij een gegeven schakeling moet er altijd een nulpunt optreden als er dit soort blokken aanwezig zijn.

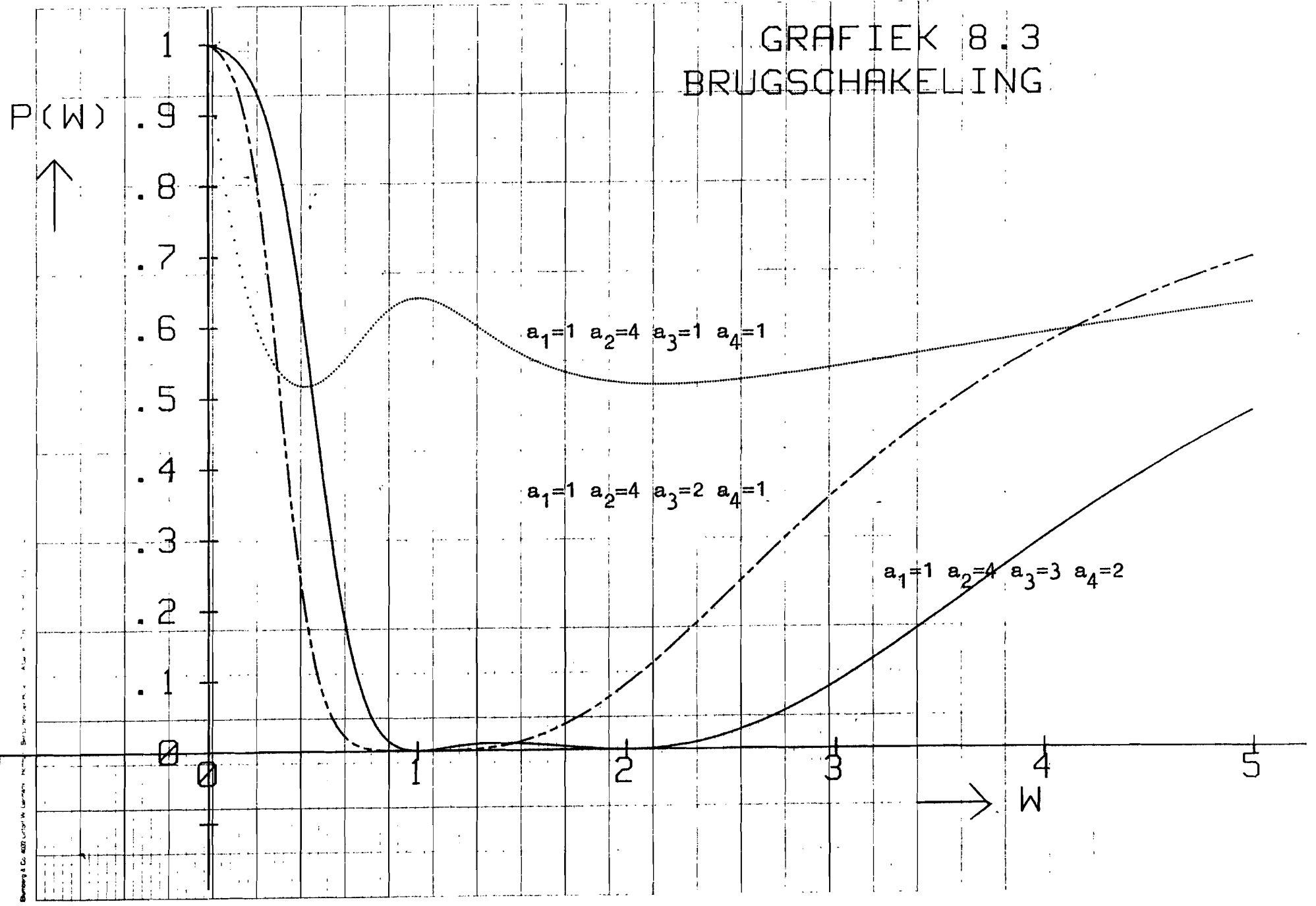
Bij de overbrugde schakeling uit figuur 6.8 is dat niet meer het geval. Het is hier mogelijk dat er 0, 1 of 2 nulpunten optreden, naar gelang de dimensionering van de schakeling. De voorwaarden voor 0, 1 of 2 nulpunten staan in formule (8.11)

$$(8.11) \quad P(W_0) \neq 0 \quad : \quad a_3^2 - 4a_1^2 a_4 < 0$$
$$P(W_0) = 0 \quad : \quad a_4 = \frac{a_3 W_0 - a_1 W_0^2}{a_1}$$
$$P(W_0) = P(W_1) = 0 \quad : \quad a_4 = W_0 \cdot W_1$$
$$a_3 = a_1 \cdot (W_0 + W_1)$$

Bovenstaande is in grafiek 8.3 te zien.

Naast de nulpunten kunnen er ook 0, 1 of 2 punten zijn waarvoor $P(W) = 1$. Deze groep van niet-gegeneraliseerde ladderennetwerken bieden nog een heel scala van verdere mogelijk te realiseren filterfuncties. Deze zijn hier niet verder uitgewerkt.

GRAFIEK 8.3 BRUGSCHAKELING



Hoofdstuk 9 De conclusies

1. Het probleem, zoals dat in hoofdstuk 2 geformuleerd werd, is voor iedere orde impedantiefunctie opgelost. Uitgaande van een willekeurige Hurwitzpolynoom $T(s)$ is er een procedure beschreven om alle polynomen $N(s)$ te vinden waarvoor geldt dat de impedantie - functie $Z(s)$, die gelijk is aan het quotiënt van $T(s)$ en $N(s)$, is te realiseren met het strikt minimum aantal elementen.

De restricties die hierbij in acht genomen moeten worden is dat men alleen reactieve elementen en één passieve weerstand gebruikt en dat de schakeling de vorm van een gegeneraliseerd laddernetwerk heeft. Een mogelijk bezwaar bij het genereren van deze oplossingen is dat men de nulpunten van een n^e orde polynoom moet bepalen. Dit is voor bepaalde waarden van n slechts numeriek mogelijk.

Daarom worden er ook oplossingen aangedragen waarbij dit uitsplitsen in factoren niet hoeft te worden uitgevoerd. Daarbij ligt polynoom $N(s)$ eenduidig vast als de Hurwitzfunctie $T(s)$ opgegeven wordt.

2. Er is een filterontwerpmethode voor dubbelzijdig resistief afgesloten reactantiefilters, waarbij van te voren geen eisen aan de ligging van de polen en nulpunten worden opgelegd, maar waarbij de frequentiekaracteristiek voor bepaalde frequenties wordt vastgelegd.

Door variëring van de overblijvende vrijheidsgraden en/of opgelegde eisen kan men met behulp van de computer een optimale oplossing zoeken.

Literatuur

- (1) Tirtoprodjo, S.
HURWITZ COEFFICIENT CONDITIONS AND ITS SPECIFIC USE FOR
MINIMAL TRANSFORMERLESS IMMITTANCE SYNTHESIS.
In: Proc. 26th Midwest Symp. on Circuits and Systems,
Puebla, Mexico, 15-16 August 1983. Ed. by E. Sánchez-
Sinencio.
North Hollywood, Calif.: Western Periodicals, 1983.
P. 188-191.
- (2) Uspensky, J.V.
THEORY OF EQUATIONS.
New York: McGraw-Hill, 1948.
- (3) Wylie, C.R.
ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS.
New York: McGraw-Hill, 1960.
- (4) Elias, G.J. en B.D.H. Tellegen
THEORIE DER WISSELSTROMEN. Deel 3: Theorie der elektrische
netwerken. Door B.D.H. Tellegen.
Groningen: Noordhoff, 1952.
- (5) Butterweck, H.J.
ELEKTRISCHE NETWERKEN.
Utrecht: Het Spectrum, 1974.
- (6) Verkroost, G.
NETWERKANALYSE EN NETWERKSYNTHESE.
College 50600. Afdeling der Elektrotechniek, Technische
Hogeschool Eindhoven, ca. 1978.
- (7) Fialkow, A.D.
INDUCTANCE, CAPACITANCE NETWORKS TERMINATED IN RESISTANCE.
IEEE Trans. Circuits & Syst., Vol. CAS-26(1979), p. 603-641.
- (8) Fujisawa, T.
REALIZABILITY THEOREM FOR MID-SERIES OR MID-SHUNT
LOW-PASS LADDERS WITHOUT MUTUAL INDUCTION.
IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-2(1955), p. 320-325.
- (9) Kim, H.K. and M. Ismail
A FAST HURWITZ TEST.
In: Proc. 25th Midwest Symp. on Circuits and Systems,
Houghton, Mich., 30-31 August 1982. Ed. by R.E. Stuffle
and P.H. Lewis.
North Hollywood, Calif.: Western Periodicals, 1982.
P. 47-50.
- (10) Kim, H.K. and E. Kim
GENERATION OF EQUIVALENT CAUER-TYPE CANONIC LADDER
NETWORKS.
IEEE Trans. Circuits & Syst., Vol. CAS-28(1981),
p. 1004-1006.

- (11) Weinberg, L.
NETWORK ANALYSIS AND SYNTHESIS.
New York: McGraw-Hill, 1962.
McGraw-Hill electrical and electronic engineering series
- (12) Balabanian, N.
NETWORK SYNTHESIS.
Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1958.
Prentice-Hall electrical engineering series
- (13) Guillemin, E.A.
SYNTHESIS OF PASSIVE NETWORKS: Theory and methods
appropriate to the realization and approximation problems.
New York: Wiley, 1957.
- (14) Storer, J.E.
PASSIVE NETWORK SYNTHESIS.
New York: McGraw-Hill, 1957.
McGraw-Hill electrical and electronic engineering series
- (15) Van Valkenburg, M.E.
INTRODUCTION TO MODERN NETWORK SYNTHESIS.
New York: Wiley, 1960.
- (16) Yengst, W.C.
PROCEDURES OF MODERN NETWORK SYNTHESIS.
New York: Macmillan, 1964.
- (17) Kuo, F.F.
NETWORK ANALYSIS AND SYNTHESIS.
New York: Wiley, 1962.
- (18) Holt, A.G.J.
AN EXPERIMENT ON THE MAXIMALLY FLAT MAGNITUDE, CHEBYSHEV
& MAXIMALLY FLAT DELAY RESPONSE FILTERS.
Bull. Electr. Eng. Educ., No. 29(1962), p. 52-65.
- (19) Holbrook, J.G.
THE RECURRENT-CONTINUANT METHOD OF TRANSFER FUNCTION
SYNTHESIS.
Radio & Electron. Eng., Vol. 38(1969), p. 73-79.
- (20) Jha, D.K. and S.C. Prasad
THE SYNTHESIS OF LADDER NETWORKS WITH RESISTANCES AT
BOTH ENDS BY THE RECURRENT-CONTINUANT METHOD.
Radio & Electron. Eng., Vol. 46(1976), p. 421-428.
- (21) Prasad, S.C. and Y.K. Yadav
THE TRANSFER FUNCTION SYNTHESIS OF LC LADDER NETWORKS.
Radio & Electron. Eng., Vol. 47(1977), p. 274-276.

Bijlage I : Impedantiefuncties tot en met de 5^e orde

In deze bijlage worden alle mogelijke impedantie - functies tot en met de 5^e orde , die een oplossing van het probleem , zoals dat in hoofdstuk 2 geformuleerd is , weergegeven.

Bij iedere impedantiefunctie is een schakeling gegeven die deze functie kan realiseren. Deze schakelingen zijn volgens het klasseringsstelsel van hoofdstuk 4 ingedeeld.

In deze bijlage heb ik me beperkt tot het geven van slechts één schakeling bij iedere impedantie - functie. In sommige gevallen bestaan er echter meerdere schakelingen die dezelfde functie kunnen realiseren. Deze worden hier niet vermeld , maar kan men met behulp van de transformatie uit hoofdstuk 4 afleiden.

De impedantiefuncties hebben altijd de structuur van formule (I,1).

$$(I,1) \quad z(s) = k \cdot \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}$$

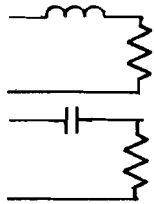
De term b_0 is aan deze impedantiefunctie toegevoegd omdat b_0 ook 0 kan zijn. Is b_0 ongelijk aan nul dan kan men door $k' = k/b_0$ te stellen de noemer - polynoom $N(s)$ normeren.

Op de volgende bladzijden wordt van iedere impedantie - functie de waarden van b_0 tot en met b_n , uitgedrukt in de coëfficiënten a_1 tot ~~es~~ met a_n gegeven. Soms zijn deze niet eenduidig. In dat geval volgen de coëfficiënten uit een kwadratische vergelijking. Deze is ook vermeld.

De impedantiefuncties zijn allemaal in het computer - programma opgenomen.

n = 1

klasse 0



$$b_0 = 0$$

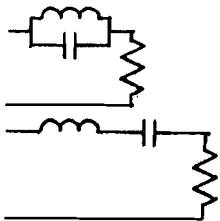
$$b_1 = a_1$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 0$$

n = 2

klasse 0



$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 0$$

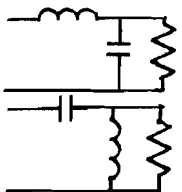
$$b_2 = a_2$$

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = 0$$

klasse 1



$$b_0 = 0$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = a_1$$

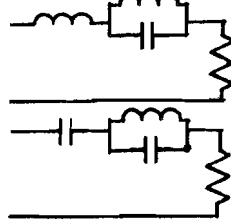
$$b_0 = a_1$$

$$b_1 = a_2$$

$$b_2 = 0$$

n = 3

klasse 0



$$b_0 = 0$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = a_3$$

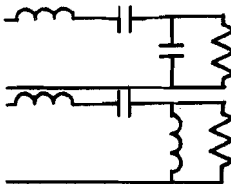
$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = a_2$$

$$b_3 = 0$$

klasse 1



$$b_0 = 0$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = a_1$$

$$b_3 = 0$$

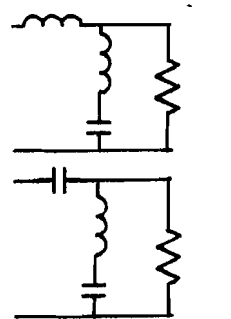
$$b_0 = 0$$

$$b_1 = a_2$$

$$b_2 = a_3$$

$$b_3 = 0$$

klasse 2



$$b_0 = 0$$

$$b_1 = a_2$$

$$b_2 = a_1 a_2 - a_3$$

$$b_3 = a_2^2$$

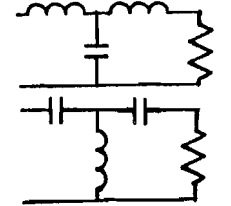
$$b_0 = a_1^2$$

$$b_1 = a_1 a_2 - a_3$$

$$b_2 = a_1 a_3$$

$$b_3 = 0$$

klasse 3



$$b_0 = 0$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_1^2$$

$$b_3 = a_1 a_2 - a_3$$

$$b_0 = a_1 a_2 - a_3$$

$$b_1 = a_2^2$$

$$b_2 = a_2 a_3$$

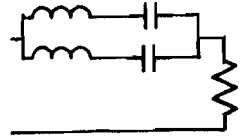
$$b_3 = 0$$

n = 4

klasse 0



$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= a_2 \\ b_3 &= 0 \\ b_4 &= a_4 \end{aligned}$$

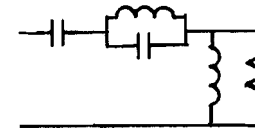


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= a_3 \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 1

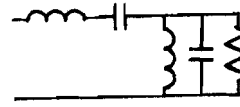


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 a_2 - a_3 \\ b_2 &= a_1 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_3 &= a_1 a_4 \\ b_4 &= a_1^2 a_4 \end{aligned}$$

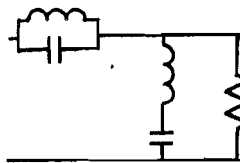


$$\begin{aligned} b_0 &= a_3^2 \\ b_1 &= a_3 a_4 \\ b_2 &= a_3 \cdot (a_2 a_3 - a_1 a_4) \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_2 a_3 - a_1 a_4) \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

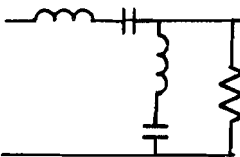
klasse 2



$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_3 \\ b_2 &= a_1 a_3 \\ b_3 &= a_1 a_4 \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

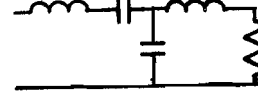


$$\begin{aligned} b_0 &= a_1^2 a_3^2 \\ b_1 &= a_3 \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) \\ b_2 &= a_1 a_3 \cdot (a_1^2 a_4 + a_3^2) \\ b_3 &= a_1 a_4 \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) \\ b_4 &= a_1^2 a_3^2 a_4 \end{aligned}$$

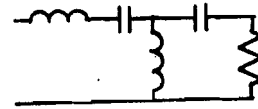


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_2 x - 2a_4 \\ b_2 &= (a_1 a_2 - a_3)x - a_1 a_4 \\ b_3 &= x \cdot (a_2 x - 2a_4) \\ b_4 &= 0 \\ x^2 - a_2 x + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 3

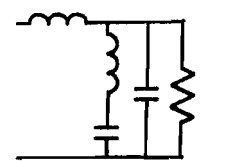


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_1^2 \\ b_3 &= a_1 a_2 - a_3 \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

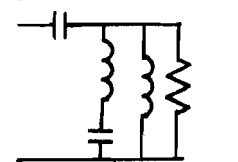


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_2 a_3 - a_1 a_4 \\ b_2 &= a_3^2 \\ b_3 &= a_3 a_4 \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 4

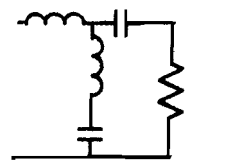


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_3 \\ b_2 &= a_1 a_3 \\ b_3 &= a_2 a_3 - a_1 a_4 \\ b_4 &= a_3^2 \end{aligned}$$

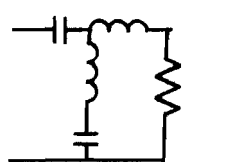


$$\begin{aligned} b_0 &= a_1^2 \\ b_1 &= a_1 a_2 - a_3 \\ b_2 &= a_1 a_3 \\ b_3 &= a_1 a_4 \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 5

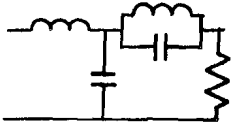


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_2 a_3 - a_1 a_4 \\ b_2 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \\ b_3 &= a_2^2 a_3 - a_1 a_2 a_4 - a_3 a_4 \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

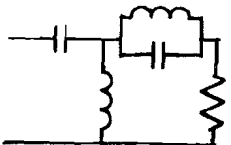


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 a_2^2 - a_2 a_3 - a_1 a_4 \\ b_2 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 6

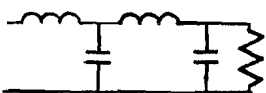


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 2x - a_2 \\ b_2 &= a_1 \cdot (2x - a_2) \\ b_3 &= x \cdot (2x - a_2) \\ b_4 &= a_3 x - a_1 a_4 \\ x^2 - a_2 x + a_4 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b_0 &= (a_2 a_3 - a_1 a_4) \cdot x - a_3 a_4 \\ b_1 &= a_4 \cdot (a_2 x - 2a_4) \\ b_2 &= a_3 x \cdot (a_2 x - 2a_4) \\ b_3 &= a_4 x \cdot (a_2 x - 2a_4) \\ b_4 &= 0 \\ x^2 - a_2 x + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 7



$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 a_2 - a_3 \\ b_2 &= a_1 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_3 &= a_1 a_2^2 - a_2 a_3 - a_1 a_4 \\ b_4 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \end{aligned}$$



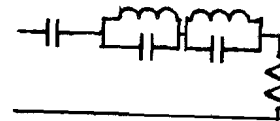
$$\begin{aligned} b_0 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \\ b_1 &= a_2^2 a_3 - a_1 a_2 a_4 - a_3 a_4 \\ b_2 &= a_3 \cdot (a_2 a_3 - a_1 a_4) \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_2 a_3 - a_1 a_4) \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

n = 5

klasse 0

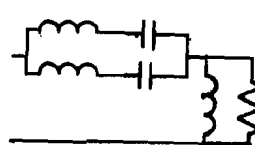


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= a_3 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= a_5 \end{aligned}$$

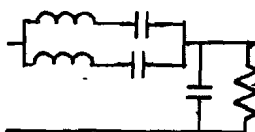


$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= a_2 \\ b_3 &= 0 \\ b_4 &= a_4 \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 1

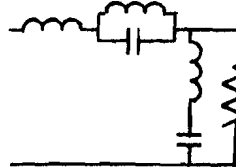


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_4 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_2 &= a_5 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_4 &= a_5 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$



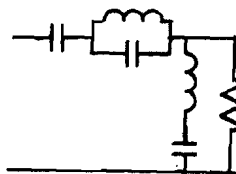
$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 a_2 - a_3 \\ b_2 &= a_1 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_3 &= a_1 a_4 - a_5 \\ b_4 &= a_1 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 2



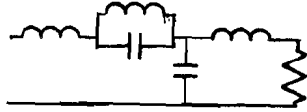
$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= x \\ b_2 &= (a_1 a_4 - a_5 x) \cdot x / a_4 \\ b_3 &= (a_1 a_4 - a_5 x) \cdot (2a_5 x - a_1 a_4 - a_5) / (a_5 \cdot (a_2 a_5 x + a_3 a_4 - a_2 a_5 - a_1 a_4)) \\ b_4 &= (a_1 a_4 - a_5 x) \cdot (2a_5 x - a_1 a_4 - a_5) / (a_2 a_5 x + a_3 a_4 - a_2 a_5 - a_1 a_4) \\ b_5 &= a_4 \end{aligned}$$

$$(a_2^2 - 4a_4) a_5^2 x^2 - (a_1 a_4 + a_5) \cdot (a_2^2 - 4a_4) a_5 x + a_4 \cdot (a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 + a_2 a_3 a_5 - a_1 a_4^2 - 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2) = 0$$

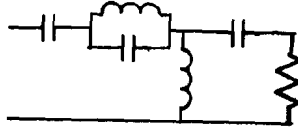


$$\begin{aligned} b_0 &= (a_3 - 2a_5 x) \cdot a_1 \\ b_1 &= (a_1 a_2 - a_3 - (a_1 a_4 - a_5 x)) / x \\ b_2 &= ((a_3^3 - a_1^2 a_3 a_4 - a_1^2 a_2 a_5 - 2a_1 a_3 a_5) + a_5 x (a_1 a_5 - a_3^2 - a_1^2 a_4)) / (a_3 - a_5 x) \\ b_3 &= (a_1 a_2 - a_3 - (a_1 a_4 - a_5 x)) \cdot (a_1 a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_1 a_2 a_5 - a_5 x (a_1 a_4 + a_5)) / (a_1 (a_3 - 2a_5 x)) \\ b_4 &= a_1 a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_1 a_2 a_5 - a_5 x (a_1 a_4 + a_5) \\ b_5 &= 0 \\ a_5 x^2 - a_3 x + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 3

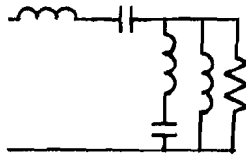


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5) \\ b_2 &= a_1^2 (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5) \\ b_3 &= (a_1 a_2 - a_3) \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2a_1 a_5) \\ b_4 &= a_1^2 a_5 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_5 &= (a_1 a_2 - a_3)^2 \end{aligned}$$

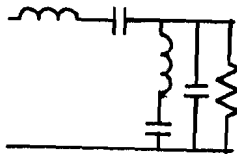


$$\begin{aligned} b_0 &= (a_3 a_4 - a_2 a_5)^2 \\ b_1 &= a_4^2 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_2 &= (a_3 a_4 - a_2 a_5) \cdot (a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + 2a_4 a_5) \\ b_3 &= a_4^2 \cdot (a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5) \\ b_4 &= a_4 a_5 (a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 4

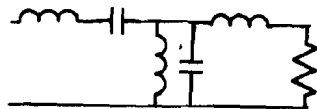


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_4 \cdot (2x - a_2) \\ b_2 &= (a_1 a_4 + a_5) \cdot x - a_1 a_4 a_4 + a_3 a_4 - a_2 a_5 \\ b_3 &= a_4 \cdot (2x - a_2) \cdot (a_2 - x) \\ b_4 &= a_5 \cdot (2x - a_2) \cdot (a_2 - x) \\ b_5 &= 0 \\ x^2 - a_2 x + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

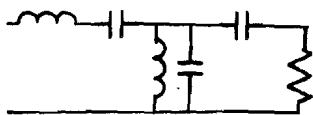


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= x \cdot (a_3 - 2a_1 x) \\ b_2 &= a_1 \cdot x \cdot (a_3 - 2a_1 x) \\ b_3 &= x \cdot (a_2 a_3 - a_1 a_4 - a_5 - a_1 a_2 x) \\ b_4 &= a_5 \cdot (a_3 - 2a_1 x) \\ b_5 &= 0 \\ a_1 x^2 - a_3 x + a_5 &= 0 \end{aligned}$$

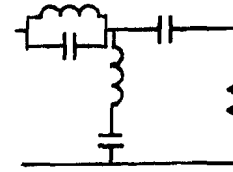
klasse 5



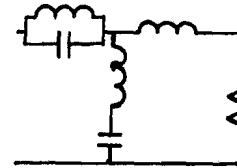
$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_3 a_4 - a_2 a_5 \\ b_2 &= a_1 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_4 &= a_5 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 a_4 - a_5 \\ b_2 &= a_1 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_4 &= a_5 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

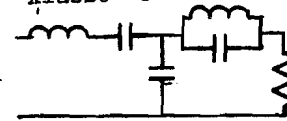


$$\begin{aligned} x &= a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 + 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2 \\ b_0 &= (a_1 a_4 - a_5)^2 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5)^2 \\ b_1 &= a_4^2 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) x \\ b_2 &= a_4 (a_3 a_4 - a_2 a_5) \cdot (a_1 a_4 - a_5)^2 \cdot (a_1 a_4 - 2a_5) + (a_3 a_4 - a_2 a_5)^2 \cdot (a_1 a_3 a_4^2 - 2a_3 a_4 a_5 + a_2 a_5^2) \\ b_3 &= a_4^3 \cdot (a_1 a_4 - a_5) x \\ b_4 &= a_4^2 a_5 \cdot (a_1 a_4 - a_5) x + a_4 (a_1 a_4 - a_5)^2 (a_3 a_4 - a_2 a_5)^2 \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

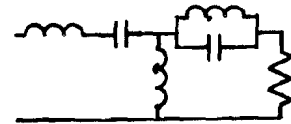


$$\begin{aligned} x &= \frac{(a_1 a_2 (a_1 a_2 - a_3) \cdot (a_1 a_4 - a_5) - (a_1 a_2 - a_3)^2 - a_1 a_5 (a_1 a_4 - a_5)^2}{(a_1 a_2 - a_3)^2 (a_1 a_4 - a_5)} \\ b_0 &= 0 \\ b_1 &= x \\ b_2 &= a_1 \cdot (x - 1) \\ b_3 &= ((a_1 a_4 - a_5)^2 a_1 a_5 + (a_1 a_2 - a_3)^2 x) / ((a_1 a_2 - a_3) \cdot (a_1 a_4 - a_5)) \\ b_4 &= ((a_1 a_2 - a_3) \cdot (x - 1)) / (a_1 a_4 - a_5) \\ b_5 &= a_5 / a_1 \end{aligned}$$

klasse 6



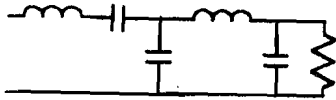
$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 2x - a_2 \\ b_2 &= a_1 \cdot (2x - a_2) \\ b_3 &= x \cdot (2x - a_2) \\ b_4 &= a_3 x - a_1 a_4 - a_5 \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$



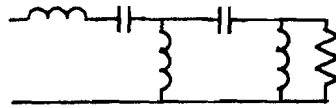
$$\begin{aligned} x^2 - a_2 x + a_4 &= 0 \\ b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_5 \cdot (a_2 x - 2a_5) \\ b_2 &= x \cdot ((a_1 a_4 + a_5) \cdot x - a_3 a_5) \\ b_3 &= a_4 \cdot x \cdot (a_2 x - 2a_5) \\ b_4 &= a_5 \cdot x \cdot (a_2 x - 2a_5) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 - 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2) x^2 + \\ &- a_2 a_5 \cdot (a_3^2 - 4a_1 a_5) x + a_5^2 \cdot (a_3^2 - 4a_1 a_5) = 0 \end{aligned}$$

klasse 7

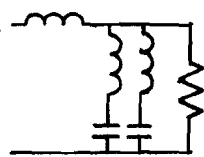


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 a_2 - a_3 \\ b_2 &= a_1 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_3 &= a_1 a_2^2 - a_2 a_3 - a_1 a_4 + a_5 \\ b_4 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5 \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

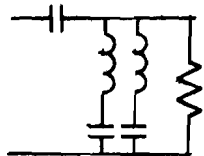


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5 \\ b_2 &= a_3^2 a_4 - a_2 a_3 a_5 - a_1 a_4 a_5 + a_5^2 \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_4 &= a_5 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 8

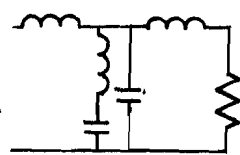


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_4 \\ b_2 &= a_1 a_4 - a_5 \\ b_3 &= a_2 a_4 \\ b_4 &= a_3 a_4 - a_2 a_5 \\ b_5 &= a_4^2 \end{aligned}$$

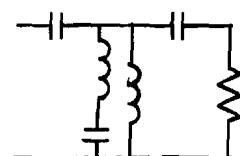


$$\begin{aligned} b_0 &= a_1^2 \\ b_1 &= a_1 a_2 - a_3 \\ b_2 &= a_1 a_3 \\ b_3 &= a_1 a_4 - a_5 \\ b_4 &= a_1 a_5 \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

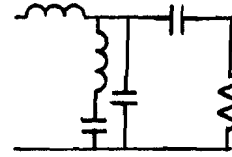
klasse 9



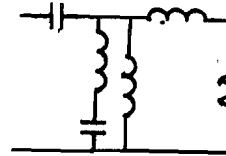
$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_2 &= a_1^2 (a_1 a_4 - a_5) \\ b_3 &= a_1^2 a_2 a_4 - 2a_1 a_2 a_5 + a_3 a_5 \\ b_4 &= a_1^2 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_5 &= (a_1 a_4 - a_5)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b_0 &= (a_1 a_4 - a_5)^2 \\ b_1 &= a_4^2 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_2 &= a_1 a_3 a_4^2 - 2a_3 a_4 a_5 + a_2 a_5^2 \\ b_3 &= a_4^2 \cdot (a_1 a_4 - a_5) \\ b_4 &= a_4 a_5 (a_1 a_4 - a_5) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

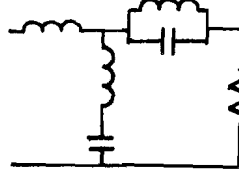


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_3 a_4 - a_2 a_5 \\ b_2 &= a_1 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\ b_3 &= a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5 \\ b_4 &= a_3^2 a_4 - a_2 a_3 a_5 - a_1 a_4 a_5 + a_5^2 \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

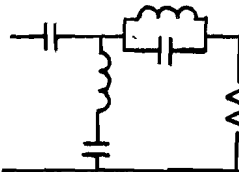


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_1 a_2^2 - a_2 a_3 - a_1 a_4 + a_5 \\ b_2 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5 \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_4 &= a_5 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

klasse 10



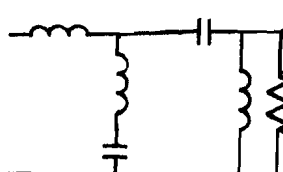
$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= x \cdot (a_1 a_4^2 x - a_4 a_5 x - a_1 a_4 a_5 - a_5^2) \\ b_2 &= a_1 x \cdot (a_1 a_4^2 x - a_4 a_5 x - a_1 a_4 a_5 - a_5^2) \\ b_3 &= a_1 a_2 a_4^2 x^2 - a_3 a_4^2 x^2 - a_1 a_2 a_4 a_5 x + 2a_3 a_4 a_5 x - 2a_2 a_5^2 x - a_3 a_5^2 \\ b_4 &= a_1 a_2 a_4 a_5 x^2 - a_3 a_4 a_5 x^2 - a_2 a_5^2 x + a_1 a_3 a_4 a_5 x - a_1 a_2 a_5^2 x - a_1 a_3 a_5^2 \\ b_5 &= a_5 \cdot (a_1 a_4^2 x - a_4 a_5 x - a_1 a_4 a_5 - a_5^2) \\ \det 4 &= a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 + 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2 \\ a_4^2 \det 4 \cdot x^2 - (2a_4 a_5 \det 4 + a_5^2 (a_1 a_4 - a_5) (a_2^2 - 4a_4)) x + (a_5^2 (\det 4 + a_1 a_5 (a_2^2 - 4a_4))) \end{aligned}$$



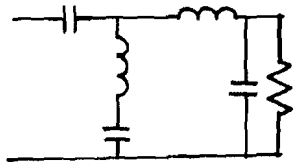
$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= x \cdot (a_3 x - a_2) \cdot (a_4 - a_5 x) / ((a_1 a_4 + a_5) x - 2a_4) \\ b_2 &= x \cdot (a_3 - (a_5 \cdot (a_1 x - 1) \cdot (a_3 x - a_2))) / ((a_1 a_4 + a_5) x - 2a_4) \\ b_3 &= x \cdot (a_4 - a_5 x) \\ b_4 &= a_5 x \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 - 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2) \cdot x^2 - (a_1 a_4 + a_5) \cdot (a_2^2 - 4a_4) x + a_4 (a_2^2 - 4a_4) = 0$$

klasse 11

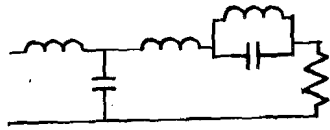


$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_4 \cdot (a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5) \\ b_2 &= a_1 a_2 a_3 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_4 a_5 - a_1^2 a_4^3 + a_1 a_4^2 a_5 - a_3^2 a_4^2 + 2a_2 a_3 a_4 a_5 - a_2^2 a_5^2 \\ b_3 &= a_4 \cdot (a_2^2 a_3 a_4 - a_2^3 a_5 - a_1 a_2 a_4^2 + 2a_2 a_4 a_5 - a_3 a_4^2) \\ b_4 &= a_5 \cdot (a_2^2 a_3 a_4 - a_2^3 a_5 - a_1 a_2 a_4^2 + 2a_2 a_4 a_5 - a_3 a_4^2) \\ b_5 &= 0 \end{aligned}$$

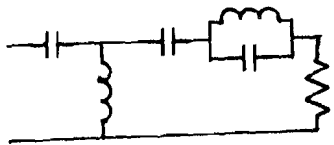


$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= 1 \\
 b_2 &= a_1 \\
 b_3 &= (a_1 a_2 - a_3)^2 (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) \det 3 / (a_1^2 \cdot (a_1 a_2 \det 4 + \det 3^2)) \\
 b_4 &= a_5 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \det 3 / (a_1 \cdot \det 4) \\
 b_5 &= 0 \\
 \det 3 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5 \\
 \det 4 &= a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 + 2 a_1 a_4 a_5 - a_5^2
 \end{aligned}$$

klasse 12



$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= a_1 x \cdot (2a_1 - a_3 x) \\
 b_2 &= a_1^2 x (2a_1 - a_3 x) \\
 b_3 &= (2a_1 - a_3 x) \cdot ((a_1 a_2 - a_3) x + a_5) \\
 b_4 &= a_1 a_5 (2a_1 - a_3 x) \\
 b_5 &= a_1 x \cdot (a_1 a_4 - a_5 - (a_3 a_4 - a_2 a_5) \cdot x)
 \end{aligned}$$

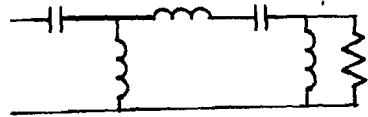


$$\begin{aligned}
 a_1 x^2 - a_3 x + a_5 &= 0 \\
 b_0 &= (a_1 a_2 - a_3) \cdot x - a_1 a_4 + a_5 \\
 b_1 &= (a_2^2 - 2a_4) \cdot x - a_2 a_4 \\
 b_2 &= (a_2 x - 2a_4) \cdot (a_3 x - a_5) / x \\
 b_3 &= a_4 \cdot (a_2 x - 2a_4) \\
 b_4 &= a_5 \cdot (a_2 x - 2a_4) \\
 b_5 &= 0 \\
 x^2 - a_2 x + a_4 &= 0
 \end{aligned}$$

klasse 13

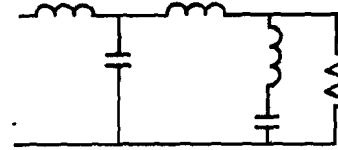


$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= a_1 a_2 - a_3 \\
 b_2 &= a_1 \cdot (a_1 a_2 - a_3) \\
 b_3 &= a_1 a_2^2 - a_2 a_3 - a_1 a_4 + a_5 \\
 b_4 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5 \\
 b_5 &= 0
 \end{aligned}$$

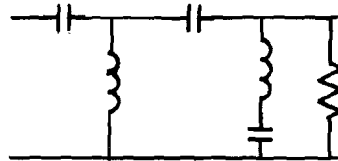


$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5 \\
 b_2 &= a_3^2 a_4 - a_2 a_3 a_5 - a_1 a_4 a_5 + a_5^2 \\
 b_3 &= a_4 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\
 b_4 &= a_5 \cdot (a_3 a_4 - a_2 a_5) \\
 b_5 &= 0
 \end{aligned}$$

klasse 14



$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= 1 \\
 b_2 &= a_1 - x \\
 b_3 &= a_2 - ((a_4 x - a_5) \cdot (a_2 x - a_3)) / ((a_1 a_4 + a_5) x - 2a_1 a_5) \\
 b_4 &= a_5 \cdot (a_2 x - a_3) \cdot (a_1 - x) / ((a_1 a_4 + a_5) x - 2a_1 a_5) \\
 b_5 &= a_5 / x \\
 (a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 - 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2) \cdot x^2 + \\
 - (a_1 a_4 + a_5) \cdot (a_3^2 - 4a_1 a_5) x + a_1 a_5 (a_3^2 - 4a_1 a_5) &= 0
 \end{aligned}$$

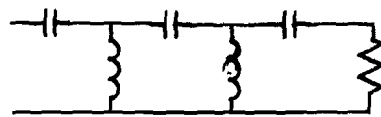


$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 \\
 b_1 &= \frac{(a_4 - a_5 x) \cdot (a_3 x - a_2)}{2a_1 a_5 x - a_1 a_4 - a_5} + \frac{(2a_1 a_5 x - a_1 a_4 - a_5) x}{(x-1) \cdot (a_3 x - a_2)} \\
 b_2 &= \frac{a_5 \cdot (a_3 x - a_2)}{2a_1 a_5 x - a_1 a_4 - a_5} + \frac{(2a_1 a_5 x - a_1 a_4 - a_5) x}{(a_1 x - 1) \cdot (a_3 x - a_2)} \\
 b_3 &= a_4 x / (a_1 x - 1) \\
 b_4 &= a_5 x / (a_1 x - 1) \\
 b_5 &= 0 \\
 a_1 a_5 (a_3^2 - 4a_1 a_5) x^2 - (a_1 a_4 + a_5) \cdot (a_3^2 - 4a_1 a_5) x + \\
 + a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 - 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2 &= 0
 \end{aligned}$$

klasse 15



$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5 \\
 b_2 &= a_1 \cdot (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5) \\
 b_3 &= a_1 a_2^2 a_3 - a_2 a_3^2 - a_1^2 a_2 a_4 + a_3 a_5 \\
 b_4 &= a_1 a_2 a_3^2 - a_3^3 - a_1^2 a_3 a_4 + 2a_1 a_3 a_5 - a_1^2 a_5^2 \\
 b_5 &= a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 + 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 - a_1^2 a_4^2 + 2a_1 a_4 a_5 - a_5^2 \\
 b_1 &= a_2^2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4^2 - a_2^3 a_5 - a_1 a_2^2 a_4 + 2a_2 a_4 a_5 \\
 b_2 &= a_2 a_3^2 a_4 - a_2^2 a_3 a_5 - a_1 a_3 a_4^2 + a_2 a_5^2 \\
 b_3 &= a_4 \cdot (a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5) \\
 b_4 &= a_5 \cdot (a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_5 - a_1 a_4^2 + a_4 a_5) \\
 b_5 &= 0
 \end{aligned}$$