

**MASTER**

**Stabiliteit van alveolen en de elasticiteit van monolagen**

Olijslager, J.

*Award date:*  
1976

[Link to publication](#)

**Disclaimer**

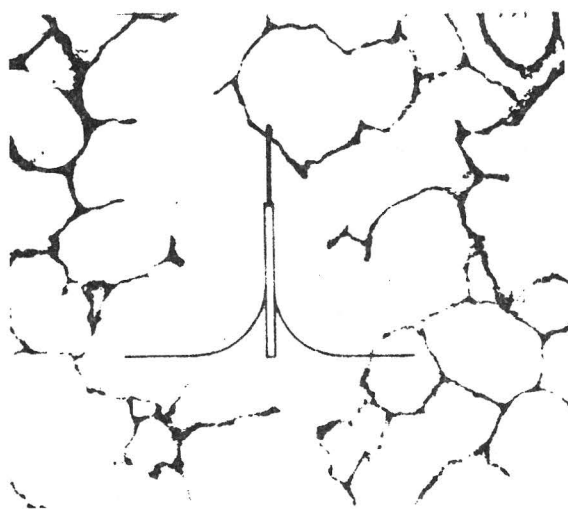
This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

stabiliteit  
van alveolen  
en de elasticiteit  
van membranen



afstudeerverslag j. olijslager  
t.h.e. afd. techn. natk. nov. '28

dr. j. a. pedulis

f. n. wildebeer - vennema, arts

ir. a. j. krüger

## SAMENVATTING.

Met behulp van een eenvoudig model van een alveolus wordt het belang van oppervlakteactieve stoffen (surfactant) voor de alveolaire stabiliteit aangetoond. Er wordt uit dit model een stabiliteitsvoorwaarde afgeleid voor één alveolus. Aan de hand van een voorbeeld wordt het model op zijn bruikbaarheid getoetst.

Voor een nader onderzoek naar het oppervlakte actieve gedrag van het surfactant, anders dan met een Langmuir trog, is een opstelling gebouwd waarmee de zogenaamde oppervlakte elasticiteit wordt gemeten. Omdat deze elasticiteit in het algemeen een complexe grootte is worden hiervan zowel de fase als de amplitude bepaald. De meetmethode is gebaseerd op het opwekken van longitudinale golven in het vloeistofoppervlak van een langwerpige trog. Uit de te meten veranderingen in de oppervlaktespanning op verschillende plaatsen in de trog kunnen de elastiese eigenschappen van de betreffende monolaag worden berekend.

Het bleek noodzakelijk om, voor de te meten elasticiteit van de monolagen van onze interesse, de reeds bestaande lopendegolf theorie uit te breiden met een staandegolf theorie. De meetmethode en de opstelling zijn hieraan aangepast.

## INHOUDSOPGAVE.

Samenvatting.

Inhoudsopgave.

Nomenclatuur.

Literatuur.

blz.

### Inleiding.

1

#### 1 De stabiliteit van alveolen en monolagen.

3

##### 1.1 Inleiding.

3

##### 1.2.1 De alveolus als funktionele eenheid.

3

##### 1.2.2 Stabilisatie.

5

##### 1.3.1 De stabilisatie van een model van een alveolus.

9

##### 1.3.2 Het model.

10

##### 1.3.3 De energie.

10

##### 1.3.4 Evenwicht.

12

##### 1.3.5 Stabiliteit.

13

##### 1.4.1 p-V curves.

14

##### 1.4.2 De berekende curves.

15

##### 1.5 Konklusie.

16

Appendix 1.

19

Appendix 2.

21

#### 2 Hydrodynamische theorie voor longitudinale golfbewegingen.

23

##### 2.1 Inleiding.

23

##### 2.2 De golfvergelijking.

23

##### 2.3 Niet-lineaire termen.

24

##### 2.4 Potentiaalfunkties.

25

##### 2.5 De oplossing van het stelsel.

27

##### 2.6 De randvoorwaarden.

28

#### 3 Longitudinale golven in een elasties oppervlak.

31

##### 3.1 Inleiding.

31

##### 3.2 De differentiaal vergelijkingen.

31

##### 3.3 De golfoplossing.

32

##### 3.4 De complexe grootheden $\epsilon$ en $\mu$

33

##### 3.5 De lopendegolf oplossing.

34



	blz.
3.6 De staandegolf oplossing.	35
3.7 Vergelijking met hoofdstuk 2.	37
4 <u>De meetopstelling.</u>	39
4.1 Inleiding.	39
4.2 De opstelling.	39
4.3 Het Wilhelmyplaatje.	41
4.4 De krachtmeting.	45
4.5 De d.c. voorversterker.	46
4.6 De sinus pomp.	48
4.7 De trog.	48
4.7* De monolagen.	50
4.8 Schoonmaken van de apparatuur.	51
4.9 Begrenzungen aan het meetbereik.	51
4.10 IJking van de opstelling.	52
4.11 Verwerking van de meetgegevens.	53
5 <u>De meetmethode.</u>	55
5.1 Inleiding.	55
5.2 Aanpassing van de theorie aan de meetmethode.	55
5.3 Een meting aan cholesterol.	57
5.4 Resultaten.	63
5.5 Konklusie.	64

NOMENCLATUUR.

a - versnelling	$m \text{ sec}^{-2}$
b - lengte	m
c - veerconstante	$N \text{ m}^{-1}$
c - konstante	
d - dikte	m
d - diepte	m
g - versnelling van de zwaartekracht	$m \text{ sec}^{-2}$
h - lengte	m
j - $\sqrt{-1}$	
k - golfgetal (komplex)	$\text{m}^{-1}$
l - lengte	m
m - golfgetal (komplex)	$\text{m}^{-1}$
m - massa	kg
n - integer	
p - druk	$N \text{ m}^{-2}$
s - verhouding	
t - tijdvariabele	sec
u - uitwijking	m
v - snelheid	$m \text{ sec}^{-1}$
x - plaatsvariabele	m
y - plaatsvariabele	m
z - plaatsvariabele	m
A - oppervlak	$\text{m}^2$
A - barrière amplitude	m
C - condensator	
E - energie	N m
E - voedingspanning	
F - kracht	N
L - karakteristieke lengte	m
O - omtrek	m
P - potentiometer	
R - weerstand	
1/R- kromming van een oppervlak	$\text{m}^{-1}$
S - weefselspanning	$N \text{ m}^{-1}$
T - trillingstijd	sec
V - volume	$\text{m}^3$

V - karakteristieke snelheid	$m \text{ sec}^{-1}$
W - arbeid	$N \text{ m}$
$\beta$ - dempingkoëfficient	$m^{-1}$
$\delta$ - fasehoek van de oppervlakte soortelijke massa	radialen
$\epsilon$ - oppervlakte elasticiteitsmodulus	$N \text{ m}^{-1}$
$\eta$ - viskositeit	$N \text{ m}^{-2} \text{ sec}$
$\theta$ - fasehoek van de oppervlakte elasticiteitsmodulus	radialen
$\eta$ - golfgetal (reëel)	$m^{-1}$
$\lambda$ - golflengte	$m$
$\mu$ - oppervlakte soortelijke massa	$\text{kg} \text{ m}^{-2}$
$\mu$ - dwarskontractie	
$\pi$ - oppervlakte druk	$N \text{ m}^{-1}$
$\pi$ - konstante (3,1415)	
$\rho$ - soortelijk gewicht	$\text{kg} \text{ m}^{-3}$
$\sigma$ - oppervlaktetenspanning	$N \text{ m}^{-1}$
$\sigma$ - spanning	$N \text{ m}^{-1}$
$\varphi$ - skalarpotentiaal	$\text{m}^2 \text{ sec}^{-1}$
$\varphi$ - fasehoek	radialen
$\psi$ - vektorpotentiaal	$\text{m}^2 \text{ sec}^{-1}$
$\omega$ - hoekfrequentie	$\text{sec}^{-1}$
$\phi$ - fase	radialen

## LITERATUUR.

### Hoofdstuk 1:

- 1 - J. Mead  
a model of pulmonary elasticity  
Journal of Applied Physiology, Vol 28, no 5, (1970).
- 2 - E.R. Weibel  
morphometry of the human lung  
Berlin, Springer (1963).
- 3 - J. Hildebrandt  
stress-strain relations of tissue sheets undergoing uniform  
2-dimensional stress  
Journal of Applied Physiology, Vol 27, no 5, (1969).
- 4 - H. Fukaya  
mechanical properties of alveolar walls  
Journal of Applied Physiology, Vol 27, no 6, (1968).
- 5 - Y.C.B. Fung  
elasticity of soft tissue in simple elongation  
American Journal of Physiology, 213, p 1532-1544, (1967).

### Hoofdstuk 1 algemeen:

- C. Nagaishi  
functional anatomy and histology of the lung  
University Park Press, London.
- Ruch and Patton  
physiology and biophysics  
W.B. Saunders Company, London (1965).
- K. von Neergaard  
neue Auffassung über eine Grundbegriff der Atemmechanik  
Zeitschrift ges. exp. Medicin, 66, p373-394, (1929).
- E.M. Scarpelli  
the surfactant system of the lung  
Lea&Febiger, Philadelphia (1968).

### Hoofdstuk 2:

- 1 - V. Levich  
the damping of waves by surface-active substances I  
Acta Physicochimica URSS, Vol 14, no 3, (1941).

- 2 - E.H. Lucassen-Reynders and J. Lucassen  
properties of capillary waves  
Advances in Colloid and Interface Science, 2, p 347-395, (1969).

Hoofdstuk 3:

- 1 -  
diktaat trillingen en golven  
THE.
- 2 - J. Lucassen and M. van den Tempel  
longitudinal waves on visco-elastic surfaces  
Journal of Colloid and Interface Science, 41, no 3, p 491-498,(1972).

Hoofdstuk 5:

- 1 - P. Joos  
the elasticity of insoluble monolayers.  
Berichte vom 6 Internationlen Kongress für grenzflächenaktive  
Stoffen, Carl Hanser Verlag, München, (1973).
- 2 - J. Lucassen and M. van den Tempel  
dynamic measurements of dilational properties of a liquid interface  
Chemical Engineering Science, Vol 27, p 1283- 1291, (1972).

## INLEIDING.

Dit afstudeerwerk is voortgekomen uit contacten met mevr. Wildeboer-Venema, arts, verbonden aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. Een deel van haar werk bestaat uit onderzoek naar de stoffen uit de zogenaamde "lining-layer" van de long. Dit onderzoek is hoofdzakelijk gericht op het oppervlakte actieve gedrag van deze stoffen (het surfactant) en gebeurt met behulp van een bijzondere uitvoering van de Langmuir-Wilhelmy trog. De stoffen, die in een monolaag op het vloeistofoppervlak worden gespreid, zijn afkomstig uit ammoniumvocht of uit longspoelvloeistof. Ook doet zij onderzoek met genoemde opstelling aan de zuivere stoffen, die het meest in het surfactant voorkomen: Lecithine en cholesterol.

Er rezen bij het onderzoek van mevr. Wildeboer-Venema vele problemen en vragen waarop zij als fysiologe geen antwoord kon vinden. Er is daarom besloten bij ir. Kruger een onderzoek te beginnen naar de oppervlakte actieve eigenschappen van stoffen uit het surfactant, om op een aantal fysiese vragen het antwoord te vinden.

Omdat analoge onderzoeken met Langmuir troggen, vanuit fysies oogpunt, minder bevredigende resultaten geven, is gekozen voor een methode ontwikkeld door het Unilever Research Laboratorium te Vlaardingen. Deze methode heeft haar nut voor het onderzoek aan monolagen reeds bewezen, wat onze keuze aanvaardbaar maakt. Het principe ervan is gebaseerd op het opwekken van longitudinale oppervlaktegolven in een langwerpige trog, waarna uit het verloop van de oppervlaktespanningsvariaties, als functie van de plaats in de trog, de elastiese eigenschappen van de monolaag worden berekend. Het grootste voordeel van dit onderzoek, vergeleken bij dat met een Langmuir trog, is dat een bijna volledige wiskundige beschrijving van de golfbewegingen in de trog mogelijk is.

Het is de bedoeling om met de bepaling van de fase en de amplitude van de oppervlakte elasticiteit structurele en tijdafhankelijke effecten in gemengde cholesterol-lecithine monolagen te bepalen. Dit moet gebeuren als functie van onder andere de oppervlakte druk, de golffrequentie, de temperatuur en natuurlijk van de verhouding tussen de cholesterol en lecithine concentraties.

Het bleek noodzakelijk om de reeds bestaande lopendegolf theorie uit te breiden met een staandegolf theorie. De longitudinale golven in

bepaalde monolagen bleken namelijk niet voldoende te worden gedempt over de lengte van de trog, om de invloed van de teruggekaatste golven te kunnen verwaarlozen.

In het eerste hoofdstuk van dit verslag wordt, aan de hand van een eenvoudig model van een alveolus, de functie van het surfactant beschreven. Ook wordt een voorwaarde afgeleid waaraan het oppervlakte-actieve gedrag van het surfactant moet voldoen wil het model stabiel zijn.

In het tweede en derde hoofdstuk wordt de theorie gegeven die nodig is voor de bepaling van de oppervlakte-elasticiteit.

Het vierde hoofdstuk is gewijd aan de meetopstelling; hoe deze functioneert, wat de beperkingen zijn, hoe alles wordt gereinigd, enzovoorts.

Het vijfde en laatste hoofdstuk geeft de meetmethode voor de bepaling van de fase en de amplitude van de oppervlakte-elasticiteit van een monolaag. Met behulp van één meting aan een cholesterol monolaag worden de opstelling en de meetmethode getoetst.

## 1 DE STABILITEIT VAN ALVEOLEN EN MONOLAGEN.

### 1.1 INLEIDING.

Dit hoofdstuk is bedoeld om het belang van een juiste werking van het longsurfactant aan te tonen.

Eerst wordt een beschrijving gegeven van een alveolus, hoe deze in het grotere verband past, en wat de fysiologische grootheden zijn die het alveolaire gedrag bepalen.

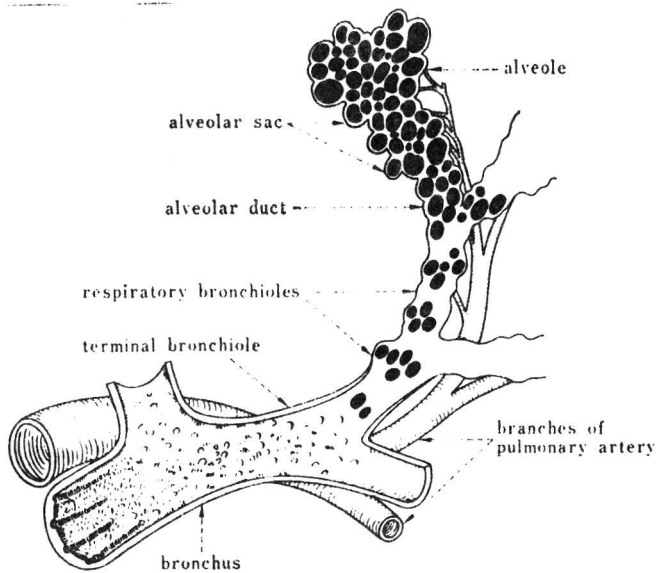
Vervolgens wordt aangetoond dat alveoli niet noodzakelijk stabiel zijn. Aan de hand van een model van een alveolus wordt een criterium afgeleid waaraan voldaan moet worden wil dit model wel stabiel zijn. Aan het einde van het hoofdstuk wordt met behulp van literatuur gegevens een druk-volume diagram voor het model berekend, waarna wordt gekeken of en wanneer er collaps zal optreden.

#### 1.2.1 DE ALVEOLUS ALS FUNKTIONELE EENHEID.

De alveoli staan via de luchtwegen in verbinding met de buitenlucht. Het deel van de luchtwegen dat door zijn bouw niet aan de snelle gasuitwisseling kan deelnemen, de anatomische dode ruimte, heeft voornamelijk een transport en verdeelfunctie. Deze luchtwegen zijn achtereenvolgens de luchtpijp (trachea), die zich opsplijt in de twee hoofdbronchi, waarna verdere opsplitsingen volgen in lobulaire bronchi, via segmentale bronchi tot de eind bronchioli. In deze luchtwegen vindt dus geen snelle gasuitwisseling plaats met het bloed (geleidende luchtwegen). In de luchtwegen perifeer van de eind bronchioli kan dit wel gebeuren en deze noemen we daarom de respiratoire luchtwegen. Dit zijn achtereenvolgens de respiratoire bronchioli, die zich splitsen in een aantal alveolaire kanaaltjes, welke elk weer bestaan uit of uitkomen in een aantal alveolaire zakjes. De alveolaire zakjes zijn door dunne wandjes (septa) verdeeld in kleine holtes, de alveoli (zie figuur 1.1). Ook vinden we op de respiratoire bronchioli enkele van deze alveoli, terwijl de alveolaire kanaaltjes er helemaal mee bedekt zijn. Omdat in de alveoli de uiteindelijke gasuitwisseling plaatsvindt is het belangrijk dat ze goed kunnen functioneren.

We hebben gezien dat de alveoli - bij een volwassene zijn dit er 250 tot 300 miljoen - zich bevinden aan het einde van een groot aantal, steeds fijnere, vertakkingen. Hoewel ze in open verbinding met de bui-



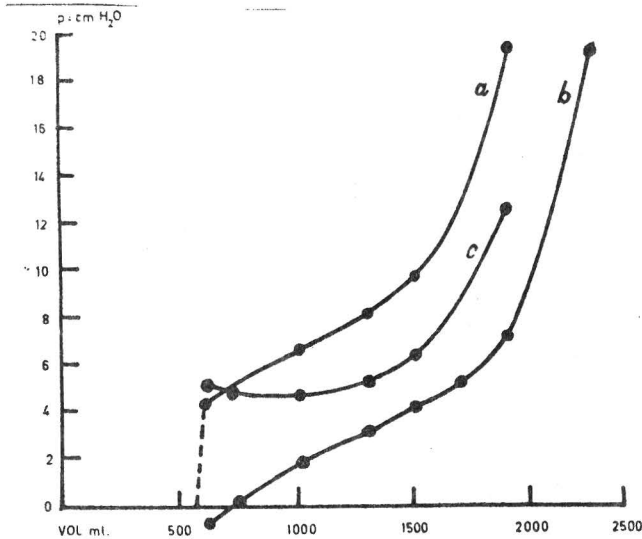


figuur 1.1

tenlucht staan, is er geen direkte (konvektieve) gasuitwisseling mee. De atmosfeer in de alveoli is onder andere hierdoor volledig verzadigd met waterdamp. Zelfs bevindt er zich een dun vochtlaagje op de alveolaire septa. In het lucht-vloeistof grensvlak van dit vochtlaagje treffen we de belangrijke monomoleculaire laag (monolaag) van oppervlakte-actieve stoffen aan; stoffen die we voortaan surfactant zullen noemen.

Von Neergaard heeft in 1929 als eerste het bestaan van het vochtlaagje aangetoond. Zijn idee was: Door een long volledig te vullen met vocht wordt de oppervlaktetension van het lucht-vloeistof grensvlak teniet gedaan, daar deze dan niet meer aanwezig is. Hij heeft om dit te bewijzen, eerst de statiese druk-volume curve gemeten van een met lucht gevulde long (a), en heeft daarna de long met vloeistof gevuld. De druk-volume curve van de met vloeistof gevulde long (b) bleek toen duidelijk af te wijken van die bij luchtvulling. Het verschil (c) tussen deze twee kurven was volgens hem de bijdrage van de oppervlaktetension (zie figuur 1.2).

We zullen nu eerst eens kijken of de waarden gevonden door von Neergaard enigszins overeenkomen met de waarden die we verwachten. We gaan uit van een alveolusdiameter die ligt tussen 150 en 300 mikrometer, en de oppervlaktetension van bloedplasma ( $50 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ ). We kunnen de bijdrage van de oppervlaktetension schatten met behulp van de formule van Laplace. De formule van Laplace zegt, dat voor het in stand houden van een bolvormig oppervlak met kromming  $1/R$  en oppervlaktetension  $\sigma$ , er een drukverschil over dit oppervlak moet staan gelijk aan:



Geïsoleerde linker varkenslong. Statische curven, d.w.z. na elke volumeverkleining werd gewacht met het meten van de druk tot deze een constante waarde had aangenomen. Begonnen werd bij maximumvolume om atelectase op te heffen; a. totale druk bij lucht-vulling; b. druk bij vocht-vulling (weefselcomponent); c. door aftrekking verkregen curve van de oppervlaktespanningscomponent. (Overgenomen uit: K. VAN NEERGAARD (1929) *Z. ges. exp. Med.* **66**, 373.)

figuur 1.2

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (1.1)$$

(in 1.3.4 wordt deze formule afgeleid).

We vinden met de gegeven waarden:

$$\Delta p_{\max} = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{75 \cdot 10^{-6}} = 1,33 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2} \approx 13 \text{ cm H}_2\text{O}$$

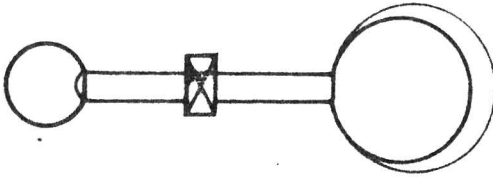
$$\Delta p_{\min} = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{150 \cdot 10^{-6}} = 0,67 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2} \approx 6,5 \text{ cm H}_2\text{O}$$

Het blijkt dat voor deze diameterwaarden van de alveoli de oppervlaktespanningscomponent overeenkomt met een gemiddeld drukverschil (d.w.z. gemiddeld over een aantal alveoli) dat tussen de 6,5 en 13 cm H<sub>2</sub>O ligt. Dit is dan een waarde, hoger dan de door von Neergaard gevonden minimale waarde. De verklaring voor dit verschil wordt gegeven door de aanwezigheid van een oppervlakte-actieve monolaag op het lucht-vloeistof grensvlak. Een dergelijke surfactantlaag heeft namelijk de eigenschap dat de oppervlaktespanning ervan afneemt, als het oppervlak kleiner wordt, en omgekeerd toeneemt als het oppervlak groter wordt.

Dit surfactant en de werking ervan is reeds door velen aangetoond. Er worden aan een monolaag van longsurfactant, bij kompressie, oppervlaktespanningswaarden gemeten van  $20 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$  ( $= 20 \text{ dyne cm}^{-1}$ ), en kleiner.

### 1.2.2 STABILISATIE.

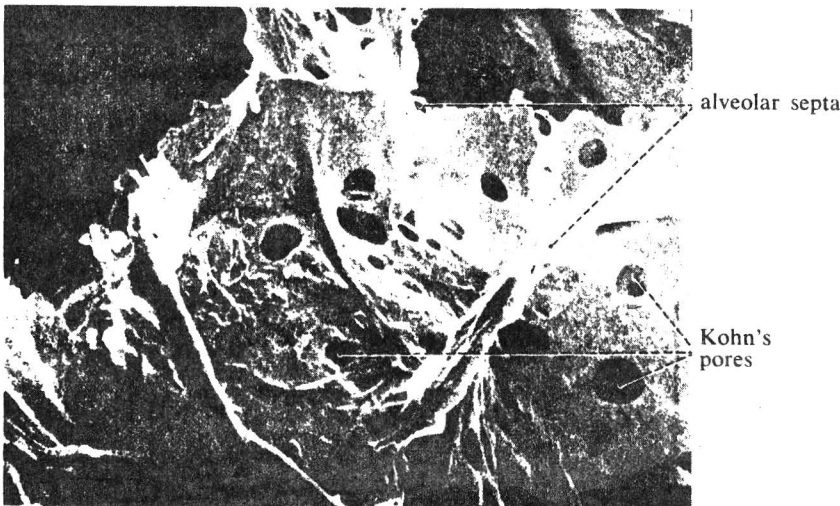
Met de voorafgaande verklaring voor de oppervlaktespanningscomponent zijn we er echter nog niet. Een probleem dat nu naar voren komt is dat van de stabilisatie van de alveoli. We doen het volgende proefje (zie figuur 1.3). We maken twee zeepbellen aan weerskanten van een pijpje.



figuur 1.3

Zodra we het kraantje openzetten zal de grote bel groter worden en de kleine zal bijna geheel verdwijnen. Toepassen van de formule van Laplace (1.1) maakt meteen duidelijk dat, als we in beide bellen een gelijke oppervlaktespanning veronderstellen, het verschil in kromming van beide bellen de luchtverplaatsing veroorzaakt.

We kunnen in de alveoli een dergelijk proces ook verwachten. Namelijk, de alveoli staan konstant met elkaar in open verbinding via de luchtwegen en via kleine gaatjes in de septa, de poriën van Kohn (zie figuur 1.4). Bovendien zijn de alveoli bedekt met een vochtlaagje. Het zou

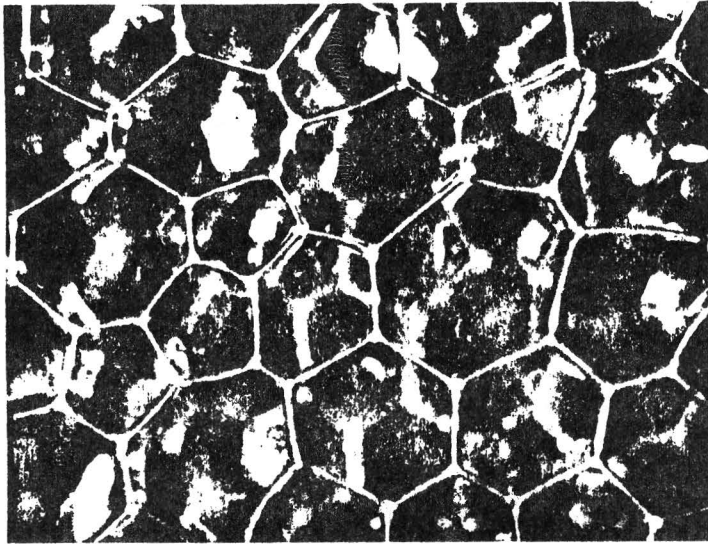


figuur 1.4

daarom niet vreemd zijn als we in de long een toestand zouden aantreffen waar alleen de grote alveoli geopend, en de kleine gecollabeerd zijn. Dat dit normaal in de long toch niet algemeen voorkomt wijst op de aanwezigheid van een aantal stabiliserende factoren.

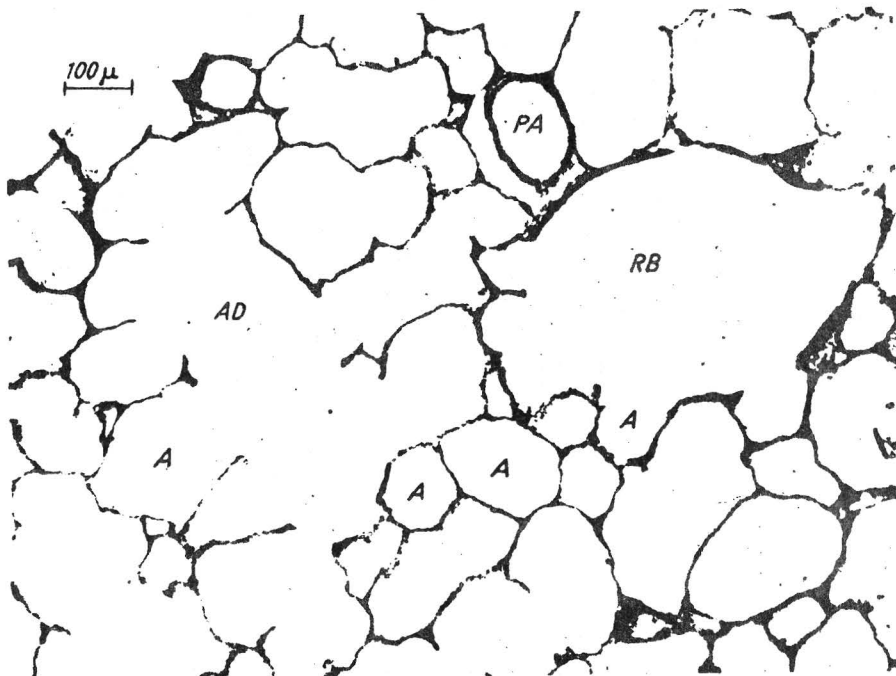
De meest voor de hand liggende faktor is de invloed van het weefsel. Hoe meer het weefsel is opgerekt, des te steviger is de structuur gevormd door het weefsel, de septa in feite. We kunnen deze structuur vergelijken met die van een zeepschuim (foam). De "bellen" in een foam zijn geen bolletjes maar veelvlakken (zie figuur 1.5). Ditzelfde geldt voor de alveoli. Zo ook is elk alveolair wandje tevens wand van een aangrenzende alveolus (zie figuur 1.6).

Weer teruggrijpend op figuur 1.2 zien we dat daar de invloed van de



figuur 1.5

weefselkomponent van dezelfde grootte orde is als de oppervlaktespanningskomponent. De weefselspanning zal dus wel stabiliserend kunnen werken, maar niet overheersen.



- A-alveolus
- AD-alveolair kanaal
- RB-respiratoire bronchiole
- PA-pulmonaire slagader

figuur 1.6

Een tweede faktor die stabiliserend kan zijn is de werking van het surfactant. We moeten hiervoor uitgaan van de eigenschap dat de oppervlaktespanning van een monolaag van longsurfactant oppervlakte afhankelijk is:

$$\sigma = \sigma(A) \quad (1.2)$$

Voor het geval van de twee zeepbellen aan het pijpje (zie figuur 1.3) zullen we een voorwaarde afleiden waarbij een monolaag stabiliserend werkt.

We gebruiken weer de formule van Laplace:

$$\Delta p = 2 \frac{\sigma(A)}{R} \quad (1.1)$$

Als voorwaarde voor stabilisatie nemen we (zie appendix 2):

$$\frac{\partial p}{\partial V} > 0 \quad (1.3)$$

dat wil zeggen, dat een kleine vergroting van het drukverschil tussen binnen- en buitekant van één belletje een vergroting van het volume moet geven. In (1.1) zien we dat bij een konstante oppervlaktespanning een vergroting van het drukverschil juist een verkleining in het volume zal geven.

Voor een bolvormig oppervlak is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial V} \rightsquigarrow \frac{\partial p}{\partial R} &= 2 \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\sigma(A)}{R} \right] \\ &= \frac{2}{R} \frac{\partial \sigma(A)}{\partial R} - \frac{2}{R^2} \sigma(A) > 0 \end{aligned}$$

ofwel:  $R \frac{\partial \sigma(A)}{\partial R} > \sigma(A).$  (1.4)

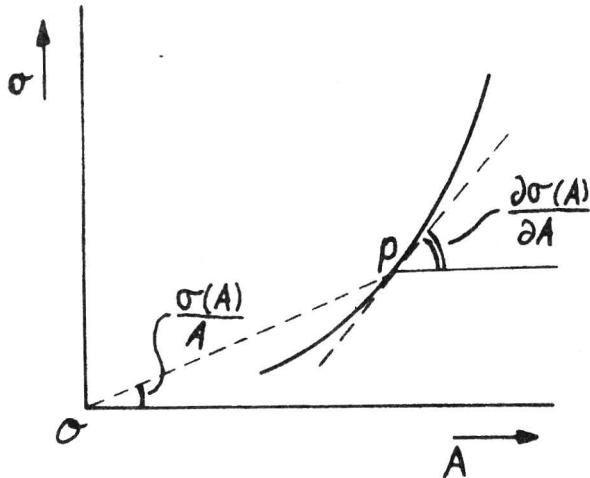
Als we met een (deel van een) bol te maken hebben is:

$$R \frac{\partial \sigma(A)}{\partial R} = 2 A \frac{\partial \sigma(A)}{\partial A} \quad (1.5)$$

Het tweebelletjes systeem is dus stabiel als wordt voldaan aan de voorwaarde:

$$\frac{\partial \sigma(A)}{\partial A} > \frac{1}{2} \frac{\sigma(A)}{A} \quad (1.6)$$

Metten we de oppervlaktespanning van een monolaag als functie van het oppervlak, dan moet gelden dat de helling  $\frac{\partial \sigma(A)}{\partial A}$  van de raaklijn in een punt P aan de gemeten curve groter moet zijn dan de helft van de helling van de lijn, die het punt P met de oorsprong verbindt (zie figuur 1.7).



figuur 1.7

1.3.1 DE STABILITEIT VAN EEN MODEL VAN EEN ALVEOLUS.

In 1.2.2 hebben we gezien dat een systeem van twee belletjes stabiel kan zijn als aan voorwaarde (1.6) wordt voldaan. In deze paragraaf zullen we een soortgelijke voorwaarde afleiden voor een model van een alveolus, waarin zowel de oppervlaktespannings- als de weefselcomponent zijn verwerkt.

Als model voor één enkele alveolus nemen we het meest eenvoudige, namelijk een bol. Deze benadering wordt aannemelijk indien we het grote aantal vlakke wandjes per alveolus beschouwen. Volgens J.Mead (zie literatuur 1) zijn dit er gemiddeld veertien. Een dergelijk veelvlak kan redelijk goed benaderd worden door de bolvorm.

Een andere reden voor het gebruik van de bolvorm als model volgt uit de verhouding tussen het alveolair oppervlak ( $A_a$ ) en de  $2/3$  wortel uit het alveolair volume ( $V_a$ ):

$$s_a = \frac{A_a}{V_a^{2/3}}. \tag{1.7}$$

Deze verhouding  $s_a$  kan met verschillende methoden experimenteel worden bepaald. Onder andere volgens E.R.Weibel (literatuur 2) benadert de gemeten verhouding  $s_a$  voor menselijke longen die van de gesloten bol zeer dicht.

In de hierna volgende berekeningen zullen we steeds uitgaan van een gesloten bol als model, en dus het bestaan van een alveolaire opening negeren. Ook negeren we de invloed van aangrenzende alveoli omdat er nog te weinig van bekend is. Het kan daardoor slechts mogelijk zijn een kwalitatieve beschrijving te geven van het stabiliteitsgebeuren op alveolair nivo.

### 1.3.2 HET MODEL.

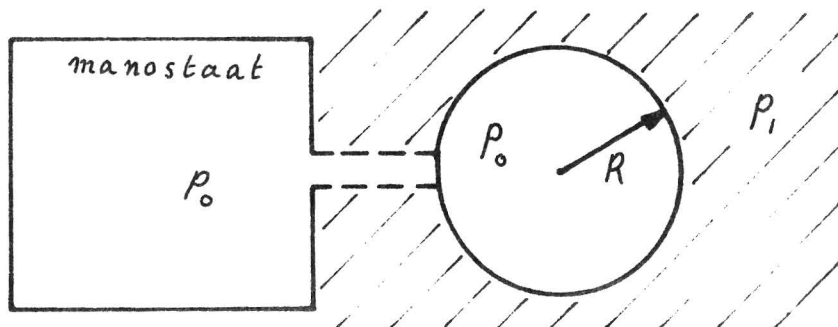
Ons model van een alveolus is een bol met straal  $R$ , opgebouwd uit de volgende drie componenten:

- de wand, met elastiese eigenschappen (septum)
- deze wand is aan de binnenkant bedekt met een dun vloeistof laagje waarvan de oppervlaktetension  $\sigma$  afhangt van de grootte van het oppervlak  $A$ :

$$\sigma = \sigma(A) \tag{1.2}$$

- in de bol, met een volume  $V$ , zit gas (met waterdamp verzadigde lucht) (aan de wand en aan het vloeistoflaagje kennen we geen dikte toe).

Dit model staat via een (denkbeeldige) buis in open verbinding met een manostaat, waarin een konstante druk  $p_0$  heerst. Het model bevindt zich in een medium waarin een druk  $p_i$  heerst. Figuur 1.8 geeft een voostelling van het beschreven systeem.



figuur 1.8

### 1.3.3 DE ENEGIE.

We zullen nu de totale energie  $E$  van het model gaan berekenen als functie van de straal  $R$  en de druk  $p_i$ :

$$E = E(R, p_i) \tag{1.8}$$

Als we de totale energie kennen, kunnen we achtereenvolgens de evenwichtsinstelling:

$$\frac{\partial E}{\partial R} = 0 \tag{1.9}$$

en de stabiliteitsvoorwaarde:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial R^2} > 0 \tag{1.10}$$

berekenen. De totale energie van het model krijgen we door sommatie van de bijdragen van de verschillende componenten in 1.3.2 genoemd.

Een volume gas  $V$  met druk  $p_o$  bezit een energie  $E_{gas}$  ten opzichte van de omgeving met druk  $p_i$  van:

$$E_{gas} = (p_o - p_i) V \quad (1.11)$$

Voor het vergroten van een vloeistofoppervlak met oppervlaktespanning  $\sigma(A)$  van  $A_o$  naar  $A$ , is een hoeveelheid arbeid  $W_\sigma$  nodig:

$$W_\sigma = \int_{A_o}^A \sigma(A) dA$$

Op grond hiervan definiëren we de energie  $E_\sigma$  van een oppervlak met oppervlaktespanning  $\sigma(A)$  als:

$$E_\sigma = \int_0^A \sigma(A) \cdot dA \quad (1.12)$$

Als aan een aantal voorwaarden wordt voldaan (zie appendix 2) kunnen we het elasties gedrag van het weefsel ongeveer op dezelfde wijze behandelen als de oppervlaktespanning. Het longweefsel zal aan deze voorwaarden slechts gedeeltelijk voldoen. Toch gebruiken we deze benadering omdat de berekeningen ermee eenvoudig zijn.

Het verschil tussen weefsel- en oppervlaktespanning ligt in het feit dat - aangenomen dat de oppervlakteveranderingen in alle richtingen gelijk zijn, wat bij een bol het geval is - het weefsel een rustoppervlak  $A_o$  heeft.  $A_o$  is het oppervlak  $A$  van het weefsel als de spanning  $S$  in het weefsel nul is. De functie die dit gedrag beschrijft wordt afgeleid in appendix 2, en noteren we als:

$$\begin{aligned} S &= S(A/A_o) && \text{als } A > A_o \\ S &= 0 && \text{als } A \leq A_o \end{aligned} \quad (1.13)$$

Omdat we aan de wand van het model geen dikte hebben toegekend, heeft de weefselspanning dezelfde dimensie als de oppervlaktespanning, en behoren beide grootheden bij eenzelfde grootte van het oppervlak. Om deze redenen wordt de energie  $E_w$  van een bolvormig stuk weefsel helemaal analoog aan die van de oppervlaktespanning gedefinieerd als:

$$E_w = \int_0^A S(A/A_o) \cdot dA \quad (1.14)$$

Zoals eerder is gezegd, verkrijgen we de totale energie door sommatie van de energie van de afzonderlijke delen van het model:



$$\begin{aligned}
 E &= E_{gas} + E_{\sigma} + E_w \\
 E &= (p_0 - p_1) V + \int_0^A \sigma(A) dA + \int_0^A S(A/A_0) dA \\
 E &= (p_0 - p_1) V + \int_0^A \{ \sigma(A) + S(A/A_0) \} \cdot dA
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Omdat het model een bol is kunnen we (1.15) ook schrijven als:

$$E = 4\pi \left[ \frac{1}{3} (p_0 - p_1) R^3 + 2 \int_0^R \{ \sigma(A) + S(A/A_0) \} R dR \right]
 \tag{1.16}$$

#### 1.3.4 EVENWICHT.

Het systeem is in evenwicht als de totale energie van het model konstant blijft bij kleine veranderingen in de grootte:

$$\frac{\partial E}{\partial R} = 0
 \tag{1.9}$$

Invullen van de energieformule (1.16) geeft:

$$\frac{\partial E}{\partial R} = 4\pi \left[ (p_0 - p_1) R^2 + 2 R \{ \sigma(A) + S(A/A_0) \} \right] = 0
 \tag{1.17}$$

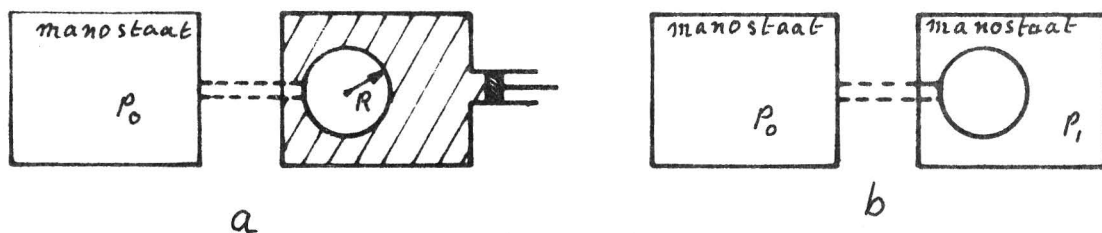
$$p_1 - p_0 = \frac{2}{R} \{ \sigma(A) + S(A/A_0) \}.
 \tag{1.18}$$

dit is weer de formule van Laplace, die de relatie geeft tussen de spanning in, de kromming van, en het drukverschil over een bolvormig oppervlak.

Er zijn in ons systeem twee regelbare grootheden: De druk  $p_1$ , en het volume  $V$  (of de straal  $R$ ). Regelen we het volume, dan is de grootte van het model volledig bepaald en dus stabiel. Nemen we echter de druk als regelbare grootheid, dan hoeft het opgelegde drukverschil niet gelijk te zijn aan het drukverschil dat volgens (1.18) nodig is om weerstand te kunnen bieden aan de oppervlakte- en de weefselspanning. In dat geval moeten we nog een voorwaarde vinden, die aangeeft waaraan de grootheden  $p$ ,  $R$ ,  $\sigma$ , en  $S$  moeten voldoen wil het model stabiel zijn voor volume veranderingen.

Het volume is geregelde grootheid wanneer we bijvoorbeeld het model plaatsen in een inkompressibele vloeistof en door middel van een zuiger volumeveranderingen aanbrengen (zie figuur 1.9a). De druk  $p_1$  is geregelde grootheid als we het model in een manostaat met variabele druk  $p_1$  plaatsen (zie figuur 1.9b).

In de long worden de gezamenlijke alveoli met het volume geregeld, door-



figuur 1.9

dat de longen in de borstkas zijn opgesloten. Kijken we naar de individuele alveoli, dan zien we dat deze alleen worden beïnvloed door aangrenzende alveoli en niet meer (direct) door de wand van de borstkas (vergelijk met de manier waarop molekulen in een gas of in een vaste stof worden beïnvloed). Daardoor kunnen we het functioneren van de alveoli het beste beschrijven volgens de tweede hier genoemde mogelijkheid dat wil zeggen door de druk geregeld.

1.3.5 STABILITEIT.

De voorwaarde voor stabiliteit van een systeem is:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial R^2} > 0 \tag{1.10}$$

Dit betekent dat het model zich moet bevinden in een toestand met een minimum in de energie. Differentiëren we (1.17) nog een keer naar de straal dan:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial R^2} = 8\pi \left[ (p_0 - p_1)R + \{ \sigma(A) + S(A/A_0) \} + R \left\{ \frac{\partial \sigma(A)}{\partial R} + \frac{\partial S(A/A_0)}{\partial R} \right\} \right] > 0$$

Invullen van (1.18):

$$2A \frac{\partial \sigma(A)}{\partial A} + 2A \frac{\partial S(A/A_0)}{\partial A} > \sigma(A) + S(A/A_0). \tag{1.19}$$

(vergelijk met (1.6)). Kennen we de functies  $\sigma(A)$  en  $S(A/A_0)$ , dan kunnen we een uitspraak doen over de stabiliteit van het model.

Uit appendix 2 blijkt dat de weefselinvloed altijd stabiliserend werkt, dat wil zeggen dat altijd geldt:

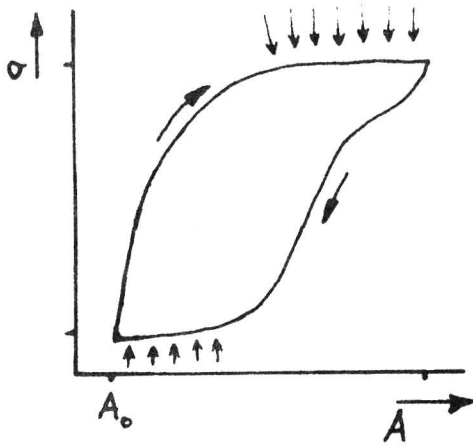
$$2A \frac{\partial S(A/A_0)}{\partial A} > S(A/A_0) \tag{1.20}$$

We kunnen nu de invloed van de oppervlaktespanning apart bekijken. We zien natuurlijk graag dat ook hier geldt:

$$2A \frac{\partial \sigma(A)}{\partial A} > \sigma(A) \tag{1.21}$$

omdat dan altijd aan (1.19) is voldaan. Merk op dat deze voorwaarde (1.21) dezelfde is als de voor de zeepbellen afgeleide voorwaarde (1.6) in 1.2.2.

In figuur 1.10 is een kompressie-expansie cyclus voor een monolaag getekend met de oppervlaktetenspanning als functie van het oppervlak. We zien direkt dat in de door de pijltjes aangegeven gebieden niet aan (1.21) wordt voldaan. Voor grote oppervlakte waarden kan dit misschien nog worden gecompenseerd door de stabiliserende invloed van het weefsel, maar voor het deel van de kurve met kleine oppervlakte waarden is dit zeker niet het geval. In dit laatste gebied is volgens appendix 2 de weefselspanning (bijna) nul. Daar zal ons model dus instabiel zijn.



figuur 1.10

#### 1.4.1 p-V KURVEN.

In deze paragraaf zullen we een druk-volume kurve (p-V kurve) berekenen met uit de literatuur verkregen functies voor de weefselelasticiteit en het oppervlaktetenspanningsgedrag. Met behulp van deze p-V kurve zullen we de stabiliteit van het model nagaan aan de hand van de voorwaarde:

$$\frac{\partial p}{\partial V} > 0 \quad (1.3)$$

Volgens appendix 2 kunnen we voor de weefselspanning S de volgende functie gebruiken:

$$S(A/A_0) = S_0 \left\{ \exp \left[ \frac{1}{(1-\mu)c} \left( \sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right) \right] - 1 \right\} \quad (1.22)$$

hierin is de dwarskontractie  $\mu$  geschat met behulp van gegevens uit een artikel van J.Hildebrandt (literatuur 3) dat één en tweezijdige rek van verschillende weefsels vergelijkt ( $\mu=0,3$ ).

De konstante c is berekend met behulp van een artikel van H.Fukaya (li-

teratuur 4) waarin de kracht is bepaald als functie van de éézijdige rek bij een stukje alveoluswand (septum;  $c=0,21$ ).

De konstante  $S$  is bepaald uit de figuur van von Neergaard (figuur 1.2) door vergelijking met de grootte van de oppervlaktespanningsterm ( $S_0 = 0,155 \text{ Nm}$ ).

Voor de relatie tussen de oppervlaktespanning en de grootte van het oppervlak gebruiken we figuur 1.11, die is gebaseerd op metingen aan monolagen van longsurfactant. Dit surfactant is verkregen door spoelen van longen via de luchtwegen, waarna een deel van de gezuiverde oplossing is gespreid op een zogenaamde Langmuirtrog. Met een Langmuirtrog meten we de oppervlaktespanning van een monolaag als functie van de grootte van het oppervlak.

De ene curve in figuur 1.11 is van een meting van surfactant van een normale long, de andere van surfactant van een long met het zogenaamde Respiratory Distress Syndrome (RDS), ook wel hyaline membraan ziekte genoemd. Bij deze ziekte is er een tekort aan oppervlakte-actief materiaal. De ziekte komt voor bij pasgeborenen en ook wel bij volwassenen met hersenletsel. De ziekte wordt gekarakteriseerd door de grote inspanning die de ademhaling kost doordat delen van de long na elke uitademing collabereren. Het weer ontplooiën van deze delen kost zoveel inspanning dat pasgeborenen, die aan deze ziekte lijden, zonder goede mediese hulp van uitputting sterven.

Omdat we vooral zijn geïnteresseerd in de werking van het surfactant hebben we voor de berekening van de normale en de RDS curves een gelijke weefselinvloed aangenomen. Bij genoemde ziekte vormt zich echter na verloop van tijd hyaline op de septa, wat de elasticiteit van het weefsel zeker zal beïnvloeden.

#### 1.4.2 DE BEREKENDE KURVES.

Met de waarden genoemd in 1.4.1 hebben we de druk berekend als functie van het relatieve volume  $V'$ ; dit is het volume  $V$  gedeeld door het kleinste volume  $V_0$ . Bij dit kleinste volume hoort een straal  $R_0$ . We hebben de berekende drukken vermenigvuldigd met deze kleinste straal  $R_0$ . Als we ditzelfde doen in de formule van Laplace (1.18):

$$p R_0 = 2 \frac{(\sigma + S)}{R/R_0} \quad (1.23)$$

dan zien we dat de drukterm  $pR_0$  onafhankelijk is van de grootte van het model. Dit hebben we toegepast in figuur 1.12, waar een  $pR_0-V'$  kurve is getekend die dus onafhankelijk is van de grootte van het model.

De werkelijke druk in cm  $H_2O$  verkrijgen we uit figuur 1.12 door de waarde van  $pR_0$  te delen door  $R_0$ , uitgedrukt in mikro meters.

We zullen nu de normaal-kurve en de RDS-kurve in figuur 1.12 eens nader bekijken.

#### De normaal-kurve:

Doorlopen we de normaal-kurve van A via B naar C dan zien we dat voor het vertikale "rechte" deel voorbij B geldt dat:  $\frac{\partial p}{\partial V} \approx 0$ . Het model is hier dus instabiel maar zal niet collabereren, het zal snel groter worden. Een kleine drukverhoging zal namelijk al voldoende zijn om het model het genoemde stuk vanaf B te doen doorlopen.

Gaan we van C via D naar A dan zien we dat in het stukje DA weer geldt  $\frac{\partial p}{\partial V} < 0$ . Hier kan collaps optreden.

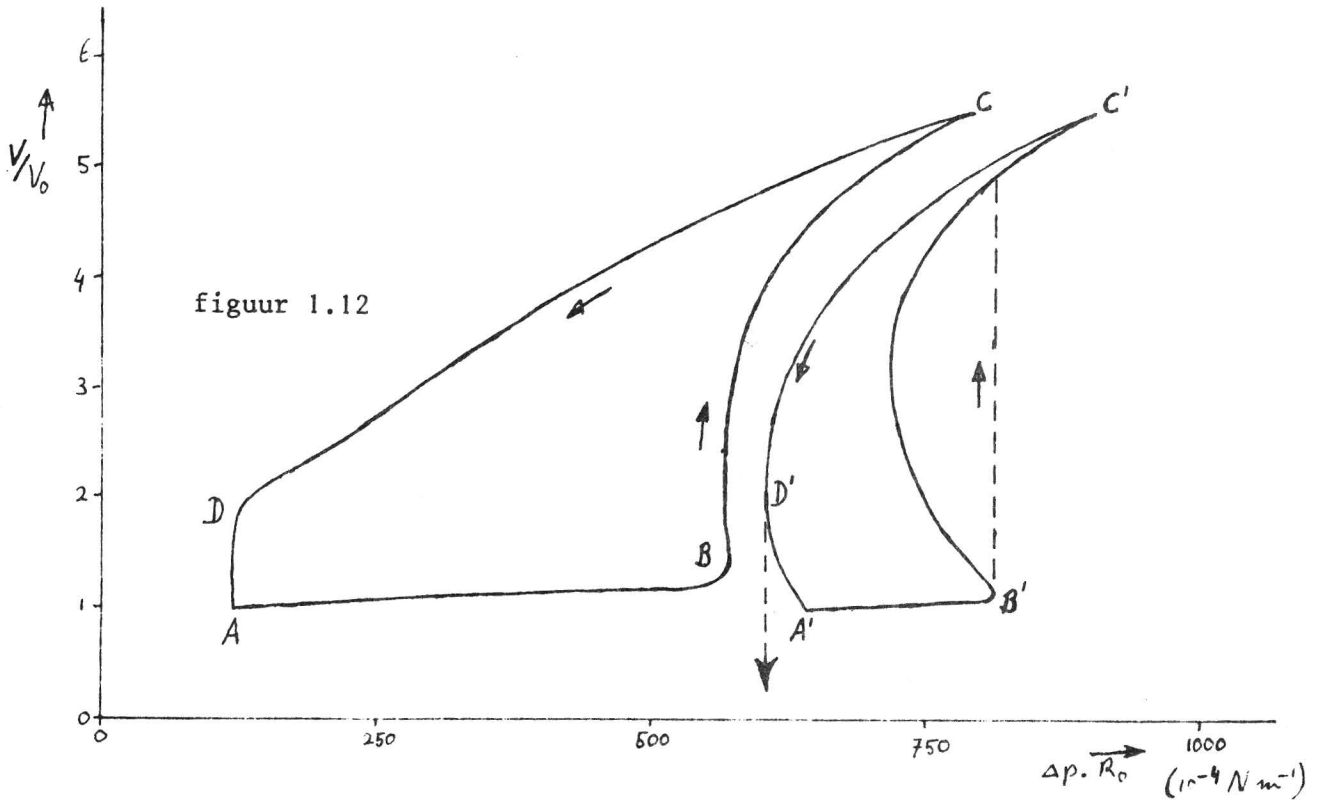
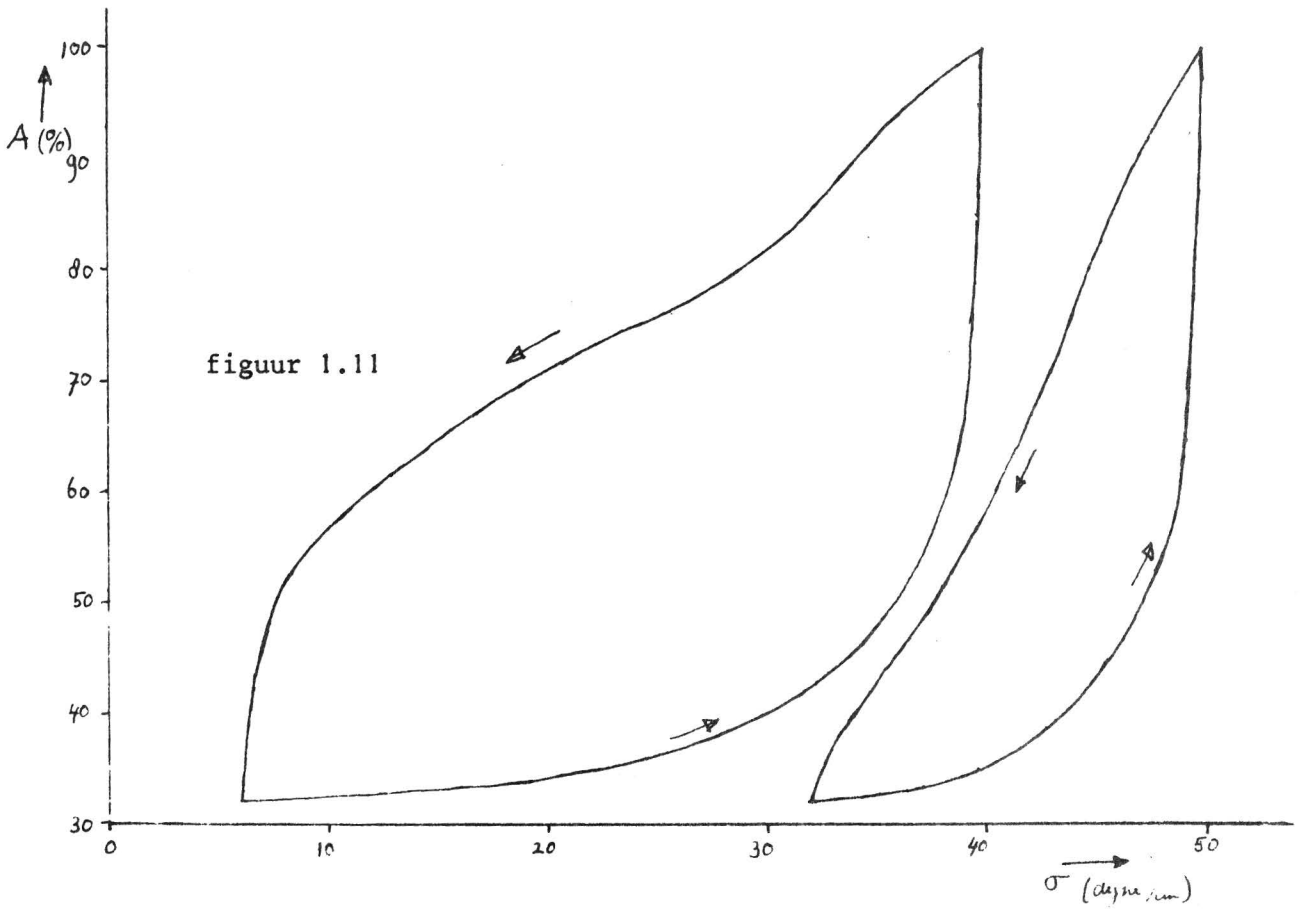
#### De RDS-kurve:

Doorlopen we de RDS-kurve op dezelfde manier als de normaal-kurve van A' naar C', dan zien we een duidelijk instabiel gedeelte:  $\frac{\partial p}{\partial V} < 0$ . Het model zal vanaf B' via de streeplijn meteen overgaan in de toestand met veel groter volume en gelijke druk als in B'.

Van C' via D' naar A' gaand, zien we dat voor het stukje D'A' geldt  $\frac{\partial p}{\partial V} < 0$ . Hier is het model duidelijk instabiel. Er zal daarom zeker collaps optreden. Opmerkelijk is dat deze collaps al bij een relatief hoge druk zal plaatsvinden. Dit laatste is in elk geval in overeenstemming met het RDS ziektebeeld.

### 1.5 KONKLUSIE.

Dit hoofdstuk is geschreven met de bedoeling het belang aan te tonen van de surfactantlaag in de longalveoli. We hebben eerst aan kunnen tonen dat een zeker oppervlaktespanningsgedrag vereist is wil een systeem van twee zeepbellen stabiel zijn. Een soortgelijke voorwaarde is ook afgeleid voor een model van een alveolus. Deze voorwaarde is gebruikt in de laatste paragraaf bij de bespreking van figuur 1.12. Uit deze figuur willen we nu nog enkele konklusies trekken voor het alveolusmodel. We maken hierbij onderscheid tussen het model met normaal surfactant en dat



met RDS surfactant (zie figuur 1.11).

- de RDS inspiratie-expiratie kurve blijft beperkt tot een smal drukinterval, terwijl het interval van de normaal-kurve breed is.
- het genoemde smalle drukinterval van de RDS-kurve ligt bij relatief hoge drukken, terwijl het interval van de normaal-kurve zich uitstrekt van relatief lage tot relatief hoge druk.
- het alveolusmodel met RDS surfactant zal na elke expiratie collaberen; dat met het normale surfactant vertoont een neiging hiertoe.

Samenvattend betekent dit voor een alveolusmodel met RDS surfactant dat dit alleen bij hoge druk open is, en dan meteen "maximaal", afgezien van smal drukinterval waar de grootte varieerd. Dit lijkt sterk op een tweetoestanden systeem, dat óf helemaal open is, óf gecollabeerd. We moeten hierbij wel opmerken dat voor het openen van een gecollabeerd model een nog hogere druk nodig is.

Het model met normaal surfactant kan slechts collaberen bij hele lage drukken. Normaal is dit dus altijd open.

Het hiergeschetste beeld komt redelijk overeen met wat er gebeurt in longen van een RDS patient, en in een normale long. Dus, ondanks de vele aannames en vereenvoudigingen, mogen we konkluderen dat we, met het alveolusmodel zoals dat in dit hoofdstuk is beschreven, het belang van een goed werkend surfactant kunnen aantonen. Bovendien kan het model worden gebruikt om een globaal inzicht te krijgen in de werking van het surfactant.

APPENDIX 1.

In de fysiologie wordt als stabiliteitskriterium gebruikt de voorwaarde:

$$\frac{\partial p}{\partial V} > 0 \quad (\text{A1.1})$$

De vraag is of, en in hoeverre, deze voorwaarde voldoet aan de fysies juiste:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial R^2} > 0 \quad (\text{A1.2})$$

Deze vraag is belangrijk omdat met (A1.1) de interpretatie van druk-volume kurven erg eenvoudig is.

Voor de berekening van het tweede kriterium gebruiken we de eenvoudigste beschrijving van de energie in ons model, namelijk:

$$E = \int -\Delta p \cdot dV + \int \sigma \cdot dA \quad (\text{A1.3})$$

$$E = \int_{R_1}^{R_2} \left\{ -\Delta p \frac{\partial V}{\partial R} + \sigma \frac{\partial A}{\partial R} \right\} dR$$

De evenwichtsvoorwaarde luidt:

$$\frac{\partial E}{\partial R} = -\Delta p \frac{\partial V}{\partial R} + \sigma \frac{\partial A}{\partial R} = 0 \quad (\text{A1.4})$$

$$\Delta p \frac{\partial V}{\partial R} = \sigma \frac{\partial A}{\partial R}. \quad (\text{A1.5})$$

De relatie (A1.5) beschrijft de instelling van een systeem dat wordt beschreven door (A1.3).

Verder differentiëren van (A1.4) geeft:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial R^2} = -\Delta p \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial R} \cdot \frac{\partial A}{\partial R} + \sigma \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} \quad (\text{A1.6})$$

Het eerste stabiliteitskriterium berekenen we door (A1.5) in te vullen in (A1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial R} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^{-1} \right\} > 0 \\ \frac{\partial(\Delta p)}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial R} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^{-1} \right\} \frac{\partial R}{\partial V} \\ &= \left\{ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial R} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^{-1} + \sigma \left( \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^{-1} - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial R} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^{-2} \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \right\} \frac{\partial R}{\partial V} \\ &= \left\{ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial R} \right) + \sigma \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} - \Delta p \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \right\} \left( \frac{\partial R}{\partial V} \right)^2 \quad (\text{A1.7}) \end{aligned}$$

(bij de laatste overgang is de formule (A1.5) weer gebruikt).

Vergelijking van (A1.6) en (A1.7) leert dat geldt:



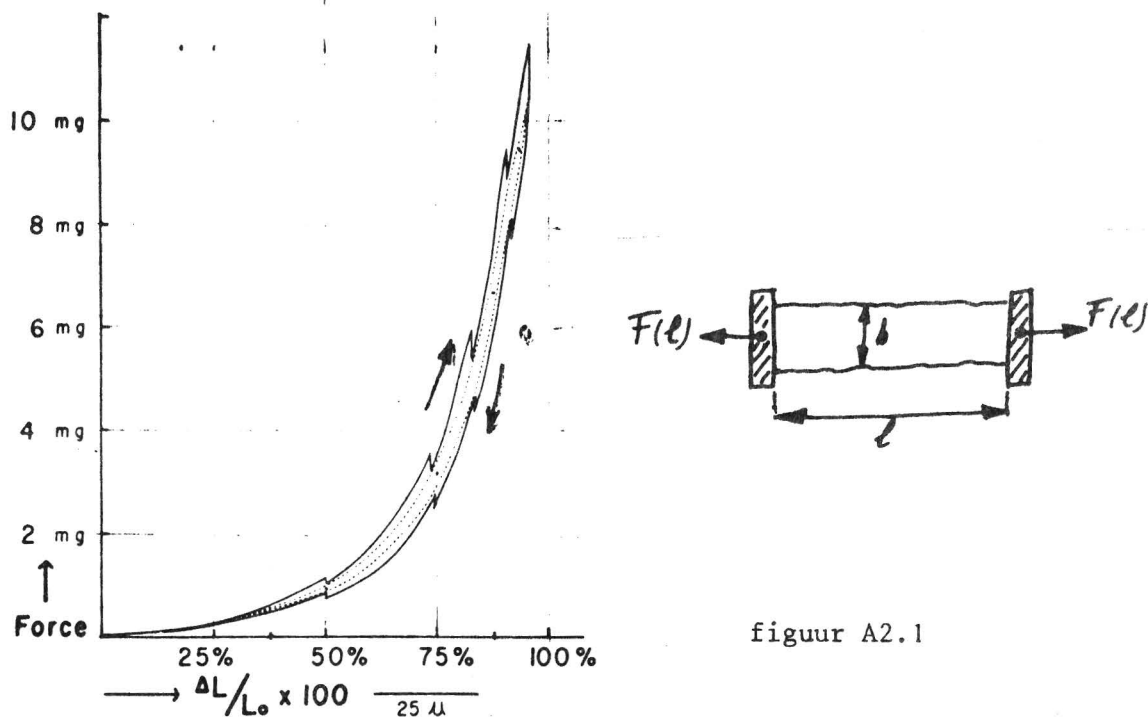
$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial V} = \frac{\partial^2 E}{\partial R^2} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 \quad (\text{A1.8})$$

De voorwaarden (A1.1) en (A1.2) komen dus overeen indien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial V} &\neq 0 \\ \frac{\partial R}{\partial V} &\text{ eindelijk.} \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

APPENDIX 2.

Door een aantal onderzoekers (literatuur 4) is longweefsel (alveolaire septa) onderzocht op elasties gedrag. Voor éénzijdige rek is een bij goede benadering exponentieel gedrag gevonden (literatuur 4,5). Het gedrag gevonden door Fukaya wordt gegeven in figuur A2.1.



figuur A2.1

We geven dit gedrag voorlopig weer door de funktie:

$$F_{1-zijdig} \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \frac{1}{b} F \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right) \quad (N \cdot m^{-1}) \quad (A2.1)$$

( $l_0$  is de lengte van het stukje weefsel als de uitgeoefende kracht  $F(l)=0$ , de rustlengte).

Omdat  $F\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)$  een funktie is van de relatieve verlenging  $\frac{\Delta l}{l_0}$ , en wordt gedeeld door de breedte  $b$  van het stukje weefsel, is  $F_{1-zijdig}$  onafhankelijk van de grootte ervan.  $F_{1-zijdig}$  is de spanning in het weefsel bij eenzijdige verlenging; we willen echter de spanning weten bij tweezijdige verlenging.

Stel we hebben bij eenzijdige rek een verband tussen de verlenging  $l-l_0$  en de daardoor ontstane spanning van de vorm:

$$\frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} = f(\sigma) \quad (A2.2)$$

Indien de superpositiewetten mogen worden toegepast, en we te maken hebben met een homogene en isotrope stof, dan zegt de elasticiteitsleer

dat bij rek zowel in de x- als in de y-richting de verlenging in de x-richting wordt gegeven door:

$$\frac{l_x - l_{x0}}{l_{x0}} = f(\sigma_x) - \mu f(\sigma_y)$$

Hierin is  $\mu$  de zogenaamde dwarskontractie. Bij gelijke spanningen in de x- en de y-richtingen ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_t$ ), wordt de verlenging:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = (1 - \mu) f(\sigma_t) \quad (\text{A2.3})$$

Voor tweezijdige rek zoals deze in een bolletje voorkomt geven (A2.1), (A2.2), en (A2.3) samen:

$$F_{2\text{-zijdig}}\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = F_{1\text{-zijdig}}\left(\frac{\Delta l}{(1-\mu)l_0}\right) \quad (\text{A2.4})$$

Opmerkingen: - de dwarskontractie  $\mu$  is alleen voor kleine rek een konstante; altijd geldt:  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ .

- de breedte  $b$  van het oorspronkelijke stukje weefsel is niet bekend.

Zoals gesteld is de functie  $F\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)$  van de vorm:

$$F\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right) = F_0 \left\{ \exp\left(\frac{l - l_0}{c \cdot l_0}\right) - 1 \right\} \quad (\text{A2.5})$$

waarbij  $F_0$  en  $c$  experimenteel te bepalen konstanten zijn. We willen echter de spanning  $S\left(\frac{l}{l_0}\right)$  weten. Deze wordt dan met (A2.1), (A2.4), en (A2.5):

$$S\left(\frac{l}{l_0}\right) = \frac{F_0}{b} \left\{ \exp\left[\frac{1}{(1-\mu)c} \left(\frac{l}{l_0} - 1\right)\right] - 1 \right\} \quad (\text{A2.6})$$

$(1-\mu)$  in de exponent geeft aan dat we te maken hebben met tweezijdige rek.

We zullen nu de twee weefseltermen uit de relatie (1.19) vergelijken:

$$\begin{aligned} 2A \frac{\partial S(l/l_0)}{\partial A} &= l \frac{\partial S(l/l_0)}{\partial l} = l \frac{F_0}{b} \frac{1}{(1-\mu)c} \cdot \frac{1}{l_0} \exp\left[\frac{1}{(1-\mu)c} \left(\frac{l}{l_0} - 1\right)\right] \\ &= \frac{F_0}{b} \frac{1}{(1-\mu)c} \cdot \frac{l}{l_0} \left\{ \exp\left[\frac{1}{(1-\mu)c} \left(\frac{l}{l_0} - 1\right)\right] - 1 + 1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

Met (A2.6) wordt dit:

$$2A \frac{\partial S(l/l_0)}{\partial A} = \frac{1}{(1-\mu)c} \cdot \frac{l}{l_0} \left\{ S\left(\frac{l}{l_0}\right) + \frac{F_0}{b} \right\}$$

Omdat de faktor  $\frac{1}{(1-\mu)c} \cdot \frac{l}{l_0} > 1$  als  $l > l_0$ , werkt het weefsel bij rek altijd stabiliserend op het model, behalve natuurlijk als  $c$  erg groot is, maar dat is in onze gevallen niet zo.

$$\text{Dus:} \quad 2A \frac{\partial S(l/l_0)}{\partial A} > S(l/l_0) \quad \text{voor alle } l > l_0 \quad (\text{A2.8})$$

## 2 HYDRODYNAMIESE THEORIE VOOR LONGITUDINALE GOLFBEWEGINGEN.

### 2.1 INLEIDING.

De hydrodynamische theorie, die in het eerste deel van dit hoofdstuk wordt beschreven, is reeds eerder door anderen afgeleid (literatuur 1 en 2). De reden waarom deze afleiding hier toch wordt gegeven is omdat enerzijds in de theorie essentiële vereenvoudigingen worden ingevoerd, die de meetopstelling en de metingen een aantal belangrijke beperkingen oplegt. Anderzijds is deze theorie de basis voor een aansluitend stuk, waarin de vloeistofbeweging in onze opstelling wordt beschreven. Het is daardoor een onmisbaar deel van de, in dit verslag afgeleide theorie, waarop later herhaaldelijk wordt teruggegrepen.

In het tweede deel van dit hoofdstuk wordt de hydrodynamische theorie toegepast op onze opstelling door het invullen van de randvoorwaarden. Dit resulteert in enige formules waarmee de snelheid en de beweging van de vloeistof in de meetopstelling wordt beschreven.

### 2.2 DE GOLFERGELIJKING.

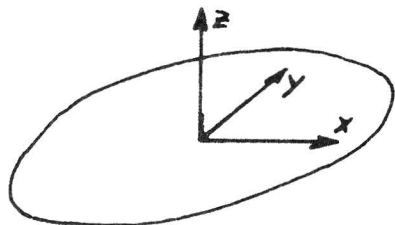
Voor de beschrijving van de golfbeweging in een vloeistof gebruiken we de vergelijking van Navier-Stokes voor een inkompressibele vloeistof:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \text{grad}) \underline{v} \right\} = \rho \underline{g} - \text{grad } p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (2.1)$$

en de continuïteitsvergelijking voor een inkompressibele vloeistof:

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad (2.2)$$

We definiëren nu eerst een cartesies koördinatenstelsel met het xy-vlak evenwijdig aan het vloeistofoppervlak en de z-as loodrecht hierop (zie figuur 2.1).



figuur 2.1

Aanname 1

We gaan er van uit dat de snelheden en gradiënten in de y-richting te verwaarlozen zijn. Dit betekent dat we uitgaan van een vlakke golfbeweging.

We kunnen door aanname 1 de Navier-Stokes vergelijking als volgt uitschrijven:

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right\} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left\{ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right\} \\ \rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} &= \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

De continuïteitsvergelijking wordt:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

2.3 NIET-LINEAIRE TERMEN.

De niet-lineaire termen in de Navier-Stokes vergelijking,  $(\underline{v} \cdot \text{grad})\underline{v}$ , leveren bij de oplossing van deze vergelijking de meeste moeilijkheden. Om deze termen te kunnen weglaten moet hun orde van grootte klein zijn ten opzichte van de instationnaire term  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ .

Delen we alle grootheden door karakteristieke grootheden, dan kunnen we het probleem dimensieloos maken:

$$x' = \frac{x}{L_x} ; z' = \frac{z}{L_z} ; v_x' = \frac{v_x}{V_x} ; v_z' = \frac{v_z}{V_z} ; t' = \frac{t}{T} \quad (2.5)$$

De continuïteitsvergelijking (2.4) kunnen we met (2.5) herschrijven tot:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{V_x}{L_x} \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{V_z}{L_z} \frac{\partial v_z'}{\partial z'} = 0$$

$$\text{d.w.z.} \quad \mathcal{O} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \frac{V_x}{L_x} = \mathcal{O} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{V_z}{L_z} \quad (2.6)$$

De traagheidstermen voor de x-komponent van de snelheid kunnen we met (2.5) herschrijven tot:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{V_x}{T} \frac{\partial v_x'}{\partial t'} + \frac{V_x^2}{L_x} v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{V_x V_z}{L_z} v_z' \frac{\partial v_x'}{\partial z'}$$

met (2.6) geeft dit:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{V_x}{T} \frac{\partial v_x'}{\partial t'} + \frac{V_x^2}{L_x} \left\{ v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + v_z' \frac{\partial v_x'}{\partial z'} \right\}$$

Willen we de niet-lineaire termen kunnen weglaten, dan moet gelden:

$$O\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right) = \frac{V_x}{T} \gg O\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = O\left(v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \frac{V_x^2}{L_x}$$

dus: 
$$\frac{V_x/T}{V_x^2/L_x} = \frac{L_x}{V_x T} \gg 1 \quad (2.7)$$

De vergelijking voor de z-komponent van de snelheid wordt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{V_z}{T} \frac{\partial v_z'}{\partial t'} + \frac{V_x V_z}{L_x} v_x' \frac{\partial v_z'}{\partial x'} + \frac{V_z^2}{L_z} v_z' \frac{\partial v_z'}{\partial z'} \\ &= \frac{V_z}{T} \frac{\partial v_z'}{\partial t'} + \frac{V_z^2}{L_z} \left\{ v_x' \frac{\partial v_z'}{\partial x'} + v_z' \frac{\partial v_z'}{\partial z'} \right\} \end{aligned}$$

Hier moet voor het weglaten van de niet-lineaire termen gelden:

$$\frac{V_z/T}{V_z^2/L_z} = \frac{L_z}{V_z T} \gg 1$$

Met behulp van (2.6) zien we dat deze voorwaarde dezelfde is als (2.7).

Uit de algemene oplossing van de golfvergelijking (2.16, 2.17) blijkt dat  $V_x$ ,  $L_x$ , en  $T$  een maat zijn voor respectievelijk de deeltjessnelheid, de golflengte en de trillingstijd van de golf in de x-richting. Dit betekent dat (2.7) overeenkomt met de voorwaarde dat de verhouding tussen golflengte en golfamplitude veel groter dan één moet zijn.

#### Aanname 2

We zullen aannemen dat is voldaan aan de voorwaarde dat de verhouding tussen golflengte en golfamplitude veel groter dan één is, zodat we de niet-lineaire termen uit de Navier-Stokes vergelijking mogen weglaten.

#### 2.4 POTENTIALFUNKTIES.

Na het wegvallen van de niet-lineaire termen uit (2.3), houden we drie vergelijkingen over, waaruit we de snelheidscomponenten  $v_x$  en  $v_z$  en de hydrostatiese druk  $p$  kunnen berekenen.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left\{ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right\} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

De oplossingen van deze vergelijkingen zoeken we door het invoeren van een skalarpotentiaal  $\varphi$  behorend bij een vektorveld  $\text{grad} \varphi$ , en een vektorpotentiaal  $\psi$  behorend bij een vektorveld  $\text{rot} \psi$ , zodanig dat geldt:

$$\underline{v} = -\text{grad } \varphi + \text{rot } \psi \quad (2.9)$$

Deze aanname is gerechtvaardigt, omdat een willekeurig vektorveld ( $\underline{v}$ ), geschreven kan worden als som van een rotatievrij ( $-\text{grad } \varphi$ ) en een divergentievrij ( $\text{rot } \psi$ ) vektorveld.

Uitgeschreven wordt (2.9):

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \psi & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

zodat:

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

De snelheid  $\underline{v}$  uit (2.9) moet voldoen aan de continuïteitsvergelijking (2.2). Omdat  $\text{rot } \psi$  een divergentievrij veld is, houden we over:

$$\text{div } \underline{v} = -\text{div}(\text{grad } \varphi) = -\nabla^2 \varphi$$

Uitgeschreven:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

Vullen we (2.10) in, in de vergelijkingen (2.8) dan krijgen we:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \eta \nabla^2 \varphi + p \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \eta \nabla^2 \psi \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} - \eta \nabla^2 \psi \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \eta \nabla^2 \varphi + p \right\} = \rho g \end{cases}$$

Omdat volgens (2.11)  $\nabla^2 \varphi = 0$  wordt dit:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \eta \nabla^2 \psi \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} - \eta \nabla^2 \psi \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p - \rho g z \right\} = 0 \end{cases}$$

Aan deze vergelijkingen wordt voldaan als:

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p - \rho g z &= C_1 \\ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \eta \nabla^2 \psi &= C_2 \end{aligned}$$

De konstanten  $C_1$  en  $C_2$  volgen uit de randvoorwaarden voor  $\underline{v}=0$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= p_0 \quad (\text{dit is de hydrostatiese druk in } z=0) \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Resumerend hebben we drie differentiaalvergelijkingen met de tijd  $t$  en de plaatscoördinaten  $x$  en  $z$  als variabelen:

$$\begin{cases} -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + (p - p_0) - \rho g z = 0 & (2.13) \\ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \eta \nabla^2 \psi = 0 & (2.14) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 & (2.11) \end{cases}$$

Uit dit stelsel moeten oplossingen volgen voor de potentiaalfuncties  $\phi$  en  $\psi$  en voor de druk  $p$ . Daarmee kunnen we dan de snelheden  $v_x$  en  $v_z$  en het hydrostaties drukverschil  $p-p_0$  berekenen.

## 2.5 DE OPLOSSING VAN HET STELSEL.

De vergelijkingen (2.11) en (2.14) zijn op te lossen met behulp van de methode van scheiding van variabelen. De oplossing die dan wordt verkregen is:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 e^{\pm kz + j(kx + \omega t)} \\ \psi &= \psi_0 e^{mz + j(kx + \omega t)} \end{aligned} \quad \text{met } m^2 - k^2 = j \frac{\omega \rho}{\eta} \quad (2.15)$$

hierin zijn  $k$  en  $\omega$  nog nader te bepalen konstanten, die we echter reeds kunnen interpreteren als respectievelijk het (komplexe) golfgetal en de hoekfrequentie van de opgewekte golven.

Door invullen van (2.15) in (2.10) en (2.13) vinden we de algemene op-



lossing voor de snelheden en de hydrostatiese druk:

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\{jk\phi_0 e^{\pm kz} + m\psi_0 e^{mz}\} e^{j(kx+\omega t)} \quad (2.16)$$

$$v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\{\pm k\phi_0 e^{\pm kz} - jk\psi_0 e^{mz}\} e^{j(kx+\omega t)} \quad (2.17)$$

$$p - p_0 = \rho g z + j\omega \rho \phi_0 e^{\pm kz + j(kx + \omega t)} \quad (2.18)$$

Het is nu ook mogelijk om het plus/min teken van de exponent  $\exp(\pm kz)$  te interpreteren. Uit de voorwaarde dat de golf gedempt moet worden in de negatieve z-richting, de vloeistof in, volgt dat het plus-teken behoort bij de naar linkslopende golf ( $k > 0$ ), en het min-teken bij de naar rechtslopende golf ( $k < 0$ ).

## 2.6 DE RANDVOORWAARDEN.

In de praktijk (de meetopstelling) zal het vloeistofoppervlak zijn opgesloten tussen twee zogenaamde barrières. De ene barrière in  $x=0$  voert een sinusvormige beweging uit in het xy-vlak met amplitude A, de andere barrière in  $x=l$  staat stil. Er zijn dus twee randvoorwaarden voor het oppervlak:

$$u_x(0, 0, t) = A e^{j\omega t} \quad (2.19)$$

$$u_x(l, 0, t) = 0 \quad (2.20)$$

hierin is  $u_x(x, z, t) = \int v_x(x, z, t) \cdot dt$

waarbij  $v_x(x, z, t)$  de som is van een naar links en een naar rechts lopende golf met gelijke hoekfrequentie  $\omega$  en golfgetal  $k$ . Dit is een staande golf. Met behulp van (2.16) vinden we de x-komponent van de snelheid:

$$v_x(x, z, t) = -\{jk\phi_{0l} e^{kz} + m\psi_{0l} e^{mz}\} e^{j(\omega t + kx)} - \{-jk\phi_{0r} e^{kz} + m\psi_{0r} e^{mz}\} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.21)$$

$$u_x(x, z, t) = \frac{1}{j\omega} v_x(x, z, t). \quad (2.22)$$

Opmerking: We hebben hier aan het golfgetal  $k$  reeds het teken toegekend (positief of negatief naargelang de richting van de golfbeweging) zodat voortaan geldt:

$$k > 0 \quad (2.23)$$

De derde en laatste randvoorwaarde is die voor de bodem van de meetopstelling. Voor deze bodem, gelegen in het vlak  $z=-d$ , geldt dat de uitwijking in de  $z$ -richting nul moet zijn:

$$u_z(x, -d, t) = 0 \quad (2.24)$$

$u_z(x, z, t)$  is weer gedefinieerd als  $u_z(x, z, t) = \int v_z(x, z, t) dt$

waarin  $v_z(x, z, t)$  is samengesteld uit de componenten van een naar links- en een naar rechtslopende golf. Met (2.17):

$$v_z(x, z, t) = -\{k\phi_{ol} e^{kz} - jk\psi_{ol} e^{mz}\} e^{j(\omega t + kx)} - \{k\phi_{or} e^{-kz} + jk\psi_{or} e^{-mz}\} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.25)$$

$$u_z(x, z, t) = \frac{1}{j\omega} \cdot v_z(x, z, t). \quad (2.26)$$

Laten we nu eerst (2.22) invullen in de randvoorwaarde (2.19):

$$u_x(0, 0, t) = \frac{-1}{j\omega} [jk\phi_{ol} + m\psi_{ol} - jk\phi_{or} + m\psi_{or}] e^{j\omega t} = A e^{j\omega t}$$

$$jk\phi_{ol} + m\psi_{ol} - jk\phi_{or} + m\psi_{or} = -j\omega A \quad (2.27)$$

Vullen we (2.22) in, in de tweede randvoorwaarde (2.20):

$$u_x(l, 0, t) = -\frac{1}{j\omega} [\{jk\phi_{ol} + m\psi_{ol}\} e^{jkl} + \{-jk\phi_{or} + m\psi_{or}\} e^{-jkl}] e^{j\omega t} = 0$$

met (2.27): 
$$jk\phi_{or} - m\psi_{or} = \frac{j\omega A e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \quad (2.28)$$

Invullen van (2.26) in de laatste randvoorwaarde (2.23) geeft:

$$u_z(x, -d, t) = -\frac{1}{j\omega} [\{k\phi_{ol} e^{-kd} - jk\psi_{ol} e^{-md}\} e^{jkx} + \{k\phi_{or} e^{-kd} + jk\psi_{or} e^{-md}\} e^{-jkx}] e^{j\omega t} = 0$$

Aan deze laatste voorwaarde wordt alleen voldaan indien geldt:

$$k\phi_{ol} e^{-kd} - jk\psi_{ol} e^{-md} = 0 \rightarrow \phi_{ol} = j\psi_{ol} e^{(k-m)d}$$

$$k\phi_{or} e^{-kd} + jk\psi_{or} e^{-md} = 0 \rightarrow \phi_{or} = -j\psi_{or} e^{(k-m)d} \quad (2.29)$$

Het meetbereik van de opstelling komt, zoals we in hoofdstuk vier zullen zien, overeen met golfgetallen tussen:

$$0,5 < k < 50 \text{ m}^{-1}$$

Volgens (2.15) is:

$$|m|^2 - |k|^2 = \left| \frac{\omega \rho}{\eta} \right| \approx 10^6 \text{ m}^{-2}$$

$$(\omega = 1 \text{ sec}^{-1}; \rho = 10^3 \text{ N m}^{-4} \text{ sec}^2; \eta = 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ sec})$$

We mogen daarom stellen dat altijd geldt:

$$|m| \gg |k| \quad (2.30)$$

Volgens (2.29) houdt (2.30) in dat voor voldoende grote waarden van de diepte  $d$  de bijdrage van de skalarpotentiaalfunctie verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de bijdrage van de vektorpotentiaalfunctie (vergelijk ook met (2.21) en (2.25)).

### Aanname 3

We nemen aan dat de diepte van de vloeistof zo groot is, dat de bijdrage van de skalarpotentiaalfunctie verwaarloosbaar is ten opzichte van de vektorpotentiaalfunctie.

Wordt aan aanname 3 voldaan, dan kan (2.29) worden vereenvoudigd tot:

$$\begin{aligned} \varphi_{ol} &= 0 \\ \varphi_{or} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Invullen van (2.31) in (2.28):

$$\psi_{or} = -j \frac{\omega A}{m} \frac{e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \quad (2.32)$$

Invullen van (2.31) en (2.32) in (2.27):

$$\psi_{ol} = j \frac{\omega A}{m} \frac{e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \quad (2.33)$$

We kunnen nu de snelheidscomponenten in de  $x$ - en de  $z$ -richting opschrijven:

$$v_x(x, z, t) = -j\omega A e^{mz} \left\{ \frac{e^{jk(x-l)} - e^{-jk(x-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \right\} e^{j\omega t} \quad (2.34)$$

$$v_z(x, z, t) = -\omega A \frac{k}{m} e^{mz} \left\{ \frac{e^{jk(x-l)} + e^{-jk(x-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \right\} e^{j\omega t} \quad (2.35)$$

Let hier op het tekenverschil tussen (2.34) en (2.35).

### 3 LONGITUDINALE GOLVEN IN EEN ELASTIES OPPERVLAKE.

#### 3.1 INLEIDING.

Het probleem van longitudinale golven door een monomoleculaire laag op een vloeistofoppervlak, kan analoog aan de golfvoortplanting in een dunne (metalen) staaf worden opgelost (literatuur 1). Er is enig verschil dat wordt veroorzaakt door de bijzondere eigenschappen van de oppervlaktespanning van een monolaag, en het feit dat we te maken hebben met een 2-dimensionaal in plaats van een 3-dimensionaal golfmedium.

We voeren voor de beschrijving van de eigenschappen van de monolaag de oppervlakte soortelijke massa  $\mu$  in, gedefinieerd als de hoeveelheid massa die per oppervlakte eenheid door de golf in beweging wordt gebracht, en de oppervlakte elasticiteitsmodulus  $\epsilon$ , die wordt gedefinieerd door:

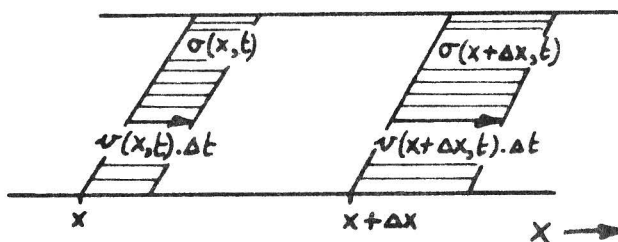
$$\epsilon = A \frac{\partial \sigma}{\partial A} \tag{3.1}$$

Voor het vinden van de golfgrootheden in het oppervlak - de snelheid  $v$  en de oppervlaktespanning  $\sigma$  - stellen we eerst twee differentiaalvergelijkingen op. Hieruit vinden we de algemene golfoplossing, die we weer invullen in dezelfde randvoorwaarden voor het oppervlak als in hoofdstuk 2. De snelheidsgolf die we dan vinden zullen we vergelijken met de oplossing uit hoofdstuk 2.

#### 3.2 DE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN.

De opstelling waarin we golven willen laten lopen bestaat uit een langwerpige bak gevuld met vloeistof. De x-as van ons cartesies koördinatenstelsel nemen we in de lengterichting van de bak.

We zullen aannemen dat we alleen te maken hebben met vlakke golven die zich in de positieve en de negatieve x-richting kunnen voortplanten. Dit betekent dat onze golfgrootheden alleen x- en tijdafhankelijk zijn.



figuur 3.1

We beschouwen een oppervlakte-elementje  $\Delta A$  tussen  $x$  en  $x+\Delta x$  op het tijdstip  $t$  (zie figuur 3.1). In  $x$  heeft het oppervlak een snelheid  $v(x,t)$  en heerst een oppervlaktespanning  $\sigma(x,t)$ . In  $x+\Delta x$  zijn dit respectievelijk  $v(x+\Delta x,t)$  en  $\sigma(x+\Delta x,t)$ . De verandering van het oppervlakte-elementje  $\Delta A$  in een tijdje  $\Delta t$  is evenredig met:

$$\delta(\Delta x) = v(x+\Delta x, t) \cdot \Delta t - v(x, t) \cdot \Delta t$$

zodat: 
$$\frac{\delta(\Delta A)}{\Delta A} = \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{v(x+\Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} \Delta t \quad (3.2)$$

Uit de defenitie voor  $\epsilon$  volgt:

$$\epsilon = A \frac{\partial \sigma}{\partial A} \approx A \frac{\Delta \sigma}{\Delta A} \quad \text{of} \quad \frac{\delta(\Delta A)}{\Delta A} \approx \frac{\delta \sigma}{\epsilon}$$

Als we dit invullen in (3.2) en daarna de limiet nemen  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , dan houden we de differentiaalvergelijking over:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} \quad (3.3)$$

Wanneer we de evenwichtsvergelijking opstellen van de krachten die per eenheid van breedte op het oppervlakte-elementje  $\Delta A$  werken, dan ziet deze er als volgt uit:

$$\sigma(x+\Delta x, t) - \sigma(x, t) = \mu \cdot \Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

ofwel kracht is massa maal versnelling. In de limiet voor  $\Delta x \rightarrow 0$  wordt dit:

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (3.4)$$

### 3.3 DE GOLFOPLOSSING.

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijkingen (3.3) en (3.4) zal de volgende vorm moeten hebben:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_0 e^{j(\omega t + kx + \phi_v)} \\ \sigma(x, t) &= \sigma_0 e^{j(\omega t + kx + \phi_\sigma)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

hierin zijn  $\omega, k, v_0, \sigma_0, \phi_v$ , en  $\phi_\sigma$  nog te bepalen, eventueel complexe, grootheden.

Invullen van (3.5) in (3.3) geeft:

$$\begin{aligned} jk v_0 e^{j\phi_v} &= \frac{1}{\epsilon} j\omega \sigma_0 e^{j\phi_\sigma} \\ \frac{\omega}{k} &= \epsilon \cdot \frac{v_0}{\sigma_0} e^{j(\phi_\sigma - \phi_v)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Invullen van (3.5) in (3.4) geeft:

$$j k \sigma_0 e^{j\varphi_0} = \mu j \omega v_0 e^{j\varphi_0}$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\mu} \frac{\sigma_0}{v_0} e^{j(\varphi_0 - \varphi_0)} \quad (3.7)$$

Uit (3.6) en (3.7) kunnen we oplossen:

$$\frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (3.8)$$

$$\frac{\sigma_0}{v_0} e^{j(\varphi_0 - \varphi_0)} = \pm \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (3.9)$$

Wederom invullen van (3.8) en (3.9) in een van de voorgaande formules laat zien dat de plustekens bij elkaar horen en de mintekens evenzo. Van het plusteken en het minteken in formule (3.8) is bekend, dat deze behoren bij respectievelijk naar links- en naar rechtslopende golven.

Resumerend hebben we dus een stelsel naar linkslopende golven:

$$v_l(x, t) = v_{0l} e^{j(\omega t + \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} x + \varphi_{vl})}$$

$$\sigma_l(x, t) = v_{0l} \sqrt{\varepsilon \mu} \cdot e^{j(\omega t + \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} x + \varphi_{vl})} \quad (3.11)$$

en een stelsel naar rechtslopende golven:

$$v_r(x, t) = v_{0r} e^{j(\omega t - \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} x + \varphi_{vr})}$$

$$\sigma_r(x, t) = -v_{0r} \sqrt{\varepsilon \mu} \cdot e^{j(\omega t - \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} x + \varphi_{vr})} \quad (3.12)$$

### 3.4 DE KOMPLEXE GROOTHEDEN $\varepsilon$ EN $\mu$ .

Wanneer de oppervlakte elasticiteitsmodulus  $\varepsilon$  een complexe grootheid is, kunnen we deze als volgt schrijven:

$$\varepsilon = |\varepsilon| \cdot e^{j\theta} = |\varepsilon| (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (3.13)$$

Zo kan ook de oppervlakte massa dichtheid worden geschreven als:

$$\mu = |\mu| \cdot e^{j\delta} = |\mu| (\cos \delta + j \sin \delta) \quad (3.14)$$

Het golfgetal  $k$  kunnen we hiermee herschrijven tot:

$$k = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \omega = \pm \left| \frac{\mu}{\varepsilon} \right|^{1/2} \omega e^{j(\delta - \theta)/2}$$

$$= \pm \left| \frac{\mu}{\varepsilon} \right|^{1/2} \omega \left\{ \cos\left(\frac{\theta - \delta}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\theta - \delta}{2}\right) \right\}$$

$$= \pm (\eta - j\beta).$$

We hebben hier het reële positieve golfgetal gedefinieerd als:

$$\eta = \left| \frac{\mu}{\varepsilon} \right|^{1/2} \omega \cos\left(\frac{\vartheta - \delta}{2}\right) \quad (3.15)$$

en de reële positieve dempingscoëfficiënt als:

$$\beta = \left| \frac{\mu}{\varepsilon} \right|^{1/2} \omega \sin\left(\frac{\vartheta - \delta}{2}\right) \quad (3.16)$$

Uit het feit dat zowel  $\eta$  als  $\beta$  positief moeten zijn, willen we met fysies relevante golven te maken hebben, volgt direkt de voorwaarde:

$$4\pi n \leq \frac{\vartheta - \delta}{2} \leq \pi + 4\pi n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.17)$$

Uit (3.15) en (3.16) volgt nog het bijzondere quotiënt:

$$\frac{\beta}{\eta} = \tan\left(\frac{\vartheta - \delta}{2}\right) \quad (3.18)$$

### 3.5 DE LOPENDEGOLF OPLOSSING.

Het oppervlak met de monolaag is in de meetopstelling opgesloten tussen twee barrières, één in  $x=0$  en één in  $x=1$ . De barrière in  $x=0$  beweegt met hoekfrequentie  $\omega$  en amplitude  $A$  in de  $x$ -richting. We hebben daarom als randvoorwaarde dat in  $x=0$  de deeltjes in het oppervlak een uitwijking  $u$  moeten hebben gelijk aan:

$$u(0, t) = A e^{j\omega t} \quad (3.19)$$

Een lopendegolf oplossing krijgen we als we aannemen dat de, in  $x=0$ , opgewekte golf zo sterk gedempt wordt dat de, in  $x=1$ , teruggekaatste golf verwaarloosd kan worden.

De uitwijking van een deeltje in het oppervlak is:

$$u(x, t) = \int v(x, t) \cdot dt = \frac{1}{j\omega} v(x, t)$$

dus in  $x=0$  is:  $u(0, t) = \frac{1}{j\omega} v(0, t) = A e^{j\omega t}$ .

Invullen van het stelsel naar rechtslopende golven (3.12) in deze voorwaarde geeft:

$$v_r(0, t) = v_{or} e^{j(\omega t + \varphi_{or})} = j\omega A e^{j\omega t}$$

waaruit volgt:  $v_{or} = \omega A$  ;  $\varphi_{or} = \frac{\pi}{2}$

Het stelsel naar rechtslopende golven wordt hiermee:

$$\begin{aligned}
 v_r(x,t) &= \omega A e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \kappa x + \frac{\pi}{2})} \\
 \sigma_r(x,t) &= \omega A / \epsilon \mu /^{1/2} e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \kappa x - \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} + \frac{\delta}{2})}
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

waarin  $\kappa$  en  $\beta$  worden gegeven door respectievelijk (3.15) en (3.16).

De onderste formule in (3.20) geeft het verband tussen de beweging van de barrière in  $x=0$  en de verandering van de oppervlaktespanning ter plaatse  $x$  (literatuur 2).

### 3.6 DE STAANDEGOLF OPLOSSING.

Indien een golf opgewekt in  $x=0$ , niet zodanig gedempt wordt dat de, in  $x=l$ , gereflekteerde golf mag worden verwaarloosd, moeten we het golfprobleem oplossen voor naar links- en naar rechtslopende golven, met gelijke hoekfrequentie en golfgetal. De oplossing hiervan noemen we een staande golf.

De randvoorwaarden zijn voor dit geval:

$$\begin{aligned}
 u(0,t) &= A e^{j\omega t} \\
 u(l,t) &= 0
 \end{aligned}$$

De eerste randvoorwaarde komt overeen met (3.19), de tweede is de voorwaarde voor weerkaatsing aan een vaste wand bij de barrière in  $x=l$ .

De algemene staandegolf oplossing voor de snelheid:

$$v(x,t) = v_l(x,t) + v_r(x,t) = \{v_{ol} e^{j(kx + \phi_{ol})} + v_{or} e^{j(-kx + \phi_{or})}\} e^{j\omega t}
 \tag{3.21}$$

geeft een uitwijking  $u$ :

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \int \{v_l(x,t) + v_r(x,t)\} dt \\
 u(x,t) &= \frac{1}{j\omega} \{v_{ol} e^{j(kx + \phi_{ol})} + v_{or} e^{j(-kx + \phi_{or})}\} e^{j\omega t}
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Invullen van (3.22) in de twee randvoorwaarden geeft:

$$\begin{aligned}
 u(0,t) &= \frac{1}{j\omega} \{v_{ol} e^{j\phi_{ol}} + v_{or} e^{j\phi_{or}}\} e^{j\omega t} = A e^{j\omega t} \\
 v_{ol} e^{j\phi_{ol}} + v_{or} e^{j\phi_{or}} &= j\omega A
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 u(l,t) &= \frac{1}{j\omega} \{v_{ol} e^{j(kl + \phi_{ol})} + v_{or} e^{j(-kl + \phi_{or})}\} e^{j\omega t} = 0 \\
 v_{ol} e^{j(kl + \phi_{ol})} &= -v_{or} e^{j(-kl + \phi_{or})}
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$



Opmerking: We hebben hier evenals in hoofdstuk 2 aan het golfgetal het bijbehorende teken toegekend. Een plusteken voor een naar linkslopende golf en een minteken voor een naar rechtslopende golf. Voor de rest van dit hoofdstuk geldt dus weer:

$$k = \kappa - j\beta > 0 \quad (3.25)$$

Invullen van (3.24) in (3.23) geeft:

$$-v_{or} e^{j(-kl + \varphi_{or})} + v_{or} e^{j(kl + \varphi_{or})} = j\omega A e^{jkl}$$

zodat: 
$$v_{or} e^{j\varphi_{or}} = \frac{j\omega A e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \quad (3.26)$$

$$v_{ol} e^{j\varphi_{ol}} = \frac{-j\omega A e^{-jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \quad (3.27)$$

De complexe amplitude van de snelheidsgolf wordt met (3.26) en (3.27) ingevuld in (3.21):

$$v(x) = -j\omega A \left\{ \frac{e^{jk(x-l)} - e^{-jk(x-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \right\} \quad (3.28)$$

Als we in deze formule de limiet  $l \rightarrow \infty$  nemen dan gaat (3.28) over in de lopendegolf oplossing (3.20). Deze limiet komt overeen met de aanname dat de gereflekteerde golf in  $x=l$  verwaarloosbaar is. We zien dus dat de lopendegolf oplossing een bijzonder geval is van de staandegolf oplossing.

Met (3.25) kan (3.28) als volgt worden uitgeschreven:

$$\begin{aligned} \frac{e^{jkl} - e^{-jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} &= \frac{e^{j\kappa l + \beta l} - e^{-j\kappa l - \beta l}}{e^{j\kappa l + \beta l} - e^{-j\kappa l - \beta l}} \\ &= e^{\beta l} \{ \cos \kappa l + j \sin \kappa l \} - e^{-\beta l} \{ \cos \kappa l - j \sin \kappa l \} \\ &= \cos \kappa l \cdot \{ e^{\beta l} - e^{-\beta l} \} + j \sin \kappa l \{ e^{\beta l} + e^{-\beta l} \} \\ &= 2 \{ \cos \kappa l \cdot \sinh \beta l + j \sin \kappa l \cdot \cosh \beta l \}. \end{aligned}$$

dan is ook:

$$\frac{e^{jk(x-l)} - e^{-jk(x-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} = 2 \{ \cos \kappa(x-l) \cdot \sinh \beta(x-l) + j \sin \kappa(x-l) \cdot \cosh \beta(x-l) \}$$

zodat:

$$v(x) = -j\omega A \left\{ \frac{\cos \kappa(x-l) \cdot \sinh \beta(x-l) + j \sin \kappa(x-l) \cdot \cosh \beta(x-l)}{\cos \kappa l \cdot \sinh \beta l + j \sin \kappa l \cdot \cosh \beta l} \right\} \quad (3.29)$$

Van formule (3.29) kunnen we apart de amplitude  $|v(x)|$  en de fase  $\angle v$  berekenen. Deze worden:

$$|v(x)| = \omega A \left[ \frac{\cosh\{2\beta(x-l)\} - \cos\{2\eta(x-l)\}}{\cosh 2\beta l - \cos 2\eta l} \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

$$\phi_v(x) = \arctan\{\tan \eta(x-l) \cdot \cotanh \beta(x-l)\} + \arctan\{\cotan \eta l \cdot \tanh \beta l\}$$

De komplexe amplitude van de oppervlaktespenningsgolf wordt met (3.11), (3.12), (3.26), en (3.27):

$$\sigma(x) = \sigma_e(x) + \sigma_r(x) = -j\omega A \sqrt{\epsilon \mu} \left\{ \frac{e^{jk(x-l)} + e^{-jk(x-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \right\} \quad (3.31)$$

Ook van (3.31) kunnen we apart de amplitude  $|\sigma(x)|$  en de fase  $\phi_\sigma(x)$  opschrijven:

$$|\sigma(x)| = \omega A \sqrt{\epsilon \mu}^{1/2} \left[ \frac{\cosh\{2\beta(x-l)\} + \cos\{2\eta(x-l)\}}{\cosh 2\beta l - \cos 2\eta l} \right]^{1/2} \quad (3.32)$$

$$\phi_\sigma(x) = \arctan\{\tan \eta(x-l) \cdot \tanh \beta(x-l)\} + \arctan\{\cotanh \eta l \cdot \tanh \beta l\} + \frac{\theta}{2} + \frac{\delta}{2}$$

### 3.7 VERGELIJKING MET HOOFDSTUK 2.

Vergelijken we formule (3.28) met formule (2.34), dan zien we dat deze voor het oppervlak ( $z=0$ ) gelijk zijn. Hieruit kunnen we konkluderen dat de hoofdstukken 2 en 3 elkaar aanvullen. Hoofdstuk 3 geeft een beschrijving van de golfbeweging van het vloeistofoppervlak, hoofdstuk 2 doet hetzelfde voor de vloeistof. In het eerste worden alleen de eigenschappen van de monolaag in de berekening verwerkt, in de laatste alleen de eigenschappen van de vloeistof.

Tot slot van dit hoofdstuk zullen we de, in dit hoofdstuk ingevoerde, oppervlakte soortelijke massa berekenen met behulp van resultaten uit hoofdstuk 2. De oppervlakte soortelijke massa is in 3.1 gedefinieerd als de massa die per oppervlakte-eenheid door de golf in beweging wordt gebracht. We zien in formule (2.34), dat de snelheidsgolf in de x-richting zich ook in de negatieve z-richting voortplant. Dit betekent dat, als we een longitudinale golfbeweging in het vloeistofoppervlak opwekken, er tevens een deel van de vloeistof wordt meebewogen. Op deze gronden kunnen we de oppervlakte soortelijke massa definiëren als:

$$\mu = \frac{\rho \int_0^0 u_x(x, z, t)}{u_x(x, 0, t)} \quad (3.32)$$

Met behulp van (2.34) en (2.22) zien we dat:

$$u_x(x, z, t) = \frac{1}{j\omega} v_x(x, z, t) = \frac{1}{j\omega} e^{mz} v_x(x, 0, t) = e^{mz} u_x(x, 0, t).$$

Invullen in (3.32):

$$\mu = \rho \frac{\int_{-\infty}^0 u_x(x, z, t) dz}{u_x(x, 0, t)} = \rho \int_{-\infty}^0 e^{mz} dz = \rho \frac{1}{m} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{\rho}{m}. \quad (3.33)$$

Volgens (2.15) is:  $m^2 = j \frac{\omega \rho}{\eta} + k^2$

zodat: 
$$\mu = \frac{\rho}{[j\omega\rho/\eta + k^2]^{1/2}} \approx \frac{\rho}{[j\omega\rho/\eta]^{1/2}} = \left(\frac{\eta\rho}{\omega}\right)^{1/2} e^{-j\pi/4}.$$

want  $|k| \ll \frac{\omega\rho}{\eta}$ , zoals blijkt in 2.6.

## 4 DE MEETOPSTELLING.

### 4.1 INLEIDING.

In dit hoofdstuk wordt de opstelling beschreven waarmee longitudinale golven worden opgewekt en gemeten. Het idee voor deze opstelling is ontwikkeld door het Unilever Research laboratorium te Vlaardingen. Een ruwe beschrijving ervan wordt gegeven in literatuur 1.

We zullen in dit hoofdstuk eerst een algemeen overzicht geven van de opstelling, om daarna alle componenten in detail te bespreken. Hier en daar worden berekeningen gegeven die een rol spelen in de metingen of hebben gespeeld bij het bouwen van de opstelling.

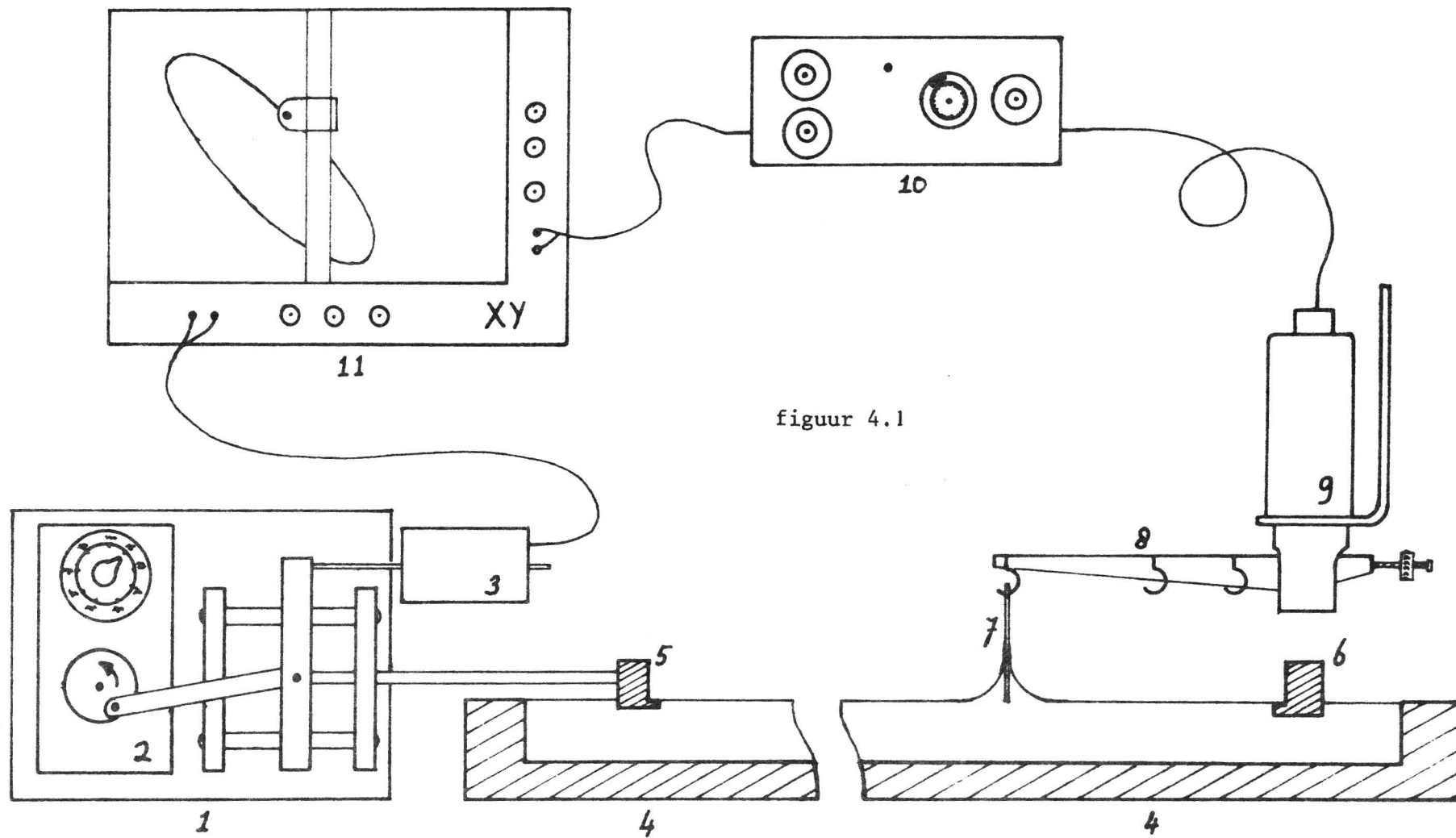
### 4.2 DE OPSTELLING.

In figuur 4.1 is de opstelling schematisch weergegeven. Met behulp van een sinus pomp (1) wordt aan de bewegende barrière (5) een sinusvormige beweging gegeven. De sinus pomp wordt aangedreven door een Multur vertragingkast (2), waarmee we de sinusfrequentie stapsgewijs kunnen instellen. De beweging wordt geregistreerd door een verplaatsingsmeter (3); het signaal ervan gaat naar de x-as van de XY-rekorder (11).

De trog (4) is een ondiepe langwerpige teflon bak, tot de rand gevuld met dubbel gedestilleerd water. Op het oppervlak tussen de bewegende barrière (5) en de stilstaande barrière (6) wordt een monolaag aangebracht. Met de barrière (6) kunnen we de oppervlaktespanning van de monolaag instellen door het oppervlak te komprimeren of te expanderen. Tevens heeft (6) de functie om de longitudinale golven goed te weerkaatsen (vaste wand).

Op een bepaalde plaats in de trog wordt de oppervlaktespanning gemeten met een Wilhelmyplaatje (7), in ons geval van dun glas gemaakt. Dit plaatje hangt aan een balansarm (8), die weer is bevestigd aan een Statham transducer (9). Het gelijkspanningssignaal van de transducer gaat via een voorversterker (10) naar de y-as van de rekorder (11).

Omdat de signalen op x- en y-as van de rekorder sinusvormig zijn en over het algemeen niet in fase lopen, zullen er ellipsen worden getekend. Zo'n ellips is het eigenlijke meetsignaal. Door het Wilhelmyplaatje uit het oppervlak te halen, en op een andere plaats voorzichtig weer tot aan het oppervlak te laten zakken tot de meniscus zich ertegen vormt, kunnen we het oppervlaktespanningsverloop als functie van de



figuur 4.1

plaats in de trog bepalen (x-afhankelijkheid). Deze meting kan worden gedaan voor verschillende frequenties (instellen met (2)) en voor verschillende oppervlaktespanningen (kompensatie of expansie van het oppervlak met barrière (6)).

Verklaring figuur 4.1:

- 1- sinuspomp
- 2- Multur vertraging
- 3- verplaatsingsmeter
- 4- teflon trog
- 5- bewegende barrière
- 6- niet bewegende barrière
- 7- Wilhelmyplaatje
- 8- balansarm
- 9- Statham transducer
- 10- gelijkspanningsvoorversterker
- 11- XY-rekorder

#### 4.3 HET WILHELMYPLAATJE.

Voor de meting van de oppervlaktespanning maken we gebruik van het Wilhelmyplaatje. Deze methode houdt in dat een dun plaatje van een inert materiaal (platina, of zoals in ons geval glas), in de vloeistof wordt gehangen. Wanneer het plaatje van te voren is vochtig gemaakt zal zich tegen het plaatje een meniscus vormen, zodra dit het oppervlak raakt. De kracht  $F_{\sigma}$  waarmee door de vloeistof aan het plaatje wordt getrokken is gelijk aan de oppervlaktespanning  $\sigma$  vermenigvuldigd met de omtrek  $O$  van het plaatje:

$$F_{\sigma} = \sigma \cdot O \quad (4.1)$$

Er zijn in ons geval drie factoren die invloed kunnen hebben op de juiste werking van het Wilhelmyplaatje. De eerste factor heeft te maken met de opwaardse kracht van de vloeistof op het plaatje, doordat het meetplaatje vertikaal beweegt bij een verandering in de oppervlaktespanning (veer karakter van het meetelement). De tweede factor heeft te maken met het dynamische karakter van de meting en de massa van het plaatje. De derde factor betreft de verticale beweging (elevatie) van het oppervlak als gevolg van de golfbeweging, wat ook weer een verandering van de op-

waardse kracht op het meetplaatje veroorzaakt.

Het meetelement waarmee de kracht  $F_g$  wordt gemeten (balansarm+transducer), kunnen we vergelijken met een veer, waar de verlenging  $h-h_0$  evenredig is met de kracht  $F_{veer}$ , waarmee aan de veer wordt getrokken. Als deze veer een veerconstante  $c$  heeft, dan geldt:

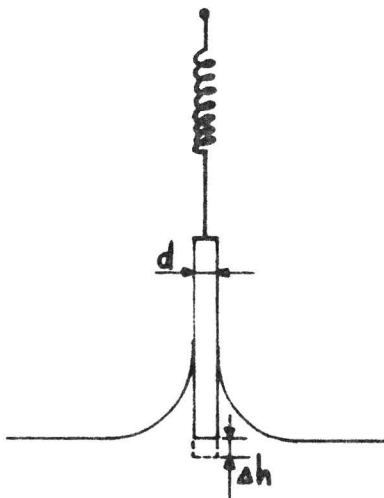
$$F_{veer} = c(h - h_0) \quad (4.2)$$

Als de oppervlaktespanning verandert en daarmee de kracht die op de veer werkt, dan zal het plaatje dieper of minder diep in de vloeistof komen te hangen. We krijgen dan een verandering in de opwaardse kracht  $\Delta F_{opw}$  door de vloeistof op het plaatje uitgeoefend. Deze verandering in opwaardse kracht is gelijk aan de volumeverandering  $\Delta V$  van het plaatje in de vloeistof vermenigvuldigd met het verschil in soortelijk gewicht  $(\rho' - \rho)g$  ( $\rho'$ -soortelijke massa glas;  $\rho$ -idem water;  $g$ -versnelling zwaartekracht):

$$\Delta F_{opw} = \Delta V(\rho' - \rho)g \quad (4.3)$$

De volumeverandering  $\Delta V$  is gelijk aan de lengte  $l$  maal de dikte  $d$  van het plaatje vermenigvuldigd met de lengteverandering  $\Delta h$  van de veer (zie figuur 4.2):

$$\begin{aligned} \Delta V &= l \cdot d \cdot \Delta h \\ \sigma &= 2(l+d) \approx 2l \end{aligned} \quad (4.4)$$



figuur 4.2

We willen graag dat de invloed van de opwaardse kracht  $F_{opw}$  klein is ten opzichte van de kracht uitgeoefend door de oppervlaktespanning op het plaatje  $F_{\sigma}$ . We zullen nu een schatting maken hiervan:

$$\Delta F_{\sigma} \approx \Delta F_{veer}$$

$$(4.1) \text{ en } (4.2): \quad \Delta \sigma \cdot \sigma \approx c \cdot \Delta h$$

$$\text{dus:} \quad \Delta h \approx \frac{\Delta \sigma \cdot \sigma}{c} \quad (4.5)$$

$$(4.3) \text{ en } (4.4): \quad \Delta F_{opw} = l \cdot d \cdot \Delta h (e' - e) \cdot g$$

$$\begin{aligned} \text{zodat met (4.5):} \quad \frac{\Delta F_{opw}}{\Delta F_{\sigma}} &\approx \frac{l \cdot d \cdot \Delta \sigma \cdot \sigma}{\Delta \sigma \cdot \sigma \cdot c} (e' - e) g \\ &= \frac{l \cdot d}{c} (e' - e) g = 1,6 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$(l = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}; d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}; c = 40 \text{ Nm}^{-1}; (e' - e) g = 1,6 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-3}).$$

We zien dat de invloed van de opwaardse kracht minder dan 0,2% is van de kracht door de oppervlaktespanning uitgeoefend. We mogen deze verwaarlozen.

Verder willen we graag dat het dynamies gedrag geen invloed heeft op de meting. Omdat we met een golfbeweging te maken hebben eisen we dat de kracht  $\Delta F_m$ , die nodig is om het Wilhelmyplaatje op en neer te bewegen, kunnen verwaarlozen ten opzichte van de kracht uitgeoefend door de verandering in de oppervlaktespanning  $\Delta F_{\sigma}$ . Deze dynamiese kracht is gelijk aan de massa  $m$  van het plaatje vermenigvuldigd met de versnelling  $a$  die erop werkt:

$$\Delta F_m = m a. \quad (4.6)$$

$$\text{dus:} \quad \Delta F_m \approx m \cdot \frac{\Delta h}{T^2}$$

$T$  is de trillingstijd van de golfbeweging.

Met (4.1) en (4.5):

$$\frac{\Delta F_m}{\Delta F_{\sigma}} \approx \frac{m \cdot \Delta \sigma \cdot \sigma}{c \cdot T^2} \cdot \frac{1}{\Delta \sigma \cdot \sigma} = \frac{m}{c \cdot T^2} \approx 0,25 \cdot 10^{-3}$$

$$(m = 10^{-2} \text{ kg}; c = 40 \text{ Nm}^{-1}; T = 1 \text{ sec}).$$

We zien hier dat we ook de dynamiese kracht op het plaatje kunnen verwaarlozen, vergeleken met de kracht uitgeoefend door de oppervlaktespanning. De trillingstijd hier gegeven is de kleinste waarmee kan worden



gemeten in de huidige opstelling.

De laatste faktor die de werking van het Wilhelmyplaatje nadelig kan beïnvloeden is de verticale beweging van het vloeistofoppervlak. Met de formules (2.26) en (2.35) uit hoofdstuk 2.6 vinden we de uitdrukking voor deze beweging:

$$u_z(x,0) = j A \frac{k}{m} \left\{ \frac{e^{jk(x-l)} + e^{-jk(x-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \right\} \quad (4.7)$$

Vergelijking met (3.31)

$$\sigma(x) = -j \omega A \sqrt{\epsilon \mu} \left\{ \frac{e^{jk(x-l)} + e^{-jk(x-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \right\} \quad (3.31)$$

laat zien dat moet gelden:

$$u_z(x,0) = \frac{-k}{\omega m \sqrt{\epsilon \mu}} \sigma(x)$$

Het golfgetal  $k$  is volgens (3.15) en (3.16) gelijk aan:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon}}$$

Dus:

$$u_z(x,0) = -\frac{1}{m \epsilon} \sigma(x) \quad (4.8)$$

Dit is het verband tussen de verticale beweging van het oppervlak en de oppervlaktespanningsgolf. We kunnen nu de kracht als gevolg van de elevatie van het oppervlak  $\Delta F_{ele}$  vergelijken met de kracht  $\Delta F_\sigma$  als gevolg van de oppervlaktespanningsveranderingen. Analoog aan het eerste geval uit deze paragraaf moet gelden:

$$\frac{\Delta F_{ele}}{\Delta F_\sigma} = \frac{u_z(x,0) \cdot l \cdot d (e' - e) \cdot g}{\Delta \sigma \cdot \sigma}$$

(4.4) en (4.8):

$$\approx \frac{-1}{m \cdot \epsilon} \cdot \frac{l \cdot d}{2l} (e' - e) \cdot g$$

Volgens hoofdstuk 2.6 geldt:

$$|m| \approx \left( \frac{\omega \rho}{\eta} \right)^{1/2}$$

Dus:

$$\left| \frac{\Delta F_{ele}}{\Delta F_\sigma} \right| \approx \left( \frac{\eta}{\omega \rho} \right)^{1/2} \cdot \frac{d}{2|\epsilon|} (e' - e) \cdot g \quad (4.9)$$

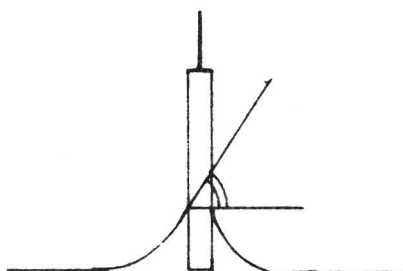
$$\approx \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \frac{1}{|\epsilon|} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^4 = \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{\omega} |\epsilon|}$$

$$(\eta = 10^{-3} \text{ Nm}^{-2} \text{ sec}; \rho = 10^3 \text{ Nm}^{-4} \text{ sec}^2; d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}; (e' - e)g = 1,6 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-3}).$$

Voor de laagste frequentie ( $\omega = 0,1$  rad) en lage elasticiteitswaarden (bv.  $|\epsilon| = 0,1 \text{ Nm}^{-1}$ ), wordt de verhouding (4.9) 0,05, een invloed dus van 5%. Deze laatste faktor kan dus wel degelijk invloed hebben op het resultaat van de metingen. Het enige wat de voorwaarde (4.9) in gunstige

zin kan beïnvloeden is het plaatje nog dunner maken. Maar het Wilhelmyplaatje is reeds zo dun ( $d=0,2$  mm) dat de grens eigenlijk is bereikt. Voor glas is dit in elk geval zo; een dunner plaatje is zo kwetsbaar dat het niet meer handelbaar is. Verder moet het plaatje nog geruwd worden (mat geschuurd) om ermee te kunnen meten, en bij de huidige dikte is dat al een probleem.

Het schuren van het plaatje gebeurt met carburundumpoeder (korrel 1000) en heeft als doel ervoor te zorgen dat het glazen oppervlak zo goed mogelijk vochtig blijft. Dit is een voorwaarde voor een goede meting, omdat bij een niet goed bevochtigd plaatje het vloeistofoppervlak onder een hoek aangrijpt aan het oppervlak van het plaatje (zie figuur 4.3). In dat geval is formule (4.1) niet meer juist, wat de meting nodeloos ingewikkeld zou maken.



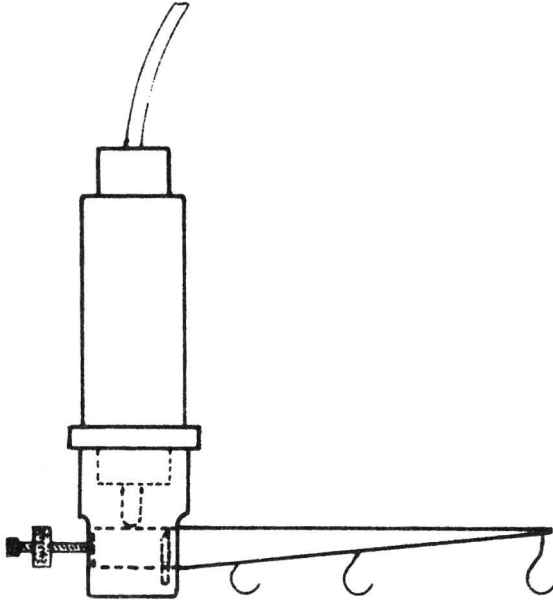
figuur 4.3

#### 4.4 DE KRACHTMETING.

Het meetelement voor de kleine krachtverschillen, een Statham Universal transducing gold cell UC3, is afgeleid van de Statham drukopnemers. In principe bestaat dit element uit vier rekstrookjes, bevestigd aan een tuitje. De rekstrookjes zijn elektrisch geschakeld in een brug van Wheatstone, zodanig dat de gelijkspanning afgegeven door de brug, recht evenredig is met de verplaatsing van het tuitje. Door de bijzondere eigenschappen van de transducer is de verplaatsing van het tuitje weer recht evenredig met de uitgeoefende kracht.

In figuur 4.4 zien we dat van de transducer, met behulp van een balansarm (Statham UL5), een weegschaal is gemaakt. Het element is hierdoor erg geschikt geworden voor het meten van oppervlaktespanningen.

Bij de kleine verschillen in de oppervlaktespanning die wij meten, bleek het noodzakelijk om het meetelement zoals geschetst in figuur 4.4 te isoleren, om de storende invloeden van temperatuursveranderingen en tocht (wind) zo klein mogelijk te maken.



figuur 4.4

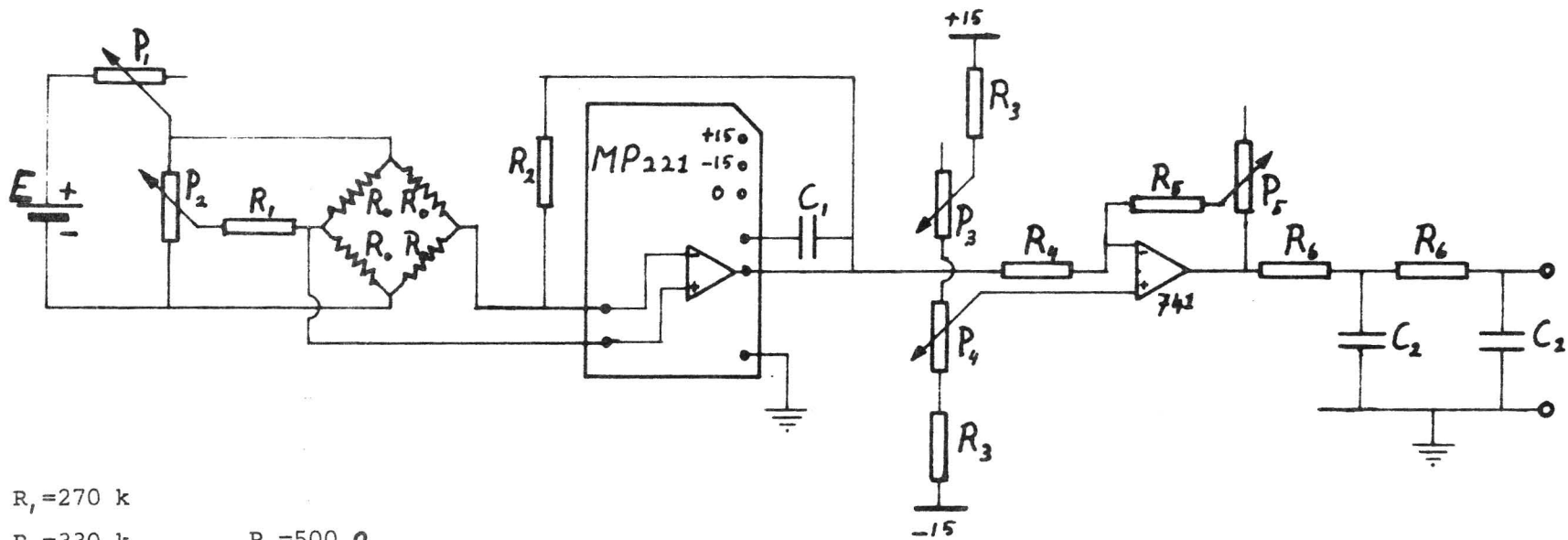
#### 4.5 DE DC VOORVERSTERKER.

De grootte van de gelijkspanningssignalen afkomstig van de Wheatstonebrug ligt in de orde van enkele mikrovolt tot enige tientallen mikrovolt. Voor de versterking van deze hele kleine spanningen is gebruik gemaakt van een bijzonder gevoelige en stabiele chopper gelijkspanningsversterker (analogic MP 221).

Figuur 4.5 geeft het volledige schema van de voorversterker. We zien daarin dat de chopper versterker direkt gekoppeld is aan de Wheatstonebrug en het signaal ongeveer duizendmaal versterkt.

De gevoeligheids- en nulpuntsinstelling gebeuren respektievelijk met de potmeters  $P_5$  en  $P_4$ . Deze externe instelling bleek noodzakelijk omdat instelling met behulp van  $P_1$  van de voedingsspanning en met  $P_2$  in de Wheatstonebrug, een instabiel gedrag (drift) met zich mee bracht die pas na enige uren was verdwenen.  $P_4$  is een ten-turn potmeter waarvan we de stand kunnen aflezen. Als het uitgangssignaal van de voorversterker met  $P_4$  tot nul is afgeregeld, geeft de stand van de potmeter de oppervlaktespanning van de monolaag aan.

Het dubbele RC-filter heeft als functie het wegfilteren van zoveel mogelijk ruis. Hierdoor krijgen we een duidelijker signaal (ellips), en wordt tevens de rekorder beschermd tegen te grote en onnodige slijtage.



$R_1 = 270 \text{ k}$

$R_2 = 330 \text{ k}$

$R_3 = 68 \text{ k}$

$R_4 = 18 \text{ k}$

$R_5 = 10 \text{ k}$

$R_6 = 39 \text{ k}$

$P_1 = 500 \Omega$

$P_2 = 50 \text{ k}$

$P_3 = 100 \Omega$

$P_4 = 10 \text{ k}$

$P_5 = 50 \text{ k}$

$E = 6 \text{ Volt}$

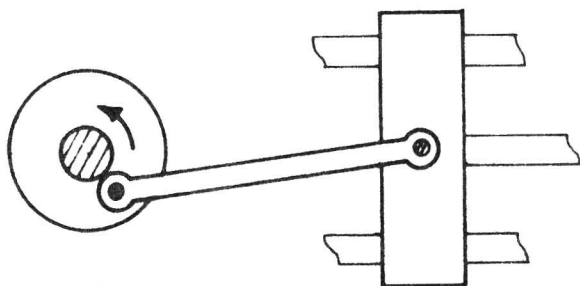
$C_1 = 0,03 \mu\text{F}$

$C_2 = 1,5 \mu\text{F}$

figuur 4.5

#### 4.6 DE SINUSPOMP.

Voor de aandrijving van de bewegende barrière is een zogeheten sinus-pomp gebouwd. Dit apparaat zet een roterende beweging om in een sinusvormige. In figuur 4.6 is het principe van de sinuspomp schematisch weergegeven. De drijfstang is excentrisch bevestigd aan een draaiende as. De andere kant van de drijfstang is bevestigd aan een slee, die over twee stangen heen en weer kan bewegen. Deze beweging is in goede benadering sinusvormig. De drijfstang is zo lang gekozen dat de afwijking van de werkelijke sinusbeweging altijd minder dan 0,5% bedraagt. De amplitude van de sinuspomp is  $(1,00 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}$  m.



figuur 4.6

De roterende as van de sinuspomp wordt aangedreven door een zogenaamde Multur vertragskast. Dit is een schakelkastje waarmee mechanisch bepaalde diskrete omwentelingsfrequenties kunnen worden ingesteld. Tot nu toe waren dit 1, 2, 5, en 10 omwentelingen per minuut; in de toekomst zal instelling tot 50 omwentelingen per minuut mogelijk zijn. De Multur vertraging wordt aangedreven door een wisselspanning synchroon motor, zodat de ingestelde frequenties zeer nauwkeurig bepaald zijn. Met behulp van een stopwatch konden geen afwijkingen in de ingestelde frequenties worden gekonstateerd.

De sinusbeweging van de barrière wordt opgenomen door een verplaatsingsmeter; dit is een differentiaaltransformator (SE 351). Deze verplaatsingsmeter is lineair binnen 0,3%. Het afgegeven gelijkspanningssignaal kan direct op de rekorder worden gezet.

#### 4.7 DE TROG.

De meetbak, trog, is een ondiepe rechthoekige bak van 60 bij 8 centimeter. Hij is gemaakt van teflon omdat dit materiaal sterk waterafstotend is, zodat de stoffen die we op het wateroppervlak aanbrengen zo min mogelijk met de rand van de trog in aanraking komen. Verder bein-

vloed teflon de stoffen die wij gebruiken niet, in tegenstelling tot bijvoorbeeld een metaal.

De trog wordt altijd tot aan de rand gevuld met dubbel gedestilleerd water. Met twee barrières aan weerszijden van de trog, begrenzen we het deel van het wateroppervlak, waarop de monolaag wordt aangebracht. De ene barrière (de bewegende) is bevestigd aan de sinuspomp, de andere (de niet-bewegende) wordt gebruikt om door kompressie of expansie van het oppervlak de gewenste oppervlaktespanning aan te brengen. Voorwaarde voor dit laatste is dat de stoffen in de monolagen niet of zeer moeilijk oplosbaar zijn in water.

De diepte van de bak moet zodanig groot zijn dat de golfbeweging nauwelijks wordt beïnvloed door de bodem van de bak. In hoofdstuk 2.6 is dit weergegeven in aanname 3. Volgens formule (2.29) houdt deze aanname in dat moet gelden:

$$e^{(k-m)d} \ll 1 \quad (4.10)$$

We zien tevens in hoofdstuk 2.6 dat:

$$|m| \gg |k| \quad (2.30)$$

en:  $|m|^2 - |k|^2 \approx |m|^2 \approx \frac{\omega \rho}{\eta}$

Voor de laagste frequentie die we gebruiken komt dit neer op:

$$|m| = \left(\frac{\omega \rho}{\eta}\right)^{1/2} \approx 3 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$$

( $\omega=0,1 \text{ rad sec}^{-1}$ ;  $\rho=10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\eta=10^{-3} \text{ Nm}^{-2} \text{ sec}$ ).

Ik heb gekozen voor een diepte  $d=1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Vullen we deze waarde in in (4.10):

$$e^{(k-m)d} \approx e^{-md} = e^{-3 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = e^{-3} \approx 0,05.$$

We zien dat voor de laagste frequenties formule (4.10), die de verhouding weergeeft tussen de bijdragen van skalar- en vektorpotentiaal-functies, klein is. Voor  $\omega=0,2 \text{ rad sec}^{-1}$  is de verhouding al 0,01 geworden, en voor hogere frequenties wordt deze nog veel kleiner. We mogen daarom wel stellen dat de golfbeweging in de trog nauwelijks of niet wordt beïnvloed door de bodem van de trog.

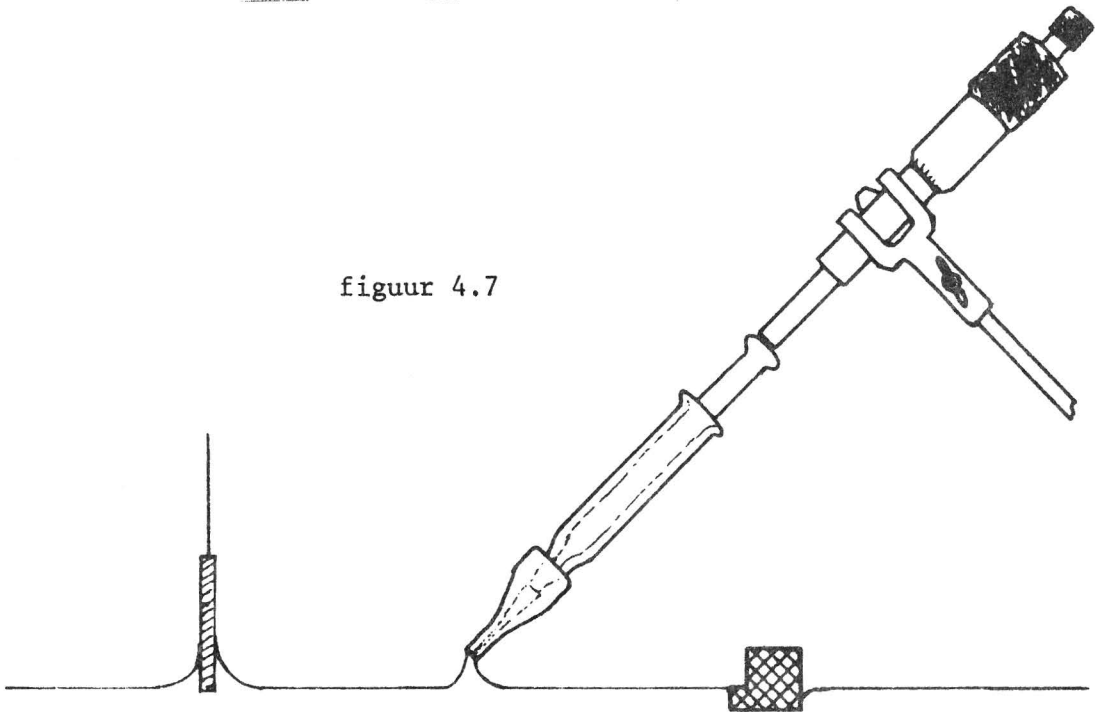
#### 4.7\* DE MONOLAGEN.

Tot nu toe is eigenlijk alleen cholesterol gebruikt om metingen mee te verrichten.

Als oplosmiddel voor cholesterol is gebruikt heptaan-ethanol in een volumeverhouding van 10 op 1. Heptaan verdampt redelijk gemakkelijk en is onoplosbaar in water. Ethanol verdampt heel snel en is goed oplosbaar in water. Dit oplosmiddel, dat de functie heeft het cholesterol in een nette monolaag te spreiden, is dan ook snel verdwenen van het oppervlak. De oplossingsverhouding is ongeveer 1 mg cholesterol in 1 ml oplosmiddel.

Het spreiden van de oplossing gebeurt met een mikropipet (Agla micrometer syringe MS01), dat met behulp van een statief onder een bepaalde hoek boven het oppervlak is bevestigd (zie figuur 4.7). Het pipet is op deze manier vastgemaakt omdat dit een betere spreiding garandeert en zo goed mogelijk voorkomt dat een deel van de oplossing onder het oppervlak in het water wordt gespoten.

figuur 4.7



Bij cholesterol monolagen wordt zoveel gespreid dat een kleine daling in de oppervlaktespanning (t.o.v. die van water) wordt verkregen. Eventueel kan de opgebrachte hoeveelheid worden afgelezen op de mikrometer van het pipet. We bereiken de gewenste oppervlaktespanning in de monolaag door met de niet-bewegende barrière het oppervlak voldoende te kom-

primeren of te expanderen.

#### 4.8 SCHOONMAKEN VAN DE APPARATUUR.

Het schoonmaken van de trog gebeurt op de volgende manier: Aan het einde van een meting wordt de trog leeggemaakt, grondig gespoeld met warm water, en drooggemaakt. Vervolgens wordt de trog schoongeveegd met een in ethanol gedoopte tissue, om achtergebleven vetzuren te verwijderen. Daarna wordt de trog nog eens gespoeld met dubbel gedestilleerd water. Hij is nu gereed voor de volgende meting.

De teflon barrières worden op precies dezelfde manier behandeld.

Het Wilhelmyplaatje wordt schoongemaakt door grondig spoelen met warm water, en naspoelen met dubbel gedestilleerd water.

Het mikropipet wordt na gebruik gereinigd door herhaaldelijk spoelen met ethanol.

#### 4.9 BEGRENZINGEN AAN HET MEETBEREIK.

De longitudinale golven in de monolagen hebben als eigenschap dat ze na één golflengte bijna geheel zijn uitgedempt. Dit houdt in dat, gezien de afmetingen van de opstelling, de kortste golven die we redelijk kunnen doormeten een golflengte mogen hebben niet kleiner dan 0,1 meter.

De golflengte is ook aan een maximum gebonden. Bij een afstand tussen de barrières van ongeveer een halve meter mag de golflengte niet te groot zijn omdat anders geen variatie meer is te meten in amplitude en fase van de golf op verschillende plaatsen in de trog. Nog een enigszins verwerkbaar golflengte is  $\lambda = 10$  m.

De opstelling kan dus longitudinale golven meten met een golflengte  $\lambda$ :

$$0,1 < \lambda < 10 \text{ m} \quad (4.11)$$

Dit komt overeen met golfgetallen:

$$0,5 < k = \frac{2\pi}{\lambda} < 50 \text{ m}^{-1} \quad (4.12)$$

De beperking (4.11) betekent tevens dat is voldaan aan aanname 2 uit hoofdstuk 2.3, die eist dat de verhouding tussen golflengte en golfamplitude veel groter dan één is. De grootst mogelijke golfamplitude zal overeenkomen met de amplitude van de bewegende barrière, namelijk  $10^{-3}$  m. De kleinste golflengte is volgens (4.11)  $10^{-1}$  m. Aan aanname 2 wordt dus altijd voldaan.



#### 4.10 IJKING VAN DE MEETOPSTELLING.

Voor de ijking van de opstelling voor de amplitudemeting van de oppervlaktespanningsgolf gebruiken we de volgende methode. We hebben twee ijkgewichtjes. Het ene is even zwaar als het (droge) Wilhelmyplaatje, het andere heeft een gewicht overeenkomend met de kracht die de oppervlaktespanning van zuiver water uitoefent op het Wilhelmyplaatje. We hangen eerst het eerste gewichtje aan de balansarm en stellen het uitgangssignaal van de voorversterker met de potmeter  $P_4$  op nul. De stand van  $P_4$  (aflezen) komt overeen met een oppervlaktespanning nul. We hangen nu het tweede ijkgewichtje aan de balansarm. De stand op de XY-rekorder komt overeen met de oppervlaktespanning van water ( $\sigma_w = 72 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$  bij kamertemperatuur). Als dit nodig is kunnen we de gevoeligheid bijstellen met de potmeter  $P_5$  van de voorversterker. Als we met potmeter  $P_4$  het uitgangssignaal van de voorversterker weer tot nul afregelen, en de bijbehorende stand aflezen, dan is de opstelling geijkt.

Doordat we bij een meting aan de oppervlaktegolf het gemiddelde uitgangssignaal op nul instellen, geeft de stand van de potmeter  $P_4$  de gemiddelde oppervlaktespanning aan van de monolaag waaraan wordt gemeten. Het uitgangssignaal van de voorversterker, wat het ingangssignaal van de XY-rekorder is, moet op nul worden ingesteld omdat de rekorder altijd vele standen gevoeliger moet worden gezet voor de elasticiteitsmetingen (10 tot 100 maal). De amplitude van de oppervlaktespanningsgolf zal namelijk altijd veel kleiner zijn dan de oppervlaktespanning van water.

Willen we de faseverschuiving kunnen meten die door de monolaag wordt geïntroduceerd, dan moeten we eerst de faseverschuiving in de opstelling kennen. Om deze laatste te meten is gebruik gemaakt van de eigenschap van de Statham transducer, dat deze ook als verplaatsingsmeter werkt (zie paragraaf 4.3)

Met een hefboom is de sinusbeweging van de sinuspomp 20 maal verkleind overgebracht op de balansarm. De balansarm werkt ook als hefboom (zie figuur 4.4), en verkleint de beweging nog eens 10 maal. De sinusbeweging wordt hierdoor 200 maal kleiner aangeboden aan de Statham transducer. deze transducer heeft een meetbereik van  $120 \mu\text{m}$ ; de verkleinde sinusamplitude bedraagt  $10^{-3}/200 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5 \mu\text{m}$ .

Op deze manier meten we direkt het verschil in fase tussen de opgedrukte beweging van de sinuspomp en de beweging van de balansarm. De laatste komt overeen met de kracht uitgeoefend door het Wilhelmyplaatje op de

balansarm. De aldus, voor verschillende frequenties, verkregen faseverschillen zijn vergeleken met de fasedraaiingen door het elektrisch filter (zie paragraaf 4.5) veroorzaakt. De laatsten zijn gemeten door het signaal van de verplaatsingsmeter van de sinus pomp ongefilterd op de x-as en gefilterd op de y-as van de rekorder te zetten.

Het blijkt dat de fasedraaiingen voor de verschillende vaste frequenties, van de totale opstelling en van alleen het elektrisch filter, binnen de meetnauwkeurigheid overeenkomen. We mogen hieruit konkluderen dat de fasedraaiingen van de opstelling volledig moeten worden toegeschreven aan het elektrisch filter in de voorversterker.

We nemen aan dat het elektrisch filter ook volledig verantwoordelijk is voor de demping van de signaalamplitude. Omdat de opstelling, zoals we hebben gezien, wordt geijkt met behulp van gewichtjes in een statiese toestand, zullen we bij de dynamiese meting moeten corrigeren voor de demping van het signaal. De demping van het filter is gemeten.

De gemeten korrektiewaarden voor de verschillende frequenties worden gegeven in tabel 1 in de volgende paragraaf.

#### 4.11 VERWERKING VAN DE MEETGEGEVENS.

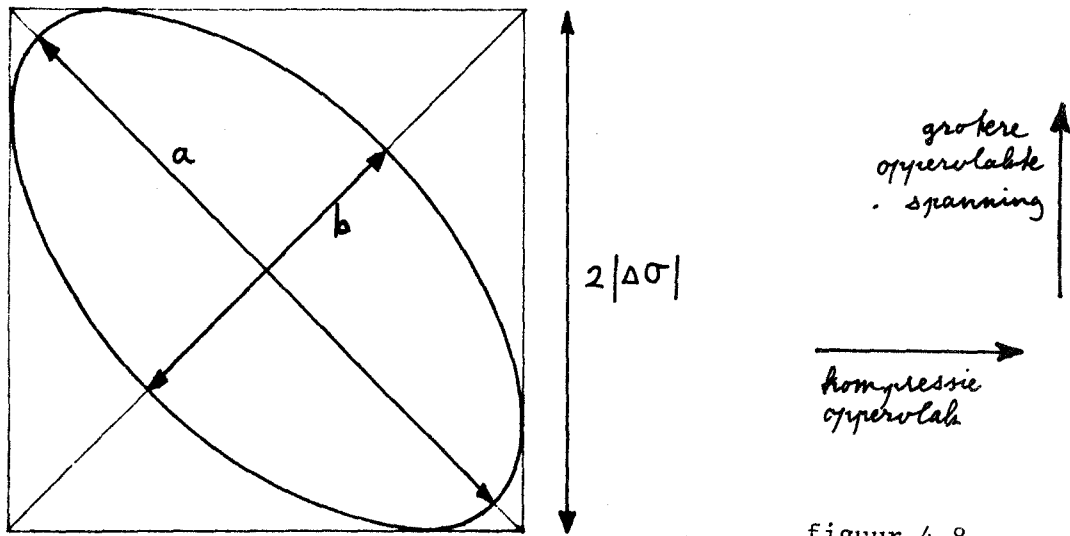
We hebben in het voorafgaande gezien dat alle signalen sinusvormig zijn. Het signaal van de verplaatsingsmeter van de sinus pomp wordt op de x-as van de rekorder (Hewlett-Packard 7045 A) gezet, het signaal van de oppervlaktespanning op de y-as. Over het algemeen hebben we twee sinusvormige signalen die niet in fase zijn zodat er op de rekorder een ellips zal worden getekend. De verhouding van de diagonalen (a,b) van zo'n ellips is gelijk aan de tangens van het halve faseverschil ( $\phi$ ) tussen de diagonalen:

$$A \tan \phi/2 = \frac{b}{a} \quad (4.13)$$

De uitwijking in de y-richting komt overeen met twee maal de amplitude van het oppervlaktespanningssignaal (zie figuur 4.8). Deze waarden moeten nog gecorrigeerd worden met behulp van tabel 1, en wel als volgt: Van het gemeten faseverschil moet de waarde uit tabel 1 worden afgetrokken; de gemeten amplitude moet worden vermenigvuldigd met de amplitudecorrectie.

Als de polariteit van de signalen overeenkomt met de pijlen in figuur 4.8, dan betekent een kloksgewijze draairichting dat het oppervlakte-

spanningssignaal achterloopt bij de barrière beweging. Is de draairichting tegengesteld, dan loopt het signaal voor op de barrière beweging.



figuur 4.8

TABEL 1.

frequentie omw/min	fasekorrektie radialen	amplitude- korrektie
10	0,192+0,002	1,096+0,002
5	0,096+0,002	1,085+0,002
2	0,039+0,002	1,083+0,002
1	0,020+0,002	1,083+0,002

5 DE MEETMETHODE.

5.1 INLEIDING.

In dit hoofdstuk zullen we de formules uit hoofdstuk 3 herschrijven tot een bruikbare vorm voor het verwerken van de metingen. We zullen een methode afleiden waarmee we uit de metingen het golfgetal en de dempingskoëfficiënt kunnen bepalen. Met deze getallen kunnen we vervolgens door invullen de grootheden vinden die ons interesseren, te weten de elasticiteitsmodulus  $|\epsilon|$  met de bijbehorende fasehoek  $\vartheta$ . De oppervlakte-soortelijke massa, waarvan we de theoretiese waarde kennen, gebruiken we als controlemiddel.

De methode wordt toegepast op een meting aan cholesterol. We zullen de resultaten hiervan vergelijken met de theorie en zo de beperkingen van de opstelling en daarmee van de meetmethode leren kennen.

Het hoofdstuk eindigt met de bespreking van enige meetresultaten.

5.2 AANPASSING VAN DE THEORIE AAN DE MEETMETHODE.

We zullen in deze paragraaf de formules afleiden die ons in staat stellen de, in hoofdstuk 3, gedefinieerde grootheden van een monolaag te berekenen als we het golfgetal en de dempingskoëfficiënt kennen. Deze gedefinieerde grootheden zijn de elasticiteitsmodulus  $\epsilon$ , en de bijbehorende fasehoek  $\vartheta$ , en de oppervlakte soortelijke massa  $\mu$ , met zijn fasehoek  $\delta$ .

Formule (3.18) is te herschrijven tot:

$$\frac{\vartheta}{2} - \frac{\delta}{2} = \arctan \frac{\beta}{\eta}$$

en formule (3.32) tot:

$$\frac{\vartheta}{2} + \frac{\delta}{2} = \phi_{\sigma}(x) - \arctan \{ \tan \eta(x-l) \cdot \tanh \beta(x-l) \} - \arctan \{ \cotan \eta l \cdot \tanh \beta l \}$$

We kunnen nu de fasehoeken uit deze twee vergelijkingen oplossen:

$$\begin{aligned} \vartheta = & \phi_{\sigma}(x) - \arctan \{ \tan \eta(x-l) \cdot \tanh \beta(x-l) \} - \\ & - \arctan \{ \cotan \eta l \cdot \tanh \beta l \} + \arctan \frac{\beta}{\eta}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \delta = & \phi_{\sigma}(x) + \arctan \{ \tan \eta(x-l) \cdot \tanh \beta(x-l) \} - \\ & - \arctan \{ \cotan \eta l \cdot \tanh \beta l \} - \arctan \frac{\beta}{\eta}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Voor de amplituden van de elasticiteit en de oppervlakte soortelijke massa kunnen we uit (3.15) en (3.16) afleiden:

$$|k| = [\kappa^2 + \beta^2]^{1/2} = \omega \left| \frac{\mu}{\varepsilon} \right|^{1/2}$$

dus: 
$$\left| \frac{\varepsilon}{\mu} \right|^{1/2} = \frac{\omega}{[\kappa^2 + \beta^2]^{1/2}}$$

Uit (3.32) volgt:

$$|\varepsilon \mu|^{1/2} = \frac{|\sigma(x)|}{\omega A} \left[ \frac{\cosh 2\beta l - \cos 2\kappa l}{\cosh 2\beta(x-l) + \cos 2\kappa(x-l)} \right]^{1/2}$$

Uit deze twee vergelijkingen kunnen we nu oplossen:

$$|\varepsilon| = \frac{|\sigma(x)|}{A[\kappa^2 + \beta^2]^{1/2}} \left[ \frac{\cosh 2\beta l - \cos 2\kappa l}{\cosh 2\beta(x-l) + \cos 2\kappa(x-l)} \right]^{1/2} \quad (5.3)$$

en: 
$$|\mu| = \frac{|\sigma(x)|}{\omega^2 A} [\kappa^2 + \beta^2]^{1/2} \left[ \frac{\cosh 2\beta l - \cos 2\kappa l}{\cosh 2\beta(x-l) + \cos 2\kappa(x-l)} \right]^{1/2} \quad (5.4)$$

$\phi_\sigma(x)$  en  $|\sigma(x)|$  zijn de fase en de amplitude van de meetpunten ter plaatse  $x$ . We zien nu dat we onze grootheden kunnen berekenen als we  $\kappa$  en  $\beta$  kennen. Om deze te bepalen is de volgende methode uitgewerkt, gebaseerd op het faseverschil tussen, en de amplitudeverhouding van, twee meetpunten.

Stel we meten de oppervlaktespanning  $\sigma(x)$  op twee plaatsen  $x_1$  en  $x_2$  in de trog. De amplitudeverhouding voor deze twee punten moet volgens (3.32) voldoen aan:

$$\left| \frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)} \right| = \left[ \frac{\cosh 2\beta(x_1-l) + \cos 2\kappa(x_1-l)}{\cosh 2\beta(x_2-l) + \cos 2\kappa(x_2-l)} \right]^{1/2} \quad (5.5)$$

Evenzo moet het gemeten faseverschil tussen deze twee punten volgens (3.32) gelijk zijn aan:

$$\begin{aligned} \phi_\sigma(x_1) - \phi_\sigma(x_2) = & \arctan \{ \tan \kappa(x_1-l) \cdot \tanh \beta(x_1-l) \} - \\ & - \arctan \{ \tan \kappa(x_2-l) \cdot \tanh \beta(x_2-l) \} \end{aligned} \quad (5.6)$$

We zien dat zowel (5.5) als (5.6) alleen afhankelijk zijn van  $\kappa$  en  $\beta$  omdat  $(x_1-l)$  en  $(x_2-l)$  bekend zijn. In principe dus twee vergelijkingen met twee onbekenden. De oplossingen  $\kappa$  en  $\beta$  zullen we analytisch niet kunnen vinden maar grafisch wel. We doen dit op de volgende manier.

We definiëren het dimensieloze golfgetal  $\kappa'$  en de dimensieloze dempingscoëfficiënt  $\beta'$ :

$$\begin{aligned} \kappa' &= \kappa l \\ \beta' &= \beta l \end{aligned} \quad (5.7)$$

Vullen we (5.7) in, in (5.5) en (5.6) dan geven deze respektievelijk:

$$\left| \frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)} \right| = \left[ \frac{\cosh 2\beta'(1-x_1/\ell) + \cos 2\eta'(1-x_1/\ell)}{\cosh 2\beta'(1-x_2/\ell) + \cos 2\eta'(1-x_2/\ell)} \right]^{1/2} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}(x_1) - \Phi_{\sigma}(x_2) = & \{ \arctan \eta'(1-x_1/\ell) \cdot \tanh \beta'(1-x_1/\ell) \} - \\ & - \arctan \eta'(1-x_2/\ell) \cdot \tanh \beta'(1-x_2/\ell) \}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

We kunnen nu een figuur konstruëren, waarin de amplitudeverhouding (5.8) op de ene as wordt uitgezet en het faseverschil (5.9) op de andere as met  $\eta'$  en  $\beta'$  als parameters. Om praktische redenen hebben we voor de waarden van  $x_1$  en  $x_2$  gekozen:  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Het resultaat voor kleine waarden van  $\eta'$  en  $\beta'$  is weergegeven in figuur 5.1 (het origineel is op A3 formaat). Deze figuur is bruikbaar voor onder andere cholesterol monolagen, en gemengde monolagen die overwegend uit cholesterol bestaan. Het golfgetal en de dempingscoëfficiënt van de golven in deze monolagen zijn namelijk relatief klein.

Het is nu mogelijk om bij gemeten waarden uit (5.8) en (5.9) meteen de bijbehorende waarden van  $\eta'$  en  $\beta'$  uit de figuur 5.1 af te lezen. Daarbij kunnen we dan meteen de onnauwkeurigheid in  $\eta'$  en  $\beta'$  aangeven, mits de figuur gedetailleerd genoeg is. Rond het meetpunt in de figuur kunnen we namelijk een onnauwkeurighedsgebied aangeven, waaruit we de onnauwkeurigheden van  $\eta'$  en  $\beta'$  direkt kunnen aflezen.

Omdat  $l$  bekend is, kennen we ook het golfgetal en de dempingscoëfficiënt, zodat we dus de grootheden uit de formules (5.1) tot en met (5.4) kunnen berekenen.

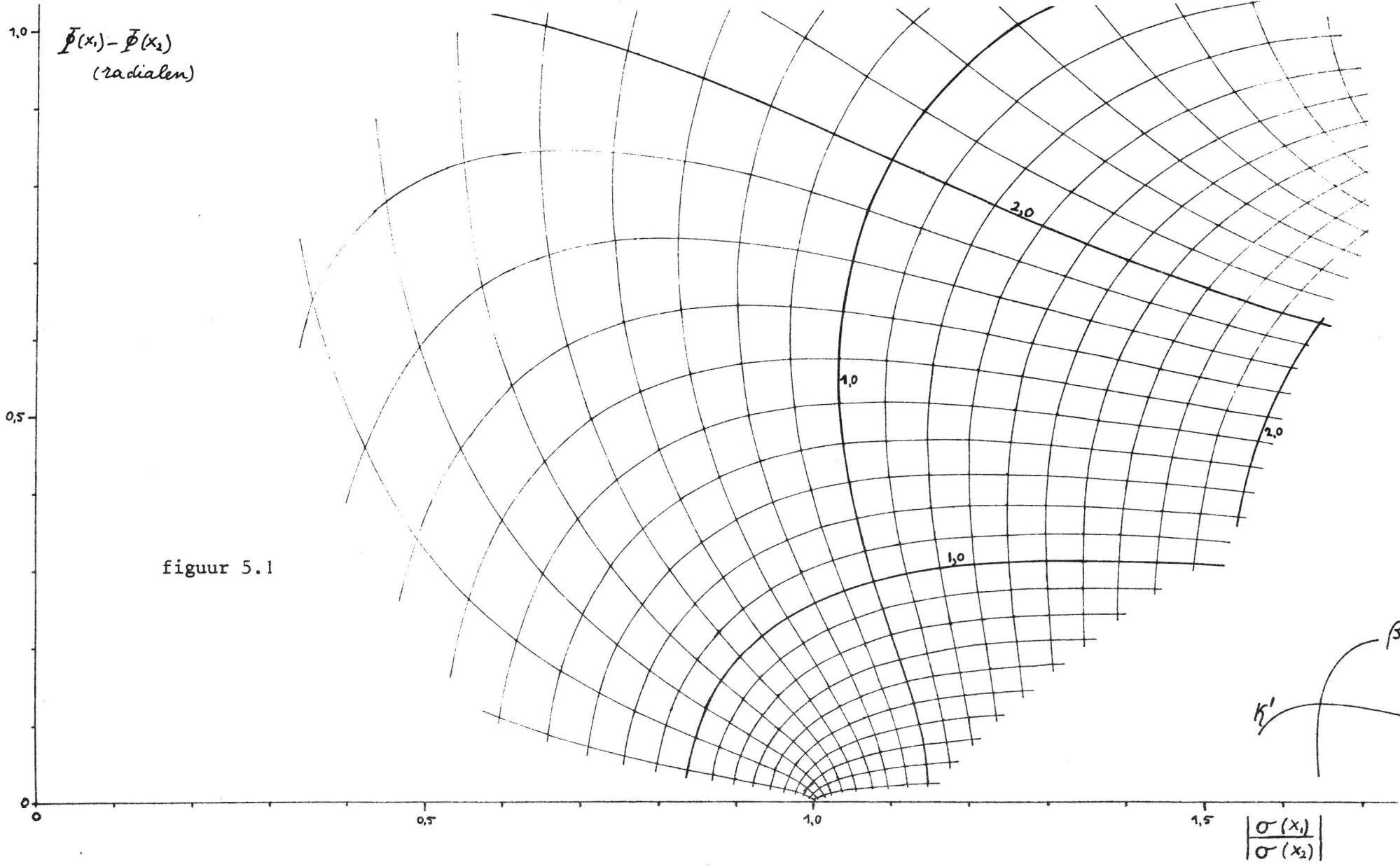
### 5.3 EEN METING AAN CHOLESTEROL.

Om te kijken in hoeverre de metingen overeenkomen met de theorie, is een uitgebreide meting gedaan. Uitgebreid wil hier zeggen dat op een groter aantal plaatsen regelmatig verdeeld over de lengte van de trog is gemeten.

De oppervlaktedruk  $\pi$  wordt gedefinieerd als het verschil tussen de oppervlaktespanning van zuiver water  $\sigma_w$  en die van de monolaag  $\sigma$ :

$$\pi = \sigma_w - \sigma \quad (5.10)$$

Voor onze meting is een monolaag opgebracht met een oppervlaktedruk van ongeveer  $10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$  (10 dyne  $\text{cm}^{-1}$ ).



De resultaten van deze meting gedaan bij een frequentie van 1/6 Hz zijn weergegeven in tabel 2. In de eerste kolom van de tabel staat de volgorde gegeven waarin op de verschillende plaatsen is gemeten, in de tweede kolom staat de afstand x van het meetpunt tot de plaats (x=0) van de bewegende barrière. In de derde kolom staat de amplitude van de oppervlaktespanningsgolf op de plaats x, en in de laatste kolom staat het faseverschil tussen de fase van de bewegende barrière en die van de oppervlaktespanning. Per meetplaats zijn enkele metingen (ellipsen) gedaan.

Tabel 2:

Cholesterol (10-9-'75)

$\pi = 10,5 \pm 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ ;  $\omega = 1,05 \text{ rad sec}^{-1}$ ;  $T = 22,0 \text{ }^\circ \text{ Celsius}$

nr.	x 10 m	$\Delta \sigma$ $10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$	$\bar{\phi}$ radialen
4	6,0	1,336; 1,342; 1,342; 1,345	0,076; 0,095; 0,076; 0,084
3	12,1	1,365; 1,365; 1,362	0,048; 0,047; 0,047
5	18,1	1,401; 1,404; 1,404	0,026; 0,029; 0,025
2	24,2	1,383; 1,383; 1,389	0,006; 0,004; 0,003
6	30,2	1,436; 1,439; 1,439	-0,010; -0,010; -0,009
1	36,3	1,409; 1,407; 1,409	-0,020; -0,019; -0,024
7	42,3	1,463; 1,465; 1,463	-0,025; -0,025; -0,026

De bewegende barrière bevindt zich in  $x=0$ , de niet-bewegende barrière in  $x=1=48,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

Gebruiken we de methode beschreven in 5.2, gebaseerd op de metingen in  $x_1=12,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  en  $x_2=24,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ , dan worden:

$$\left| \frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)} \right| = 0,985 \pm 0,003$$

$$\bar{\phi}_\sigma(x_1) - \bar{\phi}_\sigma(x_2) = 0,043 \pm 0,002 \text{ radialen.}$$

wat resulteert in:

$$\eta' = 0,44 \pm 0,02$$

$$\beta' = 0,31 \pm 0,02$$

(5.11)

Opmerking: De onnauwkeurigheden hierboven en hierna, zijn gebaseerd op de "spreiding" in de getallen per meetplaats van tabel 2.



Met (5.11) kunnen we de theoretiese waarden berekenen van amplitude en fase. We zullen dit doen ten opzichte van het midden tussen de barrières ( $x_2 = 24,2 \cdot 10^{-2}$  m) met formule (5.8) en (5.9):

$$|\sigma(x)| = |\sigma(x_2)| \left[ \frac{\cosh 2\beta'(1-x/l) + \cos 2\kappa'(1-x/l)}{\cosh 2\beta'(1-x_2/l) + \cos 2\kappa'(1-x_2/l)} \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_\sigma(x) = \bar{\phi}_\sigma(x_2) + \arctan \{ \tan \kappa'(1-x/l) \cdot \tanh \beta'(1-x/l) \} - \\ - \arctan \{ \tan \kappa'(1-x_2/l) \cdot \tanh \beta'(1-x_2/l) \}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

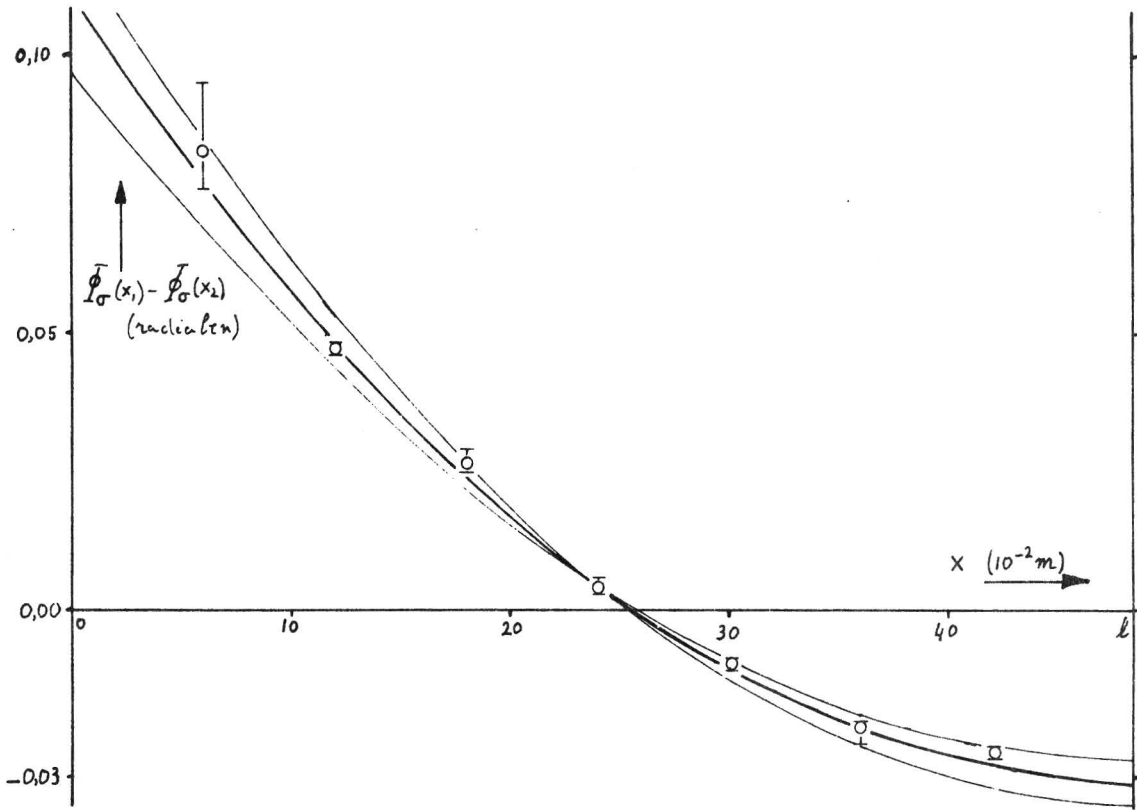
Het resultaat van deze berekeningen staat apart voor fase en amplitude weergegeven in figuur 5.2. De middelste lijn behoort bij de gemiddelde waarden van  $\kappa'$  en  $\beta'$ , de dunne lijnen behoren bij de uiterste waarden. Deze dunne lijnen geven het gebied aan waarin de meetpunten uit tabel 2 moeten liggen uitgaande van de onnauwkeurigheden in (5.11). Deze meetpunten en hun "spreiding", zijn getekend in figuur 5.2.

We zien dat de gemeten faseverschillen zeer goed voldoen aan de eis dat deze binnen het "onnauwkeurigheidsgebied" moeten liggen, aangegeven door de dunne lijnen. Voor de amplitudes geldt dit zeker niet. Het is mogelijk dat de afwijking in de verwachte amplitudewaarden een driftverschijnsel is, of een verandering in het meetelement (plaatje+balansarm+transducer). Tegen beide is echter in te brengen dat een dergelijk verschijnsel gekoppeld is aan een verandering in de meting van de grootte van de oppervlaktespanning. Dit laatste is echter niet het geval geweest. Een direkte oorzaak voor de afwijkingen in de amplitudemeting kan (nog) niet worden gegeven.

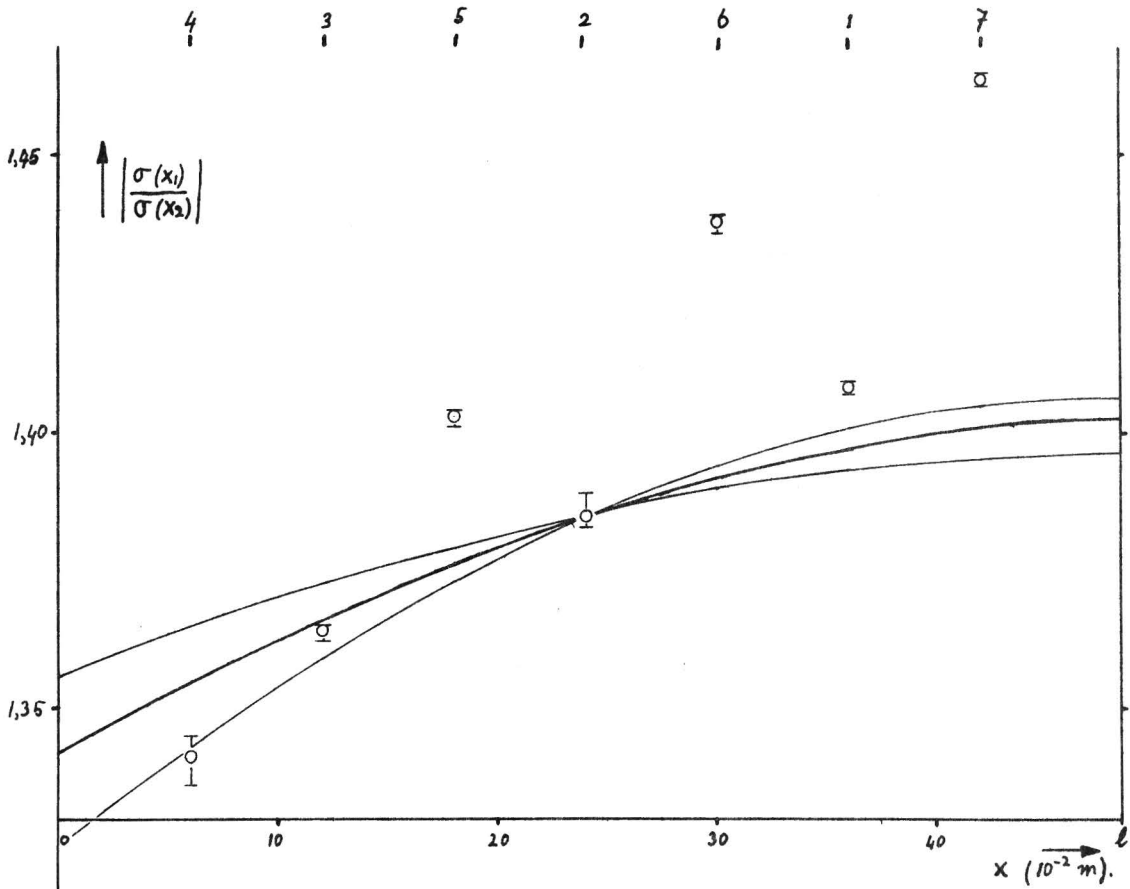
Dat de faseverschillen ongevoelig zijn voor afwijkingen in de amplitudemetingen, wordt duidelijk als we nog eens kijken hoe deze worden bepaald (zie ook hoofdstuk 4.11). omdat het faseverschil wordt berekend uit de verhouding van de diagonalen van een ellips, wordt deze niet beïnvloed door veranderingen in de amplitude.

Wat betreft de faseverschillen mogen we konkluderen dat de metingen overeenkomen met de theorie. Voor de amplitudemeting valt dit niet te zeggen. Als laatste controlemiddel hebben we echter nog de oppervlakte soortelijke massa en de bijbehorende fasehoek, waarvan we de theoreties berekende waarden kennen (zie hoofdstuk 3.7). Berekening met (5.2), (5.4), en (5.11) geeft:

$$\begin{aligned} \mu &= 0,76 \pm 0,08 \text{ kg m}^{-2} \\ \delta &= -1,21 \pm 0,05 \text{ radiaal} \end{aligned} \quad (5.14)$$



figuur 5.2



De theoretiese waarden bij deze deze gebruikte frequentie (1/6 Hz) zijn:

$$\begin{aligned} |\mu| &= \left(\frac{\eta \rho}{2\omega}\right)^{1/2} = 0,96 \text{ kg m}^{-2} \\ \delta &= -\frac{\pi}{4} = -0,79 \text{ radiaal} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Hoewel de waarden in (5.14) en (5.15) niet gelijk zijn, kunnen we toch zeggen dat er enige overeenkomst is; bij de fase wat minder dan bij de amplitude. Het verschil zouden we op drie manieren kunnen verklaren:

- de waarden (5.11) voor het golfgetal en de dempingscoëfficiënt zijn niet juist.
- de aanname van een vlakke golfbeweging is niet juist (voor cholesterol), dat wil zeggen dat de wanden van de trog of de randen van het oppervlak de beweging in het midden beïnvloeden.
- de aannamen, onder andere in hoofdstuk 2, gedaan voor de golfbeweging in de vloeistof zijn toch niet juist geweest.

Is het eerste geval waar, dan moeten het golfgetal en de dempingscoëfficiënt in (5.11) zo sterk afwijken van de werkelijke waarden dat de overeenkomst tussen meting en theorie zoals afgebeeld in figuur 5.2 zeer toevallig zou zijn. Voor het tweede en het derde geval geldt, dat we dan in figuur 5.2 afwijkingen hadden moeten konstateren ten opzichte van het theoretiese verloop, en wel vooral aan het uiteinde van de trog bij  $x=1$ .

De werkelijke reden voor de afwijking tussen (5.14) en (5.15) is nog niet duidelijk. Er zal meer experimenteel materiaal moeten komen om er achter te komen waaraan de afwijking moet worden geweten, of dit een fout is in het experiment of een tekortkoming van de theorie. We kunnen hierbij onder andere denken aan soortgelijke "uitgebreide" metingen bij andere frequenties, en aan monolagen met golven van kortere golflengte, zoals bijvoorbeeld gemengde monolagen van cholesterol en lecithine.

We zullen nu de elasticiteitsmodulus  $|\epsilon|$  en de fasehoek  $\varphi$  berekenen met behulp van (5.1), (5.3), en (5.11):

$$\begin{aligned} |\epsilon| &= 0,66\delta \pm 0,002 \text{ Nm}^{-1} \\ \varphi &= 0,015 \pm 0,004 \text{ radiaal} \end{aligned} \quad (5.16)$$

De onnauwkeurigheden in (5.16) zijn nog steeds gebaseerd op de "spreiding" van de getallen in de tabel 2.

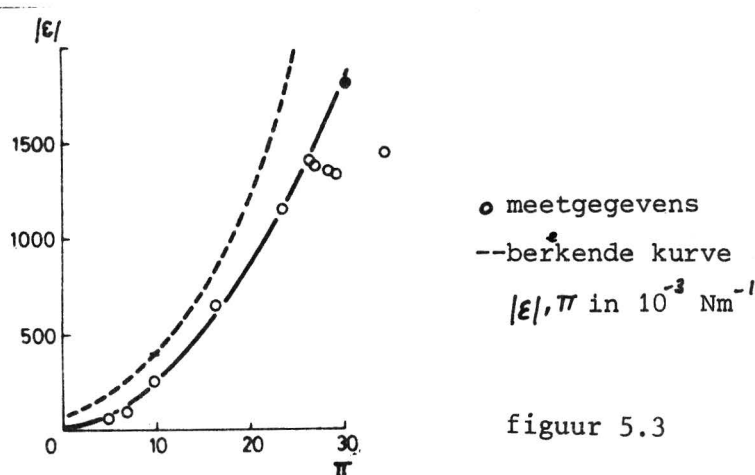
Omdat de formules (5.1) en (5.3) weinig gevoelig blijken te zijn voor veranderingen in het golfgetal en de dempingscoëfficiënt (voor deze lage

waarden), worden de waarden en hun onnauwkeurigheden in (5.16) hoofdzakelijk bepaald door die van de oorspronkelijke meetpunten  $|\sigma(x)|$  en  $\bar{I}_0(x)$ . Als we de onnauwkeurigheden niet betrekken op de spreiding in de meetpunten per meetplaats, maar op de afwijking van de meetpunten van de theoretiese lijn in figuur 5.2, dan verandert de onnauwkeurigheid van de fasehoek niet, maar die van de modulus wel:

$$|\varepsilon| = 0,67 \pm 0,02.$$

#### 5.4 RESULTATEN.

De waarde voor de elasticiteitsmodulus uit paragraaf 5.2 kunnen we vergelijken met die uit een artikel van P.Joos (literatuur 1) waarin hij de elasticiteit heeft gegeven van een cholesterol monolaag als functie van de oppervlakedruk (zie figuur 5.3). het blijkt dat onze waarden (5.16),



figuur 5.3

en ook die van enige andere eigen metingen aan cholesterol, een faktor twee groter zijn dan de door Joos gemeten waarden.

We moeten voorzichtig zijn met de interpretatie van bovengenoemd verschil, omdat er nog enige vraagtekens bestaan wat betreft de meetmethode. Zeker is dat Joos een eenvoudiger theorie heeft gebruikt (literatuur 2) voor de verwerking van zijn metingen, en dat de door hem gevonden waarden bij een lagere frequentie zijn gemeten. Dit alleen kan het grote verschil echter niet verklaren.

Aanvaardbaarder is te veronderstellen dat er verschil is in de samenstelling van het gebruikte cholesterol (verschil in zuiverheid). Bekend is dat kleine verontreinigingen in zuivere monolagen een grote invloed hebben op het oppervlakteactieve gedrag.

Er is dus een duidelijk verschil tussen onze metingen en die van Joos,

maar er zijn niet voldoende metingen om een uitspraak te kunnen doen over de reden van dit verschil.

#### 5.5 KONKLUSIE.

We hebben gezien dat de theorie zoals beschreven in hoofdstuk 3 redelijk overeenkomt met het experiment. Betrekken we daar het resultaat van hoofdstuk 2 bij, in casu de theoreties voorspelde oppervlakte soortgelijke massa, dan blijkt ook daarin, gezien de vereenvoudigingen in de theorie, de overeenkomst aanvaardbaar te zijn.

Wil de, in dit hoofdstuk beschreven, meetmethode goede resultaten geven voor cholesterol en soortgelijke monolagen, dan moet de amplitude meting van de opstelling nog verbeterd worden.

We konkluderen dat meer metingen moeten worden verricht om een verantwoorde uitspraak te kunnen doen over de nauwkeurigheid van de elasticiteitsmetingen, en om de oorzaken van de bestaande verschillen tussen de meetresultaten en de theorie op te helderen. Het verdient aanbeveling om, gezien de uitgebreidheid van de formules, bij het verder ontwikkelen en testen van de meetmethode gebruik te maken van een komputor.