

MASTER

Dispersie in enkelvoudige en samengestelde homogene, isotrope botsingsvrije plasma's

Lambert, A.J.D.

Award date:
1975

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

DISPERSIE IN ENKELVOUDIGE EN
SAMENGESTELDE HOMOGENE, ISO-
TROPE BOTSINGSVRIJE PLASMA'S

Verslag van het afstudeerwerk
van Fred Lambert
dat gemaakt is in de vakgroep
Theoretische Natuurkunde
onder leiding van
F.W.Sluijter en D.C.Schram
Technische Hogeschool Eindhoven
20-9-1974 tot 19-9-1975

Opgedragen aan:
Friedrich Simon Archenhold

INHOUD

Hoofdstuk/paragraaf/deelparagraaf	blz.
0. Samenvatting	1
1. Lineaire berekening aan een Vlasov-Poisson plasma	3
1.0. Inleiding	3
1.1. Het beginwaardeprobleem	3
1.2. Het randvoorwaardeprobleem	8
2. De dispersierelatie, behorend bij een enkelvoudig plasma	14
2.0. Inleiding	14
2.1. Uitwerking van de dispersierelatie voor een samengesteld plasma	14
2.2. De dispersierelatie, behorend bij een enkelvoudig plasma	17
2.3. Benaderingsformules voor de dispersierelatie	19
2.4. De oplossingstakken van de dispersierelatie bij een enkelvoudig plasma	20
2.4.1. De elektronentak	20
2.4.2. De ionentak	21
2.5. Benaderingsformule voor het reële deel van de dispersierelatie	23
2.5.1. De elektronentak	23
2.5.2. De ionentak	23
2.6. Benaderingsformules voor het imaginaire deel van de dispersierelatie	24
2.6.1. De elektronentak	24
2.6.2. De ionentak	24
2.7. Invloed van de drift	26
2.7.1. De elektronentak, reële deel	26
2.7.2. De elektronentak, imaginaire deel	26
2.7.3. De ionentak, reële deel	27
2.7.4. De ionentak, imaginaire deel	27
2.7.5. Grafische bepaling van de kritische drift	28
2.7.6. Grensgeval voor $\theta \rightarrow \infty$	29

<u>Hoofdstuk/paragraaf/deelparagraaf</u>	<u>blz.</u>
3. De dispersierelatie, behorend bij een samengesteld plasma	31
3.0. Inleiding	31
3.1. De dispersierelatie	31
3.2. Grafische methode ter bepaling van de ionenbijdrage	32
3.3. Eigenschappen van de kurven van $\eta Z'(\epsilon_1) + (1-\eta)Z'(\epsilon_2)$	33
3.4. Mengdemping of contamination damping	34
3.5. De dispersierelatie, het reële deel	34
3.6. De dispersierelatie, het imaginaire deel	35
3.7. Invloed van de drift	37
4. Digitale methode ter berekening van de dispersiekrommen	38
4.0. Inleiding	38
4.1. Theoretische grondslag	38
4.2. De praktische uitwerking	39
4.3. Resultaten van berekeningen	43
4.3.1. De eerste-orde elektronenmode	43
4.3.2. De eerste-orde ionenmode	48
4.4. De numerieke berekening, uitgevoerd voor een samengesteld plasma	51
4.4.0. Inleiding	51
4.4.1. Het geval $\theta = 1000$	51
4.4.2. Het geval $\theta = 10$	54

<u>Hoofdstuk/paragraaf/deelparagraaf</u>	<u>blz.</u>
5. Golf-golfkoppeling	56
5.0. Inleiding	56
5.1. De berekening in tweede-orde	56
5.2. Het gedrag van E_2 bij meervoudige polen	59
5.2.0. Inleiding	59
5.2.1. Enkelvoudige pool	59
5.2.2. Dubbele pool	60
5.2.3. Bijna samenvallende polen	60
5.3. Gedrag bij twee bijna samenvallende polen, nader beschouwd	61
5.4. Gedrag bij zuiver frekwentieverschil en zuiver dempingsverschil	62
5.4.1. Geval waarbij $\Delta\gamma = 0$	62
5.4.2. Geval waarbij $\Delta\omega = 0$	63
5.5. Beschouwing van golf-golfkoppeling in enkele praktische gevallen	64
5.5.1. Koppeling van elektronentak en ionentak	64
5.5.2. Koppeling van twee oplossingen van de ionentak	65
LITTERATUUR	66
APPENDIX 1	68

Friedrich Simon Archenhold

Friedrich Simon Archenhold (1861-1939) was een astronoom die naast wetenschappelijk werk - zoals het ontwikkelen van fotografische technieken in de sterrenkunde - belangrijke initiatieven heeft genomen om de natuurwetenschappelijke kennis onder alle lagen van de bevolking te verbreiden.

Deze geleerde verwezenlijkte het plan om een grote sterrenkijker op te richten op de Berlijnse jaarbeurs. Op 1 mei 1896 werd de kijker opengesteld voor het publiek en de belangstelling was zo overweldigend, dat de inrichting werd uitgebouwd tot een permanente volkssterrenwacht in het Treptow-park, waaraan een museum met o.m. een kostbare kollektie instrumenten en een voortreffelijke bibliotheek werd toegevoegd.

Het eenvoudige houten gebouwtje waarin alles tijdelijk was ondergebracht bleek te klein om de kostbare inventaris veilig te stellen. De Duitse overheid wilde echter voortzetting van deze "onzin" niet subsidiëren. Er werd een grootscheepse geldinzamelingsactie georganiseerd met name door de Berlijnse werkende bevolking. De Berlijnse arbeiders brachten voldoende geld bijeen voor een nieuw gebouw. De vernieuwde sterrenwacht opende haar poorten weer in 1909.

Toen in 1931 de zoon van Friedrich Archenhold de leiding van de sterrenwacht overnam, wachtte de Archenholds een moeilijke taak.

Geleidelijk aan immers werden de terreurakties van de nazi-benden tegen minderheidsgroepen en vooruitstrevende krachten talrijker.

Brandstichtingen en plunderingen van eigendommen van vooruitstrevende en Joodse organisaties werden een steeds vaker voorkomend verschijnsel. Dit alles raakte ook het werk van de Volkssterrenwacht. Deze instelling stelde haar ruimte ter beschikking aan het anti-fascistische verzet, en zo kon men de verzetsmensen onder de kijker bij elkaar aantreffen, in vergadering.

De nazi's namen - op grond van hun barbaarse rassenwetten - de sterrenwacht over in 1936. Friedrich Archenhold overleed in 1939 en kon niet meer meemaken dat op 1 mei 1945 de Vrijheidsvlag boven de sterrenwacht wapperde. Deze was, door wanbeheer en oorlogsgeweld, totaal verwoest, al kon de grote kijkerbuis worden hersteld.

Reeds in juli 1945 werden, tijdens de zonsverduistering, op de puinhopen al weer de eerste lezingen en voordrachten voor de Berlijnse bevolking gehouden. Sedertdien is de sterrenwacht opnieuw opgebouwd, en ze vervult als "Archenhold Sternwarte" opnieuw een belangrijke kulturele en wetenschappelijke functie ten dienste van de bevolking.

Deze geschiedenis maakt eens te meer duidelijk dat de natuurwetenschap - en dit in schrille tegenstelling tot dat wat de meeste publiciteitsmedia ons doen geloven - wel degelijk verankerd ligt in alle lagen van de bevolking. Als zodanig is het ^{de} een belangrijke taak te beschouwen om wetenschappelijke kennis uit te bouwen en uit te dragen.

Daartoe is een grotere toegankelijkheid nodig van het onderwijs. Sociale en financiële barrières dienen te worden opgeheven. Hetzelfde geldt uiteraard t.a.v. musea, volkssterrenwachten, bibliotheken en andere kulturele instellingen.

Vanuit deze overtuiging moeten we ons - in het voetspoor van Archenhold - krachtig teweer stellen tegen iedere poging om het kultureel en wetenschappelijk apparaat af te breken en -integendeel- de uitbouw van dit soort voorzieningen eisen. "Argumenten" als zouden deze voorzieningen elitair zijn, moeten worden ontzenuwd.

Ook de studiefinanciering vereist aandacht. Sterk dient te moeten worden gewaarschuwd tegen de pogingen om rentedragende leningen bij particuliere banken in te voeren.

Bedenk daarbij, dat - als deze afbraakpogingen tien jaar eerder tot uitvoer zouden zijn gebracht - dit afstudeerverslag een van de vele was, die nooit geschreven zouden zijn !!

Fred Lambert

bronnen: "Neues Deutschland" van 8 augustus 1975

"Die Archenhold Sternwarte", Berlin-Treptow, 1956

(met dank aan Volkssterrenwacht Simon Stevin te Hoeven).

0. SAMENVATTING

In dit afstudeerverslag worden enkele aspecten van de dispersie in enkelvoudige en samengestelde ééndimensionale Vlasov-Poisson-plasma's behandeld.

Met behulp van een Fourier-transformatie naar plaats en tijd wordt een eerste-orde storingsberekening uitgevoerd aan het stelsel differentiaalvergelijkingen van Vlasov en Poisson en wel voor twee gevallen: een beginwaardeprobleem en een testladingsprobleem waarbij als testlading een zich in de oorsprong bevindende oscillerende dipool is genomen.

Essentiëel resultaat van deze berekeningen is de dispersierelatie. Deze kan door het invoeren van de zgn. Plasma-dispersiefunctie op eenvoudige wijze worden uitgeschreven, indien wordt aangenomen dat de geladen deeltjes in de evenwichtstoestand verdeeld zijn over de snelheidsruimte volgens de Maxwellverdeling.

De plasma-dispersiefunctie kan in bepaalde gevallen door een term van de reeksontwikkeling, in andere gevallen door een term van de asymptotische ontwikkeling worden weergegeven. Dit leidt tot benaderende oplossingen, die vaak bijzonder praktisch zijn voor fysisch zinvolle parameterwaarden. Om de gevonden betrekkingen algemeen en onderling vergelijkbaar te maken, is aandacht besteed aan notatie en normering.

Overeenkomstige benaderingsformules blijken voor een samengesteld plasma in een kleiner gebied geldig dan voor een enkelvoudig plasma. In het geval van niet te grote θ is de demping voor een samengesteld plasma groter dan voor een enkelvoudig plasma. (Mengdemping of contamination damping). Voor grote θ is ze voor een samengesteld plasma echter kleiner. Een en ander is in te zien met behulp van de benaderingsformules, en eveneens met behulp van een eenvoudige grafische methode. Laatstgenoemde methode komt verder van pas bij de bepaling van kritische driftsnelheden in samengestelde plasma's.

De benaderingsformules zijn getoetst aan een nauwkeurige numerieke berekening waartoe een eenvoudig ALGOL-programma is ontwikkeld, dat voor te kiezen parameterwaarden het verband tussen het golfgetal, het reële en het imaginaire deel van de frekwentie berekent.

Het verslag sluit af met een inleiding in het tweede-orde probleem.

Deze berekening leert dat resonantie kan optreden (golf-golfkoppeling). In de praktisch voorkomende gevallen wordt niet voldaan aan de eksakte resonantievoorwaarde, doch treedt een geringe afwijking (mismatching) op.

Er wordt gekeken wat de konsekventies van deze mismatching zijn. Enkele in de praktijk vóórkomende gevallen worden nader beschouwd.

1. LINEAIRE BEREKENING AAN EEN VLASOV-POISSON-PLASMA

1.0. Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een berekening in eerste orde uitgevoerd aan een Vlasov-Poissonplasma in één dimensie.

Het Vlasov-Poissonstelsel wordt opgelost door middel van dubbele Fourier-transformatie.

Op analoge wijze wordt achtereenvolgens een beginwaardeprobleem behandeld en een probleem waarbij een oscillerende dipool (testlading) in de oorsprong is aangebracht.

1.1. Het beginwaardeprobleem

Uitgangspunt zijn de vergelijkingen van Vlasov en Poisson: (1,5)

$$\frac{\partial f_s}{\partial k} + v \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{e_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0 \quad (1.1.)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \sum_s n_s \frac{e_s}{\epsilon_0} \int f_s dv \quad (1.2.)$$

Deze worden gelineariseerd met behulp van:

$$f_s(x, v, t) = F_s(v) + f_{s(1)}(x, v, t) \quad (1.3.)$$

en:

$$E(x, t) = E_{(1)}(x, t) \quad (1.4.)$$

waarin $f_{s(1)}$ en $E_{(1)}$ eerste-orde-grootheden zijn.

De index s heeft betrekking op de deeltjessoort (elektron, ion).

n is het aantal deeltjes per volume-eenheid, m is de massa, e is de lading, ϵ_0 de diëlektrische konstante, E het elektrisch veld en f de verdelingsfunctie.

$f_s(x, v, k)$ zo' gedefinieerd, dat:

$$\int f_s(x, v, k) dx dv = 1 \quad \int F_s(v) dv = 1 \quad (1.4.a)$$

(1.1.) en (1.2.) kunnen dan worden geschreven als:

$$\sum_s n_s \frac{e_s}{\epsilon_0} \int F_s dv = 0 \quad (1.5.)$$

(ladingsneutraliteit)

$$\frac{\partial f_{s(c)}(v)}{\partial t} + v \frac{\partial f_{s(c)}(v)}{\partial x} + \frac{e_s}{m_s} E_{(c)} \frac{dF_s}{dv} = 0 \quad (1.6.)$$

$$\frac{\partial E_{(c)}}{\partial x} = \sum_s n_s \frac{e_s}{\epsilon_0} \int f_{s(c)} dv \quad (1.7.)$$

Nu wordt de beginwaarde ^{voor} opgesteld:

$$f_s(x, v, 0) = F_s(v) + g_{s(c)}(x, v) \quad (1.8.)$$

Definiëer:

$$\begin{aligned} E_{(c)}^+(x, k) &= E_{(c)}(x, k) & \text{voor } k > 0 \\ E_{(c)}^+(x, k) &= 0 & \text{voor } k < 0 \end{aligned} \quad (1.9.)$$

Voer een tweezijdige Fouriertransformatie uit naar de plaats overeenkomstig de afspraak:

$$f_{s(c)}^+(x, v, k) = (2\pi)^{-1/2} \int dk \bar{f}_{s(c)}^+(k, v, k) \exp ikx \quad (1.10.)$$

$$\bar{f}_{s(c)}^+(k, v, k) = (2\pi)^{-1/2} \int dx f_{s(c)}^+(x, v, k) \exp -ikx \quad (1.11.)$$

waardoor het stelsel (1.6.), (1.7.) overgaat in:

$$\frac{\partial \bar{f}_{s(c)}^+}{\partial k} + ikv \bar{f}_{s(c)}^+ + \frac{e_s}{m_s} \bar{E}_{(c)}^+ \frac{d\bar{F}_s}{dv} = 0 \quad (1.12.)$$

$$ik \bar{E}_{(c)}^+ = \sum_s n_s \frac{e_s}{\epsilon_0} \int \bar{f}_{s(c)}^+ dv \quad (1.13.)$$

Vervolgens wordt een enkelzijdige Fouriertransformatie van dit stelsel uitgevoerd naar de tijd, overeenkomstig de afspraak:

$$\bar{f}_{s(c)}^+(k, v, k) = (2\pi)^{-1/2} \int d\omega \tilde{f}_{s(c)}^+(k, v, \omega) \exp -i\omega k \quad (1.14.)$$

$$\tilde{f}_{s(c)}^+(k, v, \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int dk \bar{f}_{s(c)}^+(k, v, k) \exp i\omega k \quad (1.15.)$$

Dan gaat het stelsel (1.12.), (1.13.) over in:

$$-\bar{g}_{s(\omega)}(k, \nu) + i(k\nu - \omega) \tilde{f}_{s(\omega)}^+ + \frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{(\omega)}^+ \frac{dF_s}{d\nu} = 0 \quad (1.16.)$$

$$ik \tilde{E}_{(\omega)}^+ = \sum_s n_s \frac{e_s}{\epsilon_0} \int \tilde{f}_{s(\omega)}^+ d\nu \quad (1.17.)$$

Uit (1.16.) volgt:

$$i(k\nu - \omega) \tilde{f}_{s(\omega)}^+ = -\frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{(\omega)}^+ \frac{dF_s}{d\nu} + \bar{g}_{s(\omega)}$$

zodat,

$$\tilde{f}_{s(\omega)}^+ = i \frac{e_s}{m_s} \frac{dF_s}{d\nu} \frac{\tilde{E}_{(\omega)}^+}{k\nu - \omega} - i \frac{\bar{g}_{s(\omega)}}{k\nu - \omega} \quad (1.18.)$$

De theorie der komplekse Fourier-integratie leert dat, indien

$\int_0^\infty \bar{f}_{s(\omega)}^+(k, \nu, k) dk$ bestaat, $\tilde{f}_{s(\omega)}^+$ analytisch is in het pos. im. ω -halfvlak. Zie appendix 1.

Evenzo kan men konkluderen dat $\tilde{E}_{(\omega)}^+$ analytisch is in het pos. im. halfvlak.

Overeenkomstig appendix 1 (A.10.) noteert men:

$$\tilde{f}_{s(\omega)}^+ = i \frac{e_s}{m_s} \frac{dF_s}{d\nu} \frac{\tilde{E}_{(\omega)}^+}{k\nu - \omega_+} - \frac{i \bar{g}_{s(\omega)}}{k\nu - \omega_+} \quad (1.19.)$$

Vult men (1.19.) in in (1.17.) dan krijgt men de uitdrukking:

$$\tilde{E}_{(\omega)}^+ \left(1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k} \int \frac{dF_s}{d\nu} \frac{d\nu}{k\nu - \omega_+} \right) = - \sum_s \frac{n_s e_s}{\epsilon_0 k} \int \frac{\bar{g}_{s(\omega)}(k, \nu)}{k\nu - \omega_+} d\nu \quad (1.20.)$$

Indien men definiëert de diëlektrische koëfficiënt:

$$\epsilon^+(k, \omega) = 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k} \int \frac{dF_s}{d\nu} \frac{d\nu}{k\nu - \omega_+} \quad (1.21.)$$

en:

$$\bar{g}_{s(\omega)}^+(k, \omega) = \int \frac{\bar{g}_{s(\omega)}(k, \nu)}{k\nu - \omega_+} d\nu \quad (1.22.)$$

kan men (1.20.) schrijven als:

$$\tilde{E}_{(\omega)}^+(k, \omega) = - \frac{1}{\epsilon^+(k, \omega)} \sum_s \frac{n_s e_s}{\epsilon_0 k} \bar{g}_{s(\omega)}^+(k, \omega) \quad (1.23.)$$

De terugtransformatie:

De vergelijking $\epsilon^+(k, \omega) = 0$ heeft in het algemeen bij een bepaalde waarde van k meerdere waarden van ω , die een oplossing zijn.

Deze waarden behoren tot verschillende oplossingsstakken of modes.

Over het algemeen bevinden zich de oplossingen in het negatief imaginaire ω -halfvlak. Dat hoeft niet het geval te zijn, doch in het laatste geval gaat de integratieweg in het ω -vlak steeds aan de bovenkant langs de singulariteiten.

Geven we de diverse takken aan met index M . In het geval van een plasma met elektronen en een of meer ionsoorten zijn er in het algemeen oneindig veel elektronentakken en oneindig veel ionentakken. In het algemeen echter bevinden zich de hogere-orde takken ver van de reële ω -as af, aan de negatieve zijde, en fysisch betekent dit dat bijdragen van deze takken zeer sterk gedempt zijn.

Daarom nemen we slechts de eerste-orde elektronentak ($M=E$) en de eerste-orde ionentak ($M=I$) mee in de beschouwingen.

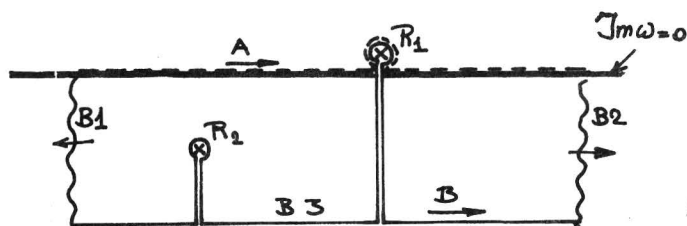
Elk van deze takken is verantwoordelijk voor twee polen in het komplekse

$$\omega \text{-halfvlak: } \omega_M = \pm \beta_M + i\gamma_M. \quad (\gamma_M \text{ i.h.a. } < 0) \quad (1.23a)$$

Van het bovenstaande wordt gebruik gemaakt bij de terugtransformatie van (1.23). Met behulp van (1.14):

$$\bar{E}_{(k)}^+ = - (2\pi)^{-1/2} \sum_s \frac{n_s e_s}{\epsilon_0 k} \int d\omega \frac{\bar{g}_{s\omega}^+(\omega, k)}{\epsilon^+(\omega, k)} \exp -i\omega k \quad (1.24)$$

De kontoer gaat bovenlangs de singulariteiten (kontoer A in figuur 1.1.), we kunnen de kontoer ook in het negatief imaginair halfvlak drukken, waarbij de bijdragen van traject B1 en B2 naar nul gaan als die trajecten naar $\text{Re } \omega = \mp \infty$ verschuiven. Omdat $\text{Im } \omega < 0$ zal de bijdrage van traject B3 naar nul gaan voor $k \rightarrow \infty$ en wel des te sneller naarmate $\text{Im } \omega$ negatiever wordt gekozen.



figuur 1.1.

Aangezien $\bar{q}_{s(i)}^+(k, \omega)$ analytisch is in ω , zijn er onder de integrand van (1.24) slechts daar polen te vinden, waar aan de vergelijking $\mathcal{E}^+(k, \omega) = 0$ wordt voldaan. Geven we het residu aan door $R(k, \omega)$ dan kan men (1.23) vereenvoudigen tot:

$$\tilde{E}_{(i)}^+(k, \omega) = \sum_M \left[\frac{R(k, \beta_M + i\gamma_M)}{\omega - (\beta_M + i\gamma_M)} + \frac{R(k, -(\beta_M + i\gamma_M))}{\omega - (-\beta_M + i\gamma_M)} \right] \quad (1.25)$$

waarmee (1.24) geschreven wordt als:

$$\bar{E}_{(i)}^+ = (2\pi)^{1/2} i \sum_M \left[R(k, \beta_M + i\gamma_M) \exp -i(\beta_M + i\gamma_M)k + \dots \right] \quad (1.26)$$

Voor het residu geldt de uitdrukking:

$$R(k, \beta_M + i\gamma_M) = - \sum_s \frac{n_s e_s}{\epsilon_0 k} \bar{q}_{s(i)}^+(k, \beta_M + i\gamma_M) \cdot \frac{1}{\left. \frac{\partial \mathcal{E}^+(k, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega = \beta_M + i\gamma_M}} \quad (1.27)$$

vergelijk (3), formule (19).

Indien dan teruggetransformeerd wordt volgens (1.10), wordt gevonden:

$$E_{(i)}^+(x, k) = i \int dk \sum_M \left[R(k, \beta_M + i\gamma_M) \cdot \exp i(kx - (\beta_M + i\gamma_M)k) + \dots \right] \quad (1.28)$$

Uit (1.28) is te konkluderen, dat enkel die lopende-golfoplossingen voldoen waarbij het verband tussen k en ω wordt gegeven door de betrekking:

$$\mathcal{E}^+(k, \omega) = 0 \quad (1.29)$$

die daarom de dispersierelatie heet.

1.2. Het randvoorwaardeprobleem

In tegenstelling tot het beginwaardeprobleem, waarbij de verstoring van de verdelingsfunctie ten tijde $t=0$ vastligt, kenmerkt het hier besproken randvoorwaardeprobleem zich door een opgelegde frekwente ω_0 . Deze wordt gerealiseerd door op het tijdstip $t = 0$ in de oorsprong een testlading aan te brengen, bestaande uit een oscillerende dipool. Deze kan als volgt worden beschreven: (7)

$$\rho_{ext}^+(x, k) = \lim_{x_0 \downarrow 0} \frac{\rho_0 x_0}{2} \exp(-i\omega_0 k) [\delta(x-x_0) - \delta(x+x_0)] \quad k > 0$$

$$\rho_{ext}^+(x, k) = 0 \quad k < 0$$

met $\rho_0 x_0^2 = \text{konstant voor } x_0 \downarrow 0$. (1.30)

Het gelineariseerde Vlasov-Poissonstelsel: (1.6.) en (1.7.) gaat over in:

$$\frac{\partial f_{s(c)}^+}{\partial k} + v \frac{\partial f_{s(c)}^+}{\partial x} + \frac{e_s}{m_s} E_{(c)}^+ \frac{df_s}{dv} = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial E_{(c)}^+}{\partial x} = \frac{\rho_{ext}^+}{\epsilon_0} + \sum_s n_s \frac{e_s}{\epsilon_0} \int f_{s(c)}^+ dv \quad (1.32)$$

Voer de tweezijdige Fourier-transformatie uit naar k , waarbij:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{ext}^+(k, k) &= \frac{(2\pi)^{-1/2}}{2} \rho_0 x_0 \exp(-i\omega_0 k) (\exp(ikx_0) - \exp(-ikx_0)) = \\ &= (2\pi)^{-1/2} ik \rho_0 x_0^2 \exp(-i\omega_0 k) \quad k > 0 \\ &= 0 \quad k < 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

en voer vervolgens de enkelzijdige Fourier-transformatie uit naar ω , waarbij voor de eenvoud gesteld wordt: $g_{s(c)}(x, v) = 0$.

Daarbij geldt:

$$\tilde{\rho}_{ext}^+(k, \omega) = \frac{ik \rho_0 x_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(i(\omega - \omega_0)k) dk \quad (1.34)$$

Nu bestaat het rechterlid voor $\text{Im } \omega > 0$, en daar geldt:

$$\tilde{\rho}_{ext}^+(k, \omega) = -\frac{k \rho_0 x_0^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0} \quad (1.35)$$

Met behulp van (1.35) kan $\tilde{\rho}_{ext}^+$ analytisch worden voortgezet voor $\text{Im } \omega < 0$ waarmee het Vlasov-Poissonstelsel overgaat in:

$$i(kv - \omega) \tilde{f}_{s(i)}^+ + \frac{e_s}{m_s} \tilde{E}_{(i)}^+ \frac{dF_s}{dv} = 0 \quad (1.36)$$

$$ik \tilde{E}_{(i)}^+ = \frac{\tilde{\rho}_{ext}^+}{\epsilon_0} + \sum_s n_s \frac{e_s}{\epsilon_0} \int \tilde{f}_{s(i)}^+ dv \quad (1.37)$$

Uit (1.36) volgt, analoog aan (1.19):

$$\tilde{f}_{s(i)}^+ = i \frac{e_s}{m_s} \frac{dF_s}{dv} \frac{\tilde{E}_{(i)}^+}{kv - \omega} \quad (1.38)$$

en wordt deze uitdrukking gesubstitueerd in (1.37) dan levert dit:

$$\tilde{E}_{(i)}^+ = \frac{1}{\epsilon + \epsilon_0} \tilde{\rho}_{ext}^+(k, \omega) \quad (1.39)$$

De terugtransformatie

Analoog aan (1.24):

$$\bar{E}_{(i)}^+ = (2\pi)^{-1/2} \int \frac{1}{\epsilon + \epsilon_0} \tilde{\rho}_{ext}^+ \exp -i\omega k dw \quad (1.40)$$

$\tilde{\rho}_{ext}^+(k, \omega)$ wordt analytisch voortgezet voor $\text{Im } \omega < 0$, en om aan te geven dat bij terugtransformatie de kontoer in het komplekse ω -vlak weer bovenlangs de singulariteiten moet gaan, gebruiken we de notatie:

$$\tilde{\rho}_{ext}^+(k, \omega) = - \frac{k \rho_0 x_0^2}{2\pi} \frac{1}{\omega_+ - \omega} \quad (1.41)$$

(1.40) gaat over in:

$$\bar{E}_{(i)}^+(k, k) = (2\pi)^{-1/2} \int - \frac{k \rho_0 x_0^2}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\epsilon^+(k, \omega)} \cdot \frac{1}{\omega_+ - \omega} \exp -i\omega k dw \quad (1.42)$$

Opnieuw wordt te werk gegaan zoals in figuur 1.1. is aangegeven.

Naast de singulariteiten tengevolge van de nulpunten van ϵ^+ , waarvan we veronderstellen, dat ze alle in het negatief imaginaire ω -halfvlak liggen, is er ook een singulariteit voor $\omega = \omega_0$, welke op de reële ω -as ligt. Indien men nu de limiet voor $k \rightarrow \infty$ beschouwt blijkt, dat enkel de bijdrage van laatstgenoemde singulariteit haar invloed blijft behouden.

Indien nu gesteld wordt:

$$R(k, \omega) = - \frac{k \rho_0 x_0^2}{2\pi \epsilon_0 \epsilon^+(k, \omega)} \quad (1.43)$$

dan volgt:

$$\tilde{E}_{(1)}^+(k, \omega) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{R(k, \omega)}{\omega_+ - \omega_0} \quad (1.44)$$

Ingevuld in (1.42) levert dit:

$$\bar{E}_{(1)}^+(k, k) = (2\pi)^{-1/2} (-2\pi i) \cdot R(k, \omega_0) \cdot \exp -i\omega_0 k \quad (1.45)$$

(1.45) wordt teruggetransformeerd naar x:

$$E_{(1)}^+(x, k) = (2\pi)^{-1} (-2\pi i) \exp -i\omega_0 k \int dk R(k, \omega_0) \cdot \exp ikx \quad (1.46)$$

en dat levert de uitdrukking voor het veld:

$$E_{(1)}^+(x, k) = i \exp -i\omega_0 k \cdot \frac{\rho_0 x_0^{\pm}}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{k}{E^+(k, \omega_0)} \exp ikx dx. \quad (1.47)$$

(1.46) is het analogon van (1.28)

Nadere uitwerking van de integratie in het k-vlak.

(1.47) kan nog nader uitgewerkt worden, wat het rekenen versnelt:

Analoog aan (1.21):

$$E^{\pm}(k, \omega_0) = 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k} \int dv \cdot \frac{dF_s}{dv} \cdot \frac{1}{(kv)_{\mp} - \omega_0}$$

waaruit volgt:

$$E^{\pm}(k, \omega_0) = 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k^2} \int dv \cdot \frac{dF_s}{dv} \cdot \frac{1}{v - \left(\frac{\omega_0}{k}\right)_{\pm} \operatorname{sgn} k} \quad (1.48)$$

Voer in:

$$\hat{E}^{\pm}(k, \omega_0) = 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k^2} \int dv \cdot \frac{dF_s}{dv} \cdot \frac{1}{v - \left(\frac{\omega_0}{k}\right)_{\pm}} \quad (1.49)$$

Hiervoor gelden de volgende relaties:

$$\hat{E}^{\pm*}(k, \omega_0) = \hat{E}^{\mp}(k, \omega_0) \quad (1.50)$$

$$\hat{E}^{\pm}(-k, \omega_0) = \hat{E}^{\mp}(k, \omega_0) \quad (1.51)$$

De laatste relatie geldt slechts als tevens $F_s(v)$ symmetrisch is in v.

Bewijs van (1.50):

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}^{+*}(k, \omega_0) &= 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k^2} \int dv \frac{dF_s}{dv} \left(\frac{1}{v - \left(\frac{\omega_0}{k}\right)_+} \right)^* = \\ &= 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k^2} \int dv \frac{dF_s}{dv} \cdot \frac{1}{v - \left(\frac{\omega_0}{k}\right)_-} \quad \square. \end{aligned}$$

Bewijs van (1.51):

$$\hat{\epsilon}^+(-k, \omega_0) = 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k^2} \int dv \frac{dF_s}{dv} \frac{1}{v + \left(\frac{\omega_0}{k}\right)_+}$$

Indien $F_s(v)$ symmetrisch is in v mag men schrijven:

$$\hat{\epsilon}^+(-k, \omega_0) = 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k^2} \int dv \frac{dF_s}{dv} \frac{1}{v - \left(\frac{\omega_0}{k}\right)_-}$$

waaruit (1.51) volgt. □.

 Splits de integratieweg $-\infty \dots +\infty$ in (1.47) in drie delen:

A/ $-\infty \dots -E$

B/ $+E \dots +\infty$

C/ $-E \dots +E$

waarbij E een klein, positief getal is.

Beschouw eerst traject C.

Uit (1.51): (mits F_s symmetrisch in v)

$$\lim_{k \uparrow 0} \hat{\epsilon}^-(k, \omega_0) = \lim_{k \uparrow 0} \hat{\epsilon}^+(-k, \omega_0) = \lim_{k \downarrow 0} \hat{\epsilon}^+(k, \omega_0) = 1 \quad (1.52)$$

en:

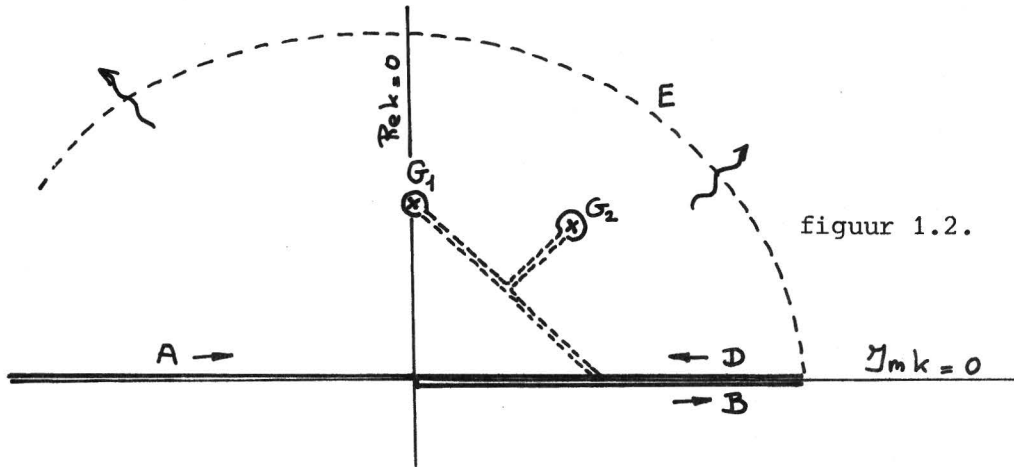
$$\begin{aligned} &\lim_{E \downarrow 0} \left[\int_0^E dk \frac{k}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega)} \exp ikx - \int_0^{-E} dk \frac{k}{\hat{\epsilon}^+(-k, \omega)} \exp ikx \right] = \\ &= \lim_{E \downarrow 0} \left[\int_0^E dk \frac{k}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega)} \exp ikx - \int_0^E dk \frac{k}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega)} \exp -ikx \right] \\ &= \lim_{E \downarrow 0} 2i \int \frac{k^2 x}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega)} dk = 0 \quad (1.53) \end{aligned}$$

Deze bijdrage gaat naar nul.

(1.47) kan dus geschreven worden als:

$$E_{(1)}^+(x, t) = i \exp -i\omega_0 t \cdot \frac{\rho_0 x_0^2}{2\pi \epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^0 dk \frac{k}{\hat{\epsilon}^-(k, \omega_0)} \exp ikx + \int_0^{\infty} dk \frac{k}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega_0)} \exp ikx \right], \quad (1.54)$$

Uitgaande van (1.54) wordt nu de integratieweg in het negatief reële k-vlak verlegd naar het positief reële k-vlak, zie figuur 1.2.



figuur 1.2.

De bijdrage van traject A is gelijk aan de som van de bijdragen van de trajecten D, E en F, plus $2\pi i$ maal de som van de residuen die behoren bij de singulariteiten G_1 .

De bijdrage van traject F is nul.

De bijdrage van traject E gaat naar nul als $|k| \rightarrow \infty$.

Beschouw dan de polen die aanwezig zijn in het positief reële k-halfvlak. Deze bevinden zich daar, waar $\hat{E}(k, \omega_0)$ nulpunten heeft.

De pool, welke het dichtst bij de reële k-as ligt heet de Debeye-pool. Het bestaan ervan wordt als volgt afgeleid:

Gesteld wordt, dat $F_S(v)$ in de buurt van $v=0$ de Maxwell-verdeling aanneemt.

$$F_S(v) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{v_s} \exp -\frac{v^2}{2v_s^2} \quad (1.55)$$

Indien gesteld wordt: $\frac{\omega_0}{|k|} \ll v_s$ gaat de integraal in (1.49) over in:

$$\begin{aligned} \int \frac{dF_S}{dv} \frac{dv}{v - \frac{\omega_0}{k}} &= -\pi i \left. \frac{dF_S}{dv} \right|_{v = \frac{\omega_0}{k}} + \mathcal{P} \int \frac{dF_S}{dv} \cdot \frac{dv}{v - \frac{\omega_0}{k}} \sim \\ &\sim \left(\frac{1}{2\pi v_s^2} \right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{2v_s^2} \right) \mathcal{P} \int \frac{dv}{v} \cdot v \cdot \exp -\frac{v^2}{2v_s^2} = \\ &= -\frac{(2\pi)^{-1/2}}{v_s^3} \int dv \cdot \exp -\frac{v^2}{2v_s^2} = -\frac{1}{v_s^2} \end{aligned}$$

Dit all es invullen in (1.49), en gebruikmakend van de definitie voor het Debeye-golfgetal:

$$K_e^2 = \frac{n_e e^2}{K_0 T_e}$$

volgt:

$$\frac{k_0}{K_e} = \bar{k}_{0e} = \pm i \sqrt{1 + \theta} \quad (1.56)$$

Zie voor de definiëring van deze begrippen, hoofdstuk 2.

Het Debeye-golfgetal is groot. Haar inverse is klein ten opzichte van de makroskopische afmetingen van het plasma (Debeye-golflengte).

Uit (1.54) volgt dan, dat de bijdrage van de Debeye-pool aan $E_{(1)}^+(x, t)$ gelijk wordt aan:

$$-\exp(-i\omega_0 k) \cdot \frac{\rho_0 x_0^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{k_0}{\left. \frac{d}{dk} \hat{\epsilon}^-(k, \omega_0) \right|_{k=k_0}} \cdot \exp(i k_0 x) \quad (1.57)$$

en deze bijdrage gaat voor $x \rightarrow \infty$ exponentiëel naar nul volgens:

$$E_{(1)}^+(x, k) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp(-\sqrt{1 + \theta} \cdot k_0 \cdot x) \quad (1.58)$$

Zij is op enkele malen de Debeye-golflengte van de oorsprong al vrijwel uitgedoofd.

(1.54) kan nu herschreven worden als:

$$E_{(1)}^+(x, k) = \frac{\rho_0 x_0^2}{2\pi\epsilon_0} i \exp(-i\omega_0 k) \left[\int_0^\infty \frac{dk \cdot k \exp(ikx)}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega_0)} - \int_0^\infty \frac{dk \cdot k \exp(ikx)}{\hat{\epsilon}^-(k, \omega_0)} \right] \quad (1.59)$$

wat met behulp van (1.50) overgaat in:

$$E_{(1)}^+(x, k) = \frac{\rho_0 x_0^2}{2\pi\epsilon_0} i \exp(-i\omega_0 k) \int_0^\infty dk \cdot k \exp(ikx) \left(\frac{1}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega_0)} - \frac{1}{\hat{\epsilon}^{+*}(k, \omega_0)} \right) \quad (1.60)$$

en deze betrekking leidt, indien ze nader wordt uitgewerkt, tot:

$$E_{(1)}^+(x, k) = -\frac{\rho_0 x_0^2}{\pi\epsilon_0} \exp(-i\omega_0 k) \int_0^\infty dk \cdot k \exp(ikx) \cdot \Im_m \left\{ \frac{1}{\hat{\epsilon}^+(k, \omega_0)} \right\} \quad (1.61)$$

Dat is het resultaat uit (7). Theorie over testladingen in plasma's is voorts te vinden in (14).

2. DE DISPERSIERELATIE, BEHOREND BIJ EEN ENKELVOUDIG PLASMA

2.0. Inleiding

De dispersierelatie (1.29), die in hoofdstuk 1 is uitgewerkt, wordt nader beschouwd voor een plasma, bestaande uit elektronen en één ionsoort. Daarbij wordt de plasma-dispersiefunctie ingevoerd.

Er wordt nader ingegaan op de aard van de dispersievergelijking en er worden benaderingsformules afgeleid voor speciale gevallen van frequentie en demping als functie van het golfgetal.

Tenslotte wordt een beschouwing gewijd aan de invloed van driftsnelheid bij elektronen.

2.1. Uitwerking van de dispersierelatie voor een samengesteld plasma

Zoals al is afgeleid voldoen voor een longitudinale lineaire oscillatie k en ω aan de volgende dispersierelatie:

$$\epsilon^+(k, \omega) = 1 - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{\epsilon_0 m_s k} \int \frac{dF_s}{dv} \frac{dv}{kv - \omega} = 0 \quad (2.1)$$

Voor de nulde-orde verdelingsfunctie $F_s(v)$ wordt een Maxwellverdeling aangenomen. De bij een bepaalde deeltjessoort behorende driftsnelheid wordt u_s genoemd.

$$F_s(v) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{v_s} \exp - \left(\frac{v - u_s}{v_s \sqrt{2}} \right)^2 \quad (2.2)$$

De volgende grootheden worden gedefiniëerd:

Thermische snelheid:

$$v_s^2 = \frac{k_B T_s}{m_s} \quad (2.3)$$

Plasma-eigenfrequentie:

$$\omega_{ps}^2 = \frac{n_e e_s^2}{\epsilon_0 m_s} \quad (2.4)$$

Hierin is K_B de Boltzmannkonstante en T_s de temperatuur die behoort bij de s^e deeltjessoort.

In analogie met de uitdrukking voor het Debeye-golfgetal:

$$K_e^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{V_e^2} = \frac{n_e}{K_B T_e} \cdot \frac{e^2}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

wordt gedefiniëerd:

$$K_s^2 = \frac{\omega_{ps}^2}{V_s^2} = \frac{n_e}{K_B T_s} \cdot \frac{e^2}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

Met behulp van (2.2) en bovenstaande definities gaat (2.1) over in:

$$2k^2 = \sum_s n_s K_s^2 Z'(\xi_s) \quad (2.7)$$

Zie ref (6).

In deze uitdrukking staat $Z(\xi)$ voor de plasma-dispersiefunctie of Fried-Contefunctie, die als volgt is gedefiniëerd:

$$Z(\xi) = \pi^{-1/2} \int \frac{\exp -\chi^2}{\chi - \xi} d\chi \quad \text{met } \chi \text{ reëel.} \quad (2.8)$$

Er bestaan tabellen (8) van $Z(\xi)$ en $Z'(\xi)$.

De onafhankelijk variabele is:

$$\xi_s = \frac{(\omega + i\gamma)/k - u_s}{V_s \sqrt{2}} \quad (2.9)$$

Teneinde tot een goede beschrijving van zo'n plasma te komen, worden de volgende genormeerde grootheden ingevoerd:

Temperatuurverhouding:

$$\theta_s = T_e / T_s \quad (2.10)$$

Massaverhouding:

$$\delta_s = m_s / m_e \quad (2.11)$$

Ladingsverhouding. Deze wordt steeds 1 verondersteld.

Koncentratieverhouding:

$$\eta_s = n_s / n_e \quad (2.12)$$

Drift:

$$\bar{u}_s = u_s / V_s \sqrt{2} \quad (2.13)$$

Gereduceerd golfgetal:

$$\bar{k}_s = k/k_s \quad (2.14)$$

Gereduceerde frekwentie:

$$\bar{\omega}_s = \omega/\omega_{ps} \quad (2.15)$$

ϵ_s wordt gesplitst in het reële en het imaginaire deel:

$$\epsilon_s = \tilde{\omega}_s + i\tilde{\gamma}_s \quad (2.16)$$

$Z'(\epsilon_s)$ wordt gesplitst in het reële en het imaginaire deel:

$$Z'(\epsilon_s) = x_s(\epsilon_s) + iy_s(\epsilon_s) \quad (2.17)$$

De volgende betrekkingen gelden:

$$\omega_{ps} = \omega_{pe} / \sqrt{\epsilon_s} \quad (2.18)$$

$$k_s = k_e \sqrt{\epsilon_s} \quad (2.19)$$

$$\bar{k}_s = \bar{k}_e / \sqrt{\epsilon_s} \quad (2.20)$$

$$\bar{\omega}_s = \bar{\omega}_e \sqrt{\epsilon_s} \quad (2.21)$$

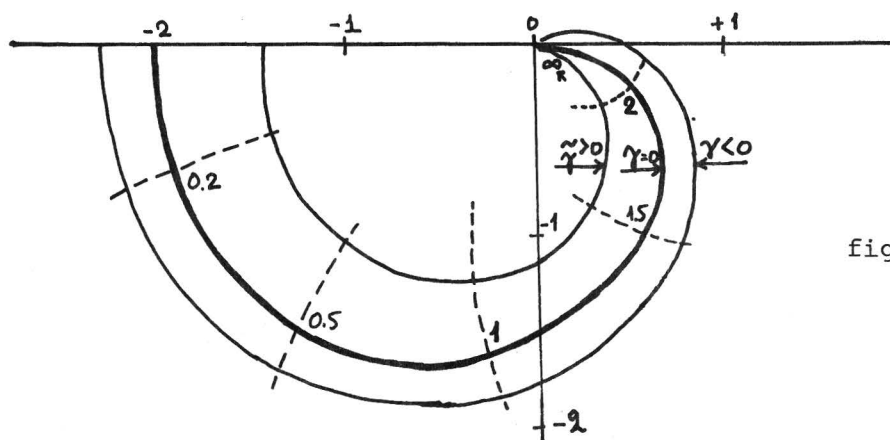
$$\epsilon_s = \epsilon_e \sqrt{\epsilon_s} \delta_s \quad (2.22)$$

En uit (2.9) en (2.16) volgt:

$$\bar{\omega}_s = \tilde{\omega}_s \cdot \bar{k}_s \cdot \sqrt{2} \quad (2.23a)$$

$$\tilde{\gamma}_s = \tilde{\gamma}_s \cdot \bar{k}_s \cdot \sqrt{2} \quad (2.23b)$$

$Z'(\epsilon)$ wordt voor positieve $\tilde{\omega}$ in het komplekse x,y-vlak weergegeven als in figuur 2.1 :



figuur 2.1

Voor $\tilde{\omega} < 0$ wordt het punt dat overeenkomt met $|\tilde{\omega}|$ gespiegeld ten opzichte van de reële as.

Als $\tilde{\gamma}$ sterker negatief wordt "blaast de kurve op" en ze gaat zich meer en meer om de oorsprong winden.

Als $\tilde{\gamma}$ sterker positief wordt "krimpt de kurve in" en ze snijdt ook de reële as niet meer voor

De dispersierelatie (2.7) gaat over in:

$$2 k_e^2 = \sum_s \theta_s \eta_s Z'(\xi_s) \quad (2.24)$$

2.2. De dispersierelatie, behorend bij een enkelvoudig plasma

Elektronen en ionen worden aangegeven door de indices e resp. i.

θ_s wordt nu θ genoemd, en δ_s wordt δ genoemd.

(2.24) gaat over in:

$$2 k_e^2 = \theta Z'(\xi_i) + Z'(\xi_e) \quad (2.25)$$

Het rechterlid van (2.25) kan grafisch worden uitgezet. Daartoe is ξ_i gekozen als parameter. Neemt nu ξ_i toe dan zal, omdat $\xi_e \ll \xi_i$, ξ_e slechts weinig veranderen, en $Z'(\xi_e)$ blijft ongeveer $-2 \cdot Z'(\xi_e)$ begint pas merkbaar te veranderen als $\xi_i \gg 1$ en $Z'(\xi_i) \approx 0$.

Verder blijkt dat de invloed van de elektronenbijdrage kleiner wordt naarmate θ groter is.

Figuur 2.2. geeft het verloop aan voor $\tilde{\gamma}_i = 0$.

Figuur 2.3 toont aan wat er gebeurt bij een waarde van $\tilde{\gamma}_i$ die licht negatief is. De kurve snijdt dan de positieve x-as in punt E_1 en ze snijdt de negatieve x-as in punt I'_1 .

Wordt $\tilde{\gamma}_i$ nog negatiever gekozen, dan schuift I'_1 naar rechts om uiteindelijk op de positieve x-as terecht te komen. Dan noemen we het punt I_1 .

Wordt $\tilde{\gamma}_i$ nog negatiever, dan verschijnen nog meer punten I_1 en uiteindelijk ook meer punten E_1 waar de kurve snijdt met de positieve x-as.

De punten E_1 representeren de eerste- en hogere-orde elektronenmodes.

De punten I_1 representeren de eerste- en hogere-orde ionenmodes.

(Zie figuur 2.4)

Het stuk dat van de positieve x-as wordt afgesneden is gelijk aan $\frac{2k_e^2}{\theta}$.

De parameters die langs de kurve zijn uitgezet staan voor ξ_i .

Met behulp van dit soort kurven zijn de volgende grafieken te konstrueren:

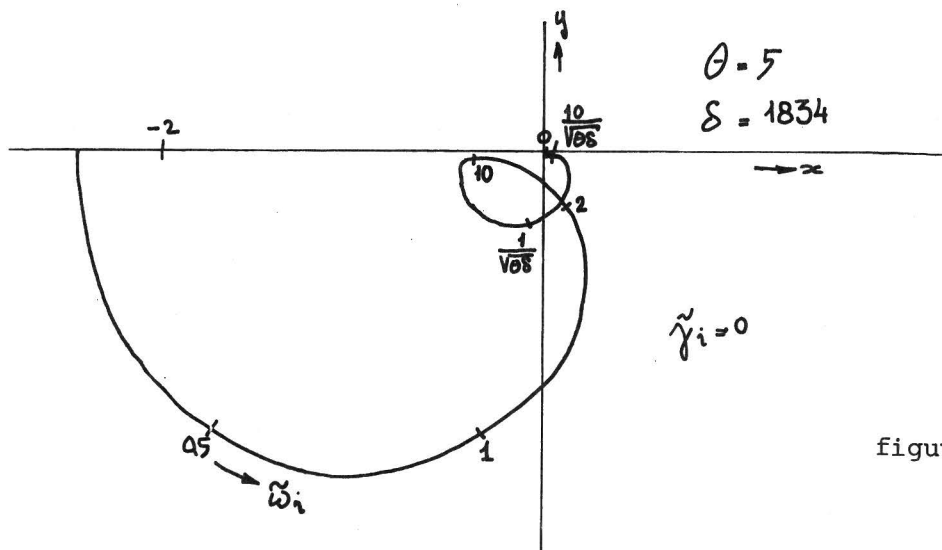
A/ $\tilde{\gamma}_s$ als functie van $\tilde{\omega}_s$

B/ $\tilde{\gamma}_s$ als functie van $\tilde{\omega}_s$: Plaats van de polen van (1.23) in het komplekse vlak.

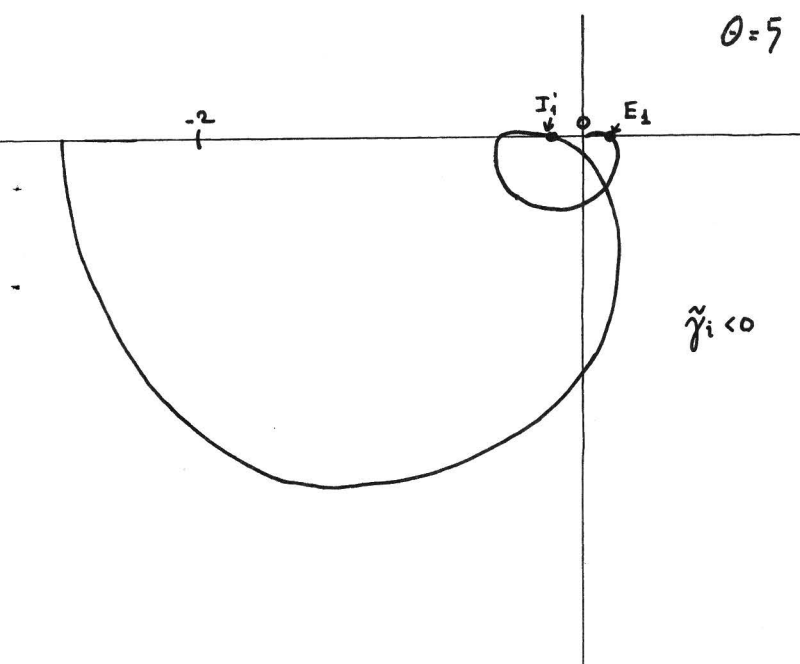
C/ $\tilde{\omega}_s$ als functie van k_e : Reële dispersiekromme.

D/ $\tilde{\gamma}_s$ als functie van k_e : Imaginaire dispersiekromme.

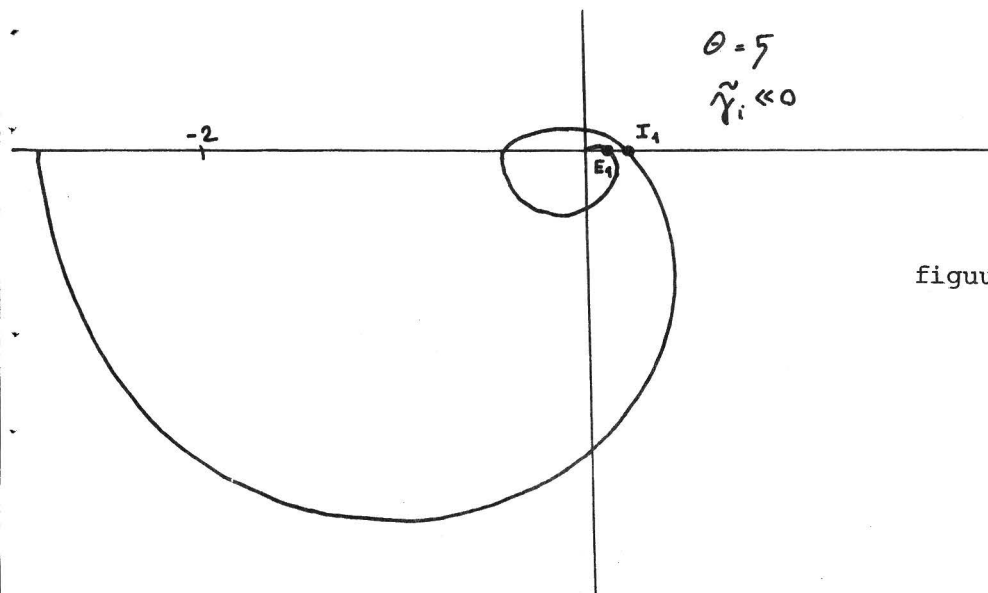
$$x + iy = Z'(\xi_i) + \theta^{-1} Z'(\xi_2)$$



figuur 2.2



figuur 2.3



figuur 2.4

2.3. Benaderingsformules voor de dispersierelatie

Men maakt de volgende afspraak:

Naast de indices: $s = e, i$ enz. voor de deeltjessoort worden de indices $M = E, I$ enz. ingevoerd voor de (eerste orde) elektronen mode, de (eerste orde) ionenmode enz.

Voor de hier vermelde benaderingsformules geldt steeds de voorwaarde:

$$|\tilde{\gamma}| \ll |\tilde{\omega}|.$$

De reeksontwikkeling is absoluut konvergent. Indien $\omega_s \ll 1$ kan men met de twee eerste termen volstaan.

$$\operatorname{Re} Z'(\xi_s) \approx -2 + 4\tilde{\omega}_s^2 - \frac{2^3}{3!!} \tilde{\omega}_s^4 + \dots \quad (2.26)$$

De asymptotische ontwikkeling is altijd divergent. Voor $\omega_s \approx 4$ vormt de eerste term een goede benadering.

$$\operatorname{Re} Z'(\xi_s) \approx \tilde{\omega}_s^{-2} + \frac{3}{2} \tilde{\omega}_s^{-4} + \frac{5!!}{2^2} \tilde{\omega}_s^{-6} + \dots \quad (2.27)$$

Voor de dispersie gelden (6) de volgende benaderingen:

A/ reële deel:

$$2 k_e^2 = \sum_s \eta_s \theta_s \operatorname{Re} Z'(\tilde{\omega}_s) \quad (2.28)$$

B/ imaginaire deel, voor de modes die aan de bovengenoemde voorwaarde voldoen:

$$\tilde{\gamma}_{eM} = 2\pi^{1/2} \frac{\sum_s \eta_s \theta_s \tilde{\omega}_{sM} \exp -\tilde{\omega}_{sM}^2}{\sum_s \eta_s \theta_s \sqrt{\delta_s \theta_s} \frac{d}{d\tilde{\omega}_{sM}} \operatorname{Re} Z'(\tilde{\omega}_{sM})} \quad (2.29)$$

opmerking:

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\dots(2) = 2^n \cdot n! \quad (2.26a)$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1 = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} \quad (2.26b)$$

n geheel, > 0 .

2.4. De oplossingstakken van de dispersierelatie bij een enkelvoudig plasma

2.4.1. De elektronentak

Figuur 2.3 en 2.4 tonen dat voor het $\tilde{\omega}$ -gebied, waarin zich de bij de elektronentak behorende oplossingen bevinden, $\xi_i \gg 1$ is.

Dan is - overeenkomstig (2.27) - de bijdrage van $Z'(\xi_i)$ aan het rechterlid van (2.25) verwaarloosbaar, volgens:

$$2 k_e^2 \sim Z'(\xi_e) + \frac{0}{\tilde{\omega}_{eE}^2} = Z'(\xi_e) + \frac{1}{\delta \tilde{\omega}_{eE}^2} \sim \frac{1}{\tilde{\omega}_{eE}^2} + \frac{1}{\delta \tilde{\omega}_{eE}^2} \sim \frac{1}{\tilde{\omega}_{eE}^2}$$

en de dispersierelatie gaat over in:

$$\boxed{2 k_e^2 \sim Z'(\xi_{eE})} \quad \text{mits } \tilde{\omega}_{eE} \gtrsim 4 \quad (2.30)$$

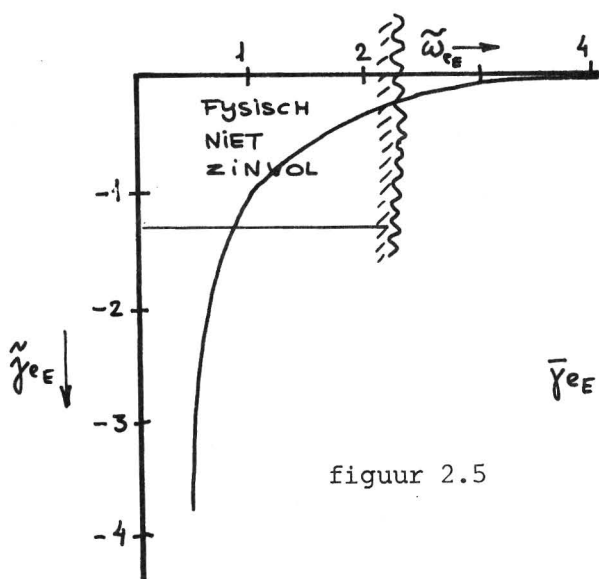
Met behulp van eenvoudige tabellen (8) is (2.30) gemakkelijk op te lossen. Men kiest een vaste waarde voor $\tilde{\gamma}_{eE}, \tilde{\gamma}_{eE} < 0$. In de tabel worden die waarden van $\tilde{\omega}$ opgezocht, waarvoor $y = 0$ en $x_E > 0$.

Dan volgt k_e uit $k_e = (x_E/2)^{1/2}$

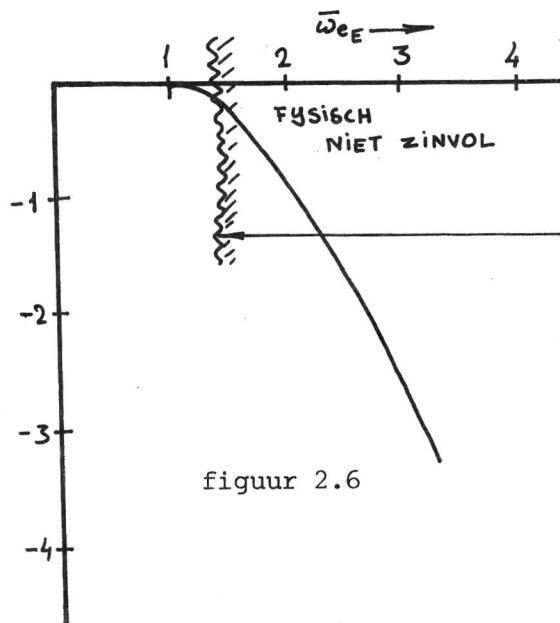
De figuren 2.5.t/m 2.8 geven de volgende relaties weer:

$$\tilde{\gamma}_{eE}(\tilde{\omega}_{eE}), \bar{\gamma}_{eE}(\bar{\omega}_{eE}), \bar{\omega}_{eE}(k_e) \text{ en } \bar{\gamma}_{eE}(k_e).$$

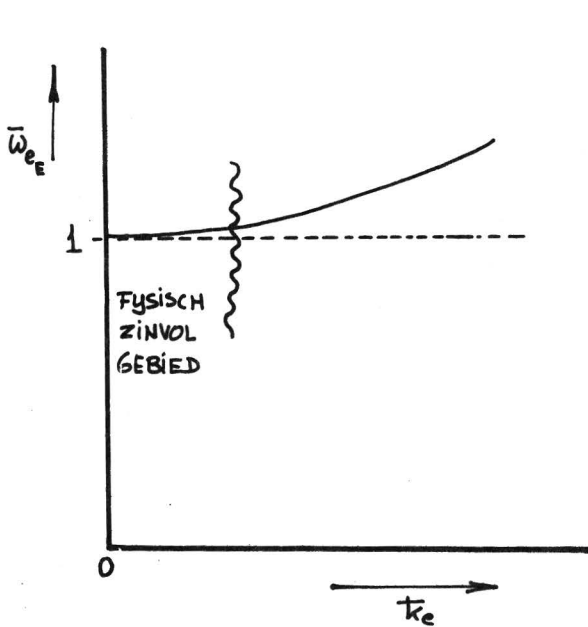
Opgemerkt moet worden, dat slechts het gebied waarbij $k_e \ll 1$ fysisch gezien zinvol is.



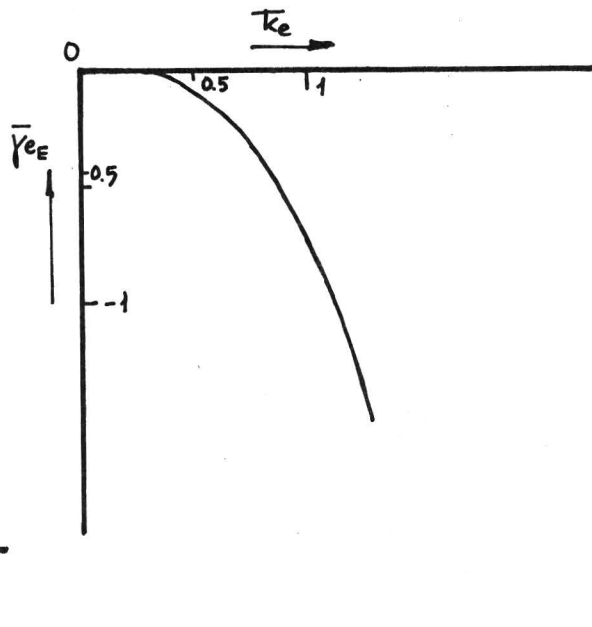
figuur 2.5



figuur 2.6



figuur 2.7



figuur 2.8

2.4.2. De ionentak

Figuur 2.3 en 2.4 tonen dat voor het $\tilde{\omega}$ -gebied, waarin zich de bij de ionentak behorende oplossingen bevinden, $\tilde{\omega}_{eI} \ll 1$ is.

Dan is - overeenkomstig (2.26) - de bijdrage van $z'(\xi_e)$ aan het rechterlid van (2.25) ongeveer -2.

en de dispersierelatie gaat over in:

$$\frac{2(k_e^2 + 1)}{\theta} \sim z'(\xi_{iI}) \tag{2.31}$$

Indien nu aan de hand van (2.31) de kurve $\tilde{\gamma}_{iI}(\tilde{\omega}_{iI})$ wordt beschouwd, dan blijkt deze identiek te verlopen aan de kurve van figuur 2.5, indien langs de assen $\tilde{\omega}_{iI}$ en $\tilde{\gamma}_{iI}$ worden uitgezet. Indien men als parameter x_I neemt, een waarde die voor overeenkomstige punten overeenkomt met x_E , moet men nu, teneinde k_e te bepalen, uitgaan van de betrekking:

$$k_e = \sqrt{\frac{\theta x_I}{2} - 1} \tag{2.32}$$

Uit deze betrekking volgt tevens, dat men voor de kurve $\tilde{\gamma}_{iI}(\tilde{\omega}_{iI})$ slechts dat deel van de kurve van figuur 2.5 kan nemen, waarvoor geldt:

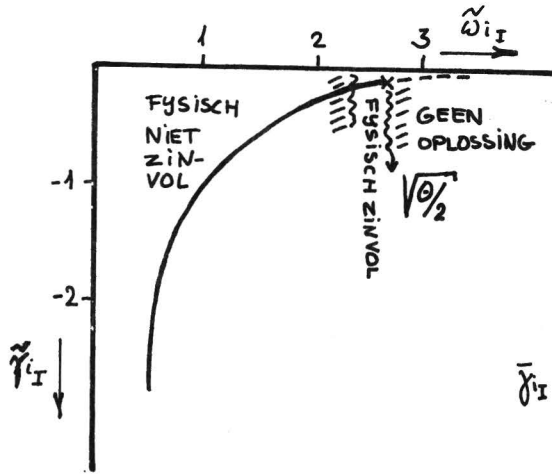
$$x_I > \frac{2}{\theta} \tag{2.33}$$

Voor $\tilde{\omega}_{iI}$ volgt uit (2.23a) dat:

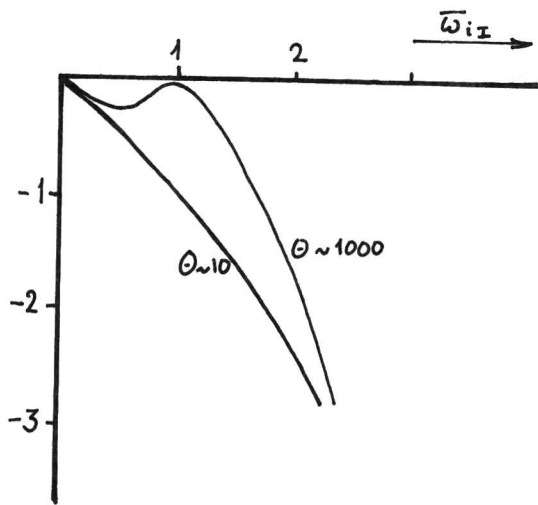
$$\tilde{\omega}_{iI} \sim \tilde{\omega}_{iE} \cdot \frac{k_e}{\sqrt{\theta}} \cdot \sqrt{2} = \tilde{\omega}_{iE} \sqrt{\frac{x_I}{2} - \frac{1}{\theta}} \cdot \sqrt{2} \tag{2.34}$$

Uit (2.34) volgt dat - bij grote θ - de curve $\bar{\omega}_I(\bar{\gamma}_I)$ weinig verschilt van die voor de elektronenoplossing (afgezien van de schaalfactoren). Slechts in het gebied waarvoor $x_I/2 \approx 1/\theta$ is de afwijking dan aanzienlijk. Laatstgenoemd gebied is overigens wel dat gebied, waaraan fysische betekenis kan worden toegekend.

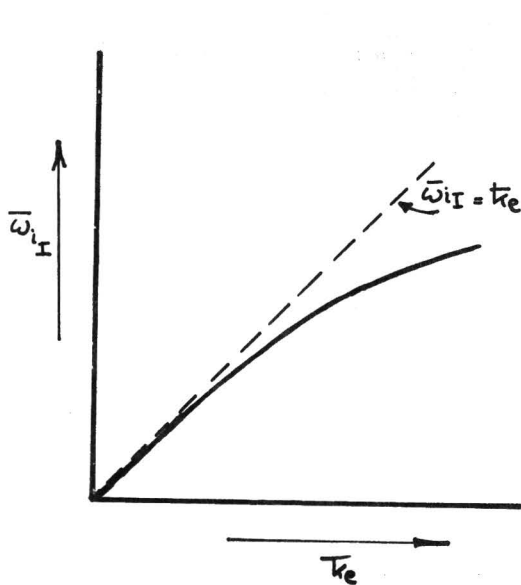
De figuren 2.9 t/m 2.12 geven het analogon van de betrekkingen uit figuur 2.5 t/m 2.8 voor de ionenoplossing.



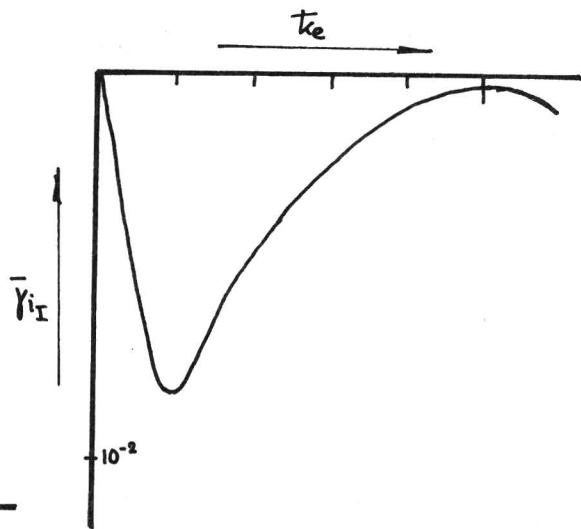
figuur 2.9



figuur 2.10



figuur 2.11



figuur 2.12

2.5 Benaderingsformules voor het reële deel van de dispersierelatie

2.5.1. De elektronentak

Voor voldoende grote $\tilde{\omega}_e$ ($\tilde{\omega}_e \gtrsim 4$) en $|\tilde{\gamma}| \ll |\tilde{\omega}|$ kan in (2.30) de asymptotische ontwikkeling (2.27) worden toegepast. Dit levert:

$$\tilde{\omega}_{eE} \sqrt{2} \sim \frac{1}{k_e} + \frac{3}{2} k_e + \dots \quad (2.35)$$

indien twee termen van de asymptotische ontwikkeling worden meegenomen. Indien $k_e \ll 1$ is $\tilde{\omega}_{eE}$ groot.

Met behulp van (2.23a) volgt dan:

$$\bar{\omega}_{eE} \sim 1 + \frac{3}{2} k_e^2 \quad (2.36)$$

Dit is een veel gebruikte benadering.

2.5.2. De ionentak

Indien θ niet te klein is geldt voor het fysisch betekenisvolle gebied: $\tilde{\omega}_{iI} \gtrsim 4$, zodat voor $Z'(S_i)$ bij benadering de eerste term van (2.27) kan worden genomen. Uit (2.31) volgt:

$$\tilde{\omega}_{iI}^2 \simeq \frac{\theta}{2(1+k_e^2)} \quad (2.37)$$

Voor $k_e \ll 1$ gaat dit over in:

$$\tilde{\omega}_{iI}^2 \simeq \frac{\theta}{2} (1 - k_e^2 + \dots) \quad (2.38)$$

Uit (2.37) volgt met behulp van (2.23a):

$$\bar{\omega}_{iI}^2 \sim \frac{k_e^2}{1+k_e^2} \quad (2.39)$$

Dit kan, indien $k_e \ll 1$, benaderd worden door:

$$\bar{\omega}_{iI} \sim k_e (1 - k_e^2 + \dots) \quad (2.40)$$

In het fysisch zinvolle gebied is dus $\bar{\omega}_{iI} \sim k_e$, en daar geldt:

$$\tilde{\omega}_{iI} \sim \frac{\omega_{pi}}{k_e v_i \sqrt{2}} \sim \sqrt{\frac{\theta}{2}} \quad \text{eis: } \tilde{\omega}_{iI} \gtrsim 4 \quad (2.40a)$$

Voor $\theta \gtrsim 32$ mag bovenbeschreven benadering dus worden toegepast.

2.6. Benaderingsformules voor het imaginaire deel van de dispersierelatie

2.6.1. De elektronentak

Indien k_e klein is volgt uit (2.35) dat $\tilde{\omega}_{eE}$ groot zal zijn.

In de teller van het rechterlid van (2.29) komt $\tilde{\omega}_e$ voor in de vorm:

$\exp - \tilde{\omega}_{eE}^2$. Dit is zeer klein. Aangezien $\tilde{\omega}_{eE} \ll \tilde{\omega}_{iE}$ is de ionenbijdrage nog veel kleiner. De laatste kan worden verwaarloosd.

In de noemer wordt voor zowel de ionen- als de elektronenbijdrage de asymptotische ontwikkeling genomen.

De elektronenterm in de noemer is: $-2\tilde{\omega}_{eE}^{-3}$; de overeenkomstige ionenterm is: $-2 \frac{\theta \sqrt{\theta}}{\delta} \tilde{\omega}_{eE}^{-3}$.

Dan geldt:

$$\tilde{\gamma}_{eE} \approx -\frac{\pi^{1/2}}{1 + \frac{\theta \sqrt{\theta}}{\delta}} \cdot \tilde{\omega}_{eE}^4 \cdot \exp - \tilde{\omega}_{eE}^2 \ll 1 \quad (2.41)$$

terwijl:

$$\frac{\bar{\gamma}_{eE}}{\bar{\omega}_{eE}} \sim \bar{\gamma}_{eE} \sim -\frac{\pi^{1/2}}{2\sqrt{2}(1 + \frac{\theta \sqrt{\theta}}{\delta})} k_e^{-3} \exp - \frac{1}{2k_e^2} \quad \text{waar } k_e = \frac{2}{3}(\tilde{\omega}_{eE} - 1)^{1/2} \quad (2.42)$$

2.6.2. De ionentak

Weer wordt uitgegaan van de voorwaarde: $\tilde{\omega}_{iE} \gtrsim 4$.

Nu geldt: $\tilde{\omega}_{eE} = \frac{\tilde{\omega}_{iE}}{\sqrt{\theta \delta}}$ dus, als θ niet te klein is, kan in de teller van (2.29) worden volstaan met de elektronenbijdrage, vanwege de exponentiële term.

In de noemer wordt voor $Z'(S_e)$ de reeksontwikkeling genomen en voor $Z'(S_i)$ de asymptotische ontwikkeling.

De afgeleide van de eerste termen in de reeksontwikkeling voor $Z'(S_e)$ geeft een bijdrage die evenredig is met $\tilde{\omega}_{eE}$ dat is $\frac{\tilde{\omega}_{iE}}{\sqrt{\theta \delta}}$, en volgens (2.29) is dit tengevolge van de faktor δ^{-1} een orde kleiner dan de ionenbijdrage.

Een en ander levert op:

$$\tilde{\gamma}_{iE} \sim -\frac{\pi^{1/2}}{\theta \sqrt{\theta \delta}} \cdot \tilde{\omega}_{iE}^4 \exp - \frac{\tilde{\omega}_{iE}^2}{\theta \delta} \quad (2.43)$$

Uit (2.39) volgt: $k_e^2 \approx \frac{\bar{\omega}_{iE}^2}{1 - \bar{\omega}_{iE}^2}$, waaruit:

$$\bar{\gamma}_{iI} \approx -\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} \cdot \bar{\omega}_{iI} \cdot \left(\frac{\bar{\omega}_{iI}}{k_e}\right)^3 \cdot \exp\left[-\left[\frac{\bar{\omega}_{iI}}{k_e}\right]^2 \cdot \frac{1}{2\delta}\right] \quad (2.44a)$$

$$\bar{\gamma}_{iI} \approx -\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} \cdot \bar{\omega}_{iI} \cdot (1 - \bar{\omega}_{iI}^2)^{3/2} \cdot \exp\left[-\frac{1 - \bar{\omega}_{iI}^2}{2\delta}\right] \quad (2.44)$$

In deze betrekking is de exponentiële koëfficiënt vrijwel gelijk aan 1. De beginhelling in de $\bar{\gamma}_{iI}(\bar{\omega}_{iI})$ -kurve is vrijwel konstant en θ -onafhankelijk bij niet te kleine θ .

De beginhelling bedraagt dan:

$$-\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} \quad (2.45)$$

Uit (2.44) volgt tevens, dat maximale demping optreedt bij $\bar{\omega}_{iI} \approx 1/2$

Deze bedraagt:

$$-\left(\frac{3}{8}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \quad (2.46)$$

Dit is de normale Landau-demping. Ze is dus bij niet te kleine θ vrijwel uitsluitend een gevolg van de elektronenbijdrage. Daarom zou ze beschouwd kunnen worden als een vorm van generaliseerde contamination damping. Bij kleine θ wordt in de teller van (2.29) ook de ionenbijdrage belangrijk.

Aangezien voor kleine k_e geldt: $\bar{\omega}_{iI} \sim k_e$, kan men voor de beginhelling van de grafiek $\bar{\gamma}_{iI}(k_e)$ ook schrijven:

$$\bar{\gamma}_{iI} \approx -\frac{\pi^{1/2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\exp^{-1/2}}{\delta^{1/2}} \cdot k_e \quad (2.47)$$

2.7. Invloed van de drift

Slechts dat geval wordt beschouwd waarvoor $\bar{u}_i = 0; \bar{u}_e \neq 0$.

2.7.1. De elektronentak, reële deel.

Het stelsel (2.23) gaat over in:

$$\bar{\omega}_e = (\bar{\omega}_e - \bar{u}_e) k_e \sqrt{2} \tag{2.48a}$$

$$\bar{\gamma}_e = \tilde{\gamma}_e \cdot k_e \cdot \sqrt{2} \tag{2.48b}$$

Hieruit volgt, met behulp van (2.35) voor kleine k_e :

$$\bar{\omega}_{eE} \sim 1 - k_e \bar{u}_e \sqrt{2} + \frac{3}{2} k_e^2 + \dots \tag{2.49}$$

In dit geval is de beginhelling van de reële dispersiekromme negatief.

$\bar{\omega}_{eE}$ is minimaal bij $k_e = \frac{1}{3} \sqrt{2} \bar{u}_e$, en bereikt daar de waarde:

$$1 - \frac{1}{3} \bar{u}_e^2 = k_{emin} \tag{2.50}$$

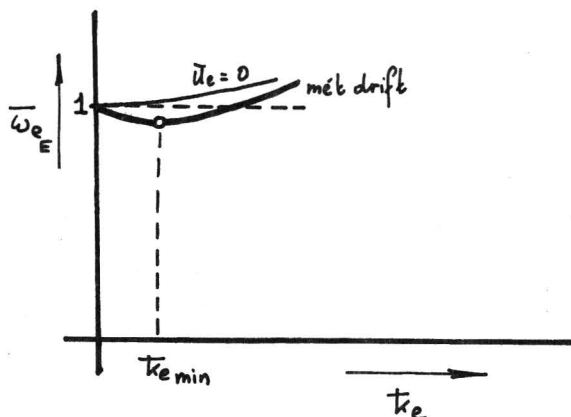
Zie figuur 2.13 en vergelijk figuur 2.7

2.7.2. De elektronentak, imaginaire deel.

(2.35) en (2.38) blijven geldig. Voor $\bar{\gamma}_{eE}$ volgt dus:

$$\bar{\gamma}_{eE} \sim - \frac{\pi^{1/2}}{(1 + \frac{0V0}{\delta})} \left(\frac{1}{k_e \sqrt{2}} \right)^3 \exp - \left(\frac{1}{k_e \sqrt{2}} \right)^2 \tag{2.50a}$$

Dus het verloop van $\bar{\gamma}_{eE}$ als functie van k_e is hetzelfde als bij het geval zonder drift.



figuur 2.13

2.7.3. De ionentak, reële deel

Indien $\bar{u}_e \ll 1$ en $\frac{\tilde{\omega}_i}{\sqrt{\theta s}} \ll \bar{u}_e$ vult men in het reële deel van de dispersierelatie (2.25) de reeksontwikkeling in:

$$\operatorname{Re} Z'(\xi_e) \sim -2 + 4\bar{u}_e^2$$

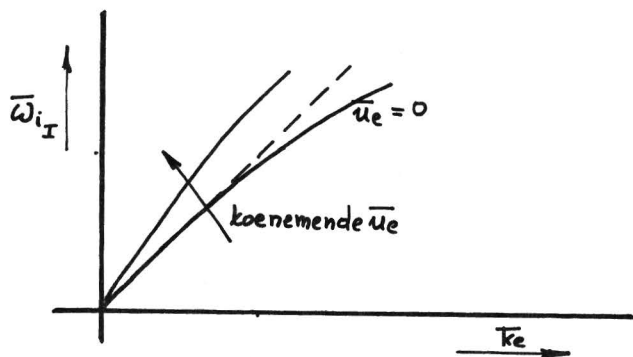
Daaruit volgt dan:

$$\tilde{\omega}_{iI}^2 = \frac{\theta}{2(k_e^2 + 1 - 2\bar{u}_e^2)} \quad (2.50b)$$

en verder:

$$\bar{\omega}_{iI}^2 = \frac{k_e^2}{k_e^2 + 1 - 2\bar{u}_e^2} \quad (2.50c)$$

De beginhelling van de dispersiekromme wordt dus iets groter bij toenemende \bar{u}_e . Zie figuur 2.14.



figuur 2.14

2.7.4. De ionentak, imaginaire deel

Voor het imaginaire deel van ξ_{iI} geldt (2.29)

$$\tilde{\gamma}_{iI} \sim -2\pi^{1/2} \cdot \frac{\theta \tilde{\omega}_{iI} \exp - \tilde{\omega}_{iI}^2 + \tilde{\omega}_{eI} \exp - \omega_{eI}^2}{\frac{\theta}{\tilde{\omega}_{iI}^3} - \frac{8}{\sqrt{\theta s}} \tilde{\omega}_{eI}} \quad (2.51)$$

Aangezien $\tilde{\omega}_{eI} = \frac{\tilde{\omega}_{iI}}{\sqrt{\theta s}} - \bar{u}_e$, is het mogelijk om deze uitdrukking nul te maken, waarvoor moet gelden:

$$\theta \tilde{\omega}_{iI} \exp - \tilde{\omega}_{iI}^2 + \left(\frac{\tilde{\omega}_{iI}}{\sqrt{\theta s}} - \bar{u}_e \right) \exp - \left(\frac{\tilde{\omega}_{iI}}{\sqrt{\theta s}} - \bar{u}_e \right)^2 = 0 \quad (2.52)$$

Indien gesteld wordt: $\tilde{\omega}_i/\sqrt{\theta s} \ll \bar{u}_e$ en $\bar{u}_e \ll 1$, gaat dit over in:

$$\theta \tilde{\omega}_{iI} \exp - \tilde{\omega}_{iI}^2 = -\frac{\tilde{\omega}_{iI}}{\sqrt{\theta s}} + \bar{u}_e k \quad (2.53)$$

zodat:

$$\bar{u}_e k \sim -\frac{\tilde{\omega}_{iI}}{\sqrt{\theta s}} + \theta \tilde{\omega}_{iI} \exp - \tilde{\omega}_{iI}^2 \quad (2.54)$$

en, uit (2.23a): $\tilde{\omega}_{iI} = \frac{\bar{\omega}_{iI}}{k_e} \sqrt{\frac{\theta}{2}}$

levert:

$$\bar{u}_{ek} \sim -\frac{\bar{\omega}_{iI}}{k_e \sqrt{2S}} + \frac{\theta \sqrt{\theta}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\bar{\omega}_{iI}}{k_e} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\bar{\omega}_{iI}}{k_e}\right)^2 \frac{\theta}{2}\right] \quad (2.55)$$

een betrekking die voor $k_e \rightarrow 0$ overgaat in:

$$\bar{u}_{ek} \sim -\frac{1}{2S} + \frac{\theta \sqrt{\theta}}{\sqrt{2}} \exp -\frac{\theta}{2} \quad (2.56)$$

(vergelijk (9)).

Waarden van \bar{u}_e , waarbij (2.52) geldt worden kritische drift genoemd. (\bar{u}_{ek})
De kritische drift is een functie van k_e . Onder genoemde voorwaarden is haar afgeleide naar $k_e: 0$ bij $k_e = 0$.

2.7.5. Grafische bepaling van de kritische drift

Figuur 2.15 is gebaseerd op dispersierelatie (2.25). Ze geeft weer:

$$z'(\xi_i) + \frac{z'(\xi_e)}{\theta}$$

Tengevolge van de drift verschilt ξ_e aanzienlijk van nul, en in feite is de oorsprong van het assenstelsel verschoven ten opzichte van de oorsprong zoals die zou zijn voor het geval zonder drift.

Grafisch is het overzichtelijker om de methode van figuur 2.16 te volgen, waarbij het assenkruis schuift langs de kurve $-z'(\xi_e)$. Daarbij is heel gemakkelijk in benadering de kritische drift als functie van k_e te konstrueren. Het stuk dat door $z'(\xi_i)$ van de positieve x' -as wordt afgesneden is immers gelijk aan $2k_e^2/\theta$.

Voor kleine k_e zijn in het algemeen twee waarden van \bar{u}_{ek} te vinden, die resp. \bar{u}_{ek1} en \bar{u}_{ek2} genoemd worden. Voor waarden van \bar{u}_e die daartussenin liggen is

$$\tilde{\gamma} > 0 \quad \text{en het plasma instabiel.}$$

Bij een bepaalde waarde van k_e , k_{em} , treedt een overgangssituatie op waarbij de twee waarden samenvallen. Bij nog grotere k_e treedt geen instabiliteit meer op.

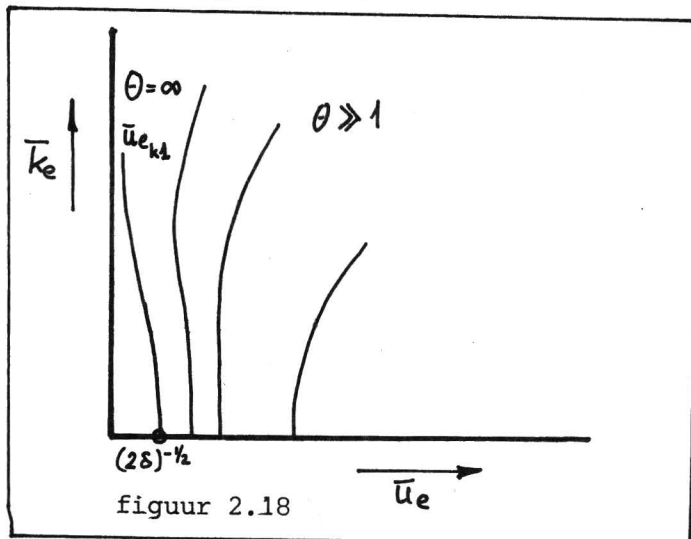
Dan is:

$$\bar{u}_{e_k} = \frac{1}{\sqrt{2S} \cdot \sqrt{\bar{k}_e^2 + 1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2S}} \cdot (1 - \frac{1}{2} \bar{k}_e^2) \quad \text{voor kleine } \bar{k}_e. \quad (2.61)$$

Dus, voor $\bar{k}_e = 0$:

$$\bar{u}_{e_0} \sim \frac{1}{\sqrt{2S}} \quad \text{vgl. ref. (9)} \quad (2.62)$$

Zie ook figuur(2.18).



figuur 2.18

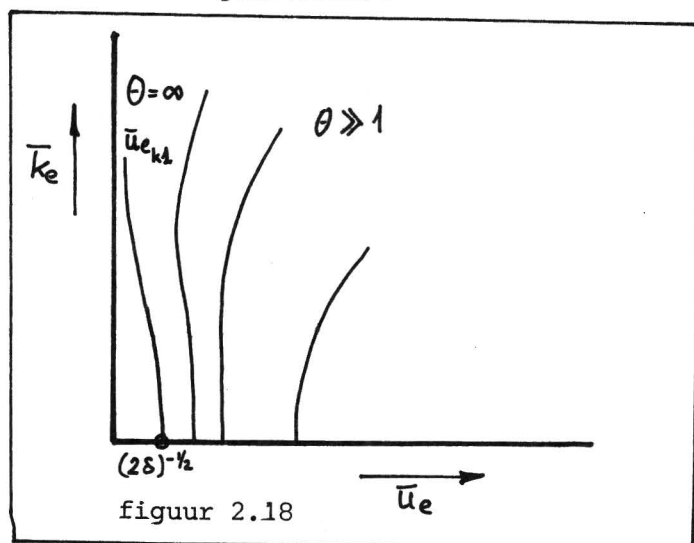
Dan is:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{\sqrt{2S} \cdot \sqrt{k_e^2 + 1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2S}} \cdot (1 - \frac{1}{2} k_e^2) \quad \text{voor kleine } \bar{k}_e. \quad (2.61)$$

Dus, voor $\bar{k}_e = 0$:

$$\bar{u}_0 \sim \frac{1}{\sqrt{2S}} \quad \text{vgl. ref. (9)} \quad (2.62)$$

Zie ook figuur(2.18).



3. DE DISPERSIERELATIE, BEHOOREND BIJ EEN SAMENGESTELD PLASMA

3.0. Inleiding

Dit hoofdstuk houdt zich bezig met samengestelde plasma's, en wel plasma's die uit twee ionsoorten bestaan.

Uitgaande van de dispersierelatie en gebruikmakend van een grafische methode, wordt ingegaan op de fundamentele verschillen die in de dispersie optreden in vergelijking met een enkelvoudig plasma.

De grafische methode is enkel bruikbaar indien $\bar{\gamma} = 0$. Voor een breder gebied kunnen benaderingsformules worden afgeleid.

Er wordt een omrekeningsfaktor ingevoerd die de resultaten voor een enkelvoudig plasma en een samengesteld plasma vergelijkbaar maakt.

Tenslotte wordt het gedrag van de kritische drift bij een samengesteld plasma behandeld.

3.1. De dispersierelatie

Voor de deeltjessoorten worden de indices $e, 1$ en 2 gebruikt.

Verondersteld is: $m_1 < m_2$.

Parameters:

$$\delta_1 = \delta ; \delta_2 / \delta_1 = m_2 / m_1 = \mu$$

$$\eta_1 = \eta ; \eta_2 = 1 - \eta$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

(3.1)

Dispersierelatie (2.24) gaat over in:

$$2k_e^2 = Z'(\xi_e) + \theta [\eta Z'(\xi_1) + (1 - \eta) Z'(\xi_2)]$$

(3.2)

waarin tussen de variabelen de betrekkingen gelden:

$$\xi_2 = \xi_1 \sqrt{\mu}$$

(3.3)

$$\xi_e = \frac{\xi_1}{\sqrt{\theta \delta}} - \bar{u}_e$$

(3.4)

3.2. Grafische methode ter bepaling van de ionenbijdrage

De curve die behoort bij de uitdrukking $\eta Z'(\xi_1) + (1-\eta)Z'(\xi_2)$ kan met behulp van (3.3) gekonstrueerd worden uit de curve van $Z'(\xi)$.

Indien $\bar{\gamma} = 0$ gaat dit als volgt:

Neem op de curve voor $Z'(\xi)$ de gewenste waarde voor ξ_1 aan, dat levert punt P_1 . Punt P_2 behoort bij de overeenkomstige waarde voor ξ_2 die vastligt door (3.3)

D.m.v. de koorde P_1P_2 worden beide punten verbonden. Op deze koorde wordt het punt P_i aangenomen, zodanig dat:

$$\eta \overline{P_1P_i} = (1-\eta) \overline{P_2P_i} \tag{3.5}$$

Dan is P_i een punt van de te konstrueren curve, en de gehele curve vindt men door P_1 de curve voor $Z'(\xi)$ te laten doorlopen.

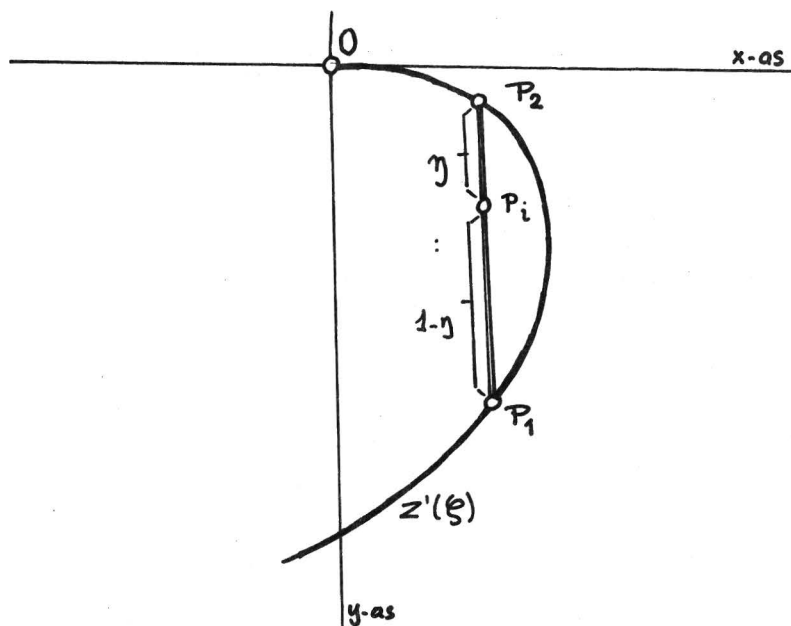
Bewijs:

Noem de oorsprong O. (figuur 3.1). Geef het komplekse getal, dat het verschil tussen (P) en (O) representeert weer door de notatie: (OP).

Dan:

$$\begin{aligned} (OP_i) &= (OP_1) + (P_1P_i) = (OP_1) + (1-\eta)(P_1P_2) = \\ &= Z'(\xi_1) + (1-\eta)[Z'(\xi_2) - Z'(\xi_1)] = \\ &= \eta Z'(\xi_1) + (1-\eta)Z'(\xi_2) \end{aligned}$$

□



figuur 3.1

3.3. Eigenschappen van de kurven van $\eta z'(\xi_1) + (1-\eta)z'(\xi_2)$

De gekonstrueerde curve ligt met twee punten op en verder binnen de curve van $z'(\xi)$.

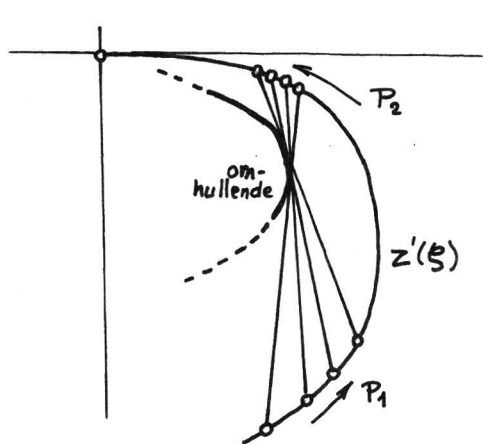
Naarmate μ groter is, ligt ze meer naar binnen, en ze bezit een uitstulping die naar binnen gericht is en voor kleinere η dichter bij de oorsprong ligt.

Bij vaste μ is de gemeenschappelijke raaklijn van alle koorden P_1P_2 een omhullende, waarop ook de toppen van de uitstulpingen liggen.

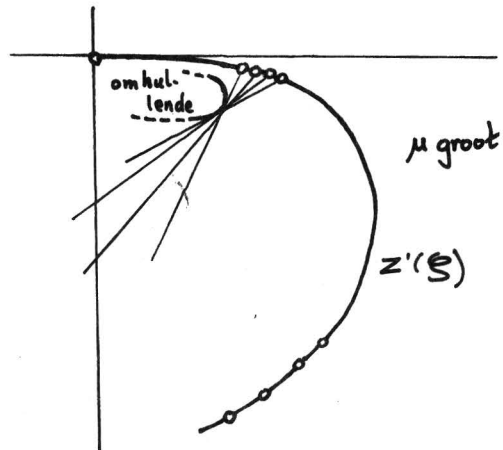
Naarmate μ groter is, ligt ook deze omhullende meer naar binnen.

Men kan de omhullende ook beschouwen als de meetkundige plaats van de toppen van de uitstulpingen en als zodanig η als parameter erop uitzetten, zodat een karakteristiekenschaar ontstaat met parameters μ en η .

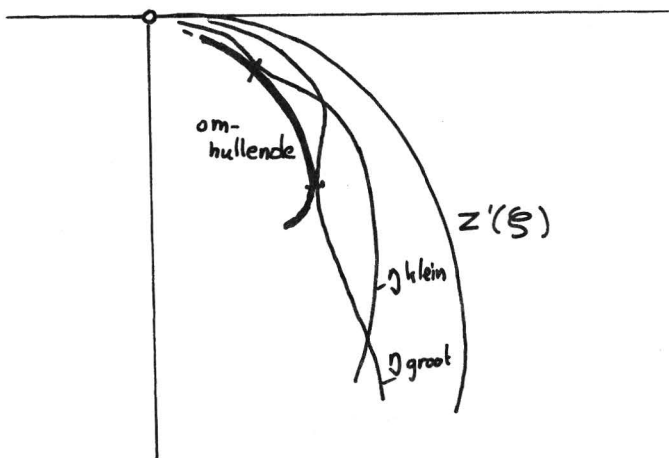
Zie de figuren 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6.



figuur 3.2



figuur 3.3



figuur 3.4

3.4. Mengdamping of contamination damping

Hoewel de uitdrukking $\eta Z'(\xi_1) + (1-\eta)Z'(\xi_2)$ grafisch slechts dan goed te konstrueren is voor het geval $\tilde{\gamma} \neq 0$ indien men beschikt over een zeer goede karakteristiekenschaar van $Z'(\xi)$ (aangezien $\tilde{\gamma}_1 \neq \tilde{\gamma}_2$), maakt de konstruktie voor het geval $\tilde{\gamma} = 0$ plausibel dat een grotere damping vereist zal zijn om bij bepaalde \bar{k}_e een oplossing van de dispersierelatie te verkrijgen. Dit omdat de somkurve verder van de reële x-as af ligt.

Deze ekstra damping is reeds voor zeer kleine η van grote betekenis, ze wordt daarom contamination damping (verontreinigingsdamping) genoemd, daar ze is ontdekt als een gevolg van een verontreiniging van een plasma door lichte ionen.

Benaderingsformules voor de mengdamping (zo genoemd omdat het uiteindelijk om plasma's gaat waarin $0 \leq \eta \leq 1$) zijn slechts gemakkelijk te geven indien $\xi_1 \geq 4$ (en dan dus ook $\xi_2 \geq 4$). Daartoe weer mag θ niet te klein zijn.

3.5. De dispersierelatie, het reële deel

Op de elektronentak heeft de aard van de samenstelling van het plasma geen enkele invloed.

Beschouwd wordt dus slechts de ionentak.

In (3.2) kan men, indien $\xi_1 \geq 4$, naar analogie van (2.37) en (2.39) de volgende betrekkingen vinden:

$$\tilde{\omega}_{1I}^2 \sim \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{k_e^2 + 1} \cdot \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu} \right) \quad (3.6)$$

$$\bar{\omega}_{1I}^2 \sim \frac{k_e^2}{k_e^2 + 1} \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu} \right) \quad (3.7)$$

en hieruit volgt, dat het reële deel van de dispersiekromme voor $k_e \rightarrow 0$ een helling $\sqrt{\eta + \frac{1-\eta}{\mu}}$ heeft.

Om dit resultaat vergelijkbaar te maken met het resultaat dat behoort bij een enkelvoudig plasma, wordt de plasma-eigenfrequentie van het mengsel gedefiniëerd als:

$$\omega_{pm}^2 = \omega_{p1}^2 \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu} \right) \quad (3.8)$$

Zie ref (11). De gereduceerde frequentie:

$$\bar{\omega}_m^2 = \bar{\omega}_1^2 \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu} \right)^{-1} \quad (3.9)$$

Met behulp van (2.23a) volgt:

$$\tilde{\omega}_{1I} = \frac{\bar{\omega}_{mI}}{k_e} \sqrt{\frac{\theta}{2}} \sqrt{\eta + \frac{1-\eta}{\mu}}$$

wat consistent is met (2.40), indien wordt genomen:

$$\tilde{\omega}_m^2 = \tilde{\omega}_1^2 \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu} \right)^{-1} \quad (3.10)$$

Definiëert men nu:

$$\tilde{\omega}_m = \frac{\omega}{k v_m \sqrt{2}} \quad (3.11)$$

dan volgt:

$$v_m^2 = v_1^2 \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu} \right) \quad (3.12)$$

en tenslotte, analoog aan (2.6):

$$K_m^2 = \frac{\omega_{pm}^2}{v_m^2} \quad (3.13)$$

volgt:

$$K_m^2 = K_1^2 = \theta K_e^2 \quad (3.14)$$

3.6. De dispersierelatie, het imaginaire deel

Uitgegaan wordt van die situatie, waarin de asymptotische ontwikkeling voor de ionenbijdrage mag worden genomen, alsmede de reeksontwikkeling voor de elektronenbijdrage.

Uitgegaan wordt van (2.29):

$$\tilde{\gamma}_e = \frac{2\pi^{1/2} \tilde{\omega}_e \exp(-\tilde{\omega}_e^2) + \theta \eta \tilde{\omega}_1 \exp(-\tilde{\omega}_1^2) + \theta(1-\eta) \tilde{\omega}_2 \exp(-\tilde{\omega}_2^2)}{2(4\tilde{\omega}_e^2 - \theta \sqrt{\theta} \mathcal{S}(\frac{\eta}{\tilde{\omega}_1^3} + \frac{(1-\eta)\sqrt{\mu}}{\tilde{\omega}_2^3}))}$$

$$\tilde{\gamma}_e \approx -\frac{\pi^{1/2}}{\theta\sqrt{\theta\delta}} \frac{\tilde{\omega}_e + \theta\eta\tilde{\omega}_1 \exp-\tilde{\omega}_1^2 + \theta(1-\eta)\tilde{\omega}_2 \exp-\tilde{\omega}_2^2}{\frac{\eta}{\tilde{\omega}_1^3} + \frac{(1-\eta)\sqrt{\mu}}{\tilde{\omega}_2^3}}$$

$$\tilde{\gamma}_1 \approx -\frac{\pi^{1/2}}{\theta} \cdot \tilde{\omega}_1^4 \cdot \frac{(\theta\delta)^{-1/2} + \theta\eta \exp-\tilde{\omega}_1^2 + \theta(1-\eta)\sqrt{\mu} \exp-\mu\tilde{\omega}_1^2}{\eta + \frac{1-\eta}{\mu}}$$

$$\tilde{\gamma}_i = -\frac{\pi^{1/2}}{\theta 2\sqrt{2}} \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{k_1}\right)^3 \cdot \frac{(\theta\delta)^{-1/2} + \theta\eta \exp-\frac{\tilde{\omega}_1^2}{2k_1^2} + \theta(1-\eta)\sqrt{\mu} \exp-\frac{\mu}{2} \cdot \frac{\tilde{\omega}_1^2}{k_1^2}}{\eta + \frac{1-\eta}{\mu}}$$

Substitueer (3.8):

$$\tilde{\gamma}_m \approx -\pi^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{2}} \cdot \tilde{\omega}_m \cdot \left(\frac{\tilde{\omega}_m}{k_e}\right)^3 \cdot \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu}\right)^{1/2} \left\{ (\theta\delta)^{-1/2} + \theta\eta \exp-\left(\frac{\tilde{\omega}_m}{k_e}\right)^2 \cdot \frac{\theta}{2} \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu}\right) + \theta(1-\eta)\sqrt{\mu} \exp-\left(\frac{\tilde{\omega}_m}{k_e}\right)^2 \cdot \frac{\theta\mu}{2} \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu}\right) \right\}$$

(3.15)

Deze is analoog aan (2.44a), zij het dat daar enkel de elektronenbijdrage is meegenomen. Vult men daar voor de exponentiële factor 1 in, dan verkrijgt men de elektronenterm van (3.15).

De ionentermen mogen nu echter niet verwaarloosd worden, omdat de exponentiële factor veel kleiner is door de vermenigvuldiging van de exponent met de mengfaktor: $\eta + \frac{1-\eta}{\mu}$.

Voorwaarde (vgl. (2.40a)).

In het fysisch zinvolle gebied is $\tilde{\omega}_{mI} \sim k_e$ en daar geldt:

$$\tilde{\omega}_{1I}^2 \sim \frac{\theta}{2} \left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu}\right) \quad \text{eis: } \tilde{\omega}_{1I} \gtrsim 4 \quad (\text{en } \tilde{\omega}_{2I} \gtrsim 4) \quad (3.16)$$

De benadering mag dus worden toegepast voor:

$$\theta \gtrsim \frac{32}{\eta + \frac{1-\eta}{\mu}} \quad (3.17)$$

Dit betekent dat de benaderingsformule - zeker bij grote μ en kleine η - voor een veel beperkter θ -gebied geldt dan het geval is bij het enkelvoudig plasma, aangenomen dat de ionentemperatuur voor beide ionsoorten gelijk is.

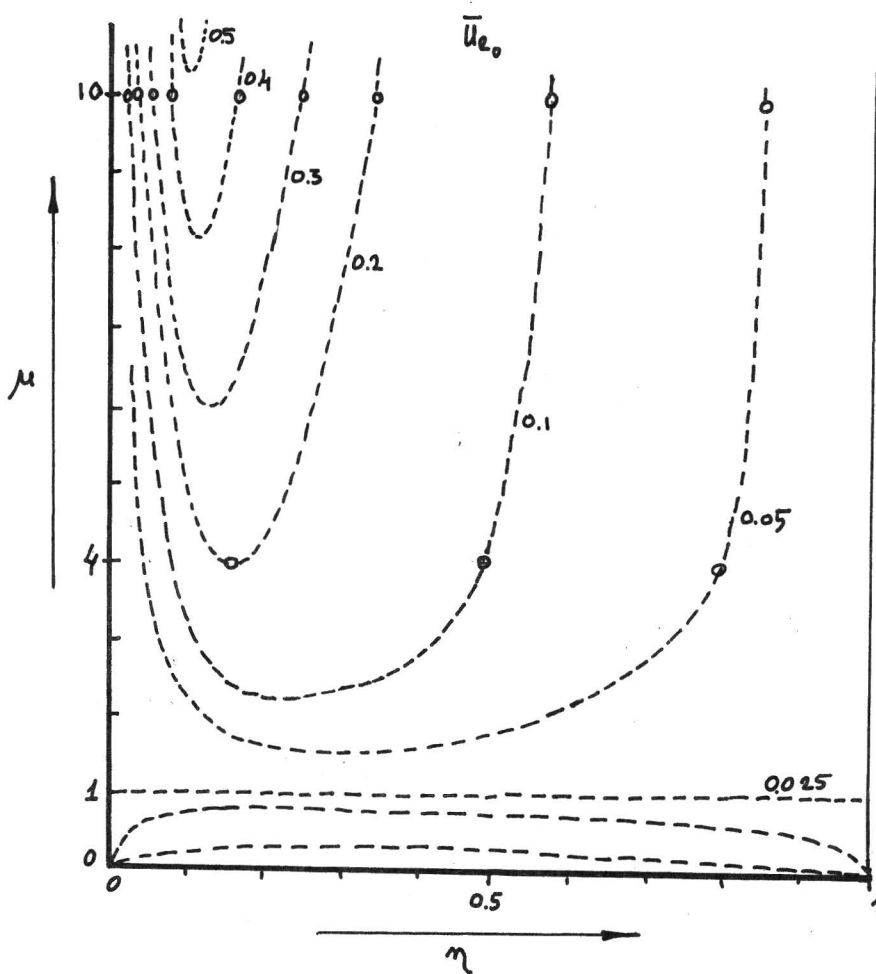
3.7. Invloed van de drift

Met behulp van de grafische methode is gemakkelijk de kurve te bepalen van \bar{u}_{e_0} als functie van η met μ als parameter. (figuur 3.7)

Zij bezit een maksimum \hat{u}_{e_0} dat bij grotere μ groter wordt en meer naar lagere η -waarden toe verschuift.

Het is mogelijk om \hat{u}_{e_0} als functie van μ uit te zetten (figuur 3.8)

Daarnaast kan nog een hoogtekaart worden gemaakt, waarop \bar{u}_{e_0} als functie van μ en η wordt weergegeven (figuur 3.9)



figuur 3.9

4. DIGITALE METHODE TER BEREKENING VAN DE DISPERSIEKROMMEN

4.0. Inleiding

Dit hoofdstuk beschrijft een algol-programma dat de eerste-orde ionenoplossing berekent van de dispersierelatie (3.2) van een plasma dat bestaat uit een of twee ionsoorten.

Dit programma kan overigens gemakkelijk worden uitgebreid tot algemener gevallen. Een kleine wijziging maakt het mogelijk ook de eerste-orde elektronentak te berekenen.

4.1. Theoretische grondslag

In de literatuur (7), (8) is een procedure beschreven die de komplekse functie $w(\xi)$ berekent, de procedure "wofz".

Deze procedure berekent

$$w(\xi) = \exp-\xi^2 \cdot \operatorname{erfc}(-i\xi) \quad (4.1)$$

in het eerste kwadrant van het komplekse vlak, doch ze kan door middel van de betrekkingen:

$$w(-\xi) = 2\exp-\xi^2 - w(\xi) \quad (4.2)$$

$$w(\bar{\xi}) = \overline{w(-\xi)} \quad (4.3)$$

gemakkelijk tot het gehele komplekse vlak worden uitgebreid.

De plasma-dispersiefunctie:

$$z(\xi) = \pi^{-1/2} \int \frac{\exp-\chi^2}{\chi - \xi} d\chi \quad (4.4)$$

kan als volgt worden herschreven (zie apendix 2):

$$Z(\xi) = i\pi^{1/2} \exp -\xi^2 \left(1 + \frac{2i}{\pi^{1/2}} \int_0^\xi \exp \chi^2 d\chi \right) = \quad (4.5)$$

$$= i\pi^{1/2} \omega(\xi) \quad (4.6)$$

Indien uitdrukking (4.5) links en rechts wordt gedifferentieërd ontstaat de volgende differentiaalvergelijking:

$$Z'(\xi) = -2\xi Z(\xi) - 2 \quad (4.7)$$

met behulp waarvan $Z'(\xi)$ berekend kan worden.

4.2. De praktische uitwerking

Er bestond een programma "minkie"(11) dat bij gegeven \bar{k}_e de gewenste waarden voor $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\omega}$ enz. kon berekenen.

Hoewel dat voordelen biedt bij het tekenen van dispersiekrommen, waar immers \bar{k}_e als onafhankelijk variabele wordt gebruikt, is dit programma omslachtig en vergt het veel rekentijd.

 Ook is een programma gemaakt waarbij $\tilde{\gamma}$ vastligt en $\tilde{\omega}$ variabel is. Dit met het doel om uit te breiden tot hogere-orde modes. Nadeel is nu dat $\tilde{\gamma}$ vaak erg klein moet zijn en de kurve waarvan het snijpunt met de reële as moet worden bepaald, deze as onder zeer kleine hoek snijdt.
 (figuur 4.1)

Uiteindelijk wordt het programma "ho chi minh" als standaardprogramma gebruikt. Het is overzichtelijk en snel en kan gemakkelijk worden gewijzigd om bepaalde berekeningen uit te voeren.

Bijlage 1 geeft de programmatekst.

Vanaf regel 1440 worden de plasma-parameters ingevoerd: δ (DELTA), θ (TE), m_1, m_2 , η (NU) en \bar{u}_e (UE).

Als rekenparameters worden ingevoerd: de beginwaarde (BEX), stapwaarde (STAX) en eindwaarde (GREX) van de genormeerde beginhelling van het reële deel van de dispersiekromme (vgl. (3.7) en figuur (2.11)).

Deze is ongeveer 1 en wordt voor $\theta \lesssim 30$ wat groter dan 1, hiermee zijn dan de beginwaarden enz. af te schatten.

Voor $\tilde{\gamma}$ (γ) wordt een beginwaarde ingevoerd. Het programma is in de oor-

spronkelijke vorm niet zóver geautomatiseerd, dat het teken van Y omklapt, mocht het onjuist zijn (wat het geval is in het instabiele gebied, waar $\tilde{\gamma} > 0$).

Y wordt opgestapt door te vermenigvuldigen met, resp. te delen door, de stapwaarde $STAY$. Dit heeft voordelen als de oplossing van de dispersierelatie (3.2) bij kleine Y ligt, dus kleine $\tilde{\gamma}$, wat bij een enkelvoudig plasma, voor \bar{k}_e kleiner dan 1 en niet te kleine θ , altijd zo is en ook in de andere gevallen meestal.

Nadeel is van deze methode, dat als de uiteindelijke Y groter is dan de ingevoerde (meer negatief), de uitdrukking voor $Z'(\xi_e) + \theta[\eta Z'(\xi_e) + (1-\eta)Z(\xi_e)]$ snel divergeert, waarbij ze in het vierde of derde kwadrant kan komen liggen. In dat geval reageert het programma verkeerd en explodeert bovengenoemde uitdrukking omdat $-\tilde{\gamma}$ te groot wordt (vgl. (4.5)).

Dit treedt soms op bij samengestelde plasma's, waar de demping immers vrij sterk kan zijn. Het nadeel kan echter worden opgevangen door de stapwaarde klein te nemen.

X wordt vermenigvuldigd met $\sqrt{\frac{\theta}{2}} \cdot \sqrt{\eta + \frac{1-\eta}{\mu}}$ (3.9a) teneinde $\tilde{\omega}_1$ te krijgen.

Met behulp van (3.3) en (3.4) wordt ook $\tilde{\omega}_2$ en $\tilde{\omega}_e$ verkregen.

Dan worden de overeenkomstige waarden van $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ en $\tilde{\gamma}_e$ berekend.

De procedure "zetac(X,Y,REZA,IMZA)" berekent $Z'(\xi)$, waar $\xi = X + iY$.

De oplossing is: REZA + i.IMZA

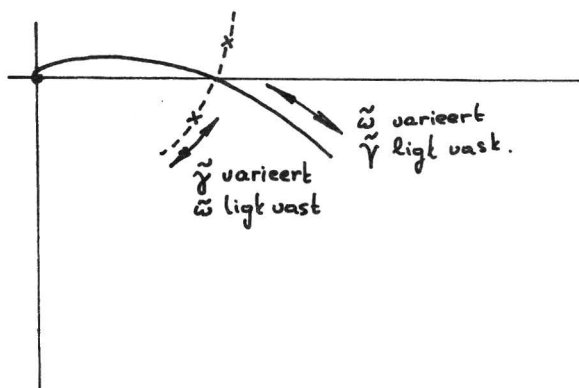
Met behulp hiervan wordt het rechterlid van (3.2) berekend, en Y wordt zodanig ingesteld dat het imaginaire deel van deze uitdrukking nul wordt.

De berekening stopt als deze waarde beneden een bepaald bedrag komt.

Het reële deel van de uitdrukking, RET, is gelijk aan \bar{k}_e^2 , zodat \bar{k}_e kan worden gevonden.

Als uitgangsgrootheden print het programma: $\tilde{\omega}_{m_1}$, $\tilde{\gamma}_{m_1}$, \bar{k}_e , $\bar{\omega}_{m_1}$ en $\bar{\gamma}_{m_1}$.

Eventueel kunnen als controle nog worden afgedrukt: RET en IMT, terwijl voorts nog uitgeprint kan worden hoe $\tilde{\gamma}_1$ verloopt gedurende het rekenen.



figuur 4.1

PROGRAMMATEKST:

```

0001 'BEGIN' 'COMMENT' 'PROGRAMMA HO CHI MINH';
0002 'REAL' 'DELTA,M1,M2,IF,MU,NU,UF';
0003 'REAL' 'X,Y,X1,X2,XE,Y1,Y2,YE';
0004 'REAL' 'RE1,RE2,REF,RET,IM1,IM2,IME,IMF';
0005 'REAL' 'BEX,STAX,GBFX,STAY,A,R,C,D';
0006 'BOOLEAN' 'B,C';
0010 'PROCEDURE' 'ZF100(X,Y,REZA,IMZA)';
0011 'VALUE' 'X,Y';
0030 'REAL' 'X,Y,REZA,IMZA';
0031 'BEGIN' 'REAL' 'A,RA,IA,REF,IMA,REFZ,IMZ,REF,IM';
0040 'PROCEDURE' 'WOFZ(X,Y,RE,IM)';
0050 'VALUE' 'X,Y';
0060 'REAL' 'X,Y,RE,IM';
0090 'BEGIN'
0100 'INTEGER' 'CAPN,NU,N,NF1';
0110 'REAL' 'H,H2,LAMBDA,r1,r2,S,S1,S2,T1,T2,C';
0120 'BOOLEAN' 'B';
0121 LAMBDA := 0;
0130 'IF' 'Y < 4.29 'AND' 'X < 5.33 'THEN'
0140 'BEGIN' S := (1 - Y/4.29)*SQRT(1 - X*X/28.41);
0150     H := 1.6 * S; H2 := 2 * H;
0160 CAPN := 6 + 23*S; NU := 9 + 21*S
0170     'END'
0180     'ELSE'
0190     'BEGIN' H := 0; CAPN := 0; NU := 8; 'END';
0200 'IF' 'H > 0 'THEN' LAMBDA := H2 + CAPN;
0210 B := H = 0 'OR' LAMBDA = 0;
0220 r1 := r2 := S1 := S2 := 0;
0230 'FOR' 'N := NU 'STEP' -1 'UNTIL' 0 'DO'
0240 'BEGIN' NF1 := N + 1;
0250 T1 := Y + H + NF1*r1; T2 := X - NF1*r2;
0260 C := .5/(T1 * T1 + T2 * T2);
0270 r1 := C * T1; r2 := C * T2;
0280 'IF' 'H > 0 'AND' 'N <= CAPN 'THEN'
0290 'BEGIN'
0300 T1 := LAMBDA + S1; S1 := r1*T1 - r2*S2;
0310 S2 := r2 * T1 + r1 * S2;
0320 LAMBDA := LAMBDA/H2
0330 'END';
0340 'END';
0360 'IF' 'Y = 0 'THEN' RE := EXP(-X*X) 'ELSE'
0361 RE := 1.12837916709551 * ('IF' B 'THEN' r1 'ELSE' S1);
0370 IM := 1.12837916709551 * ('IF' B 'THEN' r2 'ELSE' S2)
0380 'END';
0450 'BEGIN'
0460 A := 2./18281828459 + (-(X*X - Y*Y));
0470 XA := A * COS(2*X*Y);
0475 IA := -A * SIN(2*X*Y);
0476 'IF' 'Y < 0 'AND' 'X > 0 'THEN' IA := -IA;
0480 'IF' 'X >= 0 'THEN'
0490 'BEGIN' 'IF' 'Y >= 0 'THEN'
0510 'BEGIN' WOFZ(X,Y,RE,IM);REF := RE; IYA := IM
0520 'END'
0540 'ELSE' 'BEGIN' WOFZ(X,-Y,RE,IM);
0550 REF := 2 * XA - RE;
0560 IYA := -2 * IA + IM; 'END'; 'GOTO' LABEL 'END';
0580 'IF' 'Y >= 0 'THEN' 'BEGIN' WOFZ(-X,Y,RE,IM);
0590 REF := RE; IYA := -IM 'END' 'ELSE'
0600 'BEGIN' WOFZ(-X,-Y,RE,IM);REF := 2 * XA - RE;
0610 IYA := 2 * IA - IM 'END';
0620 LABEL: REF := - 1.7724539 * IYA;
0630 IMZ := 1.7724539 * REF;
0660 REZA := -2 - (2*X*REFZ) + (2*Y*IMZ);

```

```
1440 DELTA:=1834;
1441 TE:=10;
1442 M1:=1;M2:=10;
1443 NU:=0.1;
1444 UE:=0;
1445 REX:=1.35;
1446 STAX:=-0.05;
1447 GREX:=0;
1448 Y:=-.1;
1449 STAY:=SQRT(10);
1450 MU:=M2/M1;
1451 R0:=CO:='TRUE';
1452 A:=SQRT(NU+(1-NU)/MU);
1453 R:=SQRT(TE/2);
1454 'FOR'X:=REX'STEP'STAX'UNTIL'GREX'DO'
1455 BERKT:
1481 'BEGIN'Y:=-((0.1/(A*R*SQRT(MU))));STAY:=SQRT(10);
1482 R0:=CO:='TRUE';X1:=A*R*A;
1483 X2:=X1*SQRT(MU);
1484 XE:=X1/SQRT(DELTA*TE);
1485 AALST:
1486 Y1:=X1*Y/A;NLGR;FLDT(5,2,Y1);
1487 Y2:=X2*Y/X;
1488 YE:=XE*Y/X;
1489 ZETAC(X1,Y1,RE1,IM1);
1490 ZETAC(X2,Y2,RF2,IM2);
1491 ZETAC(XE,YE,REF,IME);
1492 RET:=(RE+IE*((NU*RF1)+(1-NU)*RF2));
1493 IMT:=(IME+IE*((NU*IM1)+(1-NU)*IM2));
1494 'IF'ABS(IMT)<10*(-3)'THEN'GOTO'ZFELST;
1495 'IF'IMT<0'THEN'
1496 'BEGIN'
1497 'IF'NOT'R0'THEN'STAY:=SQRT(STAY);
1498 Y:=Y*STAY;
1499 CO:='FALSE';
1500 'END'
1501 'ELSE'
1502 'BEGIN'
1503 'IF'NOT'CO'THEN'STAY:=SQRT(STAY);
1504 Y:=Y/STAY;
1505 CO:='FALSE';
1506 'END';NLGR;FLDT(5,2,RET);FLDT(5,2,IMT);
1507 'GOTO'AALST;
1508 ZFELST:
1509 'IF'RF1<0'THEN'BEGIN'STAX:=STAX/2;X:=X-STAX;'GOTO'BERKT;'END';
1510 NLGR;FLDT(5,2,X1/A);
1511 FLDT(5,2,Y1/A);
1512 FLDT(5,2,SQRT(RFT/2));
1513 FLDT(5,2,X*SQRT(RFT/2));
1514 FLDT(5,2,Y*SQRT(RFT/2));
1515 'END';
1516 'END';'END'PROGRAMMA;
```

4.3. Resultaten van berekeningen

4.3.1. De eerste-orde elektronenmode

Indien de oplossing van de dispersierelatie die de elektronentak vormt moet worden berekend, zal het programma aangepast dienen te worden.

Om als invoer de hellingen $\bar{\omega}_{eE}/k_e$, zoals die zijn weergegeven in figuren als figuur 2.7, te kunnen gebruiken, worden deze in het gewijzigde programma steeds met $\sqrt{\delta}$ vermenigvuldigd. Dit geldt voor de parameters BEX, STAX en GREX. Zo worden de waarden van X omgezet in waarden van $\bar{\omega}_{iE}/k_e$ waarmee het programma werkt.

Uit figuur 2.7. kan ook gekonkludeerd worden dat de waarden van $\bar{\omega}_{eE}/k_e$ variëren van ongeveer 1 tot oneindig en in het fysisch zinvolle gebied ($k_e \ll 1$) zeer groot zijn, dit in tegenstelling tot het gedrag bij de berekening aan akoestische iongolven.

Speciale aandacht moet worden besteed aan de grootheid die voorkomt in regel 1494 en het criterium is waarbij de uitkomst nauwkeurig genoeg geacht wordt om de berekening te stoppen.

Voor grote waarden van $\bar{\omega}_{eE}/k_e$ moet ABS(IMT) heel nauwkeurig worden gediskrimineerd, anders komt een zeer onnauwkeurig resultaat tevoorschijn voor de demping.

Tenslotte dient nog aandacht te worden besteed aan de uitvoergrootheden. Niet $\tilde{\omega}_{mE}$, $\tilde{\gamma}_{mE}$, k_e , $\bar{\omega}_{mE}$ en $\bar{\gamma}_{mE}$ dienen te worden uitgeprint, doch $\tilde{\omega}_{eE}$, $\tilde{\gamma}_{eE}$, k_e , $\bar{\omega}_{eE}$ en $\bar{\gamma}_{eE}$.

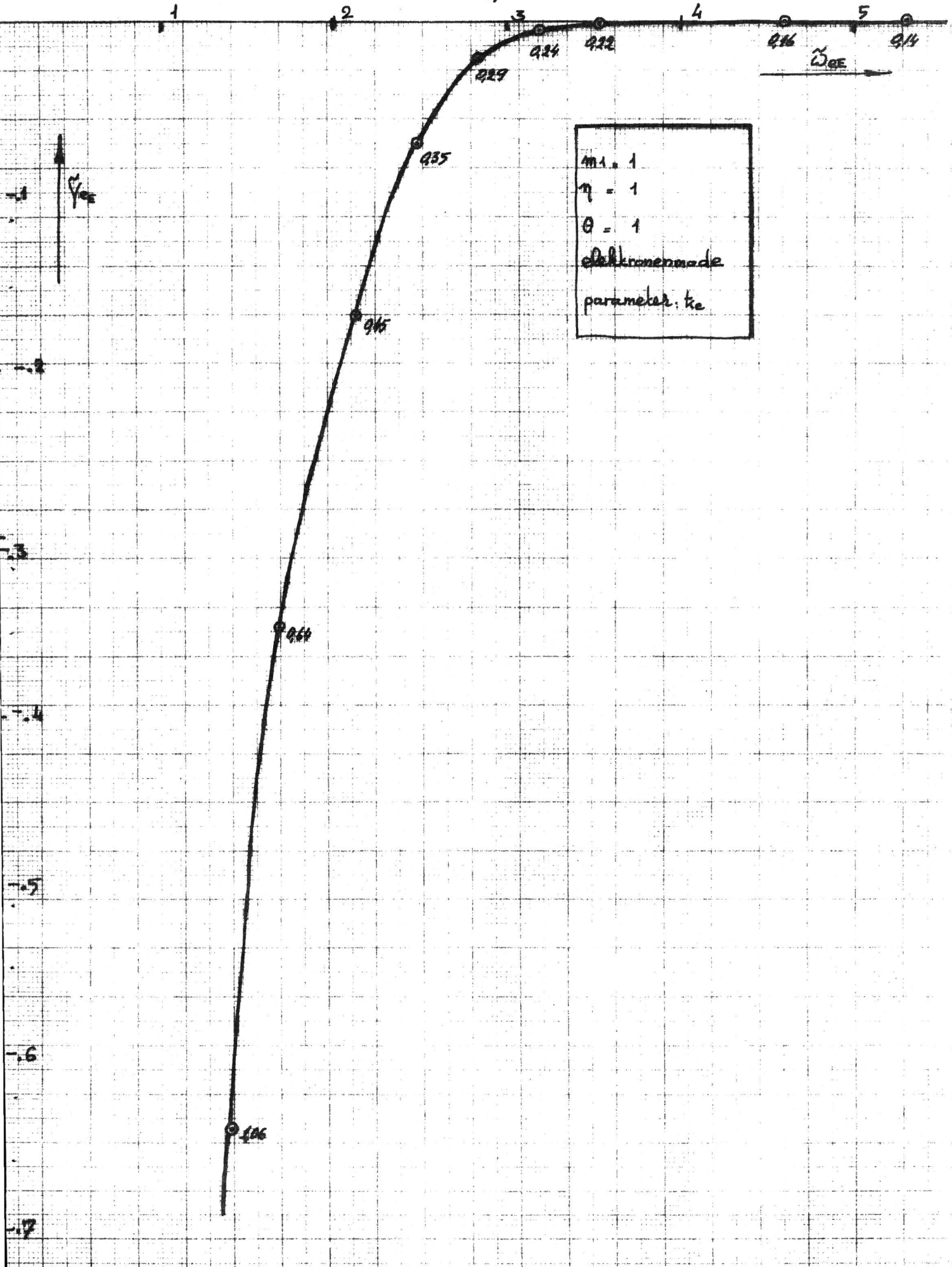
Een bijlage toont het programma in gewijzigde vorm voor de berekening van de eerste-orde elektronentak.

De berekening geeft het verwachte resultaat zoals dat is weergegeven in de figuren 2.5 t/m 2.8. Zij kan verder gemakkelijk worden geverifieerd met behulp van in de literatuur voorkomend tabellenmateriaal ("The Plasma Dispersion Function" van Fried en Comte). (ref. (8))

Berekening v/d elektronenmode.

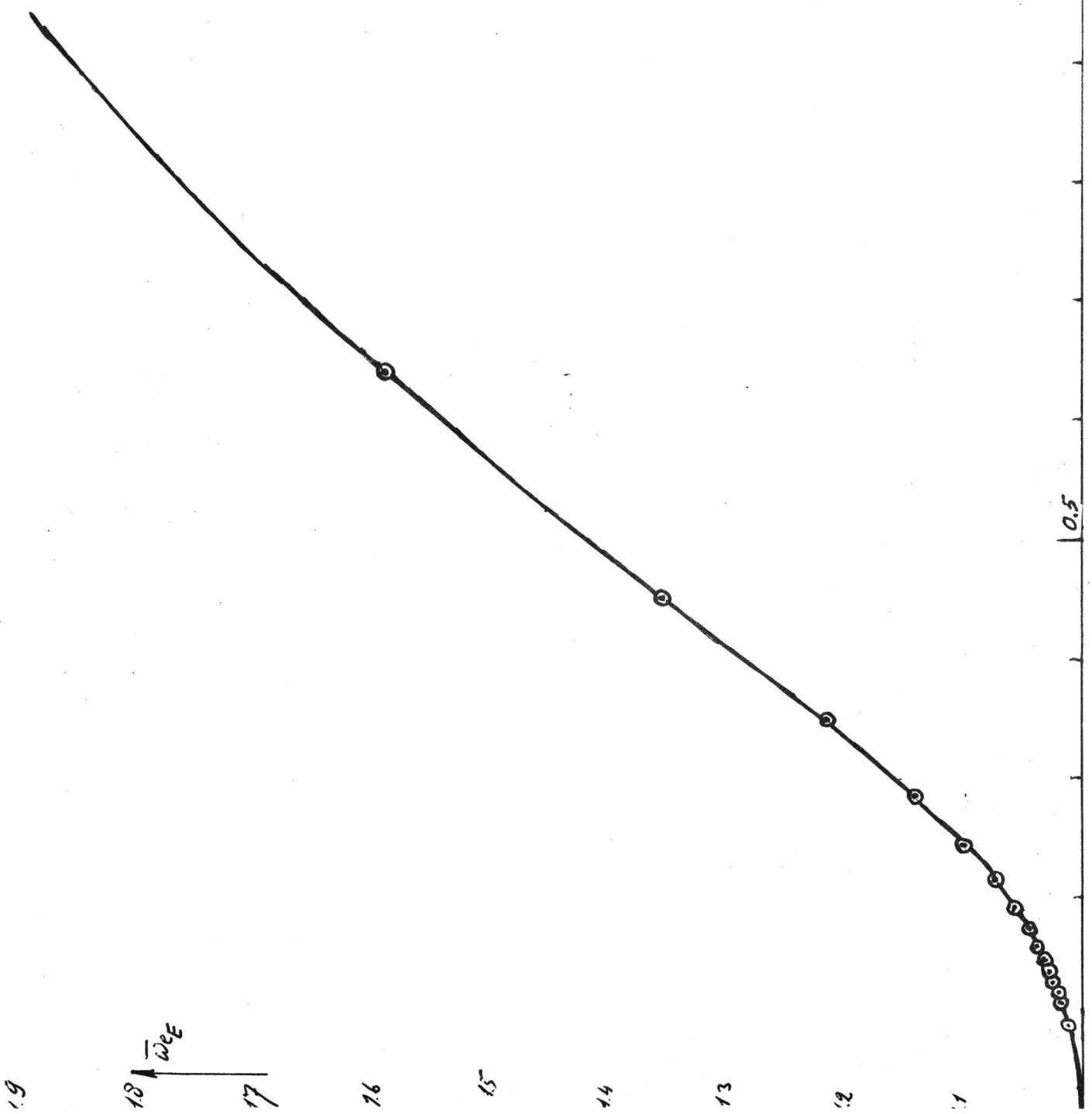
```
1440 DELTA:=1834;  
1441 IE:=1;  
1442 X1:=1;N2:=10;  
1443 NU:=1;  
1444 UE:=0;  
1445 REX:=2*SQRT(DELTA);  
1446 STAX:=.5*SQRT(DELTA);  
1447 GREX:=100*SQRT(DELTA);  
1448 Y:=-.1;  
1449 STAY:=SQRT(10);  
1450 MU:=M2/M1;  
1451 RO:=CO:='TRUE';  
1452 A:=SQRT(NU+(1-NU)/MU);  
1453 B:=SQRT(TE/2);  
1454 'FOR'X:=REX'STEP'STAX'UNTIL'GREX'DO'  
1455 REKKT:  
1481 'BEGIN'Y:=-(.1/(A*B*SQRT(MU)));STAY:=SQRT(10);  
1482 RO:=CO:='TRUE';X1:=A*B*X;  
1483 X2:=X1*SQRT(MU);  
1484 XE:=X1/SQRT(DELTA*TE);  
1485 AALST:  
1486 Y1:=X1*Y/X;NLGR;FLOT(5,2,Y1);  
1487 Y2:=X2*Y/X;  
1488 YE:=XE*Y/X;  
1489 ZETACC(X1,Y1,IE1,IM1);  
1490 RE2:=IM2:=0;  
1491 ZETACC(AE-UE,YE,REE,IME);  
1492 RET:=(RE+IE*(NU*RE1)+(1-NU*RE2));  
1493 IMT:=(IM+IE*(NU*IM1)+(1-NU*IM2));  
1494 'IF'ABS(IMT)<10*(-7)'THEN'RYTC'ZEELST;  
1495 'IF'IMT<0'THEN'  
1496 'BEGIN'  
1497 'IF'NOT'RO'THEN'STAY:=SQRT(STAY);  
1498 Y:=Y*STAY;  
1499 CO:='FALSE';  
1500 'END'  
1501 'ELSE'  
1502 'BEGIN'  
1503 'IF'NOT'CO'THEN'STAY:=SQRT(STAY);  
1504 Y:=Y/STAY;  
1505 RO:='FALSE';  
1506 'END';NLGR;FLOT(5,2,RET);FLOT(5,2,IMT);  
1507 'GOTO'AALST;  
1508 ZEELST:  
1509 'IF'RET<0'THEN'BEGIN'STAX:=STAX/2;X:=X-STAX;'GOTO'REKKT;'END';  
1510 NLGR;FLOT(5,2,XE);  
1511 FLOT(5,2,YE);  
1512 FLOT(5,2,SQRT(RET/2));  
1513 FLOT(5,2,X*SQRT(RET/(2*DELTA)));  
1514 FLOT(5,2,Y*SQRT(RET/(2*DELTA)));  
1515 'END';  
1516 'END';'END'PROGRAMMA;
```

-45-

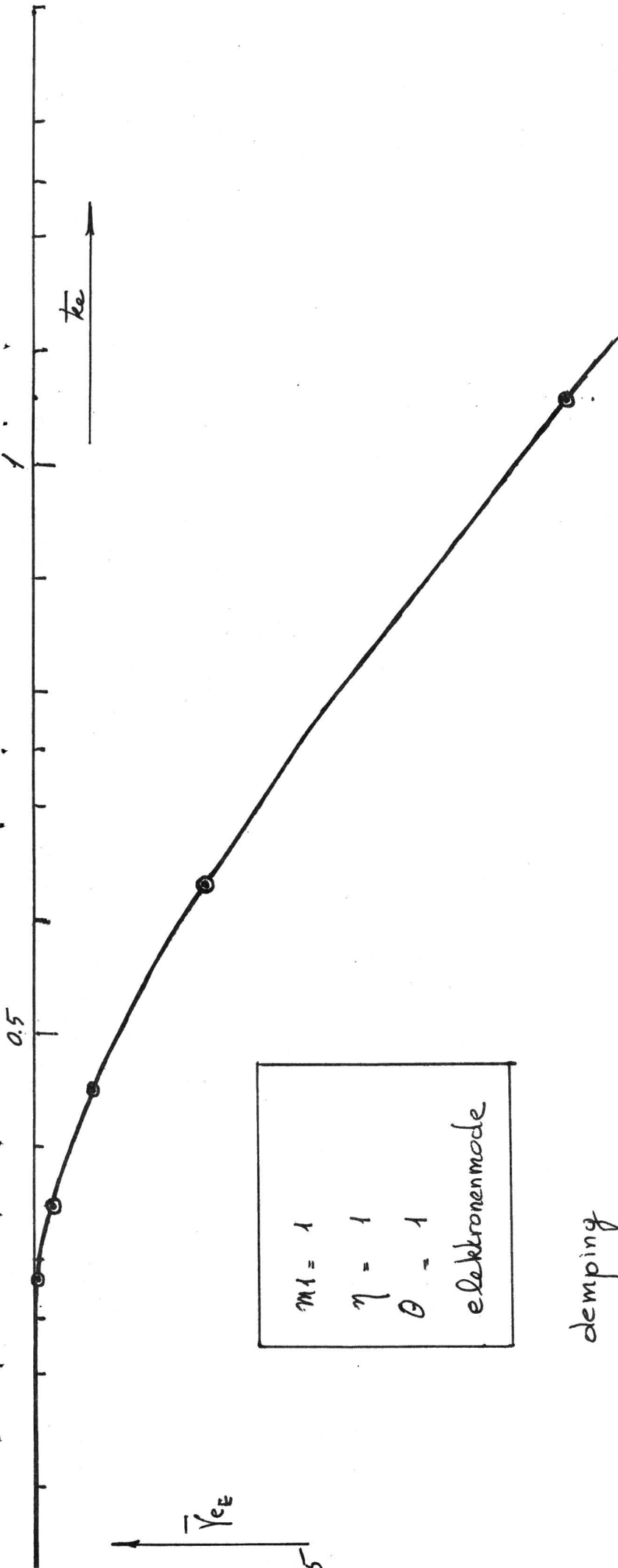


$m_l = 1$
 $\eta = 1$
 $\Theta = 1$
elektronenmode

frekventie



1.9



4.3.2. De eerste-orde ionenmode.

De berekening die bedoeld was om het programma en de benaderingsformules te testen, is uitgevoerd voor een plasma dat bestaat uit protonen en elektronen.

Er zijn twee waarden voor θ genomen: één die voldoet aan de in (2.40a) gestelde eis, en wel $\theta = 1000$ en één die niet voldoet aan de betreffende eis, en wel $\theta = 10$.

In het tweede geval gelden de benaderingsformules niet.

Indien de berekening voor $\theta = 1000$ wordt beschouwd, kan worden nagegaan of de benaderingen (2.40), (2.40a), (2.43), (2.44) en (2.47) kloppen. Deze gelden voor het fysisch zinvolle gebied, waarin $k_e \ll 1$.

Kontrolle op de benaderingsformules:

- a) Volgens de theorie moet de beginhelling van de curve die \bar{u}_I als functie van k_e weergeeft, precies 1 zijn. Ze bedraagt 1.02.
- b) (2.40a) zegt, dat de dispersierelatie reële oplossingen heeft voor $\tilde{\omega}_{iI} \leq \sqrt{\theta/2} = \sqrt{500} = 22.36$. De berekening geeft 22.38.
- c) (2.43) en (2.44) houden in dat voor $k_e \ll 1$ de verhouding tussen demping en reële frekwentie moet bedragen:

$$\frac{\tilde{\gamma}_{iI}}{\tilde{\omega}_{iI}} = \frac{\bar{\gamma}_{iI}}{\bar{\omega}_{iI}} \approx -\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} \exp -\frac{1}{2\delta} \sim -\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} \sim 0.0146$$

De berekening geeft een uitkomst die ongeveer 0.0145 is.

Voor een groter gebied van k_e is (2.39) toepasbaar. Daartoe moet slechts

$$\tilde{\omega}_{iI} \geq 4 \quad \text{zijn, dus} \quad k_e^2 \lesssim \frac{1000}{32} - 1, \quad \text{dus} \quad k_e \lesssim 5.5$$

Voor de verhouding tussen demping en reële frekwentie kan dan worden uitgegaan van (2.44a), waarin (2.39) wordt ingevuld.

Dit levert, indien $k_e = 2.32$, ongeveer:

$$\frac{\bar{\gamma}_{iI}}{\bar{\omega}_{iI}} \sim -\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{1+k_e^2}\right)^{3/2} = 0.0912 \cdot 10^{-2}$$

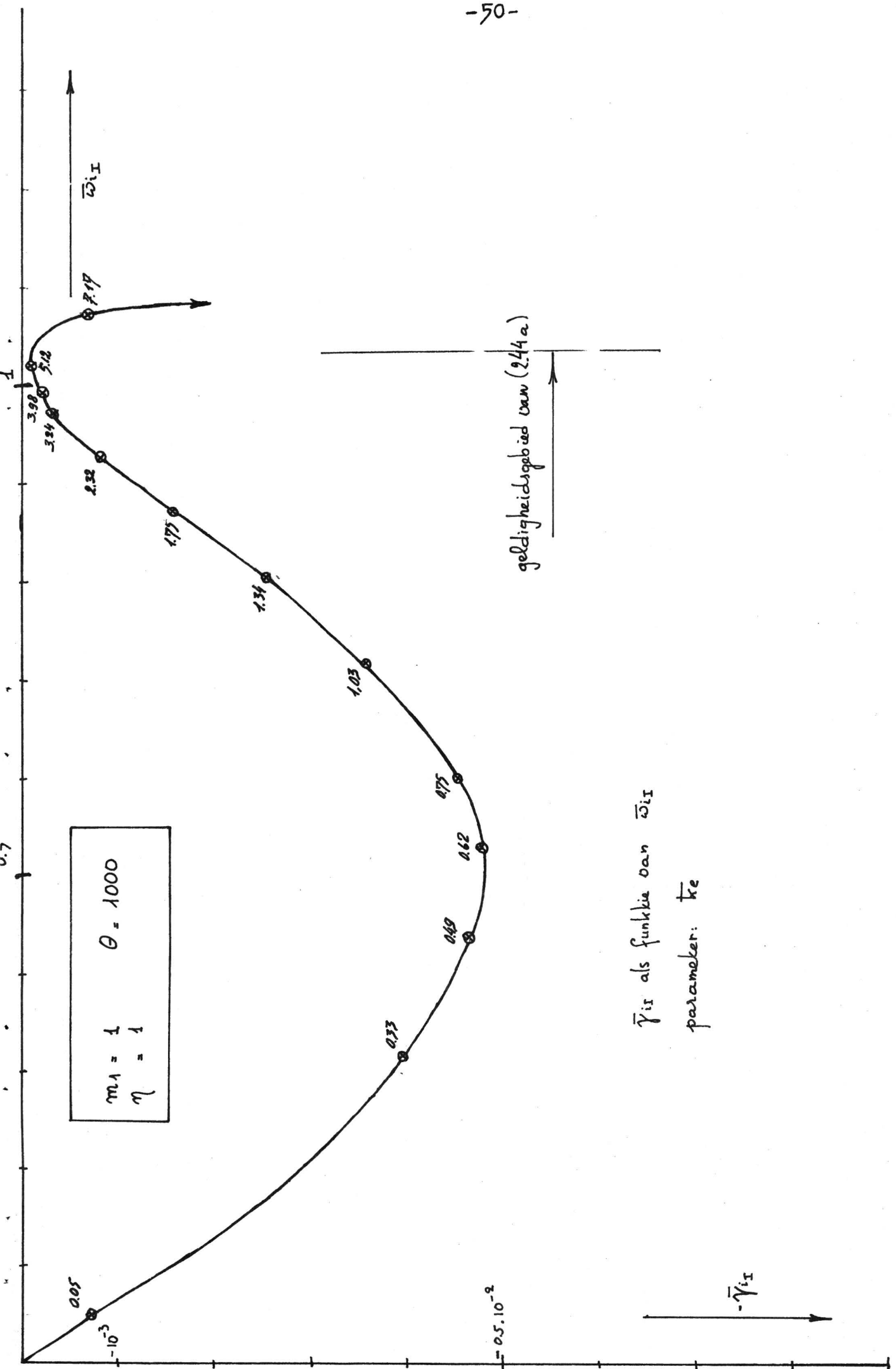
De berekening levert op: ongeveer $0.09 \cdot 10^{-2}$

Deze benadering is dus in een zeer groot gebied van toepassing.

TABEL:

X	k_e	$\tilde{\omega}_{iI}$	$-\tilde{\gamma}_{iI}$	$\bar{\omega}_{iI}$	$-\bar{\gamma}_{iI}$
1.02	0.0038	22.39	0.325	0.0038	$0.55 \cdot 10^{-4}$
1.01	0.0522	22.36	0.325	0.0502	$0.73 \cdot 10^{-3}$
1	0.0500	22.36	0.328	0.0500	$0.73 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.489	20.13	0.213	0.440	$0.47 \cdot 10^{-2}$
0.8	0.755	17.89	0.133	0.604	$0.45 \cdot 10^{-2}$
0.7	1.026	15.65	0.077	0.718	$0.36 \cdot 10^{-2}$
0.6	1.34	13.42	0.042	0.805	$0.25 \cdot 10^{-2}$
0.5	1.75	11.18	0.021	0.873	$0.16 \cdot 10^{-2}$
0.4	2.32	8.94	0.008	0.927	$0.84 \cdot 10^{-3}$
0.3	3.24	6.71	0.002	0.972	$0.34 \cdot 10^{-3}$
0.2	5.12	4.47	-	1.023	$0.96 \cdot 10^{-4}$
0.1	12.95	2.24	0.128	1.295	$0.74 \cdot 10^{-1}$

$m_1 = 1$
 $m_2 = -$
 $\eta = 1$
 $\Theta = 1000$



γ_{iI} als funktie van ω_{iI}
parameter: θ

$-\gamma_{iI}$

De berekening voor $\theta = 10$ toont aan dat - in vergelijking met het geval waarbij $\theta = 1000$ - de demping zeer groot is.

Ook verdwijnt het minimum in de demping dat in het geval met hoge θ optreedt bij $\bar{\omega}_{i\tau} \sim 1$.

Een en ander wordt geïllustreerd door de kurve die $\bar{\gamma}_{i\tau}$ als funktie van $\bar{\omega}_{i\tau}$ weergeeft, ook voor $\theta = 1000$ in de figuur te tekenen.

In deze figuur is duidelijk te zien, dat de beginhelling groter is geworden. Ze kan worden gevonden uit (3.15) door $\eta = 1$ in te vullen:

$$\bar{\gamma}_{i\tau} \cong -\pi^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{2}} \cdot \bar{\omega}_{i\tau} \left(\frac{\bar{\omega}_{i\tau}}{\tau_e} \right)^3 \left\{ (\theta\delta)^{-1/2} + \theta \cdot \exp - \left(\frac{\bar{\omega}_{i\tau}}{\tau_e} \right)^2 \cdot \frac{\theta}{2} \right\} \quad (4.8)$$

4.4. De numerieke berekening, uitgevoerd voor een samengesteld plasma

4.4.0. Inleiding

We nemen een plasma dat gekarakteriseerd wordt door de volgende parameters: $m_1 = 1$; $m_2 = 10$; $\eta = 0.1$,
en daarbij worden twee waarden van θ beschouwd, te weten:

$$\theta = 10 ; \theta = 1000 .$$

4.4.1. Het geval $\theta = 1000$.

Analoog aan de beschouwing van (2.44a) voor een enkelvoudig plasma, wordt nu (3.15) bekeken. Aan de voorwaarde (3.17), die voor dit geval inhoudt:

$\theta \gtrsim 160$, wordt voldaan, en dit betekent, dat de limiet voor $\tau_e \rightarrow 0$ van het quotiënt $\frac{\bar{\omega}_{i\tau}}{\tau_e}$ 1 is.

De exponentiële termen in (3.15), die verantwoordelijk zijn voor de contamination damping, kunnen verwaarloosd worden.

De helling heeft dan dezelfde beginwaarde als die bij het overeenkomstige enkelvoudige plasma, doch vermenigvuldigd met een faktor

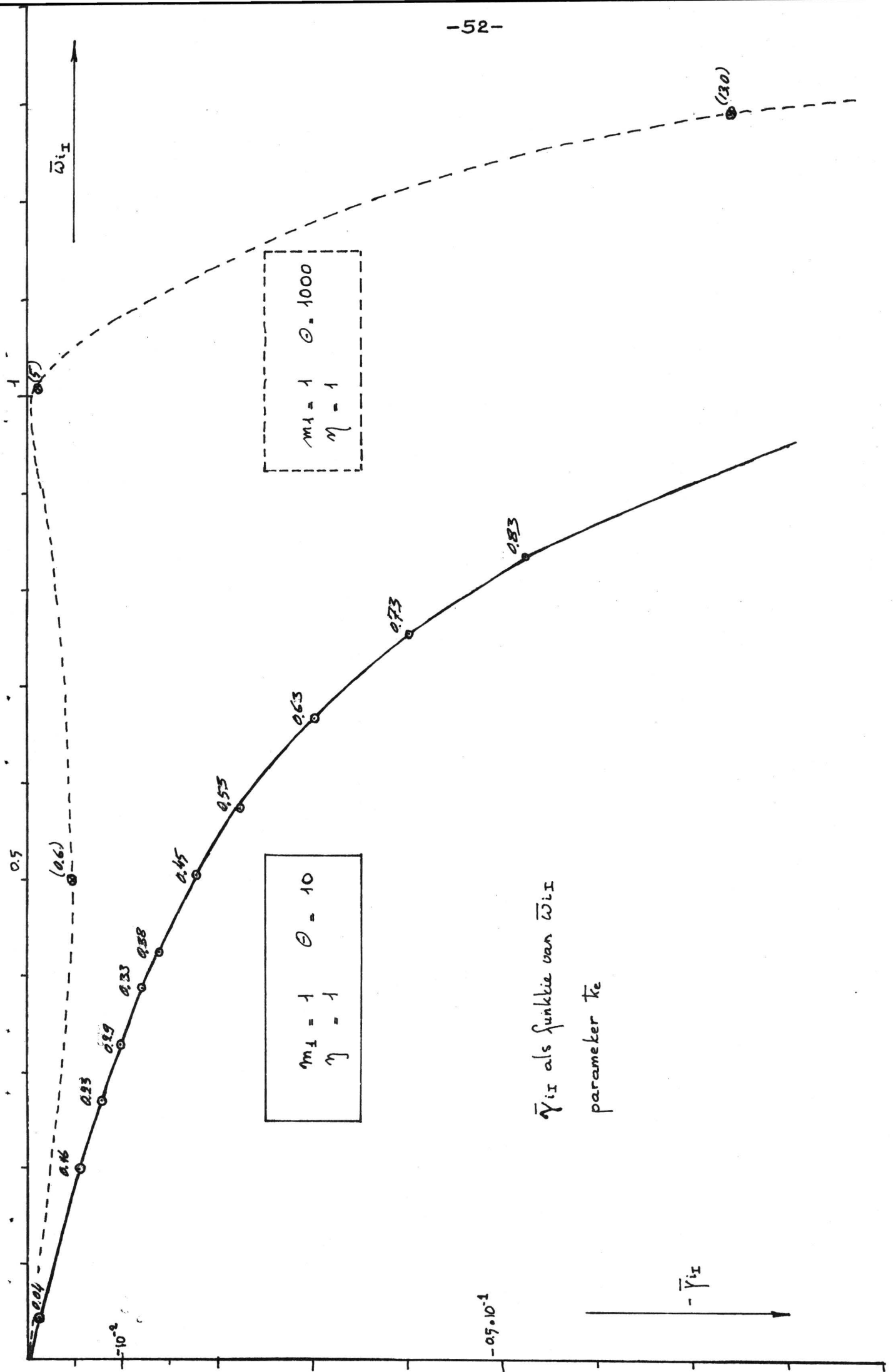
$$\left(\eta + \frac{1-\eta}{\mu} \right)^{1/2} = 0.435$$

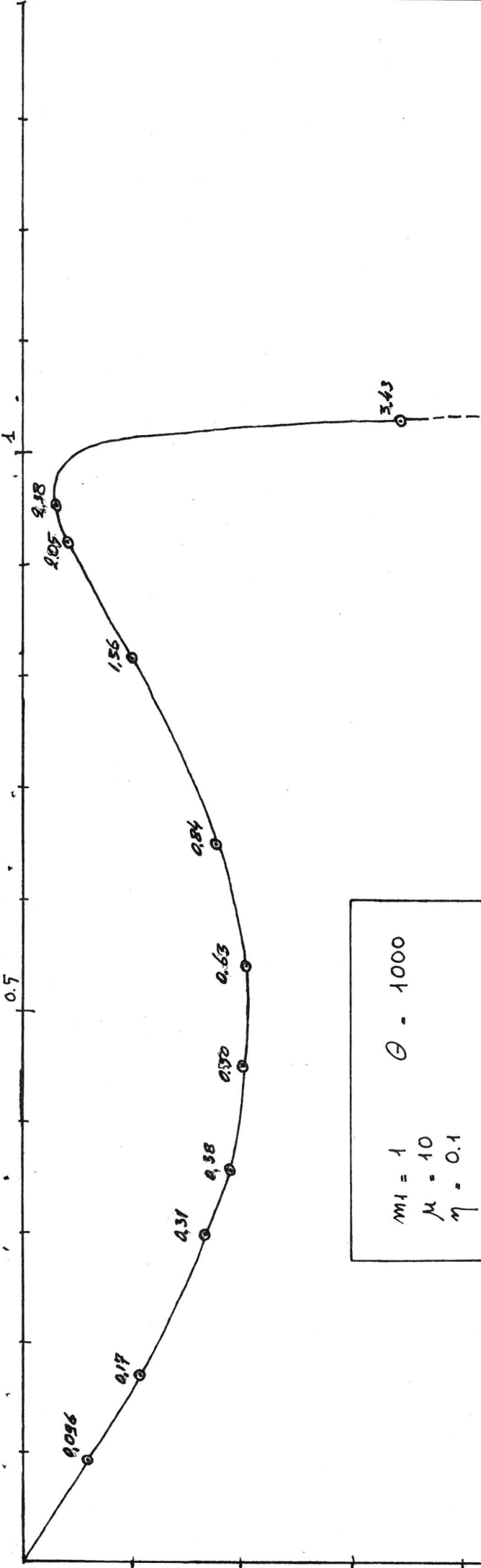
De helling bedraagt:

$$0.635 \cdot 10^{-2}$$

en dit is in goede overeenstemming met het rechtstreeks uit de berekening gevonden resultaat:

$$0.62 \cdot 10^{-2}$$





$m_1 = 1$
 $\mu = 10$
 $\eta = 0.1$
 $\theta = 1000$

\bar{y}_{mI} als functie van $\bar{\omega}_{mI}$
parameter te

$-0.5 \cdot 10^{-2}$

De berekening toont dus aan dat in het geval van grote θ de demping in het samengesteld plasma kleiner is dan in het overeenkomstige enkelvoudige plasma.

4.4.2. Het geval $\theta = 10$.

In dit geval is aan de eis (3.17) niet voldaan. (3.15) blijft geldig, doch enkel als de demping niet al te groot is (ze is afgeleid vanuit (2.29)). Voor het quotiënt $\frac{\bar{\omega}_{ix}}{k_e}$ moet de door de numerieke berekening gevonden waarde worden ingevoerd, ze is groter dan 1 en deze beginhelling bedraagt in ons geval: 76/51

De derde term blijkt verwaarloosbaar.

De tweede term van (3.15) levert 0.347

Deze term is verantwoordelijk voor de contamination damping.

De bijdrage die niet door een exponentiële term wordt geleverd is analoog aan de bijdrage welke in subparagraaf 4.4.1. werd gevonden. Ze bedraagt nu 0.021.

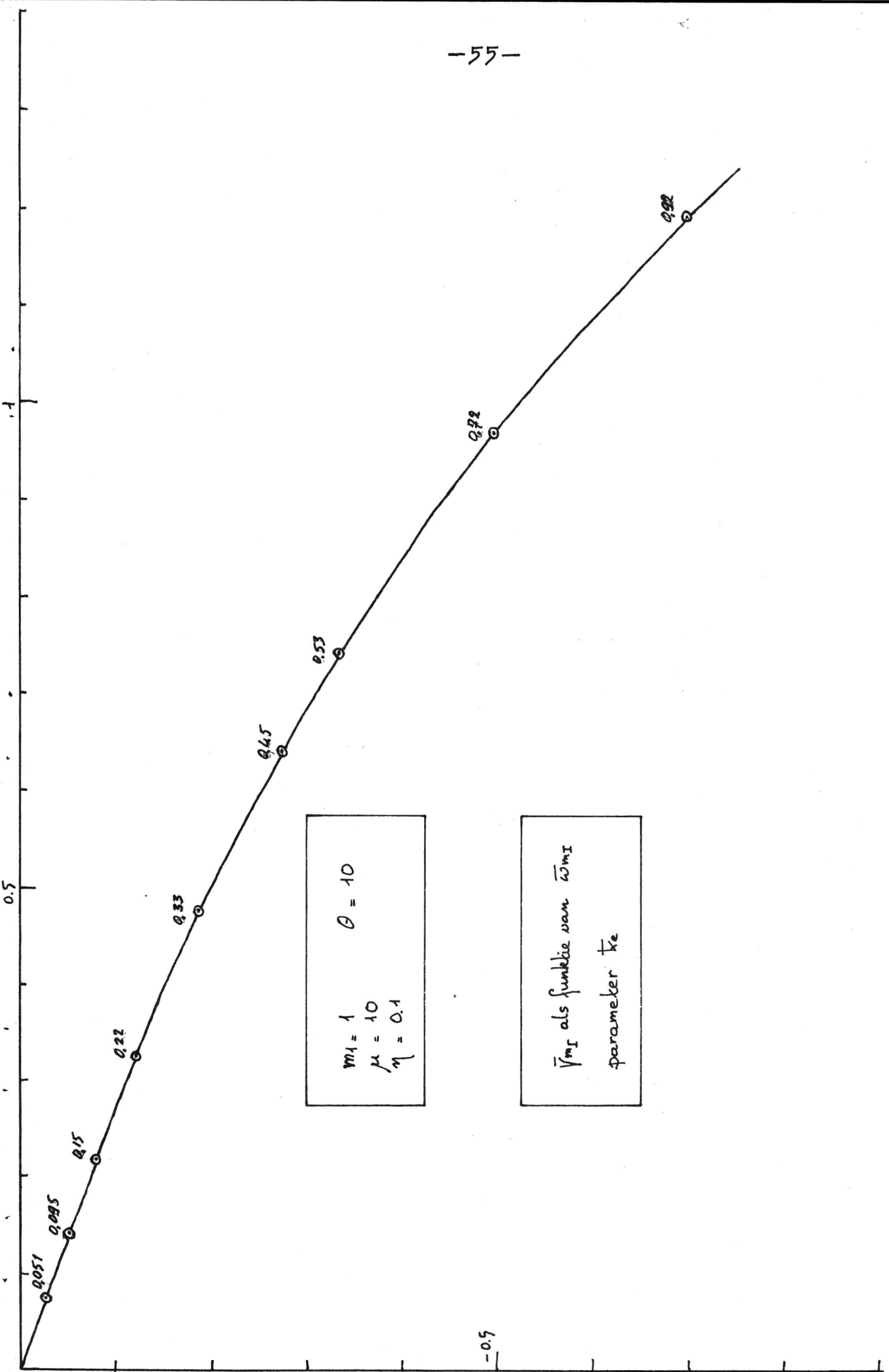
De beginhelling zoals berekend volgens de benaderingsformule bedraagt:

$$0.368$$

terwijl de numerieke berekening rechtstreeks oplevert:

$$0.358$$

Konklusie: (3.15) geeft een redelijk inzicht in de aard van de meng- of contamination-damping.



5. GOLF-GOLFKOPPELING

5.0. Inleiding

R.C.Davidson(5) voert een tweede-orde berekening uit aan een Vlasov-Poisson-plasma en verwaarloost daarbij de Landau-demping. Ook het lopende-golf gedeelte van de oplossing wordt daarin verwaarloosd.

(zie formule (55) van ref.(5)).

R.W.B.Best maakt deze verwaarlozingen niet en komt tot uitdrukkingen die meer overeenstemmen met de fysische werkelijkheid.(2),(3),(4).

In plaats van het eenvoudige geval van Davidson,waarbij singulariteiten optreden tengevolge van samenvallende polen in de uitdrukking voor $\tilde{E}_{(2)}^{\pm}$ (Vgl.(1.23)), treden nu bijna samenvallende polen op.(Formule (20) uit ref. (3)).

Er wordt nader ingegaan op het gedrag van dit soort oplossingen.Gekeken wordt naar koppeling tussen de elektronenmode en de ionenmode-oplossingen,en naar koppeling tussen twee oplossingen van de ionenmode.

5.1. De berekening in tweede-orde

De berekening in tweede orde,zoals uitgevoerd door R.W.B.Best,gaat overeenkomstig dezelfde methode als toegepast in hoofdstuk 1,paragraaf 1.

De snelheid en de plaats van een geladen deeltje worden ontwikkeld naar bijdragen in eerste,tweede orde enz. Zo ook het (willekeurig) veld. Dit alles wordt ingevuld in de bewegingsvergelijkingen van het deeltje.

Er worden verbanden gelegd tussen de ontwikkelingscoëfficiënten van de positie,de snelheid en het veld.

De verdelingsfunctie wordt beschouwd als een functie van de bewegingskonstanten ,ontwikkeld en ingevuld in het Vlasov-Poisson-stelsel (2).

Uiteindelijk wordt een betrekking gevonden die de verdelingsfunctie als functie van positie,snelheid en de ontwikkelingscoëfficiënten van het veld weergeeft.

Uitgaande van het beginwaardeprobleem,analoog aan (1.8),wordt een betrekking gevonden die de getransformeerde van $\tilde{E}_{(1)}$ en $\tilde{E}_{(2)}$, gegeven

doer:

$$\tilde{E}_{(1)}^{\pm}(k, \Omega) = \int \frac{E_{(1)}}{\Omega_{\pm} - \xi} d\xi \quad (5.1)$$

$$\tilde{E}_{(2)}^{\pm}(kk', \Omega) = \iint \frac{E_{(2)}}{\Omega_{\pm} - (\xi + \xi')} d\xi d\xi' \quad (5.2)$$

uitdrukt in de ontwikkelingscoëfficiënten van $\bar{g}_{s, \Omega}^{\pm}$ (1.22).

Dit leidt tot de betrekkingen (20) en (21) uit ref.(3) voor het geval alleen de elektronen worden beschouwd, ofwel tot de betrekkingen (20) en (21) uit ref.(4) voor een plasma dat bestaat uit een willekeurig aantal geladen deeltjes.

Wordt laatstgenoemde berekening uitgevoerd, dan komt naast de diëlektrische coëfficiënt $\epsilon^{\pm}(k, \Omega)$ (1.21) ook de partiële diëlektrische coëfficiënt voor in de vergelijking. Ze wordt gedefiniëerd:

$$\epsilon_s^{\pm}(k, \xi, \Omega) = \kappa_s(k, \xi) + \frac{e_s^2}{\epsilon_0 m_s k} \int dv \frac{dF_s}{dv} \frac{1}{\Omega_{\pm} - kv} \quad (5.3)$$

Hierin geldt:

$$\epsilon^{\pm}(k, \Omega) = \sum_s \epsilon_s^{\pm}(k, \xi, \Omega) \quad (5.4)$$

en:

$$\begin{aligned} \epsilon_s^{\pm}(k, \xi, \xi) &= 0 && \text{als } \xi(k) \text{ voldoet aan:} \\ \epsilon^{\pm}(k, \xi) &= 0 && \text{(vgl. (1.29)).} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Zodat dan:

$$\kappa_s(k, \xi) = - \frac{e_s^2}{\epsilon_0 m_s k} \int dv \frac{dF_s}{dv} \frac{1}{\xi_{\pm} - kv} \quad (5.6)$$

Om de bijdrage van $\tilde{E}_{(2)}^{\pm}$ aan het veld te vinden moet worden teruggetransformeerd volgens:

$$E_{(2)}(x, t) = \iiint (E_2^+ + E_2^-) \exp i(k''x - \Omega t) d\Omega dk dk' \quad (5.7)$$

(5.9a) en (5.9b) geven de uitdrukkingen (20) en (21) uit ref.(4) weer. Ze zijn een uitdrukking van de wisselwerking tussen twee oscillaties, de een met golfgetal k en de ander met golfgetal k' , waarbij

$$k'' = k + k' \quad \text{en ook: } \xi'' = \xi + \xi' \quad (5.8)$$

$$\tilde{E}_{(2)}^{\pm}(k, k', \Omega) = \frac{\pm \pi}{\varepsilon^{\pm}(k'', \Omega)} \sum_{M, M'} \sum_S \frac{e_S}{m_S} \left[\frac{R_M^{\mp} R_{M'}^{\mp}}{\Omega - (\varepsilon_M^{\mp} + \varepsilon_{M'}^{\mp})} \left(\frac{k \varepsilon_S^{\pm}(k, \varepsilon_M^{\mp}, \Omega k/k'')}{[\Omega - \varepsilon_M^{\mp} k''/k]^2} + \frac{k' \varepsilon_S^{\pm}(k', \varepsilon_{M'}^{\mp}, \Omega k'/k'')}{[\Omega - \varepsilon_{M'}^{\mp} k''/k']^2} \right) - \frac{k''^3}{kk'} \frac{\partial \varepsilon_S^{\pm}}{\partial \Omega} \frac{R_M^{\mp}}{(\Omega - \varepsilon_M^{\mp} k''/k)} \frac{R_{M'}^{\mp}}{(\Omega - \varepsilon_{M'}^{\mp} k''/k')} \right] + \bar{M}, \bar{M}' + M, \bar{M}' + \bar{M}, \bar{M}'$$

$kk' > 0$

(5.9a)

-58-

$$\tilde{E}_{(2)}^{\pm}(k, k', \Omega) = \frac{\pm \pi}{\varepsilon^{\pm}(k'', \Omega)} \sum_{M, M'} \sum_S \frac{e_S}{m_S} \left\{ \frac{R_M^{\mp} R_{M'}^{\mp}}{\Omega - (\varepsilon_M^{\mp} + \varepsilon_{M'}^{\mp})} \left(\frac{k^3 \varepsilon_S^{\pm}(k, \varepsilon_M^{\mp}, \Omega k/k'') + k'^3 \varepsilon_S^{\pm}(k', \varepsilon_{M'}^{\mp}, \Omega k'/k'')}{k^2 [\Omega - \varepsilon_M^{\mp} k''/k]^2} \right) - \frac{R_M^{\mp} R_{M'}^{\pm}}{\Omega - (\varepsilon_M^{\mp} + \varepsilon_{M'}^{\pm})} \left(\frac{k' \varepsilon_S^{\pm}(k', \varepsilon_{M'}^{\pm}, \Omega k'/k'')}{[\Omega - \varepsilon_{M'}^{\pm} k''/k']^2} - \frac{k'^3 \varepsilon_S^{\pm}(k', \varepsilon_{M'}^{\mp}, \Omega k'/k'')}{k^2 [\Omega - \varepsilon_{M'}^{\mp} k''/k']^2} \right) + \frac{k''^3}{kk'} \frac{\partial \varepsilon_S^{\pm}}{\partial \Omega} \frac{R_M^{\mp}}{(\Omega - \varepsilon_M^{\mp} k''/k)} \frac{R_{M'}^{\pm}}{(\Omega - \varepsilon_{M'}^{\pm} k''/k')} \right\} + \bar{M}, \bar{M}' + M, \bar{M}' + \bar{M}, \bar{M}'$$

$k/k' < -1$

(5.9b)

Analoog aan de redenering op blz. 6 heeft $[\mathcal{E}^+(k, \Omega)]^{-1}$ bij iedere oplossingstak M twee polen in het komplekse Ω -vlak, te weten:

$$\xi_M^- = \omega_M + i\gamma_M ; \xi_{\bar{M}}^- = -\omega_M + i\gamma_M \quad (\gamma_M \text{ i.h.a. } < 0) \quad (5.10a)$$

zoöok heeft $[\mathcal{E}^-(k, \Omega)]^{-1}$ twee polen:

$$\xi_M^+ = \omega_M - i\gamma_M ; \xi_{\bar{M}}^+ = -\omega_M - i\gamma_M \quad (5.10b)$$

In de uitdrukking (5.9a) en (5.9b) betekent $\bar{M}\bar{M}'$ enz.: dezelfde uitdrukking, doch met voor ξ en ξ' die waarden genomen die behoren bij de mode M resp. \bar{M}'

$$R_M^{\mp} \text{ is het residu van } \tilde{E}_1^{\pm} \text{ bij } \xi = \omega_M \pm i\gamma_M \quad (5.10c)$$

(5.9a) geldt voor het geval dat $kk' > 0$, de wisselwerkende oscillaties hebben dan dezelfde richting.

(5.9b) geldt voor het geval dat $k/k' < -1$ (en indien k en k' verwisseld worden voor $k'/k < -1$), de wisselwerkende oscillaties hebben dan tegengestelde richting.

5.2. Het gedrag van E_2 bij meervoudige polen

5.2.0. Inleiding

De uitdrukkingen voor \tilde{E}_2^{\pm} , bevatten in vergelijking met die voor \tilde{E}_1^{\pm} (1.25) een groot aantal nieuwe polen in het Ω -vlak.

Bij de terugtransformatie van \tilde{E}_2^{\pm} wordt op dezelfde wijze te werk gegaan als op blz. 1.4 behandeld is. Beschouw nu (5.9).

Indien bij bepaalde combinaties van k en k' in deze uitdrukking (bijna) samenvallende polen verschijnen, kunnen deze een bijdrage aan E_2 leveren, die groter is in orde dan de normale tweede-orde verstoringen. Genoemde term werkt dan "ordeverstorend" en mag als zodanig niet verwaarloosd worden.

Beschouw drie gevallen:

5.2.1. Enkelvoudige pool

$\tilde{E}_2^+(k, \Omega)$ te schrijven, met g een functie van k en Ω als:

$$\tilde{E}_2^+(k, \Omega) = \frac{g(k, \Omega)}{\Omega - \Omega_0} \quad (5.11)$$

$g(k, \Omega)$ analytisch in de omgeving van $\Omega = \Omega_0$.

Terugtransformeren volgens (5.7) geeft als bijdrage aan $\bar{E}_2(k,t)$:

$$\bar{E}_2(k,t) = -2\pi i g(k, \Omega_0) \exp -i \Omega_0 k + \dots \quad (5.12)$$

5.2.2. Dubbele pool

$$\tilde{E}_2^+(k, \Omega) = \frac{g(k, \Omega)}{(\Omega - \Omega_0)^2} \quad (5.13)$$

terugtransformeren:

$$\begin{aligned} \bar{E}_2(k,t) &= - \frac{g(k, \Omega) \exp -i \Omega k}{\Omega - \Omega_0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int d\Omega \frac{\partial/\partial \Omega \cdot g(k, \Omega) \cdot \exp -i \Omega k}{\Omega - \Omega_0} + \dots \\ &= \text{stokterm} + \int \frac{\exp -i \Omega k \cdot \partial/\partial \Omega g(k, \Omega) - ik \exp -i \Omega k \cdot g(k, \Omega)}{\Omega - \Omega_0} d\Omega + \dots \end{aligned}$$

De stokterm gaat naar 0, daar $g(k, \Omega) \rightarrow 0$ voor $\Omega \rightarrow \pm \infty$.

Dan:

$$\bar{E}_2(k,t) = -2\pi i \left[\frac{\partial}{\partial \Omega} g(k, \Omega) \Big|_{\Omega = \Omega_0} \cdot \exp -i \Omega_0 k - ik \exp -i \Omega_0 k \cdot g(k, \Omega_0) \right] + \dots \quad (5.14)$$

De eerste term is een tweede-orde term, de tweede term is "ordeverstoring".

Daar is aangenomen dat $\text{Im}\{\Omega_0\} < 0$, zal deze term aangroeien tot de waarde:

$$- \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\text{Im}\{\Omega_0\}} \quad (\text{mits } \text{Re}\{\Omega_0\} \gg \text{Im}\{\Omega_0\}) \quad \text{voor } k \sim - \frac{1}{\text{Im}\{\Omega_0\}} \quad (5.15)$$

5.2.3. Bijna samenvallende polen

nu geldt:

$$\tilde{E}_2^+(k, \Omega) = \frac{g(k, \Omega)}{(\Omega - \Omega_1)(\Omega - \Omega_2)} \quad \text{met: } |\Omega_1 - \Omega_2| \ll |\Omega_1| \quad (5.16)$$

Stel:

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \Delta \omega + i \Delta \gamma \quad (5.17)$$

$$\Omega_1 = \omega + i \gamma \quad (5.18)$$

terugtransformatie:

$$\bar{E}_2(k,t) = -2\pi i \left(\frac{g(k, \Omega_1) \exp -i \Omega_1 k - g(k, \Omega_2) \exp -i \Omega_2 k}{\Omega_1 - \Omega_2} \right) + \dots \quad (5.19)$$

Ontwikkel nu $g(k, \Omega)$ om $\Omega - \Omega_1$, dan:

$$g(k, \Omega_2) = g(k, \Omega_1) + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)}{1!} \cdot \frac{\partial}{\partial \Omega} g(k, \Omega) \Big|_{\Omega = \Omega_1} + \dots \quad (5.20)$$

De tweede term van (5.20) leidt tot een bijdrage die niet-ordeverstorend is en daarom buiten beschouwing kan worden gelaten.

Blijft over:

$$\bar{E}_2(k, t) = -2\pi i \cdot g(k, \Omega_1) \cdot \exp -i\Omega_1 k \cdot \frac{1 - \exp -i(\Omega_2 - \Omega_1)k}{\Omega_1 - \Omega_2} + \dots \quad (5.21)$$

Indien $\Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ gaat deze uitdrukking over in (5.14); indien Ω_2 en Ω_1 sterk van elkaar verschillen, beschouwt men de polen als enkelvoudige polen en treedt geen ordeverstoring op.

Indien (5.17) en (5.18) worden ingevuld, ontstaat:

$$\bar{E}_2(k, k) = -2\pi i \cdot g(k, \omega + i\gamma) \cdot \exp -i(\omega + i\gamma)k \cdot \frac{1 - \exp i(\Delta\omega + i\Delta\gamma)k}{\Delta\omega + i\Delta\gamma} \quad (5.22)$$

5.3 Gedrag bij twee bijna samenvallende polen, nader beschouwd

Stel $|\omega| \gg |\gamma|$

Pas reeksontwikkeling toe op $\exp i(\Delta\omega + i\Delta\gamma)k$, wat is toegestaan indien geldt: $(\Delta\omega + i\Delta\gamma)k \ll 1$.

Dan volgt de uitdrukking:

$$\bar{E}_2(k, k) = -2\pi i \left(-ik \cdot \exp -i(\omega + i\gamma)k \cdot g(k, \omega + i\gamma) \right) + \dots \quad (5.24)$$

en deze is analoog aan (5.14), dus:

Indien $(\Delta\omega + i\Delta\gamma)k \ll 1$ is het gedrag van de ordeverstorende bijdrage aan $\bar{E}_2(k, k)$ dus hetzelfde als in het geval dat de polen zouden samenvallen.

Nu wordt het geval beschouwd voor grotere t .

Aangezien gesteld is: $|\omega| \gg |\gamma|$ mag men van het langzaam variërende deel de absolute waarde beschouwen. De wijze waarop deze evolueert is analoog aan de wijze waarop de amplitude van de (snelle) oscillatie evolueert.

Als het ware heeft men ook hier twee tijdschalen: $\tau_0 \equiv \alpha k$ en $\tau_1 \equiv \alpha \left(\frac{\beta}{k} \right) k$.
 met $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon \ll 1$.

De absolute waarde wordt dan:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\exp \gamma k}{\Delta \omega + i \Delta \gamma} (1 - \cos \Delta \omega k \cdot \exp -\Delta \gamma k - i \sin \Delta \omega k \cdot \exp -\Delta \gamma k) \right|^2 = \\
 & = \frac{\exp 2\gamma k}{\Delta \omega^2 + \Delta \gamma^2} (1 + \exp -2\Delta \gamma k - 2 \cos \Delta \omega k \cdot \exp -\Delta \gamma k) = \\
 & = \frac{\exp (2\gamma - \Delta \gamma) k}{\Delta \omega^2 + \Delta \gamma^2} (\exp \Delta \gamma k + \exp -\Delta \gamma k - 2 \cos \Delta \omega k) = \\
 & = \frac{2 \exp (2\gamma - \Delta \gamma) k}{\Delta \omega^2 + \Delta \gamma^2} (\cosh \Delta \gamma k - \cos \Delta \omega k)
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

Indien $\Delta \gamma$ en $\Delta \omega$ klein verondersteld worden, geeft reeksontwikkeling en de limietovergang $\Delta \gamma k \rightarrow 0$ en $\Delta \omega k \rightarrow 0$ weer dezelfde bijdrage als het langzaam variërende deel bij het geval met twee samenvallende polen.

Indien verondersteld wordt $(2\gamma - \Delta \gamma) < 0$ en $\gamma < 0$, heeft deze uitdrukking een maximum. De grootte van het maximum en het tijdstip waarop het bereikt wordt zijn functies van $\Delta \omega$ en $\Delta \gamma$, en van γ .

De reeksontwikkeling van uitdrukking (5.25):

$$|A|^2 \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \left[1 - \Delta \gamma k + \left(\frac{3}{2} \Delta \gamma^2 - \Delta \omega^2 \right) k^2 - \Delta \gamma \left(\frac{7}{6} \Delta \gamma^2 - \Delta \omega^2 \right) k^3 + \dots \right] k^2 \exp 2\gamma k
 \tag{5.26}$$

Neem voor $\Delta \gamma$ een positieve waarde, dit betekent -(5.17)- dat $\text{im}\{\Omega_2\}$ meer negatief is dan $\text{im}\{\Omega_1\}$, en nu blijkt dat de beginhelling minder steil wordt. De reeks wordt alternerend, wat niet het geval is als $\Delta \gamma < 0$.

Indien wordt gekozen: $\frac{3}{2} \Delta \gamma^2 \sim \Delta \omega^2$ geldt, indien $\Delta \gamma k \ll 1$:

$$|A|^2 \sim (1 - \Delta \gamma k) \cdot k^2 \exp 2\gamma k
 \tag{5.27}$$

5.4. Gedrag bij zuiver frekwentieverschil en zuiver dempingsverschil

5.4.1. Geval waarbij $\Delta \gamma = 0$ (zuiver frekwentieverschil)

(5.25) gaat over in:

$$|A|^2 = \frac{2 \exp 2\gamma k}{\Delta \omega^2} (1 - \cos \Delta \omega k)
 \tag{5.28}$$

De afgeleide moet nul zijn, dus:

$$2\gamma(1 - \cos \Delta\omega k) + \Delta\omega \sin \Delta\omega k = 0$$

$$1 + \frac{\Delta\omega}{2\gamma} \sin \Delta\omega k = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \Delta\omega k}$$

kwadrateren:

$$\sin^2 \Delta\omega k \cdot \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{4\gamma^2}\right) + \frac{\Delta\omega}{\gamma} \sin \Delta\omega k = 0$$

oplossingen:

$$1/ \sin \Delta\omega k = 0 \text{ en } \cos \Delta\omega k = 1 \rightarrow \Delta\omega k = 2k\pi; k = 0, 1, 2, \dots$$

2/

$$\sin \Delta\omega k = -\frac{4\gamma\Delta\omega}{4\gamma^2 + \Delta\omega^2} \text{ en } \cos \Delta\omega k = \frac{4\gamma^2 - \Delta\omega^2}{4\gamma^2 + \Delta\omega^2} \quad (5.29)$$

Indien $|\Delta\omega| \ll |\gamma|$ gaat dit over in:

$$\sin \Delta\omega k \approx -\frac{\Delta\omega}{\gamma}; k = -\frac{1}{\gamma} + \frac{2k\pi}{\Delta\omega} \quad (5.30)$$

Gedrag van de oplossingen:

Voor oplossing 1/ volgt uit (5.28) dat $|A|^2 = 0$.

Voor oplossing 2/. Indien $\Delta\omega k \ll 1$ is de oplossing waarbij de amplitude het grootst is:

$$|A|_{\text{maks}} = \exp -\frac{4\gamma^2}{4\gamma^2 + \Delta\omega^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma^2 + \frac{1}{4}\Delta\omega^2}} \quad (5.31)$$

op het tijdstip:

$$k = -\frac{4\gamma}{4\gamma^2 + \Delta\omega^2}$$

5.4.2. Geval waarbij $\Delta\omega = 0$ (zuiver dempingsverschil)

Analoog aan (5.29) worden de volgende oplossingen gevonden:

$$1/ \sinh \Delta\gamma k = 0 \text{ en } \cosh \Delta\gamma k = 1 \rightarrow k = 0$$

$$2/ \sinh \Delta\gamma k = \frac{(\gamma - \Delta\gamma)^2 - \gamma^2}{2\gamma(\gamma - \Delta\gamma)} \text{ en } \cosh \Delta\gamma k = \frac{(\gamma - \Delta\gamma)^2 + \gamma^2}{2\gamma(\gamma - \Delta\gamma)}$$

(5.31a)

Oplossing 1/ is triviaal ($t = 0$).

Oplossing 2/ heeft een aantal eigenaardigheden:

$\cosh \Delta\gamma k$ is definitief positief. Voor $\Delta\gamma \geq \gamma$ is geen oplossing te vinden voor $k > 0$. Dit klopt met het gegeven dat Ω_1 en Ω_2 beide in het neg. im. Ω -halfvlak moeten liggen.

5.5. Beschouwing van golf-golfkoppeling in enkele praktische gevallen

In ref.(4) worden een aantal gevallen gegeven waarbij ordeverstoring optreedt doordat in (5.9) een aantal polen samenvallen. (golf-golfkoppeling). Beschouw het geval waarin k en k' gelijkgericht zijn:

5.5.1. Koppeling van elektronentak en ionentak.

(zie figuur 5.1). Beschouw in (5.9a) de nulpunten bij:

$$\xi_M^- = \omega_E + i \gamma_E$$

$$\xi_{M'}^- = \omega_I' + i \gamma_I'$$

$\xi^+(k, \Omega)$ heeft een nulpunt bij:

$$\Omega = \xi_{M''}^- = \omega_E'' + i \gamma_E''$$

Figuur (5.1) toont, dat gekozen kan worden: $k_e + k_e' = k_e''$; $\omega_E + \omega_I' = \omega_E''$. (Eksakte koppeling in het frekwentiegebied).

Het verschil, de mismatching, is zuiver imaginair: $\xi_{M''}^- - (\xi_M^- + \xi_{M'}^-)$

Ze is te vinden uit (2.42) en (2.44).

De demping in de elektronentak (2.42) is verwaarloosbaar t.o.v. die in de ionentak. Zij bedraagt:

$$\bar{\gamma}_{I'} \sim -\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} \cdot k_e' ; \bar{\gamma}_{E''} \sim \bar{\gamma}_{E''} \approx 0. \tag{5.32}$$

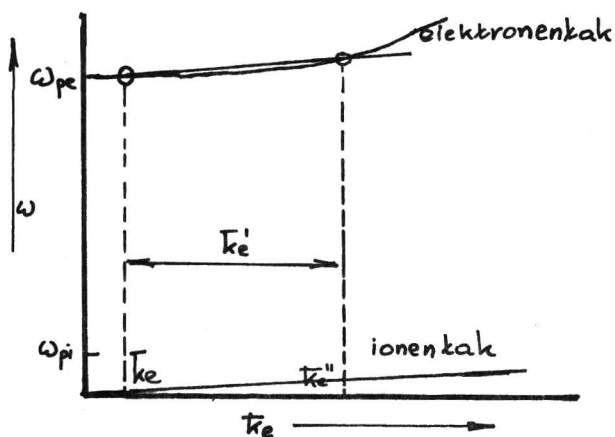
Voor de frekwentie: (uit (2.36)):

$$\bar{\omega}_{E''} \sim 1 \tag{5.33}$$

zodat geldt:

genormeerde mismatching: $\gamma_I' / \omega_E'' = -\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \cdot \delta^{-1} \cdot k_e'$ (5.34)

Dat kan beschreven worden d.m.v. (5.31a).



figuur 5.1

5.5.2. Koppeling van twee oplossingen van de ionentak

(zie figuur 5.2). Beschouw in (5.9a) de polen bij

$$\xi_M^- = \omega_I + i \gamma_I$$

$$\xi_{M'}^- = \omega_I' + i \gamma_I'$$

$\mathcal{E}^+(k, \Omega)$ heeft een nulpunt bij:

$$\Omega = \xi_{M''}^- = \omega_I'' + i \gamma_I''$$

Figuur (5.2) toont, dat gekozen kan worden: $k_e + k_e' = k_e''$

Uit (2.40) volgt voor het reële deel van de mismatching:

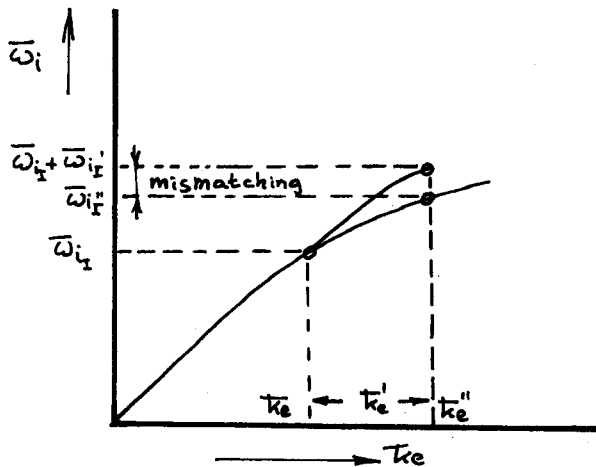
$$-k_e^3 - k_e'^3 + k_e''^3 = 3 k_e k_e' k_e''; \text{ genormeerde mismatching: } 3 k_e' k_e'' \quad (5.35)$$

koppelvingsvoorwaarde: $k_e' k_e'' \ll 1$

Het imaginaire deel van de mismatching volgt uit (2.44); met behulp van (2.40):

$$\bar{\gamma}_{iI} \sim -\left(\frac{\pi}{8\delta}\right)^{1/2} (\bar{\omega}_I'' - \bar{\omega}_I - \bar{\omega}_I') + \text{h.o.k.} \quad (5.36)$$

Dit is een orde kleiner dan het reële deel van de mismatching en kan i.h.a. worden verwaarloosd.



figuur 5.2

Opgemerkt dient te worden, dat de golf-golfkoppeling geen diskreet verschijnsel is, hetgeen tot ingewikkelde oplossingen leidt.

LITTERATUUR

- (1) D.C.Montgomery
Theory of the unmagnetized Plasma,1971
- (2) R.W.B.Best
Physica 64(1973),387
- (3) R.W.B.Best
Physica 74(1974),183
- (4) R.W.B.Best
Wave-wave coupling,intern rapport FOM-Jutphaas,1974
- (5) R.C.Davidson
Methods in Nonlinear Plasma Theory,1972
- (6) F.Lambert
Lineaire verstoringen in een samengesteld Vlasov-plasma
Stageverslag THE, augustus 1974
- (7) N.Q.Tran en S.Coquerand
Spatial propagation of ion-acoustic waves in a two component
plasma,to be published in HPA,1975
- (8) B.D.Fried en S.D.Conte
The Plasma Dispersion Function,1961
- (9) E.A.Jackson
Phys.Fluids 3(1960),786
- (10) J.Boersma
College-aantekeningen Toegepaste analyse 2,1973
- (11) F.Lambert
Een programma ter berekening van de dispersiekromme van een
samengesteld plasma.Tussenrapport,februari 1975.
- (12) B.D.Fried en R.W.Gould
Phys.Fluids 4(1961),139
- (13) J.Boersma
Toegepaste analyse 1,kollegediktaat THE,1975
- (14) De Witt en Peyraud
Plasma Physics,deel 1,1972

- (15) J.D.Jackson
J.Nucl.Energy,Part C,1(1960),171
- (16) W.Gautschi
Algorithm 363-Complex Error Function
Comm.of the ACM,12(1969),635
- (17) W.Gautschi
SIAM,J.Num.Anal,7(1970),187
- (18) N.G.van Kampen en B.U.Felderhof
Theoretical Methods in Plasma Physics,1967
- (19) I.B.Bernstein,S.K.Trehan en M.P.H.Weenink
Nuclear Fusion 4(1964),61
- (20) B.D.Fried,R.B.White en T.K.Samec
Phys.Fluids,14(1971),2388

A.1.

APPENDIX 1

Men komt als volgt tot (1.19)(2).

Uitgaande van (1.18), $\tilde{f}_s^+(x)$ terugtransformeren:

$$\begin{aligned} f_{s(x)}^+(x, v, k) &= (2\pi)^{-1} i \frac{e_s}{m_s} \frac{dF_s}{dv} \int dk \exp ikx \int d\omega \frac{\tilde{E}_{(v)}^+}{kv - \omega} \exp -i\omega k d\omega - \\ &- (2\pi)^{-1} i \int dk \cdot \bar{g}_{s(x)}(k, v) \exp ikx \int d\omega \frac{1}{kv - \omega} \exp -i\omega k d\omega. \end{aligned} \quad (A.1)$$

Er treden moeilijkheden op tengevolge van de singulariteit in de integrand. Formeel wordt de oplossing uitgeschreven als:

$$\int d\omega \tilde{E}_{(v)}^+ \exp -i\omega k \left[\frac{P}{kv - \omega} + \lambda \delta(kv - \omega) \right] + \dots \quad (A.2)$$

waarin λ een functie van ω en k is, die nader bepaald moet worden met behulp van de voorwaarde:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{s(x)}^+(x, v, k) = 0 \quad (A.3)$$

Stel nu: $\omega = \Omega + kv$

(A.2) gaat over in:

$$- \exp -ikvk \int d\Omega \tilde{E}_{(v)}^+(k, \Omega + kv) \exp -i\Omega k \left[\frac{P}{\Omega} - \lambda \delta(\Omega) \right] \quad (A.4)$$

A/ Integreer de singuliere term. Uitkomst:

$$\lambda(k, kv) \exp -ikvk \cdot \tilde{E}_{(v)}^+(k, kv) \quad (A.5)$$

B/ Integreer de Cauchy-hoofdwaarde. $\frac{P}{\Omega}$ is een **oneven** functie.

Stel $\exp -i\Omega k = \cos \Omega k - i \sin \Omega k$.

De cosinustransformatie levert nul op.

De sinustransformatie levert:

$$i \exp -ikvk \int d\Omega \tilde{E}_{(v)}^+(k, \Omega + kv) \frac{P}{\Omega} \sin \Omega k$$

Hierbij levert de singulariteit geen moeilijkheden meer op.

Indien men $\lim_{k \rightarrow \infty}$ beschouwt, zal de voornaamste bijdrage aan de uitkomst komen van het deel van het traject in de direkte omgeving van $\Omega = 0$.

$$i \exp -ikvk \cdot \tilde{E}_{(i)}^+(k, kv) \int \frac{\sin \Omega k}{\Omega} d\Omega \quad (\text{A.6})$$

Nu is:

$$\int \frac{\sin \Omega k}{\Omega} d\Omega = \begin{cases} \pi & \text{als } k > 0 \\ 0 & \text{als } k = 0 \\ -\pi & \text{als } k < 0 \end{cases}$$

zodat de volgende uitkomst wordt verkregen:

$$i \pi \exp -ikvk \cdot \tilde{E}_{(i)}^+(k, kv) \quad (\text{A.7})$$

Tengevolge van voorwaarde (A.3) moeten de uitkomsten (A.5) en (A.7) samen nul opleveren, waartoe moet gelden:

$$\lambda(k, kv) = -\pi i \quad (\text{A.8})$$

Men krijgt hetzelfde resultaat als men de integratieweg bovenlangs de singulariteit laat gaan, opdat ze er kloksgewijs omheen draait.

Voor de uitwerking van de tweede term van (A.1) geldt een analoge redenering.

Een en ander wordt verkort weergegeven door middel van de notatie:

$$\tilde{f}_{s(i)}^+ = i \frac{e_s}{m_s} \frac{dF_s}{dv} \cdot \frac{\tilde{E}_{(i)}^+}{kv - \omega_+} - i \frac{\bar{g}_s}{kv - \omega_+} \quad (\text{A.10})$$

Hierbij geeft de tekenindex $\sqrt{\text{van } \omega_+}$ aan van welke functie de analytische voortzetting wordt gekozen.