

## MASTER

### De actuator schijf met uniforme, axiale krachtverdeling : een kritische studie van 100 jaar sleutelen aan de klassieke theorie

Peters, M.C.A.M.

*Award date:*  
1989

[Link to publication](#)

#### **Disclaimer**

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

Faculteit der Technische Natuurkunde

Vakgroep TRANSPORT-  
FYSICA

**Titel:**

- De actuator schijf met uniforme, axiale krachtverdeling : een kritische studie van 100 jaar sleutelen aan de klassieke theorie.

**Auteur:**

- M.C.A.M. Peters

**Verslagnummer:**

- R-982-A

**Datum:**

- 10 februari 1989

**Werkeenheid:**

- Windenergie (Transportfysica)

**Begeleider(s):**

- A. Hirschberg
- G.A.M. van Kuik
- P.T. Smulders

---

## Samenvatting

Een actuator schijf is een denkbeeldig vlak waarop een krachtdichtheid verdeeld is. Actuatorschijven worden vaak als modellen voor rotoren gebruikt. De klassieke axiale theorie van Froude uit 1889 toegepast op een actuator schijf met uniforme belasting voorspelt een door de schijf geïnduceerde snelheid die ongeveer 10% afwijkt van de snelheid gemeten bij rotoren. Dit wordt door recente onderzoekers toegeschreven aan het gedrag van de stroming aan de rand van de schijf. Greenberg heeft een model voor de randeffecten voorgesteld dat resultaten oplevert die goed overeenkomen met metingen aan rotoren. Zijn theorie komt echter minder goed overeen met zijn eigen metingen aan een actuator strip, een tweedimensionaal model voor een actuator schijf. Sparenberg heeft een alternatieve theorie voorgesteld voor de stroming aan de rand.

Het doel van ons onderzoek is dan ook een beter inzicht in de stroming nabij de rand van een actuator schijf te krijgen. Daartoe is eerst de stroming van het meest elementaire singuliere krachtveld bekeken, namelijk de puntkracht.

Met een dimensieanalyse van het probleem blijkt snel een inzicht mogelijk te zijn in de aard van het probleem, de mogelijkheid tot linearisatie en het bestaan van een niet-viskeuze oplossing.

Bij een half-oneindige strip blijkt er uit de dimensieanalyse geen parameter te bestaan die een niet-viskeuze oplossing rechtvaardigt. Bestaande theoriën van Greenberg en Sparenberg, die uitgaan van een niet-viskeuze stroming nabij de rand van een half-oneindige strip moeten daarom zeer kritisch worden bestudeerd.

Een numeriek berekening is opgezet met behulp van het eindige elementen pakket SEPRAN, om de stroming ten gevolge van een actuator strip te bepalen. Vooral naar het gedrag nabij de rand van de strip is nauwkeurig gekeken. Dit gedrag komt overeen met metingen die zijn verricht door Lee en Greenberg aan een actuator strip.

De numerieke berekeningen zijn tevens uitgevoerd aan een actuator schijf en vergeleken met berekeningen van Schmidt & Sparenberg en met metingen aan echte rotoren.

---

De numerieke berekeningen aan de strip en de schijf vertonen bij de rand duidelijke verschillen. Het afgegeven vermogen komt overeen met de waarde, die de klassieke theorie van Froude voorspelt, en met experimentele resultaten van Lee en Greenberg. Onze berekeningen wijken echter af van analoge berekeningen aan een actuator cylinder van Madsen. Hiervoor hebben we geen verklaring.

## Inhoudsopgave

<i>hoofdstuk</i>	<i>pagina</i>
<b>1 Inleiding</b>	1
<b>2 Het verband tussen extern krachtveld en wervelproductie, bestaande theorieën van de actuator strip en schijf.</b>	5
2.1 Inleiding	5
2.2 Basisvergelijkingen voor een stroming ten gevolge van een extern krachtveld.	6
2.3 De stroming ten gevolge van een impulsstoot over een actuator strip.	8
2.4 De krachten op een wervelpaar in een uniforme stroming.	10
2.5 Het stromingsveld bij een continue wervelproductie.	11
2.5.1 Inleiding	11
2.5.2 De klassieke axiale actuator theorie van Froude.	12
2.5.3 Berekeningen en metingen aan een actuator strip door Lee en Greenberg.	19
2.5.4 Berekeningen aan een actuator schijf door Schmidt en Sparenberg.	26
2.5.5 Berekeningen aan een actuator cylinder door Madsen.	28
2.6 Conclusies	31
<b>3 De puntkracht.</b>	33
3.1 Inleiding	33
3.2 Niet-lineaire theorie van de puntkracht in een stilstaand medium.	34
3.3 Lineaire theorie.	41
3.3.1 Inleiding	41
3.3.2 Puntkracht in een viskeus medium met hoofdstroming.	43
3.3.3 Puntkracht in een niet-viskeus medium met hoofdstroming.	46
3.4 Nadere beschouwingen met behulp van een dimensieanalyse.	50
3.4.1 Puntkracht in drie dimensies.	50
3.4.2 Puntkracht in twee dimensies.	52

<b>4 De half-oneindige actuator strip</b>	55
4.1 Inleiding	55
4.2 Dimensieanalyse	56
4.3 Instationaire stroming ten gevolge van een half-oneindige strip.	58
4.4 Stationaire stroming ten gevolge van een half-oneindige strip.	60
4.5 De randsingulariteit bij een half-oneindige strip.	64
4.6 Conclusies	66
<b>5 De actuator strip.</b>	67
5.1 Inleiding	67
5.2 De krachtverdeling $\underline{f}$	69
5.3 Dimensieanalyse en dimensieloos maken van de vergelijkingen.	72
5.4 Roosterkeuze	75
5.5 Resultaten van berekeningen aan een actuator strip.	78
5.5.1 Het stromingsveld ten gevolge van de strip.	78
5.5.2 De stroming in de buurt van de strip.	83
5.5.3 De snelheid en de druk op de symmetrie as.	87
5.5.4 Het afgegeven vermogen aan de stroming.	89
5.6 Nauwkeurigheid en convergentie	98
5.7 Vergelijking met berekeningen en metingen van Lee en Greenberg.	102
5.8 Conclusies	108
<b>6 De actuator schijf.</b>	109
6.1 Inleiding	109
6.2 De krachtverdeling $\underline{f}$	110
6.3 Roosterkeuze	112
6.4 Resultaten van berekeningen aan een actuator schijf.	113
6.4.1 Het stromingsveld ten gevolge van de schijf.	113
6.4.2 Het afgegeven vermogen aan de stroming.	117
6.5 Vergelijking met berekeningen aan de actuator strip.	120
6.6 Vergelijking met berekeningen en metingen uit de literatuur.	122
6.7 Conclusies	126
<b>7 Discussie en hoofdconclusies.</b>	127
<b>8 Literatuurlijst</b>	131
<b>Lijst van gebruikte symbolen</b>	135

## Appendices

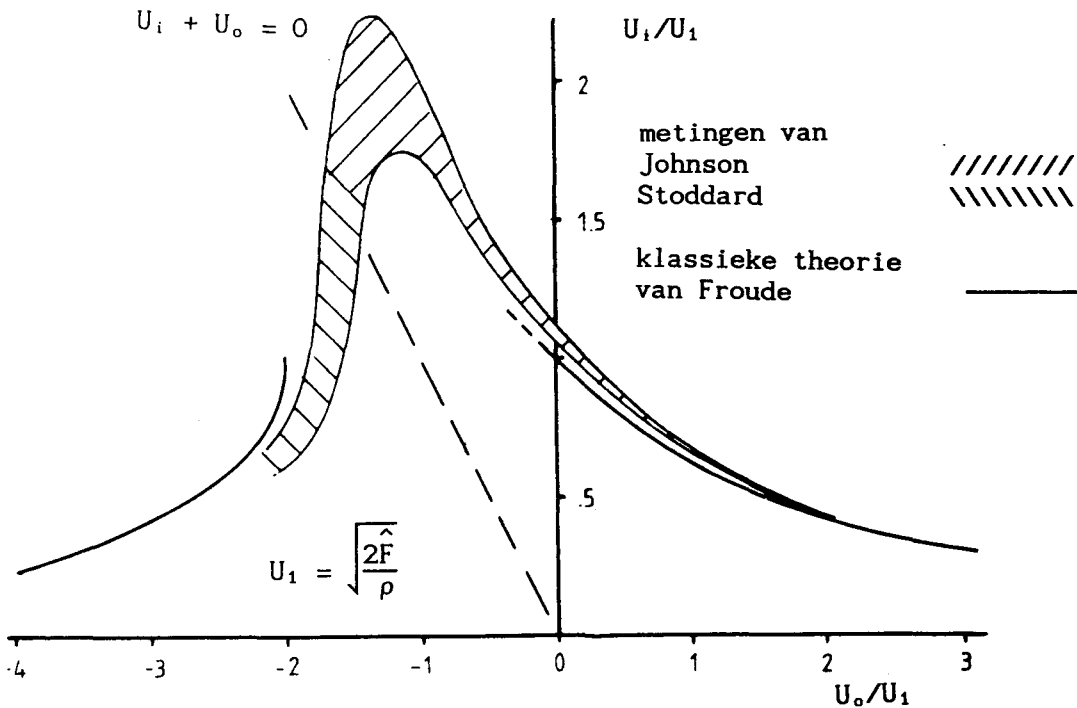
137

- A. De klassieke actuator theorie voor een actuator strip in een stilstaand, niet-viskeus medium.
- B. Bepaling van de minimum afstand van de stroomlijnen tot de symmetrie as bij de viskeuze stroming ten gevolge van een puntkracht.
- C. Formele afleiding van de aard van de randsingulariteit zoals voorgesteld door Greenberg [KUI89].
- D. Nadere beschouwing van de drukverdeling op de symmetrie as bij een actuator strip met eindige dikte.
- E. Programmacode PREPROC en POSTPROC.
- F. Uitgebreide programma uitvoer.

Hoofdstuk 1 Inleiding

Bij het onderzoek aan rotordynamica wordt de rotor vaak vereenvoudigd voorgesteld door een actuator schijf, een denkbeeldig gebied waar een externe kracht werkt, en waarin de snelheid een continu verloop heeft. We beperken ons in het onderzoek tot het geval van een uniforme krachtdichtheid  $\hat{F}$ , normaal op een vlakke schijf. We veronderstellen verder dat de hoofdstroomsnelheid  $U_0$  ook normaal op de schijf gericht is. We definiëren de snelheid positief als hij gelijk gericht is met de krachtdichtheid  $\hat{F}$ . Omdat men meestal geïnteresseerd is in stromingen bij zeer hoge Reynoldsgetallen betrokken op de schijfdiameter beschouwen we het fluïdum als wrijvingsloos. De stroming wordt beschreven door de in 1889 gepubliceerde klassieke axiale actuator theorie van Froude [FR089]. Deze theorie is door Lanchester in 1915 gebruikt om de bekende Lanchester-Betz limiet te bepalen [LAN15].

De actuator schijf veroorzaakt afhankelijk van de sterkte van de krachtdichtheid  $\hat{F}$  een geïnduceerde snelheidsverandering  $U_i$  ter plekke van de schijf. In figuur 1.1 zijn metingen aan rotoren weergegeven van de geïnduceerde snelheid als functie van de hoofdstroomsnelheid  $U_0$  bij een vaste waarde van de gemiddelde krachtdichtheid over het rotorvlak. Tevens zijn de waarden aangegeven, die de klassieke actuator theorie van Froude voorspelt voor een uniforme krachtverdeling op het rotorvlak.



Figuur 1.1 : De geïnduceerde snelheid als functie van de hoofdstroming gemeten aan echte rotoren en berekend door Froude.



$U_0 + U_i$  is de totale snelheid in de actuator schijf. Voor  $U_0 + U_i > 0$  wordt er energie aan de stroming toegevoerd en werkt de rotor als een propeller of een scheepsschroef, voor  $U_0 + U_i < 0$  wordt er energie onttrokken aan de stroming en werkt de rotor als een windmolen.

De klassieke actuator theorie vertoont systematische afwijkingen tot 10% van de metingen aan echte rotoren. Het is de vraag of deze afwijkingen alleen een gevolg zijn van de vereenvoudigde voorstelling van een rotor door een actuator schijf. De klassieke actuator theorie bevat namelijk andere verborgen benaderingen. In paragraaf 2.5.2 zullen we zien, dat bij de randen van de actuator schijf, en ook bij de tweedimensionale actuator strip, singulariteiten in de stroming ontstaan, die niet in beschouwing zijn genomen in de klassieke theorie. Bij dit singulier gedrag is van belang hoe men de limiet bepaalt voor het Reynoldsgetal naar oneindig.

Een hoog Reynoldsgetal betrokken op de schijfdiameter garandeert immers niet dat de viscositeit verwaarloosbaar is bij een singulier punt in de stroming. Het hoofddoel van dit onderzoek is dan ook een studie van het singulier gedrag van de stroming aan de rand van een actuator schijf.

In een inleidend hoofdstuk 2 worden de basisvergelijkingen gegeven, die het probleem beschrijven. Enkele voorbeelden, die snel inzicht geven in het probleem worden behandeld. De klassieke theorie van Froude wordt afgeleid. Om meer inzicht in het singulier gedrag van een stroming te krijgen zullen we hierna kijken naar enkele elementaire stromingen.

Allereerst beschouwen we de stroming ten gevolge van een singulier krachtveld, namelijk waarbij de kracht werkt in een punt (hoofdstuk 3). We bekijken de stroming ten gevolge van deze kracht in een viskeus en niet-viskeus medium en met of zonder uniforme hoofdstroming.

Een volgende stap is het bekijken van de stroming ten gevolge van een half-oneindig krachtveld, de half-oneindige strip (hoofdstuk 4).

Wanneer we namelijk kijken naar de stroming dichtbij de rand van een eindige strip, dan is de andere rand als oneindig ver weg te beschouwen en is het volgens Sparenberg [SPA84] mogelijk om met behulp van potentiaaltheorie voor een niet-viskeuze stroming een analytische oplossing te vinden. Met deze oplossing hebben we een idee, hoe de stroming zich nabij de rand van de strip gedraagt.

Uiteindelijk willen we de stroming ten gevolge van een eindige actuator strip bepalen in afwezigheid van hoofdstroming. Omdat dit analytisch onmogelijk blijkt te zijn, is er in hoofdstuk 5 een numerieke simulatie opgezet waarin vooral het gedrag nabij de rand nauwkeurig is bekeken. Bij deze berekeningen heeft de strip een eindige dikte en is de viscositeit eindig. Een reeks berekeningen waarbij de strip steeds dunner, en de viscositeit steeds lager werd genomen is uitgevoerd.

Uit deze berekening werd door een zo zorgvuldige mogelijke extrapolatie een wrijvingsloze limiet bepaald voor de door het strip geproduceerde vermogen. Deze numerieke berekeningen zijn ook uitgevoerd voor een actuator schijf (hoofdstuk 6).

We beperken ons in dit werk tot tweedimensionale en driedimensionale axiaal symmetrische stromingen zonder zogrotatie, omdat dit voor het onderzoek naar randsingulariteiten voldoende is en het probleem ermee vereenvoudigd wordt. Onze aandacht gaat vooral uit naar stromingen zonder uniforme hoofdstroomsnelheid  $U_0$ , omdat dan de sterkste niet-lineaire effecten optreden bij de randen van de actuator schijf.

De numerieke simulatie kunnen we vergelijken met metingen van Lee en Greenberg [LEE84], die zijn verricht aan een 'echte' actuator strip.

Ook hebben Lee en Greenberg een theorie ontwikkeld zowel voor een strip als voor een schijf [GRE72, LEE84]. Schmidt en Sparenberg hebben vergelijkbare berekeningen gedaan aan een actuator schijf met uniforme belasting in een niet-viskeuze stroming [SCM77].

Madsen [MAD83,85] heeft berekeningen uitgevoerd aan een actuator cylinder met een continue krachtverdeling aan de randen van de cylinder. Volgens Sparenberg [SPA84] moet in afwezigheid van een hoofdstroming de stroming ten gevolge van een actuator cylinder met uniforme, normale belasting identiek zijn aan de stroming ten gevolge van een actuator strip met dezelfde uniforme normale belasting en dezelfde randpunten. Dit impliceert dat we ook de resultaten van Madsen in de limiet voor een uniforme krachtverdeling op de cylinder kunnen vergelijken met onze berekeningen.

Tenslotte worden in hoofdstuk 7 nog eens de belangrijkste conclusies op een rij gezet.

Hoofdstuk 2 Het verband tussen extern krachtveld en wervelproductie,  
bestaande theoriën van de actuator strip en schijf.

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk bespreken we de wervelproductie in een fluidum ten gevolge van een extern opgelegd krachtveld. We beschouwen de stroming incompressibel. In paragraaf 2.2 geven we de basisvergelijkingen die voor dit probleem van belang zijn.

We bekijken eerst de meest elementaire vorm van wervelproductie in 2.3 namelijk de productie van een wervelpaar ten gevolge van een impulsstoot over een actuator strip.

Daarna onderzoeken we de krachten die op dit wervelpaar werken, indien we de wervels vrij laten of op hun plaats houden.

Uiteindelijk zijn we geïnteresseerd in een continue wervelproductie door een actuator schijf. De klassieke actuator theorie van Froude [FR089], wordt eerst nauwkeurig besproken in 2.5.2. De meer recentere theoriën van Lee en Greenberg [GRE72,LEE84], Schmidt en Sparenberg [SCM77] en van Madsen [MAD83,85] worden in 2.5.3 tot en met 2.5.5 beschreven.

2.2 Basisvergelijkingen voor een stroming ten gevolge van een extern krachtveld.

We zijn geïnteresseerd in de stroming van een viskeus, incompressibel fluïdum met dichtheid  $\rho$  en dynamische viscositeit  $\eta$  ten gevolge van een extern opgelegd krachtveld  $\underline{f}$ . Daarom gaan we bij de berekeningen uit van de volledige Navier-Stokes vergelijking (2.2.1) :

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underline{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (2.2.1)$$

waarbij  $\underline{v}$  de snelheid is en  $p$  de druk.

We zullen verder de Navier-Stokes vergelijking in verschillende vormen of benaderingen gebruiken. Voor niet-viskeuze stromingen vereenvoudigt de vergelijking tot de Euler vergelijking (2.2.2).

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underline{f} - \nabla p \quad (2.2.2)$$

Met behulp van de relatie :

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \nabla(\frac{1}{2}V^2) - \underline{v} \times \underline{\omega} \quad (2.2.3)$$

is de Navier-Stokes vergelijking (2.2.1) ook te schrijven als :

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{f} - \nabla H + \rho \underline{v} \times \underline{\omega} + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (2.2.4)$$

Hierin is  $H$  de Bernoulli constante waarvoor geldt

$$H = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (2.2.5)$$

en  $V$  de grootte van de snelheidsvector  $\underline{v}$  en  $\underline{\omega}$  de vorticititeit waarvoor geldt:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} \quad (2.2.6)$$

Voor stationaire stromingen vervalt de instationaire term  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ .

Zijn we geïnteresseerd in de vorticititeit van de stroming dan herschrijven we (2.2.1) tot de werveldiffusie vergelijking (2.2.8) door de rotatie van (2.2.1) te nemen en de relatie :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} &= \underline{\omega} (\nabla \cdot \underline{v}) - \underline{v} (\nabla \cdot \underline{\omega}) + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{v} \\ &= (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{v} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

te gebruiken. Aangezien we ons beperken tot een tweedimensionale en een driedimensionale axiaal symmetrische stroming zonder zogrotatie is de term  $(\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{v}$  nul en volgt :

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} \equiv \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega} = \nu \nabla^2 \underline{\omega} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \underline{f} \quad (2.2.8)$$

waarbij  $\nu = \eta/\rho$  de kinematische viscositeit is.

Door de rotatie van de bewegingsvergelijking te nemen is de druk geëlimineerd. De eerste term in het rechterlid is een diffusie term. De wrijving is een oorzaak van de diffusie van rotatie.

De tweede term in het rechterlid is een bronterm voor de vorticititeit  $\underline{\omega}$ . Uit vergelijking (2.2.8) blijkt, dat een niet-conservatief extern krachtveld vorticititeit produceert. Beschouw bijvoorbeeld een eindig gebied met een uniforme krachtverdeling  $\underline{f}$ . De term  $\nabla \times \underline{f}$  is dan overal nul behalve aan de rand van het gebied.

Vaak wordt de wervelproductie beschouwd als het gevolg van wrijving. Bijvoorbeeld wanneer bij een vleugelprofiel een liftkracht ontstaat door het toepassen van de Kutta-conditie bij de afstroming.

Ook in een niet-viskeus medium (bijvoorbeeld superfluïde Helium) kan echter werveling ontstaan door aanwezigheid van een niet-conservatief extern krachtveld. Voor een conservatief krachtveld geldt namelijk :

$$\underline{f} = \nabla \chi \quad (2.2.9)$$

zodat  $\nabla \times \underline{f} = \underline{0}$ . Men kan bewijzen dat een conservatief krachtveld met een eindige resultante kracht alleen kan bestaan in een oneindig gebied [SPA84]. Er wordt dus altijd vorticititeit geproduceerd in een fluïdum, indien er een extern krachtveld met een eindige resultante kracht in een eindig gebied werkt.

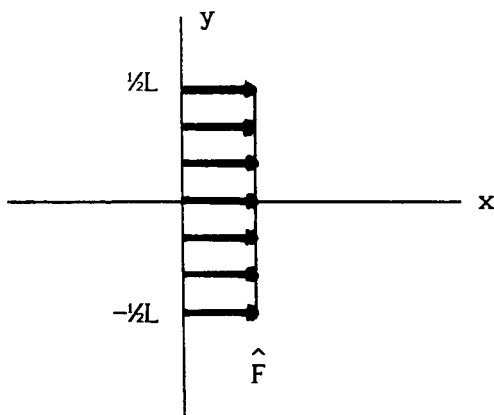
### 2.3 De stroming ten gevolge van een impulsstoot over een actuator strip.

We kunnen het verband tussen krachtveld en de productie van vorticititeit verduidelijken door te kijken naar de tweedimensionale stroming ten gevolge van een impulsstoot geleverd door een actuator strip in een stilstaand medium.

Omdat we geen diffusie van vorticititeit willen beschouwen ten gevolge van viscositeit kijken we naar een niet-viskeuze stroming. We oefenen een krachtstoot  $\underline{S}$  uit op de vloeistof met een in de ruimte beperkt, met andere woorden 'eindig', dus niet-conservatief krachtveld  $\underline{f}$  waarvoor geldt :

$$\begin{aligned} \underline{S} \delta(t) &= \underline{f} \\ \underline{f} &= \hat{F} \delta(x) \underline{e}_x \quad \text{voor } |y| < \frac{1}{2}L \text{ en} \\ \underline{f} &= \underline{0} \quad \text{elders.} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Dit krachtveld is een uniforme kracht op een strip, die gedurende een oneindig korte tijd werkt en is in figuur 2.3.1 geschetst.



Figuur 2.3.1 : Krachtverdeling zoals deze is gegeven in (2.3.1).

Bij een impulsstoot, indien we uitgaan van een onbeperkt, uniform en stilstaand fluïdum, is de versnellingsterm  $\partial \underline{v} / \partial t$  veel groter dan de convectieve term  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$  zolang de kracht werkzaam is.

We mogen daarom een vereenvoudigde lineaire vorm van de werveldiffusie vergelijking (2.2.8) gebruiken :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla_x f \quad (2.3.2)$$

Uit de krachtverdeling (2.3.1) volgt, dat de vorticititeit alleen een z-component kan hebben die ongelijk aan nul is. Hiervoor geldt :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_x}{\partial y} \tag{2.3.3}$$

$$\omega_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S_x}{\partial y} \tag{2.3.4}$$

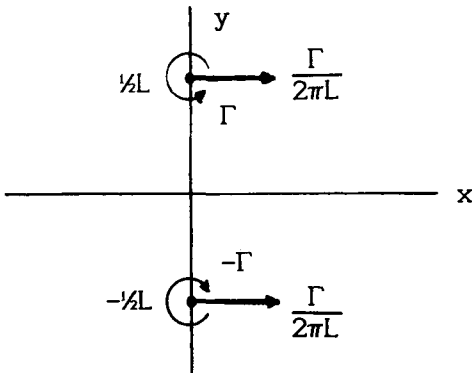
Uitgaande van een uniforme rusttoestand op  $t = 0$ .

De waarde van  $\omega_z$  is alleen ongelijk aan nul op  $|y| = \frac{1}{2}L$  en er ontstaan dus twee discrete, vrije wervels, één met circulatie  $\Gamma$  op  $y = \frac{1}{2}L$  en één met circulatie  $-\Gamma$  op  $y = -\frac{1}{2}L$ . Waarbij voor de circulatie  $\Gamma$  geldt :

$$\Gamma = \iint \omega_z \, dx dy = \int \frac{S_x}{\rho} \, dx \tag{2.3.5}$$

Ten gevolge van de op elkaar geïnduceerde snelheid  $\Gamma/2\pi L$  bewegen ze eenparig en evenwijdig in de vloeistof (zie fig. 2.3.2)

Omdat de vloeistof wrijvingloos is zal de vorticititeit in de twee wervelkernen beperkt blijven. Verder zal de stroming in een met de wervels meebewegend coördinatenstelsel stationair zijn<sup>1</sup>.



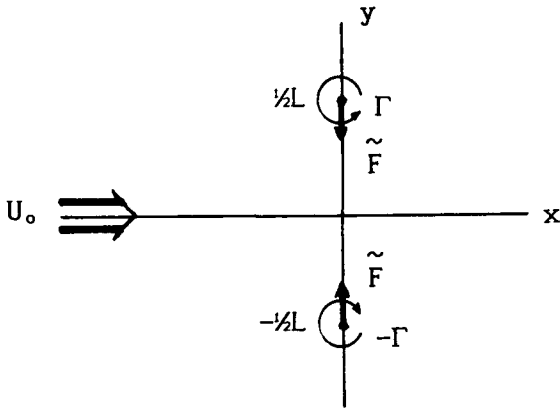
**Figuur 2.3.2 : De vrije wervels die ontstaan na het uitoefenen van een stoot op een niet-viskeus fluidum zonder hoofdstroming.**

Analoog hebben von Karman en Burgers [KAR35] bewezen, dat in het driedimensionale geval er een wervelring wordt gevormd. In de volgende paragrafen gaan we de krachten op de twee discrete wervels bepalen, zowel wanneer ze vrij bewegen als wanneer ze vast gehouden worden.

<sup>1</sup>Indien we de viscositeit meenemen zullen de wervels op den duur annihilieren.

2.4 De krachten op een wervelpaar in een uniforme stroming.

Om de krachten te bepalen, die op een wervelpaar in een uniforme hoofdstroming  $U_0$  werken, bekijken we twee wervels, één met circulatie  $\Gamma$  op  $(0, \frac{1}{2}L)$  en één met circulatie  $-\Gamma$  op  $(0, -\frac{1}{2}L)$ , zie fig. 2.4.1.



Figuur 2.4.1 : Twee discrete wervels in een uniforme hoofdstroming  $U_0$ .

De wervels induceren een snelheid  $\frac{\Gamma}{2\pi L} \underline{e}_x$  op elkaar. Indien we de wervels vast op hun plaatsen houden kunnen we met complexe potentiaaltheorie laten zien dat er een liftkracht  $\underline{\tilde{F}}$  op de wervels ontstaat. Er geldt :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_x &= 0 \\ \tilde{F}_y &= -\rho\Gamma(U_0 + \frac{\Gamma}{2\pi L}) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Deze kracht is tevens tegengesteld aan de kracht die men moet uitoefenen op de wervels om ze op een vaste plaats te houden.

Indien voor de uniforme hoofdstroming geldt :

$$U_0 = -\frac{\Gamma}{2\pi L} \quad (2.4.2)$$

dan werkt er geen liftkracht op de wervels omdat de snelheid ter plekke van de wervels nul is. We hebben dan de oplossing van de vrije wervels, die op hun plaats blijven doordat de hoofdstroming door de geïnduceerde snelheid ter plekke van de wervels wordt opgeheven.

Met behulp van een Galileï coördinatentransformatie vinden we direct algemene oplossing voor vrije wervels in een uniforme stroming.

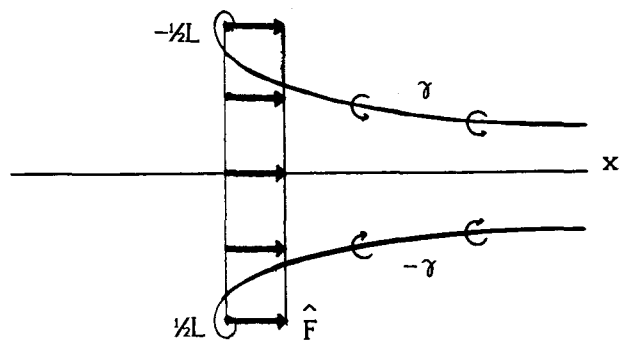
De wervels bewegen dan met de stroming mee en hebben dus geen relatieve snelheid ten opzichte van de stroming. De liftkracht blijft dan nul.



## 2.5 Het stromingsveld bij een continue wervelproductie.

### 2.5.1 Inleiding

Een stap verder is de continue productie van vorticititeit op de punten  $(0, \pm \frac{1}{2}L)$ . Dit zijn de randen van een in de tijd continu stripvormig krachtveld met oppervlaktekrachtdichtheid  $\hat{F}$ , dat op een niet-viskeuze, uniforme onbegrensde axiale stroming werkt. De vorticititeit die dan wordt geproduceerd, wordt afgevoerd via de stroomlijnen en er ontstaan twee wervelvlakken die de stroming mede beïnvloeden. Dit is weergegeven in figuur 2.5.1.



Figuur 2.5.1 : Het ontstaan van wervelvlakken bij een continue productie van vorticititeit in een niet-viskeuze stroming.

De potentiaaltheorie geeft met randvoorwaarden voor de wervelvlakken een stelsel integraalvergelijkingen, met de wervelsterkte  $\gamma$  langs het wervelvlak en de positie van het wervelvlak als onbekenden. Dit stelsel is analytisch niet meer op te lossen. We zullen in deze paragraaf de theoriën bekijken die in de literatuur over dit probleem bekend zijn, zoals de klassieke axiale impulsstheorie door Froude [FR089] (2.5.2).

Recenter zijn onderzoeken van Lee & Greenberg, Schmidt & Sparenberg en Madsen op dit gebied. Lee en Greenberg hebben metingen verricht aan een tweedimensionaal krachtveld en een theorie opgezet om het stromingsveld voor een strip in twee [LEE84], en voor een schijf in drie dimensies [GRE72] te bepalen (2.5.3). Schmidt en Sparenberg hebben de stroming ten gevolge van een actuator schijf berekend [SCM77] (2.5.4) en Madsen heeft numerieke berekeningen gedaan aan een actuator cylinder [MAD83,85].

Deze zijn volgens Sparenberg [SPA84] voor een uniforme krachtverdeling op de cylinder te vergelijken met berekeningen aan een actuator strip indien er geen hoofdstroming is (2.5.5).

### 2.5.2 De klassieke axiale actuator theorie van Froude

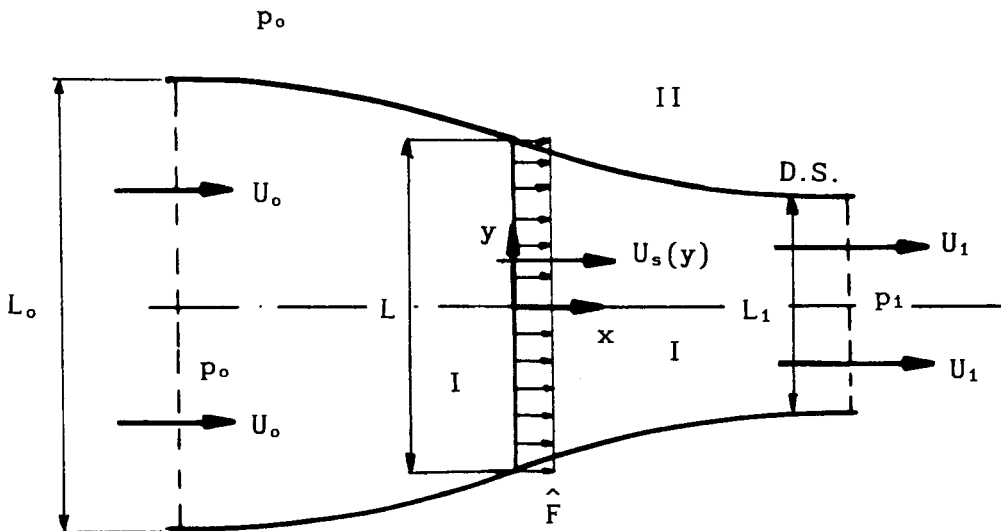
#### De actuator strip

De klassieke theorie gaat uit van een niet-viskeus medium, incompressibel en onbegrensd. In dit medium werkt een externe oppervlaktekrachtdichtheid  $\hat{F} \underline{e}_x$  ( $N/m^2$ ). Het gebied waar deze kracht werkzaam is noemen we een actuatorstrip. De kracht is uniform verdeeld over de strip van lengte  $L$  en loodrecht op de strip gericht.

We noemen het een axiale kracht.

De snelheid is continu in het krachtveld, en de druk vertoont een sprong. Tevens is er een uniforme axiale hoofdstroomsnelheid  $U_0 \underline{e}_x$ .

Het stationair stromingsveld dat dan ontstaat is in figuur 2.5.2<sup>a</sup> geschetst.



Figuur 2.5.2<sup>a</sup> : Het stationair stromingsveld volgens klassieke axiale theorie van Froude.

Er ontstaan twee gebieden (I en II), die gescheiden zijn door een stroomlijn (D.S.), die door de rand van de strip gaat.

Gebied I is een stroombuis die begrensd wordt door twee stroomlijnen (D.S.) die langs de randen van de actuator strip lopen.

De breedte van de stroombuis ver voor de strip is  $L_0$  en ver achter de strip  $L_1$ . In gebied II geldt overal de ongestoorde waarde voor de Bernoulli constante  $H_0$ . De axiale snelheid in de strip noemen we  $U_s$  en ver stroomafwaarts achter de strip is de snelheid  $U_1$ .

De druk op oneindig  $p_1$  is gelijk aan de ongestoorde druk  $p_0$  omdat er geen mechanisme is dat een drukverschil in stand kan houden. De vrije stroomlijnen ver achter het krachtveld lopen evenwijdig. [GLA35]

De snelheid ver achter de strip  $U_1$  is dus evenals de hoofdstroomsnelheid  $U_0$  axiaal gericht. Dit hoeft nog niet het geval te zijn met de snelheid ter plekke van het krachtveld!

Kijken we in gebied I naar een willekeurige stroomlijn, dan wordt de Bernoulliconstante  $H$  opgehoogd met  $\Delta H = \hat{F}$  bij het passeren van het krachtveld (zie vgl.(2.2.4)). Aangezien de drukken  $p_0$  en  $p_1$  gelijk zijn moet dus ook de snelheid  $U_1$  overal evenveel toenemen. Dus is  $U_1$  evenals  $U_0$  uniform en axiaal.

Omdat de snelheden ver voor en achter de strip axiaal zijn, bekijkt de klassieke actuator theorie alleen de axiale component van de impulsbalans.

Zo volgt uit de behoudswetten op integratiegebied I:

$$1. \text{ massabehoud : } \int_I \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds = 0$$

hieruit volgt :

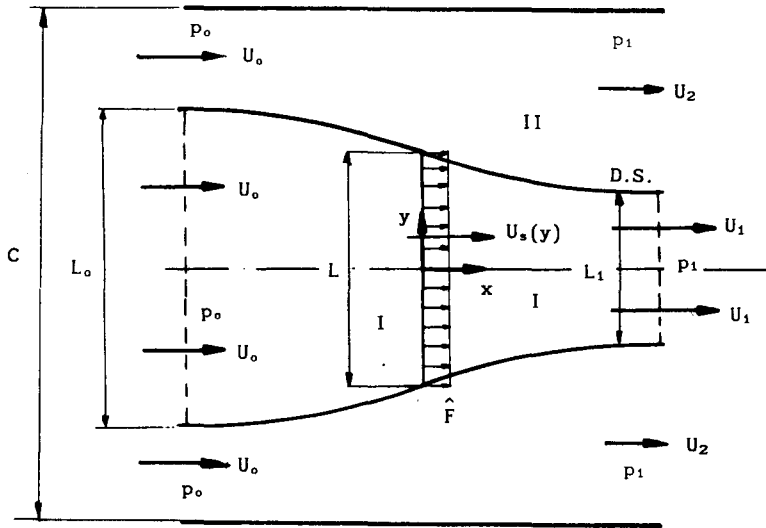
$$U_0 L_0 = U_1 L_1 = \int_{-1/2L}^{1/2L} U_s(y) \, dy \equiv \bar{U}_s L \quad (2.5.1)$$

Hierin is  $\bar{U}_s$  de gemiddelde axiale snelheid ter plekke van de strip.

$$2. \text{ impulsbehoud : } \int_I \rho v_x (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, ds = \int_{-1/2L}^{1/2L} \hat{F}_x \, dy + \int_I p n_x \, ds$$

Hierbij betekent I een integratie over de rand van gebied I.

De bijdrage van de vrije stroomlijnen (D.S) aan de linkerterm is nul, omdat de normaalsnelheid er nul is. Glauert [GLA35] heeft bewezen dat de laatste term in de impulsbalans namelijk de x-component van de drukkracht geïntegreerd over de rand van gebied I geen bijdrage geeft. Dit heeft hij gedaan door de actuatorstrip in een windtunnel met doorsnee C te plaatsen (fig 2.5.3) en de massa- en impulsbalans in gebied I en II te controleren.



Figuur 2.5.3 : Bepaling van de drukkracht in de x-richting in een windtunnel door Glauert.

Hierdoor vond hij voor de drukkracht :

$$\int_I p n_x ds = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \frac{(L_1 - L_0)^2}{C - L_1} \quad (2.5.2)$$

hetgeen in de limiet voor  $C \rightarrow \infty$  naar nul gaat.

Dus geldt

$$\rho U_1^2 L_1 - \rho U_0^2 L_0 = \hat{F} L \equiv T_{20} \quad (2.5.3)$$

hierin is  $T_{20}$  de totale kracht per lengteëenheid in de z-richting met dimensie N/m.

3. energiebehoud : 
$$\int_I \frac{1}{2} \rho V^2 (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = \int_{-1/2L}^{1/2L} \hat{F} \cdot \underline{v} dy + \int_I p (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds$$

De laatste integraal is nul omdat er geen normaalsnelheid op de stroomlijnen (D.S.) is en de drukken ver voor en achter de strip aan elkaar gelijk zijn. Er volgt dan

$$\frac{1}{2} \rho U_1^3 L_1 - \frac{1}{2} \rho U_0^3 L_0 = \hat{F} \bar{U}_s L \quad (2.5.4)$$

Uit (2.5.2, 3 en 4) volgt :

$$\hat{F} = \rho \bar{U}_s (U_1 - U_0) \tag{2.5.5}$$

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \rho (U_1^2 - U_0^2) = \Delta p$$

dus

$$U_1 = \sqrt{\frac{2\hat{F}}{\rho} + U_0^2} \tag{2.5.6}$$

Vergelijking (2.5.5) volgt ook direct door de wet van Bernoulli afzonderlijk voor en achter de strip toe te passen en te combineren.

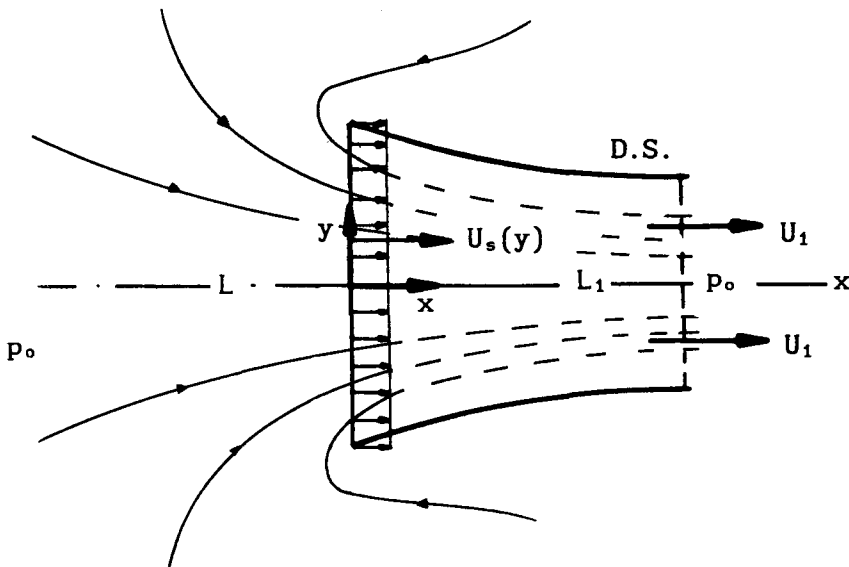
Uit (2.5.5) volgt nu dat :

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2}(U_1 + U_0) \tag{2.5.7}$$

Voor het afgegeven vermogen aan het medium per lengteëenheid in de z-richting geldt volgens deze klassieke theorie in twee dimensies :

$$P_{k1,2D} = \int_{-L}^{L} \hat{F} \cdot \underline{v} \, dy = \bar{U}_s \hat{F} L = \frac{1}{2}(U_1 + U_0) T_{2D} \tag{2.5.8}$$

Als er geen uniforme aanstroming is, dan blijken de vergelijkingen (2.5.2) tot en met (2.5.8) nog steeds te gelden (zie Appendix A), en het stromingsveld ziet er dan uit als in figuur 2.5.2<sup>b</sup>.



Figuur 2.5.2<sup>b</sup> : Het stromingsveld in geval van  $U_0 = 0$ .

In onze numerieke berekeningen zullen we een stroming als in figuur 2.5.2<sup>b</sup> tegenkomen, omdat we het geval  $U_0 = 0$  beschouwen.

De actuator schijf.

In het driedimensionale probleem kijken we naar de axiaal symmetrische stroming ten gevolge van een krachtveld dat werkt ter plekke van een vlak cirkelvormig gebied, we noemen dit een actuator schijf. Het stromingsveld dat ontstaat indien deze schijf wordt geplaatst in een niet-viskeuze stroming is identiek aan figuur 2.5.2<sup>a</sup>, indien we de lengteschalen L in die figuur vervangen door oppervlakten A. Ook de beschouwingen over de behoudswetten gaan analoog en geven dan ook als resultaat dat geldt :

$$U_0 A_0 = U_1 A_1 = \int_{-\frac{1}{2}D}^{\frac{1}{2}D} U_s(r) 2\pi r dr \equiv \bar{U}_s A \quad (2.5.9)$$

met D de diameter van de schijf.

$$\rho U_1^2 A_1 - \rho U_0^2 A_0 = \hat{F} A \equiv T_{3D} \quad (2.5.10)$$

hierin is  $T_{3D}$  de totale kracht in N.

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\rho(U_1^2 - U_0^2) = \Delta p \quad (2.5.11)$$

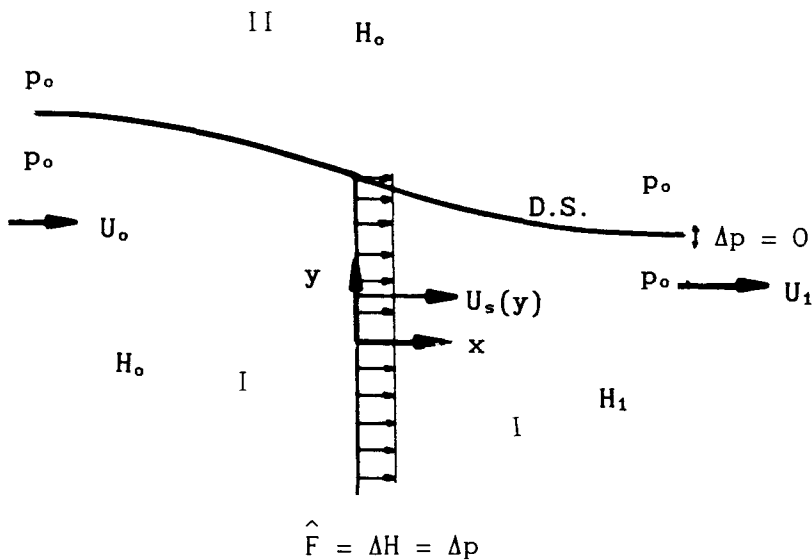
$$\bar{U}_s = \frac{1}{2}(U_1 + U_0) \quad (2.5.12)$$

$$P_{k1..3D} = \int_{-\frac{1}{2}D}^{\frac{1}{2}D} \hat{F} \cdot \underline{v} 2\pi r dr = \bar{U}_s \hat{F} A = \frac{1}{2}(U_1 + U_0) T_{3D} \quad (2.5.13)$$

Volgens de klassieke actuator theorie van Froude zijn het twee- en driedimensionaal probleem dus analoog en leveren dezelfde waarde voor onder andere de gemiddelde snelheid ter plekke van de strip/schijf.

De tekortkomingen van de theorie van Froude.

Het zwakke punt in deze klassieke actuator theorie is het gedrag bij de rand van het krachtveld. Er is ter plekke van de actuator strip een sprong in de Bernoulli constante opgelegd en omdat de snelheid continu is dus ook een sprong in de druk. Op een stroomlijn die het krachtveld niet passeert behoudt de Bernoulli constante zijn waarde, maar kunnen druk en snelheid veranderen. Bij een eindige kromtestraal is de druk aan weerszijden van een stroomlijn gelijk. In figuur 2.5.4 is de waarde van de druk en de Bernoulli constante in verschillende gebieden aangegeven, voor het geval dat we aannemen dat de stroomlijn langs de rand (D.S.) een glad verloop heeft.



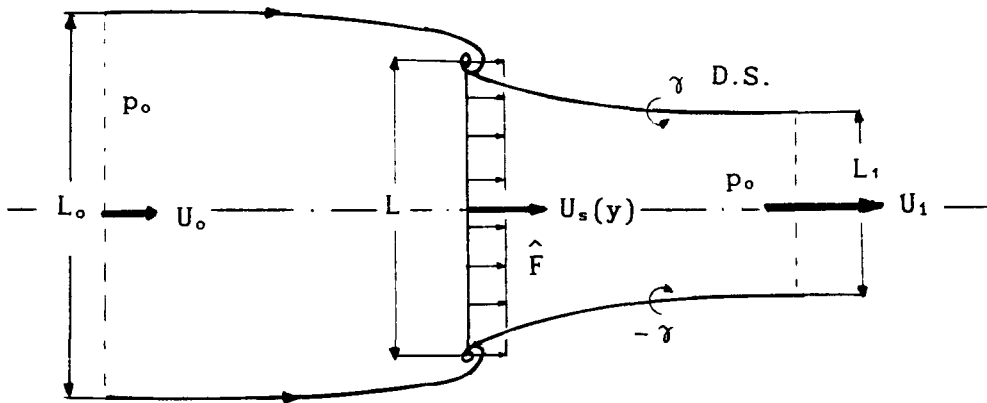
**Figuur 2.5.4 : De verdeling van de druk en de Bernoulli constante rond de striprand volgens de klassieke theorie.**

Uit de randvoorwaarden voor de stroomlijn die door de rand van de strip gaat volgt, dat er een sprong in de druk moet zijn aan de rand nabij de actuator strip in gebied II. Omdat daar echter de Bernoulli constante niet verandert zou er dan tevens een sprong in de snelheid moeten optreden. Dit is echter voor een incompressibel fluïdum in strijd met de continuïteitsvergelijking. De enige mogelijkheid om aan de randvoorwaarden te voldoen is dat de stroomlijn die langs de rand van de strip gaat daar een verwaarloosbaar kleine kromtestraal heeft, zodat er een oneindige drukgradiënt bestaat. De preciese aard van de singulariteit is echter nog onbepaald.

Het verloop van de stroomlijn nabij de rand wordt mede bepaald door de wervelproductie die daar optreedt. Uit de wervelvergelijking (2.5.14) volgt namelijk, dat er alleen vorticititeit wordt geproduceerd in een niet-viskeus medium als de rotatie van de kracht ongelijk aan nul is, hetgeen bij een uniforme krachtverdeling op de actuator strip alleen het geval is op de randen.

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega} = \frac{1}{\rho} \nabla \times \underline{f} \quad (2.5.14)$$

De term  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega}$  geeft de afvoer van vorticititeit weer langs de stroomlijn (D.S.). Omdat het stroomlijnenpatroon nabij de striprand vooral wordt bepaald door de wervelsterkte en om aan de randvoorwaarden voor de snelheid en de druk te voldoen verwachten we een spiraalachtig verloop van de stroomlijnen zoals is geschetst in figuur 2.5.5.



**Figuur 2.5.5 : Het verwachte stroomlijnen patroon van de stroming die ontstaat ten gevolge van een actuatorstrip.**

We zullen in hoofdstuk 4 zien dat wanneer de parameter  $\hat{F}/\rho U_0^2 \ll 1$ , het singulier gedrag bij de randen verwaarloosbaar wordt. Men mag dan een gelineariseerde theorie toepassen waarbij de randstroomlijnen vlak verlopen. Voor  $U_0 = 0$  is  $\hat{F}/\rho U_0^2$  oneindig en is niet-lineair gedrag bij de rand zeker niet verwaarloosbaar. Daarom beperken we ons vaak tot een fluïdum zonder hoofdstroming.



### 2.5.3 Berekeningen en metingen aan een actuator strip door Lee en Greenberg.

Lee en Greenberg [LEE84] hebben een numerieke simulatie van een actuator strip in een niet-viskeuze stroming uitgevoerd. Hiervoor lossen ze het stelsel integraalvergelijkingen op, dat volgt uit de potentiaaltheorie in combinatie met 'randvoorwaarden' op de wervelvlakken. Deze zijn : gelijke waarden van de druk aan weerszijden van de stroomlijn, en geen normaalsnelheid op de stroomlijn.

In deze vergelijkingen verschijnen de plaats waar het wervelvlak zich bevindt en de wervelsterkte  $\gamma$  op het vlak als onbekenden. Er worden een aantal basisfuncties voor deze onbekende grootheden gekozen. Een schatting voor de onbekende grootheden volgt door een sommatie van de basisfuncties met coëfficiënten ervoor. Met behulp van een collocatiemethode wordt een oplossing gezocht voor het stelsel vergelijkingen met de coëfficiënten als onbekenden. Met een collocatiemethode controleert men de randvoorwaarden op een aantal punten van het wervelvlak en maakt daarmee een nieuwe schatting voor de coëfficiënten. Voor één van de basisfuncties voor de wervelsterkte kiezen Lee en Greenberg een wortelsingulariteit (2.5.15)

$$\gamma \sim s^{-1/2} \quad (2.5.15)$$

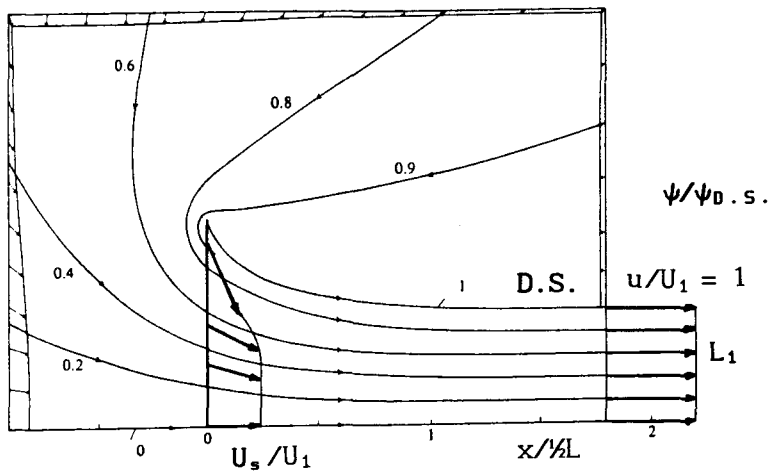
waarbij  $s$  de lengte van het wervelvlak is vanaf het punt waar het wervelvlak ontstaat bij de rand van de strip.

Volgens Lee en Greenberg is dit gedrag opgelegd door de Greense functie van het probleem [LEE84]. In hoofdstuk 4 komen we hier nog op terug.

Met deze wortelsingulariteit in één van hun basisfuncties vinden Lee en Greenberg een stromingsveld ten gevolge van een actuator strip in een fluïdum zonder hoofdstroming zoals is weergegeven in figuur 2.5.6.

We zullen met behulp van een dimensieanalyse in hoofdstuk 5 laten zien, dat het stromingspatroon onafhankelijk is van de grootte van  $\hat{F}$  en  $\rho$ .

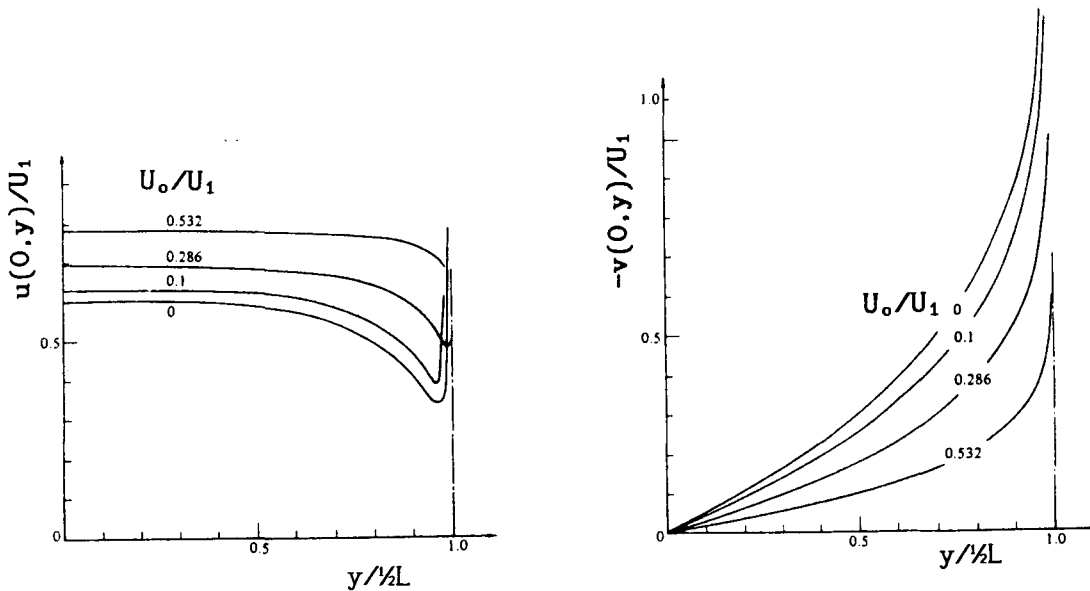
In de figuur zijn de snelheden dimensieloos gemaakt met  $\sqrt{(2\hat{F}/\rho)}$ , de snelheid op oneindig ( $U_1$ ), zoals die uit de klassieke theorie van Froude volgt voor  $U_0 = 0$  (2.5.6), en de  $x$ - en  $y$ -coördinaten met de lengte van de strip ( $L$ ). De waarde van de stroomfunctie is gerelateerd aan de waarde op de stroomlijn die langs de rand van de strip loopt.



Figuur 2.5.6 : De stroming ten gevolge van een actuator strip voor  $U_o = 0$  volgens Lee en Greenberg [LEE84].

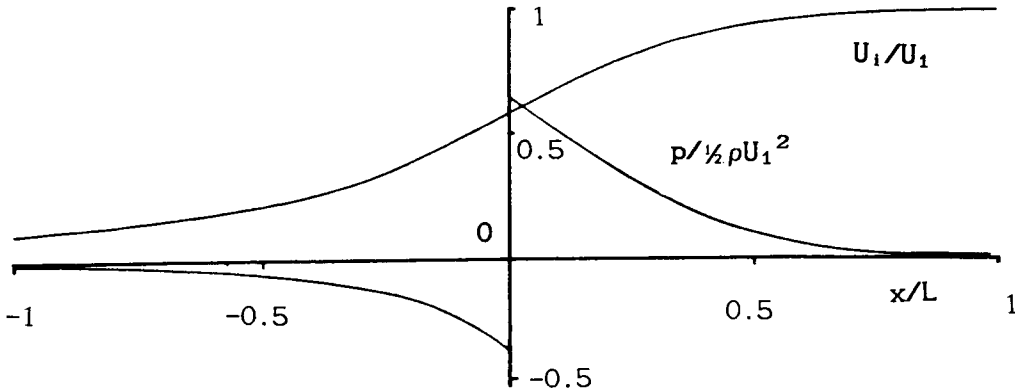
De snelheden in de x- en y-richting, respectievelijk  $u$  en  $v$  zijn in figuur 2.5.7<sup>a</sup> en <sup>b</sup> te zien voor verschillende waarden van  $U_o/U_1$ .

Ten gevolge van de wortelsingulariteit in de wervelsterkte op de rand van de strip gaan beide snelheidscomponenten naar oneindig voor  $y \rightarrow \pm 1/2L$ .



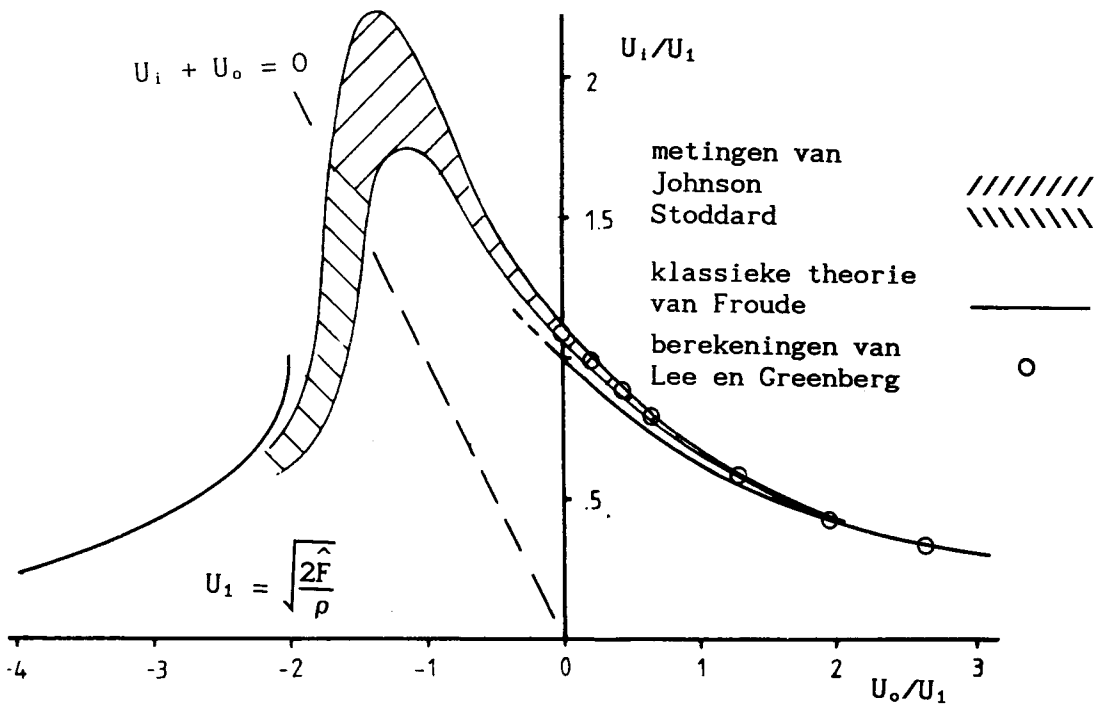
Figuur 2.5.7<sup>a</sup> en <sup>b</sup> : De snelheden  $u$  en  $v$  volgens berekeningen van Lee en Greenberg voor verschillende waarden van  $U_o$ .

In figuur 2.5.8 is de snelheid en de druk op de symmetrie as weergegeven voor een stroming met  $U_0 = 0$ .



Figuur 2.5.8 : De snelheid en de druk op de symmetrie as voor  $U_0 = 0$ .

De berekeningen geven voor elke waarde van  $U_0$  een hogere waarde van de gemiddelde geïnduceerde snelheid op de strip dan de klassieke actuator theorie van Froude, en sluiten dus ook beter aan bij de gemeten waarden aan een echte rotor [KUI89], zie figuur 2.5.9.

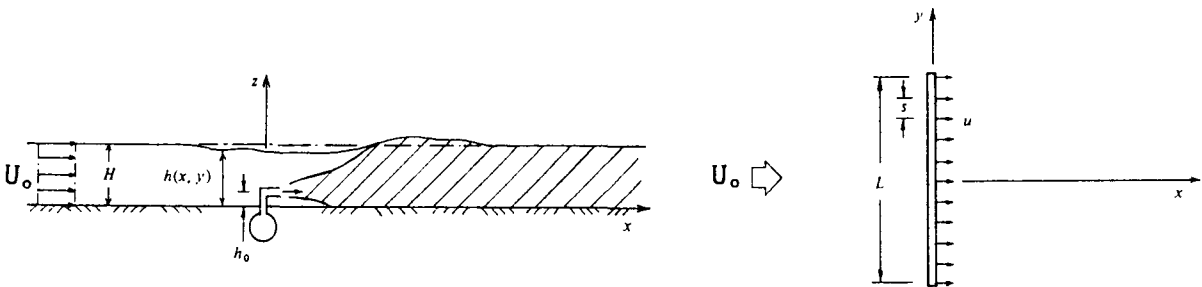


Figuur 2.5.9 : Vergelijking van de berekeningen van Lee en Greenberg met de klassieke theorie en met metingen aan echte rotoren.

Een probleem van de theorie van Lee en Greenberg is, dat de impulsbalans niet meer sluitend is. De impulsbalans in de x-richting blijkt een systematische afwijking te vertonen van de orde van grootte van 10% van de externe kracht.

Om hun theorie te bevestigen hebben Lee en Greenberg metingen verricht aan de tweedimensionale stroming ten gevolge van een actuatorstrip in ondiep water met een vrij oppervlak [LEE84].

In een platte bak van afmeting 4 x 3 x 0.3 m met een vrij oppervlak  $h(x,y)$  plaatsten zij een serie bronnen, die vloeistof met een hoge snelheid  $u$  in de stroming injecteerden. Zo kregen ze een eindige impulstoevoer bij een zo laag mogelijke massatoevoer, en werd een 'zuivere' impulsbron gesimuleerd. Dit is weergegeven in figuur 2.5.10.



**Figuur 2.5.10 : Opstelling waarmee Lee en Greenberg een tweedimensionale stroming ten gevolge van een actuator strip simuleerden.**

Omdat de lengte  $L$  van de benaderde actuator strip groot is in verhouding tot het niveau  $H$  van de vloeistof is de impulsstroom in de  $z$ -richting te verwaarlozen en is het experiment bij benadering tweedimensionaal.

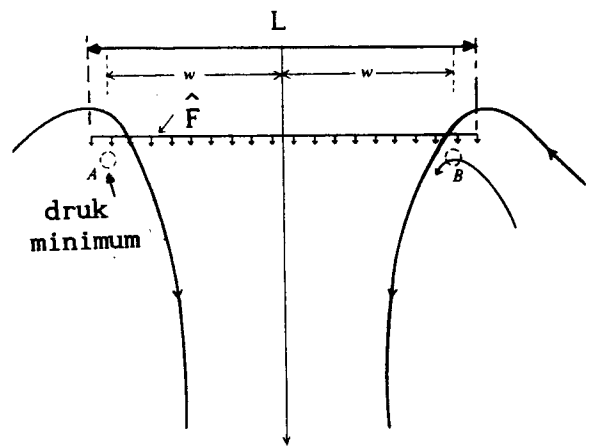
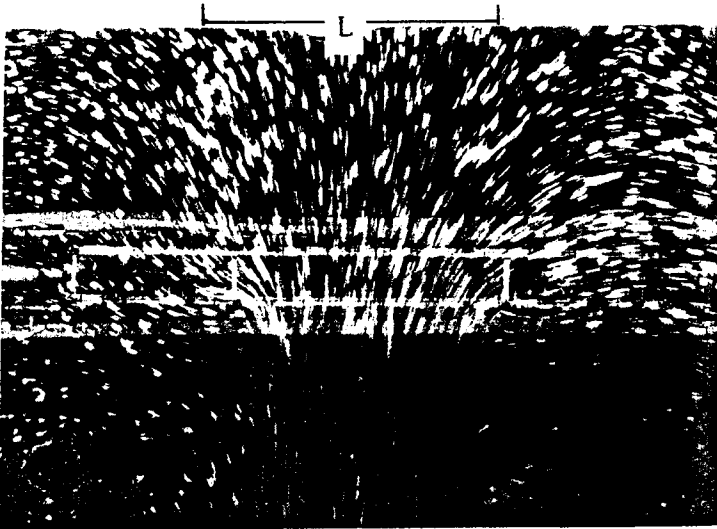
Er zijn vijf metingen verricht in een fluïdum zonder een uniforme hoofdstroming  $U_0$ . Deze metingen zijn gedaan bij waarden van het Reynoldsgetal tussen 3000 en 4000. De verschillen in de metingen bestaan uit verschillen in de hoogte  $h_0$  waar de vloeistof wordt geïnjecteerd, verschillende injectiesnelheden  $u$  en een variërend aantal bronnen die de actuator strip vormen, waardoor de afstand  $s$  tussen de bronnen verandert.

In figuur 2.5.11 is het stromingsveld te zien zoals het direct na het 'aanzetten' van de actuatorstrip.



Figuur 2.5.11 : De stroming direct na het starten van de actuator strip.

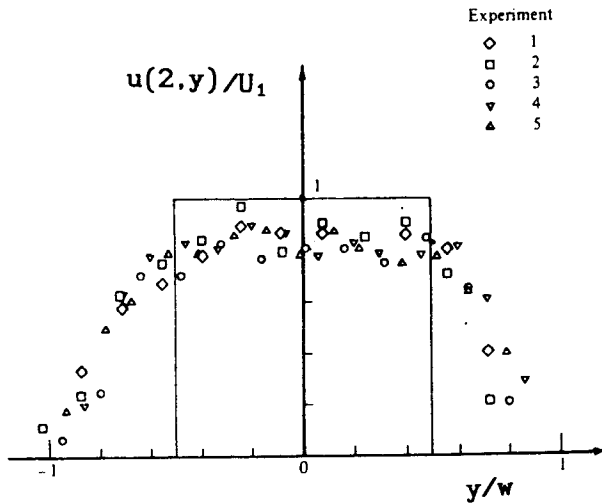
We zien hieruit duidelijk, dat de eindige wervelvlakken achter de strip zich oprollen. De wervelsterkte wordt stroomafwaarts met de stroomlijnen meegevoerd en er ontstaat na verloop van tijd een stationair stromingspatroon zoals te zien is in figuur 2.5.12<sup>a</sup> en <sup>b</sup>.



Figuur 2.5.12<sup>a</sup> en <sup>b</sup> : Het stationair stromingsveld ten gevolge van een actuator strip ( $U_0 = 0$ ).

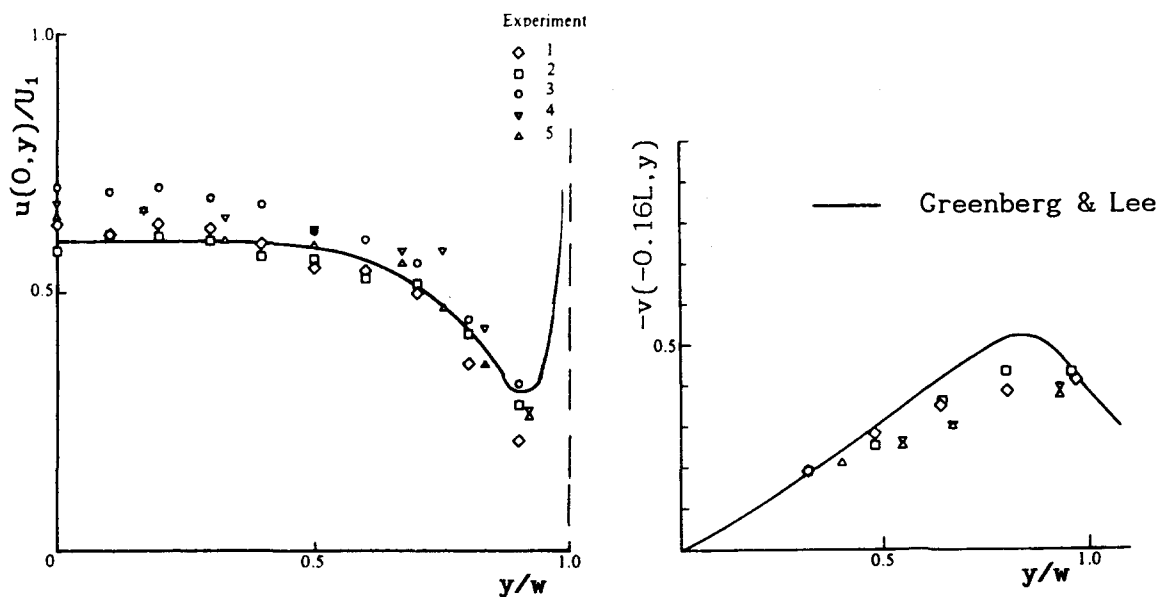
De minima in de druk blijken niet exact op de randen van de strip te ontstaan, zoals de berekeningen van Lee & Greenberg voorspellen, maar op  $\pm 0.45 L$ , juist stroomafwaarts achter de strip. Vandaar dat Lee en Greenberg in hun vergelijking voor de breedte van de strip niet  $L$  nemen (fig. 2.5.10), maar  $w$  ( $= 0.45 L$ ) (fig. 2.5.12) de afstand tussen de minima in de druk. Het is zeer de vraag of deze interpretatie van de metingen door Lee en Greenberg gerechtvaardigd is.

In figuur 2.5.13 zijn de gemeten axiale snelheden op afstand  $L$  achter de strip gegeven. Het getekende profiel is het verwachte profiel ver achter de strip volgens de klassieke theorie 2.5.2. Uit figuur 2.5.8 volgt, dat op een afstand  $L$  achter de strip deze benadering al geldig is. De weergegeven snelheden zijn dimensieloos gemaakt met de snelheid in de jet op oneindig  $U_1$  en de lengte met  $w$ .



**Figuur 2.5.13 : Het axiale snelheidsprofiel op afstand  $L$  achter de strip.**

Tenslotte geven figuur 2.5.14<sup>a</sup> en <sup>b</sup> respectievelijk de snelheid in de  $x$ -richting ( $u$ ) ter plekke van de strip en de snelheid in de  $y$ -richting ( $v$ ) op  $0.16 w$  stroomopwaarts, voor de strip; de getrokken lijnen zijn de waarden die uit hun berekening volgt.



Figuur 2.5.14<sup>a</sup> en <sup>b</sup> : De snelheden  $u(0,y)$  en  $v(-0.16L,y)$ .

We zien dat de berekeningen van Lee en Greenberg een kwalitatieve overeenkomst vertoont met de metingen.

Bepaling van de gemiddelde axiale snelheid in de strip met breedte  $w$ , geeft afhankelijk van het Reynoldsgetal een afwijking van de klassieke theorie van Froude van  $-2\%$  tot  $+8\%$ . Nemen we voor de lengte van de strip de fysische breedte van de impulsbron  $L$ , dan daalt deze gemiddelde snelheid zo'n 10% en komen we dicht bij de waarde volgens de klassieke theorie van Froude.

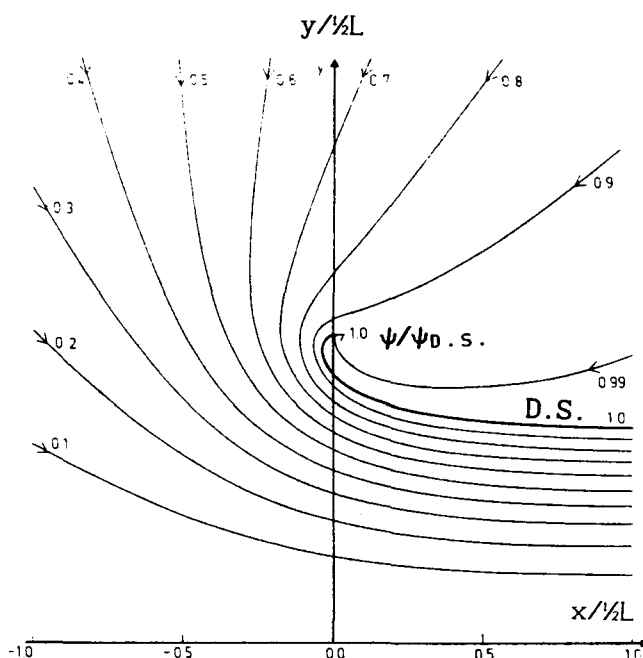
Omdat de toegevoerde impuls van de vrije stralen niet instantaan aan de hoofdstroming wordt overgebracht heeft de actuator strip in het experiment een eindige dikte. Deze dikte wordt niet in rekening gebracht in de theorie van Lee & Greenberg. Lee en Greenberg noemen tenslotte turbulentie als een mogelijke oorzaak van de afwijkingen tussen theorie en experiment.

#### 2.5.4 Berekeningen aan een actuator schijf door Schmidt en Sparenberg.

Schmidt en Sparenberg hebben het gedrag van de niet-viskeuze stroming nabij de rand van een schijf bepaald indien er geen hoofdstroming is.

Zij verwachten daar een spiraliserend wervelvlak [SCM77]. Op deze oplossing komen we in hoofdstuk 4 terug.

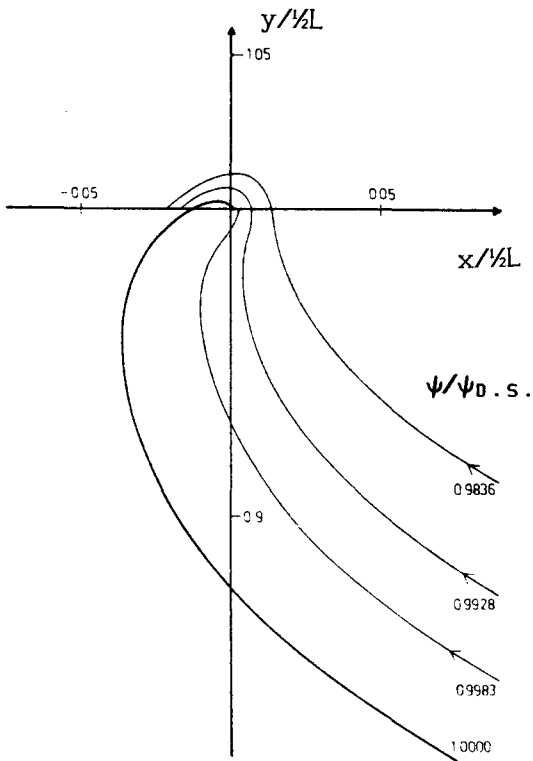
Met dit voorgescheven singulier gedrag aan de rand hebben zij de stroming bepaald ten gevolge van een actuator schijf. Uit de numerieke berekening volgt een stromingsveld zoals is weergegeven in figuur 2.5.15.



**Figuur 2.5.15 : Het stromingsveld ten gevolge van een actuator schijf volgens Schmidt en Sparenberg ( $U_0 = 0$ ).**

Nabij de rand van de schijf passeren de stroomlijnen het krachtveld meerdere keren. Er bestaat dus aan de rand van de schijf een stroming tegen het krachtveld in. Dat deze stroming zeer beperkt is, volgt uit de waarde van de stroomfunctie voor deze stroomlijnen (fig. 2.5.16).





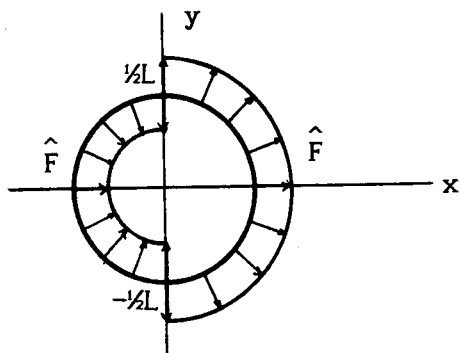
Figuur 2.5.16 : Het stroomlijnenpatroon dichtbij de rand van de schijf.

Het vermogen dat wordt toegevoerd aan de stroming is volgens Schmidt en Sparenberg [SCM77] gelijk aan de waarde volgens de klassieke theorie van Froude (2.5.13). Dit is echter niet door hen numeriek gecontroleerd.

2.5.5 Berekeningen aan een actuator cylinder door Madsen.

Zoals de actuator schijf wordt gebruikt als model voor een axiale rotor, zo wordt een actuator cylinder door Madsen [MAD83] voorgesteld als een model voor een Darrieus rotor.

Een actuator cylinder bestaat uit een halve cirkel met een normale, uniforme krachtverdeling naar het middelpunt toe gericht en een halve cirkel met een normale, uniforme krachtverdeling van het middelpunt af gericht (fig. 2.5.17).



Figuur 2.5.17 : De actuator cylinder.

Ondanks de sterk afwijkende geometrie hoeft het gedrag van de actuator cylinder niet essentieel anders te zijn dan dat van een actuator strip. Sparenberg heeft namelijk een stelling geponeerd [SPA84], welke impliceert dat in afwezigheid van hoofdstroming voor een wrijvingsloos fluïdum de stroming ten gevolge van een actuator cylinder identiek is aan de stroming ten gevolge van een actuator strip. Op deze stelling komen we in hoofdstuk 4 nog terug.

Madsen [MAD83,85] is in zijn berekeningen aan de actuator cylinder uitgegaan van een wrijvingsloze stroming en een continue krachtverdeling ook ter plaatse van de randen van de cylinder op de y-as. Hij gaat uit van de stationaire Euler vergelijking (2.5.16)

$$\rho(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underline{f} - \nabla p \quad (2.5.16)$$

Zijn oplosmethode is gebaseerd op een methode, die von Karman en Burgers hebben aangedragen voor het geval dat er een uniforme hoofdstroom-snelheid  $U_0$  in de x-richting aanwezig is [KAR35].

De geïnduceerde snelheid die ontstaat ten gevolge van het krachtveld  $\underline{f}$  noemen we de verstoringssnelheid  $\underline{u}$ .

Dan geldt voor de totale snelheid in het veld  $\underline{v}$ :

$$\underline{v} = \underline{u} + U_0 \underline{e}_x \quad (2.5.17)$$

Door (2.5.17) in te vullen in (2.5.16) volgt:

$$\rho[(\underline{u} + U_0 \underline{e}_x) \cdot \nabla](\underline{u} + U_0 \underline{e}_x) = \underline{f} - \nabla p$$

$$\rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \rho U_0 \frac{\partial}{\partial x} (\underline{u} + U_0 \underline{e}_x) = \underline{f} - \nabla p$$

$$\rho U_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = \underline{g} - \nabla p \quad (2.5.18)$$

$$\text{met } \underline{g} = \underline{f} - \rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$$

We definiëren  $\underline{f}$  als de primaire, externe volumekracht en  $\rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$  als de secundaire, interne volumekracht.

Door de divergentie van (2.5.18) te bepalen en gebruik te maken van de continuïteitsvergelijking (2.5.19) volgt een Poissonvergelijking.

$$\nabla \cdot \underline{u} = \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.5.19)$$

$$\Delta p = \text{div } \underline{g} \quad (2.5.20)$$

Als randvoorwaarde geldt een druk nul op oneindig.

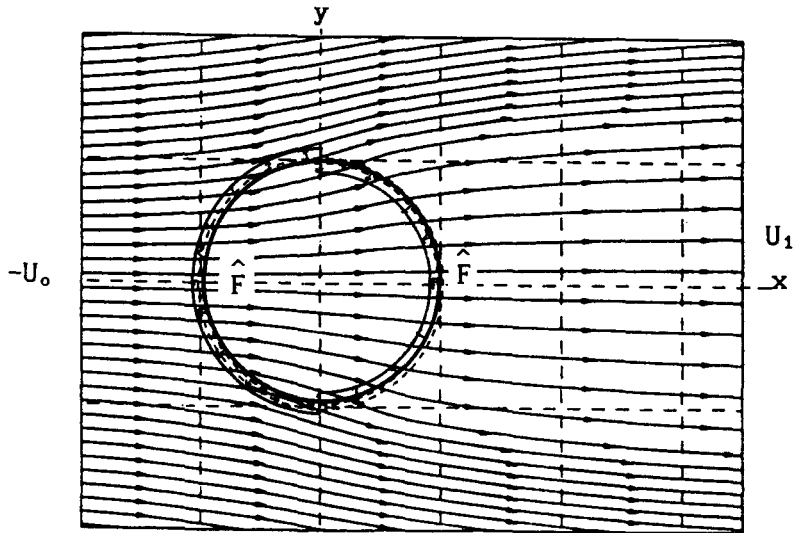
De oplossing hiervoor is :

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{g_x(x - \xi) + g_y(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \quad (2.5.21)$$

Als eerste benadering nemen we aan dat de secundaire volumekracht  $\rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$  klein is ten opzichte van de primaire volumekracht  $\underline{f}$ . Dan vereenvoudigt (2.5.18) tot de lineaire Oseen vergelijking zonder wrijvingsterm (2.5.22)

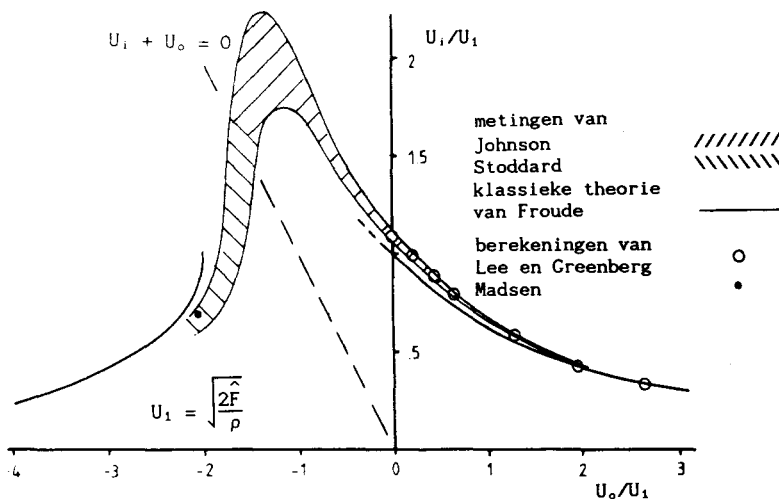
$$\rho U_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = \underline{f} - \nabla p \quad (2.5.22)$$

De oplossing hiervan noemen we de nulde orde oplossing  $\underline{u}^0$  voor de verstoringssnelheid. Door met deze oplossing de secundaire volumekracht  $\rho(\underline{u}^0 \times \text{rot } \underline{u}^0)$  te bepalen kunnen we nu een betere benadering  $\underline{u}^1$  voor  $\underline{u}$  bepalen met behulp van (2.5.18). Door iteratie vinden we een oplossing voor de snelheden. Madsen vindt met deze oplosmethode het stromingsveld dat in figuur 2.5.18 gegeven is.



Figuur 2.5.18 : Het stromingsveld door een actuator cylinder bepaald door Madsen voor  $U_0 = -2.3$ .

De berekeningen van Madsen laten zien dat de gemiddelde geïnduceerde snelheid ter plekke van de 'strip' in de limiet voor een uniforme krachtverdeling groter is dan de klassieke actuator theorie van Froude voorspelt. In figuur 2.5.19 is een vergelijking met de klassieke theorie, de waarden van Lee en Greenberg en de metingen aan echte rotoren gegeven [KUI89].



Figuur 2.5.19 : Een vergelijking van metingen aan echte rotoren, voorspellingen van de klassieke actuator theorie van Froude, berekeningen van Lee en Greenberg en van Madsen.

## 2.6 Conclusies

De geïnduceerde snelheid in het rotorvlak volgens de klassieke axiale actuator theorie van Froude wijkt 10% af van meetresultaten aan echte rotoren. Het is de vraag of dit alleen een gevolg is van de vereenvoudigde voorstelling van een rotor door een actuator schijf, of in het tweedimensionale geval een actuator strip.

Berekeningen van Lee & Greenberg en Madsen geven een betere benadering van de metingen aan echte rotoren dan de theorie van Froude.

De vergelijking van berekeningen van Lee en Greenberg met hun metingen is gebaseerd op een 'aanpassing' van de breedte van de experimentele actuator strip. De breedte wordt hierbij gedefiniëerd als de afstand tussen de drukminima. Dit lijkt ons aanvechtbaar. Bovendien vertoont de impulsbalans in de x-richting binnen hun eigen berekeningen een fout van 10%.

Schmidt en Sparenberg veronderstellen een spiraliserend wervelvlak aan de rand van een actuator schijf, en een afgegeven vermogen dat gelijk is aan de waarde volgens de klassieke theorie.

Madsen geeft geen duidelijkheid over het stromingsgedrag aan de rand van de actuator strip, maar berekent een gemiddelde geïnduceerde snelheid  $U_i$ , dat 5% afwijkt van de klassieke theorie van Froude. Zo'n afwijking moet evenals de afwijking bij Lee en Greenberg een gevolg zijn van het singulier gedrag van de stroming aan de randen van het actuator vlak.

Vandaar dat we in de volgende hoofdstukken speciale aandacht willen geven aan de stroming ten gevolge van een singulier krachtveld.

## Hoofdstuk 3 De punctkracht.

### 3.1 Inleiding

Met dit hoofdstuk willen we het belang van een goede definitie van een probleem en het nauwkeurig omgaan met limietprocedures, lineariseringen en benaderingen duidelijk onderstrepen.

Dit blijkt onder andere van groot belang te zijn bij een singulier krachtveld, waarvan we in dit hoofdstuk de meest eenvoudige vorm bekijken, namelijk de punctkracht. We onderzoeken de invloed van een punctkracht op een uniform, onbegrensd en incompressibel stromingsveld.

In de literatuur zijn een aantal artikelen verschenen over zo'n singulier krachtveld in een driedimensionale stroming. In 1944 publiceerde Landau één van de weinige exacte oplossingen van de Navier-Stokes vergelijking voor een incompressibel, viskeus medium [LAN44]. Hij berekende de stroming ten gevolge van een punctkracht  $F$  in een onbegrensd gebied zonder hoofdstroming (3.2).

De oplossing blijkt gelijkvormig te zijn en is bepaald door een 'Reynoldsgetal' gedefiniëerd als  $\frac{F}{\rho v^2}$ . Sparenberg heeft in 1974 [SPA74] een oplossing voor dit probleem met uniforme hoofdstroming  $U$ , voorgesteld voor lage Reynoldsgetallen ( $\frac{F}{\rho v^2} \ll 1$ )(3.3.2).

In de rotordynamica is men vooral geïnteresseerd in de stroming voor hoge Reynoldsgetallen, oftewel voor lage viscositeit. Vandaar dat we willen zoeken naar een wrijvingsloze oplossing van het probleem. In de oplossingen van Landau en Sparenberg blijkt een limiet voor de viscositeit naar nul een triviale oplossing te geven ( $\underline{u} = 0$ ).

Von Karman en Burgers [KAR35] hebben de stroming ten gevolge van een impulsstoot in een stilstaand, wrijvingsloos medium bepaald (3.3.3). Gebruik makend van deze basisoplossing ontwikkelde Sparenberg een lineaire theorie voor een continue impulsbron [SPA84]. Hiervoor beschouwt hij de impulsbron als een opeenvolging van impulsstoten.

We zullen onder andere met een dimensieanalyse in 3.4 aannemelijk maken dat deze benaderingswijze niet tot een fysische oplossing leidt.

Bovendien wordt ook het verband tussen de verschillende benaderingen met behulp van een dimensieanalyse verduidelijkt. Ook wordt de dimensieanalyse toegepast op een tweedimensionale punctkracht.

### 3.2 Niet-lineaire theorie van de puntkracht in een stilstaand medium.

#### Probleemstelling

We bekijken het stationaire stromingsveld dat ontstaat door het plaatsen van een axiaal gerichte puntkracht  $\underline{f}(\underline{x})$ , gedefiniëerd met behulp van vergelijking (3.2.1) in een incompressibel, viskeus, onbegrensd, uniform en stilstaand medium.

$$\underline{f}(\underline{x}) = F \delta(x) \delta(y) \delta(z) \underline{e}_x \quad (3.2.1)$$

Hierin is  $\delta(\underline{x})$  de deltafunctie van Dirac.

We hebben dan drie onafhankelijke parameters, namelijk de dichtheid  $\rho$ , de kinematische viscositeit  $\nu$  en de grootte van de kracht  $F$ . We kunnen een dimensieloze parameter  $\frac{F}{\rho\nu^2}$  introduceren, die een maat is voor de sterkte van de puntkracht.

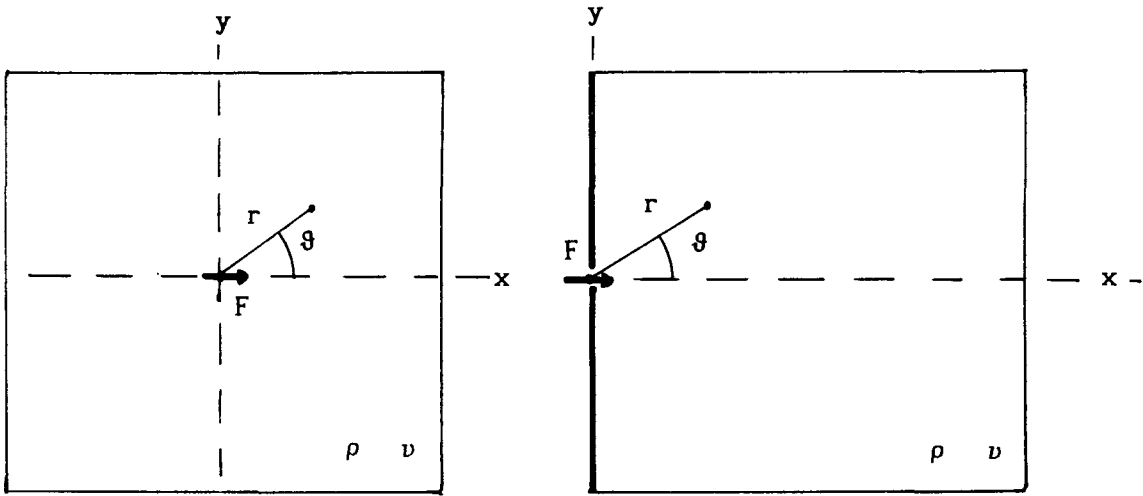
Er bestaat geen lengteschaal in dit probleem, de begrippen 'dichtbij' of 'ver van' de bron hebben geen betekenis. Deze eigenschap leidt tot de conclusie, dat er een gelijkvormigheids oplossing moet bestaan.

Hierdoor kan men een exacte analytische oplossing vinden.

Bij de oplossing van dit probleem moeten we dus uitgaan van de volledige stationaire, niet-lineaire Navier-Stokes vergelijking (3.2.2) en de continuïteitsvergelijking.

$$\rho(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underline{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (3.2.2)$$

Landau vond in 1944 [LAN44], en onafhankelijk daarvan Squire in 1951 [SQU51], een exacte oplossing voor dit probleem. Zij berekenen beiden de stroming ten gevolge van een puntkracht in een onbegrensde vloeistof (figuur 3.2.1<sup>a</sup>). Squire publiceerde in 1952 nog een tweede toepassing van de algemene oplossing [SQU52], namelijk de puntkracht in een vlakke, harde wand (figuur 3.2.1<sup>b</sup>). Geurts heeft recentelijk een kritische analyse van beide theoriën gepubliceerd [GEU86]. Hij stelt, dat de tweede oplossing van Squire [SQU52] niet voldoet aan de no-slip-conditie langs de wand, en daarom geen exacte oplossing is voor het gestelde probleem.



**Figuur 3.2.1<sup>a</sup> en <sup>b</sup> : De twee probleemstellingen waarvoor exacte oplossingen zijn gevonden door Landau en Squire.**

De stromingen zijn driedimensionaal en axiaalsymmetrisch.

Het probleem kan daarom het best beschreven worden in cylindercoördinaten  $r$  en  $\vartheta$ . Om een gelijkvormigheidsoplossing te vinden voeren we de volgende definitie in :

$$\psi = \nu r f(\cos \vartheta) = \nu r f(\xi) \quad \text{met} \quad \xi = \cos \vartheta \tag{3.2.3}$$

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d\psi}{d\vartheta} \tag{3.2.4}$$

$$v_\vartheta = \frac{-1}{r \sin \vartheta} \frac{d\psi}{dr} \tag{3.2.5}$$

Hiermee kan de Navier-Stokes vergelijking (3.2.2) vereenvoudigd worden tot [BAT67] :

$$f^2 - 2(1 - \xi^2)f' - 4\xi f = C_1 \xi^2 + C_2 \xi + C_3 \tag{3.2.6}$$

De constanten  $C_1$ ,  $C_2$  en  $C_3$  zijn bepaald door de verschillen in de probleemstellingen. De keuze van deze constanten is dan ook het enige verschil in de oplossingen van Landau en Squire.

Omdat de eigenschappen van de oplossingen van hen equivalent zijn bespreken we in deze paragraaf alleen de oplossing van Landau.



Een exacte oplossing van de Navier-Stokes vergelijking.

De exacte oplossing voor het probleem dat grafisch is weergegeven in figuur 3.2.1<sup>a</sup> is bepaald door uit te gaan van de Navier-Stokes vergelijking in de vorm (3.2.6). Hierin zijn de constanten  $C_1$ ,  $C_2$  en  $C_3$  nul genomen, hetgeen Landau rechtvaardigt in zijn artikel uit 1944 [LAN44]. Dan volgt :

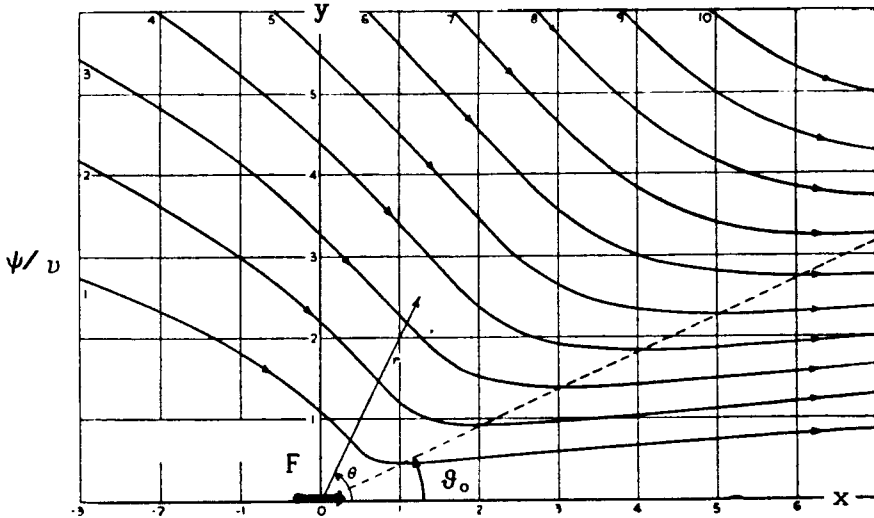
$$f^2 - 2(1 - \xi^2)f' - 4\xi f = 0 \tag{3.2.7}$$

met als oplossing :

$$f(\xi) = \frac{2(1 - \xi^2)}{1 + c - \xi} \tag{3.2.8}$$

Hierin is  $c$  een constante.

De stroomfunctie en de snelheden zijn nu bekend, op de constante  $c$  na. Voor  $c = 0.1$  is het stroomlijnenpatroon uitgezet in figuur 3.2.2.



Figuur 3.2.2 : Het stromingsveld bepaald door Landau voor  $c = 0.1$ .

Nu definiëren we  $\vartheta_0$  als de hoek van de lijn waarlangs de afstand van elke stroomlijn tot de symmetrie as minimaal is. In appendix B is bewezen dat uit (3.2.8) en (3.2.3) volgt :

$$\cos \vartheta_0 = \frac{1}{1 + c} \tag{3.2.9}$$

Hiermee wordt de betekenis van de constante  $c$  duidelijk. Voor hoge waarden van  $c$  wordt de hoek  $\vartheta_0$  bijna  $90^\circ$ . Er is dan geen sprake van een vrije straal stroming.

Voor lage  $c$  geldt het omgekeerde. De hoek wordt klein en er ontstaat een viskeuze jet achter de puntkracht. We vermoeden dan ook dat er een verband bestaat tussen de constante  $c$  en de totale impulstoevoer.

Dit verband kunnen we bepalen door een controlevolume rond de oorsprong te kiezen en de viskeuze kracht  $\iint_A \underline{T} \cdot \underline{n} \, dA$  en de impulsstroom  $\iint \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA$  te bepalen door het oppervlak van dit volume. Er geldt dan :

$$\underline{F} = \iiint_V \underline{f} \, dV = \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA - \iint_A \underline{T} \cdot \underline{n} \, dA \quad (3.2.10)$$

Met (3.2.3, 4, 5 en 8) volgt hieruit dat:

$$\frac{F}{2\pi\rho v^2} = \frac{32}{3} \frac{1+c}{c(2+c)} + 4(1+c)^2 \log \left[ \frac{c}{2+c} \right] + 8(1+c) \quad (3.2.11)$$

Dit directe verband tussen de impulstoevoer en de constante  $c$  kunnen we met (3.2.9) omzetten tot een verband tussen de toegevoerde impuls en de hoek  $\vartheta_0$ .

$$\frac{F}{2\pi\rho v^2} = \frac{32}{3} \frac{\cos \vartheta_0}{\sin^2 \vartheta_0} + \frac{4}{\cos^2 \vartheta_0} \log \left[ \frac{1 - \cos \vartheta_0}{1 + \cos \vartheta_0} \right] + \frac{8}{\cos \vartheta_0} \quad (3.2.12)$$

Ook (3.2.8) kunnen we met (3.2.9) en (3.2.3) omzetten in een verband tussen  $f$  en  $\vartheta_0$ :

$$f(\cos \vartheta) = \frac{2\sin^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta + \left[ \frac{1 - \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0} \right]} \quad (3.2.13)$$

Met behulp van (3.2.3, 4, 5, 12 en 13) is het stromingsveld bij een gegeven toegevoerde kracht  $F$  bekend.

De oplossing van Landau voor een sterke en zwakke impulsbron.

De enige dimensieloze parameter in het probleem is  $\frac{F}{\rho v^2}$ , die de dimensieloze sterkte van de impulsbron weergeeft.

We gaan nu de limietwaarden bepalen van de diverse grootheden voor grote en kleine waarden van deze parameter.

Indien de parameter  $\frac{F}{\rho v^2}$  klein wordt dan volgt uit (3.2.11) dat  $c$  groot wordt. Dan geldt :

$$\frac{F}{2\pi\rho v^2} = \frac{8}{c} = 8 \cos \vartheta_0 \tag{3.2.14}$$

Hieruit volgt dat de hoek  $\vartheta_0$  bijna  $90^\circ$  wordt. Voor de stroomfunctie en de snelheden geldt dan, met behulp van (3.2.3, 4, 5 en 13), omdat ook  $c \gg (1 - \cos \vartheta)$  :

$$f(\cos \vartheta) = \frac{2}{c} \sin^2 \vartheta \tag{3.2.15}$$

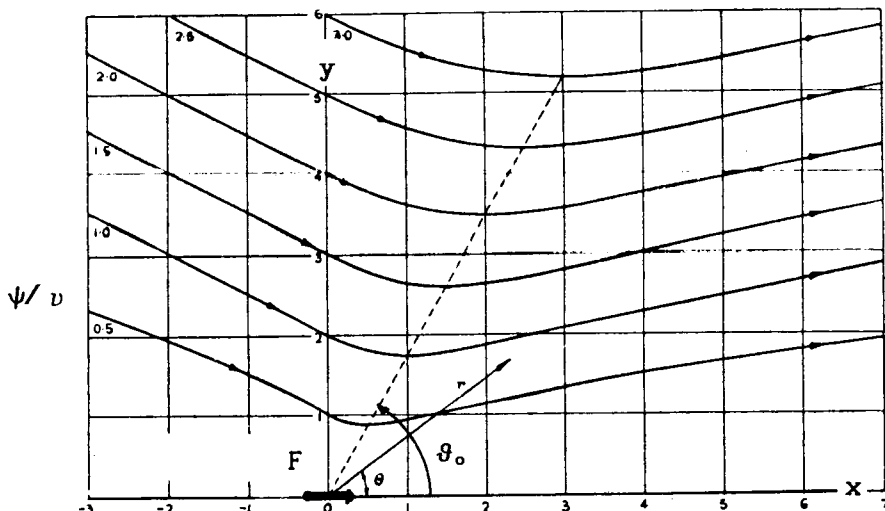
$$\psi(r, \vartheta) = \frac{Fr}{8\pi\rho v} \sin^2 \vartheta \tag{3.2.16}$$

$$u_r(r, \vartheta) = \frac{F}{4\pi\rho v} \frac{\cos \vartheta}{r} \tag{3.2.17}$$

$$v_\vartheta(r, \vartheta) = -\frac{F}{8\pi\rho v} \frac{\sin \vartheta}{r} \tag{3.2.18}$$

We kunnen inzien dat de parameter  $F/\rho v^2$  een Reynoldsgetal voorstelt, uit (3.2.17 en 18) volgt namelijk dat  $\frac{u_r}{v} \sim \frac{F}{\rho v^2}$ .

Er ontstaat blijkbaar een Stokes stroming, de viscositeit is dominant in het hele veld. Deze oplossing is te zien in figuur 3.2.3, de waarde van  $\frac{F}{\rho v^2}$  is dan 34.76 en  $c = 10$ .



Figuur 3.2.3 : De oplossing van Landau voor een lage waarde van  $\frac{F}{\rho v^2}$ .

Indien  $\frac{F}{\rho v^2}$  zeer groot wordt, dan volgt uit (3.2.12) dat :

$$\frac{F}{2\pi\rho v^2} = \frac{32}{3} \frac{1}{\vartheta_0^2} \quad (3.2.19)$$

De 'jet' die dan ontstaat, en gedefiniëerd is door zijn randen op hoek  $\vartheta_0$  wordt steeds smaller als  $\frac{F}{\rho v^2}$  toeneemt.

Binnen de jet, voor  $\vartheta < \vartheta_0$  geldt voor het stromingsveld met behulp van (3.2.3, 4, 5 en 13) :

$$f(\cos \vartheta) = \frac{4\vartheta^2}{\vartheta^2 + \vartheta_0^2} \quad (3.2.20)$$

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{4\nu r \vartheta^2}{\vartheta^2 + \vartheta_0^2} \quad (3.2.21)$$

$$u_r(r, \vartheta) = \frac{8\nu}{r} \frac{1}{\vartheta^2 + \vartheta_0^2} \quad (3.2.22)$$

$$v_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{-4\nu}{r} \frac{\vartheta}{\vartheta^2 + \vartheta_0^2} \quad (3.2.23)$$

waarbij  $\vartheta_0$  volgt uit (3.2.19).

Buiten de jet, voor  $\vartheta > \vartheta_0$  geldt :

$$f(\cos \vartheta) = 2(1 + \cos \vartheta) \quad (3.2.24)$$

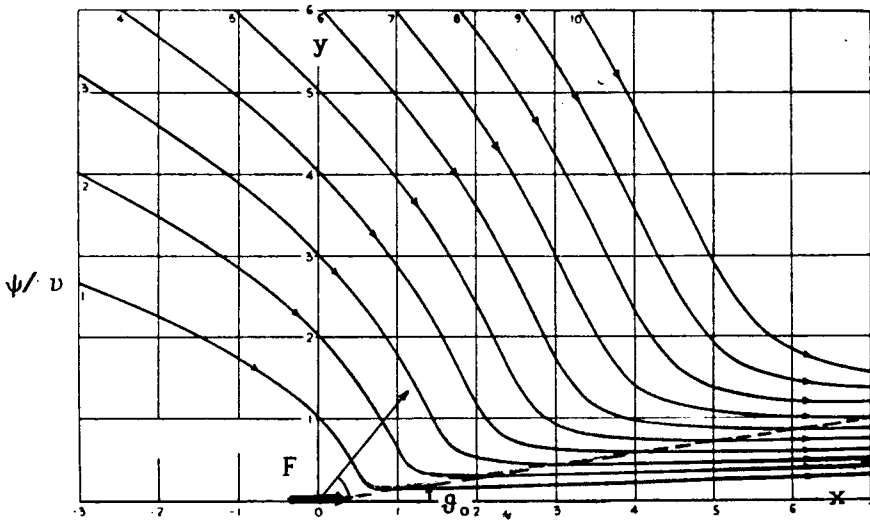
$$\psi(r, \vartheta) = 2\nu r(1 + \cos \vartheta) \quad (3.2.25)$$

$$u_r(r, \vartheta) = \frac{-2\nu}{r} \quad (3.2.26)$$

$$v_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{-2\nu}{r} \cotan \frac{\vartheta}{2} \quad (3.2.27)$$

Dit is de grenslaagbenadering voor het snelheidspatroon van een viskeuze driedimensionale jet, zoals door Schlichting is bepaald [SCL68].

Het stromingsveld voor hoge waarde van  $\frac{F}{\rho v^2}$  is weergegeven in figuur 3.2.4, de waarde is dan 3282 en  $c = 0.01$ .



Figuur 3.2.4 : De oplossing van Landau voor een hoge waarde van  $\frac{F}{\rho v^2}$ .

We kunnen ons afvragen wat de limiet van de oplossing van Landau is voor een wrijvingsloze stroming. De viscositeit komt in het probleem voor in de definitie van de stroomfunctie (3.2.3) en in de dimensioneloze parameter  $\frac{F}{\rho v^2}$ . Indien we nu de limiet voor  $\nu \rightarrow 0$  nemen, blijkt de oplossing te degenereren tot de triviale oplossing  $\underline{u} = 0$  en  $p = 0$  in het hele veld.

Laten we hiervoor eerst eens kijken naar een vaste, hoge waarde van  $\frac{F}{\rho v^2}$ . Deze dimensioneloze waarde geeft de sterkte van de impulsbron in de oorsprong. We nemen deze waarde vast, dus ook de waarde van  $\vartheta_0$  is vast en maken de kinematische viscositeit klein  $\nu = O(\epsilon)$ . Dan moet gelden :  $F = O(\epsilon^2)$ . Nemen we nu de limiet voor  $\epsilon \rightarrow 0$  dan blijven (3.2.19) tot en met (3.2.27) geldig, maar aangezien  $\nu = O(\epsilon)$  volgt uit (3.2.21, 22, 23, en 25, 26, 27) dat de stroomfunctie  $\psi$  en de snelheden  $u_r$  en  $v_\vartheta$  nul worden, dus ook de druk  $p$ , zowel binnen als buiten de jet!

De oplossing van de niet-lineaire theorie voor een puntkracht in een niet-viskeuze stroming is dus voor een vaste waarde van  $\frac{F}{\rho v^2}$  een triviale oplossing, de snelheden en de druk zijn nul. Dit is tevens ook de conclusie van Sparenberg [SPA84 blz.30]].

Indien we echter  $F$  constant houden en de limiet  $\nu \rightarrow 0$  nemen, dan wordt de viskeuze jet voor grote waarde van  $\frac{F}{\rho v^2}$  steeds smaller ( $\vartheta_0 \rightarrow 0$ ). Het oppervlak van de jet gaat ook naar nul. In een oneindig dunne jet kan men echter met een verwaarloosbaar kleine massastroom een eindige impulsstroom hebben.

Er geldt nu weer  $\underline{u} = 0$  behalve in een oneindig dunne jet waar de snelheid oneindig is zodat  $\iint \underline{u} \cdot \underline{n} \, dA = 0$  en  $\iint u(\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA = F$ .

### 3.3 Lineaire theorie

#### 3.3.1 Inleiding

In de lineaire theorie wordt ervan uitgegaan dat de Navier-Stokes vergelijking (3.3.1) op de een of andere manier gelineariseerd kan worden.

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underline{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (3.3.1)$$

Dit kan enerzijds door deze vergelijking te vereenvoudigen tot de Oseen vergelijking (3.3.2) indien de verstoringssnelheden klein zijn ten opzichte van de hoofdstroomsnelheid  $\underline{U}_0$ .

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{U}_0 \cdot \nabla) \underline{v} = \underline{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (3.3.2)$$

Anderzijds kunnen we lineariseren indien de viscositeit een overheersende rol speelt, dan vereenvoudigt (3.3.1) tot de Stokes vergelijking (3.3.3).

$$\underline{f} = \nabla p - \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (3.3.3)$$

De instationaire term is te verwaarlozen tenzij de versnelling van de stroming groter is dan  $\frac{U_0^3}{\nu}$  [BAT67 blz.229]. Met behulp van de linearisaties (3.3.2) en (3.3.3) heeft J.A. Sparenberg in 1974 de stationaire oplossing bepaald van een puntkracht in een viskeuze stroming met een uniforme hoofdstroomsnelheid  $\underline{U}_0$  parallel aan de richting van de kracht [SPA74]. Een gevolg van deze linearisatie is dan, dat het onmogelijk wordt om de limiet voor een wrijvingsloze stroming ( $\nu \rightarrow 0$ ) te bepalen omdat de kleine parameter  $F/\rho\nu^2$ , waarop de linearisatie is gebaseerd, dan groot wordt (3.4).

We kunnen ook lineariseren als de niet-lineaire convectieve term te verwaarlozen is ten opzichte van de instationaire term.

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (3.3.4)$$

Dit is bijvoorbeeld het geval bij een stroming ten gevolge van een impulsstoot. Von Karman en Burgers vinden hiervoor dan een exacte oplossing die beschreven is in 3.3.3. Deze oplossing kan gebruikt worden als Green's functie van een lineair probleem met dezelfde begin en randvoorwaarden. Hiervan maakt Sparenberg gebruik om een lineaire oplossing te vinden voor een continue impulsbron in een wrijvingsloos fluïdum.

### 3.3.2 Puntkracht in een viskeus medium met hoofdstroming.

Sparenberg heeft in 1974 de oplossing bepaald van een puntkracht

$\underline{f} = F \delta(r) \underline{e}_x$  in een oneindig viskeus medium, met een uniforme hoofdstroomsnelheid  $U_0 \underline{e}_x$  voor lage Reynoldsgetallen ( $F/\rho v^2 \ll 1$ ).

De Navier-Stokes vergelijking gaat dan in het hele gebied over in de lineaire Oseen vergelijking (3.3.2).

Nemen we hiervan de rotatie dan volgt :

$$\rho U_0 \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x} = \underline{\nabla} \times \underline{f} + \eta \nabla^2 \underline{\omega} \quad (3.3.5)$$

Met als randvoorwaarden  $\underline{u} = U_0 \underline{e}_x$  en  $\underline{\omega} = \underline{0}$  op oneindig.

Door de definitie van

$$\omega_i = g_i \exp\left(\frac{U_0}{2v} x\right) \quad \text{met } i = x, y, z \quad (3.3.6)$$

vereenvoudigt vergelijking (3.3.5) tot :

$$\nabla^2 \underline{g} - \frac{U_0^2}{4v^2} \underline{g} = -\frac{1}{\rho v} (\underline{\nabla} \times \underline{f}) \exp\left(-\frac{U_0}{2v} x\right) \quad (3.3.7)$$

Omdat de krachtverdeling alleen een x-component heeft geldt :

$$\frac{1}{\rho v} \underline{\nabla} \times \underline{f} = \frac{1}{\rho v} \left( 0, \frac{\partial}{\partial z} F \delta(r), -\frac{\partial}{\partial y} F \delta(r) \right). \quad (3.3.8)$$

Hiermee heeft (3.3.7) als oplossing [SPA74] :

$$\underline{g} = \left( 0, -\frac{\partial h}{\partial z}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (3.3.9)$$

$$\text{met } h = A \frac{\exp(-U_0 r/2v)}{r} \quad (3.3.10)$$

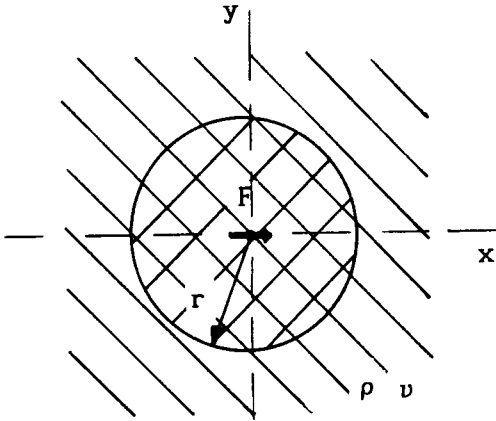
Hierin is A een nader te bepalen constante.



Deze constante kunnen we bepalen door te kijken naar de stroming dichtbij de puntkracht. We kunnen dit, omdat door de hoofdstroming er een extra parameter is geïntroduceerd, waardoor we een lengteschaal kunnen definiëren.

$$\frac{\nu}{U_0} \quad (3.3.11)$$

Met deze lengteschaal wordt het stromingsveld gesplitst in twee gebieden (fig 3.3.1).



**Figuur 3.3.1 : Het ontstaan van een gebied dichtbij de puntkracht door de definitie van de lengteschaal  $\frac{\nu}{U_0}$ .**

In het gebied waar naast  $F/\rho\nu^2 \ll 1$  tevens geldt dat  $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$  overheerst de viscositeit en vereenvoudigt de Navier-Stokes vergelijking tot de stationaire Stokes vergelijking (3.3.3). We kunnen hierdoor het gedrag van de stroming dicht bij de puntkracht bepalen en de constante A vinden. Uit de rotatie van deze vergelijking volgt :

$$\nabla^2 \underline{\omega} = -\frac{1}{\eta} \nabla \times \underline{f} \quad (3.3.12)$$

Met (3.3.12) volgt de oplossing voor de vorticheit  $\underline{\omega}$ .

$$\underline{\omega} = \left( 0, -\frac{\partial h}{\partial z}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (3.3.13)$$

waarbij h een oplossing is van

$$\nabla^2 h = \frac{F}{\rho\nu} \delta(r) \quad (3.3.14)$$

De oplossing van deze poissonvergelijking met randvoorwaarde  $h(r = \infty) = 0$ , wat volgt uit (3.3.10), is :

$$h = - \frac{F}{\rho v} \frac{1}{4\pi r} \quad (3.3.15)$$

De algemene oplossing volgt nu door de twee oplossingen aan elkaar aan te passen. Formeel zou men hier de methode van aangepaste asymptotische expansies kunnen gebruiken [NAY73].

De oplossingen in de beide gebieden (3.3.6, 9, 10 en 13 en 15) zijn eenvoudig aan elkaar te koppelen door te stellen dat

$$A = - \frac{F}{4\pi\rho v} \quad (3.3.16)$$

Hierbij moeten we echter opmerken dat dit alleen een oplossing is voor een viskeuze stroming. Indien de viscositeit naar nul gaat, is de linearisatie niet meer toegestaan. Bij een vaste waarde van  $\rho$  en  $F$  wordt de parameter  $\frac{F}{\rho v^2}$ , waarop de linearisatie is gebaseerd namelijk groot. Indien we de uniforme hoofdstroomsnelheid  $U_0$  naar nul laten gaan, verdwijnt de lengteschaal (3.3.11) uit het probleem. We vinden dan de limiet voor kleine waarden van  $\frac{F}{\rho v^2}$  van de gelijkvormigheidsoplossing van Landau, zoals die beschreven is in 3.3.2.

De theorie van Sparenberg [SPA74] zoals hierboven beschreven is een speciaal geval van een meer algemene theorie voor omstromingen van lichamen van willekeurige vorm voor lage Reynoldswaarden, zoals beschreven is in Batchelor [BAT70].

3.3.3 Puntkracht in een niet-viskeus medium met hoofdstroming.

De stroming ten gevolge van een impulsstoot in een punt.

We beschouwen de oplossing van Von Karman en Burgers [KAR35] van de wrijvingsloze, incompressibele stroming ten gevolge van een krachtveld dat werkt op een vlakke, ronde schijf met straal  $\frac{1}{2}L$  zoals besproken is in § 2.3. De dimensieloze parameter die we vormen uit de oppervlaktekracht-dichtheid  $\hat{F}$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  en  $L$  kunnen vormen is

$$\frac{\hat{F}L^2}{\rho\nu^2} \tag{3.3.17}$$

Voor de wrijvingsloze limiet bekijken we dus de limiet van deze parameter naar oneindig. We zullen nu de wrijvingsloze stroming ten gevolge van een impulsstoot met een 'puntkracht' bepalen door te kijken naar de oplossing van § 2.3 in het verre veld ( $r \gg L$ ).

We nemen aan dat voor de driedimensionaal krachtstoot  $\underline{S}$  geldt :

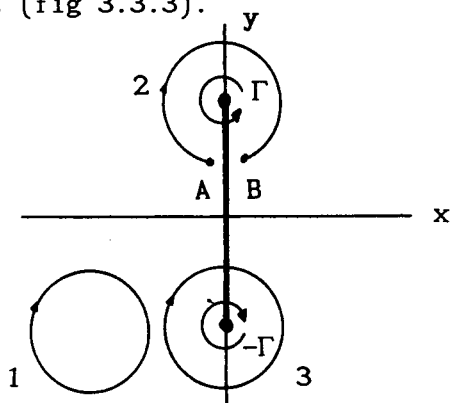
$$\underline{S} \delta(t) = \underline{f} \tag{3.3.18}$$

$$\underline{f} = \hat{F} \delta(z) \underline{e}_x \quad \text{voor } r < \frac{1}{2}L$$

$$= \underline{0} \quad \text{elders}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}L} \int_{-\infty}^{\infty} f_x 2\pi r dr dx = F$$

In hoofdstuk 2 hebben we gezien dat er ten gevolge van de stoot een werveling ontstaat (fig 3.3.3).



**Figuur 3.3.2 : Het ontstaan van een werveling na een impulsstoot volgens (3.3.18) met een definitie van integratiekrommen.**

We bepalen nu door integratie langs de krommen 1 tot en met 3 in figuur 3.3.2 het potentiaalverschil  $\varphi_A - \varphi_B$ .

$$\int_A^B \underline{v} \cdot d\underline{s} = \varphi_A - \varphi_B \quad (3.3.19)$$

Kromme 1 is gesloten en bevat geen singulariteiten en (3.3.19) geeft dus een waarde nul, kromme 2 is open en geeft  $\varphi_A - \varphi_B = \Delta\varphi$  en kromme 3 is gesloten maar omsluit de wervelijijn en geeft dus de waarde  $\Gamma$ .

Dit betekent dus dat tussen A en B een sprong in de potentiaal optreedt van grootte  $\Delta\varphi = \Gamma$ . Dit geldt voor elk punt van het vlak dat omsloten is door de werveling. Een potentiaalsprong op een oppervlak kan men ook verwezelijken door een dipoolbelegging. De stroming ten gevolge van de werveling is daarom identiek aan de stroming ten gevolge van een dipoolbelegging op een oppervlak omsloten door de werveling [PRA34].

Voor de bepaling van de stroming op grote afstand ( $r \gg L$ ) is de dipoolbelegging te benaderen met een dipool in de oorsprong, en het krachtveld is bij benadering een punctkracht. Van een dipool in de oorsprong kennen we echter de druk, snelheid en potentiaal. De door de stoot gegenereerde dipoolstroming zal onbeperkt blijven bestaan, omdat de stroming wrijvingsloos is.

Deze oplossingen voor de druk, snelheid en potentiaal van de stoot aan een punctkracht zijn echter geen uniform geldige fysische oplossingen, maar verre veld benaderingen of de Greense functies van een lineair probleem met dezelfde begin- en randvoorwaarden. Er ontstaat een fysische oplossing wanneer de Greense functie wordt geïntegreerd over een eindig gebied waarin een krachtdichtheid  $\underline{f}$  werkt. Voor een willekeurige krachtverdeling  $\underline{f}$  geldt :

$$p(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\underline{f} \cdot \underline{R}}{R^3} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.3.20)$$

$$\underline{v}(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_{t_0}^{t_e} \left[ \iiint \left[ \frac{\underline{f}}{R^3} - \frac{3\underline{R} \cdot (\underline{f} \cdot \underline{R})}{R^5} \right] d\xi d\eta d\zeta \right] d\tau \quad (3.3.21)$$

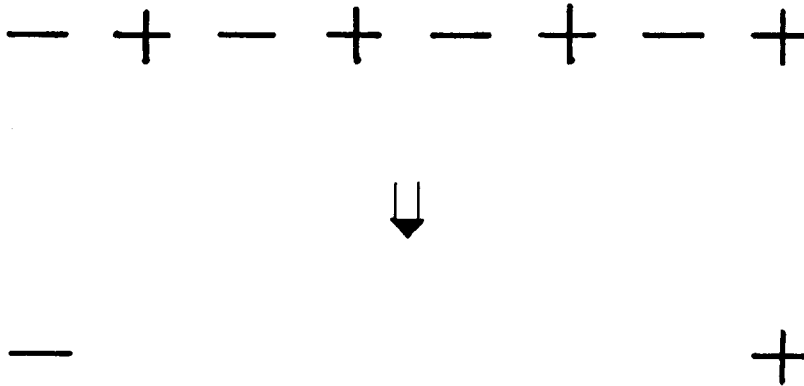
$$\varphi(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_{t_0}^{t_e} \left[ \iiint \frac{\underline{f} \cdot \underline{R}}{R^3} d\xi d\eta d\zeta \right] d\tau \quad (3.3.22)$$

met  $\underline{R} = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$

We hebben hier een intuïtieve afleiding gegeven. Von Karman en Burgers leiden deze vergelijkingen op een formele wijze af door uit te gaan van de gelineariseerde Navier-Stokes vergelijking in de vorm (3.3.4).

De stroming ten gevolge van een continue impulsbron.

Om de gelineariseerde benadering voor de stroming ten gevolge van een continue impulsbron te bepalen in een niet-viskeuze vloeistof is door Sparenberg eerst de stroming berekend ten gevolge van een impulsbron die gedurende een eindige tijd  $\Delta t$  ( $= t_e - t_o$ ) werkt in een stromingsveld met uniforme hoofdstroomsnelheid  $U_o$  in de  $x$ -richting. De impulsbron beschouwt hij als een opeenvolging van impulsstoten, waardoor er een rij dipolen ontstaat. De dipolen tussen begin- en eindpunt heffen elkaar op, zodat er een put met sterkte  $\frac{F}{\rho U_o}$  op  $\underline{x} = (U_o t_o, 0, 0)$  en een even sterke bron op  $\underline{x} = (U_o t_e, 0, 0)$  de stroming bepalen, zoals te zien is in figuur 3.3.3.



**Figuur 3.3.3 : De oplossing van een impulsbron die gedurende  $\Delta t$  werkt op een niet-viskeuze vloeistof volgens J.A. Sparenberg.**

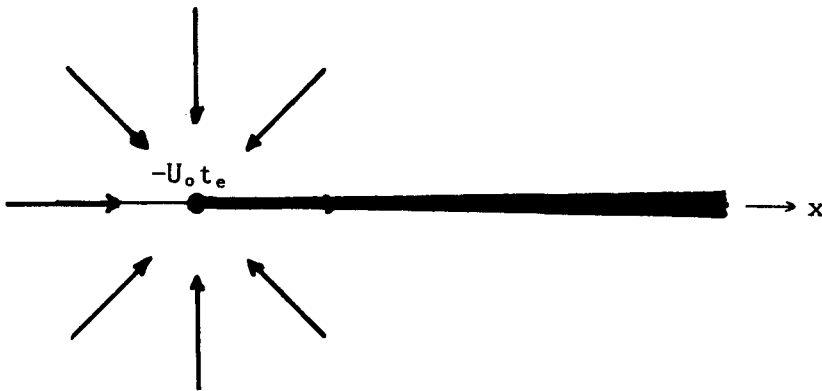
Deze oplossing voldoet echter niet zonder meer aan massabehoud. Om aan de continuïteitseis te voldoen veronderstelt Sparenberg tussen de put en de bron een oneindig dunne jet, met een eindig volumetransport  $\frac{F}{\rho U_o}$ . Er geldt dus :

$$\lim_{A \rightarrow 0} \rho V A = \frac{F}{\rho U_o} \quad (3.3.23)$$

Een gevolg hiervan is dat dan het impulstransport in de jet oneindig is !

$$\lim_{A \rightarrow 0} \rho V^2 A = \frac{1}{\rho} \left( \frac{F}{\rho U_o} \right)^2 \lim_{A \rightarrow 0} 1/A = \infty \quad (3.3.24)$$

Als we nu rond de bron een controlevolume met een straal kleiner dan  $U_0 \Delta t$  nemen, dan wordt in dit volume wel aan massabehoud, maar niet aan impulsbehoud voldaan ! Er is immers een oneindige impulstransport in de jet ten gevolge van een eindige impulstoevoer door de puntkracht  $F$ . Door het tijdstip waarop de impulsbron is aangezet naar min oneindig te verplaatsen ontstaat de oplossing van Sparenberg voor een continue kracht. Dit is een put ter plekke van de kracht, met een oneindig dunne jet erachter met massatransport  $\frac{F}{\rho U_0}$  (zie figuur 3.3.4)



Figuur 3.3.4 : De oplossing van Sparenberg voor een puntkracht in een niet-viskeuze stroming met een hoofdstroming  $U_0$ .

De oplossing die Sparenberg voor de snelheid, druk en potentiaal berekent [SPA84] voldoet niet aan impulsbehoud.

De oorzaak hiervan ligt in het gebruik van de gelineariseerde vergelijking (3.3.4) door Von Karman en Burgers voor een niet-viskeuze stroming. Deze vergelijking is afgeleid voor een oneindig korte impulstoevoer ten gevolge van een stoot  $\underline{S} \delta(t) = \underline{f}$ .

Alleen dan is de convectieve, niet-lineaire term te verwaarlozen ten opzichte van de instationaire versnellings- en de drukterm. In een reeks impulsstoten zullen de achter elkaar geïnduceerde dipolen elkaar immers beïnvloeden.

De conclusie moet dan ook zijn : werkt er een eindige puntkracht gedurende een eindige tijd in een wrijvingsloos fluïdum, dan is het een **essentieel niet-lineair probleem**. Dit kunnen we nog verduidelijken met behulp van een dimensieanalyse in de volgende paragraaf.

### 3.4 Nadere beschouwingen met behulp van een dimensieanalyse

#### 3.4.1 Puntkracht in drie dimensies.

In dit hoofdstuk zijn we geïnteresseerd in de stroming ten gevolge van een puntkracht in een incompressibel, onbegrensd fluïdum.

We bekijken eerst een puntkracht in een fluïdum zonder hoofdstroming. De parameters in dit probleem zijn de totale kracht  $F$  [ $\text{kgm/s}^2$ ], de dichtheid  $\rho$  [ $\text{kg/m}^3$ ] en de kinematische viscositeit  $\nu$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].

Er is met deze parameters een dimensieloos kental te definiëren, namelijk  $\frac{F}{\rho\nu^2}$ , maar geen lengteschaal.

Hierdoor is het mogelijk een gelijkvormigheidsoplossing te bepalen zoals door Landau is beschreven (3.2). De parameter  $\frac{F}{\rho\nu^2}$  geeft de sterkte van de puntkracht weer. Indien de dimensieloze parameter klein is mogen we de Navier-Stokes vergelijking in het hele veld lineariseren tot de Stokes vergelijking. Indien de parameter groot is, dan is de viscositeit klein en volgt de grenslaagbenadering van Schlichting [SCL68] voor de driedimensionale viskeuze jet. Deze benadering gaat uit van een smalle jet waarin de stroming quasi-parallel is en de druk uniform is.

Er is een wrijvingsloze limiet te bepalen door de limiet voor  $\frac{F}{\rho\nu^2}$  naar oneindig te bepalen.

Aan de gelijkvormigheidsoplossing van Landau hebben we gezien, dat voor de limietwaarden van  $\frac{F}{\rho\nu^2}$  inderdaad de voorspelde stromingen bestaan, en dat de wrijvingsloze limiet voor een vaste waarde van  $F$  een triviale stroming geeft ( $\underline{u} = 0$ ,  $p = 0$ ) met een oneindig dunne jet, waar de snelheid oneindig is.

Indien er verder een uniforme hoofdstroming  $U_0$  [ $\text{m/s}$ ] bestaat, dan is er een extra parameter ter beschikking en kunnen we naast het dimensieloze kental  $\frac{F}{\rho\nu^2}$  ook een lengteschaal  $\frac{\nu}{U_0}$  introduceren. Er bestaat nu geen gelijkvormigheidsoplossing meer, maar we kunnen nog steeds lineariseren met het kental  $\frac{F}{\rho\nu^2}$ .

$$\frac{F}{\rho v^2} \ll 1$$

We lineariseren voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$  tot de Stokes vergelijking, omdat in dit gebied de viskeuze term groter is dan de convectieve term.

In het gebied  $\frac{U_0 r}{\nu} \gg 1$  lineariseren we tot de Oseen vergelijking, omdat hier de convectieterm ten gevolge van de geïnduceerde snelheid door de punctkracht te verwaarlozen is ten opzichte van de convectieterm van de uniforme hoofdstroming. Door een koppeling van de oplossingen in beide gebieden vinden we een benaderende oplossing van de wrijvingsgedomineerde stroming ten gevolge van een punctkracht § 3.3.2 .

$$\frac{F}{\rho v^2} \gg 1$$

We mogen niet meer lineariseren in het hele gebied, voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$  is de convectieterm ten gevolge van de hoofdstroming te verwaarlozen, zodat de oplossing zonder uniforme hoofdstroming geldig is, dus de grenslaagbenadering van een drie dimensionale jet.

Voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \gg 1$  geldt ook de grenslaagbenadering, maar daar mag de uniforme hoofdstroming niet meer verwaarloosd worden. We vinden dan een jet- of zogstroming afhankelijk van de richting van de kracht ten opzichte van de hoofdstroming  $U_0$ .

De niet-viskeuze limiet wordt bepaald door het kental  $\frac{F}{\rho v^2}$  oneindig groot te nemen, zodat weer de triviale oplossing ontstaat. ( $\underline{u} = U_0 \underline{e}_x$  en  $p = p_0$ ) Bij een gegeven vaste waarde van  $F$  is er weer een eindig impulstransport in een oneindig dunne jet. In deze jet is de snelheid weer oneindig, maar er is geen massastroom. Omdat het kental  $\frac{F}{\rho v^2}$  niet meer klein is kunnen we bij een wrijvingsloze theorie niet lineariseren.



### 3.4.2 Puntkracht in twee dimensies

Het is interessant om dezelfde dimensieanalyse toe te passen op een ander probleem, namelijk de puntkracht in twee dimensies.

Een puntkracht in twee dimensies is een lijnkracht in drie dimensies, met een kracht per lengteëenheid  $\tilde{F}$  [kg/s<sup>2</sup>]. Samen met de andere parameters  $\rho$  en  $\nu$  is er nu geen dimensieloos kental te definiëren, maar wel een lengteschaal :

$$\ell = \frac{\rho \nu^2}{\tilde{F}} \quad (3.4.1)$$

We mogen nu niet lineariseren of de viscositeit verwaarlozen in het hele veld, omdat er geen kleine parameter bestaat.

In het 'nabije' veld ( $r/\ell \ll 1$ ) overheerst de viscositeit en in het 'verre' veld ( $r/\ell \gg 1$ ) geldt de grenslaagbenadering van een tweedimensionale viskeuze jet, zoals deze beschreven is door Schlichting [SCL68]. Een wrijvingsloze benadering is niet mogelijk.

Is er wel een hoofdstroming aanwezig, dan is er met de extra parameter  $U_0$  wel een dimensieloos kental te definiëren :

$$\frac{\tilde{F}}{\rho \nu U_0} \quad (3.4.2)$$

Naast de lengteschaal  $\frac{\rho \nu^2}{\tilde{F}}$  is er nu ook de lengteschaal  $\frac{\nu}{U_0}$ .

$$\frac{\tilde{F}}{\rho \nu U_0} \ll 1$$

We mogen de Navier-Stokes vergelijking lineariseren, voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$  tot de Stokes vergelijking, en voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \gg 1$  tot de Oseen vergelijking.

$$\frac{\tilde{F}}{\rho \nu U_0} \gg 1$$

We mogen niet lineariseren in het hele veld maar voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$  is de viscositeit weer belangrijk. Dit leidt tot een lineaire vergelijking omdat in een tweedimensionale stroming de geïnduceerde snelheid van een lagere orde is dan  $(1/r)$  zodat  $\frac{u}{\nu} \ll 1$  voor  $r \rightarrow 0$ . Zou dit niet zijn, dan zou de snelheid een putstroming in twee dimensies beschrijven. Voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \gg 1$  geldt de grenslaagbenadering tweedimensionale viskeuze jet of zog volgens Schlichting [SCL68].

De niet-viskeuze oplossing bestaat nu wel, omdat we het kental  $\frac{\tilde{F}}{\rho \nu U_0}$  naar oneindig kunnen laten gaan en hoeft niet triviaal te zijn.

Een voorbeeld van een niet triviale tweedimensionale niet-viskeuze stroming ten gevolge van een punctkracht in het tweedimensionale vlak is bekend, namelijk de stroming ten gevolge van een kracht normaal op een uniforme hoofdstroming  $U_0$ . De exacte oplossing is de stroming ten gevolge van een discrete wervel met circulatie

$$\Gamma = \frac{\hat{F}}{\rho U_0} \tag{3.4.3}$$

op de plaats van de punctkracht.

Er bestaat echter geen lineaire benadering voor de stroming ten gevolge van een lijnkracht in een wrijvingsloze stroming. We hebben dan immers de dimensieloze parameter  $\tilde{F}/\rho \nu U_0$  groot genomen en hebben geen kleine parameter meer op grond waarvan we convectieve effecten kunnen verwaarlozen.

## Hoofdstuk 4 De half-oneindige strip.

### 4.1 Inleiding

Nu we meer over de stroming ten gevolge van een puntkracht en een lijnkracht in drie dimensies weten kunnen we nauwkeuriger naar het gedrag van de stroming aan de rand van een strip gaan kijken. Indien we dichtbij de rand van de actuator strip kijken, dan lijkt de andere rand oneindig ver weg. Vandaar vereenvoudigen we de eindige strip door een half-oneindige strip (4.1.1).

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \hat{F} \delta(x) \underline{e}_x && \text{voor } y < 0 \\ \underline{f} &= \underline{0} && \text{elders} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

In hoofdstuk 3 hebben we gezien, dat een dimensieanalyse van een probleem al veel duidelijk maakt over mogelijke linearisaties, en het bestaan van een wrijvingsloze oplossing. Vandaar dat we in 4.2 eerst beginnen met zo'n dimensieanalyse over de half-oneindige strip.

Hierna bekijken we welke oplossingen er in de literatuur voor dit probleem zijn aangedragen.

Als de half-oneindige actuator strip 'gestart' wordt vanaf  $t = 0$ , dan ontstaat er een instationaire oplossing. Indien we geen hoofdstroming veronderstellen is er een oplossing bepaald door van Helden [HEL88] voor een fluïdum met viscositeit, en door van Kuik [KUI89] zonder viscositeit (4.3). Deze oplossing convergeert echter niet naar een stationaire oplossing.

In het geval van een wrijvingsloze stroming kunnen we complexe potentiaaltheorie gebruiken om de stationaire stroming te beschrijven. Een spiraliserend wervelvlak bij de rand van de half-oneindige strip is met behulp van deze methode als stationaire oplossing bepaald door Schmidt en Sparenberg (4.4) [SPA84,SCM77]. Deze oplossing wordt ook gevonden door Schouten [SCO83] door de transformatie van de stroming rond een half-oneindige vlakke plaat. Door de transformatie van een eindige vlakke plaat indien de lengte ervan naar oneindig gaat [KUI89] is aan te tonen, dat de oplossing van Sparenberg een triviale oplossing is.

Het alternatieve gedrag aan de rand van een half-oneindige strip in een niet-viskeuze stroming aangedragen door Greenberg [GRE72,LEE84] dat reeds beschreven is in § 2.5.3 wordt nader besproken in (4.5).

## 4.2 Dimensieanalyse

We zijn geïnteresseerd in de stroming ten gevolge van een half-oneindige actuator strip met oppervlaktekrachtdichtheid  $\hat{F}$ . Indien we geen hoofdstroming veronderstellen zijn de parameters : de oppervlaktekrachtdichtheid  $\hat{F}$  [kg/ms<sup>2</sup>], de dichtheid  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] en de kinematische viscositeit  $\nu$  [m<sup>2</sup>/s]. We kunnen met deze parameters geen dimensieloos kental definiëren, maar er bestaat wel een lengteschaal namelijk :

$$\ell = \sqrt{\frac{\rho \nu^2}{2\hat{F}}} \quad (4.2.1)$$

We mogen dus niet lineariseren of de wrijving verwaarlozen in het hele veld. De lengteschaal geeft echter wel de mogelijkheid een verre veld benadering te bepalen voor  $\frac{r}{\ell} \gg 1$  en een benadering voor  $\frac{r}{\ell} \ll 1$ , het nabije veld. In dit nabije veld is de viscositeit niet te verwaarlozen. In het verre veld is het mogelijk dat wrijving verwaarloosbaar is of dat er een grenslaagachtige benadering geldt.

Is er bovendien een hoofdstroming  $U_0$  in het probleem, dan bestaat er door deze extra parameter wel een dimensieloos kental, namelijk :

$$\frac{\hat{F}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} \quad (4.2.2)$$

Deze parameter geeft de verhouding van de druksprong over de strip en de dynamische druk.

Naast de lengteschaal  $\sqrt{\frac{\rho \nu^2}{2\hat{F}}}$  is er nu een tweede lengteschaal :

$$k = \frac{\nu}{U_0} \quad (4.2.3)$$

De dimensieloze parameter  $\hat{F}/\frac{1}{2}\rho U_0^2$  geeft de verhouding tussen  $k$  en  $\ell$ .

We kunnen weer de volgende mogelijkheden onderscheiden :

$$\hat{F}/\frac{1}{2}\rho U_0^2 \ll 1$$

We mogen dan weer lineariseren in het hele vlak.

Voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$  geldt dan de Stokes vergelijking, terwijl voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \gg 1$  de Oseen benadering geldt.

$$\hat{F}/\frac{1}{2}\rho U_0^2 \gg 1$$

We mogen we niet meer lineariseren in het hele vlak, maar mogen we wel stellen dat voor  $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$  de viscositeit van belang is, terwijl  $\frac{U_0 r}{\nu} \gg 1$  een verre veld oplossing bestaat, waarvoor de viscositeit te verwaarlozen is of waarvoor een grenslaagbenadering geldt.

Alhoewel we een dimensieloos kental (4.2.2) hebben, kunnen we toch geen uniform geldige wrijvingsloze limiet definiëren, omdat het kental onafhankelijk is van de viscositeit. Dichtbij de rand van de half-oneindige strip is viscositeit altijd belangrijk.

Zou men echter veronderstellen dat in een viskeus fluïdum met hoofdstroming de half-oneindige actuator strip een eindige dikte  $d$  heeft, dan kan men twee dimensieloze getallen definiëren :

$$Re_1 = \frac{d}{\ell} \tag{4.2.4}$$

$$Re_2 = \frac{d}{k} \tag{4.2.5}$$

De verhouding tussen deze getallen is weer de dimensieloze parameter  $\hat{F}/\frac{1}{2}\rho U_0^2$  (4.2.2).  $Re_1$  geeft de verhouding tussen de convectieve term  $(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$  ten gevolge van de geïnduceerde snelheid  $\underline{u}$  en de viskeuze term  $\nu \nabla^2 \underline{u}$ .  $Re_2$  geeft de verhouding tussen de convectieve term  $(\underline{U}_0 \cdot \nabla) \underline{u}$  ten gevolge van de hoofdstroming  $\underline{U}_0$  en de viskeuze term  $\nu \nabla^2 \underline{u}$ . Indien de dimensieloze parameter (4.2.2) klein is, dan is  $Re_1 \ll Re_2$  en is linearisatie tot de Oseenvergelijking toegestaan. Geldt er bovendien dat  $Re_2 \ll 1$ , dan zijn

beide convectieve termen te verwaarlozen en is linearisatie tot de Stokes vergelijking toegestaan. Als de parameter  $\hat{F}/\frac{1}{2}\rho U_0^2$  groot is, dan is  $Re_1 \gg Re_2$  en mag de niet-lineaire convectieterm niet verwaarloosd worden.

De wrijving mag verwaarloosd worden als zowel  $Re_1$  als  $Re_2 \gg 1$  zijn. In de verre veld benadering ( $\frac{r}{d} \gg 1$ ) lijkt de strip op een oneindig dunne strip, maar de oplossing ligt dan alleen maar vast, indien de aard van de singulariteit bepaald is. Een extra veronderstelling over de aard van de singulariteit is daarom nodig.

### 4.3 Instationaire stroming ten gevolge van een half-oneindige actuator strip [HEL88].

Een analytische oplossing voor de stroming ten gevolge van een halfoneindige actuator strip is gevonden door van Helden [HEL88].

We gaan uit van een stilstaand medium ( $\underline{u} = \underline{0}$ ) als beginsituatie ( $t < 0$ ). Vanaf  $t = 0$  starten we de half oneindige strip.

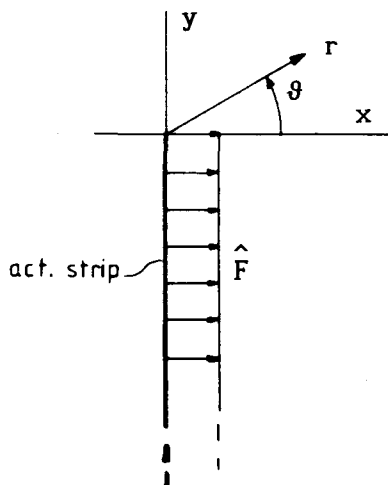
In een viskeuze stroming diffundeert de vorticititeit, die aan de rand van de strip wordt geproduceerd. We kijken eerst hoe de stroming zich ontwikkelt indien er een krachtstoot  $\underline{S}$  wordt uitgeoefend met een half-oneindige actuator strip (4.3.1).

$$\underline{S} \delta(t) = \underline{f} \quad (4.3.1)$$

$$\underline{f} = \hat{F} \delta(x) \underline{e}_x \text{ voor } y < 0$$

$$\underline{f} = \underline{0} \quad \text{elders}$$

Deze krachtverdeling is weergegeven in figuur 4.3.1.



**Figuur 4.3.1 : De krachtverdeling op een half-oneindige actuator strip.**

Beschouwen een fluïdum zonder hoofdstroming. Dan is de niet-lineaire term  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega}$  op  $t = 0$  nul vanwege cirkelsymmetrie en vereenvoudigt de werveldiffusievergelijking tot (4.3.2).

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla \times \underline{f} + \nu \nabla^2 \underline{\omega} \quad (4.3.2)$$

Omdat de vorticititeit wordt geproduceerd in een punt en er diffusie is in alle richtingen blijft de oplossing cirkelsymmetrisch, en de term  $(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega}$  blijft nul in de tijd. Er bestaat hiervoor een exacte oplossing namelijk

$$\omega_z = \frac{\hat{F}}{\rho v t} \exp(-r^2/4vt) \tag{4.3.3}$$

In het geval dat de kracht een eindige tijd werkt geldt :

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \hat{F} \delta(x) H(t) \underline{e}_x && \text{voor } y < 0 \\ \underline{f} &= \underline{0} && \text{elders} \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Hierin is  $H(t)$  de functie die 1 is voor  $t > 0$ , en 0 elders.

Ook in dit geval bestaat er exacte oplossing van de werveldiffusievergelijking (4.3.2). De stroming blijft cirkelsymmetrisch en de convectieve term  $(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega}$  blijft nul. De werveldiffusievergelijking is dan lineair en we kunnen de oplossing voor een continue kracht eenvoudig opbouwen uit de superpositie van de oplossing voor een reeks stoten. De instationaire oplossing is dan :

$$\begin{aligned} \omega_z &= \int_0^t \frac{\hat{F}}{\rho v (t-\tau)} \exp[-r^2/4v(t-\tau)] d\tau \\ &= \frac{\hat{F}}{\rho v} E_1(r^2/4vt) \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

waarin  $E_1$  de exponentiële integraal is, die getabelleerd is in [ABR65 blz.228]. De door van Kuik [KUI89] voorgestelde wrijvingsloze oplossing is een verre veld benadering van de exacte oplossing waarbij de werveling in een punt blijft geconcentreerd.

#### 4.4 Stationaire stroming ten gevolge van een half-oneindige strip.

##### De stelling van Sparenberg.

Schmidt en Sparenberg bepalen de niet-viskeuze stroming ten gevolge van een half-oneindige strip met behulp van de complexe potentiaaltheorie [SCM77]. Hiervoor gebruiken zij een stelling van Sparenberg [SPA84].

Deze luidt : 'twee krachtvelden die een vectorveld verschillen dat een gradiënt is van een scalaire functie  $\Psi$  induceren identieke stromingsvelden met een drukverschil  $\Psi$ '.

Bekijken hiervoor twee krachtvelden  $\underline{f}_1$  en  $\underline{f}_2$  waarvoor geldt :

$$\underline{f}_1 - \underline{f}_2 = \underline{\nabla}\Psi \quad (4.4.1)$$

Uit de Navier-Stokes vergelijking volgt voor de stromingsvelden :

$$\rho \frac{D\underline{v}_i}{Dt} = \underline{f}_i - \underline{\nabla}p_i + \eta \nabla^2 \underline{v}_i \quad i = 1,2 \quad (4.4.2)$$

Indien de geïnduceerde stromingsvelden gelijk zijn dan moet gelden :

$\underline{v}_1 = \underline{v}_2$ . Dan volgt uit (4.4.2) :

$$\underline{f}_2 - \underline{f}_1 = \underline{\nabla}(p_2 - p_1) \quad (4.4.3)$$

Hieraan wordt voldaan indien geldt :

$$p_2 = p_1 - \Psi \quad (4.4.4)$$

Volgens Sparenberg is deze stelling alleen geldig indien er geen uniforme aanstroming is. We vragen ons echter af of de stelling niet algemeen geldig is voor krachtvelden waarvoor (4.4.1) geldt met uniforme aanstroming. Door de rotatie van (4.4.2) te bepalen vinden we voor elk krachtveld het volgende stelsel vergelijkingen :

$$\underline{\omega}_i = \underline{\nabla} \times \underline{v}_i \quad (4.4.5)$$

$$\rho \frac{D\underline{\omega}_i}{Dt} = \underline{\nabla} \times \underline{f}_i + \eta \nabla^2 \underline{\omega}_i \quad i = 1,2$$



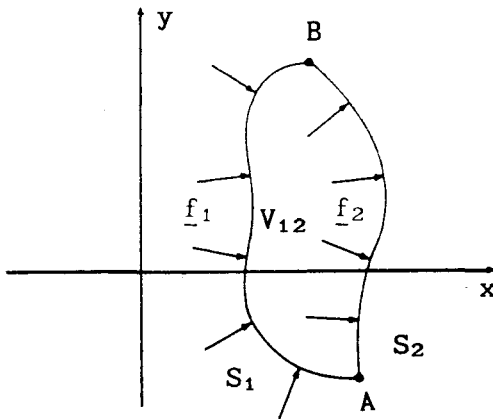
met dezelfde begin- en randvoorwaarden en dezelfde bronterm omdat geldt

$$\nabla \times \underline{f}_1 = \nabla \times \underline{f}_2 \quad (4.4.6)$$

De twee stelsels vergelijkingen met dezelfde begin- en randvoorwaarden geven een identiek stromingsveld  $\underline{v}$ .

#### Toepassing van de stelling op een actuator cylinder.

We gaan de stelling van Sparenberg gebruiken bij de berekening van Madsen aan een actuator cylinder. Bekijk hiervoor twee uniforme krachtvelden  $\underline{f}_1$  en  $\underline{f}_2$  die beide normaal gericht zijn op vlakken  $S_1$  en  $S_2$  en waarvoor geldt :  $|\underline{f}_1| = |\underline{f}_2|$  (fig.4.4.1).



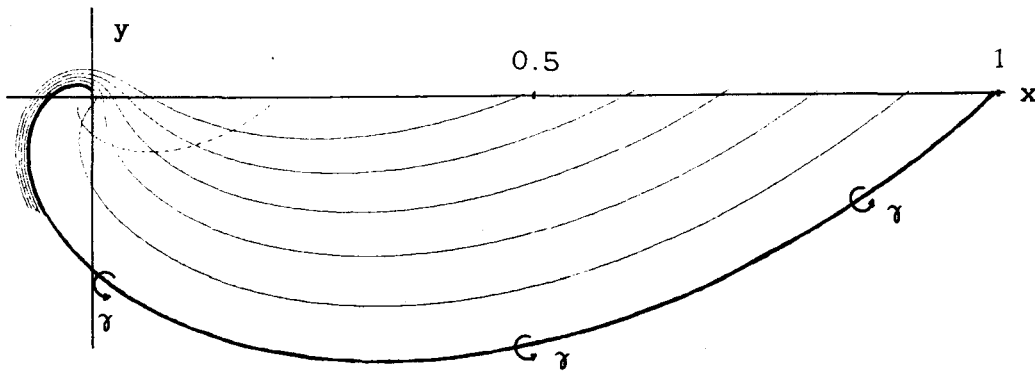
**Figuur 4.4.1 : Twee krachtvelden met dezelfde randpunten.**

Deze krachtvelden induceren een identiek stromingsveld, en er geldt dat  $p_1 - p_2 = |\underline{f}_1|$  in het gebied tussen de twee krachtvelden in  $V_{12}$  en nul erbuiten. Dit betekent, dat de actuator cylinder(fig. 2.5.17) hetzelfde stromingsveld induceert als de eindige actuator strip met dezelfde hoekpunten.

Sparenberg veronderstelt, dat de singulariteiten op de randpunten van de krachtvelden onafhankelijk zijn van de richting van de krachtverdelingen bij de randen. De conclusie die hierna volgt is, dat de stroming in de buurt van de rand van de strip onafhankelijk is van de richting van de strip. Een formeel bewijs voor deze bewering wordt echter niet gegeven.

Het gedrag van de randsingulariteit van een half-oneindige actuator strip.

Indien we veronderstellen, dat de singuliere punten aan de rand van het krachtveld richtings-onafhankelijk zijn, dan moeten we concluderen dat het gedrag aan de rand van de strip richtings-onafhankelijk is. Indien er geen hoofdstroming is, dan is er geen voorkeursrichting voor de stroming ten gevolge van de half-oneindige strip. Vandaar hebben Schmidt en Sparenberg een spiraliserend gedrag van het wervelvlak bij de rand verondersteld. Met behulp van conforme afbeeldingen vinden zij een stroming ten gevolge van een half-oneindige strip zoals is weergegeven in figuur 4.4.2



**Figuur 4.4.2 : Het stroomlijnen patroon aan de rand van een half oneindige actuator strip volgens Schmidt en Sparenberg.**

De wervelsterkte op het spiraliserende wervelvlak heeft een constante waarde :

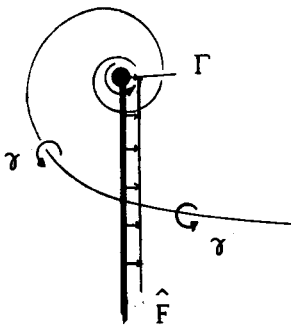
$$\gamma = \sqrt{\frac{2F}{\rho}} \sqrt{\frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}} \quad (4.4.7)$$

Volgens Schmidt en Sparenberg bestaat er dus een stationaire oplossing, terwijl volgens van Helden de oplossing instationair blijft. Bij de bepaling van de instationaire oplossing gaat van Helden ervan uit dat er op  $t = 0$  een stilstaand medium is. De stelling van Sparenberg die Schmidt en Sparenberg gebruiken is volgens Sparenberg alleen geldig indien het actuator vlak op  $t = 0$  aangezet wordt in een stilstaand medium. De oplossingen lijken in strijd met elkaar te zijn.

Indien de oplossing van Schmidt en Sparenberg voldoet aan alle randvoorwaarden, dan zou deze kunnen zijn ontstaan als gevolg van een andere beginvoorwaarde. Het is bijvoorbeeld niet ondenkbaar dat de stationaire oplossing kan ontstaan indien we als beginvoorwaarde uitgaan van een medium met hoofdstroming  $U_0$ , zodat er een wervelvlak achter de strip aanwezig is, en hierna plotseling de hoofdstroming  $U_0$  nul wordt gesteld. Dan zou het oneindig lange wervelvlak zich kunnen oprollen in de oorsprong, en de oplossing van figuur 4.4.2 ontstaan. Het is echter de vraag of dit dan ook een stationaire oplossing is.

Schouten [SC083] vindt de oplossing van Schmidt en Sparenberg ook door de transformatie van de omstroming van een half-oneindige vlakke plaat. Van Kuik [KUI89] concludeert uit de transformatie van de omstroming van een eindige vlakke plaat, na een limiet voor de lengte van de plaat naar oneindig te hebben genomen, dat de oplossing van Schmidt en Sparenberg een triviale oplossing is ( $\underline{u} = 0$ ).

Volgens van Kuik is te bewijzen, dat met potentiaaltheorie geen oplossing te vinden is voor de stroming ten gevolge van een half-oneindige actuator strip in een fluïdum met hoofdstroming [KUI89]. Het is volgens hem te bewijzen, dat de correcte oplossing voor de stroming nabij de rand van de strip een discrete wervel is, waar een spiraliserend wervelvlak vanaf gaat [KUI89]. Deze heeft een naar de rand toe afnemende wervelsterkte, maar met een constante waarde van  $(V_s \gamma)$  (fig 4.4.3).



**Figuur 4.4.3 : Het gedrag aan de rand van een half-oneindige strip volgens van Kuik.**

4.5 De randsingulariteit bij de half-oneindige strip volgens Greenberg.

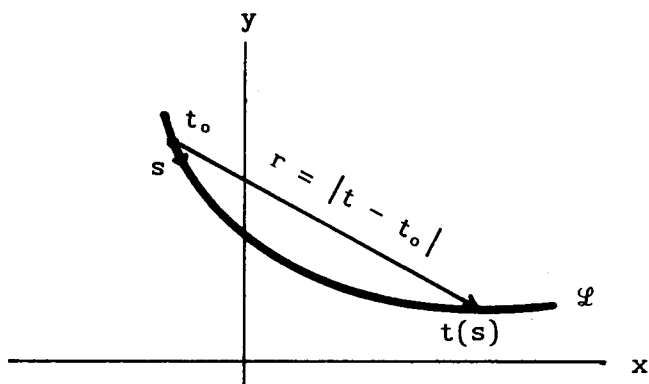
We beschouwen een half-oneindige actuator strip in een fluïdum met hoofdstroming. Aan de rand van een actuator strip wordt een wervelvlak  $\mathcal{L}$  afgeschud. In het complexe  $z$ -vlak is de plaats van het wervelvlak gegeven door  $z = t(s)$ , waarbij  $s$  de lopende coördinaat langs het vlak  $\mathcal{L}$  is (zie fig.4.6.1). De wervelsterkte op het wervelvlak is  $\gamma(s)$ .

De complexe potentiaal van de zelf-geïnduceerde stroming in een punt  $z = t_0$  van het vlak  $\mathcal{L}$  is als volgt te bepalen :

$$W(t_0) = \int_{\mathcal{L}} \frac{-i}{2\pi} \ln[t(s) - t_0] \gamma(s) ds \quad (4.6.1)$$

Hierin is  $t(s) - t_0$  de afstand  $r$  van het punt  $z = t_0$  tot een punt  $t(s)$  van het wervelvlak (zie fig.4.6.1).

De integratie loopt langs het wervelvlak.



**Figuur 4.6.1 : Bepaling van de zelfgeïnduceerde snelheid op een punt  $t_0$  in een wervelvlak.**

Voor de normaalsnelheid in dit punt geldt dan :

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) d\ln(r) \quad (4.6.2)$$

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} ds \quad (4.6.3)$$

Deze moet nul zijn, omdat het wervelvlak in het probleem tevens een vrije stroomlijn is.

Van Kuik [KUI89] heeft bewezen (zie appendix C), dat hieruit direct volgt dat  $\gamma(s) = 1/\sqrt{s}$  als aangenomen wordt dat  $\frac{dr}{ds} = 1$  bij de voorrand van het wervelvlak.

Hieruit concludeert Greenberg dat bij de rand van een actuator strip de wervelsterkte  $\gamma$  een wortelsingulier gedrag moet vertonen ( $\gamma(s) = 1/\sqrt{s}$ ). Er is echter geen enkele reden aan te nemen, dat  $\frac{dr}{ds} = 1$ , voor een spiraliserend vlak geldt dit immers niet. De wortelsingulariteit, die Greenberg voorspelt [GRE72,LEE84] wordt dus niet automatisch opgelegd door de Greense functie van het probleem, maar is wel een mogelijke oplossing.

Volgens Sparenberg [SPA84] komt deze keuze van de wervelsterkte overeen met het introduceren van een randkracht. Dit zou de extra aan de stroming toegevoerde impuls kunnen verklaren, die Greenberg [GRE72] en Lee & Greenberg [LEE84] bij hun berekeningen, die we in paragraaf 2.5.3 hebben besproken, vinden.

Ook Coesel [COE86] vermeldt in zijn inleiding : 'Greenberg introduceert door de gekozen  $\gamma$ -verdeling een randkracht !'.

De stroming die Greenberg beschrijft is dus niet die van een actuatorschijf met uniforme krachtverdeling, maar de stroming ten gevolge van een uniforme krachtverdeling met randkrachten.

#### 4.6 Conclusies

Uit een dimensieanalyse van de stroming ten gevolge van een half-oneindige strip blijkt, dat er geen dimensieloos kental is te definiëren indien er geen hoofdstroming is, maar wel een lengteschaal. Er is dus geen niet-viskeuze oplossing te bepalen, maar er bestaat wel een verre veld oplossing met verwaarloosbare viscositeit.

Met hoofdstroming kan wel een dimensieloos kental gedefiniëerd worden. Voor kleine waarden van dit kental is het probleem te lineariseren. Er kan echter geen uniform geldige wrijvingsloze oplossing gerechtvaardigd worden op grond van dit kental, omdat het onafhankelijk is van de viscositeit.

Voor een viskeus fluïdum is een exacte instationaire oplossing gegeven voor een krachtstoot en een kracht die een eindige tijd werkt [HEL88].

Heeft de half-oneindige actuator strip een eindige dikte, dan zijn er twee kentallen te definiëren. Dan kan een niet-viskeuze oplossing wel gerechtvaardigd worden door de limiet voor deze Reynoldsgetallen naar oneindig te nemen.

Schmidt en Sparenberg geven een stationaire oplossing voor de wrijvingsloze stroming ten gevolge van een half-oneindige strip.

Deze oplossing blijkt in strijd te zijn met die van van Helden [HEL88]. De stelling, die Schmidt en Sparenberg bij hun afleiding gebruiken, is nog niet wiskundig bewezen en gaat uit van rotatiesymmetrie van de stroming bij singuliere punten.

G. van Kuik stelt, dat de oplossing van Schmidt en Sparenberg triviaal is en overeenkomt met snelheden nul in het hele vlak. Hij stelt een gedrag voor bij de singulariteit, die we in paragraaf 4.4 behandeld hebben.

De wortelsingulariteit, die Greenberg poneert in [GRE72, LEE84] blijkt een gevolg te zijn van een verborgen veronderstelling dat bij de rand van de actuator schijf het afgeschudde wervelvlak een eindige kromtestraal heeft. Daarmee is een spiraalvormig gedrag uitgesloten. Het veronderstellen van deze singulariteit blijkt equivalent te zijn met het invoeren van externe randkrachten.

## Hoofdstuk 5 De actuator strip.

### 5.1 Inleiding

Lee en Greenberg hebben een experiment uitgevoerd waarmee ze de tweedimensionale stroming ten gevolge van een actuator strip simuleren. We hebben dit experiment reeds besproken in paragraaf 2.5.3. Uit de resultaten daarvan concluderen zij, dat de gemiddelde snelheid in de strip, en dus het totale afgegeven vermogen groter is dan de klassieke theorie (§ 2.5.2) voorspelt. Ook berekeningen van Madsen aan een actuator cylinder die in afwezigheid van hoofdstroming vergelijkbaar zijn met de actuator strip berekeningen geven een hoger toegevoerd vermogen.

In § 2.5.2 zagen we al, dat de klassieke axiale impulsstheorie juist aan de randen van de actuator strip de stroming niet correct beschrijft.

Om dan ook meer over het gedrag van de stroming nabij de rand van het krachtveld te weten te komen gaan we in dit hoofdstuk de stroming berekenen ten gevolge van een actuator strip.

We maken hiervoor een numerieke simulatie, en lossen een stelsel van drie gekoppelde, niet-lineaire vergelijkingen op, namelijk de stationaire Navier-Stokes vergelijking in twee richtingen met een externe volumekracht  $\underline{f}$  die de actuator strip beschrijft, en de continuïteitsvergelijking.

Uit berekeningen en experimenten van Lee en Greenberg [LEE84,GRE72] en Madsen [MAD83,85] is gebleken, dat de grootste afwijkingen van de klassieke theorie optreden indien er geen uniforme hoofdstroming is. Vandaar is ook in onze numerieke berekening geen hoofdstroming verondersteld.

De klassieke axiale actuator theorie, de berekeningen van Lee & Greenberg en die van Madsen gaan uit van een niet-viskeus fluïdum waarin een externe kracht op een actuator vlak werkt. Daarom moeten we van onze viskeuze oplossing de limiet voor het Re-getal naar oneindig bepalen en de volumekracht zó kiezen, dat deze een benadering van een oppervlaktekracht wordt :

$$\underline{f} = \hat{F} \delta(x) \underline{e}_x \tag{5.1.1}$$

waarbij  $\hat{F} \underline{e}_x$  werkt op een stripvormig gebied met lengte L.

In de numerieke berekeningen is deze krachtverdeling benaderd (§ 5.2) en afhankelijk van een zogenaamde steilheidsfactor  $m$  is de benadering beter. De stroming kan bepaald worden tot een maximale waarde van deze steilheidsfactor en tot een maximaal Reynoldsgetal. Deze oplossing wordt besproken in § 5.5. Door een nauwkeurige extrapolatie van de hoogste waarden van  $Re$  en  $m$  naar oneindig is een vergelijking met de klassieke theorie van Froude te maken.

De invloed van de grootte van het rooster en de elementverdeling erin is nauwkeurig bekeken. De invloed van numerieke dispersie blijkt van belang te zijn. De nauwkeurigheid en convergentie worden besproken in § 5.6. Tenslotte worden de berekeningen vergeleken met metingen van Lee en Greenberg aan een actuator strip (§ 5.7).



### 5.2 De krachtverdeling $\underline{f}$

We kiezen  $\underline{f}$  zo, dat we een oppervlaktekracht volgens (5.1.1) benaderen. Daartoe gebruiken we de krachtverdeling die voorgesteld is door van Helden [HEL88].

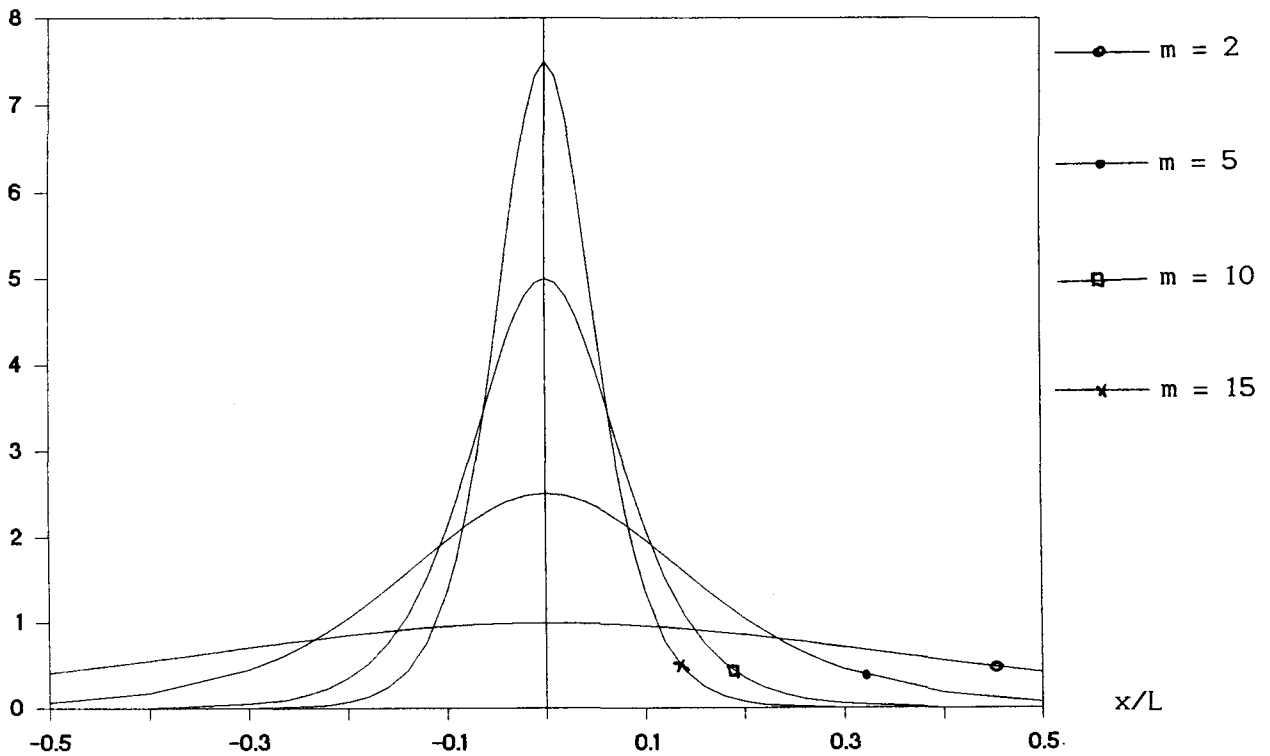
$$\underline{f} = (f_x, f_y) = \hat{F} (g(x) h(y), 0) \quad (5.2.1)$$

$$\text{met } g(x) = \frac{m}{2 \cosh^2 mx/L} \quad (5.2.2)$$

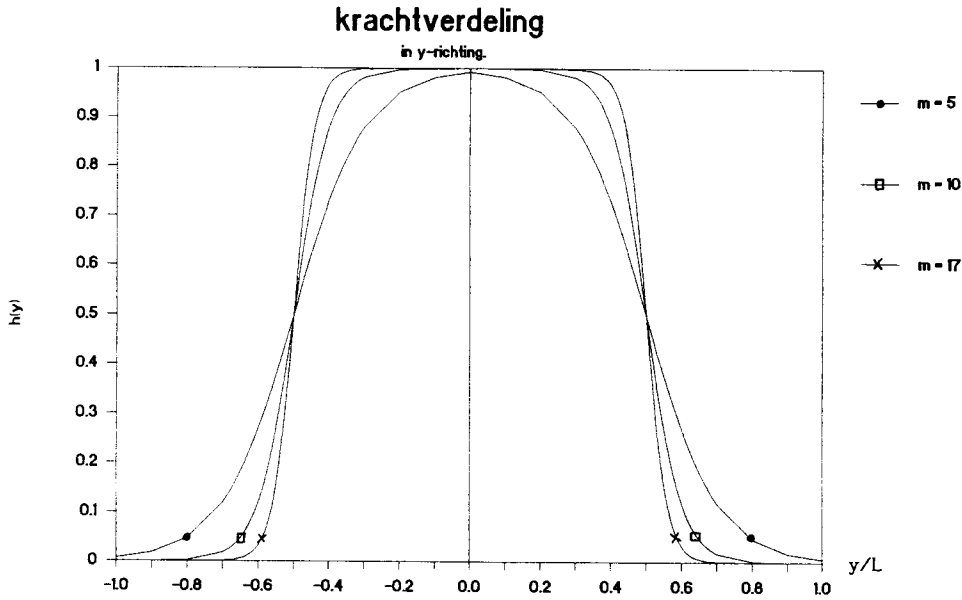
$$\text{en } h(y) = \frac{1}{2}(1 - \tanh[m(|\frac{y}{L}| - \frac{1}{2})]) \quad (5.2.3)$$

$\hat{F}$  zullen we verder de oppervlaktekrachtdichtheid noemen.

Hierbij is  $g(x)$  een benadering voor een delta-functie in de  $x$ -richting. De functie  $h(y)$  nadert tot een waarde die 1 is voor  $|y| \leq \frac{1}{2}L$  en 0 elders. De benaderingen zijn beter naarmate de zogenaamde steilheidsfactor  $m$  toeneemt. De functies  $g(x)$  en  $h(y)$  zijn voor enkele waarden van  $m$  afgebeeld in figuur 5.2.1 en 5.2.2.



**Figuur 5.2.1 : De functie  $g(x)$  voor verschillende waarden van  $m$ .**

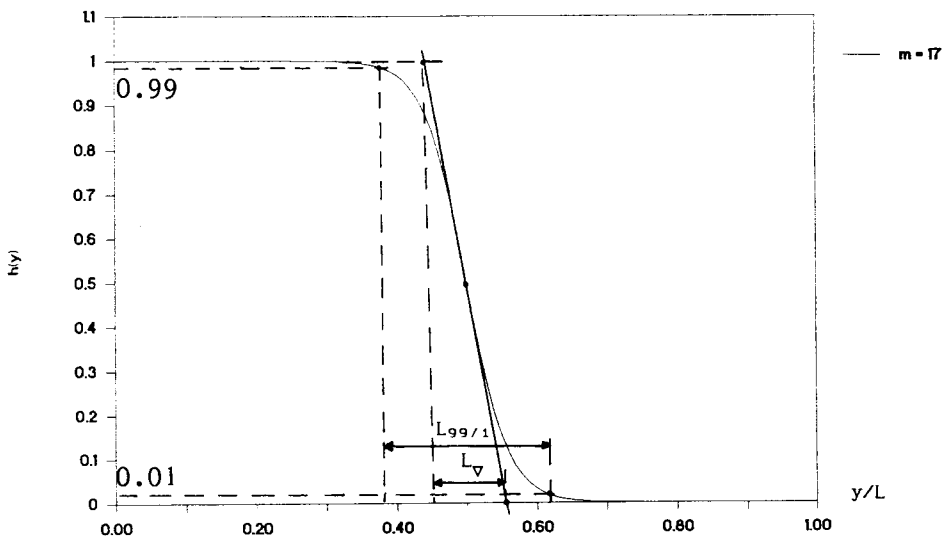


Figuur 5.2.2 : De functie  $h(y)$  voor verschillende waarden van  $m$ .

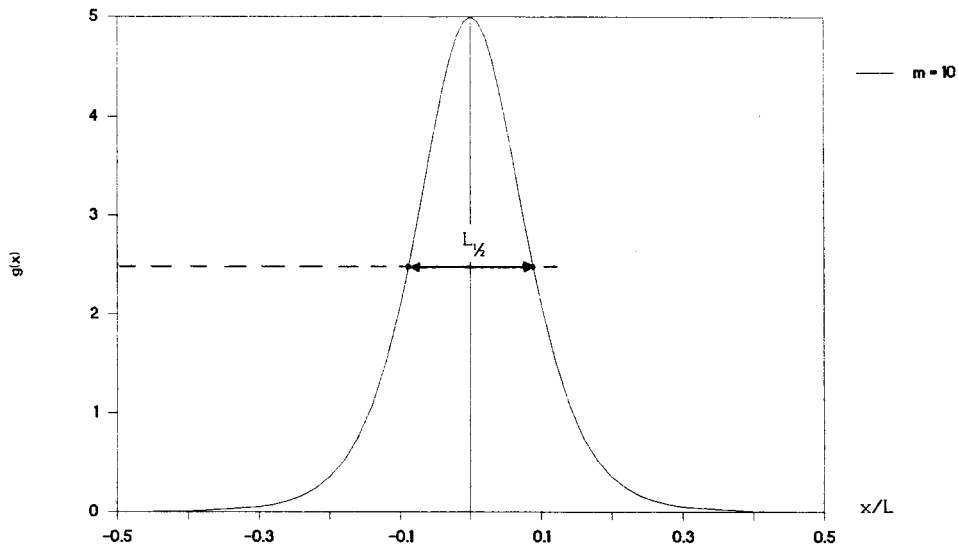
Door deze keuze van de krachtverdeling  $\underline{f}$  geldt dat de totale toegevoerde impuls :

$$\iint_{\Omega} f_x \, d\Omega = T_{2D} \quad (5.2.4)$$

constant is voor elke waarde van  $m$ . De parameter  $m$  geeft aan hoe nauwkeurig de volumekracht  $\underline{f}$  een benadering van de oppervlaktekracht is. Maten voor de nauwkeurigheid van die benadering zijn de verhoudingen van de gradiëntlengte  $L_{\nabla}$ , de afvallengte  $L_{99/1}$  en de halfwaardebreedte  $L_{1/2}$  met de striplengte  $L$ . Deze zijn gedefinieerd in figuur 5.2.3 en 4.



Figuur 5.2.3 : Definitie van  $L_{\nabla}$  en  $L_{99/1}$  aan de hand van  $h(y)$ .



Figuur 5.2.4 : Definitie van  $L_{1/2}$  aan de hand van  $g(x)$ .

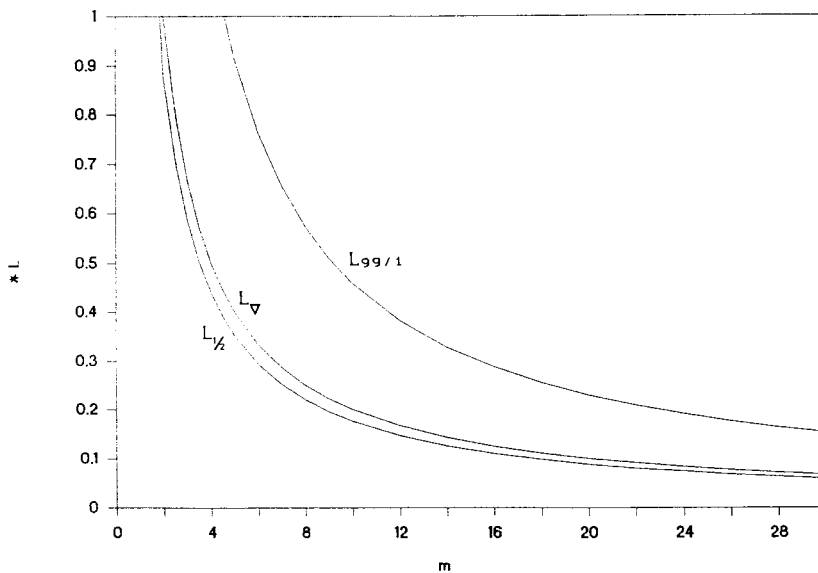
Uit (5.2.1) volgt :

$$L_{\nabla}/L = \frac{2}{m} \tag{5.2.5}$$

$$L_{99/1}/L = \frac{2}{m} \operatorname{arctanh}(0.98) \tag{5.2.6}$$

$$L_{1/2}/L = \frac{2}{m} \operatorname{arccosh}(\sqrt{2}) \tag{5.2.7}$$

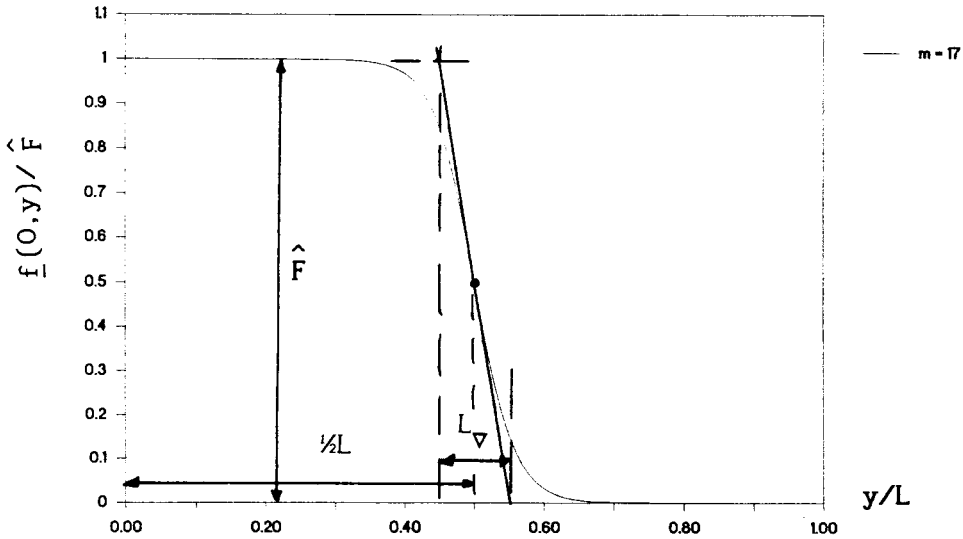
In figuur 5.2.5 staan de waarden  $L_{\nabla}/L$ ,  $L_{99/1}/L$  en  $L_{1/2}/L$  uitgezet als functie van  $m$ .



Figuur 5.2.5 : De karakteristieke lengten  $L_{\nabla}$ ,  $L_{99/1}$  en  $L_{1/2}$  als functie van  $m$ .

5.3 Dimensieanalyse en dimensieloze vergelijkingen.

We passen een dimensieanalyse toe op een eindige strip met een niet-uniforme krachtverdeling (fig.5.3.1) in een fluïdum zonder hoofdstroming.



**Figuur 5.3.1 : Niet-uniforme krachtverdeling met de definitie van karakteristieke grootheden.**

De parameters van het probleem zijn : de oppervlaktekrachtdichtheid  $\hat{F}$  ( $kg/ms^2$ ), de dichtheid  $\rho$  ( $kg/m^3$ ), de kinematische viscositeit  $\nu$  ( $m^2/s$ ), de breedte van de strip  $L$  (m) en de gradiëntlengte  $L_{\nabla}$  (m).

We kunnen de volgende dimensieloze kentallen definiëren :

$$\frac{L}{\nu} \sqrt{\frac{\hat{F}}{\rho}} \tag{5.3.1}$$

$$\frac{L_{\nabla}}{\nu} \sqrt{\frac{\hat{F}}{\rho}} \tag{5.3.2}$$

$$\frac{L}{L_{\nabla}} \tag{5.3.3}$$

Omdat volgens de klassieke theorie geldt dat  $\sqrt{2\hat{F}/\rho} = U_1$ , kunnen we inzien, dat (5.3.1) en (5.3.2) twee Reynoldsgetallen zijn, en (5.3.3) de verhouding tussen deze twee kentallen geeft. We noemen de Reynoldsgetallen respectievelijk  $Re_L$  en  $Re_{\nabla}$ .

$$Re_L = \frac{U_1 L}{\nu} \tag{5.3.4}$$

$$Re_{\nabla} = \frac{U_1 L_{\nabla}}{\nu} \tag{5.3.5}$$

In de numerieke berekeningen is  $\hat{F}$ ,  $\rho$  en  $L$  constant gehouden, en alleen de kinematische viscositeit  $\nu$  en de steilheidsfactor  $m$ , en dus  $L_{\nabla}$  gevariëerd (5.2.5). Hiermee wordt  $Re_L$  alleen afhankelijk van de viscositeit, en  $Re_{\nabla}$  van de viscositeit en de steilheidsfactor. Willen we nu de wrijvingsloze limiet bepalen, dan moeten we de limiet voor  $Re_L \rightarrow \infty$  bepalen. Bovendien willen we een uniforme krachtverdeling beschouwen dus nemen we tevens de limiet voor  $L/L_{\nabla} \rightarrow \infty$ . Hiermee is echter  $Re_{\nabla}$  onbepaald, er is zowel de limiet voor  $Re_{\nabla} \rightarrow 0$  als  $Re_{\nabla} \rightarrow \infty$  mogelijk. Dit betekent, dat er mogelijk verschillende limieten kunnen bestaan, afhankelijk van de waarde van  $Re_{\nabla}$ .

Lee en Greenberg [LEE84], en ook Madsen [MAD83,85] bepalen de niet-viskeuze oplossing, waarvoor dus geldt :  $Re_{\nabla} \rightarrow \infty$  en  $Re_L \rightarrow \infty$ .

Hierna nemen ze de limiet voor  $L/L_{\nabla} \rightarrow \infty$  door een uniforme krachtverdeling te beschouwen.

We zullen dan ook in de numerieke berekeningen dezelfde limiet bepalen door eerst de limiet van de viscositeit naar nul te nemen, en daarna de limiet voor  $L/L_{\nabla} \rightarrow \infty$ . De resultaten zijn dan vergelijkbaar.

Actuator strip met eindige dikte in een niet-viskeuze stroming.

Indien we het probleem beschouwen van een actuator strip met een eindige dikte, die evenredig is met  $L_{\nabla}$ , in een niet-viskeus medium dan bestaan er de volgende parameters :  $\hat{F}$ ,  $\rho$ ,  $L$ ,  $L_{\nabla}$  en in geval van een hoofdstroming ook  $U_0$ . We kunnen dan de volgende dimensieloze kentallen definiëren :

$$\frac{\hat{F}}{\rho U_0^2} \tag{5.3.6}$$

$$\frac{L}{L_{\nabla}} \tag{5.3.7}$$

Indien we de snelheden dimensieloos maken met de snelheid ver achter de strip volgens de klassieke theorie  $\sqrt{2\hat{F}/\rho} = U_1$  dan volgt voor de oplossing :

$$\frac{u}{U_1} = f_1(x/L, y/L, L/L_\nabla, \frac{\hat{F}}{\rho U_0^2}) \quad (5.3.8)$$

De oplossing is een functie van de twee dimensieloze parameters.

Indien er geen uniforme hoofdstroming is ( $U_0 = 0$ ), dan verdwijnt de dimensieloze parameter  $\hat{F}/\rho U_0^2$  en volgt voor de oplossing :

$$\frac{u}{U_1} = f_1(x/L, y/L, L/L_\nabla) \quad (5.3.9)$$

Het stromingsveld is blijkbaar onafhankelijk geworden van de grootte van de krachtdichtheid en de dichtheid van het medium.

We hebben dit eerder gebruikt in § 2.5.3, waar een oneindig dunne strip met uniforme krachtverdeling was opgelegd.

In dit hoofdstuk mogen we nu  $\hat{F}$  en  $\rho$  constant houden, omdat zij in de limiet voor een niet-viskeuze stroming geen invloed hebben op het stromingspatroon.

#### Dimensieloos maken van de vergelijkingen.

Aangezien de oppervlaktekrachtdichtheid  $\hat{F}$  en de lengte van de strip  $L$  constant zijn gehouden gedurende de numerieke berekeningen, is ook de snelheid in de jet op oneindig  $U_1$  volgens de klassieke actuator theorie constant. Uit (2.5.6) volgt namelijk indien er geen hoofdstroming is :

$$U_1 = \sqrt{\frac{2\hat{F}}{\rho}} \quad (5.3.10)$$

Daarom maken we de Navier-Stokes vergelijking dimensieloos met

$U_1$  en  $L$ . Dan volgt met  $\underline{v} = U_1 \underline{v}^*$ ,  $\underline{f} = \frac{\rho U_1^2}{L} \underline{f}^*$  en  $p = \rho U_1^2 p^*$  dat :

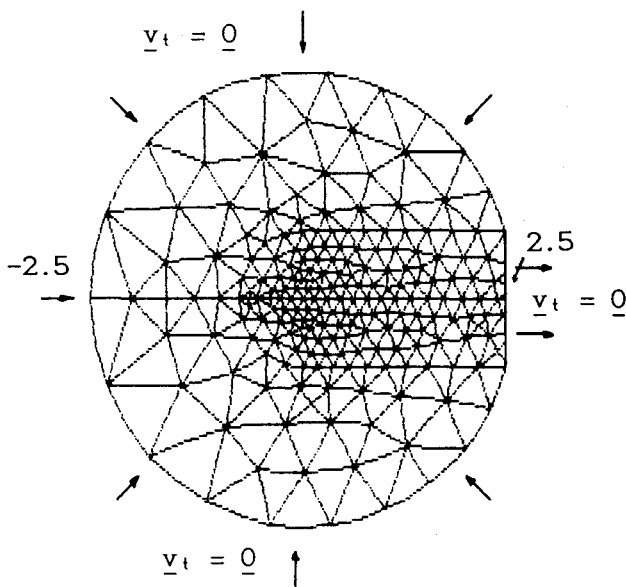
$$(\underline{v}^* \cdot \nabla^*) \underline{v}^* = \underline{f}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{Re_l} \nabla^{*2} \underline{v}^* \quad (5.3.11)$$

We laten nu verder in dit hoofdstuk  $^*$  weg, en werken met de dimensieloze waarden van de variabelen.

### 5.4 Roosterkeuze

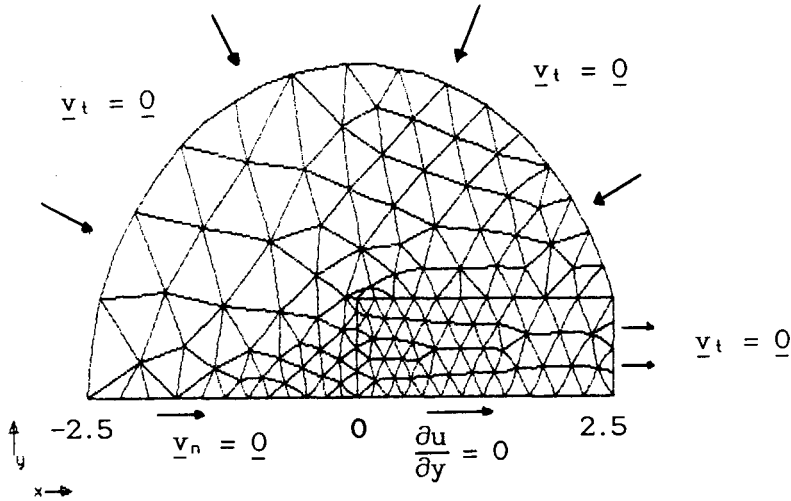
#### Randvoorwaarden langs en grootte van het rooster.

De Navier-Stokes vergelijking (2.2.1) in stationaire vorm wordt opgelost met behulp van het eindige elementen pakket SEPRAN. We moeten een rooster definiëren waarbinnen het stromingsveld wordt bepaald [SEG87]. Op grond van voorgaande berekeningen [LEE84,GRE72 en SCM77] nemen we in eerste instantie aan, dat de stroming op grote afstand lijkt op een putstroming met een jet achter de strip. Daarom kiezen we een cirkel als integratiegebied (fig.5.4.1) met als randvoorwaarden een spanningsloze, axiaal gerichte stroming ter plekke van de jet en een radiële spanningsloze stroming elders.



**Figuur 5.4.1 : Roosterkeuze met randvoorwaarden.**

Omdat echter het probleem symmetrisch is in de x-as kunnen we met een halve cirkel volstaan (fig 5.4.2). Op de symmetrie as moeten de normaalsnelheid en de schuifspanning nul zijn.



**Figuur 5.4.2 : Roosterkeuze met symmetrie as en randvoorwaarden.**

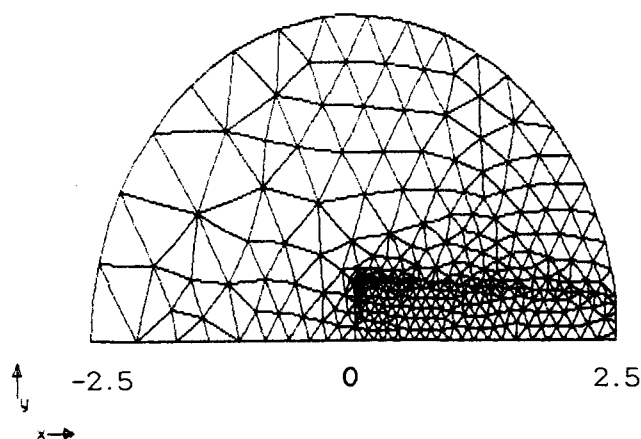
Op grond van berekeningen uit de literatuur is de straal van het integratiegebied 2.5 maal de lengte van de strip genomen. We zullen de invloed van de grootte van het rooster, en de invloed van de opgelegde randvoorwaarde nog nader bekijken in paragraaf 5.5.5.

#### Roosterfijnheid.

Een groot voordeel van de eindige elementenmethode boven de eindige differentiemethode is naast een betrekkelijk eenvoudige programmeerbaarheid ook de mogelijkheid om zeer plaatselijk het rooster te verfijnen.

We zullen van deze mogelijkheid gebruik maken omdat er ter plaatse van de wervelvlakken en bij de rand van de strip grote gradiënten op kunnen treden in de snelheid en de druk. Indien het rooster te grof gekozen is, kan er numerieke dispersie ontstaan. De numerieke dispersie heeft hetzelfde effect als viscositeit. Grote gradiënten worden uitgemiddeld. Het effect is groter naarmate de gradiënten groter zijn en het rooster groffer is. Dit effect gebruiken we ook soms lokaal aan de rand van het integratiedomein om ervoor te zorgen dat de oplosmethode stabiel blijft. De afgeleiden in de snelheid en de druk nemen toe bij hogere waarden van de steilheidsfactor  $m$ , zodat voor een hogere  $m$  een steeds fijner rooster nodig is om de oplossing te laten convergeren naar een betrouwbare limiet. De maximale  $m$ , de fijnheid en de grootte van het rooster worden bepaald door de grenzen die opgelegd worden door de gebruikte computer (DEC  $\mu$ VAX 2). Berekeningen zijn uitgevoerd tot maximaal  $m = 17$  en  $Re = 2500$ . Voor hogere  $Re$ -waarden traden instabiliteiten op. Het fijnste rooster waarmee de stroming is bepaald is in figuur 5.4.3 afgebeeld.





**Figuur 5.4.3 : Het fijnste rooster waarmee de stroming voor  $m = 17$  tot  $Re = 2500$  is bepaald.**

Nabij de rand van de strip en bij de vermoedelijke plaats van het wervelvlak is het rooster extra verfijnt, omdat daar de afgeleide van de snelheid maximaal is. Er is bij de numerieke berekeningen veel aandacht besteedt aan de fijnheid van het rooster, met verschillende roosters zijn oplossingen bepaald, om de invloed van numerieke dispersie af te schatten.

Oplosmethode

Omdat de Navier-Stokes vergelijking een niet-lineaire vergelijking is, moeten we een iteratieve procedure gebruiken, de benadering  $\underline{u}^I$  voor het snelheidsveld wordt bepaald met behulp van de vorige benadering  $\underline{u}^{I-1}$ . Om de niet-lineaire convectieve term in (2.2.1) te lineariseren gebruiken we de zogenaamde Newton-iteratie [STE84]. We itereren totdat de relatieve fout  $\Delta$  (5.4.1) kleiner is dan  $10^{-6}$ .

$$\Delta = \left| \frac{\underline{u}^I - \underline{u}^{I-1}}{\underline{u}^I} \right| \tag{5.4.1}$$

Als startwaarde  $\underline{u}^0$  kiezen we de Stokes-oplossing, waarbij de niet-lineaire convectieve term is verwaarloosd.

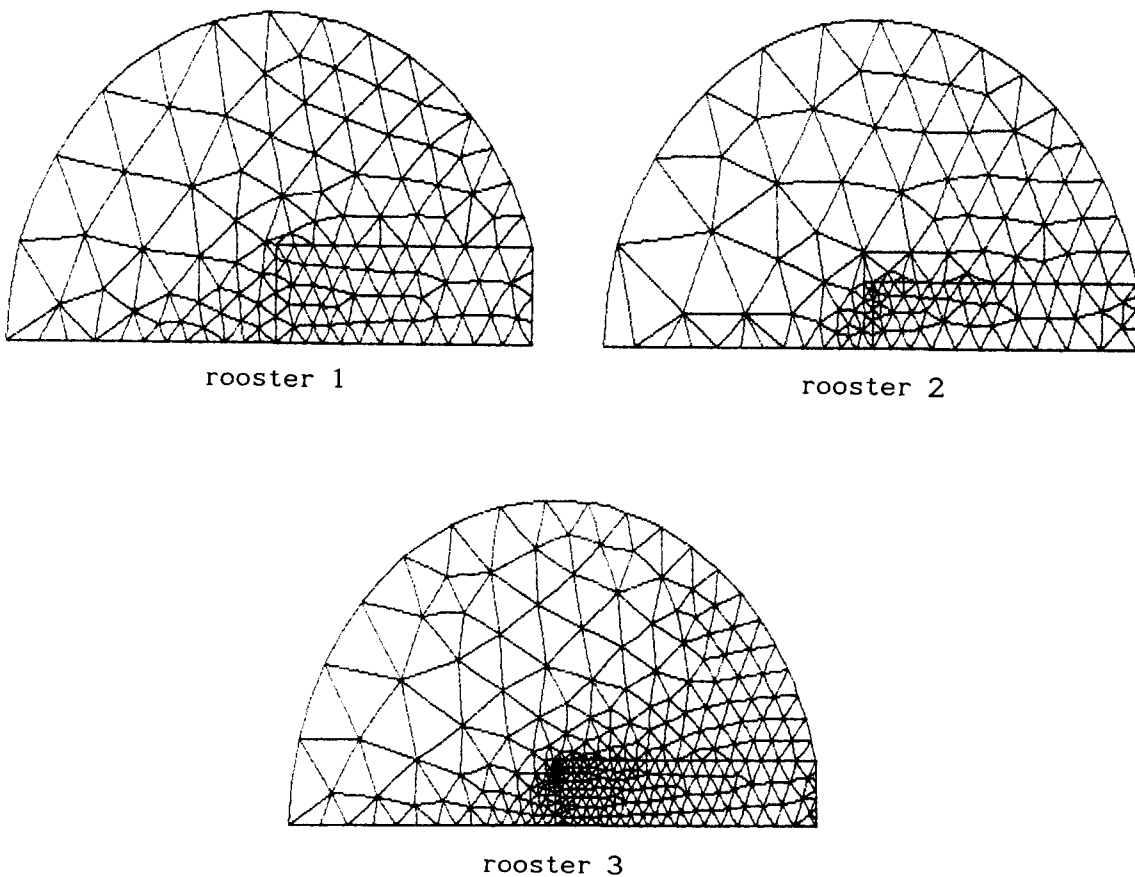
Om een hoge  $Re$ -waarde te bereiken moeten we de oplossing voor een lage waarde van  $Re$  gebruiken als beginschatting voor de nieuwe, hogere waarde van  $Re$ . Voor we echter het Reynoldsgetal verhogen laten we een nieuwe oplossing eerst 'uitconvergeren', dat wil zeggen we itereren bij een tussenwaarde van het Reynoldsgetal totdat de fout  $\Delta$  (5.4.1) kleiner is dan  $10^{-6}$ . We vinden dus telkens voor een constante waarde van  $m$  een reeks oplossingen voor de verschillende waarden van het  $Re$ -getal.

## 5.5 Resultaten van berekeningen aan een actuator strip.

### 5.5.1 Het stromingsveld ten gevolge van de actuator strip.

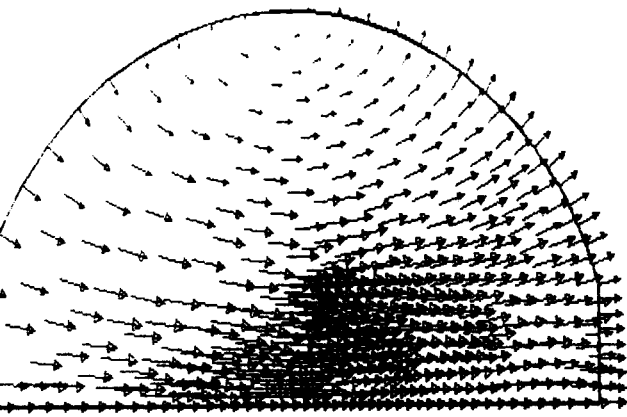
Bij de berekeningen in twee dimensies is bij een rooster met een constante impulstoevoer ( $T_{20}$ ) de viscositeit verlaagd door steeds bij één waarde van  $m$  het Reynoldsgetal, betrokken op de lengte van de strip (5.3.4) te verhogen.

Met drie verschillende roosters van dezelfde grootte zijn berekeningen uitgevoerd voor een reeks waarden van de steilheidsfactor  $m$ . De roosters zijn afgebeeld in figuur 5.5.1.

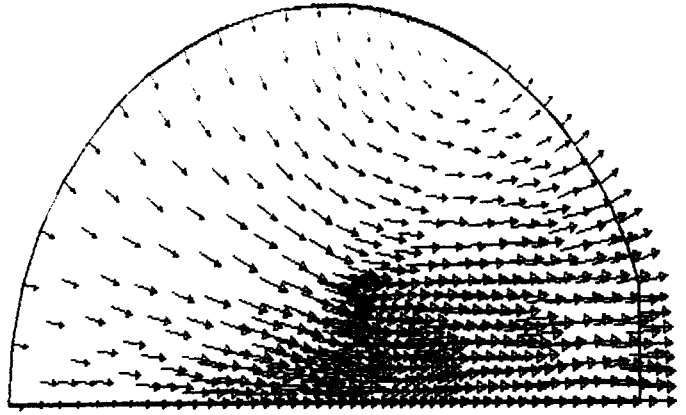


**Figuur 5.5.1 : De drie roosters waarmee de berekeningen aan de actuator strip zijn uitgevoerd.**

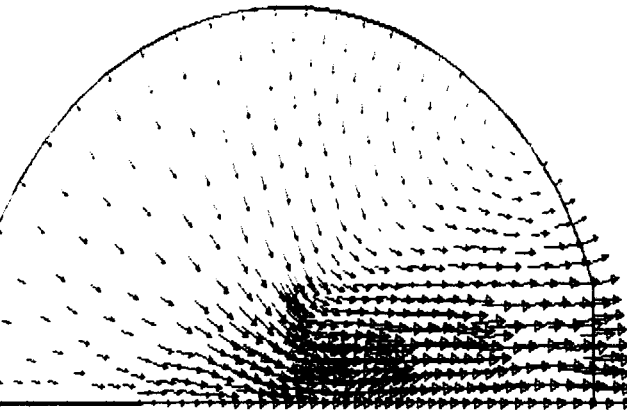
Een reeks van oplossingen als functie van het Reynoldsgetal is weergegeven in figuur 5.5.2<sup>a</sup> tot en met 5.5.2<sup>f</sup>, deze zijn uitgevoerd met rooster 1, voor steilheidsfactor  $m = 12$ .



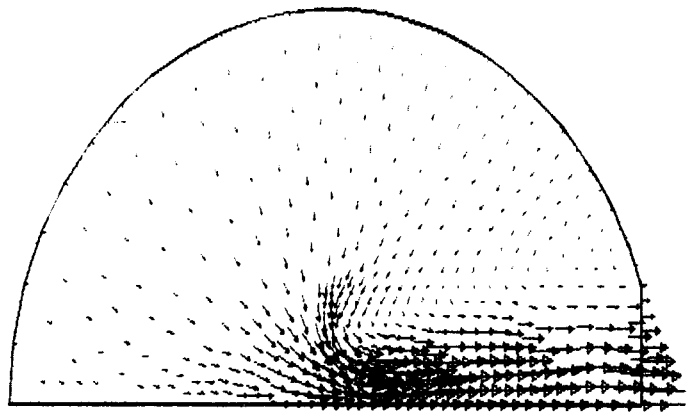
Stokes oplossing



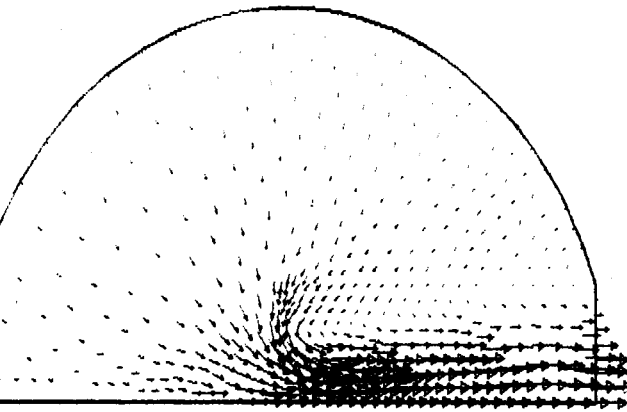
$Re_L = 4.4$



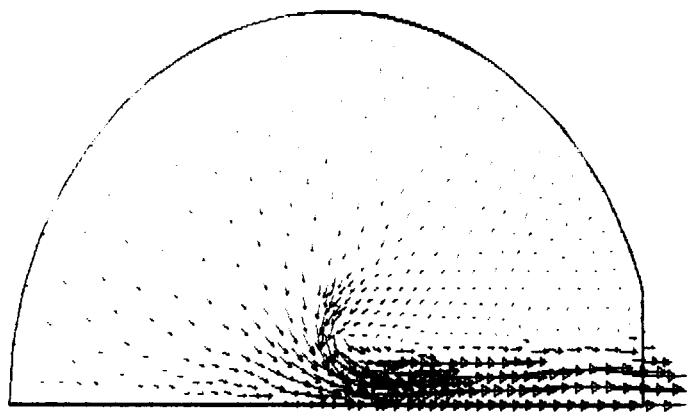
$Re_L = 16$



$Re_L = 123$



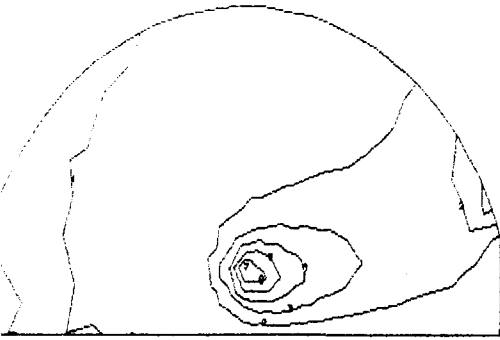
$Re_L = 263$



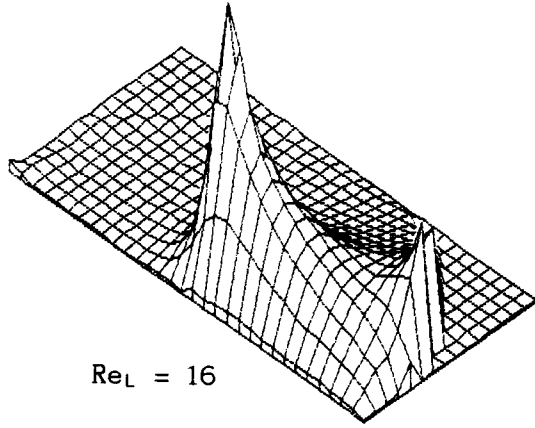
$Re_L = 1231$

**Figuur 5.5.2<sup>a</sup> t/m <sup>f</sup> : Het stromingsveld als functie van het Reynoldsgetal  $Re_L$  ( $m = 12$ , rooster 1).**

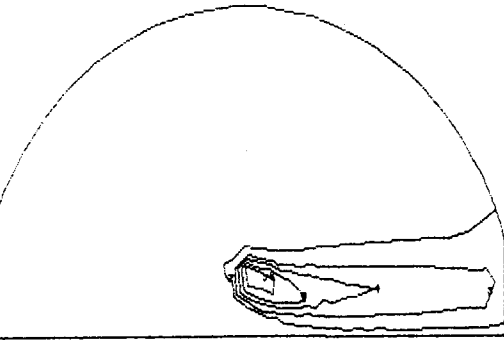
De rotatie van de snelheden in figuur 5.5.2<sup>a</sup> tot en met <sup>f</sup>, de vortichiteit  $\omega$  is in figuur 5.5.3<sup>a</sup> tot en met <sup>f</sup> weergegeven, er is tevens een hoogtelijnen patroon gegeven.



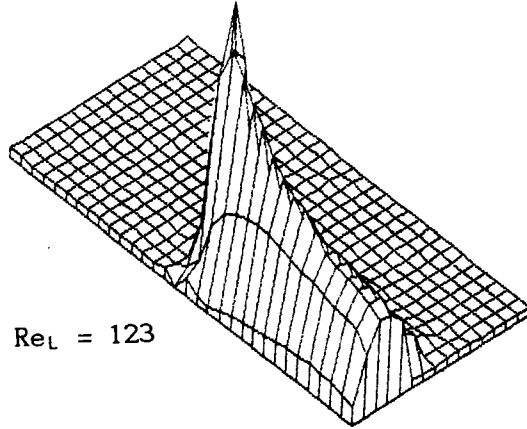
$Re_L = 16$



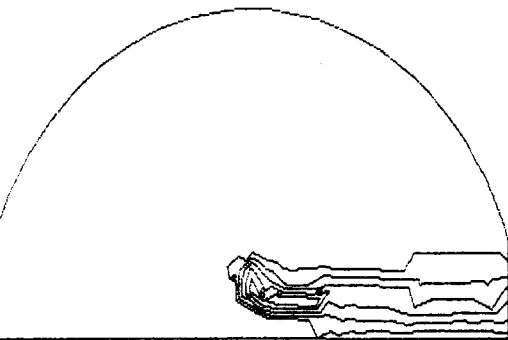
$Re_L = 16$



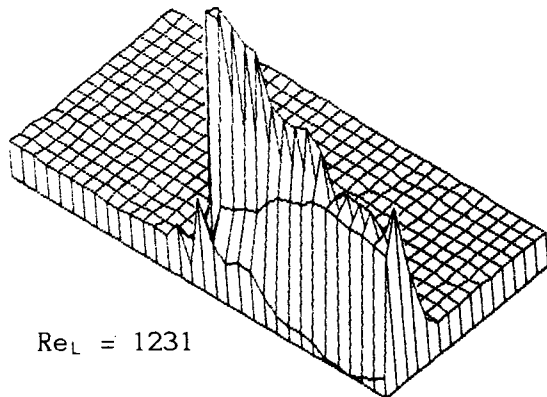
$Re_L = 123$



$Re_L = 123$



$Re_L = 1231$



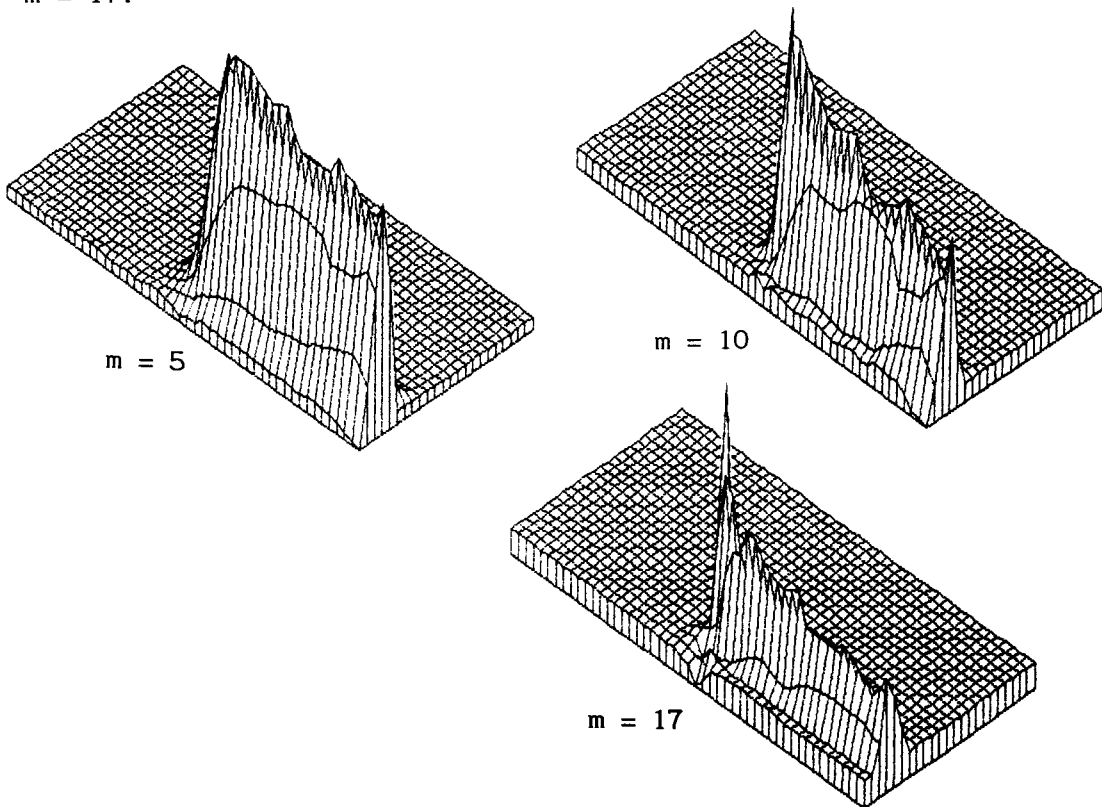
$Re_L = 1231$

Figuur 5.5.3<sup>a</sup> t/m <sup>f</sup> : De vorticeit als functie van het Reynoldsgetal.

De vorticititeit wordt alleen aan de rand van de strip geproduceerd, hetgeen direct volgt uit de werveldiffusie vergelijking (2.2.8). In dimensieloze variabelen wordt deze :

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\underline{v} \cdot \nabla)\omega = \nabla x f + \frac{1}{Re_L} \nabla^2 \omega \tag{5.5.1}$$

De door het externe krachtveld geproduceerde vorticititeit wordt afgevoerd langs de stroomlijnen (D.S.) en er is afhankelijk van de waarde van  $Re_L$  diffusie van vorticititeit. Voor de lage waarden van  $Re_L$  is de invloed van de diffusie duidelijk zichtbaar (fig 5.5.3<sup>a</sup>), voor hogere waarden van  $Re_L$  wordt de breedte van het wervelvlak alleen bepaald door de steilheidsfactor  $m$ , deze bepaalt namelijk de breedte waarover vorticititeit wordt geproduceerd omdat  $\nabla x f \neq 0$ . Deze breedte is evenredig met de gradiëntlengte  $L_\nabla$  (zie fig. 5.2.3) en numerieke dispersie. Uit figuur 5.5.3 blijkt, dat de vorticititeit een maximum heeft in de buurt van de rand van de strip. Het is nu interessant om te kijken naar de sterkte van dit maximum voor verschillende waarden van de steilheidsfactor  $m$ . In figuur 5.5.4<sup>a</sup> tot en met 5.5.4<sup>c</sup> is de vorticititeitsverdeling te zien voor respectievelijk  $m = 5$ ,  $m = 10$  en  $m = 17$ .



Figuur 5.5.4<sup>a</sup> t/m <sup>c</sup>: De vorticititeit voor verschillende waarden van  $m$ .

Indien  $m$  stijgt, dan wordt de vorticititeit op een kleiner gebied ( $\sim L_{\nabla}$ ) met grotere intensiteit ( $\sim 1/L_{\nabla}$ ) geproduceerd. De totale productie van vorticititeit  $D\omega/Dt$  blijft echter constant. De wervelsterkte van het wervelvlak achter de strip kunnen we bepalen volgens (5.5.2)

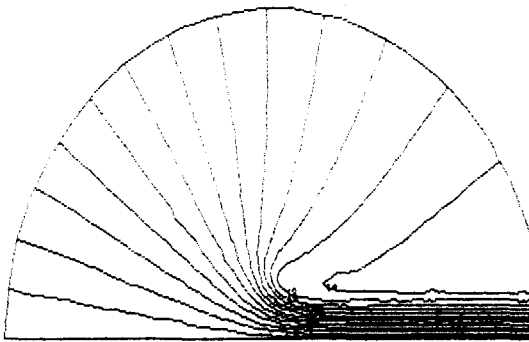
$$\gamma = \int_0^{\infty} \omega \, dy \quad (5.5.2)$$

En omdat per definitie geldt dat

$$\gamma = U_{s+} - U_{s-} \quad (5.5.3)$$

moet volgens de klassieke theorie van Froude gelden dat de wervelsterkte op grote afstand stroomafwaarts achter de strip  $\gamma_{\infty} = 1$  voor elke waarde van  $m$ .

Aan het stroomlijnenpatroon in figuur 5.5.5 is te zien dat aan de randvoorwaarden zowel op de symmetrie as als in de jet is voldaan.



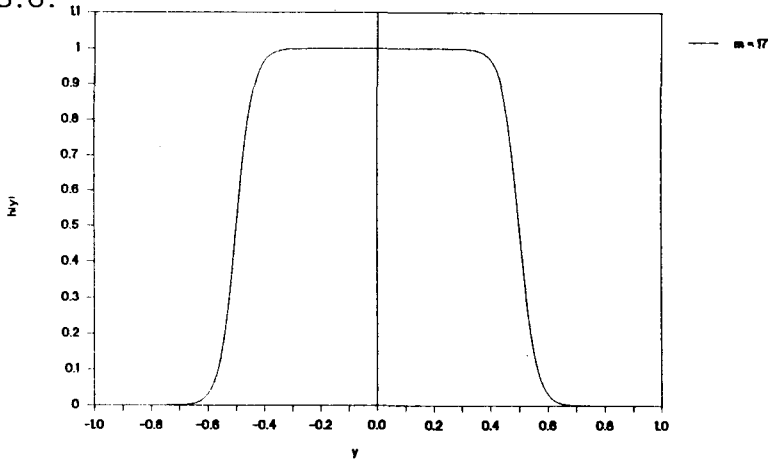
$Re_L = 1231$

**Figuur 5.5.5 : Het stroomlijnenpatroon voor de oplossing van figuur 5.5.2<sup>f</sup>.**

In Appendix F is een uitgebreider overzicht gegeven van de stroming als functie van het Reynoldsgetal.

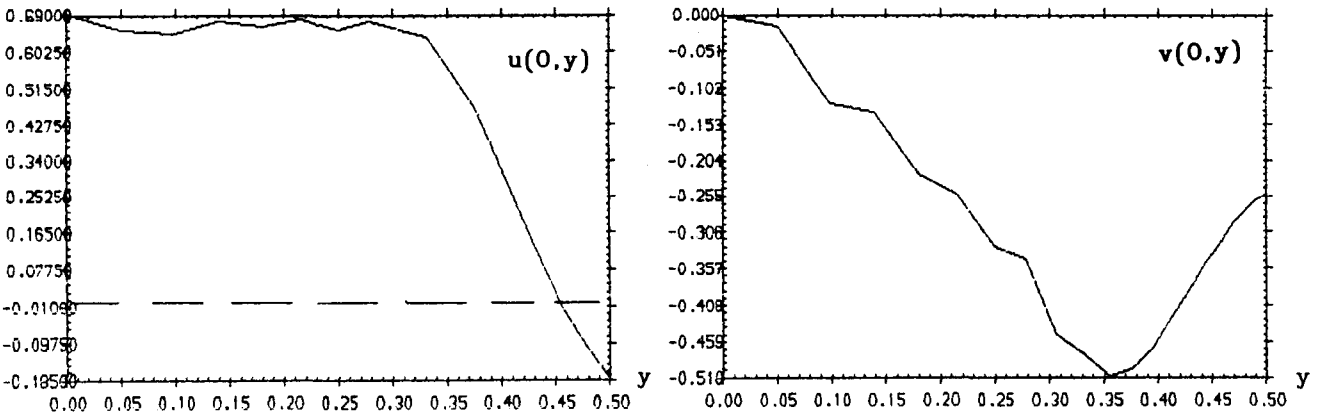
5.5.2 De stroming in de buurt van de strip.

We zijn vooral geïnteresseerd in het gedrag op de rand van de strip. Vandaar dat we nauwkeurig gaan kijken naar de snelheden, de druk en de vorticitetsverdeling op de strip. We doen dit voor een stroming bepaald voor  $Re_L = 2600$ . Voor de stroming in de buurt van de rand is echter  $Re_\nabla$  van belang. Er geldt  $Re_\nabla = 300$  en  $m = 17$ . De krachtverdeling is dan als in figuur 5.5.6.



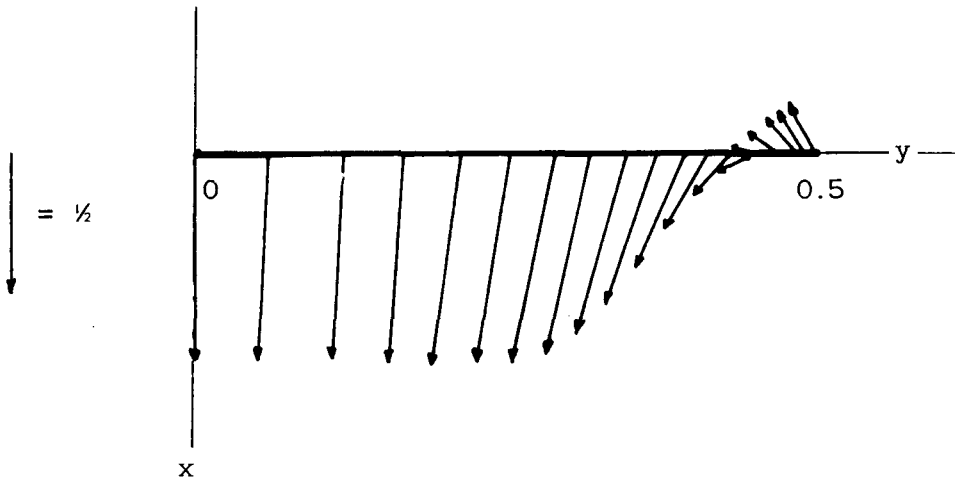
Figuur 5.5.6 : De krachtverdeling in de y-richting  $h(y)$  voor  $m = 17$ .

De snelheden in de x- en y-richting op de strip, respectievelijk  $u$  en  $v$  zijn uitgezet in figuur 5.5.7<sup>a</sup> en <sup>b</sup>.



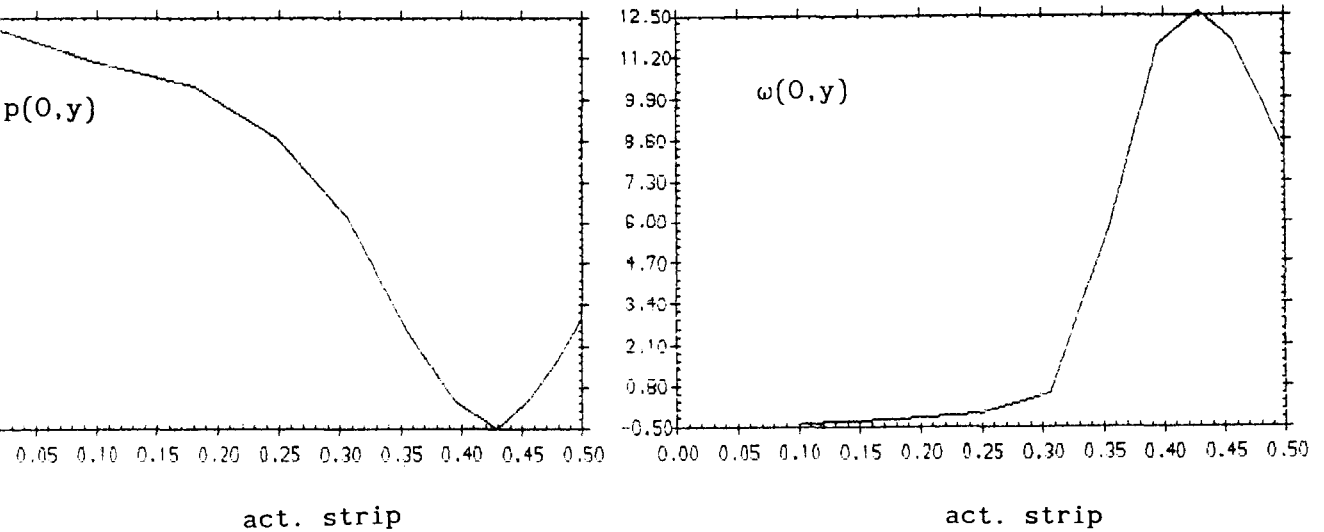
Figuur 5.5.7<sup>a</sup> en <sup>b</sup>: De snelheden  $u$  en  $v$  ter plekke van de strip.

Voor de gemiddelde snelheid in de actuatorstrip in de x-richting voor deze waarde van  $Re_\nabla$  geldt  $\bar{U}_s = 0.52$ . Opvallend is dat  $u$  negatief wordt voor  $y > 0.45$ , terwijl  $v$  een minimum vertoont op  $y = 0.36$ . In figuur 5.5.8 is de totale snelheid in de strip door combinatie van figuur 5.5.7<sup>a</sup> en <sup>b</sup> weergegeven.



**Figuur 5.5.8 : De totale snelheid ter plekke van de strip.**

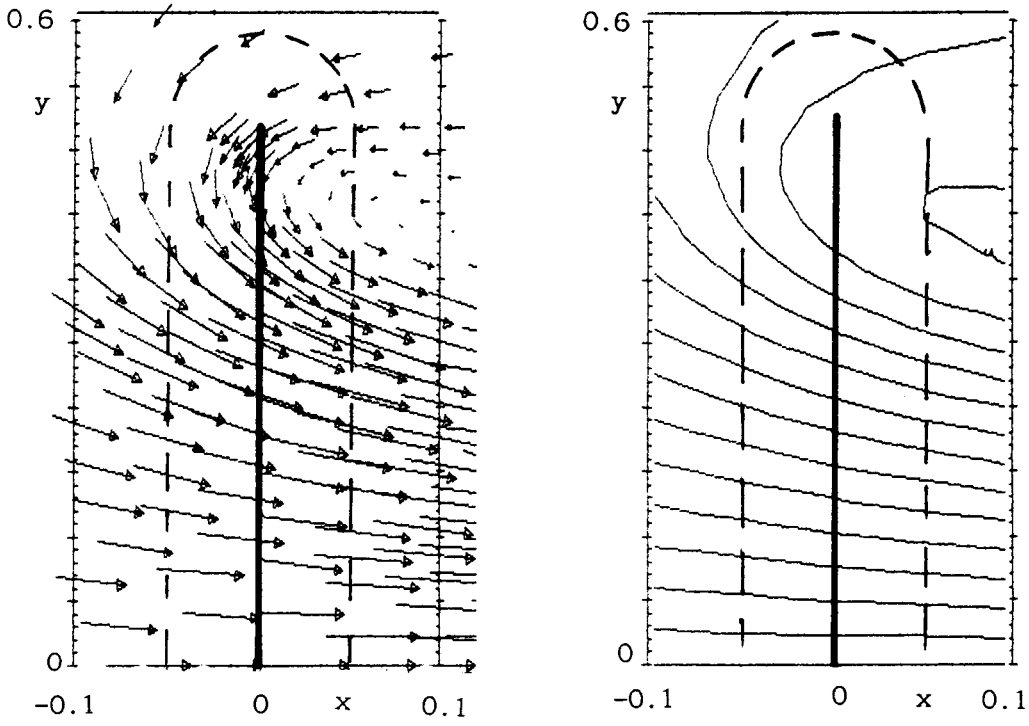
Voor  $y > 0.45$  is er dus een stroming tegen het krachtveld in ten gevolge van de vorticititeit. Op  $y = 0.43$  is de druk minimaal (fig. 5.5.9) en de vorticititeit maximaal (fig 5.5.10).



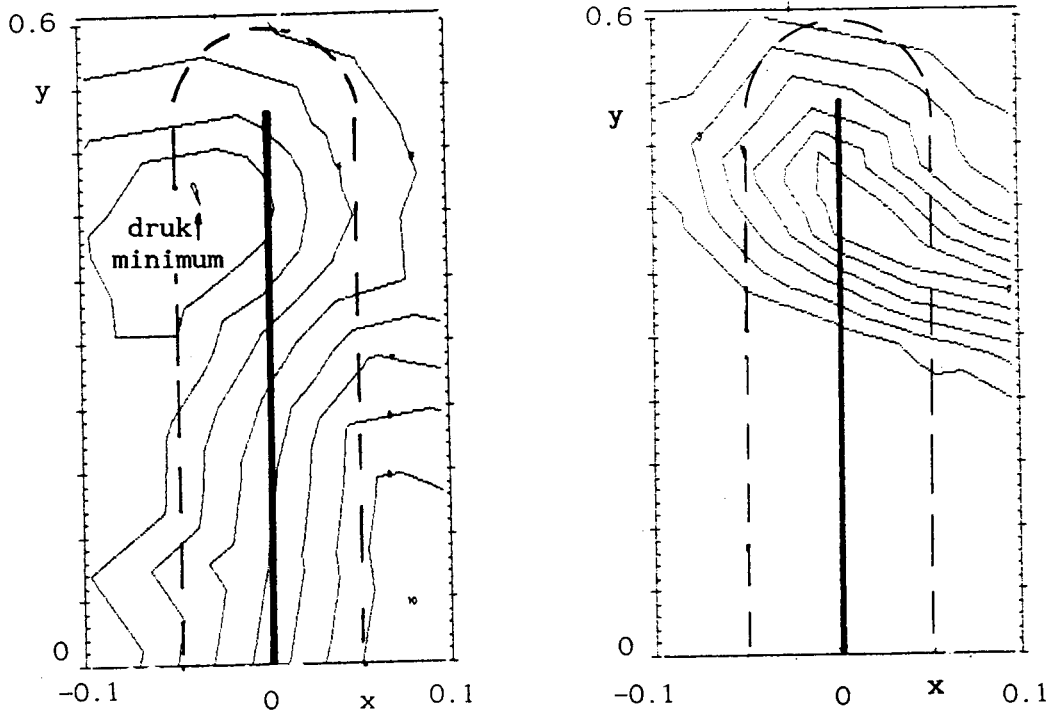
**Figuur 5.5.9 en 10 : De druk en de vorticititeit ter plekke van de strip.**

We kijken nu naar het gedrag van snelheid, stroomfunctie, druk en vorticititeit in de buurt van de strip. Deze staan achtereenvolgens uit in figuur 5.5.11, 12, 13 en 14. Van de laatste drie variabelen zijn hoogtelijnenpatronen weergegeven, waarbij de getallen de relatieve waarde aangeven ten opzichte van de minimumwaarde van de contour.





Figuur 5.5.11 en 12 : De snelheid en de stroomfunctie in de buurt van de strip.

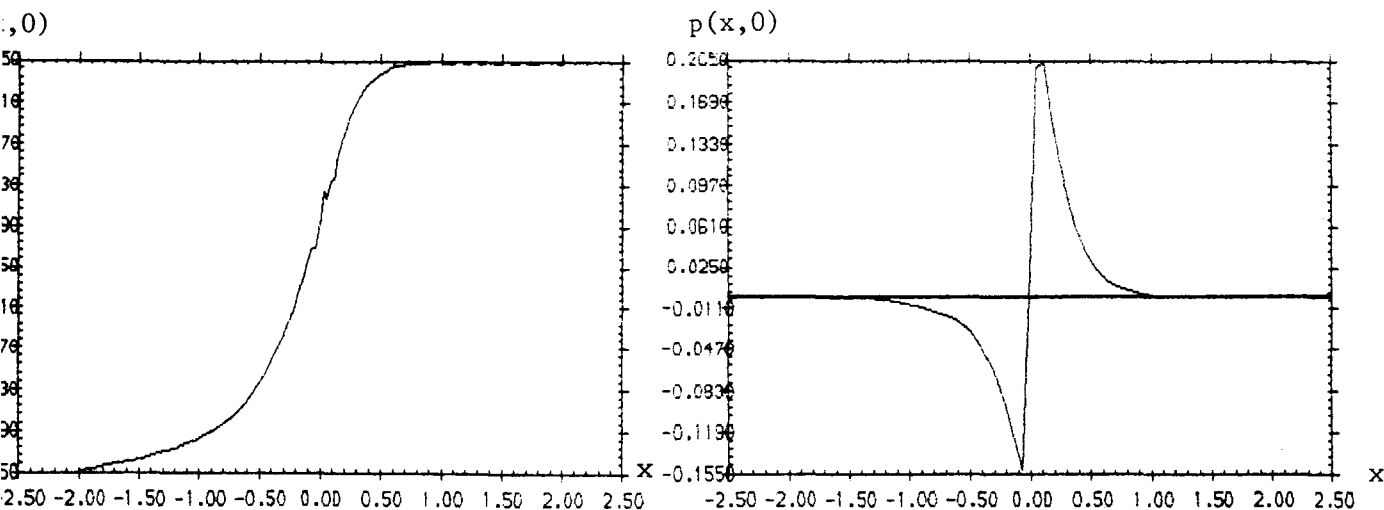


Figuur 5.5.13 en 14 : De druk en de vorticeit in de buurt van de strip.

Het minimum in de druk en het maximum in de vorticititeit blijkt op ongeveer 90% van de lengte van de strip op  $y = 0.45$  te liggen. Het drukminimum ligt stroomopwaarts in de strip, terwijl het vorticititeitsmaximum stroomafwaarts in de strip ligt. Merk op dat op de plaats waar de vorticititeit wordt geproduceerd, de rand van de strip, niet de hoogste concentratie aanwezig is, maar verder stroomafwaarts. Het gedeelte van de strip dat positieve arbeid verricht beslaat ongeveer 90% van de strip. De gemiddelde axiale snelheid in dit gebied is echter wel ongeveer 10% hoger dan de klassieke theorie voorspelt.

### 5.5.3 De snelheid en de druk op de symmetrie as.

We kijken nu naar de snelheid en druk op de symmetrie as. Op deze as heeft de snelheid alleen een component in de x-richting, deze is uitgezet in figuur 5.5.15 en de druk in figuur 5.5.16.



**Figuur 5.5.15 en 16: De snelheid in de x-richting en de druk op de symmetrie as.**

De snelheid op  $-2.5$  is zeer laag, omdat we geen uniforme aanstroomsnelheid hebben opgelegd. Op  $+2.5$  is de snelheid één, hetgeen betekent dat de snelheid ver achter de strip gelijk is aan de waarde die de klassieke theorie voorspelt (2.5.6). Uit figuur 5.5.15 blijkt verder, dat de snelheid ter plekke van de strip groter is dan 0.5, hetgeen ook in figuur 5.4.7<sup>a</sup> al te zien was. Dit is echter niet in strijd met de klassieke theorie, omdat deze slechts voorspelt, dat de gemiddelde axiale snelheid in de strip  $\bar{U}_s = 0.5$ .

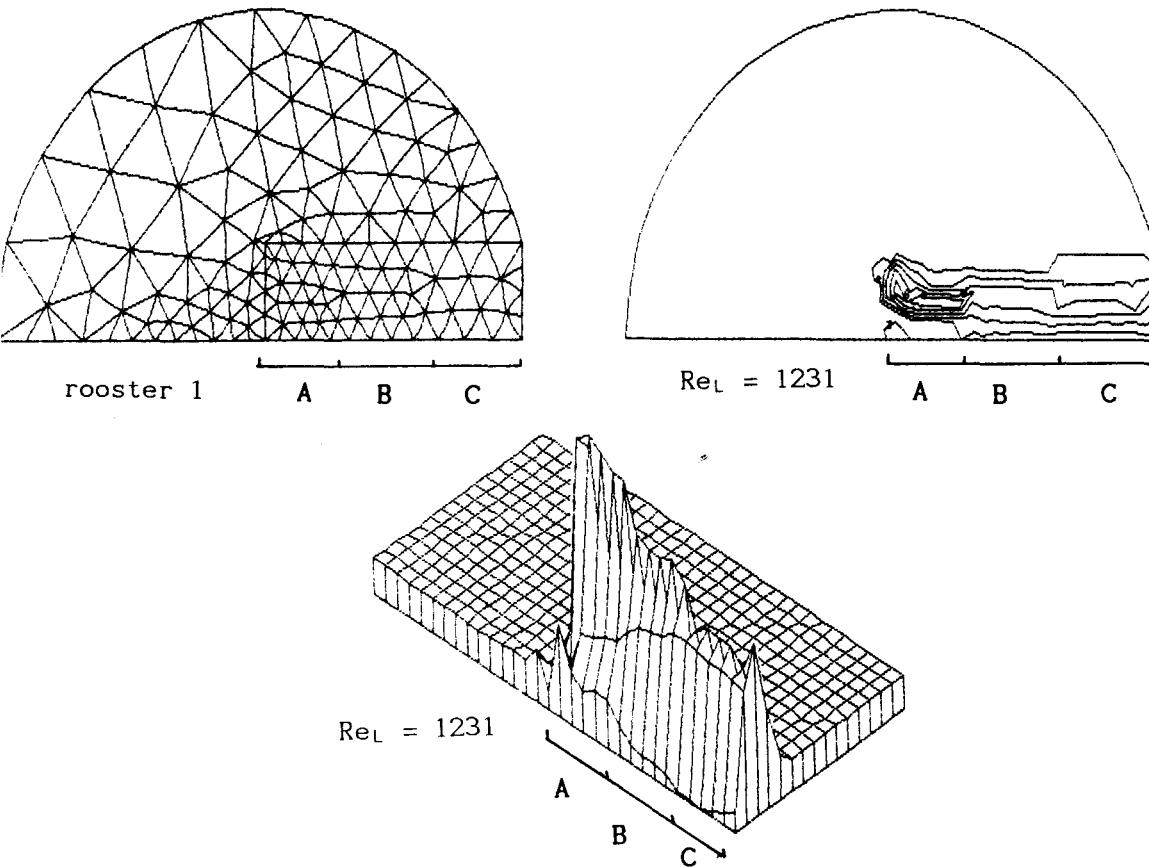
Ten opzichte van de druksprong, die gedefiniëerd is als het maximale verschil in de druk vóór en achter de strip, is niet gelijk aan de krachtdichtheid  $\hat{F}$  zoals (2.5.5) voorspelt.

Dit is een gevolg van de eindige breedte van de actuator strip.

We zullen in Appendix D hiervoor een uitvoerige verklaring geven.

De invloed van numerieke viscositeit.

Het effect van numerieke dispersie is duidelijk te maken aan de hand van de vortichiteit bepaald met rooster I (fig 5.5.17<sup>a</sup> t/m <sup>c</sup>) voor  $Re = 1231$ . De invloed van de dynamische viscositeit is dan te verwaarlozen.



**Figuur 5.5.17<sup>a, b, c</sup> : De vortichiteit, bepaald met rooster I met definitie van gebieden A, B en C.**

De jet wordt door het rooster in de  $y$ -richting opgevuld in gebied A, B en C met respectievelijk 5, 4 en 3 elementen (fig 5.5.17<sup>a</sup>). Hierdoor neemt ook de numerieke dispersie toe, waardoor de vortichiteit sterk diffundeert in de stroming en er geen details in de vortichiteitsverdeling meer zichtbaar zijn (fig 5.5.17<sup>b</sup>). De sterkte van de vortichiteit neemt door de numerieke dispersie sterk af (fig 5.5.17<sup>c</sup>).

Dit voorbeeld laat duidelijk zien, dat de roosterkeuze zeer belangrijk is, omdat het de oplossing mede kan bepalen. We mogen dan ook geen conclusies trekken uit een beperkt aantal numerieke berekeningen.

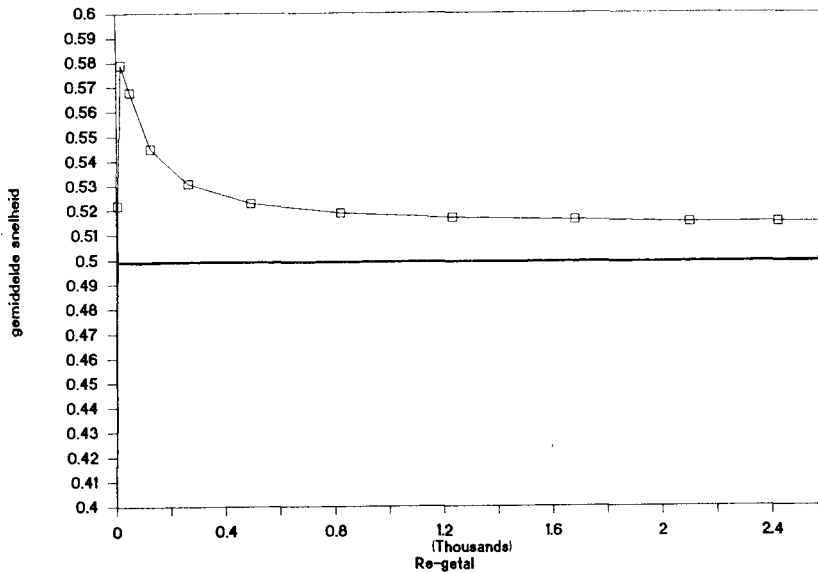
Op het effect van numerieke dispersie komen we nog uitvoerig terug in de volgende paragraaf.

5.5.4 Het afgegeven vermogen aan de stroming.

Nu het snelheidsveld bij een opgelegde krachtverdeling bekend is, is het totale aan de stroming afgegeven vermogen te bepalen. Volgens de klassieke theorie geldt (2.5.8) :

$$P_{k1,20} = \hat{F} L \bar{U}_s \quad \text{met} \quad \bar{U}_s = \frac{1}{2}U_1$$

en is de gemiddelde snelheid in de strip dus mede bepalend voor het afgegeven vermogen. In figuur 5.5.18 is  $\bar{U}_s$  uitgezet als functie van  $Re_L$  bepaald voor een steilheidsfactor  $m = 17$  met rooster 3.



**Figuur 5.5.18 : De gemiddelde snelheid op de strip als functie van  $Re$ .**

De snelheid is voor zeer lage waarden van het Reynolds getal klein omdat dan de viscositeit ervoor zorgt, dat de toegevoerde impuls snel diffundeert zonder een stroming te veroorzaken. We kunnen de gemiddelde snelheid in de strip en het afgegeven vermogen vergelijken met de waarden volgens de klassieke theorie voor zowel  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$ . Voor de gemiddelde snelheid op de strip geldt na extrapolatie voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$  :

$$\bar{U}_s = 0.51 \pm 0.01$$

Deze waarde is binnen de onnauwkeurigheid gelijk aan de waarde die de klassieke theorie voorspelt ( $\bar{U}_s = 0.5$ ).

De manier waarop de extrapolatie naar  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$  is uitgevoerd zullen we bespreken aan de hand van de berekening van het afgegeven vermogen.

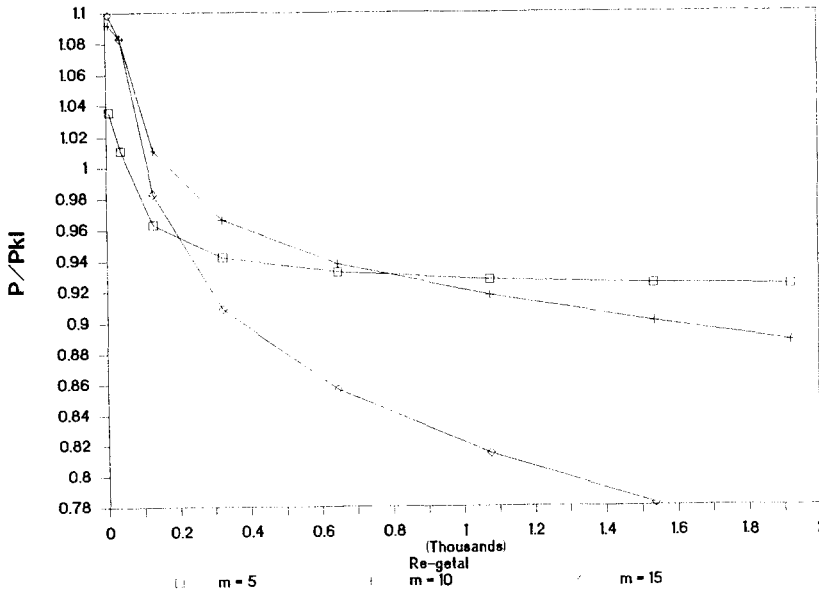
Omdat de krachtverdeling op een eindig gebied werkt moeten we het afgegeven vermogen berekenen volgens (5.5.4).

$$P_{2D} = \iint_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} \, d\Omega \tag{5.5.4}$$

Hierbij geldt het hele rooster als integratiegebied, omdat de krachtverdeling (5.2.1) zich oneindig ver uitstrekt, en dus overall een bijdrage geeft aan het vermogen. We vergelijken het vermogen  $P_{2D}$  met het toegevoerde vermogen volgens de klassieke theorie  $P_{k1,2D}$  (2.5.8). Het quotiënt van deze waarden noemen we de vermogenscoëfficiënt  $C_p$ . Hierbij dient opgemerkt te worden dat er een duidelijk verschil is met de klassieke theorie, die namelijk uitgaat van een niet-viskeus medium en een oppervlaktekracht invoert. De vergelijking geeft alleen voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$  een zinnig resultaat.

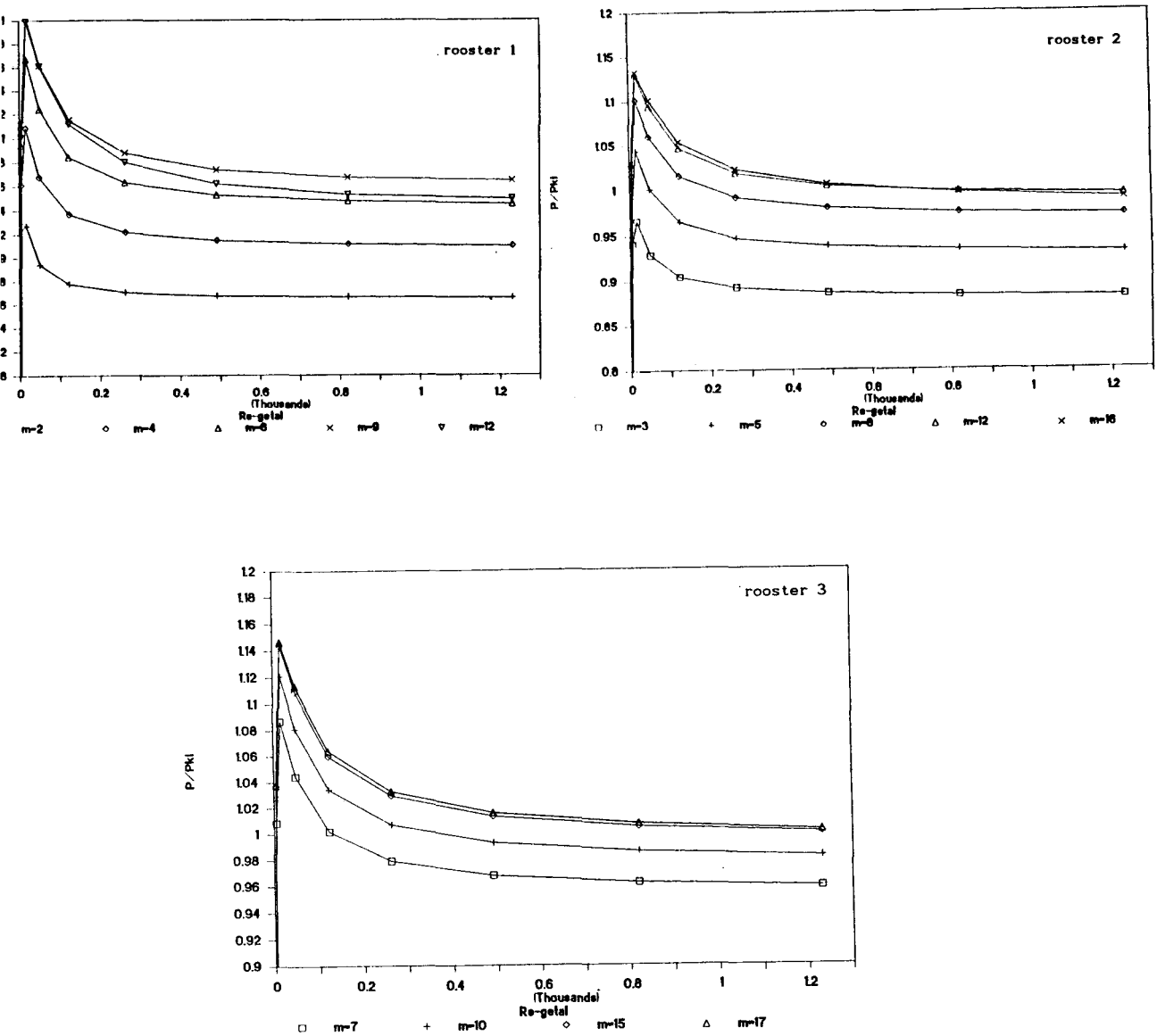
We bekijken eerst de invloed van de roosterkeuze door een berekening uit te voeren met een homogeen met elementen verdeeld rooster.

In figuur 5.5.19 is de vermogenscoëfficiënt  $C_p$  uitgezet als functie van het Re-getal voor dit rooster.



**Figuur 5.5.19 : De vermogenscoëfficiënt als functie van Re voor een homogeen verdeeld rooster.**

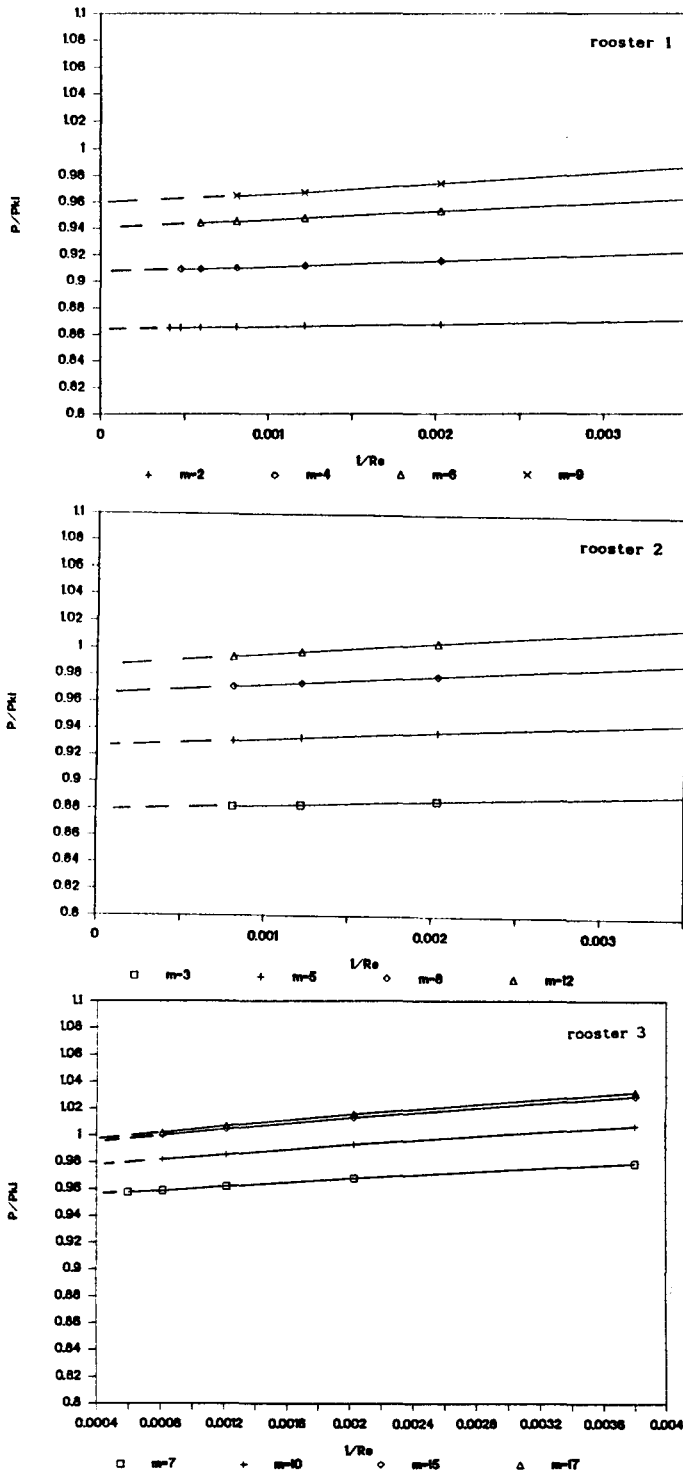
Uit figuur 5.5.19 blijkt, dat alleen voor  $m = 5$  het vermogen convergeert naar een betrouwbare limiet voor  $Re \rightarrow \infty$ . Het rooster is te grof op de plaatsen waar de gradiënten het grootst zijn. Voor hogere waarden van  $m$  neemt de numerieke dispersie toe zodat de snelheden in de strip afnemen. Een oplossing is een fijner rooster nabij het wervelvlak te kiezen. Met drie, in toenemende mate fijnere roosters (zie figuur 5.5.1) is de vermogenscoëfficiënt bepaald als functie van het Reynoldsgetal en voor verschillende steilheidsfactoren  $m$ . Voor de duidelijkheid zijn slechts enkele waarden van  $m$  uitgezet in figuur 5.5.20.



Figuur 5.5.20 : De vermogenscoëfficiënten als functie van  $Re$  voor verschillende roosters en steilheidsfactoren  $m$ .

De oplossingen voor de verschillende roosters blijken tot respectievelijk  $m = 8$ ,  $m = 12$  en  $m = 17$  te convergeren naar een betrouwbare limiet voor  $Re \rightarrow \infty$ . Boven deze waarde van  $m$  zorgt de numerieke dispersie voor een te laag berekend vermogen.

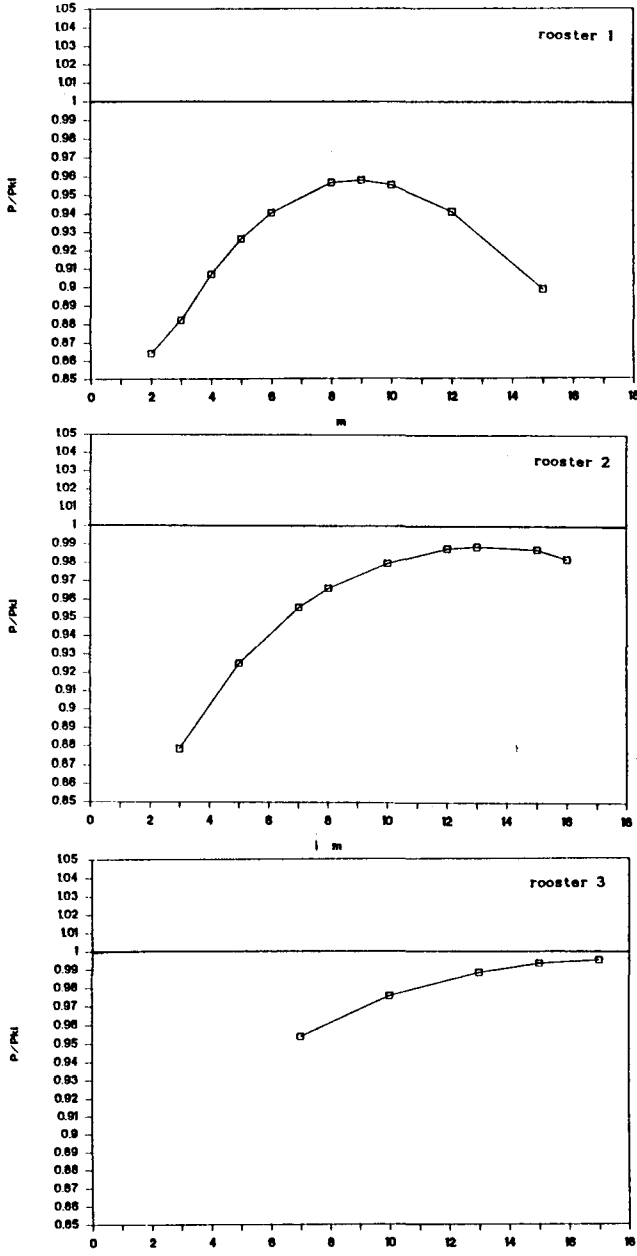
Om de limiet voor het Reynoldsgetal naar oneindig te bepalen voor een gegeven waarde van  $m$  zetten we de vermogenscoëfficiënt  $C_p$  uit tegen  $1/Re$ . Dit is gedaan in figuur 5.5.21.



Figuur 5.5.21 : De vermogenscoëfficiënt  $C_p$  als functie van  $1/Re$ .

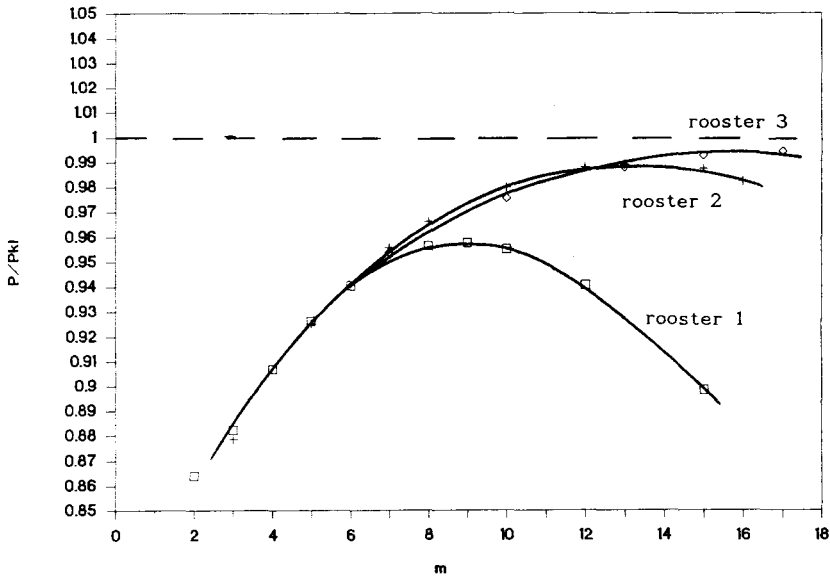


Met behulp van een lineaire extrapolatie van de laatste vier punten vinden we voor elke waarde van  $m$  een limietwaarde voor  $Re \rightarrow \infty$ . Deze limietwaarden kunnen we nu uitzetten als functie van  $m$  (fig 5.5.22).



Figuur 5.5.22 : De limietwaarden van de vermogenscoefficient voor  $Re \rightarrow \infty$  als functie van  $m$ .

In figuur 5.5.22 is het effect van numerieke dispersie nog duidelijker te zien. Wanneer numerieke dispersie grote invloed krijgt op de stroming daalt de limiet van het afgegeven vermogen naar een niet betrouwbare waarde. Om de limiet voor  $m \rightarrow \infty$  te bepalen zijn dan ook alleen de berekeningen met het fijnste rooster interessant. Combinatie van figuur 5.5.22 geeft figuur 5.5.23.



**Figuur 5.5.23 : De combinatie van resultaten met verschillende roosters.**

We vermoeden uit figuur 5.5.23, dat de laatste punten die berekend zijn met rooster 3 het meest betrouwbaar zijn om de limiet voor  $m \rightarrow \infty$  te bepalen. Daarom extrapoleren we de curve van rooster 3 volgens

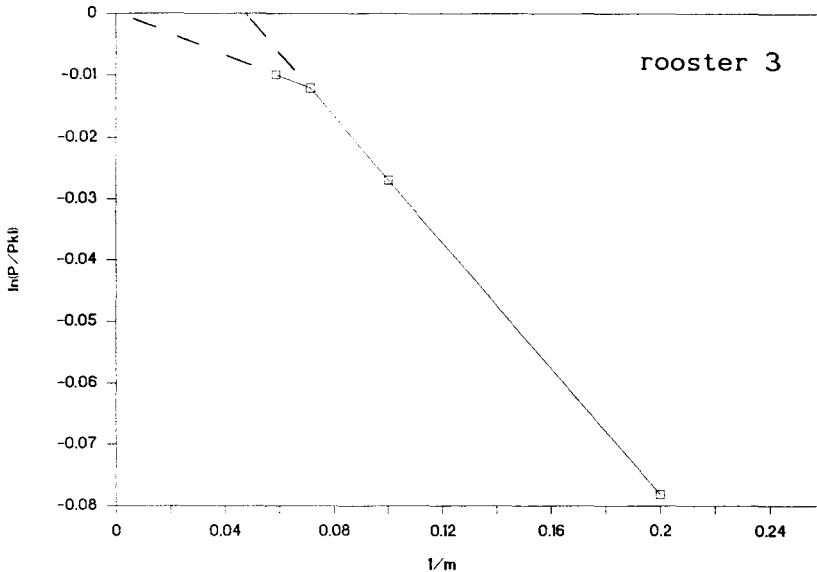
$$C_p = b \exp (a/m) \tag{5.5.5}$$

dus

$$\ln C_p = a(1/m) + \ln b$$

Door nu de logaritme van de vermogenscoëfficiënt uit te zetten tegen  $1/m$  proberen we de limiet voor  $m \rightarrow \infty$  bepalen.

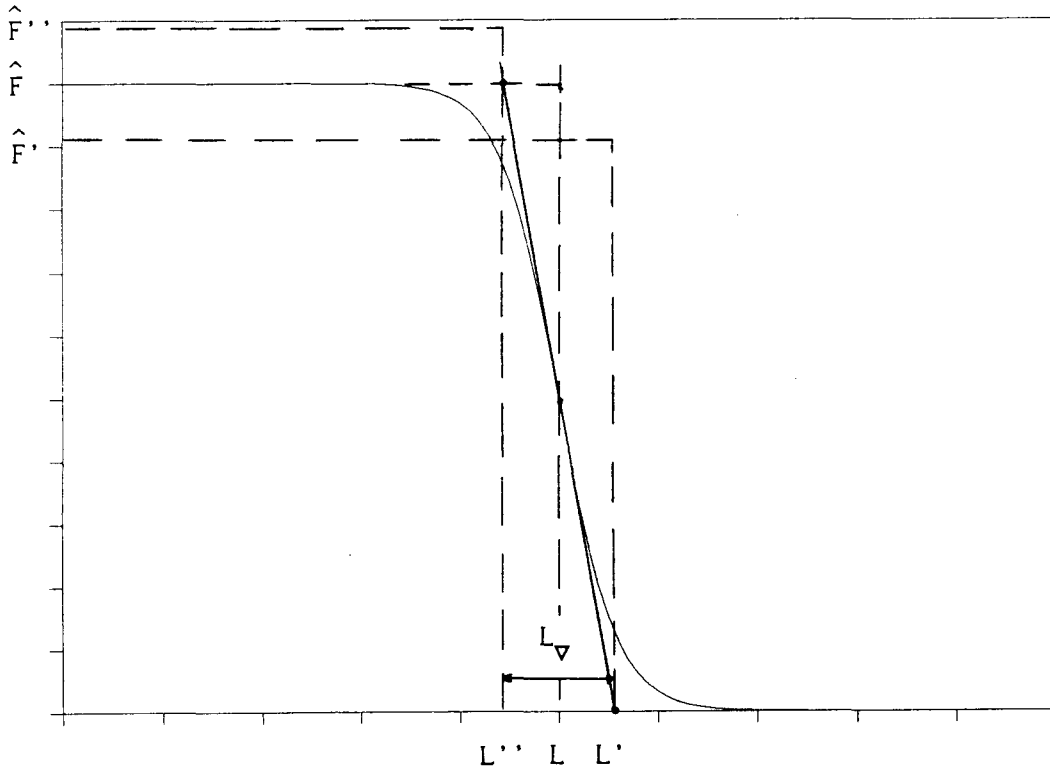
Dit is gedaan in figuur 5.5.24.



**Figuur 5.5.24 : De logaritme van de vermogenscoëfficiënt uitgezet tegen de inverse steilheidsfactor.**

Berekeningen met een nog fijner rooster bevestigen de waarde van  $C_p$  voor  $m = 17$ , zodat de extrapolatie niet erg nauwkeurig is uit te voeren.

We mogen de waarde die we gevonden hebben voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$  vergelijken met de waarde die de klassieke actuator theorie voorspelt. Om de vermogenscoëfficiënt te kunnen bepalen is het vermogen  $P_{2D}$  gerelateerd aan de waarde volgens de klassieke theorie voor het vermogen  $P_{k1,2D} = \hat{F} L \sqrt{(2\hat{F}/\rho)}$ . In de keuze van  $\hat{F}$  en  $L$ , karakteristieke grootheden voor de krachtdichtheid en de lengte van de strip zit echter enige willekeur voor eindige waarden van  $m$ . Zo mogen we gegeven een bepaalde krachtverdeling (fig.5.5.25) met even veel recht karakteristieke lengteschalen  $L'$  en  $L''$  en bijbehorende oppervlaktekrachtdichtheden  $\hat{F}'$  en  $\hat{F}''$  kiezen volgens figuur 5.5.25.



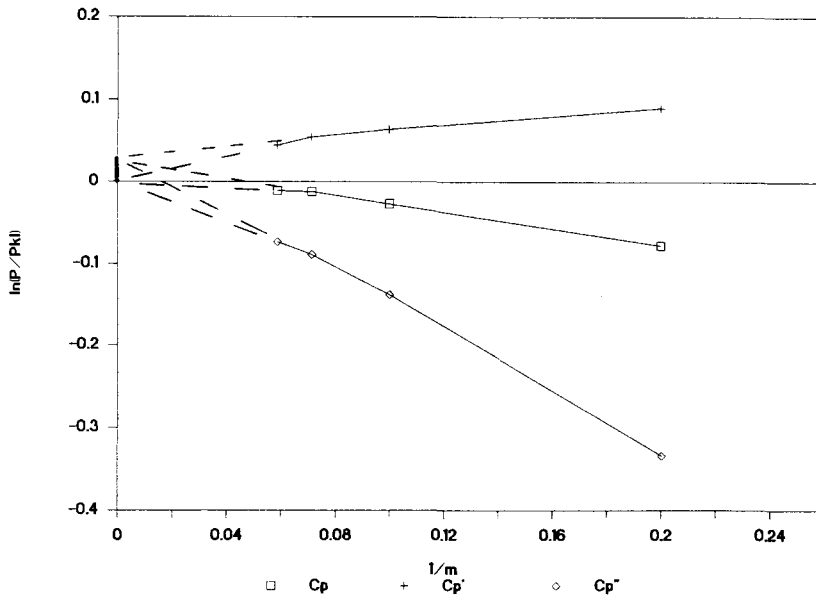
**Figuur 5.5.25 : Definitie van alternatieve karakteristieke waarden voor de krachtverdeling en de lengte.**

Er geldt voor de alternatieve verdelingen, mits we als eis stellen dat de totale toegevoerde kracht  $T_{2D} (= \hat{F} L)$  constant blijft :

$$L' = L + L_{\nabla} = L (1 + 2/m) \quad \text{en} \quad \hat{F}' = \hat{F} (1 + 2/m)^{-1} \quad (5.5.6)$$

$$L'' = L - L_{\nabla} = L (1 - 2/m) \quad \text{en} \quad \hat{F}'' = \hat{F} (1 - 2/m)^{-1} \quad (5.5.7)$$

Deze alternatieve karakteristieke waarden zijn in tegenstelling tot  $L$  en  $\hat{F}$  afhankelijk van  $m$  en benaderen indien  $m$  oneindig wordt  $L$  en  $\hat{F}$ . Voor eindige waarden van de steilheidsfactor  $m$  verandert het volgens de klassieke theorie toegevoerde vermogen  $\hat{F} L \sqrt{(2\hat{F}/\rho)}$ . Dan verandert voor deze alternatieve waarden ook de waarde van de vermogenscoëfficiënt van functie van  $m$ , zie figuur 5.5.26.



**Figuur 5.5.26 : De vermogenscoëfficiënt voor de drie verschillende karakteristieke waarden van de lengte en de krachtverdeling.**

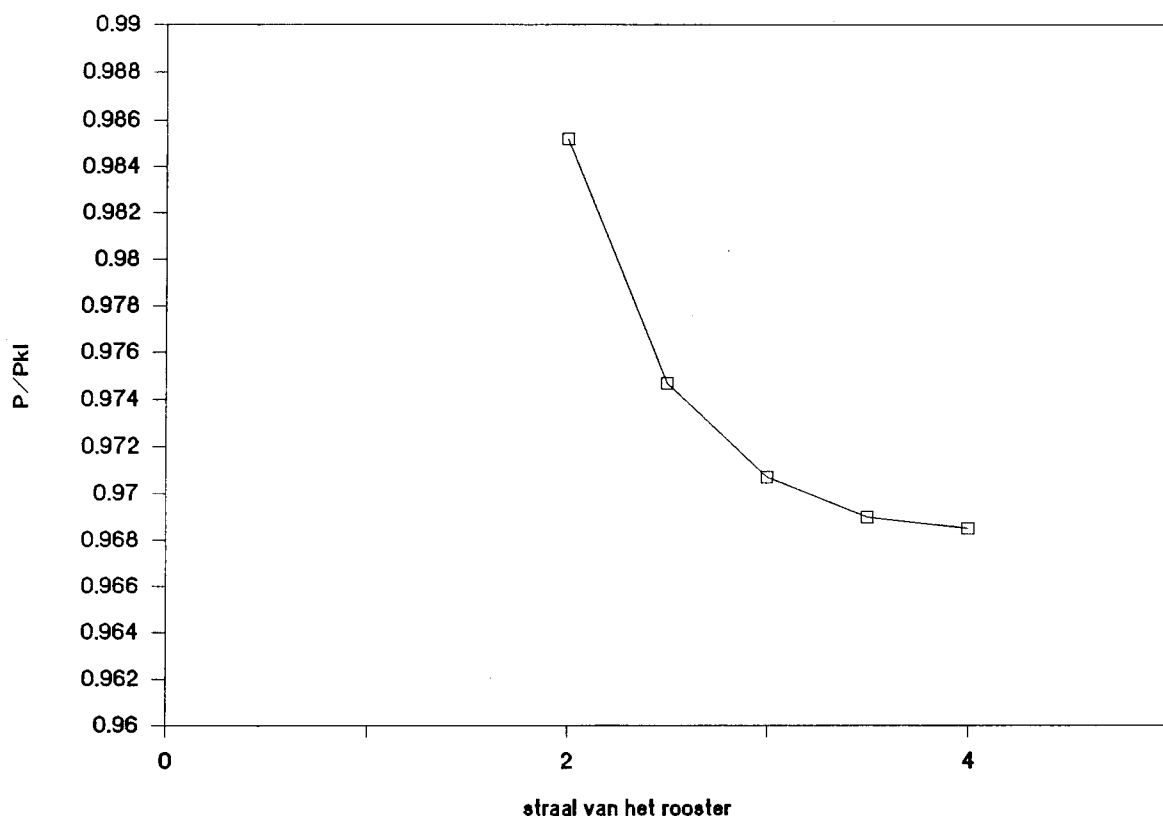
Uit figuur 5.5.26 blijkt, dat de willekeur in de keuze van de karakteristieke waarden in de limiet voor  $m \rightarrow \infty$  verdwijnt, en de vermogenscoëfficiënt geeft de limiet :

$$\underline{P_{2D}/P_{kL,2D}} = 1.02 \pm 0.02 \tag{5.5.8}$$

Deze schatting van de fout is gebaseerd op de onzekerheid in de extrapolatie van  $Re$  en  $m \rightarrow \infty$ .

We gaan nu kijken naar andere foutenbronnen ten gevolge van de discretisatie en de grootte van het integratiegebied.

Om te kijken of de grootte van het rooster en de keuze van de randvoorwaarden invloed heeft op het berekende vermogen is de grootte van het rooster gevarieerd. Bij verschillende stralen van het rooster is de vermogenscoëfficiënt bepaald voor  $Re \rightarrow \infty$  bij  $m = 10$  (fig. 5.5.27).



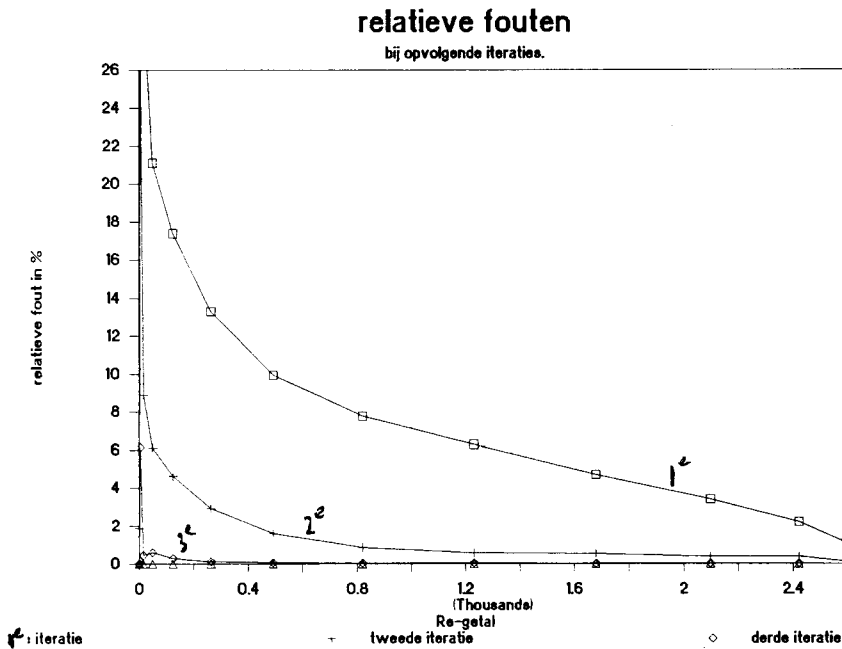
**Figuur 5.5.27 : De vermogenscoëfficiënt voor  $m = 10$  als functie van de grootte van het rooster.**

In voorgaande berekeningen zijn we steeds uitgegaan van een rooster met  $r = 2.5$ . Uit figuur 5.5.27 blijkt, dat door de eindige grootte van het rooster de vermogenscoëfficiënten die berekend zijn ongeveer 1% te groot zijn. Dit betekent, dat de uiteindelijke schatting van de vermogenscoëfficiënt (5.5.8) eerder een bovengrens, dan een ondergrens is.

### 5.6 Nauwkeurigheid en convergentie.

In figuur 5.6.1 is de relatieve fout uitgezet, die per iteratie ontstaat. Deze fout neemt steeds binnen 6 iteraties af tot minder dan  $10^{-6}$  per Re-waarde. De fout ten opzicht van de vorige Re-oplossing wordt steeds kleiner.

Voor  $Re = 2000$  verandert de oplossing minder dan 1% in de knooppunten, bij verhoging van Re met 400.

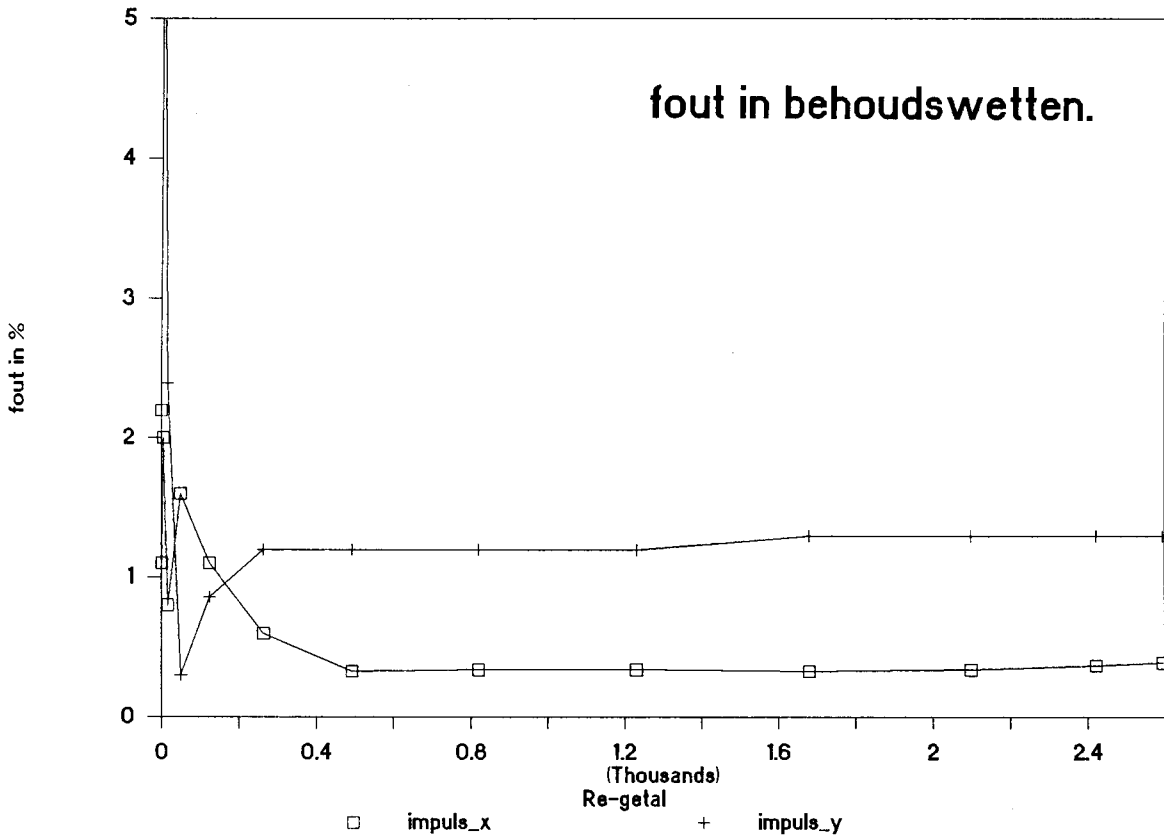


**Figuur 5.6.1 : De fout in de opeenvolgende iteraties bij de bepaling van de stroming van een hoog Reynolds getal (rooster 3,  $m=10$ ).**

Om de nauwkeurigheid van het berekende afgegeven vermogen te bepalen, is de massa-, en de impulsbalans gecontroleerd op het rooster. Indien aan impulsbehoud is voldaan, dan is tegelijk de mechanische energie balans kloppend. In figuur 5.6.2 is de relatieve fout in de afzonderlijke balansen uitgezet als functie van het Reynoldsgetal.

De absolute fout van de massabalans is hierbij gerelateerd aan de massastroom door de actuator strip. De absolute fout van de impulsbalain de x- en y-richting is gerelateerd aan de toegevoerde impuls via de

$$\text{externe kracht } \iint_{\Omega} \underline{f} \, d\Omega.$$



**Figuur 5.6.2 : De fout in de diverse balansen voor rooster 3, bepaald met  $m=17$ .**

De relatieve fout in de massabalans is steeds kleiner dan  $10^{-4}\%$ , voor de impulsbalans geldt zowel in de x-richting als in de y-richting een maximale relatieve fout van ongeveer 1%. De fouten zijn een gevolg van de numerieke afbreekfouten, die ontstaan ten gevolge van de discretisaties en bij de numerieke intergatieroutines die gebruikt zijn om de afzonderlijke termen in de balansen te bepalen. We merken hierbij op, dat in de controle van de behoudswetten ook de druktermen en de viskeuze termen zijn meegenomen, hoewel we in paragraaf 2.5.2 hebben gezien, dat deze te verwaarlozen zijn.

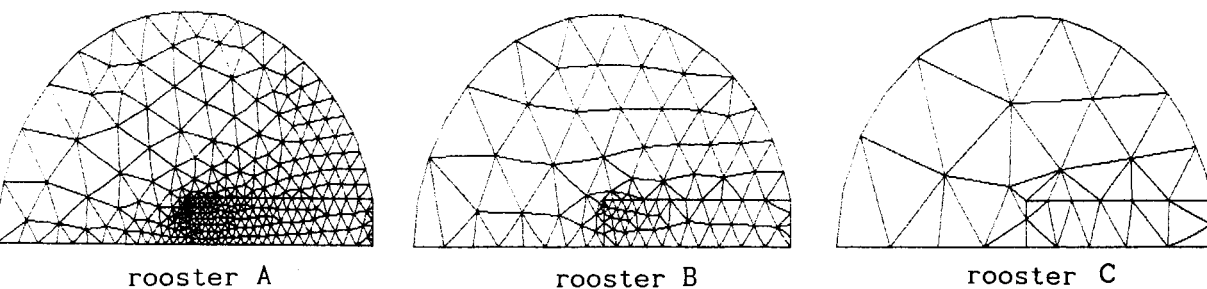
Omdat de krachtverdeling exact bekend is, en de snelheid in de x-richting een maximale fout van 1% heeft, is ook het afgegeven vermogen

$$\iint_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} \, d\Omega \text{ op } 1\% \text{ nauwkeurig bepaald.}$$

Madsen [MAD83,85] heeft in zijn berekeningen ook de massa- en impulsbalans gecontroleerd, en vindt voor de massabalans een afwijking van 0.20% en voor de impulsbalans een afwijking van 0.57%. De waarde voor de afwijking van de massabalans is een factor 1000 groter dan bij onze berekeningen, en de afwijking van de impulsbalansen zijn vergelijkbaar met onze berekeningen.

Door het rooster te verfijnen is de convergentiefactor bepaald van verschillende termen.

Dit is gedaan met de roosters A, B en C uit figuur 5.6.3.



**Figuur 5.6.3 : De roosters waarmee de convergentiefactor van de oplossing is bepaald.**

Bij de roosters uit figuur 5.6.3 is het aantal elementen op de randen gehalveerd, hetgeen natuurlijk nog niet wil zeggen, dat het totale aantal elementen is gehalveerd.

We kijken nu naar de convergentiefactor die is gedefiniëerd als

$$A_h = \frac{u_{h/2} - u_{h/4}}{u_h - u_{h/2}} \quad (5.6.1)$$

Hierin is  $u_h$  de oplossing voor een rooster met een afstand  $h$  tussen de knooppunten en  $u_{h/2}$  de oplossing voor een rooster met een afstand  $h/2$  tussen de knooppunten. In figuur 5.6.3 zien we echter direct al dat de afstand bij één rooster niet constant is, en dat niet alle afstanden halveren als we de afstanden op de randen exact halveren.

De convergentiefactor die we bepalen is zal dus een benadering zijn.

Een oplosmethode convergeert als de convergentiefactor kleiner is dan 1, dan neemt de fout bij opeenvolgende iteraties namelijk af.

Voor een aantal termen is de convergentiefactor bepaald. Deze zijn gegeven in tabel I.



Tabel I : De convergentiefactoren voor enkele belangrijke termen.

Reynolds getal	$A_h$		
	0.12	0.87	4.36
$\Delta$ massabalans	0.26	0.27	0.02
$\Delta$ impulsbalans (x)	0.31	0.28	0.43
$\Delta$ impulsbalans (y)	0.71	0.71	0.71
afgegeven vermogen	0.31	0.31	0.31

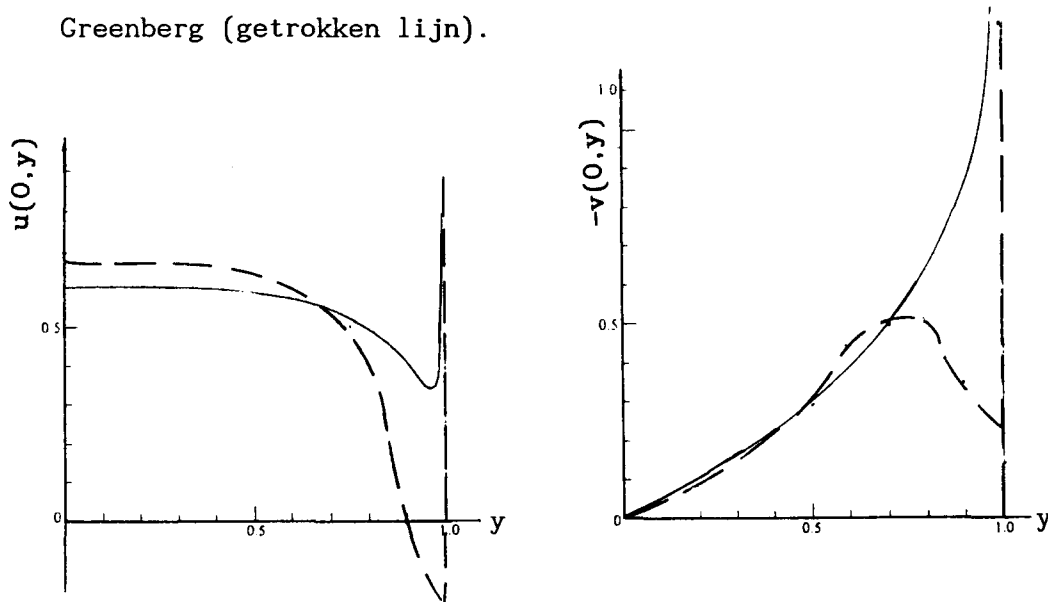
De gebruikte integratieroutines hebben een afbreekfout van orde  $h^2$ , zodat we een convergentiefactor 0.25 verwachten. De waarde van de afbreekfout is echter ook nog afhankelijk van de scherppte van de elementen en van de oplossing en zijn afgeleide. De exacte waarde van de convergentiefactor vinden we bovendien pas voor de limiet van  $h \rightarrow 0$  en bij een zuivere stapahalvering. Gezien de door ons gebruikte procedure is het niet verwonderlijk dan de waarden in tabel I dan ook van 0.25 afwijken. Opvallend is, dat we voor de afwijking van de impulsbalans in de y-richting, die relatief het grootst is (fig.5.6.2), ook de hoogste convergentiefactor vinden. Hiervoor hebben we geen verklaring.

Uit tabel I volgt echter wel dat alle termen convergeren.

### 5.7 Vergelijking met berekeningen en metingen van Lee en Greenberg.

In de berekeningen van Lee en Greenberg [LEE84] van de niet-viskeuze stroming ten gevolge van een actuator strip veronderstellen zij een wortelsingulariteit in de wervelsterkte verdeling aan de rand van de strip (§ 4.5). De berekening van de stroming zonder uniforme hoofdstroming, die we reeds eerder in § 2.5.3 hebben besproken vergelijken we met onze numerieke berekeningen voor  $m = 17$  en  $Re = 2500$ .

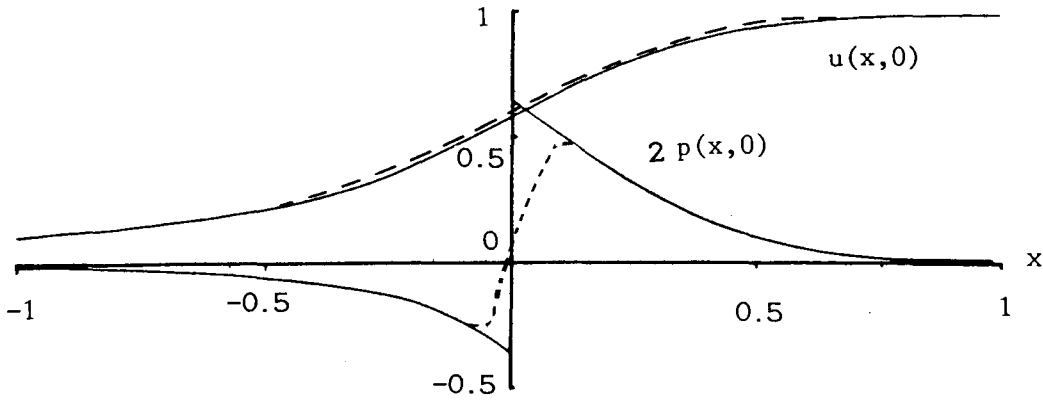
De stroming vertoont duidelijke verschillen nabij de rand van de strip. Lee en Greenberg voorspellen, dat daar de snelheden  $u$  en  $v$  naar oneindig gaan. In figuur 5.7.1 zijn de door ons berekende snelheden ter plekke van de strip (gestippelde lijn) vergeleken met de theorie van Lee en Greenberg (getrokken lijn).



**Figuur 5.7.1 : Vergelijking van de snelheden ter plekke van de strip.**

De snelheden nemen niet toe als we de rand van de strip naderen, maar nemen bij de rand monotoon af. Er treedt zelfs een terugstroming op. Ook de maximale vorticititeit, en de minimale druk treden niet op bij de rand van de strip, wat de theorie van Lee en Greenberg voorspelt, maar op 90% van de striplengte.

We vergelijken de snelheid en druk op de symmetrie as in figuur 5.7.2. De gestippelde lijn geeft steeds de door ons berekende waarde, de getrokken lijn geeft de waarde volgens de theorie van Greenberg.

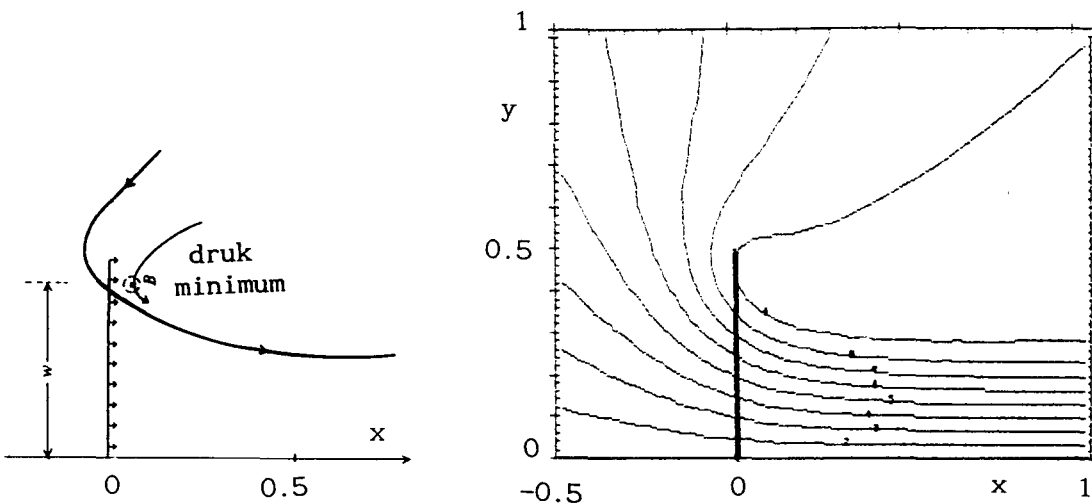


Figuur 5.7.2 : Vergelijking van de snelheid en druk op de symmetrie as.

Door de eindige dikte bij de numerieke berekeningen treedt de druksprong in een eindig gebied op en is de druksprong kleiner dan  $\frac{1}{2}$ .

De afwijkingen ten opzichte van de berekeningen van Lee en Greenberg zijn afgezien hiervan kleiner dan 1%, verschillen in de berekeningen van Lee en Greenberg en onze numerieke berekeningen liggen in de breedte van de jet. Deze breedte is in de berekeningen van hen 10% groter dan in onze berekeningen.

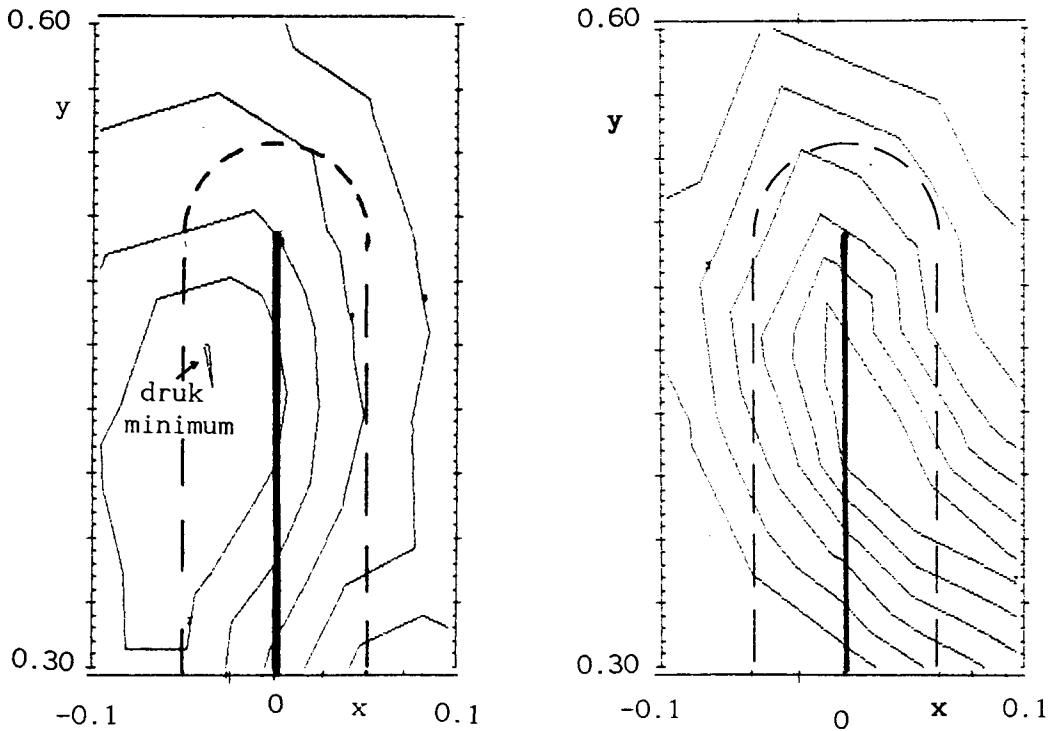
Behalve berekeningen, hebben Lee en Greenberg ook een experiment uitgevoerd aan een twee dimensionale stroming ten gevolge van een actuator strip met uniforme krachtverdeling [LEE84]. Ook deze hebben we reeds besproken in § 2.5.3. De metingen zijn verricht voor waarden van het Reynoldsgetal tussen 3000 en 4000. De metingen zijn dus goed vergelijkbaar met onze numerieke berekeningen voor de hoogste Reynoldswaarden. In figuur 5.7.3 is het stroomlijnenpatroon vergeleken.



Figuur 5.7.3 : Vergelijking van de stroming in de buurt van de strip.

Uit een kwalitatieve vergelijking is te zien, dat er stroomlijnen aan de rand van de strip zijn, die het krachtveld meerdere malen passeren.

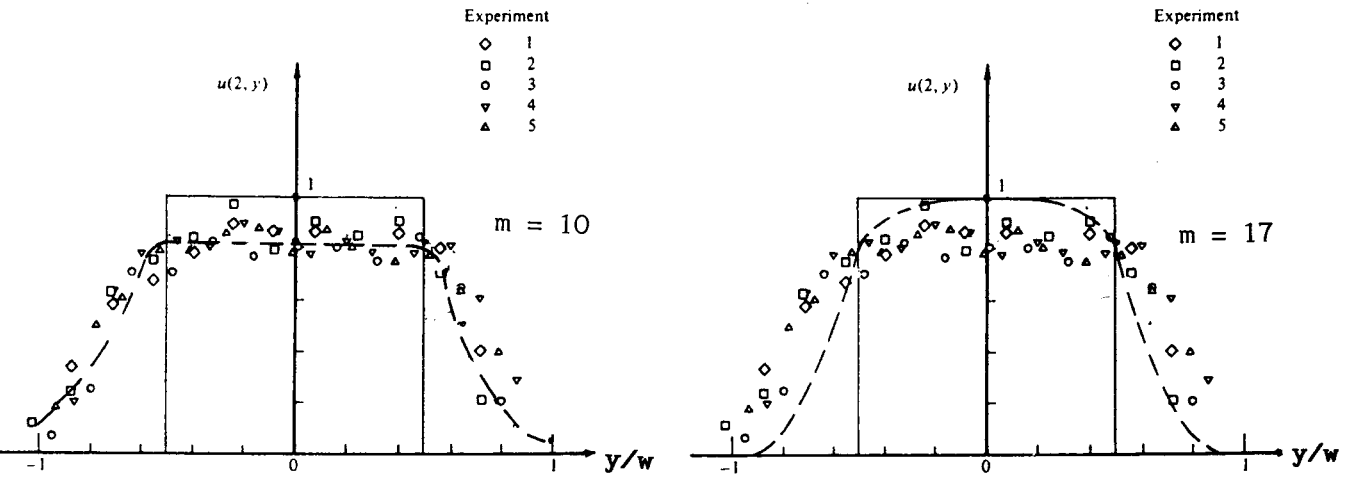
In tegenstelling tot berekeningen van Lee en Greenberg is in de metingen wel een minimum in de druk en een maximum in de vorticititeit aanwezig op 90% van de strip, hetgeen ook uit de door ons berekende druk- en vorticititeitsverdeling duidelijk te zien is (fig. 5.7.4).



**Figuur 5.7.4 : De berekende druk- en vorticititeitsverdeling nabij de rand van de strip.**

Hierbij dient opgemerkt te worden, dat de experimenteel gesimuleerde actuatorstrip van Lee en Greenberg ook een eindige dikte heeft. De impuls wordt namelijk toegevoerd via een aantal turbulente 'jets' op een rij. De breedte van de strip is de afstand achter de toevoer, waar de turbulente jets mengen met de hoofdstroming (fig. 2.5.10). We definiëren de breedte van de strip met behulp van de halfwaarde breedte  $L_{1/2}$  (2.5.7). De plaats van de toevoer definiëren we als de linkerrand van de strip ( $x = -\frac{1}{2}L_{1/2}$ ). Dan volgt uit de plaats van het drukminimum in de metingen van Lee & Greenberg in vergelijking met onze berekeningen (fig.5.7.4) de breedte van de strip :  $L_{1/2} = 0.18 \pm 0.01$ . De metingen van Lee & Greenberg moeten dus vergeleken worden met onze berekeningen voor  $m = 10$  (fig. 5.2.5). Omdat de strip een eindige breedte heeft volgt nu, dat het drukminimum zich niet stroomafwaarts achter de strip bevindt, maar in de strip.

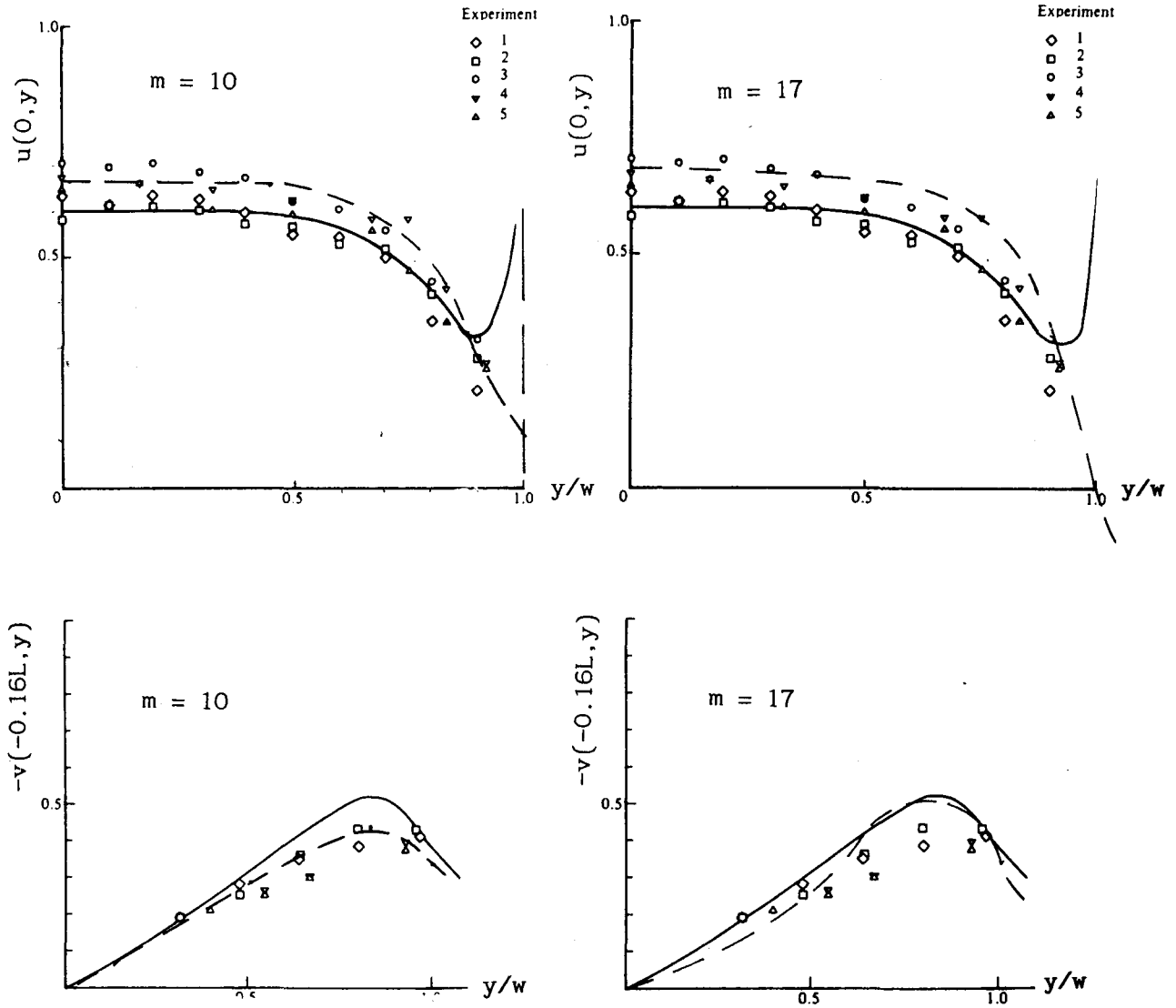
Verder is een snelheidsmeting verricht in de jet achter de strip, op een striplengte afstand van de strip. We vergelijken de meting weer met onze numerieke berekening voor  $m = 10$ , wat overeenkomt met de geschatte breedte van de gesimuleerde strip. Daarnaast laten we ook een vergelijking zien voor  $m = 17$ . De door ons berekende waarden zijn met een gestippelde lijn weergegeven. De getrokken lijn in de figuur is de waarde volgens de berekeningen van Lee en Greenberg. De waarden zijn dimensieloos gemaakt met de snelheid op oneindig.



**Figuur 5.7.5 : Vergelijking van de snelheden in de jet voor  $m = 10$  en  $m = 17$ .**

De verschillen tussen meting en berekening zijn verder te verklaren doordat volgens Lee en Greenberg de jet turbulent is, zodat het snelheidsprofiel afvlakt.

Ook de snelheden ter plekke van de strip zijn gemeten en vergeleken met de numerieke berekening voor  $m = 10$  en  $m = 17$  (fig 5.7.6). De getrokken lijnen geven de berekende waarden van Lee en Greenberg weer, en de gestippelde lijnen onze berekeningen.



Figuur : 5.7.6 : Vergelijking van de snelheden ter plekke van de strip. voor  $m = 10$  en  $m = 17$ .

In de figuur is te zien, dat de metingen van Lee en Greenberg voor de geschatte breedte van de strip ( $m = 10$ ) beter overeenkomt met onze berekeningen dan voor  $m = 17$ . Dit bevestigt de geschatte breedte van de strip.

De metingen van zowel  $u$  als  $v$  vertonen een zeer goede overeenkomst met onze berekeningen, over de hele strip indien we rekening houden met de eindige dikte van de gesimuleerde strip. Dit in tegenstelling tot de eigen theorie van Lee en Greenberg.

De berekeningen van Madsen [MAD83,85] zijn verricht met een uniforme hoofdstroming en geven een afwijking van de klassieke theorie van circa 5% (§ 2.5.5). We hebben laten zien, dat resultaten van Madsen in de limiet voor  $m \rightarrow \infty$  vergelijkbaar zijn met berekeningen aan een actuator strip voor  $U_0 = 0$ . Aangezien er echter wel een hoofdstroming is meegenomen, is het onduidelijk of de resultaten nu ook vergelijkbaar zijn. De verschillen die we vinden in het afgegeven vermogen in de limiet voor uniforme krachtverdelingen kunnen we dan niet verklaren. Zonder enige verduidelijking stelt Madsen wel ten aanzien van de stroming aan de rand van een actuatorstrip zonder hoofdstroming :

1. *"Het is in te zien dat de stroming aan de rand van de strip gericht is in de y-richting".*
2. *"De stroming door de strip is nabij de rand sterk gereduceerd".*

Hetgeen ook overeenkomt met onze numerieke berekeningen.

## 5.8 Conclusies

De stroming ten gevolge van een actuator strip met eindige dikte is bepaald tot een Reynoldsgetal van 2500. Door de strip steeds dunner te maken, door een steilheidsfactor  $m$  te verhogen, wordt er een oneindig dunne actuator strip benaderd (§ 5.2).

Er blijkt aan de rand van de strip een stroming tegen de richting van de kracht in te zijn. Deze stroming is een gevolg van de vorticititeit, die een maximum heeft op 90% van de strip en de stroming nabij de striprand sterk bepaald (§ 5.5).

Een vergelijking met de klassieke actuator theorie van Froude is mogelijk voor de limiet van  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$ .

Door een nauwkeurige extrapolatie is een schatting gemaakt van de limietwaarden van de gemiddelde snelheid in de strip en het afgegeven vermogen voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$ . De invloed van de grootte van het rooster en de elementverdeling in het rooster zijn nauwkeurig bekeken (§ 5.3, 5 en 6).

In deze limiet geldt voor de gemiddelde snelheid in de strip  $\bar{U}_s = 0.51 \pm 0.01$  en voor het afgegeven vermogen  $P_{2D} = 1.02 \pm 0.02$ . Deze waarden zijn dimensieloos gemaakt met de waarden die de klassieke theorie voorspelt voor de snelheid ver achter de strip en het afgegeven vermogen.

Er blijkt geen significante afwijking van de theorie van Froude te zijn. De klassieke theorie veronderstelt dat het singulier gedrag aan de rand van de strip geen invloed heeft op  $\bar{U}_s$  en  $P_{2D}$ . We hebben in dit werk het tegendeel niet kunnen aantonen, en vermoeden dan ook, dat deze veronderstelling correct is.

De berekeningen komen bovendien zeer goed overeen met metingen die zijn verricht door Lee en Greenberg aan een gesimuleerde actuator strip met eindige dikte (§ 5.7). Dit in tegenstelling tot berekeningen van Lee en Greenberg zelf [LEE84].



## Hoofdstuk 6 De actuatorschijf.

### 6.1 Inleiding

Alhoewel de klassieke actuator theorie van Froude geen verschillen voorspelt tussen de stroming ten gevolge van een actuator strip of een schijf, is dit toch niet vanzelfsprekend.

Er bestaan namelijk in de stromingsleer veel problemen, waarvoor een tweedimensionale benadering een essentiële andere oplossing geeft dan een driedimensionale benadering. Zo is de stroming van een vrij wervelpaar stationair, zoals we zagen in § 2.3. De driedimensionale axiaal symmetrische stroming ten gevolge van een vrije werveling bestaat echter niet. De op de ring zelfgeïnduceerde snelheid is dan oneindig groot [BAT67].

Vandaar dat we ook de stroming ten gevolge van een actuator schijf numeriek willen bepalen. Daarbij zijn we vooral geïnteresseerd in het gedrag van de stroming nabij de randen van de schijf.

Greenberg heeft berekeningen verricht aan de actuator schijf voor een niet-viskeuze stroming zonder hoofdstroming [GRE72]. Schmidt en Sparenberg hebben het stromingsveld bepaald ten gevolge van een actuator schijf met een opgelegd singulier gedrag aan de rand van de schijf [SCM77]. Sparenberg verwijst verder naar een meting van G.N. Adams van een vier-bladige propeller in een stilstaand fluïdum [SPA84]. Tenslotte heeft van Kuik [KUI89] ook metingen verricht aan een tweebladige rotor in een stilstaand fluïdum.

## 6.2 De krachtverdeling $\underline{f}$

We benaderen de actuator schijf weer met de volumekracht door te nemen :

$$\underline{f} = \hat{F} \delta(x) \underline{e}_x \quad (6.2.1)$$

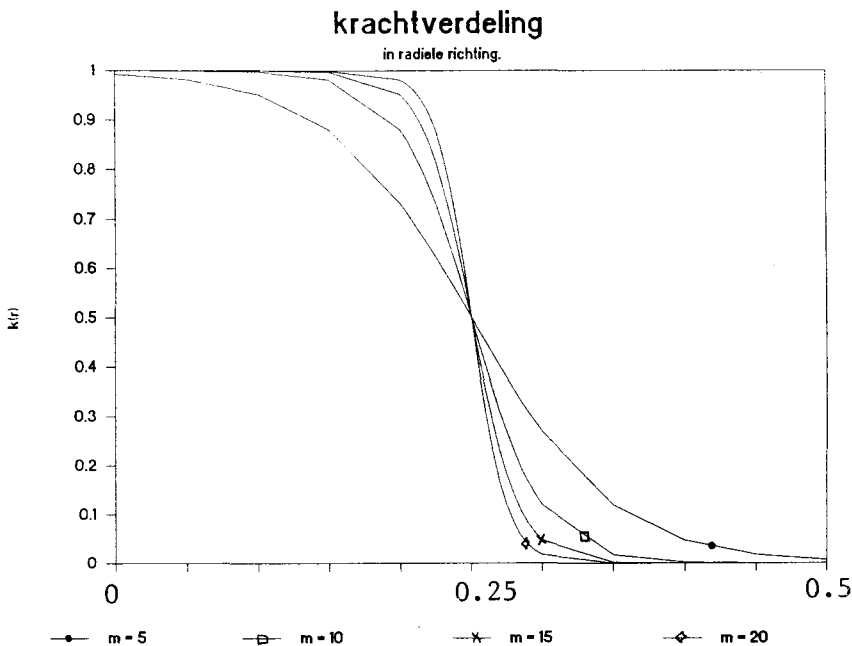
Hierbij werkt  $\hat{F} \underline{e}_x$  op een rond vlak met doorsnee  $D$ . Als benadering van (6.2.1) kiezen we voor de krachtdichtheid :

$$\underline{f} = (f_z, f_r) = \hat{F} (g(z) k(r), 0) \quad (6.2.2)$$

$$\text{met } g(z) = \frac{m}{2 \cosh^2 mz/D}$$

$$k(r) = \frac{1}{2} (1 - \tanh[m((\frac{r}{D})^2 - \frac{1}{4})])$$

Hierbij is  $g(z)$  dezelfde benadering van de delta functie uit de berekening aan de actuator strip. De functie  $k(r)$  nadert tot 1 voor  $r/D < 1/2$ , en is elders 0. De benaderingen worden beter naarmate de steilheidsfactor  $m$  toeneemt. In figuur 6.2.1 is de krachtverdeling in de radiële richting weergegeven voor verschillende waarden van  $m$ .



Figuur 6.2.1 : De functie  $k(r)$  voor verschillende waarden van  $m$ .

Bij deze keuze van  $\underline{f}$  geldt dat de totale toegevoerde kracht :

$$\iiint_V f_x \, dV = T_{30} \quad (6.2.3)$$

constant is voor elke waarde van  $m$ . De functie  $k(r)$  als functie van  $r^2$  is gelijk aan de tweedimensionale verdeling  $h(y)$  als functie van  $y$ .

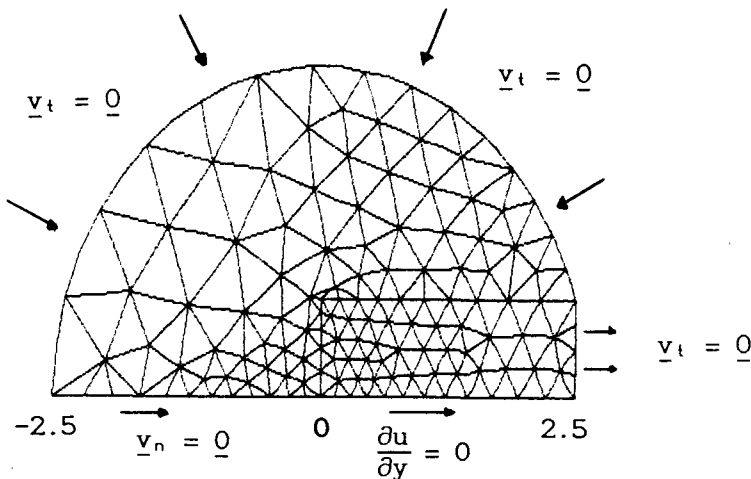
We kunnen nu analoog aan de tweedimensionale berekening lengteschalen  $D_{\nabla}$ ,  $D_{99/1}$  en  $D_{1/2}$  invoeren volgens figuur 5.2.3 en 5.2.4.

We maken de Navier-Stokes vergelijkingen weer dimensieloos (zie § 5.3) met behulp van de krachtdichtheid  $\hat{F}$  en de doorsnee van de schijf  $D$ , die constant zijn in de numerieke berekening.

In de volgende paragrafen werken we dan weer met dimensieloze variabelen.

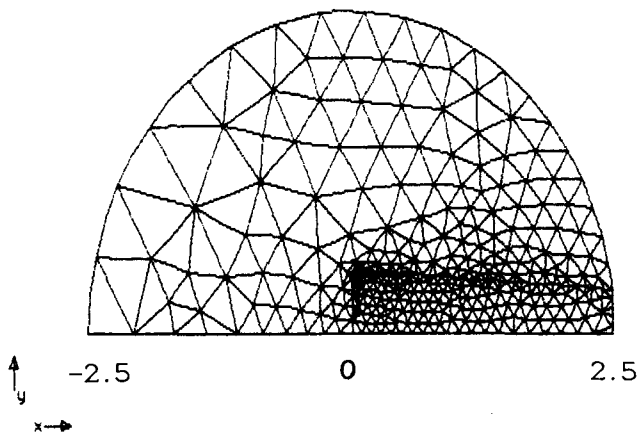
### 6.3 Roosterkeuze

Omdat het probleem axiaalsymmetrisch is kunnen we de berekening met een tweedimensionaal rooster uitvoeren. De enige afhankelijke coördinaten zijn de radiële en axiale  $r, z$  coördinaten. We rekenen nu met een halve cirkel als rooster, met dezelfde randvoorwaarden als in het tweedimensionale probleem (fig 6.3.1).



Figuur 6.3.1 : Roosterkeuze met randvoorwaarden.

Ook de driedimensionale berekeningen zijn gedaan tot een maximum Reynoldsgetal van 2500 betrokken op de diameter van de schijf en een steilheidsfactor  $m = 17$ . Om zo weinig mogelijk last van numerieke dispersie te hebben is het stromingsveld met het rooster bepaald, waarmee bij berekeningen aan de actuator strip dit effect minimaal was. Dit rooster is weergegeven in figuur 6.3.2.



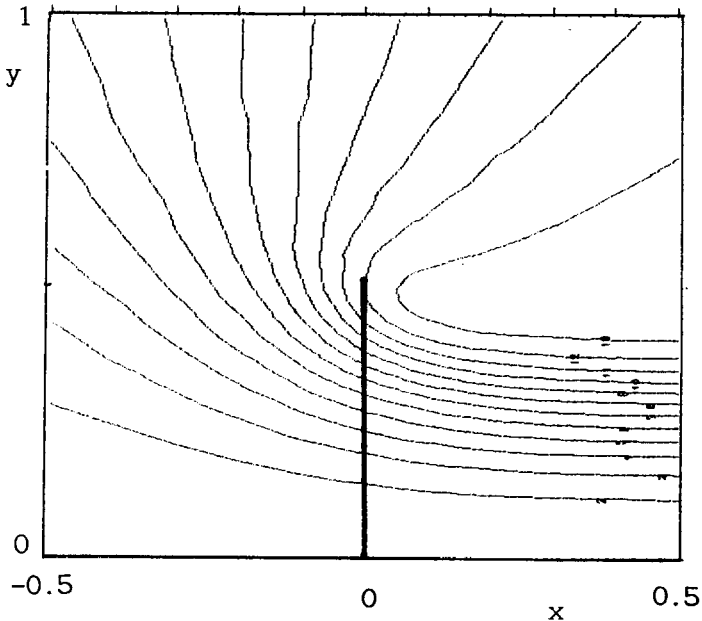
Figuur 6.3.2 : Het rooster, waarmee de oplossing is bepaald tot  $Re = 2500$  en  $m = 17$ .

6.4 Resultaten van berekeningen aan een actuator schijf.

6.4.1 Het stromingsveld ten gevolge van de schijf.

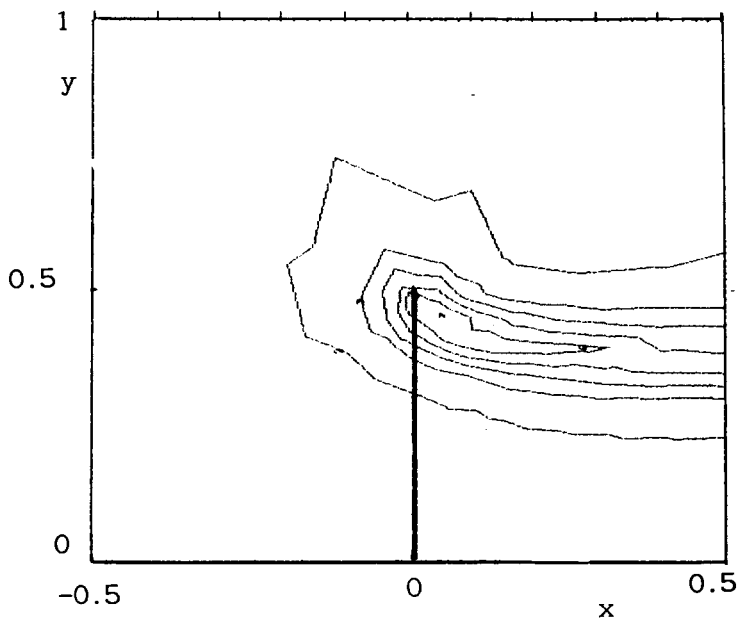
Het stromingspatroon ontwikkelt zich als functie van het Reynoldsgetal analoog aan de tweedimensionale stroming ten gevolge van de strip.

De stroming voor  $Re = 2500$  en  $m = 17$  is weergegeven in figuur 6.4.1.



Figuur 6.4.1 : Het stromingsveld bepaald voor  $m = 17$ ,  $Re = 2500$ .

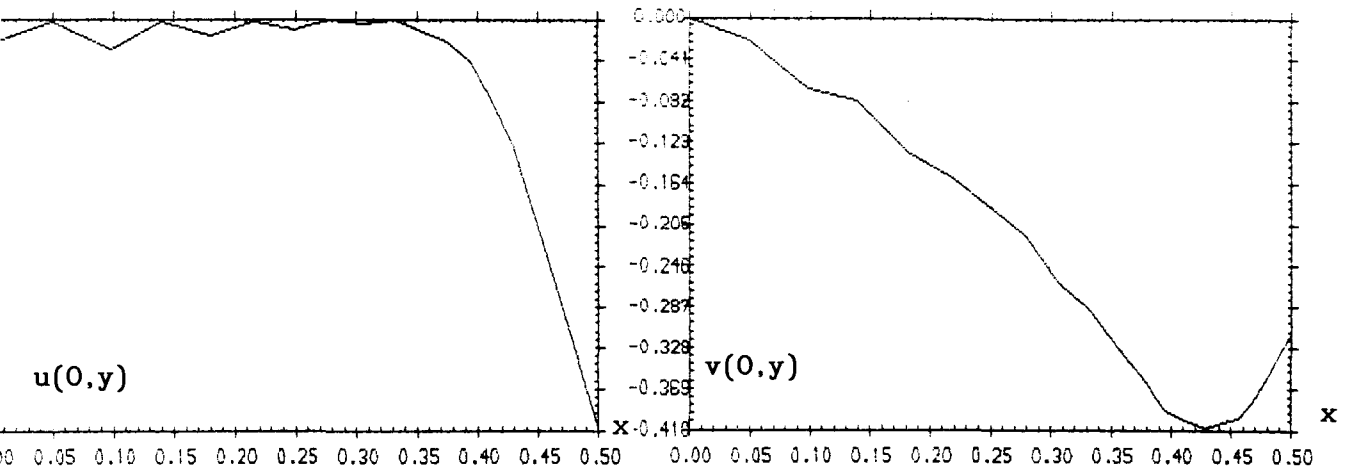
In figuur 6.4.2 in de vorticitetsverdeling gegeven voor stromingsveld van figuur 6.4.1.



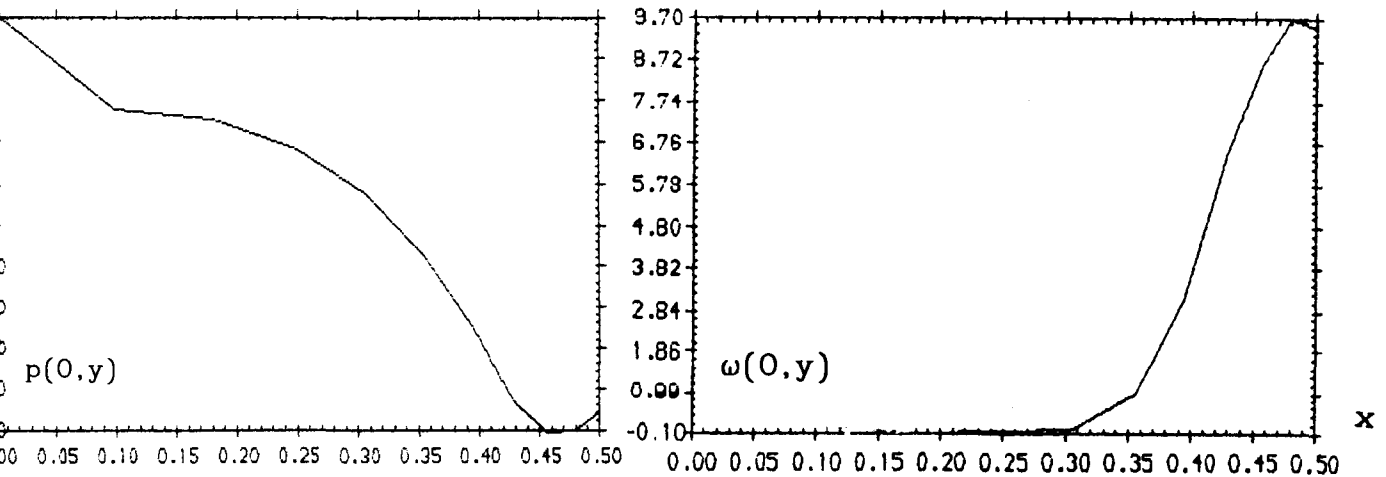
Figuur 6.4.2 : De vorticitetsverdeling van de stroming van fig. 6.4.1.

De vortciteit is maximaal nabij de rand van de schijf, en er ontstaat een wervelvlak achter de schijf. Doordat de viscositeit verwaarloosbaar is, is er geen diffusie van vortciteit meer in het veld. Wel kan er nog numerieke dispersie zijn, doordat de gradiënten te groot worden of het rooster te grof is.

Figuur 6.4.3 tot en met 6.4.6 geven respectievelijk de snelheden  $u$  en  $v$  en de druk en vortciteit ter plekke van de schijf.



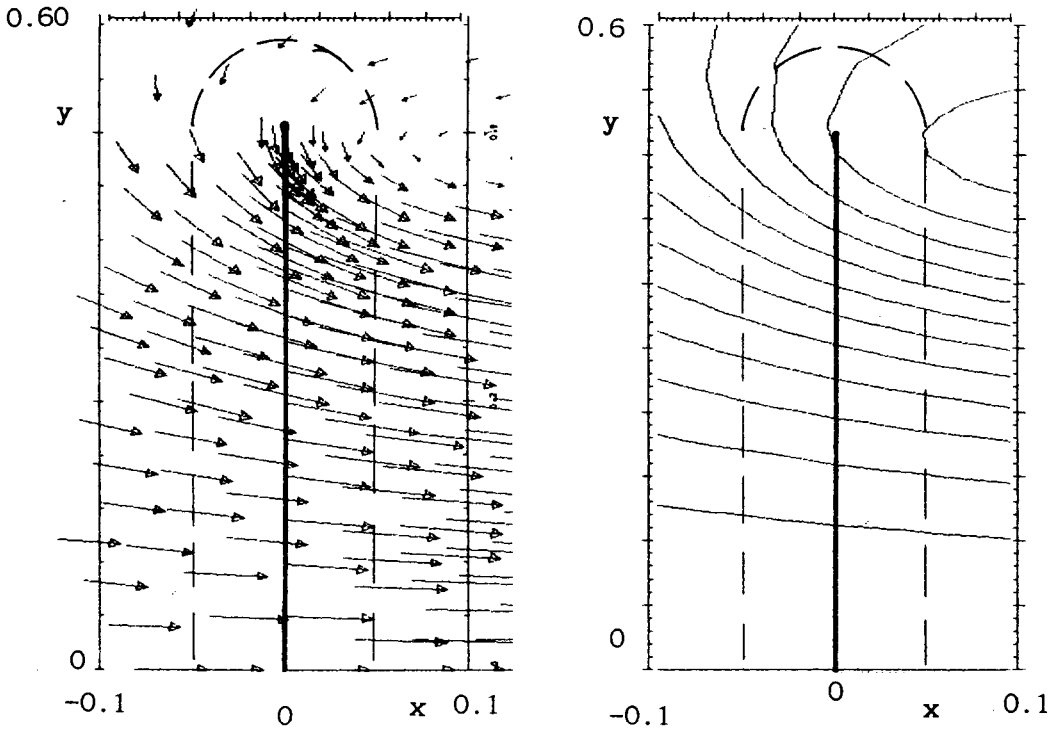
Figuur 6.4.3 en 4 : De snelheden ter plekke van de schijf.



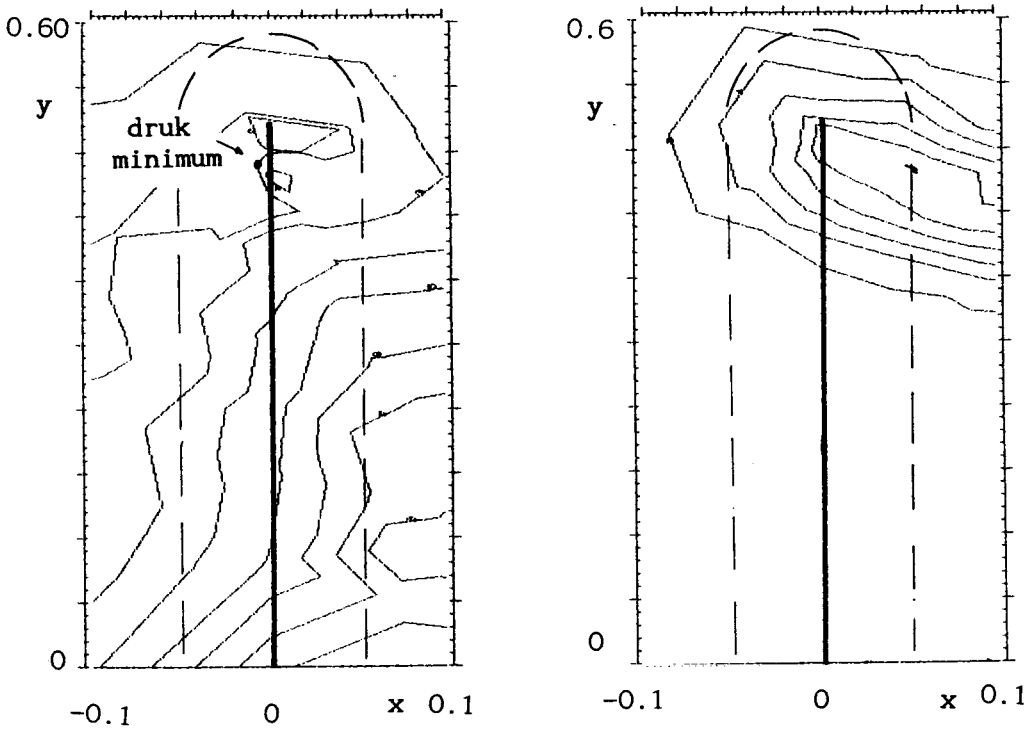
Figuur 6.4.5 en 6 : De druk en vortciteit ter plekke van de schijf.

De snelheid in de axiale richting wordt niet negatief in de schijf, er is dus geen terugstroming in de schijf in tegenstelling tot de stroming ten gevolge van de actuator strip. De vortciteit en de druk zijn respectievelijk maximaal en minimaal juist voor de rand van de schijf op  $r = 0.48$ .

We kijken nu verder naar de stroming in de buurt van de schijf. In figuur 6.4.7 tot en met 6.4.10 zijn de snelheid, de stroomlijnen, de druk en de vorticeit uitgezet voor  $Re = 2500$  en  $m = 17$ .



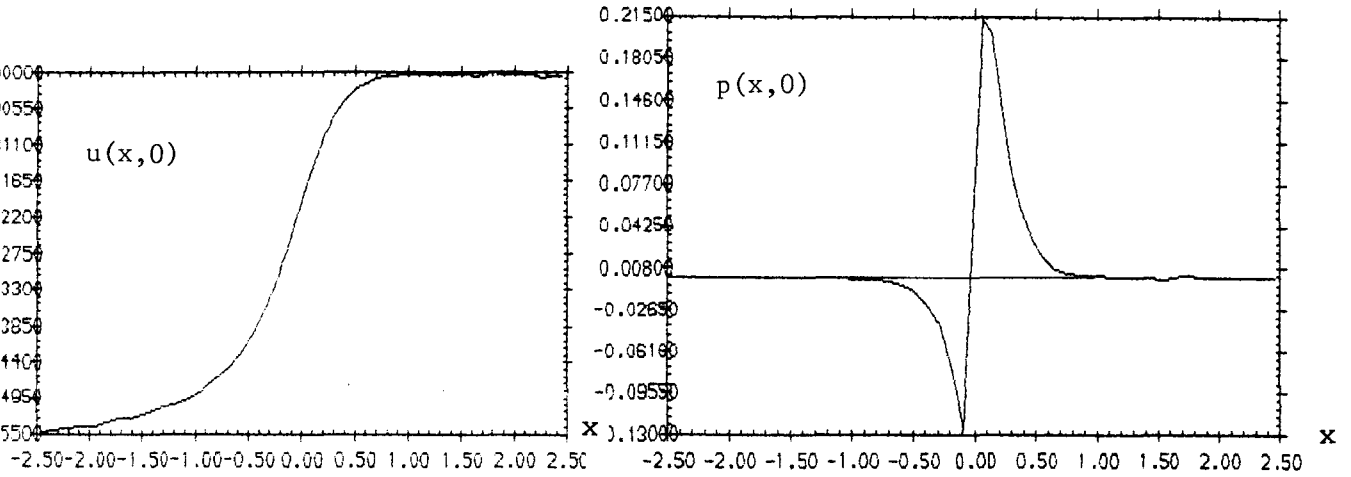
Figuur 6.4.7 en 8 : Het snelheidsveld en stroomlijnenpatroon in de buurt van de schijf.



Figuur 6.4.9 en 10 : De druk en de vorticeit in de buurt van de schijf.

Er blijkt een absoluut maximum te zijn in de vorticititeit en een absoluut minimum in de druk op  $r = 0.48$ .

De axiale snelheid en de druk op de symmetrie as zijn gegeven in figuur 6.4.11 en 6.4.12.



**Figuur 6.4.11 en 12 : De snelheid en druk op de symmetrie as.**

De druksprong is kleiner dan  $\frac{1}{2}$ , omdat de actuator schijf een eindige dikte heeft (zie Appendix D).



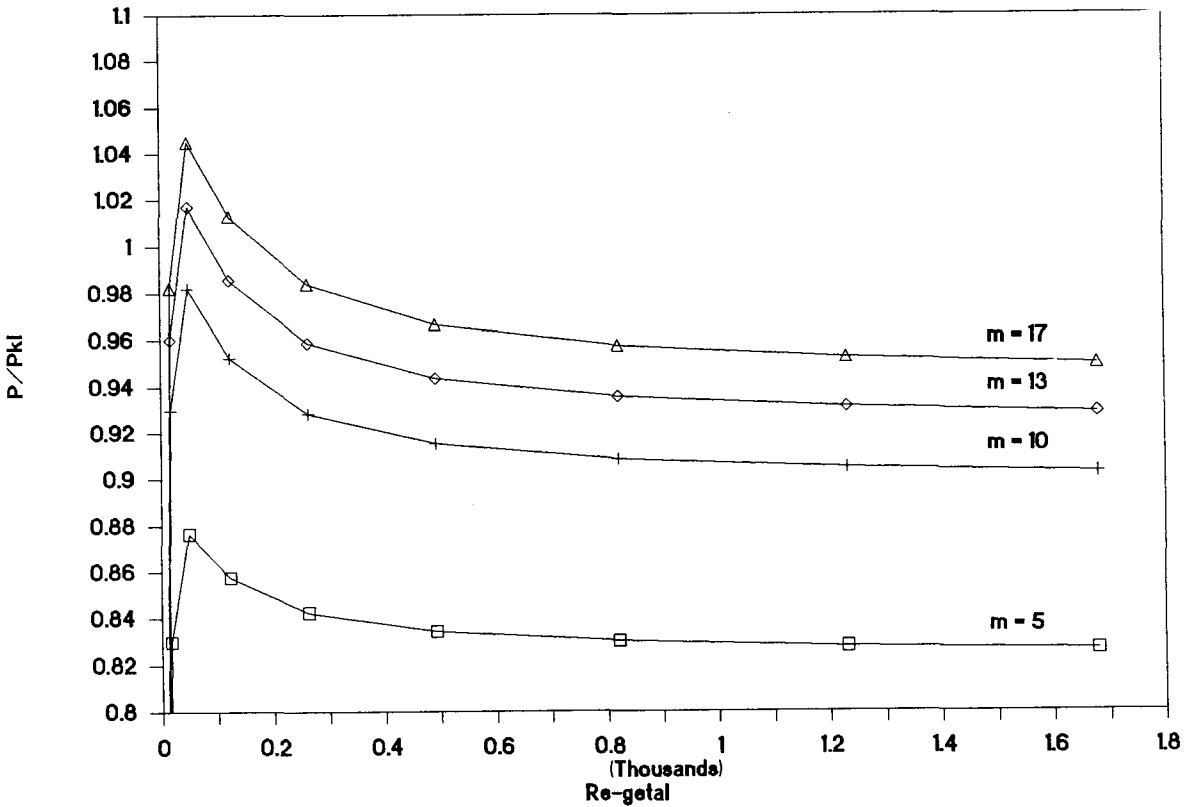
6.4.2 Het afgegeven vermogen aan de stroming.

We bepalen het afgegeven vermogen aan de stroming :

$$P_{3D} = \iiint_V \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV \tag{6.4.1}$$

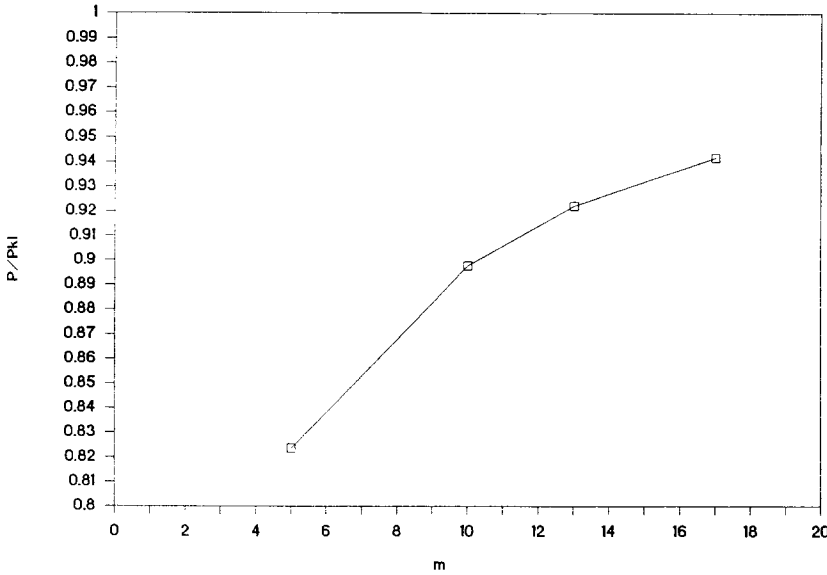
We vergelijken deze waarde met de waarde volgens de klassieke actuator theorie van Froude :  $P_{3D,kl} = \hat{F} \frac{1}{4} \pi D^2 \frac{1}{2} U_1$ .

De verhouding tussen  $P_{3D}$  en  $P_{kl,3D}$  noemen we de vermogenscoëfficiënt  $C_p$ , deze is uitgezet in figuur 6.4.13 zoals bepaald met het rooster dat gegeven is in figuur 6.3.1.



Figuur 6.4.13 : De vermogenscoëfficiënt als functie van het Re-getal.

Door extrapolatie van de laatste punten vinden we de waarde van de vermogenscoëfficiënt voor een gegeven steilheidsfactor  $m$ . Deze waarde zetten we uit voor verschillende waarden van  $m$  in figuur 6.4.14.

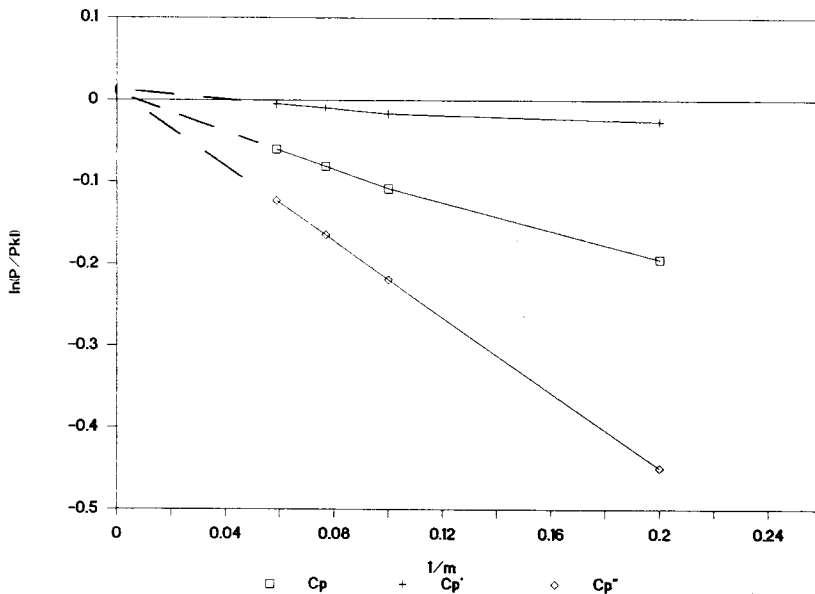


Figuur 6.4.14 : De vermogenscoëfficiënt als functie van m.

Door de logaritme van  $C_p$  uit te zetten tegen  $1/m$  kunnen we extrapoleren naar  $m = \infty$ . Dit is tevens gedaan indien we voor de karakteristieke waarden van de krachtdichtheid  $\hat{F}$  en de diameter  $D$  alternatieve waarden (6.4.2) kiezen zoals we in figuur 5.4.24 hebben aangegeven. Hierbij is de totale toegevoerde kracht  $T_{3D}$  ( $= \hat{F} \frac{1}{4}\pi D^2$ ) constant gehouden.

$$\begin{aligned}
 D'^2 &= D^2 (1 + 2/m) & \hat{F}' &= \hat{F} (1 + 2/m)^{-1} \\
 D''^2 &= D^2 (1 - 2/m) & \hat{F}'' &= \hat{F} (1 - 2/m)^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{6.4.2}$$

Het klassieke afgegeven vermogen verandert hierdoor wel, en dus ook de vermogenscoëfficiënt (fig. 6.4.15).



Figuur 6.4.15 : Extrapolatie van de vermogenscoëfficiënt naar  $m = \infty$ .

De limiet blijkt voor de drie keuzen van de karakteristieke waarden van  $\hat{F}$  en  $D$  te gaan naar een limietwaarde :

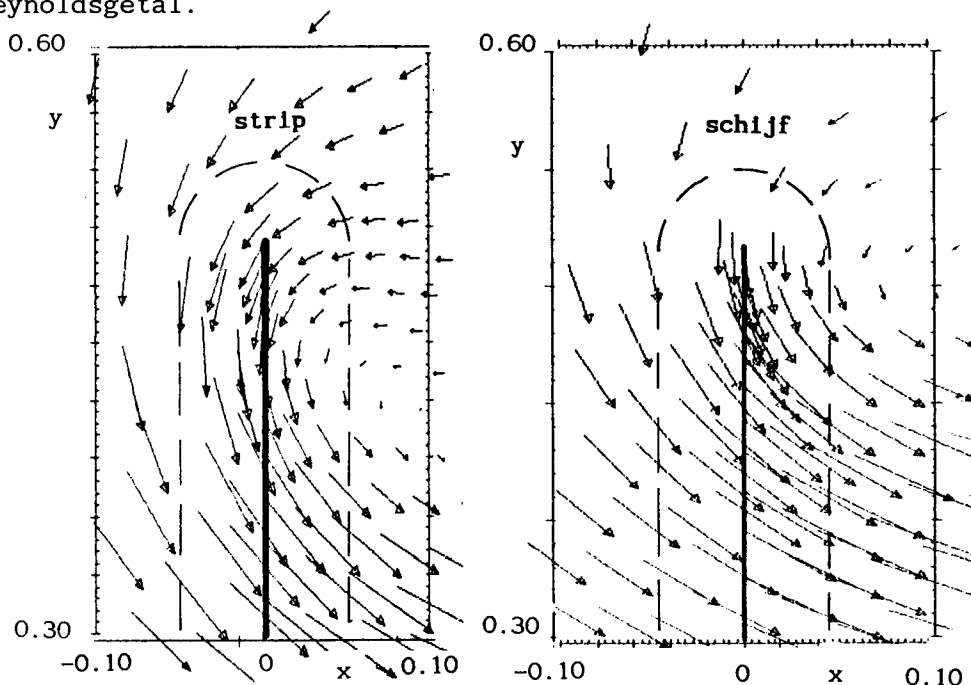
$$\underline{P_{30}/P_{30,k1} = 1.01 \pm 0.01} \quad (6.4.3)$$

Door een soortgelijke extrapolatie van de gemiddelde snelheid in de actuator schijf volgt de limiet hiervan voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$ .

$$\underline{\bar{U}_s/U_1 = 0.505 \pm 0.005} \quad (6.4.4)$$

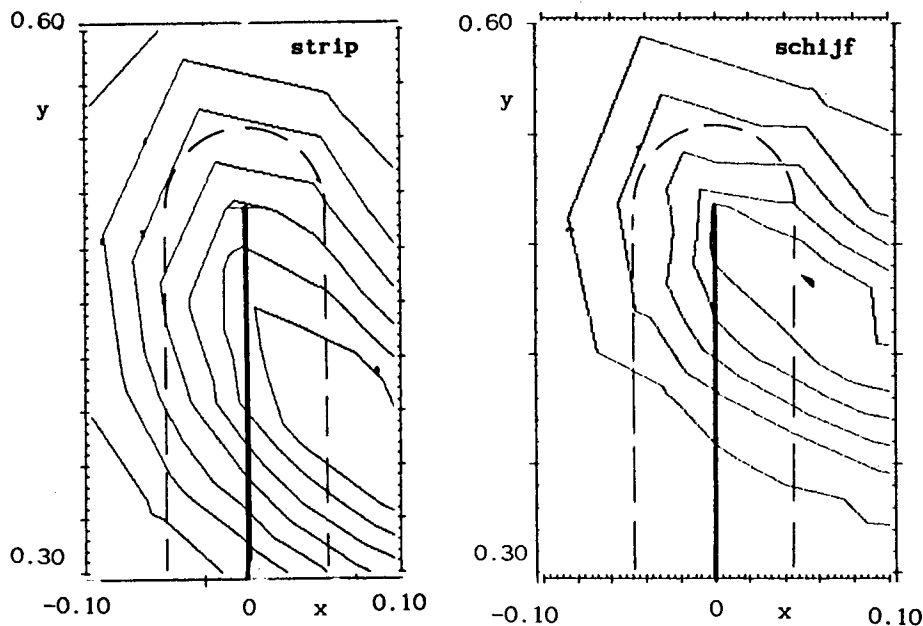
### 6.5 Vergelijking met berekeningen aan een actuator strip.

Het stromingsveld ten gevolge van een actuator schijf lijkt op het eerste gezicht identiek op dat van een strip. Aan de rand zijn er echter duidelijk verschillen te zien. In figuur 6.5.1 zijn de stromingen nabij de rand vergeleken, deze zijn bepaald voor dezelfde waarde van  $m$  en het Reynoldsgetal.



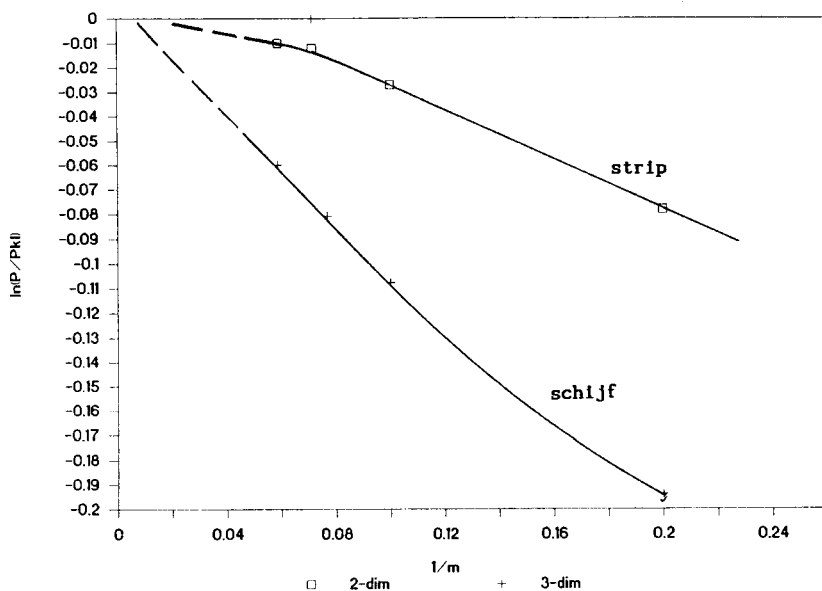
Figuur 6.5.1 : De stroming nabij de rand van een strip en een schijf.

Bij de stroming ten gevolge van de strip is een terugstroming waarneembaar nabij de rand in tegenstelling tot de stroming bij de schijf. Ook de vorticititeit nabij de rand vertoont verschillen.



Figuur 6.5.2 : De vorticititeit nabij de rand van de strip en de schijf.

De hoek met de actuator waarmee het wervelvlak de rand verlaat is bij de strip kleiner dan bij de schijf. Dit is waarschijnlijk een gevolg van de lokale geïnduceerde snelheid ten gevolge van de werveling, die er bij de schijf voor zorgt, dat geproduceerde vorticititeit sneller wordt afgevoerd dan bij de strip. Deze lokaal geïnduceerde snelheid zorgt er voor, dat de snelheid aan de rand van de schijf veel hoger is dan bij de strip. De vermogenscoëfficiënten geven binnen een numerieke onnauwkeurigheid dezelfde limietwaarden voor  $m \rightarrow \infty$ , maar voor lagere waarden van de steilheidsfactor zijn er duidelijke verschillen (fig.6.5.3).



**Figuur 6.5.3 : De vermogenscoëfficiënt voor de actuatorstrip en de schijf als functie van m.**

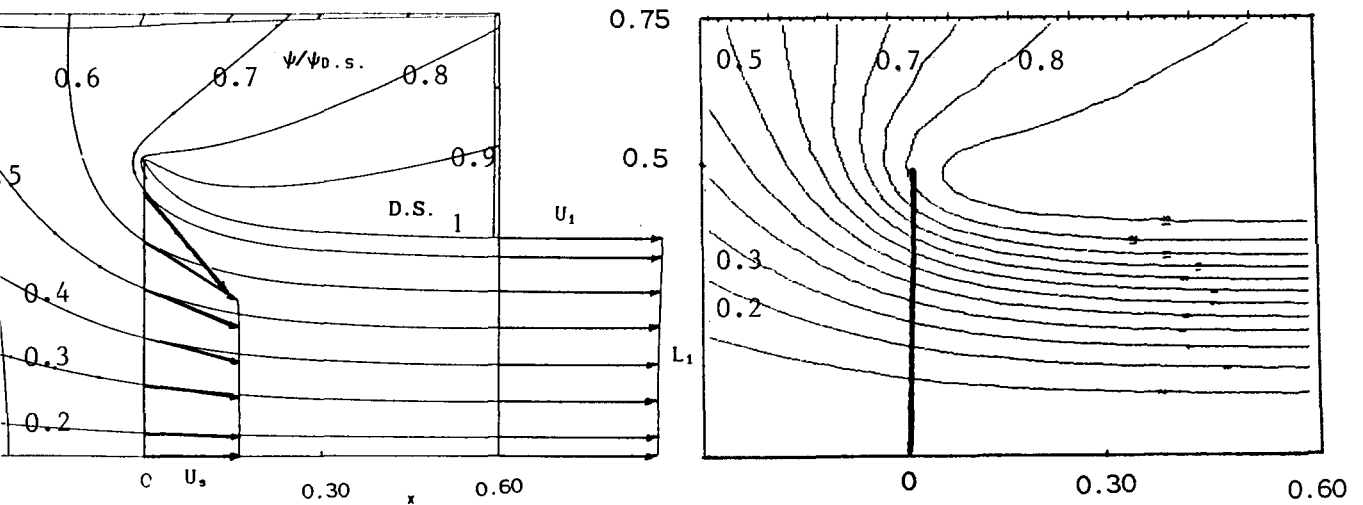
Dit is een gevolg van het feit, dat de snelheid in de strip nabij de symmetrie as hoger is in vergelijking tot de schijf, vergelijk hiervoor figuur 5.4.9 en 6.4.3 . Omdat voor lage waarden van m ook de krachtverdeling nabij de symmetrie as toe hoger is, zie figuur 6.2.1, zal ook het vermogen voor de strip hoger zijn dan voor de schijf voor lage waarden van m. De gemiddelde snelheid op de strip is toch gelijk aan de gemiddelde snelheid op de schijf, omdat er aan de rand van de strip een terugstroming is.

De conclusie is dan ook : In de limiet voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$  zijn de afgegeven vermogens door een actuator strip en een schijf en de gemiddelde snelheid in de strip en de schijf gelijk aan de waarden die de klassieke theorie van Froude voorspelt, maar aan de rand zijn duidelijk verschillen te zien in het stromingspatroon.

### 6.6 Vergelijking met berekeningen en metingen uit de literatuur.

Greenberg en Powers [GRE72] hebben berekeningen gedaan aan een actuator schijf met een uniforme krachtverdeling. Ook bij deze berekeningen zijn ze uitgegaan van een wortelsingulariteit in de wervelsterkte verdeling op het wervelvlak achter de schijf (zie hoofdstuk 4). Dit betekent dat de snelheden aan de rand van de schijf weer naar oneindig zouden moeten gaan, hetgeen uit onze numerieke berekeningen niet blijkt ( figuur 6.4.3 en 6.4.4 ).

Greenberg en Powers geven het stromingsveld voor een actuator schijf in een stilstaand fluïdum.



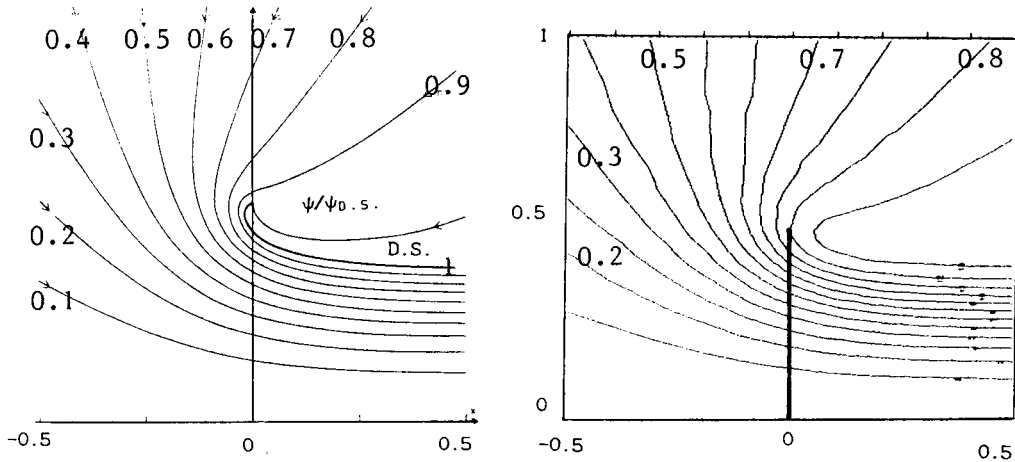
**Figuur 6.6.1 : Vergelijking van het stroomlijnenpatroon zoals is bepaald door Greenberg en Powers en berekeningen in dit werk.**

De waarden van de stroomlijnen komen niet overeen met onze numerieke berekeningen. Voor de breedte van de jet op oneindig vinden ze :

$D_1 = 0.7499 D$ . Dit is 7% hoger dan de klassieke theorie van Froude voorspelt. Volgens deze theorie moet uit massabehoud volgen dat

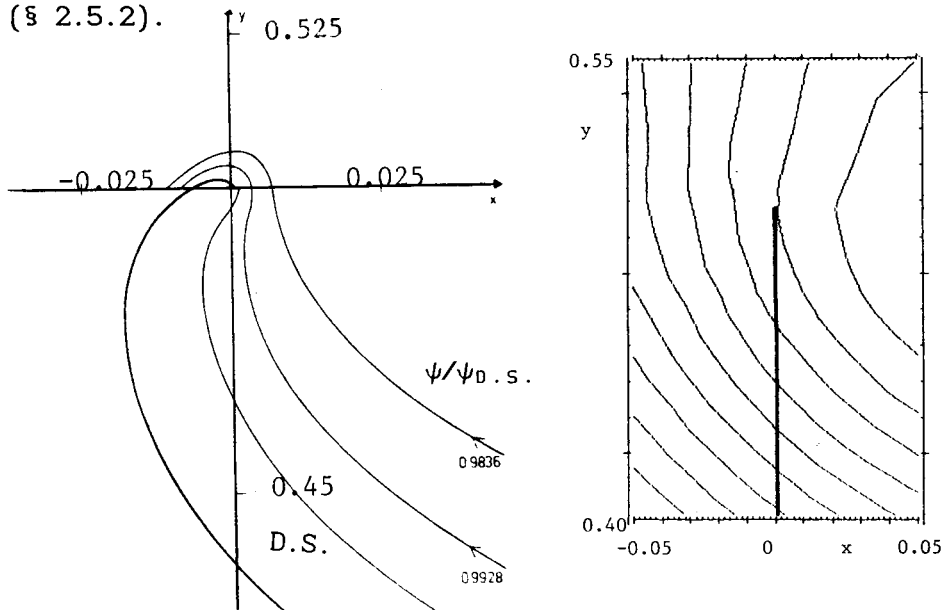
$D_1 = 0.707 D$  (2.5.9 en 12). In onze berekeningen definiëren we de rand van de schijf op de plaats waar geldt  $k(D) = \frac{1}{2}$ . Volgen we de stroomlijn die door de rand van de schijf gaat, dan volgt door extrapolatie een breedte van  $D_1 = 0.695 D$  voor  $Re = 2500$  en  $m = 17$ .

Schmidt en Sparenberg bepalen het stromingsveld ten gevolge van een actuator schijf door het singulier gedrag aan de rand van de schijf vast te leggen [SCM77]. In hoofdstuk 4 hebben we namelijk gezien, dat het wervelvlak volgens Schmidt en Sparenberg spiraliseert. Het stromingsveld dat is bepaald met dit singulier gedrag vergelijken we met onze numerieke berekening in figuur 6.6.2.



**Figuur 6.6.2 : Vergelijking van de stroming bepaald door Schmidt & Sparenberg en onze numerieke berekening.**

De waarden van de stroomfunctie vertonen een goede overeenkomst. In tegenstelling tot de berekening van Schmidt en Sparenberg vinden wij nog geen significante terugstroming in de schijf voor  $m = 17$  (fig 6.6.3). We verwachten echter dit voor hogere waarden van  $m$  wel te vinden, omdat we een spiraliserende stroomlijn aan de rand van de schijf verwachten (§ 2.5.2).



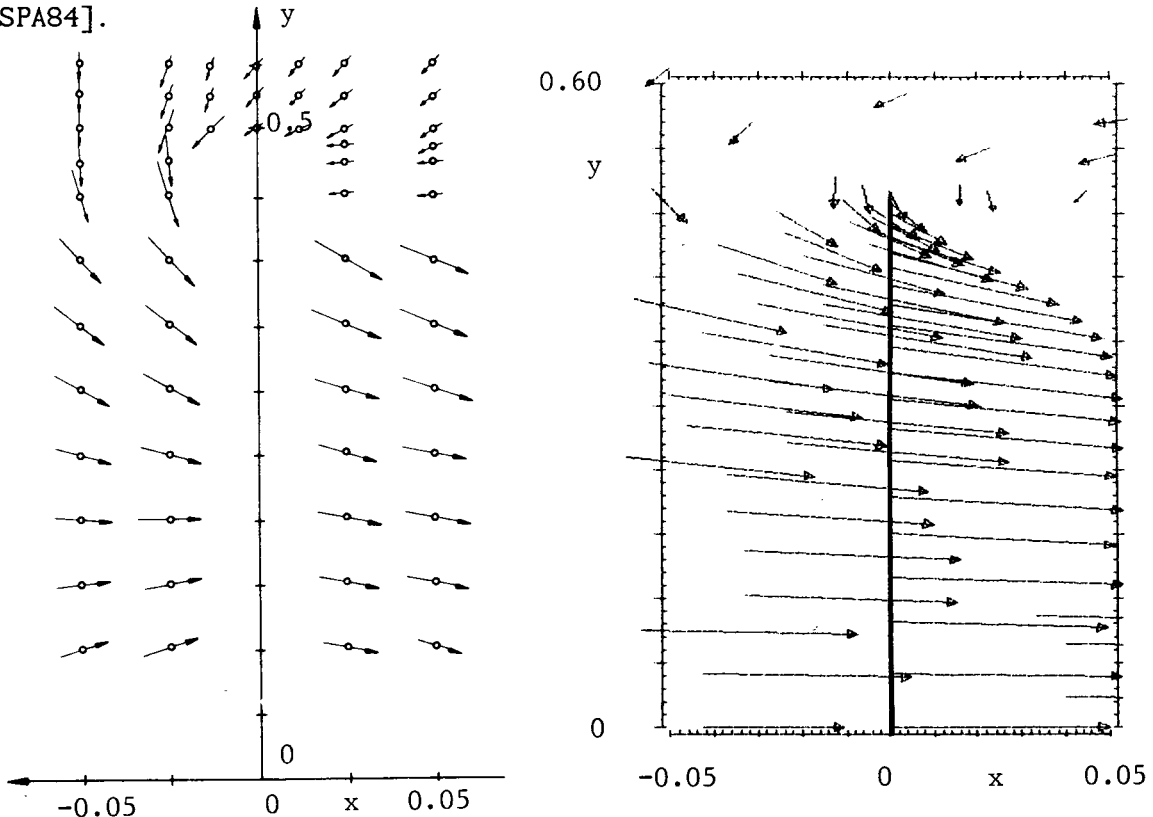
**Figuur 6.6.3 Vergelijking van de stroming bij de rand van de schijf**

Verder berekent Sparenberg de sterkte van zijn spiraliserend wervelvlak (zie § 4.4 ). Dimensieloos gemaakt is deze :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1}} \approx 1.04 \tag{6.6.1}$$

Dit is de waarde van de wervelsterkte  $\gamma$  bij de rand van de strip waar het spiraliserend wervelvlak de stroming bepaald. Hier hebben we de wervelsterkte niet kunnen bepalen. Wel geldt voor de wervelsterkte ver achter de strip :  $\gamma_\infty = 1.00 \pm 0.01$ , de waarde die de klassieke theorie van Froude voorspelt. Na extrapolatie voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $m \rightarrow \infty$  vinden we hiervoor een waarde die minder dan 1% van deze waarde afwijkt.

Sparenberg verwijst verder naar een meting van Adams, die is verricht aan een vier-bladige rotor, hij geeft echter alleen het stromingsveld [SPA84].

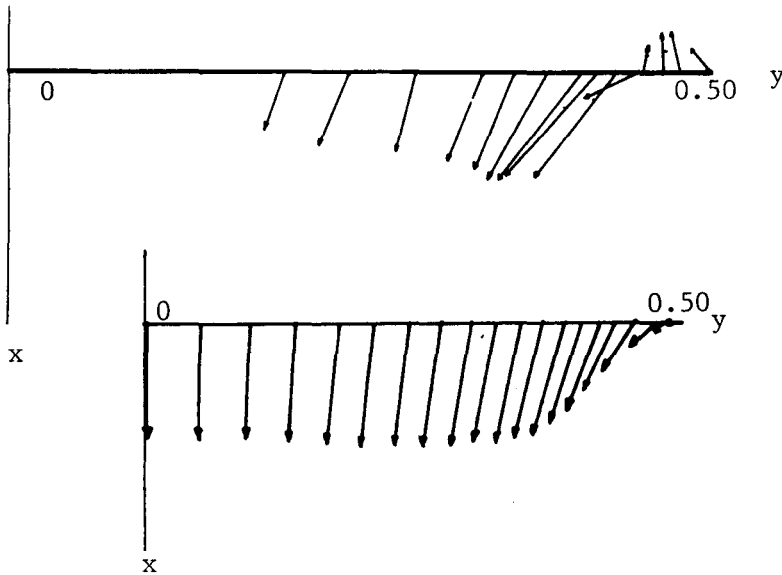


**Figuur 6.6.4 : Vergelijking van het stromingsveld bepaald door Adams met numerieke berekeningen in dit werk.**

Nabij de as wordt de meting van Adams beïnvloedt door de rotor as en zijn de metingen niet te vergelijken.



Ook van Kuik [KUI89] heeft metingen verricht aan een tweebladige rotor. Snelheden in het rotorvlak zijn als functie van de afstand tot de as bepaald.



**Figuur 6.6.3 : Vergelijking van metingen van van Kuik en numerieke berekeningen in dit werk.**

De metingen van Adams en van Kuik laten een terugstroming in de schijf zien, hetgeen bij onze berekeningen (nog) niet het geval is. De gemiddelde snelheid die van Kuik vindt in het rotorvlak is  $\bar{U}_s = 0.573$  [KUI89]. Dit is ruim 14% hoger dan onze berekeningen geven. De minder goede overeenkomst van onze berekeningen met metingen van Adams en van Kuik wijst erop, dat een actuator schijf geen goede benadering is van een echte rotor.

## 6.7 Conclusies

De stroming ten gevolge van een actuator schijf is numeriek bepaald tot een maximaal Reynolds getal van 2500 en een maximale waarde van de steilheidsfactor  $m = 17$ . In tegenstelling tot berekeningen aan de actuator strip is er in de schijf geen significante terugstroming.

Dit is waarschijnlijk een gevolg door de grote lokale geïnduceerde snelheid door de werveling, waardoor de geproduceerde vortciteit sneller wordt afgevoerd. Het maximum in de vortciteit en het minimum in de druk is op 95% van de schijf aanwezig (§ 6.4).

Door een extrapolatie van het Reynolds getal en de steilheidsfactor naar oneindig is een vergelijking te maken met de klassieke actuator theorie van Froude. Voor het totale afgegeven vermogen en de gemiddelde snelheid in de schijf geldt :  $P_{3D}/P_{3D,k1} = 1.01 \pm 0.01$  en  $\bar{U}_s/U_1 = 0.505 \pm 0.005$ . Deze waarden komen binnen de onnauwkeurigheid goed overeen met de waarden die deze theorie voorspelt (§ 6.5).

De berekeningen van Greenberg geven een bredere jet, maar dit is weer zoals bij de strip gevolg van de randkracht, die hij introduceert (H 4). Kwalitatieve vergelijking met berekeningen van Schmidt en Sparenberg geeft een afwijkend gedrag aan de rand van de schijf.

Slechte overeenkomst is er met metingen van Adams en van Kuik (§ 6.6). Blijkbaar is dan ook een actuator schijf een slechte benadering voor een echte rotor.

## Hoofdstuk 7 Conclusies

We kunnen de volgende hoofdconclusies trekken :

1.

Het is opmerkelijk dat in de literatuur over een actuatorvlak vaak een dimensieanalyse ontbreekt. Met behulp van een dimensieanalyse kan men namelijk snel een goed inzicht krijgen in de aard van een probleem (§ 3.4, 4.2 en 5.3). Indien men in een probleem geen onafhankelijke lengteschaal kan definiëren, dan moet de oplossing gelijkvormig zijn.

Tevens kunnen er op grond van de dimensieanalyse kentallen gevonden worden, die de oplossing bepalen. Limieten voor grote of kleine waarden van deze kentallen kunnen leiden tot een aanzienlijk vereenvoudigde theorie. Indien men bijvoorbeeld een klein kental kan vinden dat erop wijst, dat de niet-lineaire convectieve term in de Navier-Stokes vergelijking verwaarloosbaar is, dan mogen we een lineaire theorie gebruiken. Een wrijvingsloze theorie volgt uit een hoge waarde van het Reynoldsgetal. Het ontbreken van zulke kentallen impliceert dat een lineaire of wrijvingsloze theorie niet uniform geldig zal zijn.

2.

Uit een dimensieanalyse van de niet-viskeuze stroming ten gevolge van een puntkracht (§ 3.4) volgt eenvoudig, waarom de lineaire oplossing zoals deze voorgesteld is door Sparenberg [SPA84] niet fysisch relevant is (§ 3.3.3). Bij een niet-viskeuze stroming is er namelijk geen kleine parameter meer, waarmee we het probleem mogen lineariseren, het is een essentieel niet-lineair probleem.

3.

Uit een dimensieanalyse van de stroming ten gevolge van een half-oneindige actuator strip in een viskeus medium volgt dat het bestaan van een niet-viskeuze oplossing onzeker is (§ 4.2). Dit geldt zowel voor een fluïdum met, als zonder hoofdstroming. Er is wel een zogenaamde verre veld oplossing te bepalen, waarbij de wrijving verwaarloosbaar is, maar deze oplossing levert geen inzicht in het gedrag nabij de rand van de half-oneindige actuator strip, omdat daar de wrijving dominant is.

Bestaande theoriën over de half-oneindige strip van onder andere Schmidt en Sparenberg [SCM77,SPA84] (§ 4.4) moeten dan ook kritisch worden bekeken. In afwezigheid van hoofdstroming is het zelfs onzeker of er een stationaire oplossing bestaat zoals Schmidt en Sparenberg veronderstellen. De tijdafhankelijke oplossing van van Helden [HEL88] (§ 4.3) lijkt ons beter onderbouwd.

4.

Numerieke berekeningen zijn uitgevoerd waarbij we de exacte Navier-Stokes vergelijkingen opgelost hebben voor een strip (H 5) en een schijf (H 6) met een eindige dikte (lengte-dikte ( $L/L_{1/2}$ ) verhouding van orde 10) met uniforme belasting en voor Reynoldsgetallen gebaseerd op de lengte van de strip tot 2500. Om te kunnen vergelijken met theorie van Lee en Greenberg [LEE84] en numerieke berekeningen van Madsen [MAD83,85] is de limiet bepaald voor  $Re \rightarrow \infty$  en  $L/L_{\nabla} \rightarrow \infty$ .

Door een variatie in de roosterfijnheid, de roostergrootte, de karakteristieke waarde van de oppervlaktekrachtdichtheid en die van de striplengte is de invloed van de keuze van deze factoren bepaald. Samen met een schatting in de onnauwkeurigheden die optraden door discretisaties is het geproduceerde vermogen in verhouding tot de voorspelling van de klassieke actuator theorie van Froude voor de strip gelijk aan  $1.02 \pm 0.02$  en voor de schijf gelijk aan  $1.01 \pm 0.02$ . Blijkbaar komt het afgegeven vermogen door een eindige actuator strip en een actuator schijf in de limiet voor hoge Reynoldsgetallen binnen de onnauwkeurigheid van de berekeningen overeen met de voorspellingen van de klassieke actuator theorie van Froude [FR089]. Goede overeenkomst is er tevens met experimenten van Lee & Greenberg [GRE84] aan een actuator strip (§ 5.7). Een minder goede overeenkomst is er met metingen van Adams [SPA84] en van Kuik [KUI89] aan echte rotoren. Afwijkingen van maximaal 10% treden op met de berekeningen van Lee en Greenberg [GRE84] en van 5% met die van Madsen [MAD83,85].

De afwijking van de theorie van Greenberg is het gevolg van zijn keuze van de randsingulariteit. De afwijking ten opzichte van Madsen kan niet verklaard worden.

5.

De klassieke actuator theorie van Froude voorspelt geen verschil tussen het vermogen dat wordt afgegeven door een actuator strip en een actuator schijf. Uit onze numerieke berekeningen blijkt echter, dat er duidelijke verschillen in de stroming nabij de rand van de strip en de schijf zijn. Bij de stroming ten gevolge van de actuator strip is er een sterkere terugstroming nabij de rand van de strip dan bij de actuator schijf. Bij de strip wordt rotatie die op beide randen wordt geproduceerd afgevoerd als gevolg van de snelheid geïnduceerd door de wervelling aan de tegenovergestelde rand. Bij een schijf is als gevolg van de kromming van de werveling een lokaal op het wervelvlak zelf-geïnduceerde snelheid, die zorgt voor een extra geïnduceerde axiale snelheid aan de rand. Hierdoor wordt de geproduceerde vorticititeit extra snel afgevoerd. De terugstroming is in de schijf dan ook beperkt tot een kleiner gebied dan bij de strip.

6.

De theorie van de randsingulariteit van Greenberg is gebaseerd op de veronderstelling dat het wervelvlak dat op de rand van de schijf ontstaat een eindige kromtestraal heeft in de oorsprong. Dit blijkt overeen te komen met het introduceren van randkrachten. Deze zijn verantwoordelijk voor de afwijking met de theorie van Froude. In feite is er dan geen sprake meer van een actuator schijf met uniforme krachtverdeling, hetgeen het uitgangspunt was van Greenberg. De goede overeenstemming van de theorie van Greenberg met de metingen aan rotoren duidt erop, dat de 'slechte' actuator theorie van Greenberg een uitstekende theorie kan zijn voor een echte rotor.

Literatuuroverzicht.

Abramowitz M., Stegun I.A., (1965) Handbook of mathematical functions, Dover publications New York.

Batchelor G.K., (1967) An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press.

Batchelor G.K., (1970) Slender body theory for particles of arbitrary cross-section in Stokes-flow, J. of Fluid Mech. 44, 3, 419

Bramwell A.R.S., (1977) On the static pressure in the wake of a hovering rotor, Vertica, 1, 223.

Coesel M.J.N., (1977) Non linear actuator disc model for propeller and windmill, 4<sup>th</sup> Lips propeller symposium.

Froude R.E., (1889) On the part played in propulsion by differences of fluid pressure, Trans. of the Inst. Naval Arch., 30.

Geurst J.A., (1986) Momentum-flux condition for Landau-Squire jet flow, J. of Appl. Math. & Phys., 37, 666

Glauert H.J., (1935) Airplane propellers, Aerodynamic theory, edited by Durand, vol L, H 7, sectie 2.

Greenberg M.D., Powers S.R., (1972) Nonlinear actuator disc theory and flow field calculations, including nonuniform loading,

Greenberg M.D., (1972) Non-linear actuator disc theory, Zeitschrift fur flugwissenschaften, Band 20, Heft 3.

Helden W.A.M., (1988) A numerical calculation of the flow through the actuator strip, afstudeerverslag T.U.E., nr R-898-A.

Karman T. von, Burgers J.M., (1935) Mathematical foundation of the theory of wings with finite span, Aerodynamic theory, edited by Durand, deel I E, H 3.

Kuik G.A.M., (1989) On the revision of Froude's actuator disc concept, concept van proefschrift T.U.E.

Kuik G.A.M., (1986) The actuator disc edge singularity; the key to a revised actuator disc concept and momentum theory, paper no 2-16, gepresenteerd op het 13-de European Rotorcraft Forum, Arles, France.

Lanchester F.W., (1915) A contribution to the theory of propulsion and screw propeller, Trans. of the Inst. Naval Arch., 57.

Landau L., (1944) A new exact solution of Navier-Stokes equations, Doklady Acad. of Science, U.R.S.S., 43, 286.

Lee J.W.H., Greenberg M.D., (1984) Line momentum source in shallow inviscid fluid, J. of fluid mech., 145, 287.

Madsen H.A., (1985) The actuator cylinder, a flow model for vertical axis windturbines, Proc. 7-th British windenergy conf.

Madsen H.A., (1983) On the real and ideal energy conversion in a straight bladed, vertical axis windturbine,

Nayfeh A.H., (1973) Perturbation methods, § 1.4.2, John Wiley & Sons.

Prandtl L., Tietjens O.G., (1934) Fundamentals of hydro- and aeromechanics, Dover.

Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I., (1986) Integrals and series, vol I, Elementary series.

Segal G., (1987) Sepran introduction, user manual, standard problems, programmer's guide.

Schlichting H., (1968) Boundary layer theory, McGraw-Hill.

Schmidt G.M., Sparenberg J.A., (1977) On the edge singularity of an actuator disc with large constant normal load, J. ship research, 21, 2

- Schouten G., (1983) On the analytical solution of the 2D-actuator surface problem, afd. lucht en ruimtevaart T.U. Delft, nr LR311.
- Schouten G., (1982) Static pressure in the slipstream of a propeller, J. of aircraft, 19, 3, 251.
- Sparenberg J.A., (1974) On the linear theory of an actuator disc in a viscous fluid, J. of ship research, 18, no 1, 16.
- Sparenberg J.A., (1984) Elements of hydrodynamic propulsion, Martinus Nijhoff Publishers, Hoofdstuk 1 en 2.
- Squire H.B., (1951) The round laminar jet, Quart. J. Mech. Appl. Math., 4, 321.
- Squire H.B., (1952) Some viscous fluid flow problems, I: Jet emerging from a hole in a plane wall, Phil. Mag., 43, 942.
- Steenhoven A.A., (1984) De toepassing van de eindige elementen methode bij stromingsproblemen, diktaat T.U.E., nr 4081.
- Wu T.Y., (1962) Flow through a heavily loaded actuator disc, Schiffstechnik, blad 9, heft 47, 134.



Lijst van gebruikte symbolen.

$c$	constante, die de sterkte van de impulsbron weergeeft	-
$\underline{f}$	externe volumekrachtdichtheid	$N/m^3$
$\underline{g}$	sommatie van interne en externe krachten	$N/m^3$
$g(x)$	dimensieloze krachtverdeling in de axiale richting	-
$h(y)$	dimensieloze krachtverdeling in de y-richting (2D)	-
$k(r)$	dimensieloze krachtverdeling in de radiële richting (3D)	-
$m$	steilheidsfactor	-
$\underline{n}$	normaalvector	-
$p$	druk	$N/m^2$
$r$	straal	$m$
$s$	coördinaat langs wervelvlak	$m$
$t$	tijd	$s$
$u$	snelheidscomponent in de x-richting	$m/s$
$v$	snelheidscomponent in de y-richting	$m/s$
$\underline{u}$	verstoringssnelheid	$m/s$
$\underline{v}$	totale snelheid	$m/s$
$u_r$	snelheid in radiële richting	$m/s$
$v_g$	snelheid in tangentiële richting	$m/s$
$x, y, z$	plaatscoördinaten	$m$
$A$	oppervlak	$m^2$
$A_h$	convergentiefactor bij stapgrootte $h$	-
$C$	breedte van de windtunnel	$m$
$D$	totale afgeleide	-
$F$	kracht	$N$
$\tilde{F}$	lijnkracht	$N/m$
$\hat{F}$	oppervlaktekracht	$N/m^2$
$H$	Bernoulliconstante	$N/m^2$
$L$	lengte van de actuatorstrip	$m$
$L_V$	gradiëntlengte	$m$
$L_{1/2}$	halfwaardebreedte	$m$
$L_{99/1}$	afvallengte	$m$
$P$	toegevoerd vermogen	$Nm$
$\underline{R}$	plaatsvector	$m$
$Re$	Reynoldsgetal	-
$\underline{S}$	stoot	$Ns/m^3$
$\underline{T}$	spanningstensor	$N/m^2$
$T_{2d}$	totale kracht per lengteëenheid	$N/m$

$T_{3d}$	totale kracht	N
$U$	axiale snelheid	m/s
$U_0$	uniforme hoofdstroomsnelheid	m/s
$V$	absolute waarde van de snelheid	m/s
$\gamma$	wervelsterkte	m/s
$\partial$	partiële afgeleide	-
$\epsilon$	kleine parameter	-
$\xi, \eta, \zeta$	plaatscoördinaten	m
$\eta$	dynamische viscositeit	kg/ms
$\vartheta$	hoek	rad
$\vartheta_0$	hoek, die de randen van de jet definiëert	rad
$\rho$	dichtheid	kg/m <sup>3</sup>
$\nu$	kinematische viscositeit	m <sup>2</sup> /s
$\varphi$	snelheidspotentiaal	m <sup>2</sup> /s
$\psi$	stroomfunctie	m <sup>2</sup> /s
$\chi$	potentiaal van een conservatief krachtveld	N/m <sup>2</sup>
$\underline{\omega}$	vorticiteit, rotatie	1/s
$\Gamma$	circulatie	m <sup>2</sup> /s
$\Phi$	potentiaal	m <sup>2</sup> /s

#### onderindices

$\circ$	ongestoorde waarde op $-\infty$
$s$	waarde ter plekke van de schijf/strip
$1$	waarde op $+\infty$
$k1$	waarde volgens de klassieke axiale actuator theorie
$x$	x-component
$y$	y-component
$z$	axiale component
$r$	radiële component
$i$	geïnduceerde waarde
$2D$	waarde voor een tweedimensionaal probleem
$3D$	waarde voor een driedimensionaal probleem

#### bovenindices

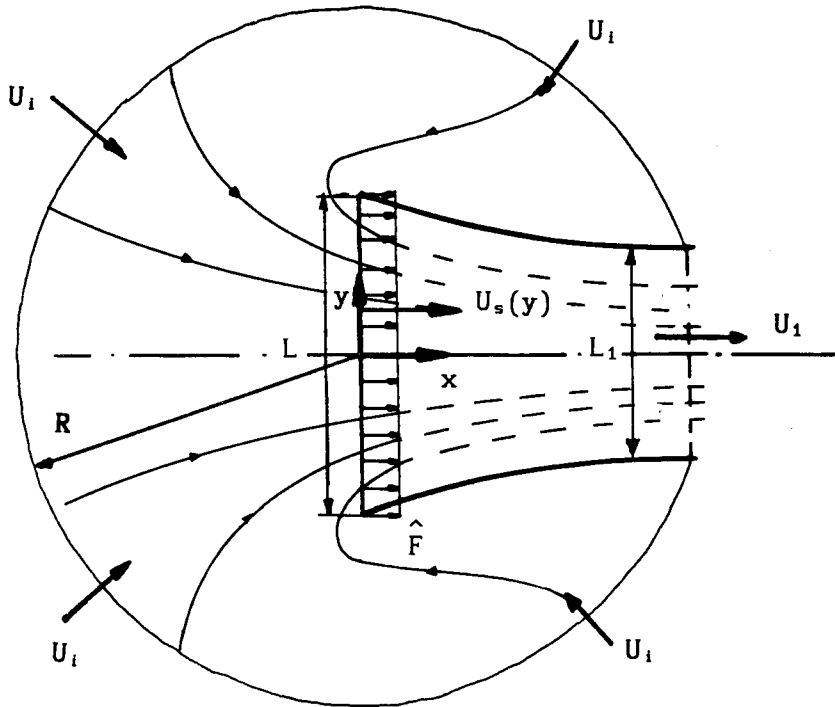
*	dimensieloos
-	gemiddelde waarde
$\circ$	beginschatting
I	I <sup>e</sup> orde iteratie

Appendices

- A : De klassieke actuator theorie voor een actuator strip in een stilstaand, niet-viskeus medium.
- B : Bepaling van de minimale afstand van de stroomlijnen tot de symmetrie as bij de viskeuze stroming ten gevolge van een puntkracht.
- C : Formele afleiding van de aard van de randsingulariteit zoals voorgesteld door Greenberg [KUI89].
- D : Nadere beschouwing van de drukverdeling op de symmetrie as bij een actuator strip met eindige dikte.
- E : Programmacode PREPROC en POSTPROC.
- F : Uitgebreide programma uitvoer.

Appendix A De klassieke actuator theorie voor een actuator strip in een stilstaand, niet-viskeus medium.

We willen de gemiddelde snelheid en het afgegeven vermogen bepalen volgens de klassieke actuator theorie van Froude indien er geen uniforme hoofdstroming  $U_0$  is. De stroming door de actuator strip is voor dit geval weergegeven in figuur A1.



Figuur A1 : De stroming ten gevolge van een actuator strip voor  $U_0 = 0$ .

Als integratiegebied kiezen we nu een cirkel rond de oorsprong met straal  $R$ . De snelheid buiten de jet op afstand  $R$  van de oorsprong noemen we  $U_i$ , de andere variabelen zijn gelijk aan de berekening met hoofdstroming (§ 2.5.2).

Er volgt nu uit de behoudswetten op het integratiegebied :

$$1. \text{ massabehoud : } \int_I \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds = 0$$

hieruit volgt :

$$U_i 2\pi R = U_1 L_1 = \int_{-L/2}^{L/2} U_s(y) \, dy \equiv \bar{U}_s L \quad (A1)$$

Indien we het integratiegebied vergroten neemt  $U_i$  af volgens  $(1/R)$ .

$$2. \text{ impulsbehoud : } \int_I \rho \mathbf{v}_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_{-1/2L}^{1/2L} \hat{F}_x \, dy + \int_I p n_x \, ds$$

Hierbij betekent I een integratie langs de cirkel.

De laatste term is nul, omdat de druk langs de hele cirkel gelijk is aan  $p_0$ . Er volgt :

$$\rho U_1^2 L_1 - \rho U_1^2 2\pi R = \hat{F} L \equiv T_{20} \quad (\text{A2})$$

De tweede term is van orde  $(1/R)$  en gaat naar nul voor  $R \rightarrow \infty$ .

$$3. \text{ energiebehoud : } \int_I \frac{1}{2} \rho V^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_{-1/2L}^{1/2L} \hat{F} \cdot \mathbf{v} \, dy + \int_I p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds$$

De laatste integraal is nul omdat de druk langs de cirkel weer overal gelijk is aan  $p_0$  en er massabehoud is (A1). Er volgt dan

$$\frac{1}{2} \rho U_1^3 L_1 - \frac{1}{2} \rho U_1^3 2\pi R = \hat{F} \bar{U}_s L \quad (\text{A3})$$

De tweede term is van orde  $(1/R^2)$  en gaat naar nul voor  $R \rightarrow \infty$ .

Uit (A1, A2 en A3) volgt in de limiet voor  $R \rightarrow \infty$  :

$$U_1 L_1 = \bar{U}_s L \quad (\text{A4})$$

$$\rho U_1^2 L_1 = \hat{F} L \quad (\text{A5})$$

$$\frac{1}{2} \rho U_1^3 L_1 = \hat{F} \bar{U}_s L \quad (\text{A6})$$

Uit (A5) en (A6) volgt dan eenvoudig :

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} U_1 \quad (\text{A7})$$

en dus

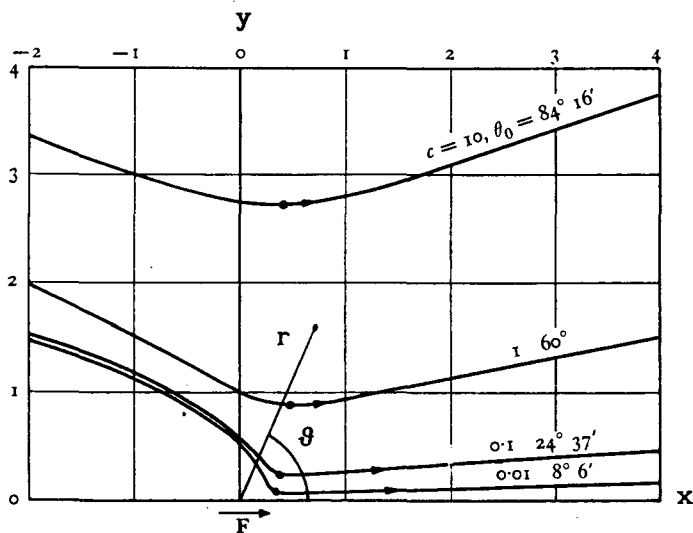
$$P_{k1.20} = \hat{F} \frac{1}{2} U_1 L \quad (\text{A8})$$

Appendix B Bepaling van de minimale afstand van de stroomlijnen tot de symmetrie as bij de viskeuze stroming ten gevolge van een puntkracht.

De algemene vergelijking voor de stroomlijnen is gegeven door (3.2.3) en (3.2.8) te combineren. Er volgt dan

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{2\nu r \sin^2 \vartheta}{1 + c - \cos \vartheta} \quad (\text{B1})$$

het stroomlijnen patroon is weergegeven in figuur B1.



Figuur B1 : De oplossing van Landau voor verschillende waarden van  $c$  en  $\vartheta_0$ . de stroomlijnen waarvoor  $\psi/\nu = 1$  zijn afgebeeld.

We willen nu het verband bepalen tussen  $c$  en de hoek  $\vartheta_0$ , die de minima in de afstanden van de stroomlijnen tot de x-as verbindt.

Daarom herschrijven we (B1) eerst in  $x, y$  coördinaten met behulp van :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{B2})$$

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{y^2}{x^2 + y^2}} \quad (\text{B3})$$

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \quad (\text{B4})$$

Dan wordt (B1) :

$$\psi(x,y) = \frac{2y^2v}{(1+c)\sqrt{(x^2 + y^2) - x}} \quad (\text{B5})$$

Bekijk een stroomlijn met constante waarde  $\psi_0$ . Herschrijven van (B5) en differentiëren geeft :

$$2y^2 = [(1+c)\sqrt{x^2 + y^2} - x] \frac{\psi_0}{v} \quad (\text{B6})$$

$$4y \frac{dy}{dx} = \left\{ (1+c) \left[ \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dx} \right] - 1 \right\} \frac{\psi_0}{v} \quad (\text{B7})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\psi_0}{v} \left[ (1+c) \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - 1 \right]}{4y - \frac{\psi_0}{v} (1+c) \frac{y}{(x^2 + y^2)}} \quad (\text{B8})$$

De afstand van de stroomlijn  $\psi_0$  is minimaal tot de symmetrie as als

$\frac{dy}{dx} = 0$ , dus als :

$$(1+c) \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} = 1 \quad (\text{B9})$$

met (B4) volgt dan :

$$\cos \vartheta_0 = \frac{1}{1+c} \quad (\text{B10})$$

Appendix C Formele afleiding van de aard van de randsingulariteit  
zoals voorgesteld door Greenberg [KUI89].

Op een stroomlijn geldt dat de normaalsnelheid nul is.

De zelf-geïnduceerde normaalsnelheid op een wervelvlak dat tevens stroomlijn is moet dus nul zijn in elk punt van het vlak.

Uit (4.6.3) volgt dat dan moet gelden :

$$v_n(s_0) = \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} ds = 0 \quad (C1)$$

Het is de vraag of de wervelsterkte  $\gamma(s)$  hiermee eenduidig is bepaald door:

$$\gamma(s) = 1/\sqrt{s} \quad (C2)$$

waarbij  $s$  de lopende coördinaat langs het wervelvlak vanaf de oorsprong is.

We veronderstellen dat dichtbij de oorsprong, op afstand  $s \ll \epsilon$  van de voorrand van het vlak met  $\epsilon$  de karakteristieke lengte van het probleem, geldt dat  $\frac{dr}{ds} = 1$ . Dan is de voorrand te beschouwen als een vlakke plaat, er geldt dan  $r = s - s_0$  dus :

$$v_n\left(\frac{s_0}{\epsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int \gamma\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \frac{1}{(s-s_0)/\epsilon} d\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \quad (C3)$$

Definieer  $s^* = \frac{s}{\epsilon}$  en neem de limiet voor  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$v_n(s_0^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma(s^*) \frac{1}{s^* - s_0^*} ds^* \quad (C4)$$

Er moet gelden :

$$\int_0^{\infty} \gamma\left(\frac{s^*}{s_0^*}\right) \frac{1}{(s^*/s_0^*) - 1} d\left(\frac{s^*}{s_0^*}\right) = 0 \quad (C5)$$



Definiëer  $x = \frac{s}{s_0^*}$  en probeer  $\gamma(x) = \mathbb{C}/\sqrt{x}$  :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x-1} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x-1} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x-1} dx + \int_1^0 \sqrt{y} \frac{1}{1/y-1} d\left(\frac{1}{y}\right) =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x-1} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{y-1} dy = 0$$

De oplossing van Greenberg is dus een oplossing van (4.6.3), maar veronderstelt dat dicht bij de oorsprong geldt dat  $\frac{dr}{ds} = 1$ .

Dit sluit bij voorbaat een spiraliserend wervelvlak, zoals Schmidt en Sparenberg vinden, uit.

Appendix D : Nadere beschouwing van de drukverdeling op de symmetrie as bij een actuator strip met eindige dikte.

In de klassieke theorie van Froude is afgeleid, dat de krachtdichtheid op de oneindig dunne actuator strip gelijk is aan de druksprong over de strip. We beschouwen nu een actuator strip met een eindige dikte. Algemeen geldt de dimensieloze Euler vergelijking (D1) in het gebied waar de kracht werkzaam is.

$$\underline{\nabla}H = \underline{f} + \underline{v} \times \underline{\omega} \quad (D1)$$

Op de symmetrie as geldt verder dat de vorticititeit nul is zodat de laatste term vervalst. Geïntegreerd in de x-richting over de strip volgt dan :

$$\Delta H = \int f_x dx = \hat{F}_x \quad (D2)$$

$$(p_+ - p_-) + \frac{1}{2}(U_{s+}^2 - U_{s-}^2) = \int^+ f_x dx \quad (D3)$$

We gebruiken de dimensieloze krachtverdeling in de x-richting (5.2.3).

$$\Delta p = -\frac{1}{2}(U_{s+}^2 - U_{s-}^2) + \frac{1}{8}[1 - \tanh(-\frac{1}{2}m)][\tanh(mx_+) - \tanh(mx_-)] \quad (D4)$$

Voor 'hoge' waarden van m is de tweede term rechts gelijk aan  $\frac{1}{2}$ , zodat geldt :

$$\Delta p = \frac{1}{2}(1 - U_{s+}^2 + U_{s-}^2) \quad (D5)$$

Omdat de strip een eindige dikte heeft, die evenredig is met  $L_{\frac{1}{2}}$  (5.2.7) en de snelheid een grote gradient nabij de strip vertoont (figuur 5.4.18) is de druksprong  $\Delta p$  dus lager dan  $\frac{1}{2}$ .

Appendix E : Programmacode PREPROC en POSTPROC.

```

      program sepran
c
c*****
c
c      berekening van de stroming door een actuatorstrip
c          m.b.v. eindige elementen pakket SEPRAN
c          door Rene Peters
c
c          PREPROC
c      bepaling van het stromingsveld voor een reeks Re-getallen.
c*****
c
c      implicit double precision (a-h,o-z)
c
c      dimension kmesh(100),kprob(100),iuser(100),user(1000)
c      dimension iwork(100),work(100),isol(5),isolold(5)
c      dimension intmat(5),iinput(50),matr(5),irhsd(5)
c
c      common/cmcdpi/irefwr,irefre,irefer
c      common/cbuffr/nbuffr,kbuffr,intlen,ibfree
c      common/cfile2/nrec2,ifree2,irec2,iref2,inew,iwork3(1000)
c      common ibuffr(500000)
c      common/rene/m
c
c      open(11,status='new',file='preproc.dat')
c      kmesh(1)=100
c      kprob(1)=100
c      iuser(1)=100
c      user(1)=1000
c      iinput(1)=50
c
c*****
c
c      start
c
c*****
c
c      write(11,*)
c      write(11,*) '*****'
c      write(11,*) '*
c      write(11,*) '*          resultaten van het programma          *'
c      write(11,*) '*              PREPROC              *'
c      write(11,*) '*              door Rene Peters              *'
c      write(11,*) '*
c      write(11,*) '*
c      write(11,*) '*
c      write(11,*) '*
c      write(11,*) '*
c      write(11,*) '*
c      write(6,*) 'gebruik je een oude datafile ? (ja=0)'
c      read(5,*) noud
c      write(6,*) 'wat is convergentie-eis eps ? '
c      read(5,*) epsi
c      write(11,10)epsi*1D2
10  format(' de relatieve fout voor de N.S.-opl. is in % : ',F15.7)
c      write(6,*) 'wat is het aantal iteraties voor eta ? '
c      read(5,*) maxiter
c      write(6,*) 'wat is de steilheidsfactor m ?'
c      read(5,*) m
c      write(11,15) m
15  format(' steilheidsfactor van de kracht : m= ',I3)
c      write(11,*)
c      if (noud.eq.0) then
c          1start=-1
c      else
c          1start=1

```

```

endif
irotat=1
ioutp=1
itime=1
call start(istart,irotat,ioutp,itime)
nbufrr=600000
if (noud.eq.0) then
write(6,3) inew-1
3 format(' er zijn al ',I2,' records gevuld.')
numfi2=inew-1
endif
ichois=0
call mesh(ichois,iinput,rinput,kmesh)
ichois=2
call probdf(ichois,kprob,kmesh,iinput)
jmethod=2
call commat(jmethod,kmesh,kprob,intmat)
c
c*****
c
c   boundary conditions
c
c*****
c
   idim=0
   call bvalue(ichois,idim,kmesh,kprob,isol,value,icrv1,icrv2,
*             idegfd,jstap)
   ichois=0
   idim=2
   value=0D0
   icrv1=1
   icrv2=3
   idegfd=2
   jstap=0
   call bvalue(ichois,idim,kmesh,kprob,isol,value,icrv1,icrv2,
*             idegfd,jstap)
   icrv1=6
   icrv2=6
   call bvalue(ichois,idim,kmesh,kprob,isol,value,icrv1,icrv2,
*             idegfd,jstap)
c
c*****
c
c   specify the differential equation
c
c   eps=1D-5   ro=1.2   eta(minimum)=1.74D-5 (air)
c
c*****
c
   ro=1.2D0
   elo=1D0
   write(11,101) ro
101 format(' de dichtheid is      : ',E15.3)
   write(6,*) 'geef de waarde van de viscositeit : eta '
   read(5,*) eta
   write(11,103) eta
103 format(' de viscositeit is : ',E15.3)
   write(11,*)
   write(6,*) 'geef de waarde van de kracht (trust): f'
   read(5,*) fo
   write(11,102) fo
102 format(' de karakteristieke kracht is      : ',E15.3)
   write(11,133) elo
133 format(' de karakteristieke lengte is      : ',E15.3)
   vo=dsqrt(2D0*fo/(ro*elo))
   write(11,116) vo

```

```

116 format(' de karakteristieke snelheid is      : ',E15.3)
    if (noud.eq.0) then
        goto 5
    endif
c
c*****
c
c    Stokes solution
c
c*****
c
    write(6,*) 'bepaling Stokes oplossing... '
    re=ro*vo*elo/eta
    write(11,104) re
104 format(' het getal van Reynolds is          : ',F15.3)
    do 100 i=1,8
        iwork(i)=0
100 work(i)=0D0
    work(1)=1D-5
    work(2)=1D0
    iwork(3)=0
    iwork(5)=1
    iwork(7)=1
    work(8)=1D0/re
    iparm=8
    ielgrp=1
    call fill100(ielgrp,iuser,user,kprob,iparm,iwork,work)
    ichois=1
    call system(ichois,matr,intmat,kmesh,kprob,irhsd,isol,iuser,
*           user,islold,ielhlp)
    ipos=1
    call solve(ipos,matr,isol,irhsd,intmat,kprob)
    call writbs(0,-1,numarr,'snelheid',isol,ihelp)
    call writbl
    write(11,*)
    write(11,110)numarr
110 format(' de stokesoplossing staat onder recordnr: ',I3)
c
c*****
c
c    check the accuracy of the integration routine
c
c*****
c
    iwork(1)=1
    work(1)=0D0
    iparm=1
    ielgrp=1
    call fill100(ielgrp,iuser,user,kprob,iparm,iwork,work)
    ichois=0
    icheli=1
    jdegfd=1
    force=volint(ichois,icheli,jdegfd,kmesh,kprob,isol,
*           iuser,user,ielhlp)
    write(6,*) 'totale kracht : ',force
    nummin=1
c
c*****
c
c    get the old velocity field from datafile (file2)
c
c*****
c
5    if (noud.eq.0) then
        call readbs(numfi2,isol,ihelp)
        nummin=numfi2

```

```

do 6 i=1,nummin-1
6   eta=i*eta/15D0
   endif
c
c*****
c
c   increase Reynolds number in Navier-Stokes solution
c
c*****
c
   write(6,*) 'verhoging van Reynoldsgetal: eta := niter*eta/15....'
   do 200 niter=nummin,maxiter
   write(11,*)
   write(11,*) '*****'
   write(11,*)
   write(11,120) niter
120  format(' iteratie nummer   : ',I3)
      eta=niter*eta/15D0
      write(11,*)
      write(11,115) eta
115  format(' de viscositeit is : ',E10.5)
      re=ro*vo*elo/eta
      write(11,117) re
117  format(' Reynoldswaarde is : ',F10.3)
      do 1100 i=1,8
      iwork(i)=0
1100  work(i)=0D0
      work(1)=1D-5
      work(2)=1D0
      iwork(5)=1
      iwork(7)=1
      work(8)=1D0/re
      iwork(3)=2.
      iparm=8
      ielgrp=1
      call fill00(ielgrp,iuser,user,kprob,iparm,iwork,work)
      difrel=1000.
210  call copyvc(isol,islold)
      ichois=0
      idim=2
      value=0D0
      icrv1=1
      icrv2=3
      idegfd=2
      jstap=0
      call bvalue(ichois,idim,kmesh,kprob,isol,value,icrv1,icrv2,
*              idegfd,jstap)
      icrv1=6
      icrv2=6
      call bvalue(ichois,idim,kmesh,kprob,isol,value,icrv1,icrv2,
*              idegfd,jstap)
      ichois=-1
      call system(ichois,matr,intmat,kmesh,kprob,irhsd,isol,iuser,
*              user,islold,ielgrp)
      ipos=1
      call solve(ipos,matr,isol,irhsd,intmat,kprob)
      ichois=0
      call diffvc(ichois,isol,islold,kprob,difmax)
      write(11,*)
      write(11,145) difmax
145  format(' verschil tussen opeenvolgende iteraties : ',E15.5)
      write(irefwr,150)difmax
150  format(' differences between successive iterations : ',E15.5)
      ichois=1
      ichnrm=3
      jdegfd=0

```

```

      vmax=anorm(ichois, ichnrm, jdegfd, kmesh, kprob, isol, isol2, ielhlp)
      write(11,160) vmax
160  format(' grootste waarde van u/v                : ',E15.5)
      dfrlold=difrel
      difrel=difmax/vmax
      write(6,*)difrel*1D2
      write(11,180)difrel*1D2
180  format(' relatieve verschil in procenten        : ',F15.5,' %')
      if (difrel.gt.dfrlold) goto 999
      if (difrel.gt.epsi) goto 210
      call writbs(0,-1,numarr,'snelheid',isol,ihelp)
      call writbl
      write(11,*)
      write(11,140)niter,numarr
140  format(' N.S.-opl. na : ',I3,' iteraties in record: ',I3)
200  continue
c
c*****
c
c   program end
c
c*****
c
c 999 write(6,*) 'einde!!'
      close(11,status='keep')
      istop=1
      call finish(istop)
      end
c
c*****
c*****
c
c   declaration functions and subroutines
c
c*****
c*****
c
      function funcf(ichois,x,y,z)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      common/rene/m

      funcf = m*(1D0-tanh(m*(y-5D-1)))/(8D0*cosh(m*x)*cosh(m*x))

      end
c
c*****
c
      function func(ichois,x,y,z)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      common/rene/m

      func = m*(1D0-tanh(m*(y-5D-1)))/(8D0*cosh(m*x)*cosh(m*x))

      end
c
c*****

```

```

program sepran
c
c*****
c
c   berekening van de stroming door een actuatorstrip
c       m.b.v. eindige elementen pakket SEPRAN
c           door Rene Peters
c
c           POSTPROC
c   berekening gemiddelde snelheid, afgegeven vermogen, controle
c   massa-, impuls- en energiebalans enz.
c
c*****
c
c   implicit double precision (a-h,o-z)
c
c   dimension kmesh(100),kprob(100),iuser(100),user(1500),coord(500)
c   dimension isold(5),iwork(100),work(100),isol(5),pcoord(500)
c   dimension intmat(5),ipres(5),istrm(5),iinput(50),cvl(500)
c   dimension matr(5),irhsd(5),ivort(5),iforce(5),icurvs(5),cnorm(500)
c   dimension iu1(2),u1(2),ione(5),itens(5),veloc(500),vnorm(500)
c   dimension velov(500),velou(500),pres(500),crvl(500),snel(500)
c   dimension value11(2),value12(2),value13(2),value14(2),coordx(500)
c   dimension value15(2),value16(2),value17(2),value18(2),ipower(5)
c   dimension tens1(500),tens2(500),tens3(500),vnrn(500),cnrm(500)
c   dimension xjdim(6),gamma(2)
c
c   common/cmcdpi/irefwr,irefre,irefer
c   common/cbuffr/nbuffr,kbuffr,intlen,ibfree
c   common/cfile2/nrec2,ifree2,irec2,iref2,inew,iwork3(1000)
c   common/cgrens/axmin,axmax,aymin,aymax,kiesx,kiesy,isigx,isigy
c   common/cplot/xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax,jmax,jmark,
c   *       jkader,jtimes
c   common ibuffr(600000)
c   common/rene/m
c
c   open(11,status='new',file='postproc.dat')
c   open(10,status='new',file='postdata.dat')
c   kmesh(1)=100
c   kprob(1)=100
c   iuser(1)=100
c   user(1)=1500
c   iinput(1)=50
c   veloc(1)=500
c   velou(1)=500
c   velov(1)=500
c   snel(1)=500
c   vnorm(1)=500
c   vnrn(1)=500
c   coord(1)=500
c   pcoord(1)=500
c   coordx(1)=500
c   cnorm(1)=500
c   cnrm(1)=500
c   crvl(1)=500
c   cvl(1)=500
c   pres(1)=500
c   tens1(1)=500
c   tens2(1)=500
c   tens3(1)=500
c
c
c*****

```





```

read(5,*) iuitv
write(6,*) 'wilt u alleen het laatste record verwerken ? (ja=0)'
read(5,*) kuitv
if (kuitv.eq.0) then
nummin=nummax
if (nummax.gt.2) then
do 33 i=1,nummax-2
eta=i*eta/15D0
33 continue
endif
else
nummin=2
endif
do 23 numarr=nummin,nummax
write(11,*)
write(11,*) '*****'
write(11,*)
call readbs(numarr,isol,ihelp)
eta=(numarr-1)*eta/15D0
re=ro*vo*elo/eta
write(11,104) re
if (numarr.eq.numuit) then
write(10,*)
write(10,*) '*****'
write(10,*)
write(10,104) re
endif
104 format(' het getal van Reynolds is      : ',F15.3)
do 100 i=1,8
iwork(i)=0
100 work(i)=0D0
work(1)=1D-5
work(2)=1D0
iwork(3)=2
iwork(5)=1
iwork(7)=1
work(8)=1D0/re
iparm=8
ielgrp=1
call fill100(ielgrp,iuser,user,kprob,iparm,iwork,work)
ichois=1
call system(ichois,matr,intmat,kmesh,kprob,irhsd,isol,iuser,
*          user,islold,ielhlp)
c
c*****
c
c      compute pressure, vorticity, stresstensor and streamfunction
c
c*****
c
write(6,*)'bepaling van de druk, stroomfunctie en vorticiteit'
icheld=1
ichois=1
ivec=1
call deriva(ichois,icheld,ix,jdegfd,ivec,ipres,kmesh,kprob,
*          isol,isol,iuser,user,ielhlp)
icheld=4
ivec=1
call deriva(ichois,icheld,ix,jdegfd,ivec,ivort,kmesh,kprob,
*          isol,isol,iuser,user,ielhlp)
icheld=5
ivec=3
call deriva(ichois,icheld,ix,jdegfd,ivec,itens,kmesh,kprob,
*          isol,isol,iuser,user,ielhlp)
ichels=1
jpoint=0

```

```

      call stream(ichels,ivec,istrm,jpoint,psiphi,kmesh,kprob,isol)
c
c*****
c
c   check mass-, momentum- and energyconservation
c
c*****
c
      write(6,*) 'controle massa-, impuls- en energiebehoud...'
      ichois=2
      irule=3
      idim=1
      number=1
      icrv1=1
      icrv2=1
      value1=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      icrv1=2
      icrv2=2
      value2=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      icrv1=3
      icrv2=3
      value3=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      icrv1=4
      icrv2=4
      snelect=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      icrv1=6
      icrv2=6
      value4=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      ichois=3
      irule=3
      idim=1
      number=1
      icrv1=1
      icrv2=1
      value5=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      icrv1=2
      icrv2=2
      value6=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      icrv1=3
      icrv2=3
      value7=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      icrv1=6
      icrv2=6
      value8=bounin(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*                  icrv2,isol,iuser,user)
      ichois=6
      irule=3
      idim=1
      number=1
      icrv1=1
      icrv2=1
      call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*               icrv2,itens,iuser,user,value11)
      icrv1=2
      icrv2=2
      call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*               icrv2,itens,iuser,user,value12)
      icrv1=3

```

```

icrv2=3
call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*          icrv2,itens,iuser,user,value13)
icrv1=6
icrv2=6
call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*          icrv2,itens,iuser,user,value14)
ichois=7
irule=3
idim=1
number=1
icrv1=1
icrv2=1
call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*          icrv2,ipres,iuser,user,value15)
call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*          icrv2,ivort,iuser,user,gamma)
icrv1=2
icrv2=2
call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*          icrv2,ipres,iuser,user,value16)
icrv1=3
icrv2=3
call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*          icrv2,ipres,iuser,user,value17)
icrv1=6
icrv2=6
call=bouniv(ichois,irule,idim,number,kmesh,kprob,icrv1,
*          icrv2,ipres,iuser,user,value18)
iwork(1)=1
work(1)=0D0
iparm=1
ielgrp=1
call fill00(ielgrp,iuser,user,kprob,iparm,iwork,work)
ichois=0
icheli=1
jdegfd=1
force=volint(ichois,icheli,jdegfd,kmesh,kprob,isol,
*          iuser,user,ielhlp)
iu1(1)=1
iu1(2)=0
u1(1)=0D0
u1(2)=0D0
ichvc=1
ichois=0
call creavc(ichois,ichvc,ivec,iforce,kmesh,kprob,iu1,u1,iu2,u2)
iu1(1)=0
call creavc(ichois,ichvc,ivec,ipower,kmesh,kprob,iu1,u1,iu2,u2)
npoint=isol(5)
nknprt=npoint/2
itypc=0
kfree=0
call ini002(itypc,isol,kmesh,kprob,kfree,nunkp,ndegfd,ipisol,
*          ipkprf,ikprbf,ipkprh,ikprbh,.false.,compl,'main',ivec)
call ini002(itypc,iforce,kmesh,kprob,kfree,nunkp,ndegfd,ipiforce,
*          ipkprf,ikprbf,ipkprh,ikprbh,.false.,compl,'main',ivec)
call ini002(itypc,ipower,kmesh,kprob,kfree,nunkp,ndegfd,ipipower,
*          ipkprf,ikprbf,ipkprh,ikprbh,.false.,compl,'main',ivec)
call inprod(nknprt,ibuffr(ipisol),ibuffr(ipiforce),
*          ibuffr(ipipower),ikprbf,ibuffr(ipkprf),
*          ikprbh,ibuffr(ipkprh),nunkp)
istart=7
iuser(6)=istart
iuser(istart)=2001
istart=istart+1
iuser(istart)=6

```

```

do 123 i=1,nknpnt
call pow(i,ibuffr(ipipower),ikprbh,ibuffr(ipkprh),po)
user(5+i)=po
123 continue
ichois=0
icheli=1
jdegfd=1
pove=volint(ichois,icheli,jdegfd,kmesh,kprob,isol,
*           iuser,user,ielhlp)
ichois=0
number=0
icurvs(1)=4
icurvs(2)=1
icurvs(3)=2
icurvs(4)=3
icurvs(5)=6
call compcr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,coord,veloc)
call len117(coord,numpnt,ndim)
call in117(.true.,vnorm,numpnt,1)
call in117(.true.,snel,numpnt,2)
call crvlen(coord,crvl,totl,cnorm)
if (numarr.eq.numuit) then
write(10,*)
write(10,345) totl
endif
345 format(' de totale lengte van int.gebied (v) = ',F10.4)
i=ind117(vnorm,1,1)
j=ind117(snel,1,1)
k=ind117(snel,1,2)
vnorm(i)=0D0
snel(j)=0D0
snel(k)=0D0
vimpv=0D0
vimpw=0D0
venerg=0D0
do 403 ipnt=2,numpnt
i=ind117(veloc,ipnt,1)
j=ind117(veloc,ipnt,2)
i1=ind117(veloc,ipnt-1,1)
j1=ind117(veloc,ipnt-1,2)
i2=ind117(snel,ipnt,1)
j2=ind117(snel,ipnt,2)
k=ind117(cnorm,ipnt,1)
l=ind117(cnorm,ipnt,2)
o=ind117(vnorm,ipnt,1)
n=ind117(crvl,ipnt,1)
snel(i2)=(veloc(i)+veloc(i1))/2D0
snel(j2)=(veloc(j)+veloc(j1))/2D0
vnorm(o)=snel(i2)*cnorm(k)+snel(j2)*cnorm(l)
vimpv=vimpv+snel(i2)*vnorm(o)*crvl(n)
vimpw=vimpw+snel(j2)*vnorm(o)*crvl(n)
venerg=venerg+0.5D0*(snel(i2)*snel(i2)+snel(j2)*snel(j2))
*           *vnorm(o)*crvl(n)
403 continue
ichois=0
icurvs(1)=4
icurvs(2)=1
icurvs(3)=2
icurvs(4)=3
icurvs(5)=6
number=1
call compcr(ichois,kmesh,kprob,ipres,number,icurvs,pcoord,pres)
call compcr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,pcoord,tens1)
number=2
call compcr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,pcoord,tens2)
number=3

```

```

call compcr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,pcoord,tens3)
call len117(pcoord,nmpnt,ndm)
call ini117(.true.,vnmr,nmpnt,1)
call crvlen(pcoord,cvl,totl,cnrm)
if (numarr.eq.numuit) then
write(10,346) totl
endif
346 format(' de totale lengte van int.gebied (p) = ',F10.4)
penerg=0D0
etenerg=0D0
do 4003 ipnt=1,nmpnt
i1=ind117(snel,2*ipnt-1,1)
i2=ind117(snel,2*ipnt-1,2)
i3=ind117(cvl,ipnt,1)
i4=ind117(vnmr,ipnt,1)
i5=ind117(pres,ipnt,1)
i6=ind117(tens1,ipnt,1)
i7=ind117(tens2,ipnt,1)
i10=ind117(tens3,ipnt,1)
i8=ind117(cnrm,ipnt,1)
i9=ind117(cnrm,ipnt,2)
vnmr(i4)=snel(i1)*cnrm(i8)+snel(i2)*cnrm(i9)
penerg = penerg + pres(i5)*vnmr(i4)*cvl(i3)
etenerg = etenerg + (cnrm(i8)*(tens1(i6)*snel(i1) +
*      tens2(i7)*snel(i2)) + cnrm(i9)*
*      (tens2(i7)*snel(i1) + tens3(i10)*snel(i2)))*cvl(i3)
4003 continue
c
c*****
c
c   print results to POSTPROC.DAT
c
c*****
c
write(6,*) 'print resultaten...'
write(11,*)
write(11,*) '*****'
write(11,*) 'MASSABEHOUDE'
write(11,*) '*****'
write(11,*)
write(11,495)value1+value2+value3+value4
495 format(' totale stroming door wand : ',E20.10)
write(11,496)value5+value6+value7+value8
496 format(' totale stroming langs de wand: ',E20.10)
write(11,*)
write(11,390) snelact*2D0
390 format(' gemiddelde snelheid door act.: ',E20.10)
write(11,*)
write(11,*) '*****'
write(11,*) 'IMPULSBEHOUD'
write(11,*) '*****'
write(11,*)
pulsetax=value11(1)+value12(1)+value13(1)+value14(1)
write(11,497)pulsetax
497 format(' totale impuls in de x-richting tgv eta : ',E20.10)
pulsetay=value11(2)+value12(2)+value13(2)+value14(2)
write(11,498)pulsetay
498 format(' totale impuls in de y-richting tgv eta : ',E20.10)
write(11,*)
pulspx=value15(1)+value16(1)+value17(1)+value18(1)
write(11,529)pulspx
529 format(' totale impuls in de x-richting tgv druk: ',E20.10)
pulspy=value15(2)+value16(2)+value17(2)+value18(2)
write(11,531)pulspy
531 format(' totale impuls in de y-richting tgv druk: ',E20.10)
write(11,*)

```

```

write(11,489) force
489 format(' impuls in de x-richting tgv de kracht : ',E20.10)
write(11,*)
write(11,490) vimpv
490 format(' impuls in de x-richting tgv convectie : ',E20.10)
write(11,491) vimpv
491 format(' impuls in de y-richting tgv convectie : ',E20.10)
write(11,*)
write(11,*)
write(11,546) -pulspx+force+pulsetax-vimpv
546 format(' fout in de impulsbalans in x-richting : ',E20.10)
write(11,547) -pulspx+pulsetax-vimpv
547 format(' fout in de impulsbalans in y-richting : ',E20.10)
write(11,*)
write(11,*)
write(11,*) '*****'
write(11,*) 'ENERGIEBEHOUD'
write(11,*) '*****'
write(11,*)
write(11,492) venerg
492 format(' de energieterm tgv convectie : ',E20.10)
write(11,493) powe
493 format(' de energietoevoer tgv de kracht : ',E20.10)
write(11,777) -penerg
777 format(' de energieterm tgv de druk : ',E20.10)
write(11,778) etenerg
778 format(' de energieterm tgv de viscositeit : ',E20.10)
write(11,*)
write(11,779) venerg-powe+penerg-etenerg
779 format(' fout in de energiebalans : ',E20.10)
write(11,*)
write(11,*)
write(11,998) 8D0*powe
998 format(' de verhouding in afgegeven vermogen is : ',E20.10)
write(11,999) value17(2)+value18(2)
999 format(' de y-comp. van de drukkracht (sym-as) : ',E20.10)
write(11,1000) gamma(1)
1000 format(' de gamma v.h. wervelvlak op oneindig : ',E20.10)

if (numarr.eq.numuit) then
goto 20
endif

if (juitv.ne.0) then
goto 22
endif

c
c*****
c
c print results to POSTDATA.DAT
c
c*****
c
20 irefwr=10
ichois=1
number=0
icurvs(1)=0
icurvs(2)=1
call princr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,'v-rand 1',
* ioutp)
icurvs(2)=2
call princr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,'v-rand 2',
* ioutp)
icurvs(2)=3
call princr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,'v-rand 3',
* ioutp)

```

```

icurvs(2)=4
call princr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,'v-rand 4',
*      ioutp)
icurvs(2)=6
call princr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,'v-rand 6',
*      ioutp)
ichois=0
icurvs(2)=1
call princr(ichois,kmesh,kprob,ipres,number,icurvs,'p-rand 1',
*      ioutp)
icurvs(2)=2
call princr(ichois,kmesh,kprob,ipres,number,icurvs,'p-rand 2',
*      ioutp)
icurvs(2)=3
call princr(ichois,kmesh,kprob,ipres,number,icurvs,'p-rand 3',
*      ioutp)
icurvs(2)=4
call princr(ichois,kmesh,kprob,ipres,number,icurvs,'p-rand 4',
*      ioutp)
icurvs(2)=6
call princr(ichois,kmesh,kprob,ipres,number,icurvs,'p-rand 6',
*      ioutp)
icurvs(2)=1
call princr(ichois,kmesh,kprob,istrm,number,icurvs,'psi-rand 1',
*      ioutp)
icurvs(2)=2
call princr(ichois,kmesh,kprob,istrm,number,icurvs,'psi-rand 2',
*      ioutp)
icurvs(2)=3
call princr(ichois,kmesh,kprob,istrm,number,icurvs,'psi-rand 3',
*      ioutp)
icurvs(2)=4
call princr(ichois,kmesh,kprob,istrm,number,icurvs,'psi-rand 4',
*      ioutp)
icurvs(2)=6
call princr(ichois,kmesh,kprob,istrm,number,icurvs,'psi-rand 6',
*      ioutp)
icurvs(2)=1
call princr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,'sigma-rand 1',
*      ioutp)
icurvs(2)=2
call princr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,'sigma-rand 2',
*      ioutp)
icurvs(2)=3
call princr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,'sigma-rand 3',
*      ioutp)
icurvs(2)=4
call princr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,'sigma-rand 4',
*      ioutp)
icurvs(2)=6
call princr(ichois,kmesh,kprob,itens,number,icurvs,'sigma-rand 6',
*      ioutp)
jdim=31
xjdim(1)=-5D-1
xjdim(2)=25D-1
xjdim(3)=3D-1
xjdim(4)=6D-1
call prinov(ivort,kmesh,kprob,jdim,'vorticiteit',xjdim,jpoint)
jdim=31
xjdim(1)=-1D-1
xjdim(2)=1D-1
xjdim(3)=0D0
xjdim(4)=75D-2
call prinov(isol,kmesh,kprob,jdim,'u,v bij strip',xjdim,jpoint)
call prinov(ipres,kmesh,kprob,jdim,'druk bij strip',xjdim,jpoint)
call prinov(istrm,kmesh,kprob,jdim,'psi bij strip',xjdim,jpoint)

```



```

      irefwr=15
22   if (numarr.eq.numuit) then
      goto 25
      endif
      if (iuitv.ne.0) then
      goto 23
      endif
c
c*****
c
c   show results
c
c*****
c
25   write(6,*) 'plot resultaten...'
      xmin=0
      xmax=0
      ymin=0
      ymax=0
      jmax=0
      jmark=0
      jkader=0
      jtimes=0
      call plotvc(1,2,isol,isol,kmesh,kprob,18D0,1D0,0D0)
      number=1
      ncntln=-10
      jsmoot=0
      call plotc1(number,kmesh,kprob,ipres,contln,ncntln,
*               15D0,1D0,jsmoot)
      ncntln=-10
      call plotc1(number,kmesh,kprob,istrm,contln,ncntln,
*               15D0,1D0,jsmoot)
      ncntln=-7
      call plotc1(number,kmesh,kprob,ivort,contln,ncntln,
*               15D0,1D0,jsmoot)
      xmin=-10D-2
      xmax=10D-2
      ymin=0D0
      ymax=60D-2
      jmax=1
      jkader=-3
      jtimes=0
      call plotvc(1,2,isol,isol,kmesh,kprob,15D0,5D-1,0D0)
      number=1
      ncntln=-10
      jsmoot=0
      call plotc1(number,kmesh,kprob,ipres,contln,ncntln,
*               15D0,5D-1,jsmoot)
      ncntln=-15
      call plotc1(number,kmesh,kprob,istrm,contln,ncntln,
*               15D0,5D-1,jsmoot)
      ncntln=-10
      call plotc1(number,kmesh,kprob,ivort,contln,ncntln,
*               15D0,5D-1,jsmoot)
      xmin=-10D-2
      xmax=10D-2
      ymin=30D-2
      ymax=60D-2
      call plotvc(1,2,isol,isol,kmesh,kprob,15D0,1,0D0)
      number=1
      ncntln=-10
      jsmoot=0
      call plotc1(number,kmesh,kprob,ipres,contln,ncntln,
*               15D0,1,jsmoot)
      ncntln=-20
      call plotc1(number,kmesh,kprob,istrm,contln,ncntln,

```

```

*           15D0,1,jsmoot)
  ncntln=-10
  call plotc1(number,kmesh,kprob,ivort,contln,ncntln,
*           15D0,1,jsmoot)
  xmin=-1.
  xmax=1.
  ymin=0.
  ymax=1.
  call plotvc(1,2,isol,isol,kmesh,kprob,18D0,15D-1,0D0)
  kiesx=1
  isigx=2
  axmin=0.
  axmax=0.5
  ichois=0
  number=1
  icurvs(1)=1
  icurvs(2)=4
  ipict=1
  npict=1
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,isol,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'actuatorstrip','snelheid u',coordx,velou)
  number=2
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,isol,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'actuatorstrip','snelheid v',coordx,velou)
  number=1
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,ipres,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'actuatorstrip','druk p',coordx,velou)
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,istrm,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'actuatorstrip','stroomfunctie',coordx,velou)
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,ivort,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'actuatorstrip','vorticiteit',coordx,velou)
  ichois=0
  number=1
  icurvs(1)=1
  icurvs(2)=1
  call compcr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,coord,veloc)
  call ext117(coord,coordx,2)
  call ext117(veloc,velou,1)
  ichois=1
  ipict=1
  npict=1
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,isol,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'jet stream','snelheid',coordx,velou)
  ichois=0
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,ivort,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'jet stream','vorticiteit',coordx,velou)
  axmin=-25D-1
  axmax=25D-1
  ichois=0
  number=1
  icurvs(1)=2
  icurvs(2)=3
  icurvs(3)=6
  call compcr(ichois,kmesh,kprob,isol,number,icurvs,coord,veloc)
  call ext117(coord,coordx,1)
  call ext117(veloc,velou,1)
  call compcr(ichois,kmesh,kprob,ipres,number,icurvs,coord,pres)
  ichois=1
  number=1
  ipict=1
  npict=1
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,isol,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'sym.axis','velocity',coordx,velou)
  call ext117(coord,coordx,1)
  call plotfn(ichois,ipict,npict,kmesh,kprob,ipres,number,
*   icurvs,18D0,-1D1,'sym.axis','pressure',coordx,pres)

```

```

jmax=0
number=1
angle=315
linopt=3
call plot3d(number,kmesh,kprob,ipres,1500,1000,angle,linopt)
call plot3d(number,kmesh,kprob,istrm,1500,1000,angle,linopt)
call plot3d(number,kmesh,kprob,ivort,1500,1000,angle,linopt)
23 continue
c
c*****
c
c   program end
c
c*****
c
c   write(6,*) 'einde!!'
c   close(10,status='keep')
c   close(11,status='keep')
c   istop=1
c   call finish(istop)
c   end

c*****
c*****
c
c   declaration functions and subroutines
c
c*****
c*****

function funcf(ichois,x,y,z)
implicit double precision (a-h,o-z)
common/rene/m

funcf = m*(100-tanh(m*(y-50-1)))/(800*cosh(m*x)*cosh(m*x))

end

c*****

function func(ichois,x,y,z)
implicit double precision (a-h,o-z)
common/rene/m

func = m*(100-tanh(m*(y-50-1)))/(800*cosh(m*x)*cosh(m*x))

end

c*****

subroutine inprod(n,velo,force,power,ikprbf,kprobf,ikprbh,
*               kprobh,nunkp)
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension velo(*),force(*),power(*),kprobf(*),kprobh(*)

inunkp=nunkp
do 1000 iknpt=1,n
if (ikprbf.eq.0) then
ipsol=1+nunkp*(iknpt-1)
else
ipsol=kprobf(iknpt)+1
inunkp=kprobf(iknpt+1)-kprobf(iknpt)
endif
if (ikprbh.gt.0) then
ipsol=kprobh(ipsol)
endif

```

```

    if (inunkp.gt.0) then
    a1=velo(ipsol)
    a2=force(ipsol)
    power(ipsol)=a1*a2
    endif
1000 continue

    return
    end

c*****

subroutine pow(iknpnt,power,ikprbh,kprobh,po)
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension power(*),kprobh(*)

ipsol=1+2*(iknpnt-1)
if (ikprbh.gt.0) then
ipsol=kprobh(ipsol)
endif
po=power(ipsol)

return
end

c
c*****
c
c   subroutine pri17
c
c   purpose   : prints user array of type 117 to standard output file
c
c   usage     : call pri17(array,text)
c
c   parameters
c
c   array     : array to be printed
c   text      : text to be added
c
c*****

subroutine pri17(array,text)
double precision array(*)
character text*(*)
integer ndim,numpnt,istart,ilast,i,j
common/cmcdpi/irefwr,irefre,irefer

write(10,9000)text

ndim=idint(array(4))
numpnt=idint(array(5))/ndim
ilast=5

do 100 i=1,numpnt
    istart=ilast+1
    ilast=istart+ndim-1
    write(10,9010)(array(j),j=istart,ilast)
100 continue

9000 format(' vector printout of : ',a40,/)
9010 format(4e15.7)

return
end

c*****
c

```

```

c      function ind117
c
c      purpose   : gives index of desired quantity in user array of type 117
c
c      usage     : index = ind117(array,ipnt,ndim)
c
c      parameters
c
c      array (i) : user array of type 117
c      ipnt  (i) : index of (usual spatial) point of desired quantity
c      idim  (i) : index of component           "   "   "
c
c*****

      integer function ind117(array,ipnt,ndim)
      double precision array(*)
      integer ipnt,ndim,ndim

      ndim=array(4)
      ind117=5 + (ipnt-1)*ndim + ndim

      return
      end

c*****

c
c      subroutine ini117
c
c      purpose   : initiates user array of type 117
c
c      usage     : call ini117(zero,array,numpnt,ndim)
c
c      parameters
c
c      array     : user array to be initiated, declared array length has
c                  to be filled in position 1 by the user
c      numpnt    : number of spatial points on which the quantity to be stored
c                  in array is defined
c      ndim      : number of dimensions of the stored quantity
c
c*****

      subroutine ini117(zero,array,numpnt,ndim)
      double precision array(*)
      integer numpnt,ndim,i
      logical zero

      if (zero) then
         do 100 i=2,idint(array(1))
            array(i)=0.0
100      continue
      endif

      array(2)=117
      array(3)=5+ndim*numpnt
      array(4)=ndim
      array(5)=ndim*numpnt

      return
      end

c*****

c
c      subroutine len117
c
c      purpose   : gives number points (numpnt) and number of dimensions

```

```

c          (ndim) contained in user array of type 117
c
c*****
c
c      subroutine len117(array,numprt,ndim)
c      double precision array(*)
c      integer numprt,ndim
c
c      ndim=idint(array(4))
c      numprt=idint(array(5))/ndim
c
c      return
c      end
c*****
c
c      subroutine crvlen
c
c      purpose      : gives the curvelength between two succeeding
c                   : nodal points and the total length
c
c      usage        : call crvlen(coord,crvl,totl,cnorm)
c
c      parameters
c
c      coord        : user array filled with the coordinates of
c                   : the nodal points
c      crvl         : user array contains the curvelengths
c      totl         : double precision real the total length
c      cnorm        : user array filled with the normal on the
c                   : boundary
c
c*****
c
c      subroutine crvlen(coord,crvl,totl,cnorm)
c      double precision coord(*),crvl(*),cnorm(*)
c
c      integer ind117,i,j,k,ipnt,numprt,ndim,j1,j2,k1,k2
c      double precision s,ds,dx,dy,totl
c
c      call len117(coord,numprt,ndim)
c      call in117(.true.,crvl,numprt,1)
c      call in117(.true.,cnorm,numprt,2)
c
c      i=ind117(crvl,1,1)
c      j=ind117(cnorm,1,1)
c      k=ind117(cnorm,1,2)
c      s=0.0
c      crvl(i)=0.0
c      cnorm(j)=0.0
c      cnorm(k)=0.0
c      do 990 ipnt=2,numprt
c          i=ind117(crvl,ipnt,1)
c          j=ind117(cnorm,ipnt,1)
c          k=ind117(cnorm,ipnt,2)
c          j1=ind117(coord,ipnt-1,1)
c          j2=ind117(coord,ipnt-1,2)
c          k1=ind117(coord,ipnt,1)
c          k2=ind117(coord,ipnt,2)
c          dx=coord(k1)-coord(j1)
c          dy=coord(k2)-coord(j2)
c          ds=dsqrt(dx*dx + dy*dy)
c          s=s+ds
c          crvl(i)=s
c          cnorm(j)=dy/ds
c          cnorm(k)=-dx/ds
c      990

```

```

990 continue
    tot1=s

    return
end

```

```

c*****
c
c  subroutine ext117
c
c  purpose : sorteert een vrijheidgraad uit een array
c            samengesteld uit meerdere vrijheidsgraden
c
c  usage   : call ext117(inarr,outarr,idim)
c
c  parameters
c
c  inarr   : samengestelde array
c  outarr  : uitgesorteerde array
c  idim    : vrijheidsgraad van inarr die in outarr moet komen
c
c*****

```

```

    subroutine ext117(inarr,outarr,idim)
    integer idim,numpnt,ipnt,ndim,i,j,ind117
    double precision inarr(*),outarr(*)

    call len117(inarr,numpnt,ndim)

    if (ndim.le.0) return

    call ini117(.true.,outarr,numpnt,1)

    do 100 ipnt=1,numpnt
        j=ind117(inarr,ipnt,idim)
        i=ind117(outarr,ipnt,1)
        outarr(i)=inarr(j)
100 continue

    return
end

```

```

c*****
c
c  subroutine add117
c
c  purpose: puts two array of type 117 into a new (larger) one
c
c  usage  : call add117(arrin1,arrin2,arrout)
c
c*****

```

```

    subroutine add117(arrin1,arrin2,arrout)
    double precision arrin1(*),arrin2(*),arrout(*)

    integer ipnt,npnt,npnt1,npnt2,ndim,ndim1,ndim2,jin,jout,
&          ind117,idim

    call len117(arrin1,npnt1,ndim1)
    call len117(arrin2,npnt2,ndim2)

    npnt=min(npnt1,npnt2)
    ndim=ndim1+ndim2

    call ini117(.true.,arrout,npnt,ndim)

```

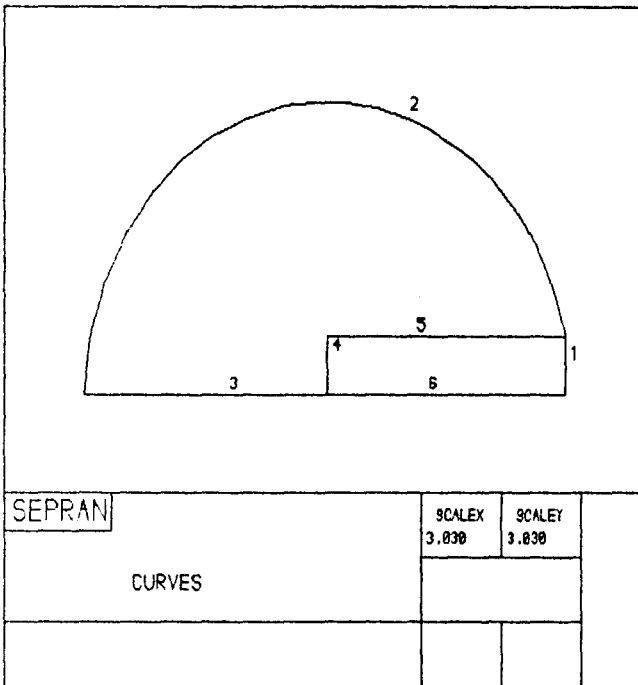
```

c      **** loop over all points
do 100 ipnt=1,npnt
c      ** loop over degrees of freedom of first input array
do 110 idim=1,ndim1
    jin=ind117(arrin1,ipnt,idim)
    jout=ind117(arrout,ipnt,idim)
    arrout(jout)=arrin1(jin)
110   continue
c      ** loop over degrees of freedom of second input array
do 120 idim=1,ndim2
    jin=ind117(arrin2,ipnt,idim)
    jout=ind117(arrout,ipnt,ndim1+idim)
    arrout(jout)=arrin2(jin)
120   continue
100   continue

    return
end

```

c\*\*\*\*\*





```

*****
*
*      resultaten van het programma      *
*      POSTPROC                          *
*      door Rene Peters                  *
*
*****

```

de steilheidsfactor van de kracht: m = 10

de dichtheid is : 0.120E+01  
de viscositeit is : 0.200E+00

de karakteristieke kracht is : 0.100E-05  
de karakteristieke lengte is : 0.100E+01  
de karakteristieke snelheid is : 0.129E-02

\*\*\*\*\*

het getal van Reynolds is : 2593.850

\*\*\*\*\*

#### MASSABEHOUDE

\*\*\*\*\*

totale stroming door wand : 0.2889847393E-06  
totale stroming langs de wand: 0.2812983869E+01

gemiddelde snelheid door act.: 0.5186217956E+00

\*\*\*\*\*

#### IMPULSBEHOUD

\*\*\*\*\*

totale impuls in de x-richting tgv eta : -0.6122915093E-04  
totale impuls in de y-richting tgv eta : 0.4403878002E-03

totale impuls in de x-richting tgv druk: -0.9247012617E-04  
totale impuls in de y-richting tgv druk: -0.9209439726E-02

impuls in de x-richting tgv de kracht : 0.2502099211E+00

impuls in de x-richting tgv convectie : 0.2496612184E+00  
impuls in de y-richting tgv convectie : 0.7963246421E-02

fout in de impulsbalans in x-richting : 0.5799436672E-03  
fout in de impulsbalans in y-richting : 0.1686581105E-02

\*\*\*\*\*

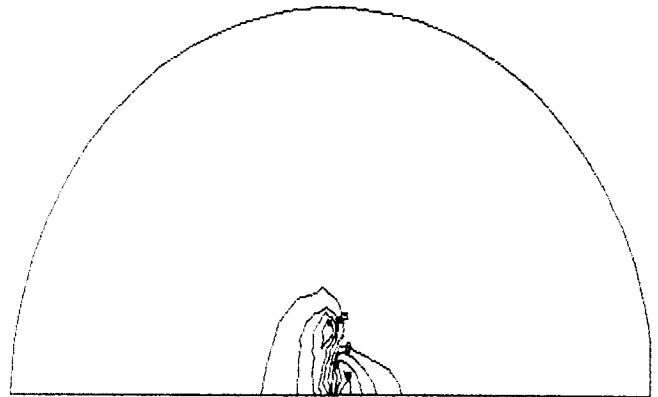
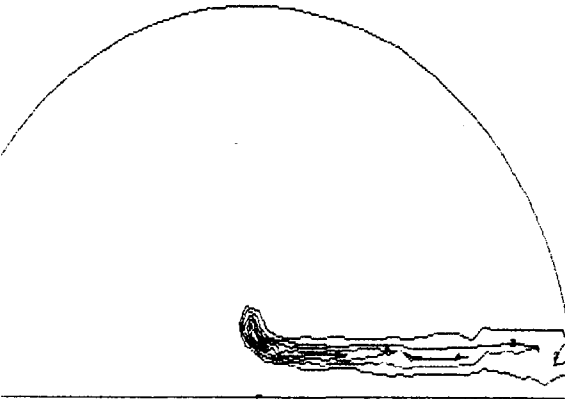
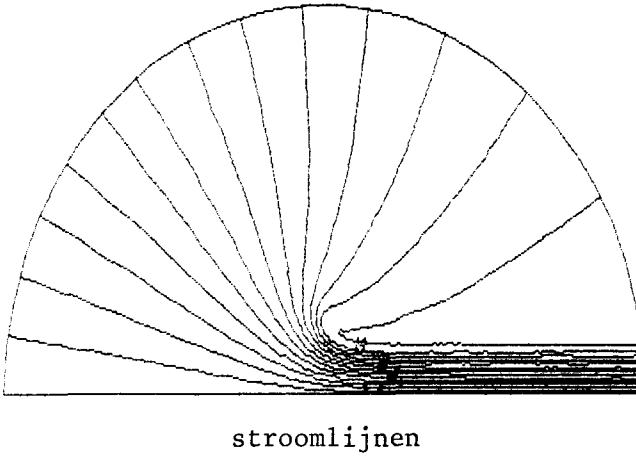
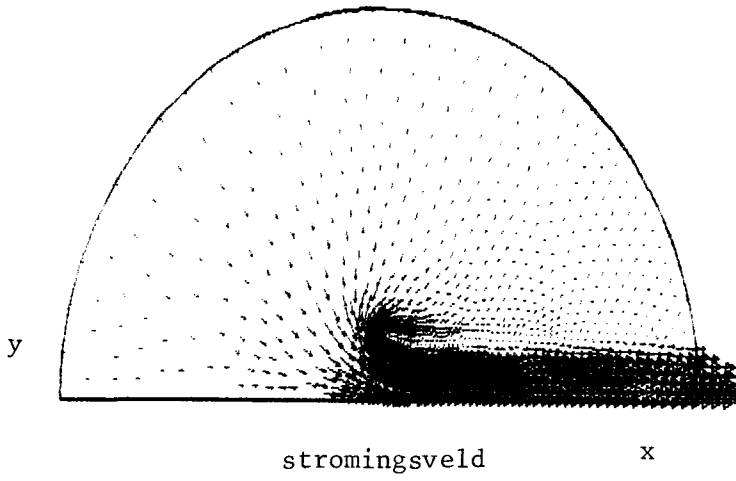
#### ENERGIEBEHOUD

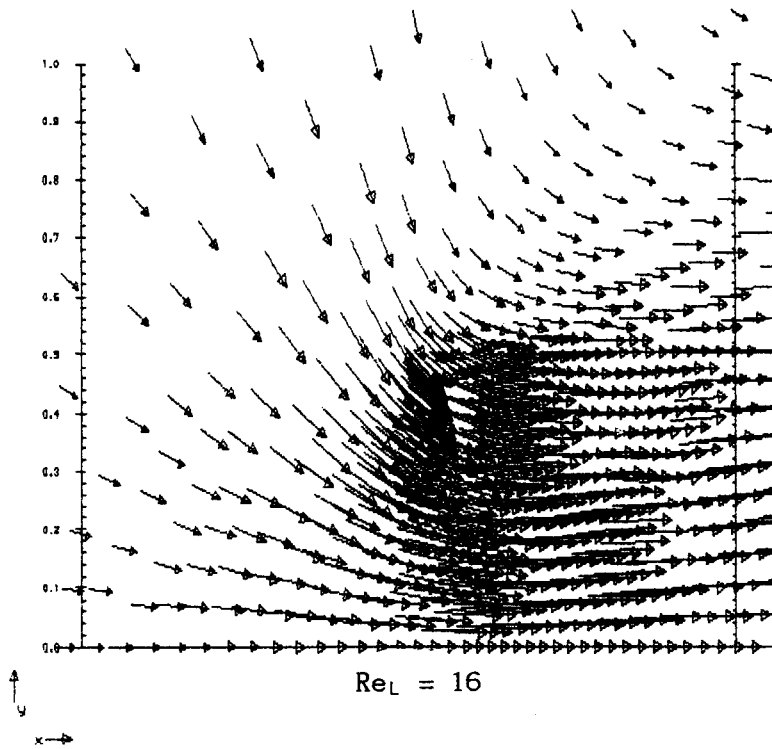
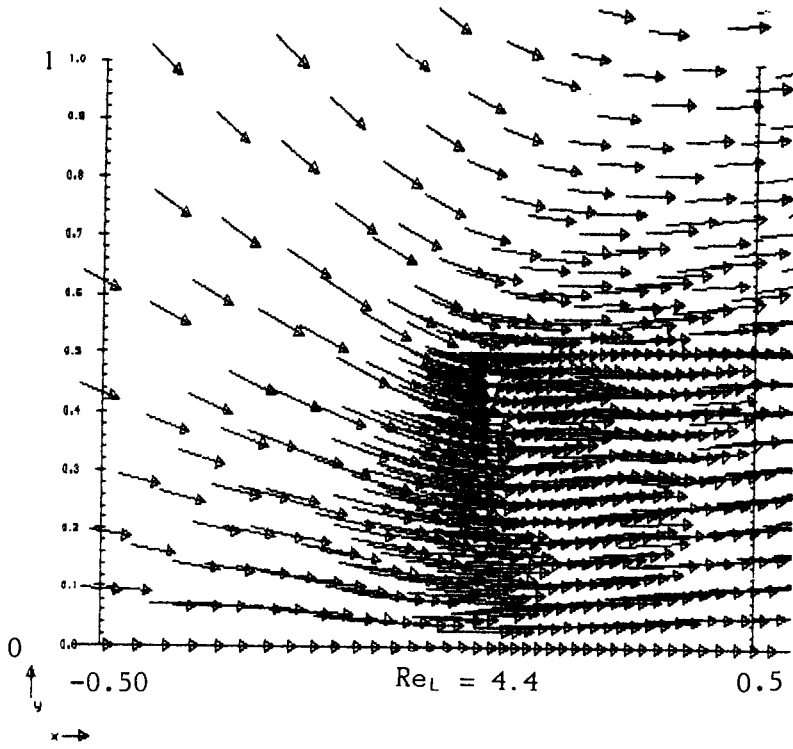
\*\*\*\*\*

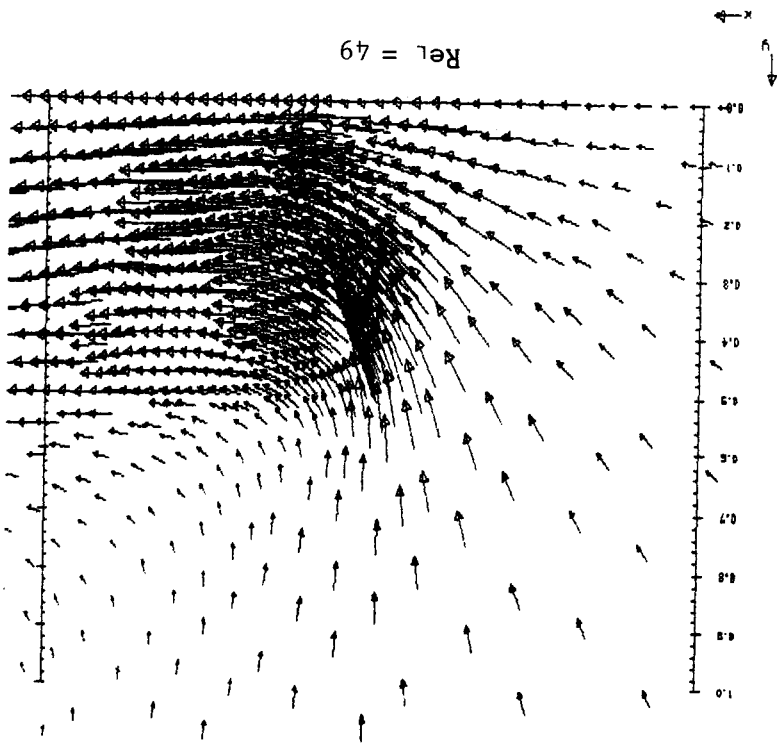
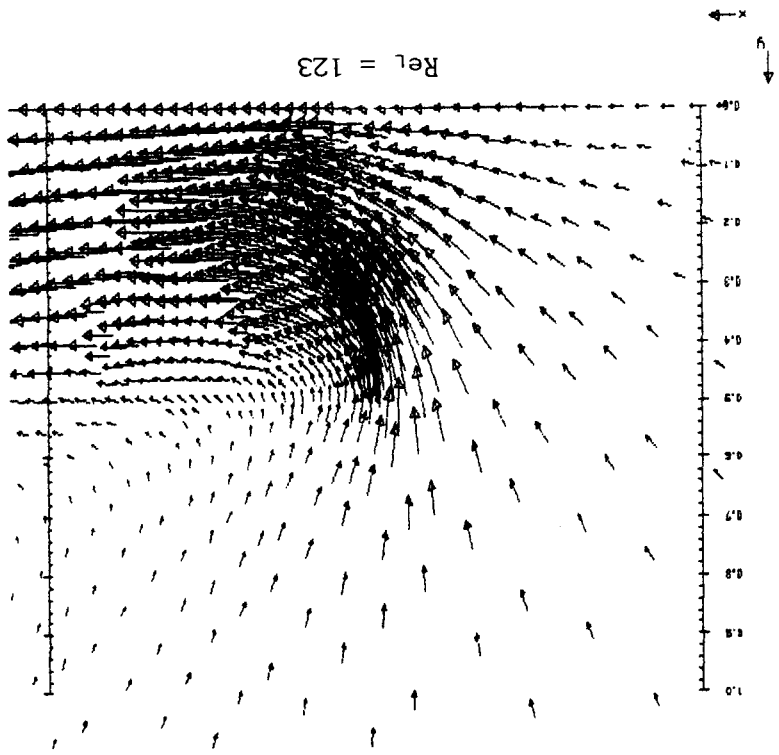
de energieterm tgv convectie : 0.1163852728E+00  
de energietoevoer tgv de kracht : 0.1221377488E+00  
de energieterm tgv de druk : 0.1774323808E-04  
de energieterm tgv de viscositeit : -0.6078802049E-04

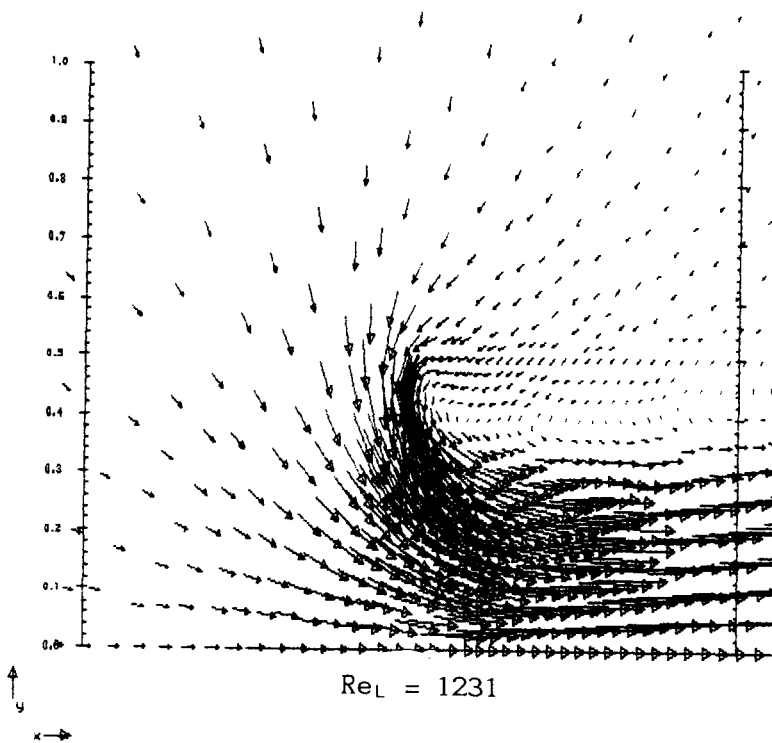
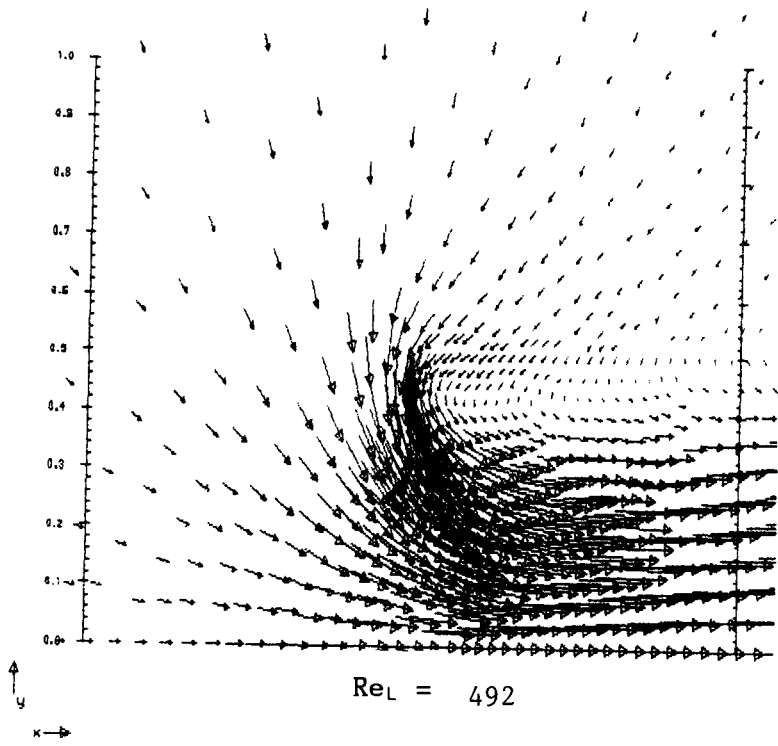
fout in de energiebalans : -0.5709431199E-02

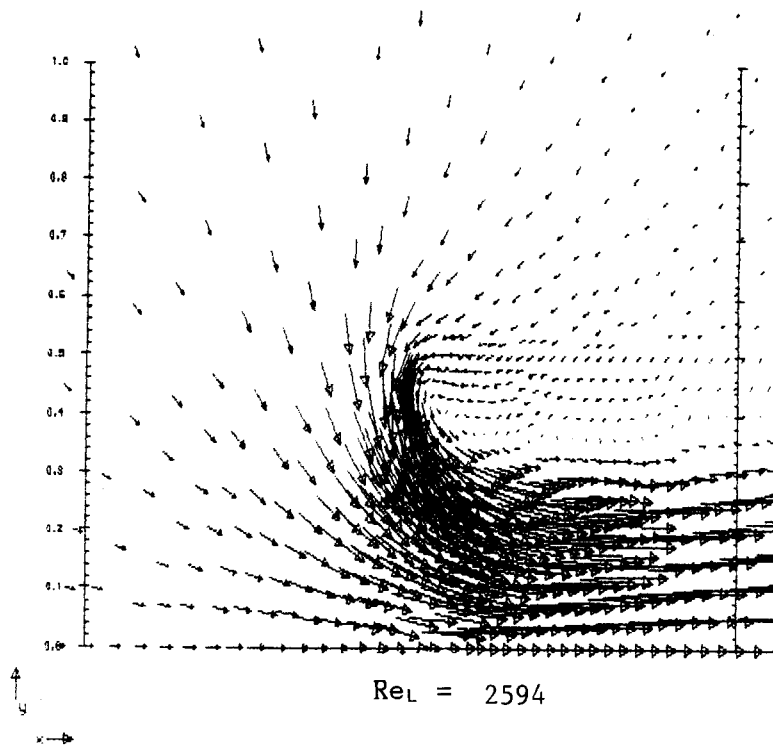
de verhouding in afgegeven vermogen is : 0.9771019905E+00  
de y-comp. van de drukkracht (sym-as) : -0.9300631663E-02  
de gamma v.h. wervelvlak op oneindig : 0.9811595062E+00

Appendix F : volledige programmauitvoer.Berekeningen voor  
 $m = 17$ ,  $Re = 2500$ 

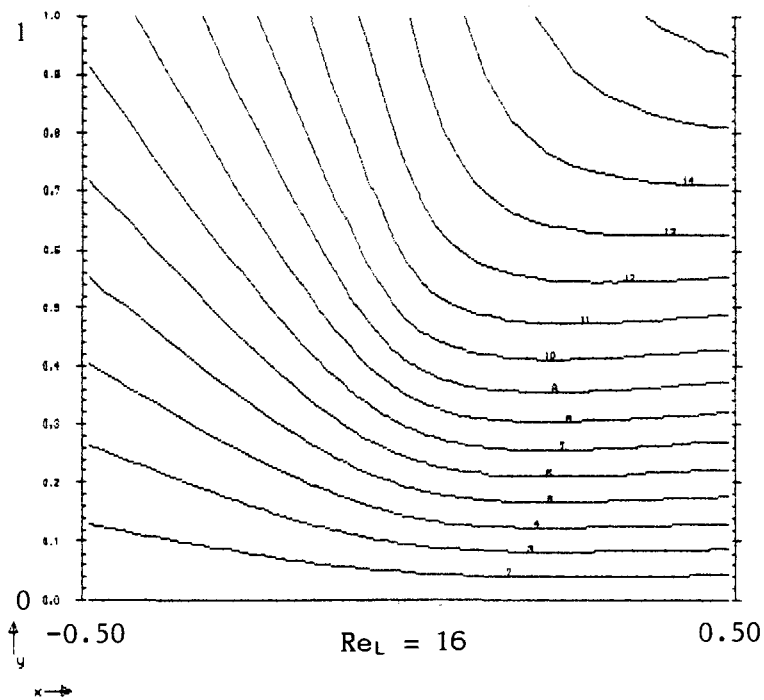
stromingsveld voor  $m = 17$ 

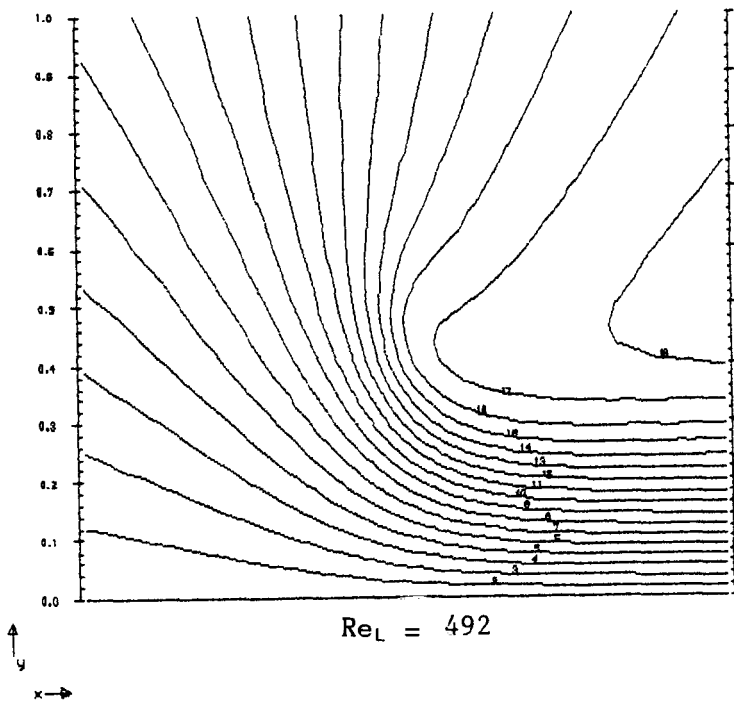
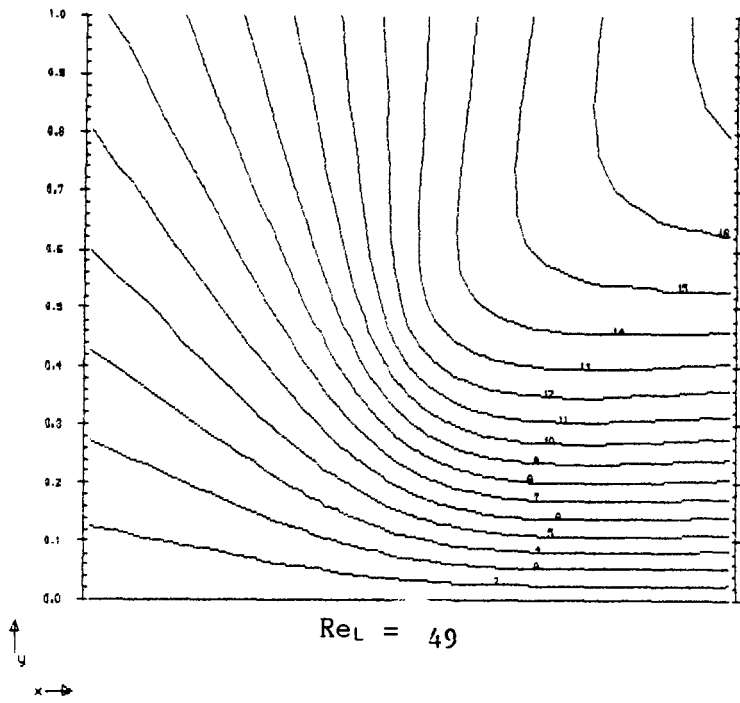


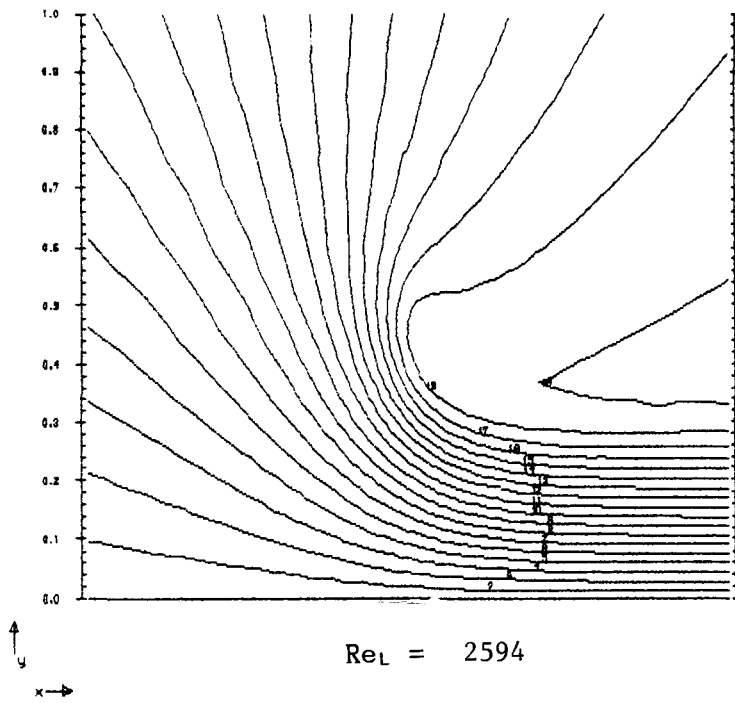
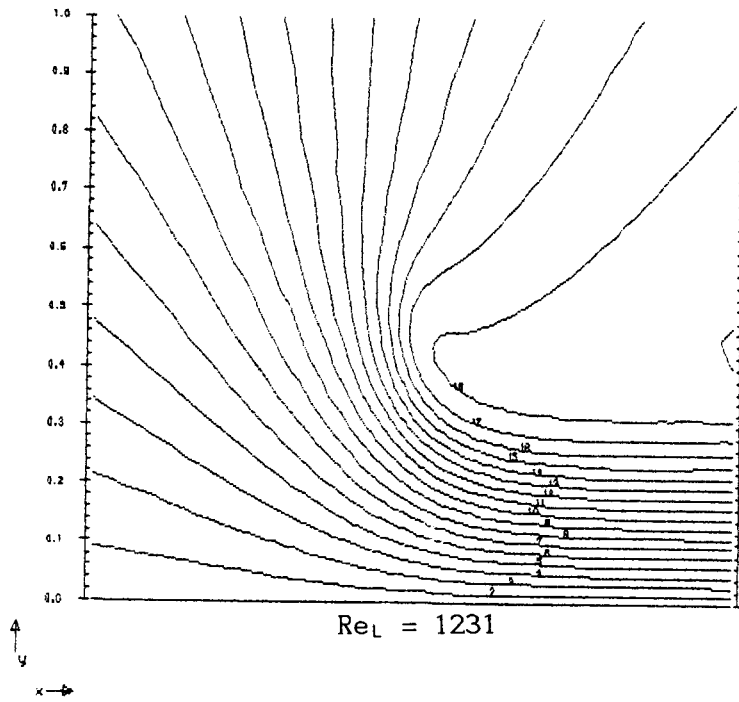




stroomlijnenpatroon  $m = 17$

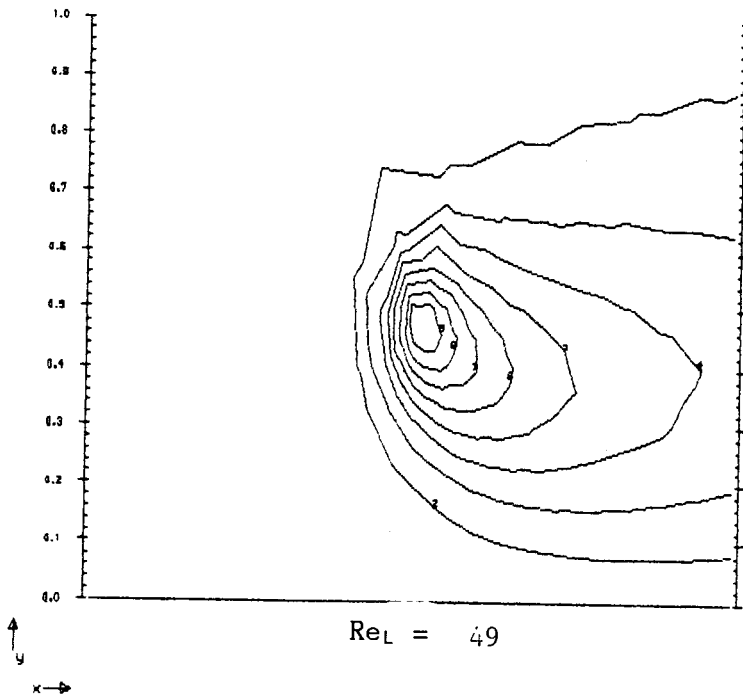
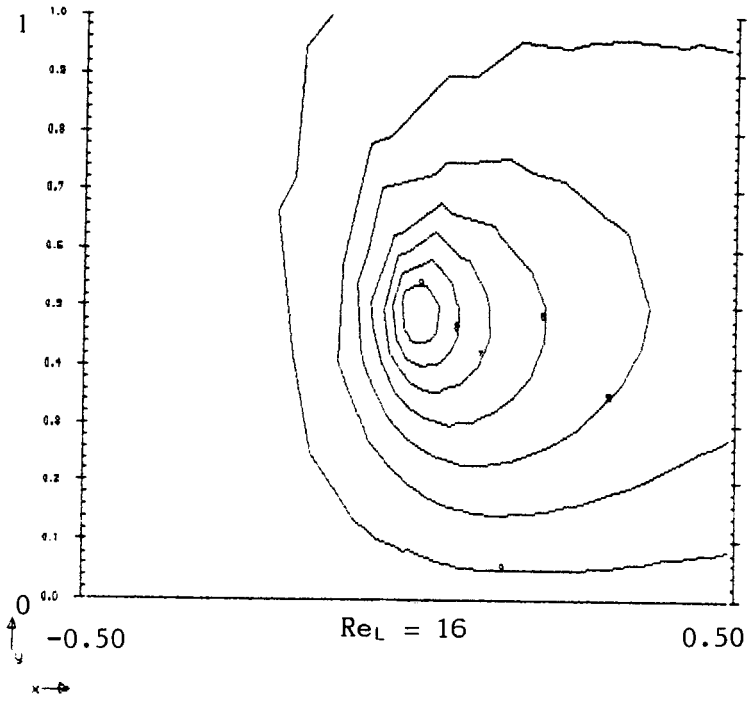


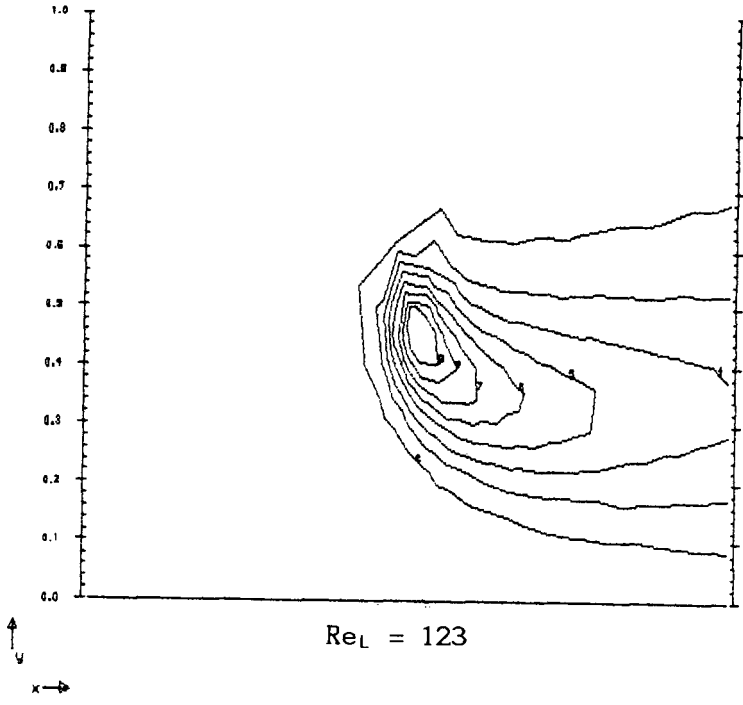




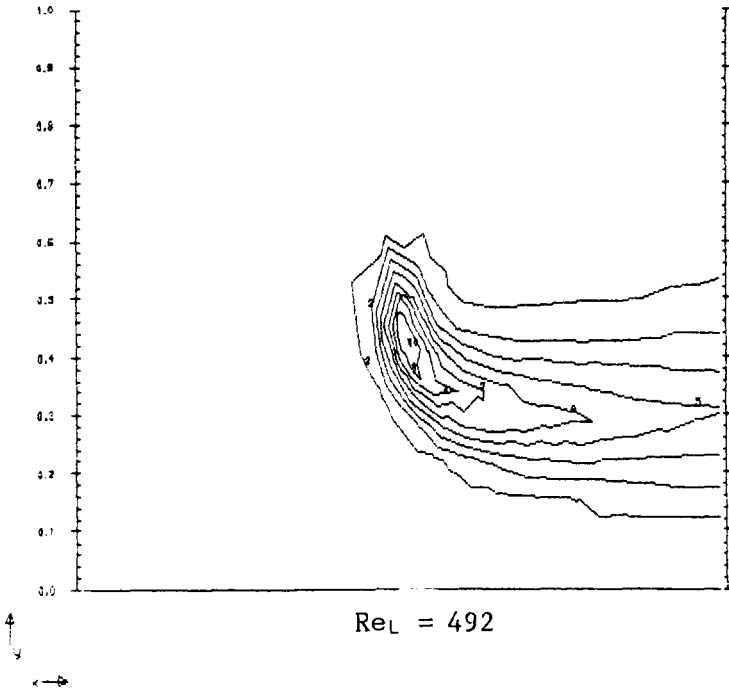


vorticiteitsverdeling  $m = 17$

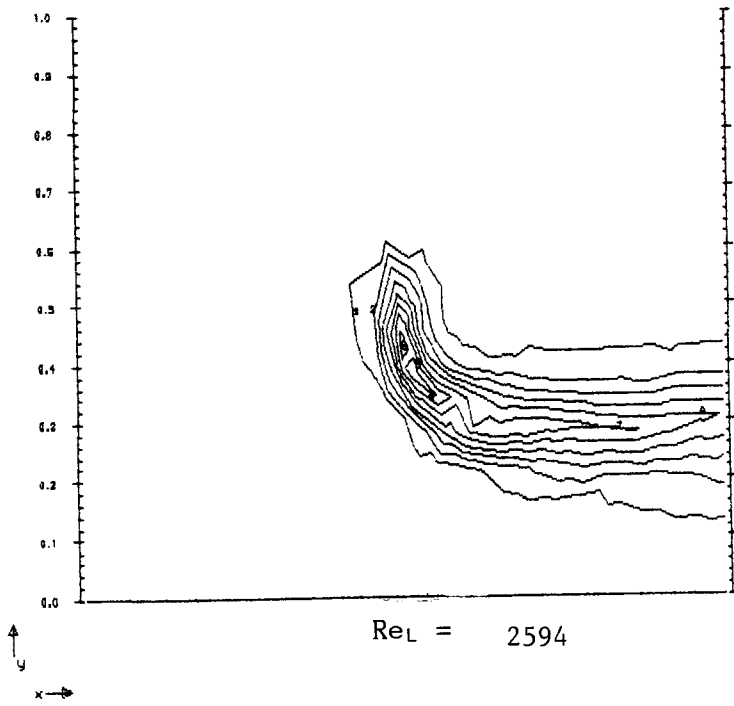
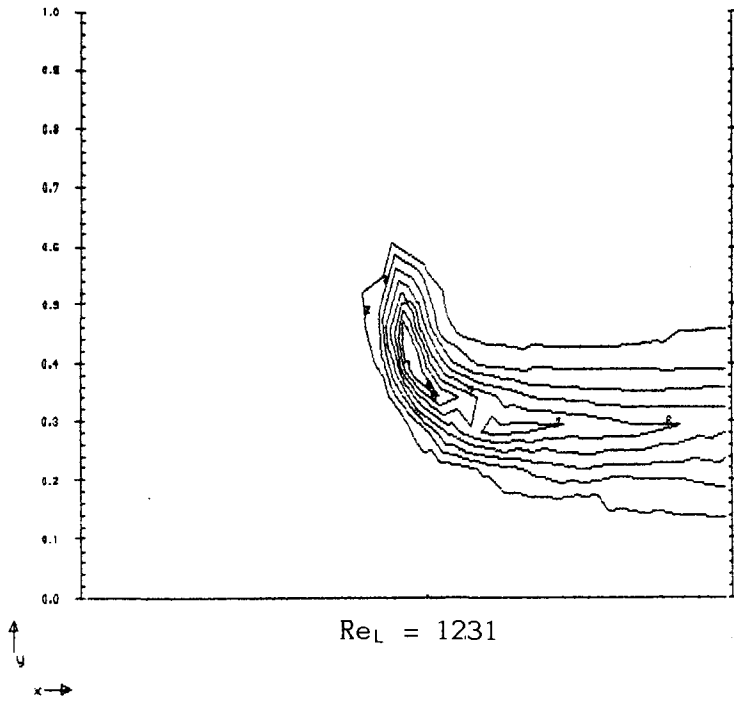




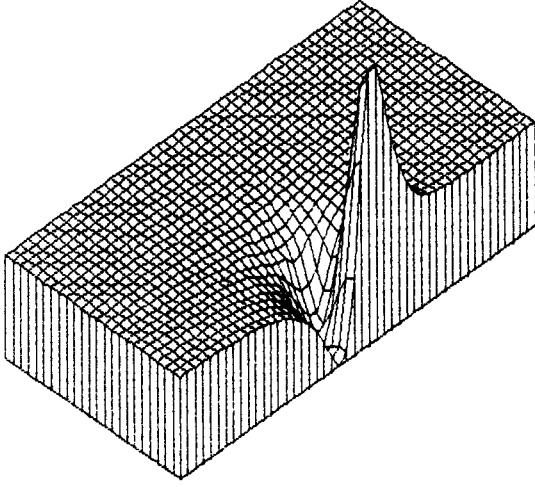
$Re_L = 123$



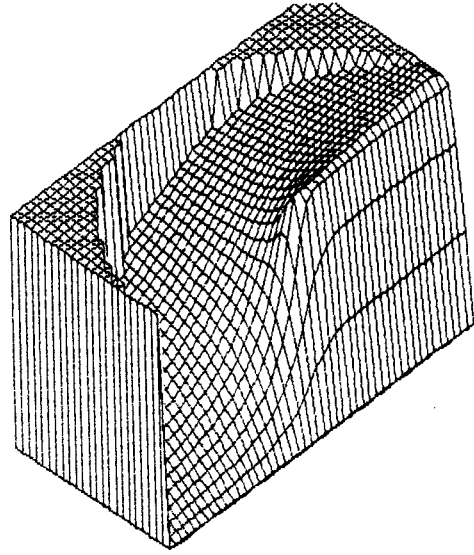
$Re_L = 492$



Re = 2500

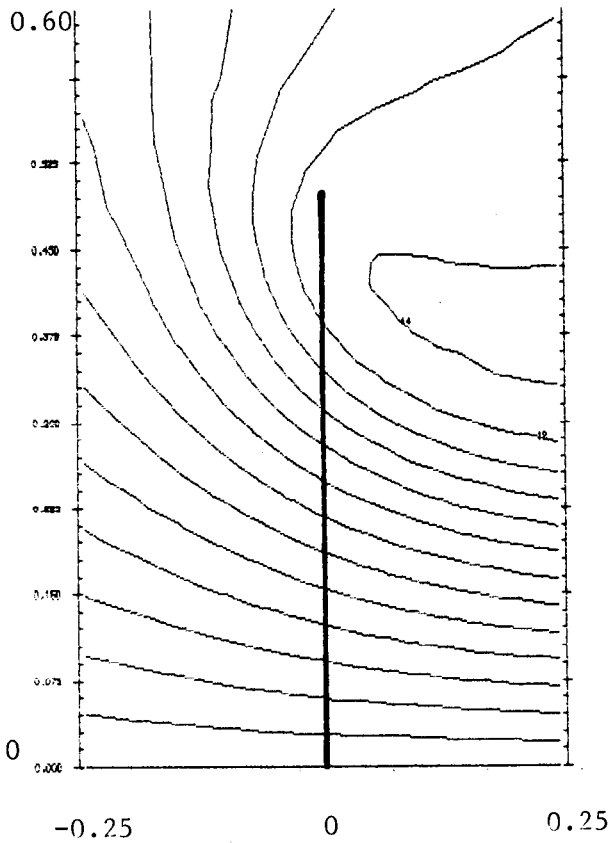


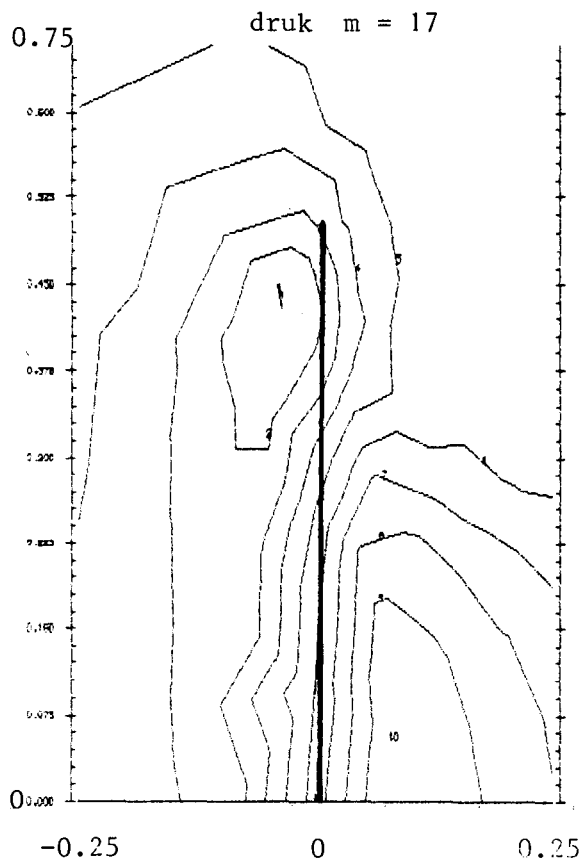
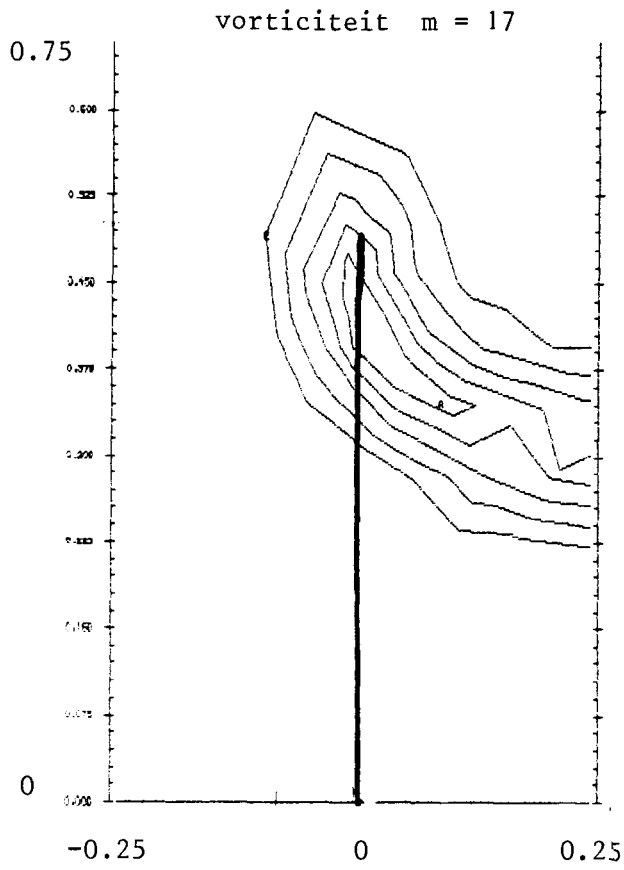
druk m = 17

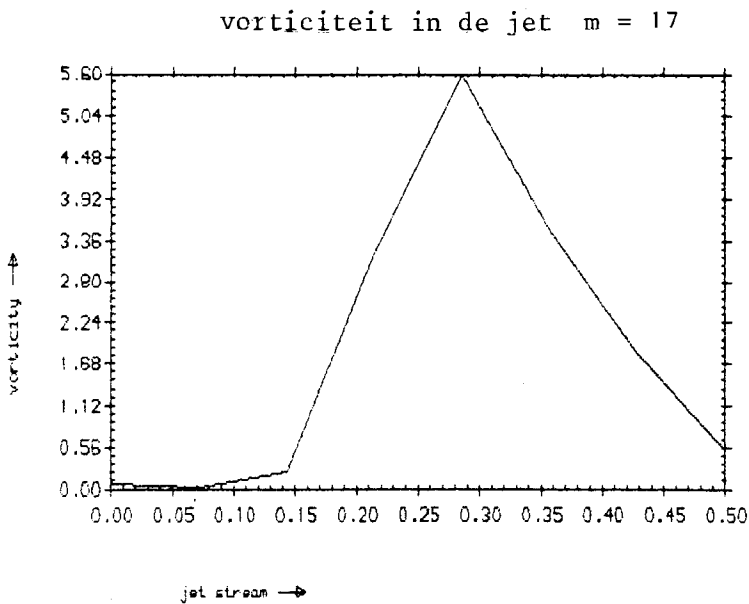
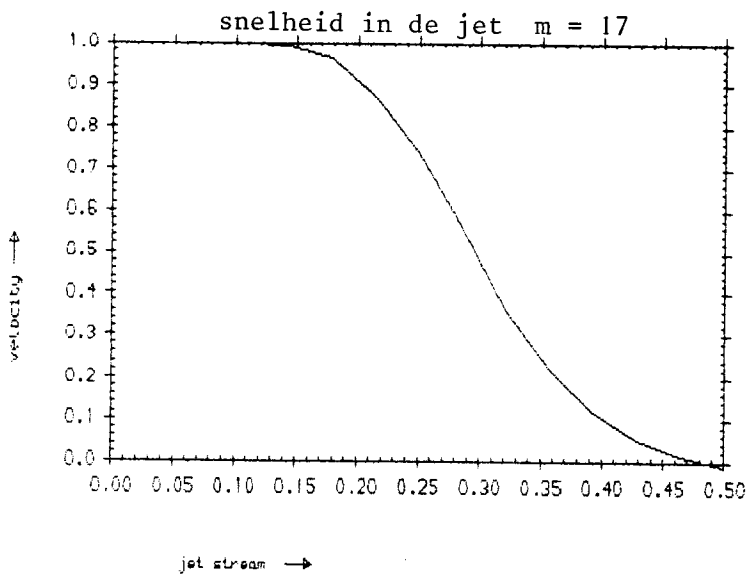
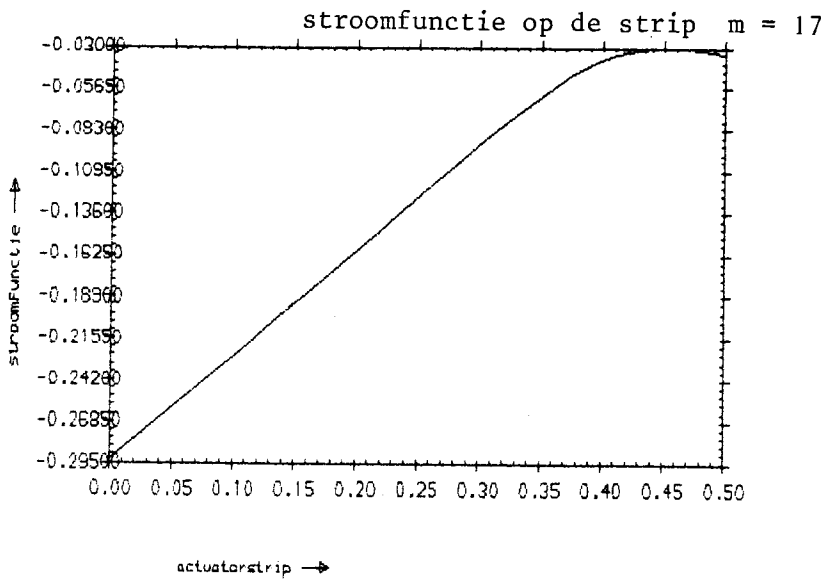


stroomfunctie m = 17

stroomlijnen m = 17







$Re = 2500$ vorticititeit  $m = 25$ 