

MASTER

Toepassing van Abelinversie bij detectie van storingen door reflectie en refractie bij ultrasone tomografie

van Oppen, P.H.M.

Award date:
1991

[Link to publication](#)

Disclaimer

This document contains a student thesis (bachelor's or master's), as authored by a student at Eindhoven University of Technology. Student theses are made available in the TU/e repository upon obtaining the required degree. The grade received is not published on the document as presented in the repository. The required complexity or quality of research of student theses may vary by program, and the required minimum study period may vary in duration.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain

FACULTEIT DER ELEKTROTECHNIEK
TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Vakgroep Medische Elektrotechniek

Toepassing van Abelinversie
bij detectie van storingen
door reflectie en refractie
bij ultrasone tomografie

door: P.H.M. van Oppen

Verslag van het afstudeerwerk
uitgevoerd van juli 1990 tot juni 1991,
in opdracht van prof.dr.ir. J.E.W. Beneken,
onder leiding van drs. M. Stapper en drs. J. Rietsema.

DE FACULTEIT DER ELEKTROTECHNIEK VAN DE TECHNISCHE UNIVERSITEIT
EINDHOVEN AANVAARDT GEEN AANSPRAKELIJKHEID VOOR DE INHOUD VAN STAGE-
OF Afstudeerverslagen

Summary

This report describes a specific problem within the field of ultrasonic transmission-tomography: the existence of large disturbances or errors in projections. These disturbances are known to be caused mainly by phase cancellation, a phenomenon which finds its origin in the use of phase-sensitive sensors as receivers.

A description of the problem is given. The problem appears to be difficult to model. Literature has been studied in order to find solutions to the problem. Some solutions are found but none of them are applicable. All solutions found in literature demand a thorough redesign of the tomography system, which is not desirable, at least at this stage.

An elegant mathematical transform, the Abeltransform, has been used to search for criteria which are valid for the large errors. The Abeltransform is a one-dimensional reconstruction-technique for rotational objects. Whether these criteria can be used to automate the process of finding and removing the large errors in projections is studied. A numerical implementation of the Abeltransform is described.

Whereas the analytical transform gives some understanding of the reconstruction of errors, the numerical implementation falls short of expectations. This is caused by the averaging characteristics of the algorithm.

Samenvatting

Dit rapport beschrijft een klassiek probleem dat optreedt bij ultrasone transmissie-tomografie: het voorkomen van grote verstoringen bij het maken van projecties van objecten. Deze verstoringen ontstaan door interferentieverschijnselen aan de ontvanger en door het fase-gevoelige karakter van de ontvanger.

Het probleem wordt beschreven maar een volledige wiskundige beschrijving is niet mogelijk wegens het complexe karakter van het probleem. De literatuur is bestudeerd om oplossingen te vinden voor het probleem. Er bestaan een aantal mogelijke oplossingen. Deze zijn echter niet of nauwelijks toepasbaar omdat allen een grote ingreep in de tomograaf vereisen. Dat is op dit moment niet wenselijk.

Met behulp van een elegante wiskundige transformatie, de Abel-inversie, wordt er gezocht naar criteria waaraan meet verstoringen moeten voldoen bij transformatie. De Abelinversie is een-dimensionale reconstructie-techniek voor rotatie-symmetrische objecten. Er is onderzocht of deze criteria gebruikt kunnen worden om de herkenning en eventueel verwijdering van de meetverstoringen te automatiseren. Er wordt een numerieke implementatie van de transformatie beschreven.

Abelinversie geeft via analytische weg enig inzicht in het gedrag van meetverstoringen bij reconstructie. De numerieke implementatie voldoet echter niet aan de verwachtingen. Het is niet de verwachting dat deze techniek voldoende mogelijkheden biedt om het gestelde doel, herkenning van meetverstoringen, te bereiken.

Voorwoord

Het doet mij plezier om iedereen te bedanken die het mogelijk heeft gemaakt dat mijn werk, waarvan dit verslag het resultaat is, tot een goed einde is gebracht.

In de eerste plaats wil ik prof.J.Beneken bedanken daar hij het mogelijk heeft gemaakt dat ik bij de vakgroep EME kon afstuderen. Vervolgens gaat mijn dank uit naar mijn begeleiders drs.M.Stapper en drs.J.Rietsema voor hun geduld en goede aanwijzingen. Ook gaat mijn dank uit naar alle medewerkers van deze vakgroep voor hun steun bij defecte Laserprinters, handleidingen en voor de gezellige koffiepauzes. Verder gaat mijn dank uit naar al mijn mede-afstudeerders.

Last but not least wil ik mijn huisgenoten, vriend(in)en en familie bedanken.

Paul van Oppen

Lijst met symbolen

$p(x)$: projectie, een-dimensionale functie van x
$\epsilon(r)$: object, rotatie-symmetrische functie
$FT[.]$: Fouriertransformatie
$FT^{-1}[.]$: inverse Fouriertransformatie
$HT[.]$: Hankeltransformatie
$HT^{-1}[.]$: inverse Hankeltransformatie
$G(X)$: Fouriergetransformeerde van $p(x)$
$J_0(\cdot)$: nulde-orde Besselfunctie
$\Lambda(\cdot)$: Fouriergetransformeerde van $XG(X)$ in poolcoördinaten
$G_d(n)$: discrete vorm van $G(X)$
$\Lambda_d(k)$: discrete vorm van $\Lambda(\cdot)$
Δ^x	: stapgrootte continue Fouriertransformatie
$\Delta\zeta$: stapgrootte discrete Fouriertransformatie
$\Delta\phi$: stapgrootte integratieinterval
ΔX	: stapgrootte X -domein
Δr	: stapgrootte r -domein
$d(i,1)$: approximatie getallen

Inhoud

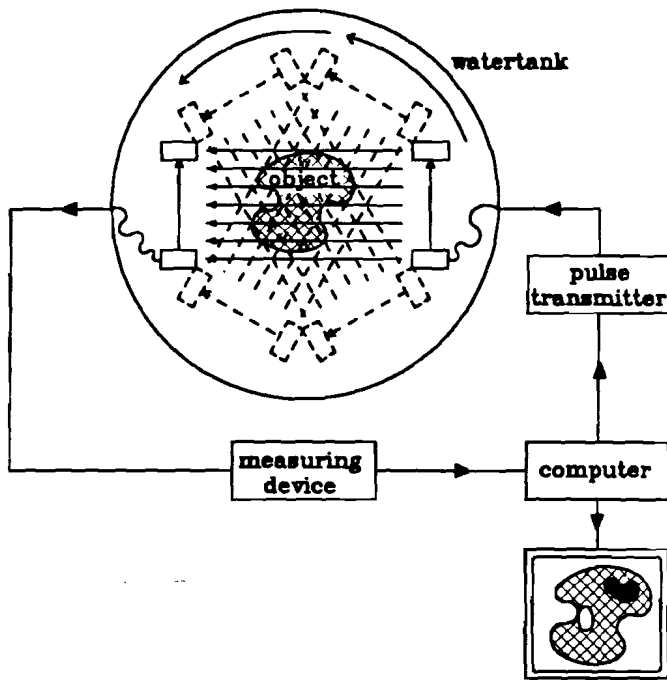
1. Inleiding	7
2. Probleemanalyse en literatuurstudie	9
2.1 Probleemanalyse	10
2.2 Doel literatuurstudie	14
2.3 Literatuurstudie	15
2.4 Conclusie	17
2.5 Consequenties van het literatuuronderzoek	17
3. Abeltransformatie	19
3.1 Doel	19
3.2 Principe	19
3.3 Abeltransformatie opgevat als inverse Fouriertrans- formatie en een Hankeltransformatie	22
3.4 Een methode voor Abelinversie	24
4. Implementatie van een algoritme voor Abelinversie	27
4.1 Uitwerking van een algoritme voor Hankeltransformatie .	27
4.2 Approximatie	29
4.3 Interpolatie	31
4.4 Implementatie van een algoritme voor Hankeltransformatie en Abelinversie	32
4.5 Enkele voorbeelden van Abeltransformatie en Abelinversie	33
5. Abelinversie als detectiemethode voor meetartefacten	37
5.1 Projecties, gereconstrueerd tot niet-bestaande objecten.	38
5.2 Projecties, gereconstrueerd tot niet-bestaande objecten met behulp van een rekenmachine	40
6. Conclusies en aanbevelingen	46
Literatuur	47
Appendix 1: Programmaling Hankelalgoritme	51

1. Inleiding

Tomografie is een wijdverbreide afbeeldingswijze die veel wordt gebruikt in de medische wereld. Binnen de tomografie die werkt met ultrageluid zijn twee hoofdprincipes te herkennen: reflectie-tomografie en transmissie-tomografie. Echografie wordt al erg veel toegepast, in tegenstelling tot transmissie-tomografie. Ondanks dat deze afbeeldingsmethode wat oplossend vermogen betreft veel minder presteert dan bijvoorbeeld NMR, is onderzoek naar transmissie-tomografie gerechtvaardigd daar deze afbeeldingswijze relatief goedkoop is. Dit maakt de ultrasone tomografie als hulp bij diagnose interessant voor een grote groep gebruikers.

Aan de vakgroep Medische Elektrotechniek, Technische Universiteit Eindhoven, wordt onder meer gewerkt aan de ontwikkeling van een ultrasone transmissie-tomograaf. (Sollie, 1988).

De principes van tomografie zijn eenvoudig. In afbeelding 1.1 is schematisch een transmissie-tomograaf weergegeven. In het midden herkennen we het af te beelden voorwerp. Links en rechts daarvan zijn een zender en ontvanger gemonteerd. De zender en ontvanger bewegen tegelijkertijd loodrecht op de voortplantingsrichting van het geluid. Zo wordt een lineaire 'scan' gemaakt. De hele constructie wordt dan over een bepaalde hoek verdraaid en weer wordt er een projectie gemaakt. Uiteindelijk wordt een hoek van 180° beschreven en is het voorwerp in zijn geheel doorstraald. De projecties bestaan uit een verzameling metingen, samples genoemd. Gemeten wordt de looptijd van de geluidspuls tussen zender en ontvanger, de amplitude van de ontvangen geluidspuls, de frequentieverschuiving van de geluidspuls en de reflectie van de geluidspuls. De verzameling projecties, in het vervolg meting genoemd, kan worden gereconstrueerd tot de 2-dimensionale structuur van het af te beelden object. Uit de reconstructie zijn eigenschappen van het tussen zender en ontvanger liggende voorwerp af te leiden. Er kan middels de meting van de looptijd van de puls een afbeelding worden gemaakt van de verdeling van de geluidssnelheid in het object als functie van de plaats. Door meting van de amplitude kan de dempingscoëfficiënt worden bepaald.

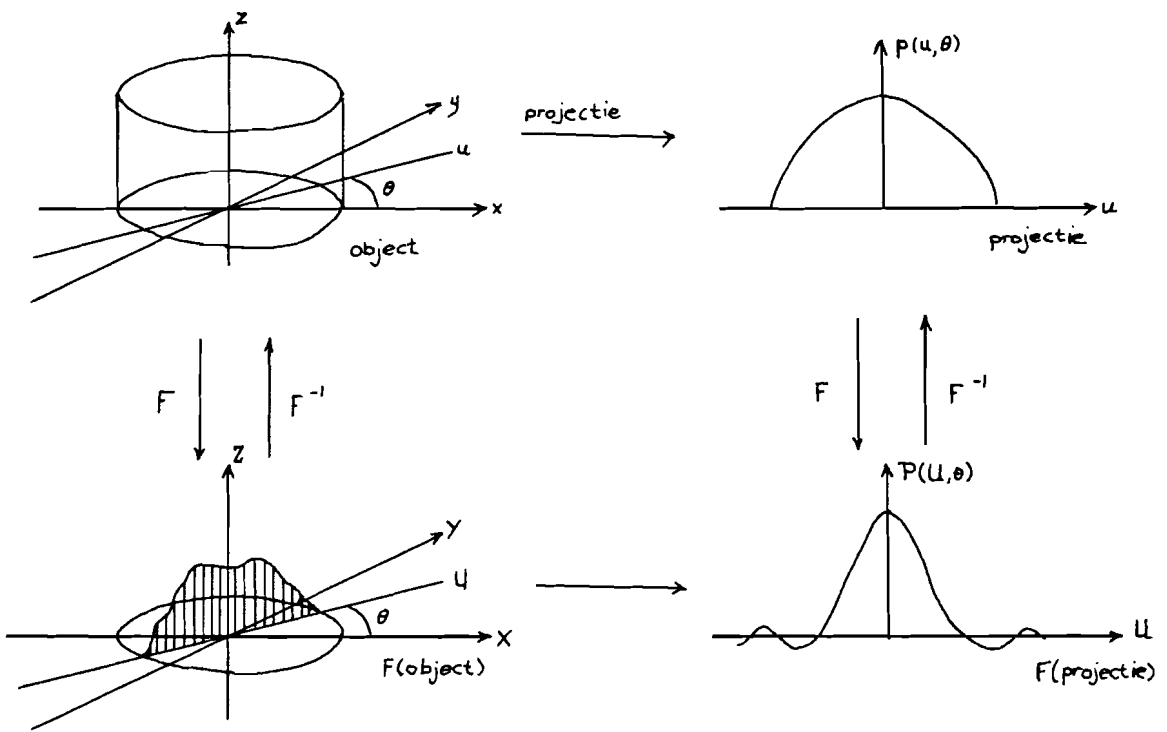


Afbeelding 1.1: Principeschema transmissie-tomograaf.

Bij reconstructie is het centrale sectie theorema van belang. Dit theorema zegt het volgende: de Fouriergetransformeerde van een projectie p onder een hoek θ is gelijk aan de doorsnede van de 2-dimensionale Fouriergetransformeerde van het voorwerp $f(x,y)$ langs een rechte door de oorsprong die een hoek θ met de x -as maakt. Zie afbeelding 1.2.

Op basis van dit theorema zijn een aantal reconstructietechnieken af te leiden. Belangrijk zijn Convolutie terugprojectie en Directe Fourierinversie. Algebraïsche Reconstructie Techniek heeft een andere herkomst (Sollie, 1988). Om reconstructie mogelijk te maken moet er aan een aantal condities zijn voldaan. Deze zijn:

- De verzameling samples moeten projecties zijn (de meetwaarden moeten een lijn-integraal zijn).
- Het voorwerp moet isotroop zijn voor de af te beelden grootheden. Voornoemde condities worden door het af te beelden object en de meetmethode vastgelegd. Verder zijn er condities die men zelf in de hand heeft. Deze zijn:
- De metingen moeten compleet zijn, d.w.z. er mogen geen projecties ontbreken.
- Het gehele af te beelden object moet geprojecteerd zijn.
- De metingen moeten consistent zijn, d.w.z. dat alle projecties uit de meting afkomstig van hetzelfde object moeten zijn.



Afbeelding 1.2: Centrale sectie theorema.

Het af te beelden voorwerp laat het ultrageluid niet ongehinderd door maar beïnvloedt de snelheid en de richting van het geluid. Deze interactie tussen ultrageluid en voorwerp wordt gebruikt om een afbeelding van het voorwerp te maken. Er ontstaan echter ook problemen door het gebruik van ultrageluid als energiebron. Door niet-rechthoekige golfvoortplanting treden verstoringen op. Deze fouten komen naderhand op zeer storende wijze terug in de afbeelding van het voorwerp. Door het reconstructiealgoritme treedt ook nog eens foutenvoortplanting op.

In hoofdstuk 2 wordt beschreven welke gevolgen, positief en negatief, de interactie tussen ultrageluid en voorwerp heeft voor de metingen met de tomograaf. Ook wordt in dit hoofdstuk de resultaten gegeven van een literatuuronderzoek naar de stand van zaken. Hoofdstuk 3 bevat de beschrijving van een transformatie die een relatie legt tussen een rotatiesymmetrisch object en zijn projectie: de Abeltransformatie. In het volgende hoofdstuk wordt ingegaan op de implementatie van deze transformatie op een rekenmachine. Hoofdstuk 5 beschrijft de bruikbaarheid van de Abeltransformatie om meetfouten te herkennen. Tenslotte worden in hoofdstuk 6 de conclusies weergegeven.

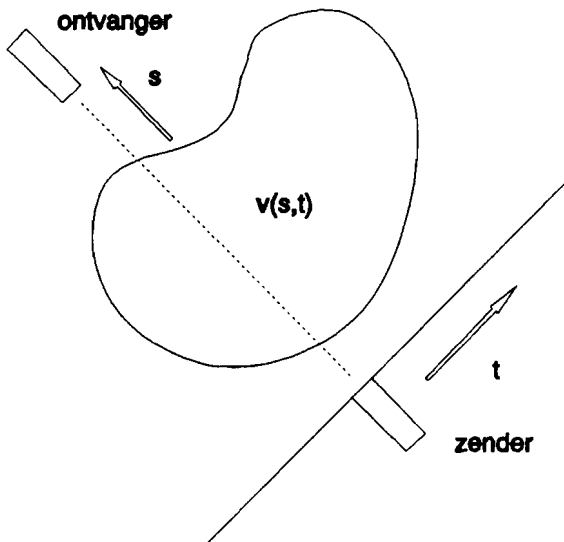
2. Probleemanalyse en literatuurstudie

2.1 Probleemanalyse

Als een mechanische trilling zich door materie voortbeweegt dan ontstaat er een interactie tussen de twee: de trilling wordt beïnvloed door de materie en omgekeerd. Beschouwen we de interactie tussen een geluidsgolf en een voorwerp dan treden een aantal effecten op:

verandering van geluidssnelheid

De snelheid van geluid is niet altijd constant in een voorwerp. Zou men via verschillende wegen geluidspulsen door het voorwerp zenden dan zouden de looptijden van deze pulsen onderling verschillen. In afbeelding 2.1 is weergegeven hoe de projectie tot stand komt. Men kan aantonen (Sollie, 1988) dat de gemeten looptijd voldoet aan alle condities (meting is een projectie, het af te beelden voorwerp moet isotroop zijn) genoemd in hoofdstuk 1.



Afbeelding 2.1: Coördinaten bij projectie (afb. uit Sollie(1988)).

Als de geluidssnelheid de verdeling $v(x,y)$ heeft in het voorwerp dan geldt voor de looptijd $T(x)$ van de geluidspuls:

$$T(x) = \int_L \frac{1}{v(x,y)} dy \quad (2.1)$$

Uit deze uitdrukking blijkt dat $T(x)$ een lijnintegraal is over lijn L . Uit deze meting kan de verdeling $v(x,y)$ gereconstrueerd worden.

damping

Door absorptie, reflectie en verstrooiing zal een deel van de verzonden energie de detector niet bereiken. De geluidspuls wordt gedempt. Deze damping α kan worden bepaald door de amplitude van de ontvangen geluidspuls te meten. De amplitude voldoet aan de condities voor reconstructie. De damping van de geluidsgolf in het voorwerp kan dus worden afgebeeld. Deze meting is erg gevoelig voor verstoringen zoals ruis en afwijkingen van rechte-lijn voortplanting van de geluidsgolf.

Daarnaast is het mogelijk om een van de damping afgeleide grootheid te meten. Aangezien de damping veelal voor verschillende frequenties varieert zal het ontvangen spectrum een verschuiving vertonen ten opzichte van het verzonden spectrum. Deze verschuiving (Mean Frequency Downshift) is, indien het verzonden spectrum Gaussisch is, evenredig met de afgeleide van de dempingscoëfficiënt ($d\alpha/d\omega$). Door de frequentieverschuiving van het ontvangen spectrum te meten kan men deze afgeleide (attenuation slope) afbeelden.

terugkaatsing of reflectie

Door reflectie-metingen toe te voegen kan de diagnostische waarde van een tomograaf worden verhoogd. Er komen twee mechanismen voor die reflectie veroorzaken: speculaire reflectie en diffuse reflectie (scattering).

Indien er akoestisch impedantiesprongen in het voorwerp komen zal de geluidsgolf hier tegen weerkaatsen (volgens de wet van Snellius). Dit verschijnsel treedt op als de verstoringen in het voorwerp groot zijn ten opzichte van de gebruikte golflengte.

Zijn de afmetingen van de verstoringen klein ten opzichte van de golflengte dan treed een ander effect op: scattering. De in een voorwerp aanwezige inhomogeniteiten worden door de geluidsgolf geëxiteerd en gaan zelf als geluidsbronnetjes fungeren.

Scattering is bruikbaar voor reflectie-tomografie. Omdat de inhomogeniteiten in alle richtingen zenden zal men altijd een echo kunnen meten. Bij reflectie is dat niet het geval: door een niet-loodrechte inval van de geluidsgolf op de impedantiesprong zal de reflectie bijna altijd de detector missen.

Door reflectie zal in het algemeen een geluidsgolf afwijken van rechte-lijn voortplanting.

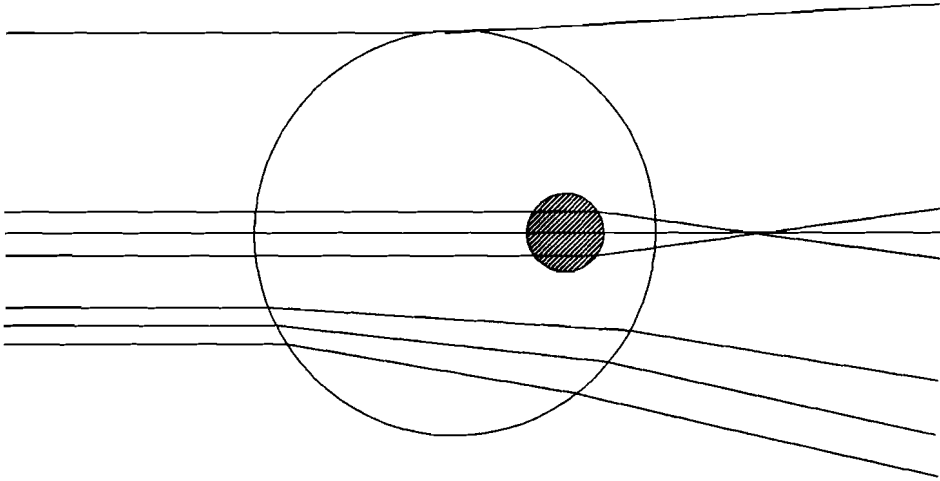
breking of refractie

Door het voorkomen van impedantiesprongen in het voorwerp zal een golf aan deze sprong reflecteren en refracteren. De golf wordt gedeeltelijk weerkaatst en dringt gedeeltelijk het voorwerp in. Dit is een belangrijke bron van afwijking van rechte-lijn voortplanting.

buiging of diffractie

Treft een golf een verstoring dan zal de golf hier omheen buigen. De gevolgen van deze buiging hangen af van de grootte van de verstoring. Enige golflengten na een kleine verstoring (klein ten opzichte van de gebruikte golflengte) neemt men niets meer waar van de diffractie. Is de verstoring groot ten opzichte van de gebruikte golflengte dan zal diffractie bijdragen aan de afwijking van rechte-lijn voortplanting van de golf.

In figuur 2.2 is nog eens schematisch aangegeven hoe reflectie refractie en diffractie de rechte-lijn voortplanting beïnvloeden.

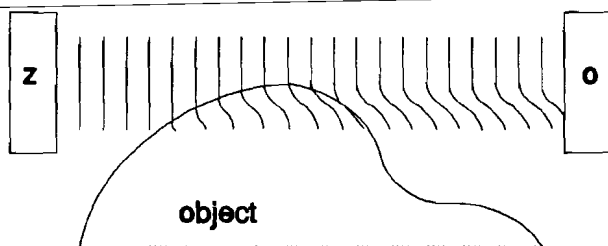


Afbeelding 2.2: reflectie, refractie en diffractie in een object.

Reflectie, refractie en diffractie beïnvloeden de metingen op de volgende wijzen:

- Door zowel reflectie, refractie als diffractie wijkt de golfvoortplanting af van een rechte lijn. Aangezien rechtlijnige golfvoortplanting een fundamentele veronderstelling vormt bij de reconstructie (Sollie, 1988; De Beer, 1989) levert dit foutieve resultaten op van de af te beelden grootheden.

- De golffronten die bij de ontvanger aankomen zullen niet meer vlak zijn. Er zijn door de weefselinteractie faseveranderingen in de golffronten ontstaan. Analoog is de beschrijving waarbij verschillende golven via verschillende paden bij de detector aankomen. Bij de ontvanger ontstaat dan een grillig interferentiepatroon in plaats van een vlakke golf. In afbeelding 2.3 is dit overdreven en gestileerd weergegeven. Daar de ontvanger een integrerend karakter heeft over zijn oppervlakte zal de elektrische respons van de ontvanger afwijken van de gewenste waarde: de momentane drukvariaties bij de ontvanger zijn niet uniform als functie van de plaats, er zijn kleine positieve en negatieve variaties die in de elektrische respons van de ontvanger opgeheven worden door integrerende werking (Phase Cancellation). Deze fout is sterk afhankelijk van de diameter van de ontvanger (of de ontvangeropening). Naarmate de ontvangeropening toeneemt, neemt ook de mate van 'phase cancellation' toe.



Afbeelding 2.3: 'Phase cancellation'.

- Door afwijkingen van de rechtlijnige voortplanting kan een deel van de uitgezonden energie de ontvanger missen. Metingen die gebaseerd zijn op de hoeveelheid ontvangen energie, zoals de meting van de amplitude van de puls, worden hierdoor beïnvloed. Het is naderhand niet te zeggen welk deel van de demping afkomstig is van absorptie en welk deel afkomstig is van reflectie etc. Het is moeilijk om een fysische interpretatie te geven aan het gereconstrueerde object. Uit de literatuur blijkt wel eenduidig dat een grote ontvangeropening bijdraagt tot een betere meting.

In het algemeen kan gezegd worden dat om 'phase cancellation' te verminderen toepassing van een ontvanger met kleine opening noodzakelijk is. Echter om correcte energiemetingen te verrichten is een grote ontvangeropening nodig. De keuze van de ontvangst-sensor is dan ook altijd een compromis.

In het vervolg zal steeds worden gesproken over artefacten of over meetartefacten. Indien er geen nadere uitleg wordt gegeven worden hier de bovengenoemde effecten mee bedoeld. Een meetartefact kan dus zowel 'phase cancellation' als afwijking van de rechte-lijn-propagatie als een onjuiste energiemeting betekenen. Daar waar twijfel mogelijk is zal een en ander gespecificeerd worden.

2.2 Doel literatuurstudie

Voorop bij deze literatuurstudie staat het doel om, ongeacht de richting die dit afstudeeronderzoek zal nemen, zicht te krijgen op de huidige stand van zaken. Hierbij is gekeken naar zo veel mogelijk aspecten van het probleem. Om redenen van volledigheid is er geen beperking vooraf opgelegd aan de gevonden oplossingen. Ook al zou dit betekenen dit dat de gevonden oplossingen in feite niet voor toepassing in aanmerking komen.

2.3 Literatuurstudie

Er is veel onderzoek gedaan naar methoden om de effecten van meetartefacten te verminderen. De reden hiervoor is dat ultrasone tomografie een goed, goedkoop en veilig alternatief vormt voor andere vormen van tomografie. De verstoringen die optreden zijn echter van dien aard dat klinische toepassingen in gevaar worden gebracht. In de literatuur worden een aantal methodes genoemd die de genoemde storingen verminderen.

Er werd veel onderzoek gedaan naar het gedrag van een fase-ongevoelige sensor door een groep werkzaam aan de Washington University in Missouri onder leiding van J.G. Miller. Klepper (Klepper et al., 1977) past een fase-ongevoelige ontvanger in combinatie met frequentie-afhankelijke meting toe. Door de metingen bij verschillende frequenties uit te voeren is Klepper in staat om de gevolgen van reflectie sterk te reduceren. Het gebruik van een fase-ongevoelige (akousto-elektrische) sensor werd verder nog door Busse (Busse et al., 1977, 1981) onderzocht. Beiden bereiken een aanzienlijke reductie van de artefacten omdat de akousto-elektrische sensor geen last heeft van de gevolgen van 'Phase Cancellation'. De geringe ontvangeropening (vooral bij zeer refractieve weefsels) en de lage gevoeligheid van de sensor zorgen voor problemen. Dat laatste maakt klinische toepassing onwaarschijnlijk daar bijvoorbeeld borstweefsel niet meer goed af te beelden is. Een bijkomend probleem is de productie van de akousto-elektrische sensor.

Een tweede groep oplossingen vormen technieken die op basis van een fysisch model correcties berekenen en de z.g. 'ray-tracing'-technieken. Bij 'Ray-tracing' wordt het gedrag van een geluidsgolf benaderd door voor een groot aantal stralen (akoestisch optica) de golfvoortplanting, demping etc. te berekenen. Farrel (1981) bestudeert de invloed van refractie en 'phase cancellation'. Norton

(Norton & Linzer, 1982) past een rekenmethode toe om de gevolgen van refractie te verminderen. Heddes (1987) leidt uit de meting van de frequentieverschuiving een schatting voor de interferentiefout af. Nadeel van deze methoden is dat ze zeer rekenintensief zijn. Bovendien zijn ze vaak niet in de praktijk getest zodat een juiste beoordeling van de prestaties van deze methoden moeilijk is.

Anderen zoeken de oplossing in verschillende filtertechnieken. Crawford (Crawford & Kak, 1982) bestudeert de effecten van multipad op dempingsmetingen en looptijdmetingen. Hij past correcties toe door homomorfe en mediaan-filtering. Het ontvangen en door multipad verstoorte signaal kan opgevat worden als het verzonden signaal geconvolveerd met een onbekende pulstrein. Door deze onbekende pulstrein is het niet mogelijk om door middel van deconvolutie het ontvangen signaal te verkrijgen. Crawford past daarom homomorfe filtering toe. Tevens constateert hij dat een projectie bij benadering een 'root signal' is. Een dergelijk signaal is invariant voor mediaanfiltering. Artefacten zijn echter niet invariant voor deze filtering en kunnen dus sterk gereduceerd worden in de projectie. Schmitt (Schmitt et al., November/December 1984) past ook mediaanfiltering toe om tot reductie van artefacten te komen. Dit grotendeels om dezelfde reden als Crawford. Ook hier zijn merendeels simulaties uitgevoerd. Daar waar metingen zijn uitgevoerd bleken de resultaten minder verbetering op te leveren dan de simulaties deden verwachten.

Tenslotte is er een oplossing die gebruik maakt van gesegmenteerde ontvangers, de zogenaamde lineaire arrays. De gebruikelijke ontvanger met kleine opening wordt vervangen door een ontvanger met grote opening die bovendien gesegmenteerd is uitgevoerd: de ontvanger bestaat uit een groot aantal smalle ontvangers naast elkaar. Door de grote ontvanger-opening zal een groot deel van de verzonden energie opgevangen worden. Dit kan leiden tot betere schattingen van demping. Bovendien wordt 'phase cancellation' grotendeels tegengegaan door incoherente verwerking van de signalen afkomstig van het array. Volgens de literatuur (Schmitt et al., juli 1984), (Fitting et al., 1984, 1987), (Chenevert et al., 1983) levert de toepassing van deze ontvangers een substantiële verbetering op.

2.4 Conclusie

Van alle mogelijkheden die in de literatuur zijn gevonden kan er geen direct worden geïmplementeerd. De akousto-elektrische detector valt af wegens zijn geringe gevoeligheid en wegens de moeilijke verkrijgbaarheid van zo'n sensor. Bovendien zijn dan de looptijd van de puls en de 'Mean-frequency-downshift' niet meer te meten.

'Ray-tracing'-technieken vallen af wegens de te grote rekenintensiviteit. Dergelijke methoden vallen niet in de strategie van een eenvoudige tomograaf die tegen lage kosten te vervaardigen is.

Vervolgens bieden filtertechnieken wel mogelijkheden, doch er moet een duidelijke strategie worden opgezet voordat een filter in een of andere vorm kan worden gebruikt. Bovendien wordt er op dit moment een mediaanfilter toegepast bij de tomograaf. Ervaring leert dat alleen deze filtering onvoldoende is om meetartefacten te verwijderen.

Als laatste zijn er de gesegmenteerde detectoren die veelbelovende resultaten bieden. Gebruik van deze sensoren moet serieus overwogen worden. Er kleeft echter ook een aantal bezwaren aan. Implementatie van een dergelijke sensor betekent dat de bestaande tomograaf ingrijpend gewijzigd moet worden. Bovendien is de productie van een dergelijke sensor een moeilijkheid. Ze zijn daarbij erg duur. De noodzakelijke signaalbewerking is niet eenvoudig: complexe hardware en software is noodzakelijk. Een Time-Of-Flight-meting (TOF-meting) zal bij deze sensoren wel haast onmogelijk zijn. Toepassing van deze sensoren is echter een kwestie van lange termijn planning. Het is heel waarschijnlijk een goede opstap om tot een 'fan-beam'-geometrie te komen (Sollie, 1988). Op dit moment is dit zeker niet aan de orde en deze mogelijkheid vervalst.

2.5 Consequenties van het literatuuronderzoek

De in dit literatuuronderzoek gevonden oplossingen zijn niet of nauwelijks toepasbaar. De belangrijkste reden daarvoor is dat de oplossingen te ingrijpend zijn: ze vereisen een flinke ingreep in de tomograaf. Dat is in de huidige fase van het tomografie-onderzoek niet wenselijk daar het zich in een fase van meten bevindt.

Er wordt gezocht naar een manier om meetartefacten te detecteren en uiteindelijk te corrigeren. Onderzocht wordt hoe artefacten zich

gedragen bij reconstructie. Om zowel analytisch als numeriek grip te krijgen op dit proces wordt een één-dimensionale reconstructiewijze toegepast: Abelinversie.

Het oogmerk van de reconstructie van artefacten is te onderzoeken of er criteria kunnen worden geformuleerd die iets zeggen over wat wel en niet mogelijk is in een projectie.

3. Abeltransformatie

3.1 Doel

Indien er een analytisch wiskundig verband bestaat een object en zijn projectie (en omgekeerd) dan heeft dat de volgende voordelen:

- Er kan een verzameling projecties worden bepaald die nooit in de praktijk voor kunnen komen. Deze verzameling kan dan worden gebruikt om naast bestaande projecties te leggen. Zodoende kunnen projecties beoordeeld worden. Deze verzameling 'onmogelijke' projecties kan zowel analytisch als numeriek worden uitgebreid.
- Op basis van integraalvergelijkingen (Abeltransformatie en Abelinversie) is het wellicht mogelijk om meetartefacten te detecteren. Met name de vergelijking voor Abelinversie (verg.(3.2)) bevat een term die bij het optreden van een meetartefact erg groot kan worden. Dientengevolge zal de integraal op dat punt niet meer convergeren.
- Op basis van de analytische relatie tussen object en projectie kunnen eventuele algemene eigenschappen worden afgeleid waaraan projecties c.q. meetartefacten moeten voldoen.

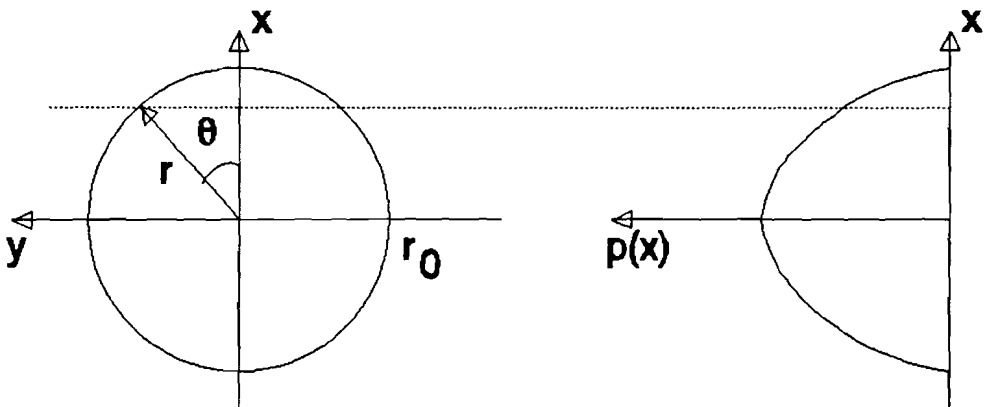
3.2 Principe

Men kan bij ieder fysisch object een projectie bedenken. Deze projectie kan men bij een gegeven object berekenen. Is het object rotatiesymmetrisch dan bestaat er een bijzonder wiskundig verband tussen object en de bijbehorende projectie: Abeltransformatie (Niels Henrik Abel, Noors wiskundige, 1802-1829).



Afbeelding 3.1: Relatie object en projectie.

Omgekeerd wordt het verband tussen een projectie en het bijbehorende object gelegd door de inverse Abeltransformatie of Abelinversie. Er zijn echter projecties denkbaar die van geen enkel bestaand object afkomstig zijn. Het is bijvoorbeeld niet mogelijk dat een projectie een stap bevat. Zouden dergelijke projecties gereconstrueerd worden tot een object dan bevat dit object singulariteiten. Het voorkomen van deze singulariteiten in het gereconstrueerde object zou een mechanisme kunnen zijn om meetartefacten te detecteren. Wij zijn dus bijzonder geïnteresseerd in de reconstructie van een object uit zijn projectie ofwel Abelinversie. In afbeelding 3.2 is een dergelijk object en zijn projectie weergegeven. In het object zijn poolcoördinaten (r, θ) gekozen wegens het rotatiesymmetrisch karakter van het object. Voor de projectie is de coördinaat x gekozen. De verdeling van de af te beelden grootheid in het object noemen we $\epsilon(r)$, de projectie van dit object noemen we $p(x)$.



Afbeelding 3.2: Rotatiesymmetrisch object en zijn projectie.

Projectie $p(x)$ is een lijnintegraal van $\epsilon(r)$. Door inspectie van afb.3.2 en door ons te realiseren dat $\epsilon(r)=0$ voor $r>r_0$ vinden we:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 2 \int_0^{\sqrt{r_0^2 - x^2}} \epsilon(r) dy \\
 &= 2 \int_x^{r_0} \frac{r\epsilon(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

En met de substitutie $r^2 = x^2 + y^2$ of $ydY=rdr$ volgt dan de tweede stap van verg.(3.1).

Deze integraal introduceert een eerste moeilijkheid: voor $r=x$ treedt een singulariteit op. Analytisch gezien is dat een klein probleem, numeriek gezien is dat een groter probleem.

Volgens Abel (Griem, 1964) geldt voor de inverse Abeltransformatie:

$$\epsilon(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{dp(x)/dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \quad (3.2)$$

Deze integraal introduceert een tweede, grote moeilijkheid. In de teller van de integrand verschijnt de afgeleide van $p(x)$. Hierdoor kunnen bij stapvormige veranderingen in $p(x)$ problemen ontstaan bij zowel analytische als numerieke evaluatie van de integraal. Door deze twee problemen is het realiseren van de abelinversie lastig. Echter, het voorkomen van $dp(x)/dx$ in de teller van de integrand kan ook een mechanisme zijn om artefacten te herkennen. Op de plaatsen waar een artefact voorkomt kan de afgeleide erg groot worden, wat eventueel tot instabiliteiten kan leiden. Een directe implementatie van uitdrukking (3.2) is niet zo interessant, wegens bovenstaande redenen en wegens het gecompliceerde algoritme dat dit zal opleveren.

We zullen in de volgende paragraaf aantonen dat de Abeltransformatie uiteen valt in twee andere transformaties die de genoemde problemen omzeilen.

3.3 Abeltransformatie opgevat als inverse Fouriertransformatie en een Hankeltransformatie

Het zal blijken dat Abeltransformatie bestaat uit een inverse Fouriertransformatie gevolgd door een Hankeltransformatie. De Abelinversie valt uiteen in een inverse Hankeltransformatie en een Fouriertransformatie. Tegelijkertijd zal blijken dat we hier niets anders doen dan het Centrale Sectie theorema voor rotatiesymmetrische objecten toepassen (Sollie, 1986).

Als we X de Fouriergeconjugeerde van x noemen en een fouriertransformatie aangeven met $FT[.]$ dan geldt:

$$FT[p(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i2\pi xX} dx \quad (3.3)$$

ofwel:

$$FT[p(x)] = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{r e(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} e^{-i2\pi xX} dr dx \quad (3.4)$$

Als dan poolcoördinaten ($x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$) in worden gevoerd volgens afbeelding 3.2 dan geldt:

$$FT[p(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e(r) \frac{dr}{\sin(\theta)} e^{-i2\pi r \cos(\theta) X} (r \sin(\theta)) d\theta \quad (3.5)$$

Ofwel:

$$FT[p(x)] = \int_0^{\infty} e(r) 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi r \cos(\theta) X} d\theta \right] dr \quad (3.6)$$

De uitdrukking tussen de vierkante haken in verg.(3.6) staat bekend als de nulde-orde Besselfunctie $J_0(.)$. Hierdoor krijgt de transformatie de vorm:

$$FT[p(x)] = 2\pi \int_0^{\infty} r e(r) J_0(2\pi rX) dr \quad (3.7)$$

Het rechterlid van deze uitdrukking staat bekend als Hankeltransformatie (HT[.]). Laat R de Hankelgeconjugeerde van r zijn. Dan is de variabele R identiek met de variabele X in verg.(3.7). We kunnen nu vereenvoudigd schrijven:

$$FT [p(x)] = HT [e(r)] \quad (3.8)$$

Ofwel geldt voor de Abeltransformatie:

$$p(x) = FT^{-1}[HT[e(r)]] \quad (3.9)$$

En geldt voor de Abelinversie:

$$e(r) = HT^{-1}[FT[p(x)]] \quad (3.10)$$

Deze uitdrukkingen vormen tegelijkertijd het Centrale Sectie theorema voor rotatiesymmetrische objecten. Deze uitdrukkingswijze van de Abeltransformatie biedt het voordeel dat deze uit te voeren is op een rekenmachine, vooropgesteld dat je over een snel algoritme beschikt voor Hankeltransformatie. Voor snelle Fouriertransformatie kan gebruikt worden gemaakt van het FFT-algoritme. Tevens dient te worden opgemerkt de Hankeltransformatie gelijk is aan zijn inverse.

3.4 Een methode voor Abelinversie

Abelinversie valt uiteen in een Fouriertransformatie en een inverse Hankeltransformatie. Door substitutie van een integraalformule voor de Besselfunctie vinden we dat de Hankeltransformatie uiteen valt in een Fouriertransformatie en een sommatie of weging van de gevonden Fouriercomponenten. Het nut van deze substitutie is gelegen in het feit dat nu de noodzaak van het beschikbaar zijn van een snel Hankeltransformatiealgoritme komt te vervallen. De lezer zou het idee kunnen krijgen dat de Fouriertransformatie uit het eerste deel van het algoritme en zijn inverse uit het tweede deel tegen elkaar weg zou kunnen vallen. Dat dit niet het geval is volgt uit het volgende (verg.(3.12), (3.13)).

In het voorgaande hebben we de Hankeltransformatie gevonden als:

$$HT[\epsilon(r)] = 2\pi \int_0^{\infty} r \epsilon(r) J_0(2\pi rX) dr \quad (3.11)$$

Als we definiëren:

$$G(X) = FT[p(x)] \quad (3.12)$$

Dan kunnen we omdat $XG(X)$ een even functie is verg.(3.10) herschrijven als (dit is de Abelinversie):

$$\epsilon(r) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} XG(X) J_0(2\pi rX) dX \quad (3.13)$$

Voor de nulde-orde Besselfunctie substitueren we:

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-iat}}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (3.14)$$

Deze functie komt er met de substitutie $t = \cos(\varphi)$ er als volgt uit te zien:

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\alpha \cos(\varphi)} d\varphi \quad (3.15)$$

Waardoor verg.(3.13) er als volgt uit komt te zien:

$$e(r) = \int_{-\infty}^{\infty} XG(X) \int_0^{\pi} e^{-i\alpha \cos(\varphi)} d\varphi dX \quad (3.16)$$

Wordt de integratievolgorde verwisseld en de substitutie $\alpha = 2\pi rX$ ingevoerd dan geldt:

$$e(r) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} XG(X) e^{-i2\pi rX \cos(\varphi)} dXd\varphi \quad (3.17)$$

De binnenste integraal herkennen we als de Fouriergetransformeerde van $XG(X)$, waarbij de Fouriergeconjugeerde van X nu $r \cos(\varphi)$ is: de Fouriergetransformeerde noemen we $\Lambda(r \cos(\varphi))$.

Er geldt dus:

$$\begin{aligned} e(r) &= \int_0^{\pi} \Lambda(r \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \Lambda(r \cos(\varphi)) d\varphi \end{aligned} \quad (3.18)$$

Deze laatste uitdrukking houdt niets anders in dan een weging van de Fouriercomponenten uit het spectrum Λ . Blijkbaar moet voor elke r in het te reconstrueren object het gevonden spectrum Λ uitgedrukt worden in poolcoördinaten.

Rekening houdend met de resultaten van de vorige paragraaf zal een algoritme om de Abelinversie te bepalen er dan als volgt uit komen te zien:

- stap 1: bepaal de te transformeren functie $f(x)$
 bepaal de Fouriergetransformeerde
- stap 2: $G(X) = FT[f(x)]$
 bepaal $XG(X)$
- stap 3: bepaal de Fouriergetransformeerde van $XG(X)$ en druk deze
 uit in poolcoördinaten, voor elke r in het object
- stap 4: voer de weging of middeling uit volgens
- stap 5: verg.(3.18)

In het volgende hoofdstuk zal dit algoritme verder worden uitgewerkt. Er zal blijken dat er zinvol gebruik gemaakt kan worden van het feit dat de projectie van een rotatiesymmetrisch object altijd een even functie is.

Er is een aantal andere methoden denkbaar volgens welke de Abelinversie tot stand kan komen. Een voorbeeld is de methode waarbij voor de Besselfunctie een reeksontwikkeling wordt gebruikt. Al naar gelang meer termen worden gebruikt uit de reeks wordt de benadering van de transformatie beter (Candel, Oktober 1981). Dit algoritme blijkt echter complexer te zijn dan het eerder gegeven algoritme.

Hansen (Hansen, 1985) bepaalt de Hankeltransformatie via de Abeltransformatie die hij dan weer Fouriertransformeert. Dit is een voor ons zinloze omweg die we dan ook niet zullen bekijken.

Verder bestaan er algoritmen die hoger-orde Hankeltransformaties bepalen (Oppenheim, 1980). Hierdoor wordt aan algemeenheid gewonnen, maar de complexiteit neemt toe zodat we dit niet toepassen.

4. Implementatie van een algoritme voor Abelinversie

In het voorgaande hoofdstuk hebben we gezien dat geldt voor de Abelinversie (verg.(3.13)):

$$\epsilon(r) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} XG(X) J_0(2\pi Xr) dX \quad (3.13)$$

De Fouriertransformatie wordt gedaan met behulp van een Fast-Fourier-Transform-algoritme. Daarom kijken we eerst naar een implementatie van de Hankeltransformatie. Zoals al eerder is opgemerkt is de Hankeltransformatie gelijk aan zijn inverse.

4.1 Uitwerking van een algoritme voor Hankeltransformatie

In paragraaf 3.3 is een algoritme voor Abelinversie gegeven. Dat algoritme kan eenvoudig worden herleid tot een algoritme voor Hankeltransformatie door de eerste stap, een Fouriertransformatie, weg te laten. We houden dan over:

- stap 1: bepaal de te transformeren functie $G(X)$
- stap 2: bepaal $XG(X)$
- stap 3: bepaal Fouriergetransformeerde van $XG(X)$
- stap 4: voer de weging uit volgens verg.(3.18)

De functie $G(X)$ kent een discrete vorm waarbij we het domein van $G(X)$ in P stukken opdelen:

$$G_d(n) = G(n\Delta X), \quad n = 0, 1, \dots, P-1 \quad (4.1)$$

Vervolgens kan $nG_d(n)$ worden bepaald. Dit is een reële even functie. In dit geval kan gebruik worden gemaakt van Hartleytransformatie in plaats van Fouriertransformatie. Immers, voor reële en even functies zijn deze beide transformaties gelijk. De Hartleytransformatie is aanzienlijk sneller daar er hiervoor geen imaginair deel hoeft te worden berekend. Omdat de functie even is bestaat de getransfor-

meerde uit louter cosinustermen. De discrete Hartleygetransformeerde noemen we $\Lambda_d(k)$. Volgens de literatuur (Rabiner, 1975) geldt voor een P-punts transformatie, als $\Delta\eta$ de stapgrootte is van de transform:

$$\Lambda(k\Delta\eta) = \Lambda_d(k) (\Delta\zeta)^2 \quad (4.2)$$

met:

$$\Delta\zeta\Delta\eta = \frac{2\pi}{P} \quad (4.3)$$

Heeft men de beschikking over het spectrum van $XG(X)$ dan kan de Hankelgetransformeerde gevonden worden volgens verg.(3.18). Het is mogelijk om deze integraal te benaderen met behulp van een som. Daartoe kan de Midpoint-regel (Syllabus Inleiding in de numerieke methoden, 1987) worden toegepast. Er geldt dan:

$$\begin{aligned} \epsilon(r) &\approx 2 \sum_{i=1}^{S/2} \Lambda(r\cos(\phi_i)) \Delta\phi \\ \text{met } \phi_i &= (S/2 - i + \frac{1}{2}) \Delta\phi \end{aligned} \quad (4.4)$$

Waarbij het integratie-interval $[0, \pi/2]$ wordt opgedeeld in $S/2$ stukken ter grootte $\Delta\theta = \pi/S$. In verg.(4.4) is r nog een continue variabele. Door het domein van $r: [0, r_{\max}]$ op te delen in L stukken ter grootte $\Delta r = r_{\max}/L$ vinden we:

$$\begin{aligned} \epsilon(l) &= 2 \sum_{i=1}^{S/2} \Lambda(l\Delta r\cos(\phi_i)) \Delta\phi \\ l &= 0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

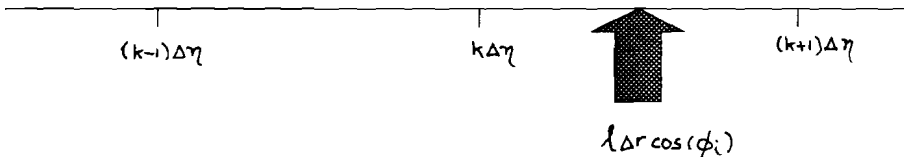
De stapgroottes in het X -domein en het r -domein, resp. ΔX en Δr kunnen verbonden worden door:

$$\Delta X \Delta r = \frac{2\pi}{N} \quad (4.6)$$

Er ontstaat nu een interpolatie- dan wel een approximatieprobleem. Immers, de discrete Hartleytransform $\Lambda_q(k)$ moeten we afbeelden op $\Delta r \cos(\phi_i)$. De variabele k kan in tegenstelling tot $\Delta r \cos(\phi_i)$ slechts gehele waarden aannemen. Het bepalen van de juiste spectrale component is bij interpolatie nauwkeuriger dan bij approximatie. De laatste methode is echter veel sneller daar er geen floating-point-operaties uitgevoerd hoeven te worden.

4.2 Approximatie

Bij approximatie wordt de variabele k afgebeeld op de variabele $\Delta r \cos(\phi_i)$. Dit is weergegeven in afbeelding 4.1.



Afbeelding 4.1: Afbeelding k op $\Delta r \cos(\phi_i)$.

Uit de afbeelding blijkt:

$$\begin{aligned} k\Delta\eta < l\Delta\text{rcos}(\phi_i) < (k+1)\Delta\eta \leftrightarrow \\ k < l\frac{\Delta r}{\Delta\eta}\cos(\phi_i) < k+1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

We kunnen nu de verzameling getallen $d(i,l)$ definiëren:

$$d(i,l) = l\frac{\Delta r}{\Delta\eta}\cos(\phi_i) + \frac{1}{2} \quad (4.8)$$

Dan zal de integer-waarde van $d(i,l)\Delta\eta$ altijd die waarde van k zijn die het dichtst bij $l\Delta\text{rcos}(\phi_i)$ ligt.

Door dit resultaat in verg.(4.5) te substitueren vinden we:

$$\epsilon(r) = 2 \sum_{i=1}^{S/2} \Lambda[\text{integer}(d(i,l))\Delta\eta] \Delta\phi \quad (4.9)$$

En met verg.(4.2), $\epsilon'(l) = \epsilon(l)/(\Delta\zeta)^2$ en met $\Delta\phi = \pi/S$ dan geldt:

$$\epsilon'(l) = \frac{2\pi}{S} \sum_{i=1}^{S/2} \Lambda_d[\text{integer}(d(i,l))] \quad (4.10)$$

Voor $d(i,l)$ kan nog een recurrente betrekking worden afgeleid:

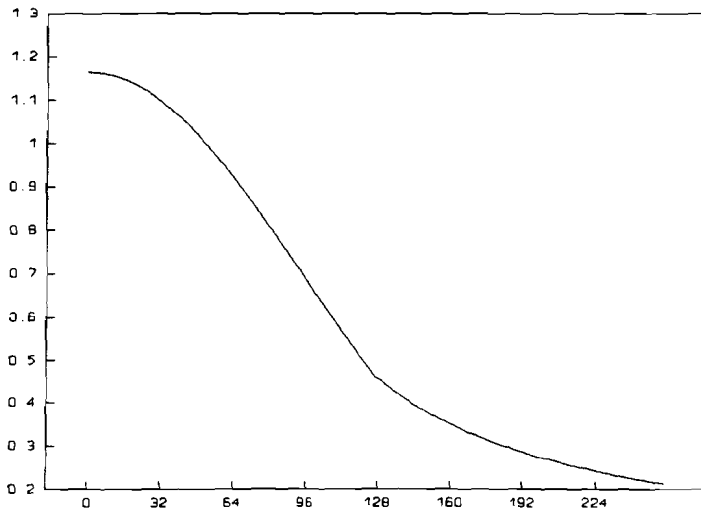
De getallen $d(i,1)$ beginnen met:

$$d(i,0) = \frac{1}{2} \quad (4.12)$$

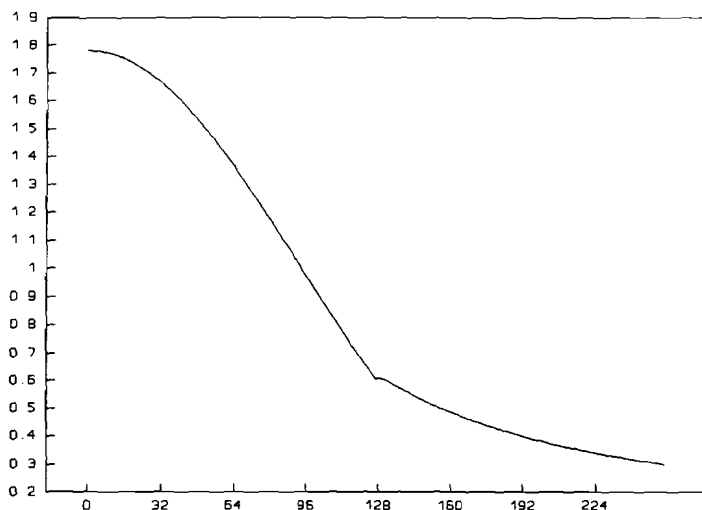
Door deze betrekking kan $d(i,1)$ gemakkelijk berekend worden bij elke stap van het algoritme.

4.3 Interpolatie

Het benaderen van een integraal kan gebeuren door de te integreren functie f te benaderen door een polynoom p . In paragraaf 4.2.1 is dit gedaan met een polynoom van de orde nul. Met andere woorden, men benadert de functie met rechthoekjes. Een betere benadering is functie f benaderen met een polynoom van orde een. Er wordt dan tussen de verschillende functiewaarden geïnterpoleerd. Interpolatie is nauwkeuriger dan approximatie. De laatste is echter sneller. Simulaties tonen aan dat approximatie toegepast kan worden. In afbeelding 4.2 zijn reconstructies weergegeven van een Gausische projectie. Afbeelding 4.2.a geeft het geval van approximatie weer terwijl 4.2.b het interpolatiegeval weergeeft.



Afbeelding 4.2.a: Reconstructie Gausische projectie m.b.v. approximatie



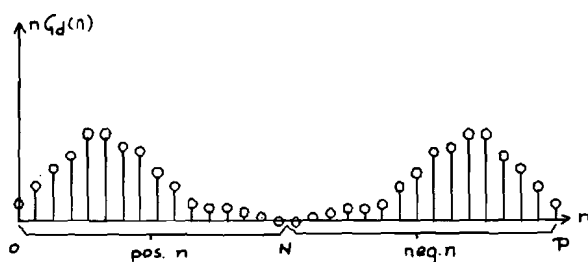
Afbeelding 4.2.b: Reconstructie Gausische projectie m.b.v. interpolatie

4.4 Implementatie van een algoritme voor Hankeltransformatie en Abelinversie

Op basis van de voorafgaande paragrafen kan een algoritme voor Hankeltransformatie worden geconstrueerd. In afbeelding 4.4 is het stroomdiagram van het algoritme gegeven. De te transformeren functie $G(n)$ is gegeven voor $n = 0, 1, \dots, N-1$. Verder vraagt het algoritme als parameters:

- N : aantal monsters in de te transformeren functie G
- P : aantal punts Fouriertransformatie
- L : aantal monsters van de Hankelgetransformeerde
- G' : Hankelgetransformeerde

Allereerst moet $nG(n)$ worden bepaald, dit is een even functie. De monsters voor negatieve n moeten ook worden opgeslagen. Daartoe worden de monsters gespiegeld ten opzichte van $P/2 > N$. Zie afbeelding 4.3

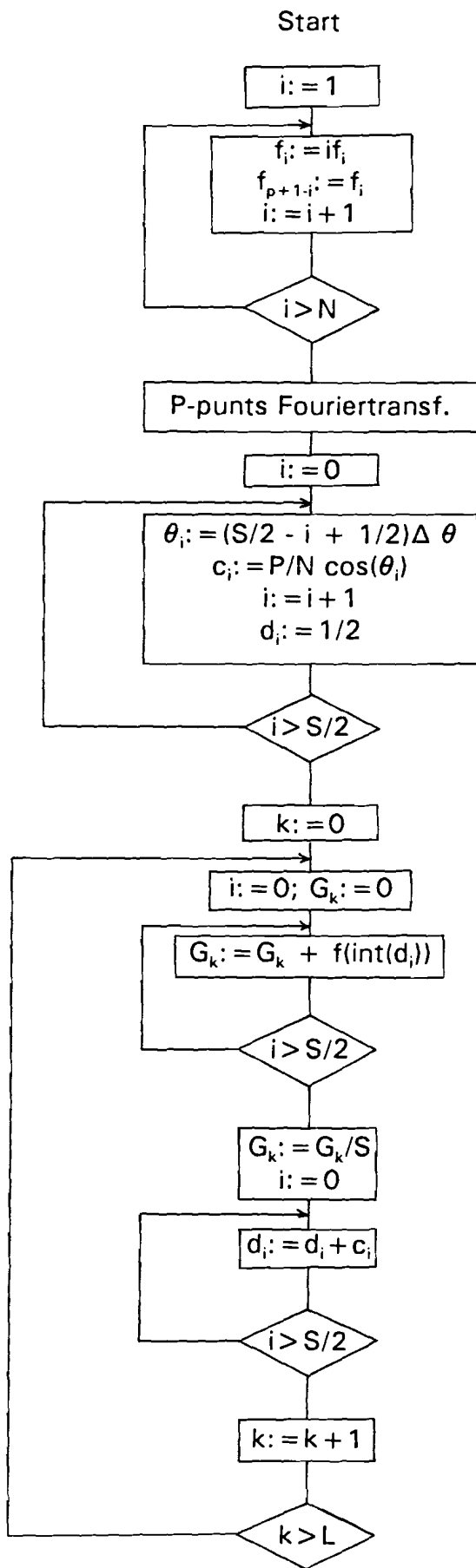


Afbeelding 4.3.: Opslag even functie $nG(n)$.

De getallen $d(i,1)$ (verg.(4.8)) worden in een array $d[i]$ opgeslagen en voor elke l aangepast.

Bij de in het algoritme genoemde Fouriertransformatie wordt van standaardroutines gebruik gemaakt. Indien het Fast-Fourier-transform-algoritme wordt vervangen door een Fast-Hartley-Transform dan is hiervoor ook een routine beschikbaar (De Beer, 1989). Al deze algoritmen vragen een speciale datastructuur. Deze is terug te vinden in de programmalisting. Daar deze details hier niet van belang zijn worden ze verder niet beschreven.

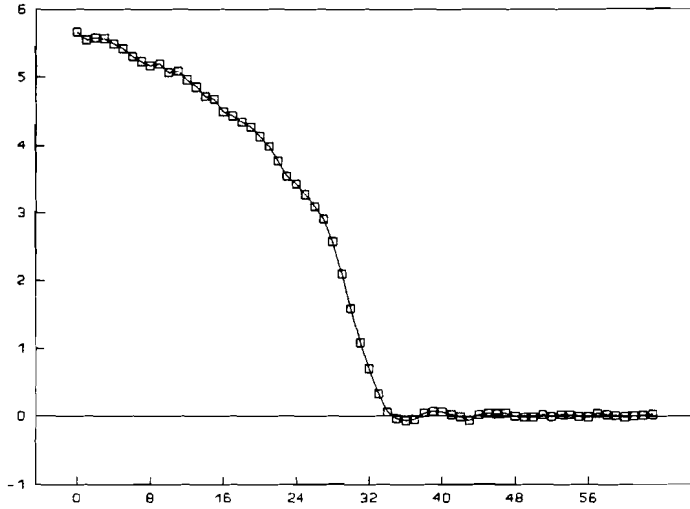
In de eerste lus van het algoritme wordt $XG(X)$ (in stroomdiagram: $i*f(i)$) bepaald. Vervolgens wordt de functie Fouriergetransformeerd. Dan worden de hoeken θ bepaald. In het array c wordt de tweede term van verg.4.11 opgeslagen. Hiermee wordt in de hoofd lus de waarde van het array d (bevat de approximatiegetallen $d(i,1)$ voor vaste l) opgehoogd als functie van l . In deze hoofd lus, die L maal doorlopen wordt, wordt de Hankelgetransformeerde G bepaald.



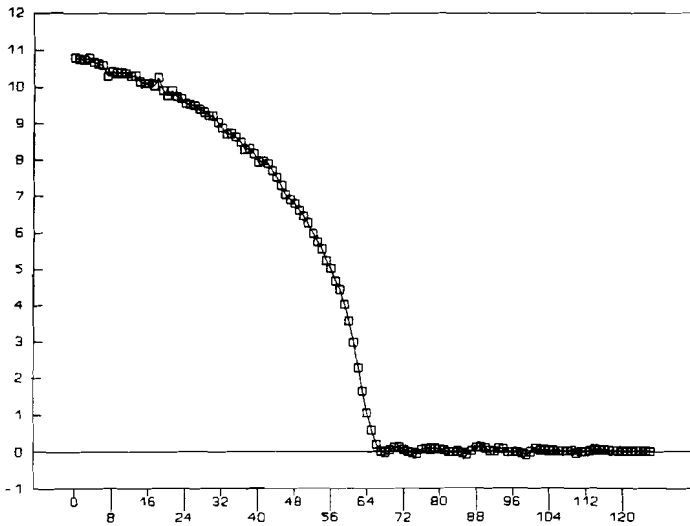
Afbeelding 4.3: Flowdiagram algoritme Hankeltransformatie.

4.5 Enkele voorbeelden van Abeltransformatie en Abelinversie

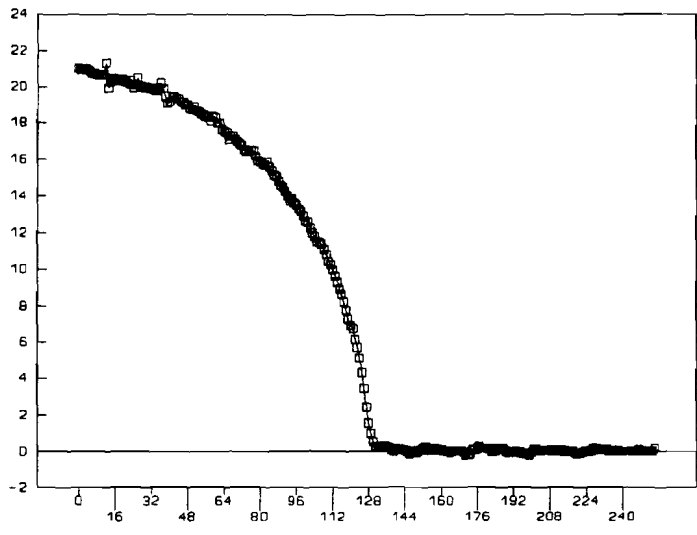
In de volgende afbeeldingen zijn enkele reconstructies van projecties en enkele projecties van objecten afgebeeld.



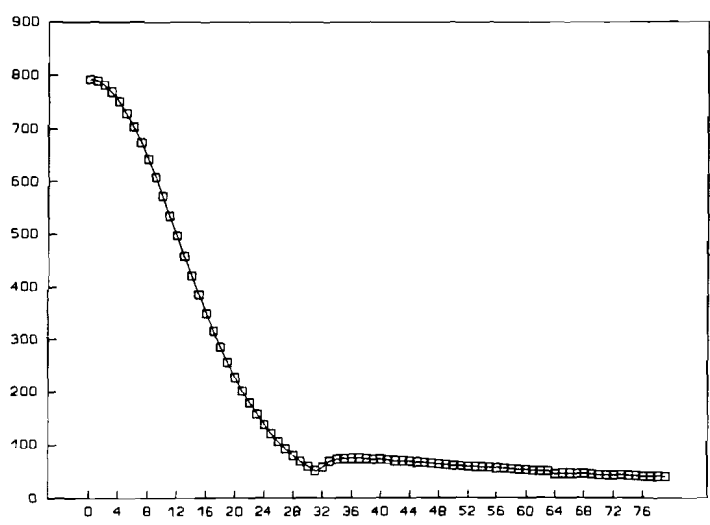
Afbeelding 4.4: Projectie van blokfunctie, $N=128$, $M=32$



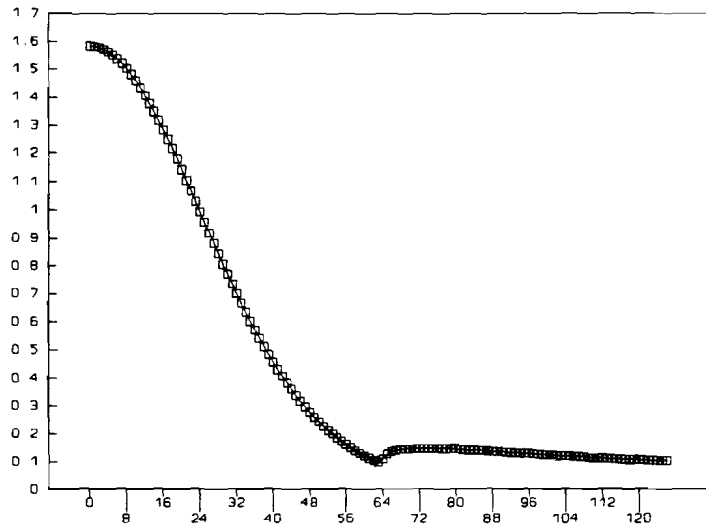
Afbeelding 4.5: Projectie van blokfunctie, $N=256$, $M=64$



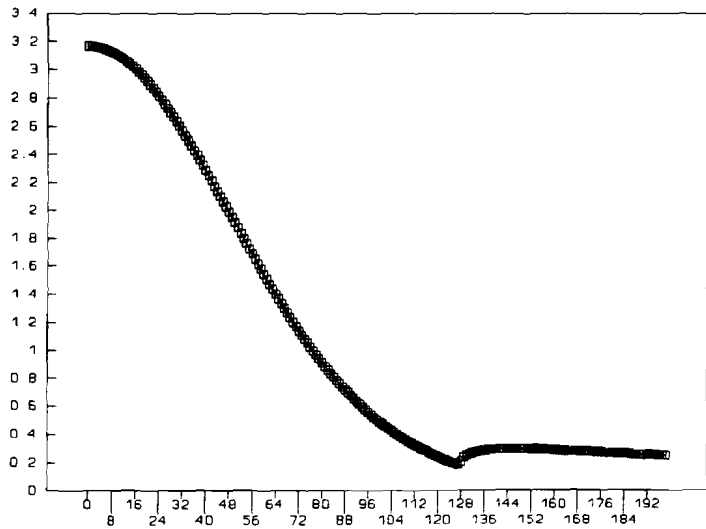
Afbeelding 4.6: Projectie van blokfunctie, $N=512$, $M=128$



Afbeelding 4.7: Reconstructie Gaussische functie, $N=128$, $M=32$



Afbeelding 4.8: Reconstructie Gaussische functie, $N=256$, $M=64$



Afbeelding 4.9: Reconstructie Gaussische functie, $N=512$, $M=128$

5. Abelinversie als detectiemethode voor meetartefacten

5.1 Projecties, gereconstrueerd tot niet-bestaande objecten.

De vergelijkingen voor Abeltransformatie en Abelinversie (verg.(3.1) en verg.(3.2)) bieden mogelijkheden om meetartefacten te detecteren. Met name de Abelinversie biedt mogelijkheden wegens de afgeleide die in de integrand staat.

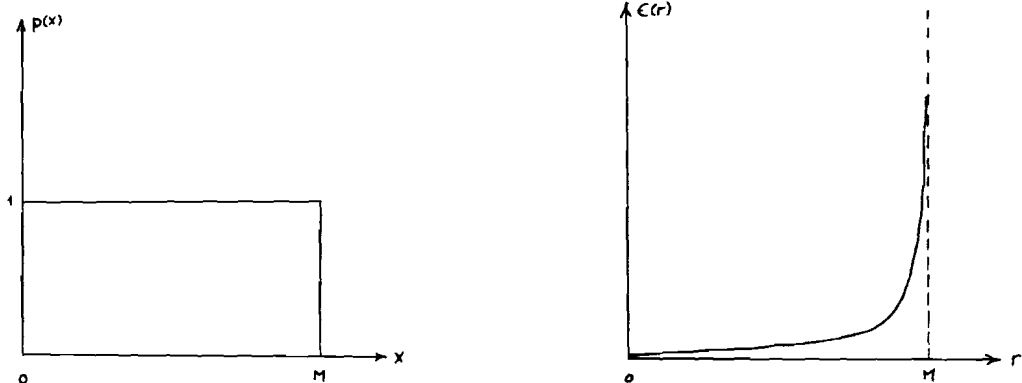
$$\epsilon(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{dp(x)/dx}{\sqrt{x^2-r^2}} dx \quad (3.2)$$

Zoals al in hoofdstuk 3 is opgemerkt is het mogelijk om projecties te bedenken die onmogelijk afkomstig kunnen zijn van een bestaand object. In een reële projectie kan bijvoorbeeld geen stapvormige variatie voorkomen. Reconstructie van een dergelijke projectie geeft aanleiding tot singulariteiten in het object. Het volgende transformatiepaar toont dit aan:

$$p(x) = 1 \quad -M \leq x \leq M$$

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{M^2-r^2}} & 0 \leq r \leq M \\ 0 & r > M \end{cases} \quad (5.1)$$

Dit transformatiepaar bevat een singulariteit voor $r=M$. Zou $\epsilon(r)$ bijvoorbeeld de verdeling van de geluidssnelheid voorstellen dan zou deze snelheid in het object gelijk oneindig zijn voor $r=M$. In afbeelding 5.1 is dit transformatiepaar nog eens weergegeven.

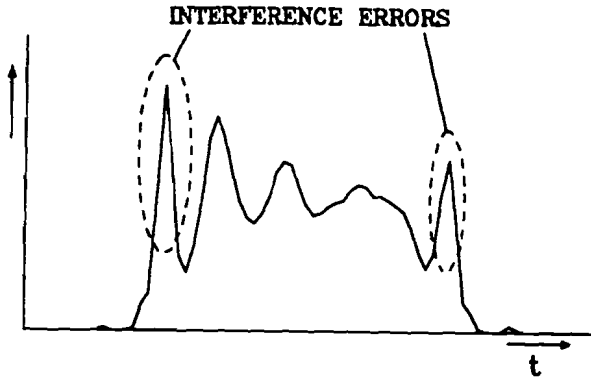


Afb.5.1: Stapvormige projectie p en zijn reconstructie $\epsilon(r)$.

Op basis van het optreden van deze singulariteit kan gezegd worden dat zich in de projectie een artefact bevindt. Dit artefact bevindt zich precies op de plaats van de singulariteit.

Abelinversie conserveert flanken in projecties bij reconstructie. Dit is een zinvolle eigenschap daar hierdoor in de reconstructie de plaats van het artefact intact blijft.

Er is verondersteld dat meetartefacten aanleiding geven tot niet-bestaande objecten. Dit op basis van metingen met deze verstoringen. In afbeelding 5.2 is een dergelijk meetartefact weergegeven. Als een dergelijke projectie wordt gereconstrueerd met behulp van Abelinversie moeten we rotatiesymmetrie veronderstellen. Dat wil zeggen dat alle projecties van het te reconstrueren object met deze artefacten behept zijn. Hierdoor wordt weinig aan algemeenheid verloren. Immers, van belang is hoe het artefact zich gedraagt bij reconstructie en of het artefact aanleiding geeft tot niet-bestaande objecten. Hoe het object er precies uitziet is van ondergeschikt belang.



Afb.5.2: Projectie met typisch artefact.

Op basis van gemeten artefacten is het mogelijk om gestileerde artefacten te construeren. Met deze gestileerde artefacten is het makkelijker om reconstructies uit te voeren. Door de lineariteit van de Abelinversie is het mogelijk om enkel verstoringen te reconstrueren, los van het resterende deel van de projectie.

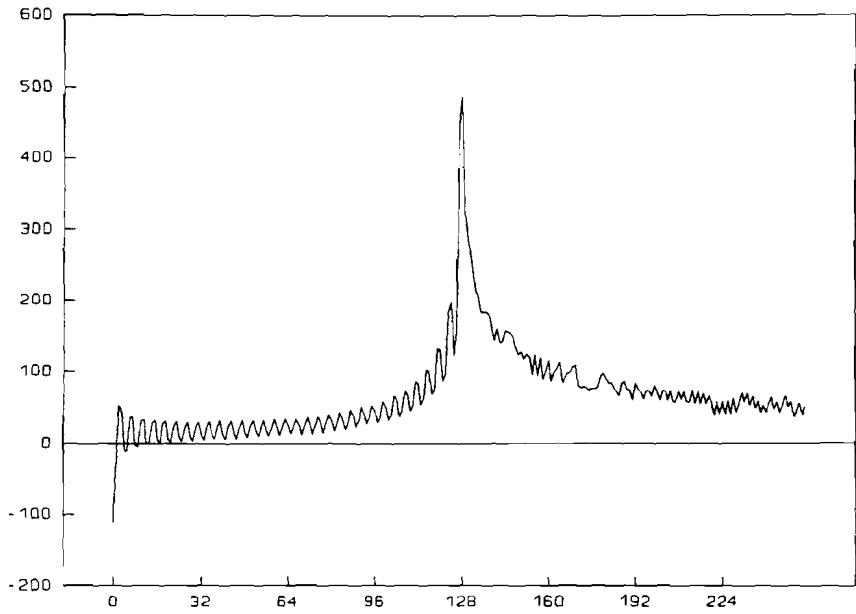
5.2 Projecties, gereconstrueerd tot niet-bestaande objecten met behulp van een rekenmachine

Het is van belang om na te gaan hoe het in de voorgaande hoofdstukken beschreven algoritme projecties tot objecten reconstrueert. Met name moet worden bekeken hoe projecties tot niet-bestaande objecten worden gereconstrueerd. In de afbeeldingen 5.3 en 5.4 zijn de reconstructies gegeven van de volgende projecties:

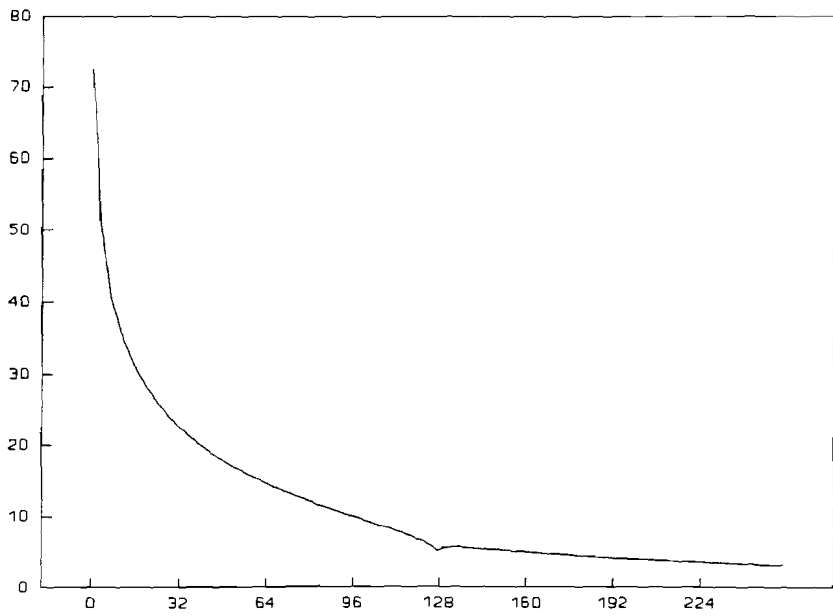
$$p(x) = \begin{cases} 1 & -M \leq x \leq M \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (5.3)$$

en

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{M} & -M \leq x \leq M \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (5.4)$$



Afbeelding 5.3: reconstructie van $p(x) = 1$



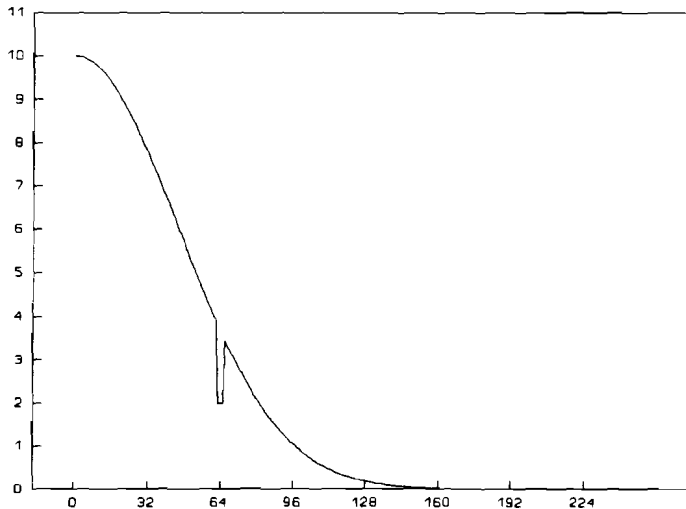
Afbeelding 5.4: reconstructie van $p(x) = 1 - x/M$

Uit deze reconstructies blijkt dat het algoritme singulariteiten benaderd met een eindige waarde. Dit verschijnsel wordt veroorzaakt door een tweetal zaken:

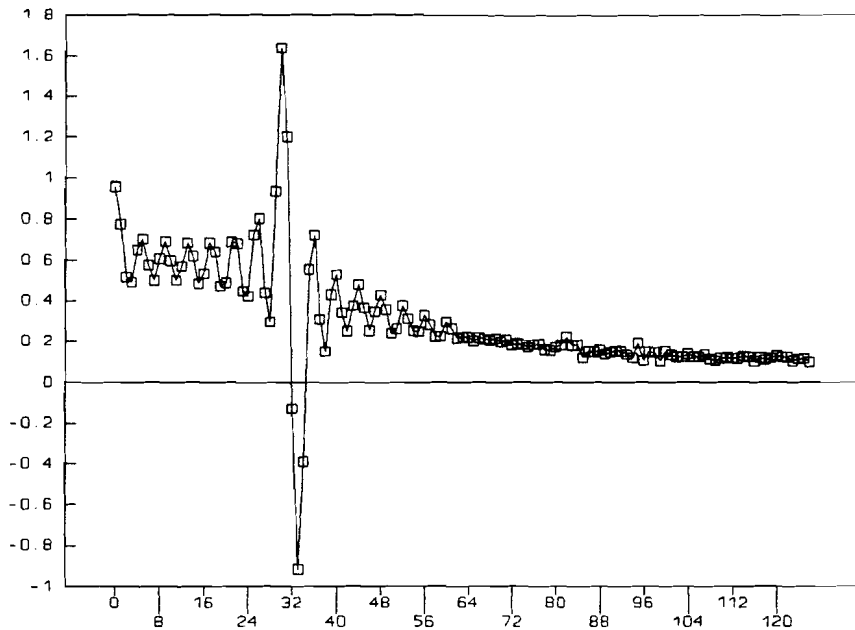
1. Fouriertransformatie
2. Weging

De Fouriertransformatie, die tot twee maal toe in het algoritme voorkomt, zorgt ervoor dat steile flanken sterk worden uitgesmeerd over het spectrum. De weging (verg.(3.18)) die daarop volgt veroorzaakt weer middeling van het spectrum. Dit betekent dat een van de te onderzoeken stellingen niet bewaarheid is: Het algoritme vertoont geen instabiliteiten op plaatsen waar je dit zou kunnen verwachten.

Dit betekent niet dat Abelinversie onbruikbaar is voor het gestelde probleem. In afb.5.5.a is een reconstructie gegeven van een Gausische projectie met daarop een gestileerde verstoring. In de reconstructie is te zien dat er op de plaatsen van de flanken grote waarden worden gerealiseerd.

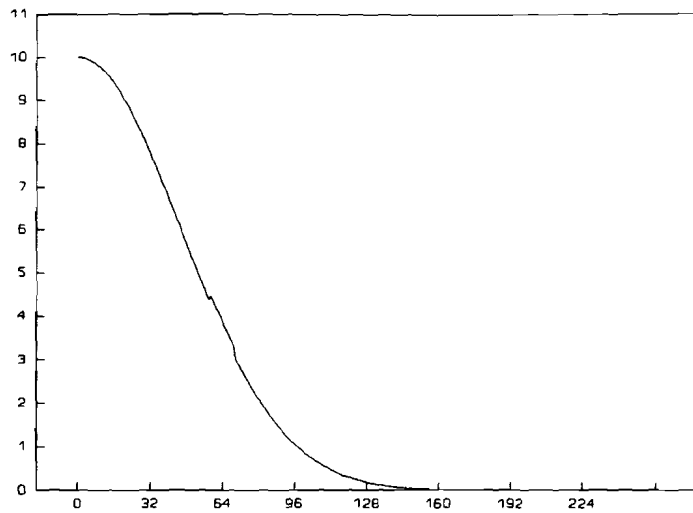


Afbeelding 5.5.a: Gausische functie met verstoring.

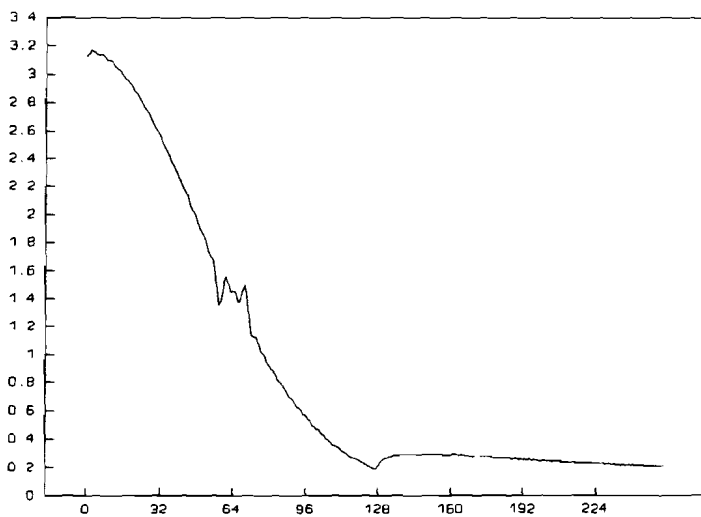


Afbeelding 5.5.b: Reconstructie Gausische functie met verstoring.

Is de verstoring veel minder groot, iets wat in de praktijk voorkomt, dan zal het algoritme op de plaatsen van stapvormige veranderingen toch grotere waarden realiseren. Dit kan een criterium vormen waarop een artefact wordt herkend. In de afbeelding 5.6 is een dergelijk geval weergegeven. De projectie, een Gausische kromme, is in het midden verstoord door er een kleine constante bij op te tellen (Hier bij een amplitude van 10 is de verstoring 0,2 grootte). De waarde op de plaats van de singulariteit in de reconstructie is evenredig met de stapgrootte van de verstoring in de projectie. Bij een glatte functie als hier is het duidelijk waar de verstoring zich bevindt.



Afbeelding 5.6.a: Gausische projectie met kleine verstoring.



Afbeelding 5.6.b: Reconstructie Gausische projectie met kleine verstoring.

Vervolgens is de methode met nog een nadeel behept. Indien de verstoring van de projectie klein is en geen steile flanken heeft dan is de reconstructie ervan nauwelijks te herkennen. Een verstoring wordt, als gevolg van rotatiesymmetrie, naar binnen toe uitgesmeerd. Dat betekent dat de artefacten die niet met het oog te herkennen zijn ook nauwelijks herkenbaar zullen zijn in de reconstructie. Bovendien wordt men geconfronteerd met het, bijna triviale probleem dat als het artefact een vorm heeft die geen aanleiding geeft tot singulariteiten herkenning niet mogelijk is.

Op deze plaats kan een alternatieve methode gesuggereerd worden. Pas een numerieke implementatie van verg.(3.2) toe door achterwaarts te integreren. De singulariteit ten gevolge van de noemer kan dan worden omzeild. Bij het naderen van van de ondergrens van de integraal moet de stapgrootte steeds kleiner worden. Door de transformatie toe te passen op ieder punt van een projectie kan worden onderzocht of de integraal instabiel wordt ten gevolge van de projectie (in tegenstelling tot instabiliteit door de term in de noemer). Deze methode kent hetzelfde probleem die de in het voorafgaande geschetste methode bevat. De term $dp(x)/dx$ wordt in de numerieke implementatie vervangen door:

$$\frac{p(\Delta X(n+1)) - p(\Delta Xn)}{\Delta X} \quad (5.5)$$

In de numerieke implementatie blijft deze term altijd eindig, zelfs bij een stapvormige verandering in $p(x)$. De integraal zal op die plaatsen zeer grote waarden realiseren. De vraag verschuift dan van wel of geen instabiliteit naar die van grootte van amplitude.

6. Conclusies en aanbevelingen

Het voorkomen van meetartefacten bij ultrasone tomografie is een bekend probleem. Er zijn al verschillende oplossingsmethoden voorgesteld. Daar de oplossing afhankelijk is van de gebruikte instrumentatie ligt het voor de hand dat een oplossing niet zonder ingreep in de tomograaf gerealiseerd kan worden. Het literatuuronderzoek onderschrijft dit: er zijn een aantal mogelijkheden die allen een forse ingreep in de tomograaf vereisen. Zowel op hardware- als op softwaregebied worden oplossingen voorgesteld die niet zonder meer in de huidige tomograaf kunnen worden ingebouwd. Van alle voorgestelde methoden biedt het gebruik van gesegmenteerde ontvangers de beste mogelijkheden.

Abelinversie biedt in twee vormen mogelijkheden: in de analytische vorm en als numerieke implementatie op een rekenmachine. Analytische Abelinversie kan tot criteria leiden waarmee artefacten herkend kunnen worden. Abelinversie in deze vorm is slechts toepasbaar op gestileerde projecties. Alhoewel de implementatie van Abelinversie op een rekenmachine bruikbaar is voor willekeurige projecties heeft deze vorm het nadeel dat de singulariteiten, waarop herkenning van artefacten gebaseerd is, niet optreden. Dit maakt herkenning lastig. De methode functioneert alleen daar naar behoren waar artefacten steile flanken bezit.

Literatuur

Beer N.A.M. de

Fourier-inversie met behulp van Hartley-transformatie als algoritme voor beeldreconstructie

Afstudeerverslag Technische Universiteit Eindhoven, Vakgroep EME
1989

Brandenburger G.H., Cox J.R., Klepper J.R., Miller J.G.

Computer simulation to evaluate strategies for enhancing accuracy in attenuation tomography

Ultrasonics Symposium IEEE, pp.685-690
1982

Busse L.J., Miller J.G., Yuhas D.E., Mimbs J.W., Weiss A.N., Sobel B.E.

Phase cancellation effects: a source of attenuation artifacts eliminated by a CdS acoustoelectric receiver

Ultrasound in Medicine, vol.3, pp.1519-1535
1977

Busse L.J., Miller J.G.

Detection of spatially nonuniform ultrasonic radiation with phase sensitive (piezoelectric) and phase insensitive (acoustoelectric) receivers.

Journal of the Acoustical Society of America 70(5), pp.1377-1386
november 1981

Candel S.M.

An algorithm for the Fourier-Bessel transform

Computer Physics Communications, vol. 23, pp.343-353
1981

Candel, Sébastien M.

Dual algorithm for fast calculation of the Fourier-Bessel transform

IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing, vol. ASSP-29, No.5, pp.963-972
October 1981

Chenevert T.L., Meyer C.R., Bland P.H., Carson P.L.

Aperture diffraction theory applied to ultrasonic attenuation imaging

Journal of the acoustical society of America 74(4),
pp.1232-1238
October 1983

Costa E.T., Hoddinott J.C., Leeman S.

Artefact-free measurement of attenuation, impedance and dispersion

Ultrasonics Symposium, pp.963-966
1986

Crawford C.R., Kak A.C.

Multipath artifacts corrections in ultrasonic transmission tomography

Ultrasonic Imaging 4, pp. 234-266
1982

Farrel Edward J.

Tomographic imaging of attenuation with simulation correction of refraction

Ultrasonic Imaging 3, pp.144-163
1981

Fitting D.W., Schmitt R.M., Grounds P., Hansell G., Carson P.L.

Development of two-dimensional PVDF arrays for transmission computed tomography of attenuation

Ultrasonics Symposium IEEE, pp. 794-797
1984

Fitting Dale W., Carson Paul L., Gieseey Jeffrey J.,
Grounds Patrick M.

A two-dimensional array receiver for reducing refraction artifacts in ultrasonic computed tomography of attenuation
IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control, Vol. UFFC-34, no.3, pp. 346-356
may 1987

Griem Hans R.

Plasma Spectroscopy

McGraw-Hill Book Company, New York, pp. 176-178
1964

Hansen Eric W.

Fast Hankel transform algorithm

IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing
Vol ASSP-33, no.3, pp. 666-671

Heddes M.

**Uitbreiding en verbetering van een ultrasone dempingsmeter
gebaseerd op de verschuiving van de gemiddelde frequentie**

Afstudeerverslag Technische Universiteit Eindhoven, vakgroep EME
Augustus 1987

Klepper John.R., Brandenburger Gary H., Busse L.J., Miller J.G.

**Phase cancellation, reflection, and refraction effects in
quantitative ultrasonic attenuation tomography.**

Ultrasonics Symposium Proceedings, IEEE Cat.77CH1264-1SU
pp.182-187
1977

Krämmer P., Hassler D.

**Measurement of spatial time-of-flight fluctuations of ultrasound
pulses passing through inhomogeneous layers**

Ultrasonics Symposium IEEE, pp. 939-942
1987

Meyer C.R., Chenevert T.L., Carson P.L.

**A method for reducing multipath artifacts in ultrasonic computed
tomography**

Journal of the acoustical society of America 72(3), pp. 820-823
September 1982

Miller J.G., Klepper J.R., Brandenburger G.H., Busse L.J., O'Donnel
M., Mimbs J.W.

**Reconstructive tomography based on ultrasonic attenuation
in: Computer aided tomography and ultrasonics in medicine**

Raviv et al.(eds.), pp. 151-164
North Holland Publishing Company
1979

Norton Stephen J., Linzer Melvin

**Correction for ray refraction in velocity and attenuation
tomography: a perturbation approach**

Ultrasonic Imaging 4, pp. 201-233
1982

Oppenheim Alan V., Frisk George V., Martinez David R.,
Computation of the Hankeltransform using projections
Journal of the Acoustical Society of America 68(2) pp.523-529
Augustus 1980

Rabiner L.R., Gold B.
Theory and application of digital signal processing
Prentice Hall, Englewood Cliffs
1975

Schmitt Rainer M., Meyer Charles R., Carson Paul L., Chenevert
Thomas L., Bland Peyton H.
**Error reduction in through transmission tomography using large
receiving arrays with phase-insensitive signal processing**
IEEE transactions on sonics and ultrasonics, Vol.SU-31,
no.4 pp. 251-257
july 1984

Schmitt R.M., Meyer C.R., Carson P.L., Samuels B.I.
**Median and spatial low-pass filtering in ultrasonic computed
tomography**
Medical Physics Vol.11,no.6, pp.767-771
November/December 1984

Sollie, Gerrit
Ultrasound transmission tomography: a low-cost realization
Proefschrift Eindhoven
1988

Sudharsanan, Subramania
**The Abel inversion of noisy data using discrete integral
transforms**
MSc Thesis, University of Tennessee, Knoxville
1986

Faculteit der Wiskunde en Informatica
Syllabus Inleiding in de numerieke methoden
Technische Universiteit Eindhoven
1987

Appendix 1: Programmalisting Hankelalgoritme

```
PROCEDURE Hankel(VAR f, G      : GldArray;
                 N, L, P : INTEGER);

VAR i, k          : INTEGER;
    theta, c, d: RealArray;

BEGIN
  ClrSCR;
  GotoXY(5,4);
  Write('Hankeltransformatie m.b.v. Nearest Neighbour Approximati
on');

  FOR i:=1 TO N DO BEGIN
    f[i] := i*f[i];
    f[P+1-i] := f[i];
  END;
  f[0] := 0.125*f[0];

  {converteer functie om aan te passen voor fft}

  FOR i:=P DOWNTO 1 DO BEGIN
    f[2*i-1] := f[i-1]; {alle oneven plaatsen zijn reele deel}
    f[2*i]   := 0;     {alle even plaatsen zijn imaginaire deel}
  END;

  ClrSCR;
  GotoXY(5,5);WRITE('Fouriertransformatie');
  Four1(f,P,1);

  {converteer terug}

  { FOR i:=0 TO P-1 DO BEGIN
    f[i] := f[2*i+1];
  END;}

  FOR i:=0 TO (P DIV 2)-1 DO BEGIN
    f[i] := f[2*i+1];
    f[P DIV 2 + i] := 0;
  END;

  FOR i:=1 TO (S DIV 2) DO
  BEGIN
    theta[i] := ((S DIV 2) - i + 0.5)*pi/S;
    c[i] := (P/N)*cos(theta[i]);
  END;

  FOR i:=1 TO (S DIV 2) DO d[i] := 0.5;

  GotoXY(5,6);Write('Weging Fouriercomponenten: ');
  k := 0;
  WHILE k<=L DO
  BEGIN
    GotoXY(32,6);WRITE(L-k:3);
    G[k] := 0;
    FOR i:=1 TO (S DIV 2) DO G[k] := G[k] + f[Round(Int(d[i]))];
    G[k] := G[k]/S;
    FOR i:=1 TO (S DIV 2) DO d[i] := d[i] + c[i];
    k := k+1;
  END;
END; {procedure Hankel}
```