

Der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastentraegern mit Rechteckquerschnitt

Citation for published version (APA):

Janssen, J. D., & Veldpaus, F. E. (1970). *Der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastentraegern mit Rechteckquerschnitt*. (DCT rapporten; Vol. 1970.039). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1970

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES PONTS ET CHARPENTES
INTERNATIONALE VEREINIGUNG FÜR BRÜCKENBAU UND HOCHBAU
INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE AND STRUCTURAL
ENGINEERING

**Der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastenträgern
mit Rechteckquerschnitt**

*The Influence of Cross-Ties on the Behaviour of Box Girders of Rectangular
Section*

*L'influence de parois transversales sur le comportement de poutres en carsson à
section rectangulaire*

J. D. JANSSEN
Prof. Dr. Ir.

F. E. VELDPAUS
Ir.

Laboratorium für technische Mechanik, Technische Hochschule Eindhoven NL

Extrait du volume 33-I des «Mémoires»
Sonderdruck aus dem Band 33-I der «Abhandlungen»
Reprint from Volume 33-I of the «Publications»

ZÜRICH 1973

Der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt

The Influence of Cross-Ties on the Behaviour of Box Girders of Rectangular Section

L'influence de parois transversales sur le comportement de poutres en caisson à section rectangulaire

J. D. JANSSEN

Prof. Dr. Ir.

F. E. VELDPAUS

Ir.

Laboratorium für technische Mechanik, Technische Hochschule Eindhoven NL

1. Einleitung

Für die Berechnung des in Fig. 1.1 gezeichneten Kastenträgers mit Rechteckquerschnitt, der am Ende $x=0$ eingespannt, am Ende $x=l$ durch Normalspannungen $\bar{\sigma}_x(s)$ und Schubspannungen $\bar{\tau}(s)$ belastet ist, ist es im allgemeinen nicht gestattet, nur die in Fig. 1.2 gezeichneten Spannungsergebnisse zu betrachten.

Dies bedeutet, dass an einem Spannungssystem wie in Fig. 1.1, ausser den resultierenden Kräften und Momenten, auch bestimmte Gleichgewichtssysteme wichtig sind. Theoretisch und experimentell ist nachweisbar [2], dass die Berücksichtigung der sogenannten axialen und transversalen Bimomente, \bar{B} bzw. \bar{Q} , eine hinreichend genaue Beschreibung der Realität ergibt. Mit diesen Spannungsgrößen \bar{B} und \bar{Q} hängen die Verwölbung bzw. die Querschnittsverformung als Verschiebungsgrößen zusammen [1].

Inbesondere wird manchmal der Einfluss der Querschnittsverformung nicht berücksichtigt [3, 4]. Dieses Verfahren ist nur dann erlaubt, wenn die Querschnittstreue unter gegebener Belastung mittels (vieler) Querschotte und eines Querschotts an der Krafteinleitungsstelle gewährleistet ist.

Im nachfolgenden wird der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten der Kastenträger behandelt. Daraus resultieren Richtlinien für die Anwen-

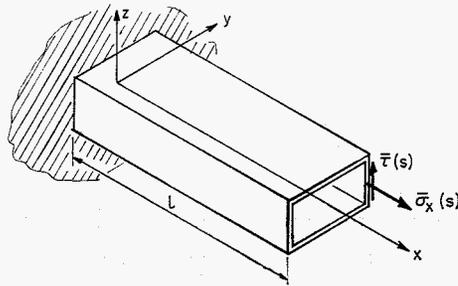


Fig. 1.1. Der Träger mit Belastung im Endquerschnitt.

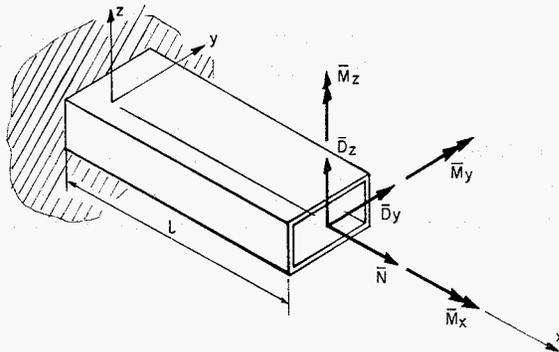


Fig. 1.2. Die in der klassischen Theorie interessanten Belastungsgrößen.

derung von Querschotten. Ausserdem wird der Zustand untersucht, der auftritt, wenn die Belastung zwischen Querschotten eingeleitet wird.

Der Einfluss der Querschnittsverformung und die Wirkung von Schotten ist schon öfters in wissenschaftlichen Abhandlungen erörtert worden, z. B. in den Arbeiten von V. VLASOV [1], J. JANSSEN [2], G. LACHER [5], F. RESINGER [6], R. DABROWSKI [7] und P. CSONKA [8].

Analog zur Arbeitsweise in [2] stützt sich die Theorie auf das Prinzip der minimalen potentiellen Energie. Mit der Formulierung in Matrixschreibweise entsteht eine übersichtliche und leicht programmierbare Darstellung der Berechnung.

Der Spannungs- und Verformungszustand infolge \bar{N} , \bar{D}_y , \bar{D}_z , \bar{M}_y und \bar{M}_z (Fig. 1.2) hängt nicht zusammen mit den Spannungen und Verformungen infolge \bar{M}_x , \bar{B} und \bar{Q} , und kann mit der Theorie nach Bernoulli-Navier hinreichend genau beschrieben werden. Deshalb können wir uns auf Belastungen durch \bar{M}_x , \bar{B} und \bar{Q} beschränken. Für einen Kastenträger mit doppelt-symmetrischem Querschnitt bedeutet dies, dass die auftretenden Spannungen und Verschiebungen mit Rücksicht auf beide Symmetrieachsen des Querschnitts antimetrisch sind.

2. Bezeichnungen

Für alle Bezeichnungen in dieser Arbeit beziehen wir uns auf [11] mit Ausnahme der Grössen E^* , ν^* , h , k_β und k_κ :

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \text{Elastizitätsmodul} \\ \nu^* &= \text{Querdehnungszahl} \\ h &= \text{Stärke} \end{aligned} \right\} \text{ der Querschotte,}$$

$$k_\beta = \frac{E^*}{3(1+\nu^*)} \frac{h^3 b_1 b_2}{\alpha_0 a_1},$$

$$k_\kappa = \frac{8 E^*}{1+\nu^*} \frac{b_1 b_2 h \alpha_0}{c}.$$

3. Einige Ergebnisse für Kastenträger mit verformbarem Rechteckquerschnitt

In [1] und [2] wurde eine Theorie aufgestellt, die für Kastenträger ohne Querschotten verwendbar ist. Wir werden die Resultate kurz zusammenfassen.

Wenn $u(x, s)$ und $v(x, s)$ die Verschiebung in axialer Richtung bzw. Umlaufsrichtung bedeuten (Fig. 3.1), so darf man nach der Grundhypothese dieser Theorie schreiben:

$$u(x, s) = \beta(x) \varphi(s), \quad (3.1)$$

$$v(x, s) = \vartheta(x) h(s) + \kappa(x) m(s). \quad (3.2)$$

Für die Funktionen φ , h und m der Umlaufskoordinate s (Fig. 3.1) gilt:

$$\varphi(s) = y(s) z(s), \quad (3.3)$$

$$h(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2, \\ b_1 & \text{für } z = \pm b_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$m(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2 \\ -b_1 & \text{für } z = \pm b_1 \end{cases} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (3.5)$$

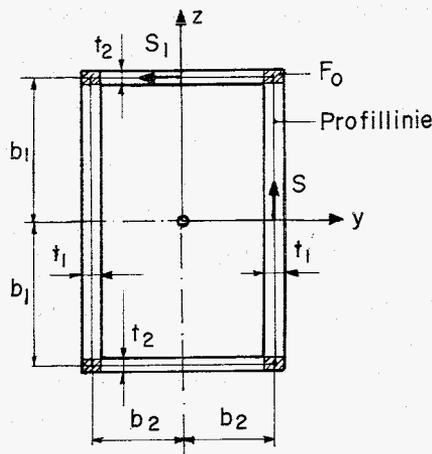


Fig. 3.1. Der Trägerquerschnitt.

Als Schnittgrößen treten nur das axiale Bimoment $B(x)$, das Torsionsmoment $M(x)$ und das transversale Bimoment $Q(x)$ auf. Wenn in einem Querschnitt axiale Normalspannungen $\sigma(x, s)$ und Schubspannungen $\tau(x, s)$ bestehen (z. B. Fig. 1.1), so lässt sich für B , M und Q schreiben:

$$B(x) = \int_{\bar{F}} \sigma(x, s) \varphi(s) dF, \quad (3.6)$$

$$M(x) = \int_{\bar{F}} \tau(x, s) h(s) dF, \quad (3.7)$$

$$Q(x) = \int_{\bar{F}} \tau(x, s) m(s) dF. \quad (3.8)$$

Mittels des Prinzips der minimalen potentiellen Energie ist das Resultat der Ansätze für die Verschiebungen (3.1) und (3.2) ein System dreier linearer Differentialgleichungen in β , ϑ und κ [2]. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen enthält sechs Integrationskonstanten, die als Komponenten eines Spaltenvektors C aufgefasst werden können. Mit den Matrizen $W(x)$ und $F(x)$ von der Ordnung (3×6) kann die allgemeine Lösung folgenderweise geschrieben werden:

$$w(x) = \begin{bmatrix} \beta(x) \\ \vartheta(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix} = W(x) C, \quad (3.9)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} B(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = F(x) C. \quad (3.10)$$

Die Koeffizienten von $W(x)$ und $F(x)$ sind von VLASOV in [1] (S. 240 und 241) gegeben worden. Es sind lineare Kombinationen der folgenden Funktionen der axialen Koordinate:

1, x , $\cosh(\alpha x) \sin(\gamma x)$, $\cosh(\alpha x) \cos(\gamma x)$, $\sinh(\alpha x) \cos(\gamma x)$, $\sinh(\alpha x) \sin(\gamma x)$.

Die Konstanten α und γ sind völlig bedingt durch die Abmessungen des Querschnittes und die Querdehnungszahl ν . Es gilt [2, 9]:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 (1 + \epsilon), \quad (3.11)$$

$$\gamma^2 = \alpha_0^2 (1 - \epsilon) \quad (3.12)$$

mit
$$\alpha_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2} \frac{t_1^3 t_2^3}{b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2) (b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}}, \quad (3.13)$$

$$\epsilon = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \frac{t_1 t_2 (b_1 t_1 + b_2 t_2) (b_1 t_2 + b_2 t_1)^2}{b_1^2 b_2^2 (b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}}. \quad (3.14)$$

Weil B und Q Gleichgewichtssysteme sind, wird in «einiger Entfernung» von der Stelle wo B und Q eingeleitet werden, der Einfluss dieser Belastung vernachlässigbar sein. Wir können eine Länge l_0 mit der Eigenschaft definieren, dass in einer Entfernung l_0 vom belasteten Querschnitt keine merkliche Wirkung von B und Q resultiert. Dies bedeutet, dass für einen Kastenträger

mit Länge l grösser als l_0 die Spannungen und Verformungen am Ende $x=0$ von den mit Verwölbung (B, β) und Querschnittsverformung (Q, κ) zusammenhängenden Randbedingungen am Ende $x=l$ nicht merklich beeinflusst werden. Derartige Kastenträger werden wir «unendlich lang» nennen. Nach [11] können wir ansetzen:

$$l_0 = \frac{\pi}{\alpha_0}. \quad (3.15)$$

Die axialen Membranspannungen sind dem axialen Bimoment $B(x)$ und der Funktion $\varphi(s)$ proportional. Die Extremwerte treten mithin in den Eckpunkten des Trägerquerschnittes auf. Die Schubspannungen können als die Summe der mit $M(x)$ und $h(s)$ und mit $Q(x)$ und $m(s)$ proportionalen Beiträge betrachtet werden. Die Querschnittsverformung verursacht in Längsschnitten ausserdem biegende Momente, deren Grösse mit $\kappa(x)$ proportional ist. Die Extremwerte dieser Momente treten in den Eckpunkten auf.

4. Der Einfluss mehrerer, in gleichem Abstand gestellter Querschotte

4.1. Einleitung

Zur Bestimmung des Einflusses von Querschotten betrachten wir einen Kastenträger mit in gleichem Abstand gestellten Querschotten (Fig. 4.1). Der Träger ist am Ende $x=0$ eingespannt und am Ende $x=l$ belastet durch ein Torsionsmoment \bar{M}_x , das durch ein Endschott eingeleitet wird. Jedes Querschott ist starr in der Ebene der Schotte und völlig flexibel senkrecht zur Ebene.

Wir werden für zwei Träger, deren Querschnitt in Fig. 4.5 gezeichnet ist und deren Länge gleich l_0 bzw. $0,4l_0$ ist, die axiale Membranspannung σ_a infolge des axialen Bimomentes B , die Schubspannung τ_e infolge des transversalen Bimomentes Q und die Biegespannung σ_b infolge der Querschnitts-

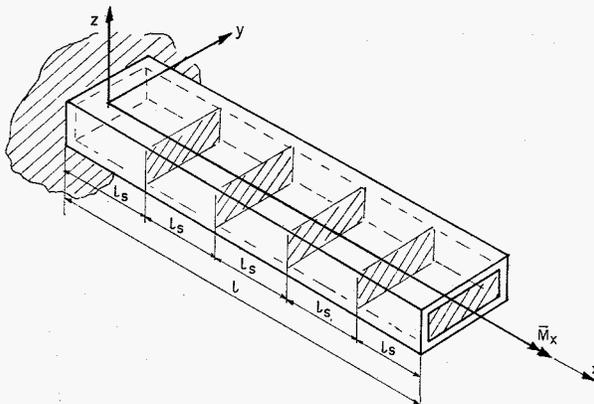


Fig. 4.1. Kastenträger mit 5 Querschotten (einschliesslich Endschotte).

verformung in Abhängigkeit von x berechnen. Interessant ist auch der Abstand, über den die Wirkung der Wölbbehinderung bei $x=0$ wahrnehmbar ist.

Wird das Torsionsmoment \bar{M}_x mittels eines Endschnitts eingeleitet und bestehen keine anderen Querschotten, so ist die Vergleichsspannung in der Einspannung maximal.

Ebenso ist der Spannungszustand in der Einspannung am gefährlichsten, wenn die Querschnittstreue mittels genügend vieler Querschotte garantiert ist. Es ist zu erwarten, dass auch für das in Fig. 4.1 gegebene Problem der Querschnitt $x=0$ für die Stärke des Trägers massgebend sein wird. Die Spannungen in diesem Querschnitt sind durch das axiale Bimoment $B_0 = B(x=0)$, das transversale Bimoment $Q_0 = Q(x=0)$ und das Torsionsmoment $M_0 = \bar{M}_x$ völlig bestimmt. Wir werden den Einfluss der Anzahl der Querschotte auf B_0 und Q_0 untersuchen.

Selbstverständlich werden zur Lösung des Problems wie in Fig. 4.1 elektronische Rechenmaschinen eingeschaltet. Es liegt nahe, Übertragungsmatrizen zu gebrauchen, mit denen die interessanten Verschiebungs- und Schnittgrössen in einem bestimmten Querschnitt in den nämlichen Grössen in einem anderen Querschnitt ausgedrückt werden. Auf diese Weise wäre es möglich β , ϑ , B , M und Q für $x=0$ auszudrücken in β , ϑ , B , M und Q für $x=l$. Indessen veranlasst diese Methodik eine Reihe numerischer und andersartiger Komplikationen, die nicht einfach zu lösen sind.

Ein besseres Verfahren erhält man, wenn man von der Methode der finiten Elemente ausgeht. Dabei werden die «Verschiebungen» β , ϑ und κ in den Knotenpunkten des Trägers als die Unbekannten des Problems betrachtet. In Fig. 4.2 ist ein Kastenträgerelement mit Knotenpunkten (\equiv Querschnitten) 1 und 2 gezeichnet.

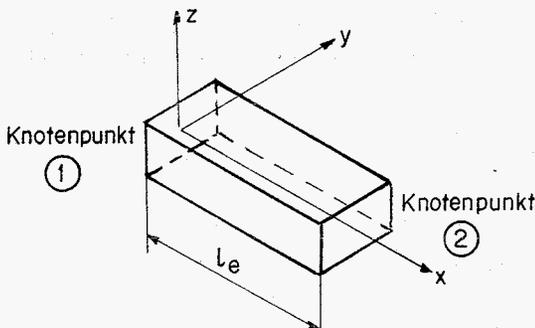


Fig. 4.2. Trägerelement.

Knotenpunkte werden immer lokalisiert in Querschnitten, in denen «Kräfte» B , M , Q oder «Verschiebungen» β , ϑ , κ einen vorgeschriebenen Wert haben. Infolgedessen werden wir bei jedem Querschott einen Knotenpunkt festlegen.

Mittels (3.9) und (3.10) kann die Steifigkeitsmatrix Q_e dieses Elementes berechnet werden, denn diese Matrix gibt den Zusammenhang zwischen den

Verschiebungen β , ϑ und κ und den Schnittgrößen B , M und Q in den Knotenpunkten des Elementes. Es gilt:

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix} C, \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} -f(0) \\ f(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(l) \end{bmatrix} C. \quad (4.2)$$

Mit der Lösung von C aus (4.1):

$$C = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(l) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

kann für (4.2) geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} -f(0) \\ f(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(l) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Folglich gilt für die Steifigkeitsmatrix Q_e :

$$Q_e = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.5)$$

Mit der in der Methode der finiten Elemente üblichen Arbeitsweise lässt sich die totale Steifigkeitsmatrix für die gesamte Konstruktion zusammensetzen, wobei alle geometrischen Bedingungen erfüllt werden. Im vorliegenden Problem bedeutet dies beispielsweise, dass in jedem Querschnitt mit Querschott κ den Wert null haben soll.

Auch diese Arbeitsweise bringt numerische Komplikationen mit sich, da in der totalen Steifigkeitsmatrix Koeffizienten enthalten sind, die in ihrer Grösse ganz verschieden sind. Die Ursache ist in der Differenz zwischen der Torsionssteifigkeit und den interessanten Steifigkeiten bei Verwölbung und Querschnittsverformung zu suchen. Diese Schwierigkeiten können jedoch einfach und zweckmässig gelöst werden.

Das dargestellte Verfahren wurde für den elektronischen Rechenautomaten EL-X 8 der Technischen Hochschule Eindhoven programmiert [9, 10].

4.2. Kastenträger mit Länge l grösser l_0

Ist die Länge des Trägers in Fig. 4.1 grösser als l_0 (siehe Gleichung (2.15)), so ist der Einfluss der Wölbbehinderung am Rande $x=0$ vernachlässigbar für die Verschiebungen und Spannungen am Rand $x=l$. Das axiale und transversale Bimoment in der Einspannung (B_0 , bzw. Q_0) ist dann unabhängig von der Länge des Trägers. Sind in einem Träger mit $l \geq l_0$ in gleicher Distanz l_s Querschotte befestigt, so kann die Wirkung der Schottendistanz leicht berechnet werden.

Für Träger ohne Querschott – und daher auch dann wenn der Schottabstand $l_s \geq l_0$ ist – gilt für das Problem von Fig. 4.1 [11]:

$$B_0(\lambda) = -4\mu \frac{\epsilon}{\alpha_0} M \quad \text{für } \lambda \geq 1, \quad (4.6)$$

$$Q_0(\lambda) = 4\mu \epsilon M \quad \text{für } \lambda \geq 1 \quad (4.7)$$

mit:
$$\lambda = \frac{l_s}{l_0}, \quad (4.8)$$

$$\mu = \frac{-b_1 t_2 + b_2 t_1}{b_1 t_2 + b_2 t_1}. \quad (4.9)$$

Ist die Querschnittstreue durch genügend viele Querschotte gewährleistet ($\lambda \rightarrow 0$), so gilt [11]:

$$B_0(\lambda) = -\mu \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\alpha_0} M \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

$$Q_0(\lambda) = \mu M \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Für Werte von λ zwischen 0 und 1 kann für $B_0(\lambda)$ und $Q_0(\lambda)$ berechnet werden:

$$B_0(\lambda) = B_0(1) + [B_0(0) - B_0(1)] f_1(\lambda, \epsilon), \quad (4.12)$$

$$Q_0(\lambda) = Q_0(1) + [Q_0(0) - Q_0(1)] f_2(\lambda, \epsilon). \quad (4.13)$$

In Fig. 4.3 und 4.4 sind f_1 und f_2 gegeben als Funktionen von λ mit ϵ als Parameter. Wir bemerken, dass f_1 und f_2 nur von λ und ϵ abhängig sind.

Man erkennt, dass die Einspanngrößen durch den Einbau von Querschotten, verglichen mit der Situation ohne Schotten, beträchtlich zunehmen können. Dies bedeutet folglich auch, dass die Spannungssituation im Träger durch Querschotte gefährlicher werden kann.

Die Torsionssteifigkeit des Trägers nimmt beim Aufstellen von Querschotten nur sehr wenig zu.

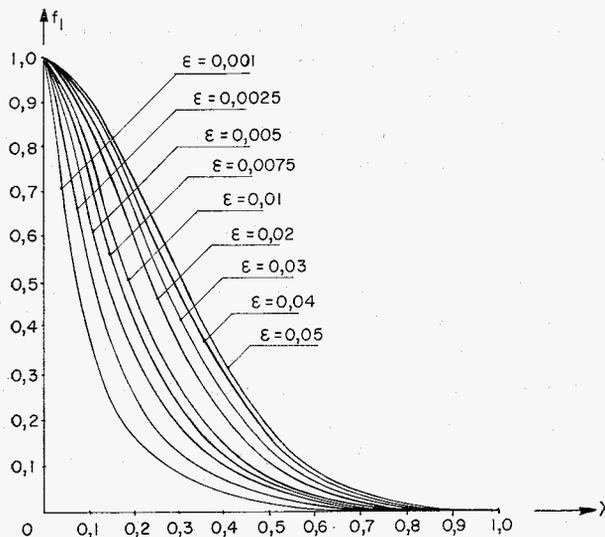


Fig. 4.3. $f_1 = f_1(\lambda, \epsilon)$.

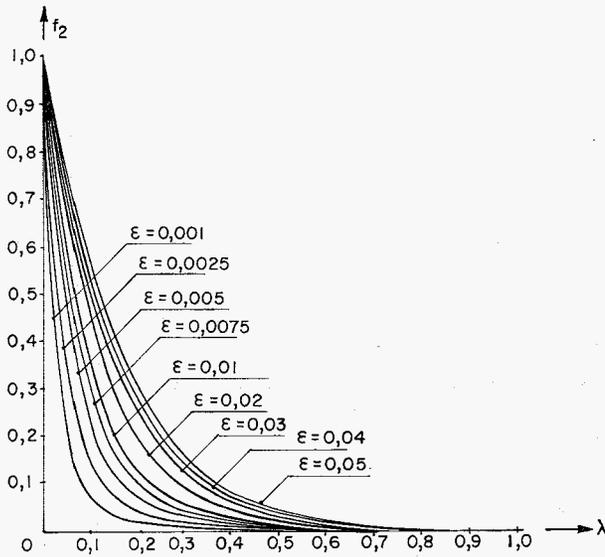


Fig. 4.4. $f_2 = f_2(\lambda, \epsilon)$.

In Fig. 4.6, 4.7 und 4.8 sind für einen Träger mit einem Querschnitt nach Fig. 4.5 die interessantesten Spannungen gegeben als Funktion der axialen Koordinate bei einer Belastung von einem Torsionsmoment $\bar{M}_x = 2000 \text{ Nm}$. In diesen graphischen Darstellungen tritt der Schottabstand als Parameter

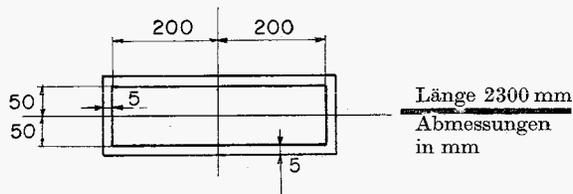


Fig. 4.5. Querschnitt des Trägers.

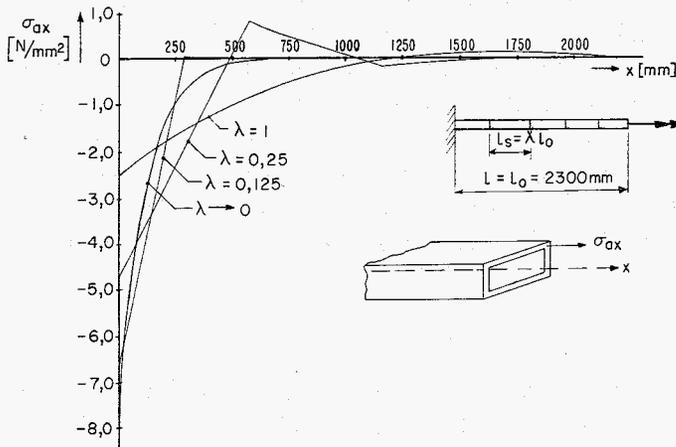


Fig. 4.6. $\sigma_{ax} = \sigma_{ax}(x, \lambda)$.

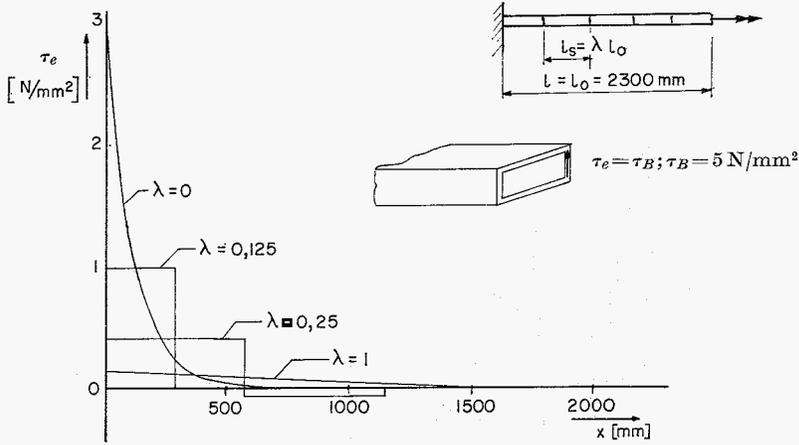


Fig. 4.7. $\tau_e = \tau_e(x, \lambda)$.

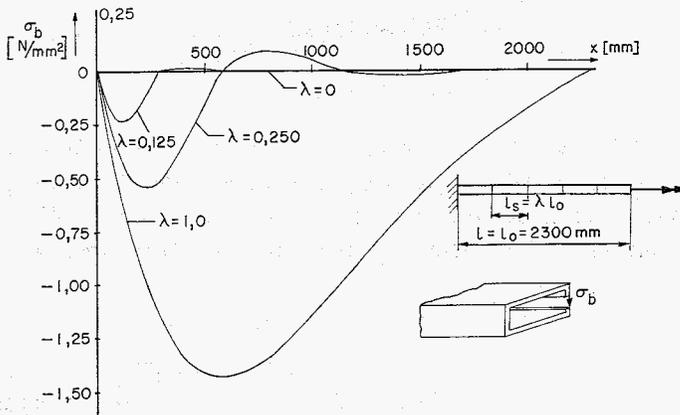


Fig. 4.8. $\sigma_b = \sigma_b(x, \lambda)$.

auf. Die Bredtsche Schubspannung beträgt 5 N/mm^2 . Für diesen Träger gilt $l_0 = 2300 \text{ mm}$ und $\epsilon = 0,012$. Zu bemerken ist, dass $\lambda = 0$ unendlich vielen Schotten entspricht. Für $\lambda = 0,125$ ist der Schottabstand $l_s = 287 \text{ mm}$.

Aus diesen Darstellungen geht hervor, dass sich mit zunehmender Schottanzahl der Abstand, worüber die Abweichung von der Bredtschen Theorie infolge Wölbbehinderung für $x = 0$ wahrnehmbar ist, deutlich vermindert. Dies bedeutet, dass die in Fig. 4.6, 4.7 und 4.8 für $l_s = 575 \text{ mm}$ ($\lambda = 0,25$) gezeichneten Kurven auch für Träger mit grösserer Länge, z. B. 1000 mm verwendbar sind.

4.3. Kastenträger mit Länge l kleiner l_0

Auch für kurze Träger ($l < l_0$) lässt sich die Wirkung von Querschotten analysieren. Obwohl es keineswegs notwendig ist, werden wir uns auch jetzt auf die Situation mit in gleichem Abstand gestellten Schotten beschränken.

Die Parameter, die das Verhalten des Trägers bestimmen, sind l/l_0 , l_s/l und ϵ . Mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit der Resultate werden wir uns auf einen Wert von ϵ , nämlich $\epsilon = 0,012$ beschränken. Dieser Wert stimmt z. B. mit dem Querschnitt in Fig. 4.5 überein.

In Fig. 4.9, ... 4.13 sind einige interessante Resultate für den Träger in Fig. 4.5 dargestellt, belastet mit einem Torsionsmoment $\bar{M}_x = 2000 \text{ Nm}$. Die in diesen graphischen Darstellungen gegebenen Daten können auf Träger mit anderen Abmessungen einfach transformiert werden, da nur die genannten Parameter massgebend sind. Die Fig. 4.9 und 4.10 zeigen den Einfluss von Schottabstand l_s und Trägerlänge l (bezogen auf l_0) auf die Extremwerte der axialen Normalspannung und der zusätzlichen Schubspannung im Querschnitt $x=0$, wo die Verwölbung behindert ist. Sowohl die Anwesenheit von Quer-

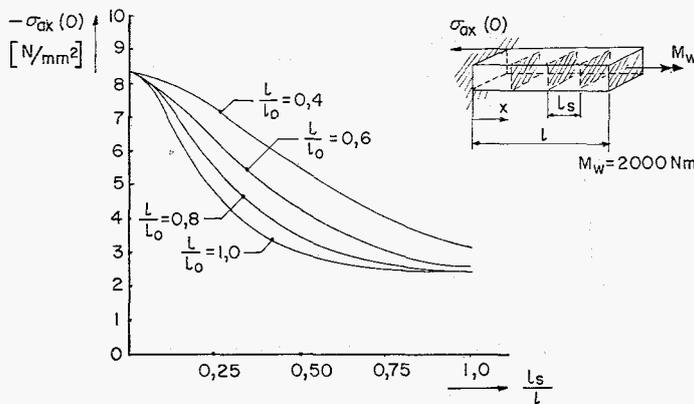


Fig. 4.9. $\sigma_{ax} = \sigma_{ax} \left(\frac{l_s}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$.

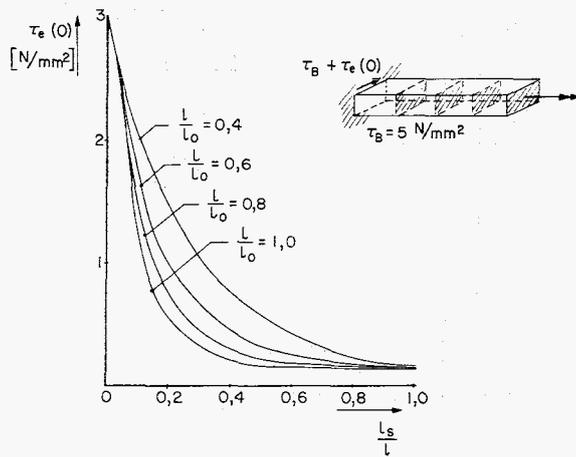


Fig. 4.10. $\tau_e = \tau_e \left(\frac{l_s}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$.

schotten wie auch die Kürzung des Trägers ergeben eine Steigerung der untersuchten Spannungen. In Fig. 4.11, ... 4.13 ist für einen Träger mit $l/l_0=0,4$ der Verlauf der interessanten Spannungen in axialer Richtung gegeben mit dem Schottabstand als Parameter.

Hierdurch lässt sich feststellen, dass die Membranspannungen infolge einer

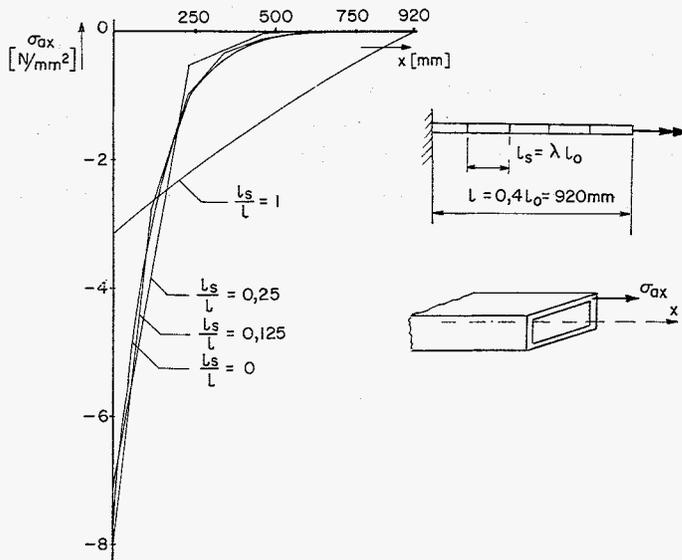


Fig. 4.11. $\sigma_{ax} = \sigma_{ax}(x, \frac{l_s}{l})$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$.

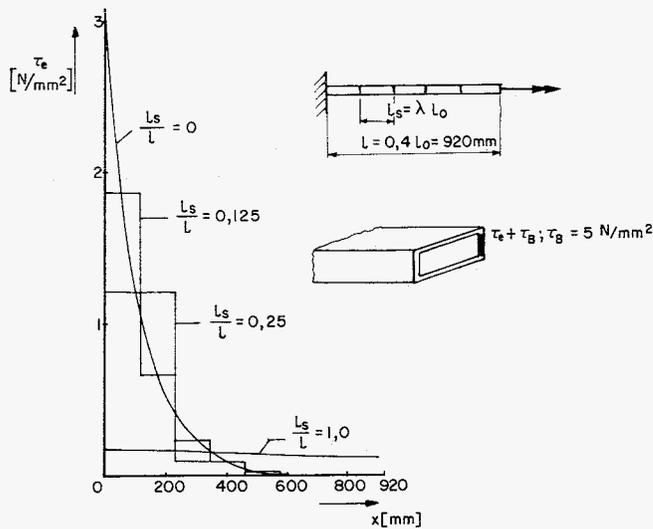


Fig. 4.12. $\tau_e = \tau_e(x, \frac{l_s}{l})$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$.

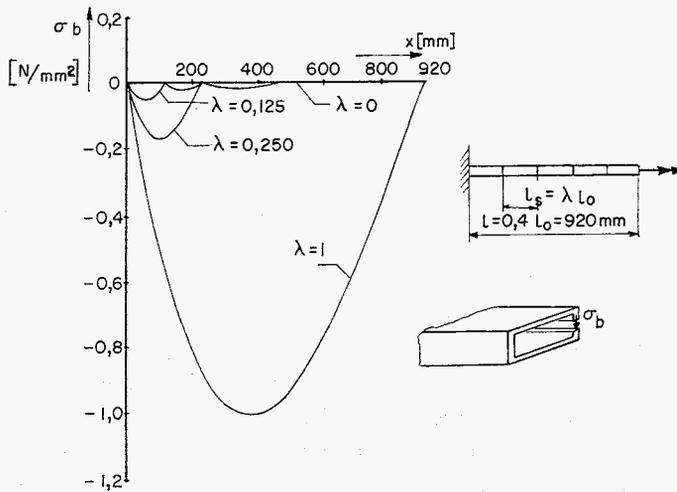


Fig. 4.13. $\sigma_b = \sigma_b \left(x, \frac{l_s}{l} \right)$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$.

wachsenden Anzahl von Schotten in der Einspannung erheblich zunehmen können, während die maximale Biegespannungen nachlassen.

Zusammenfassend kann man schliessen, dass nicht nur für Träger mit $l > l_0$, sondern auch für kurze Träger ($l < l_0$) der Spannungszustand durch Querschotte ungünstig beeinflusst wird.

5. Wirkung einer nicht mittels Querschott eingeleiteten Belastung

5.1. Einleitung

In den vorigen Kapiteln wurde angenommen, dass die Belastung, insbesondere das Torsionsmoment, mittels eines Querschotts eingeleitet wird. In der Praxis wird diese Situation nicht immer auftreten, da z. B. die Einleitungsstelle der Belastung variabel ist. Deshalb werden wir den Spannungszustand analysieren, der in einem Träger mit Querschotten auftritt, wenn dieser zwischen den Schotten belastet wird. Dabei ist eine Belastung mit einem transversalen Bimoment insbesondere für die Praxis von Bedeutung.

Wenn der Abstand zwischen der Einleitungsstelle der Belastung und dem nächsten Querschott grösser ist als l_0 , kann die Wirkung der Schotte auf den Spannungsverlauf in der Umgebung der Einleitungsstelle vernachlässigt werden.

In Fig. 5.1 und 5.2 sind einige Belastungssituationen weiter ausgearbeitet. Massgebend für die Membranspannungen sind die Schnittgrössen B und Q , weil die Biegespannungen vom Produkt $c\kappa$ eindeutig bestimmt werden. Die

maximale Biegespannung ist z. B. gleich $\frac{3}{4} \frac{|c\kappa|}{t^2}$. Für die Bedeutung von c , κ und t siehe [2] und [11].

Die Resultate in Fig. 5.1 und 5.2 gelten für alle Träger mit $\epsilon \ll 1$ (siehe [11]).

Anhand von Fig. 5.1 und 5.2 kann man feststellen, dass das Behindern oder Nichtbehindern der Verwölbung bei einer Belastung mit einem transversalen Bimoment von grösster Bedeutung ist. Behindert man die Verwölbung, so nimmt die maximale axiale Membranspannung mit einem Faktor 1,56 zu, während die maximale Biegespannung mit einem Faktor 2 abnimmt.

Wenn die Belastung in einer Entfernung weniger als l_0 vom nächsten Querschott angreift, so wird das Verhalten des Trägers in der Gegend der Einleitungsstelle durch die Stelle und die Anzahl der übrigen Querschotte und deshalb durch den ganzen Träger mitbestimmt.

Den wirklichen Verlauf der Spannungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschotten eines Trägers (z. B. der Teil zwischen A und B in Fig. 5.3a) lässt sich dadurch begrenzen, indem man jenen Teil (einschliesslich der zwei

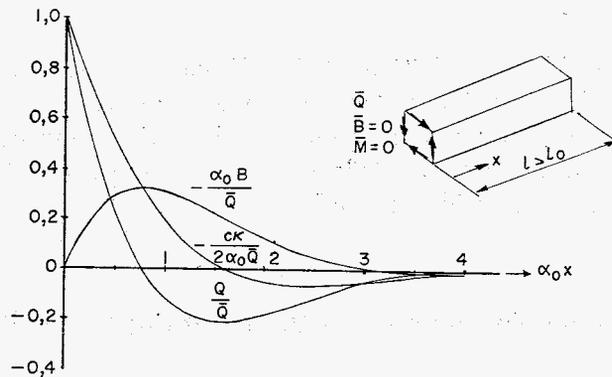


Fig. 5.1. Dimensionslose Schnittgrössen in Abhängigkeit von $\alpha_0 x$.

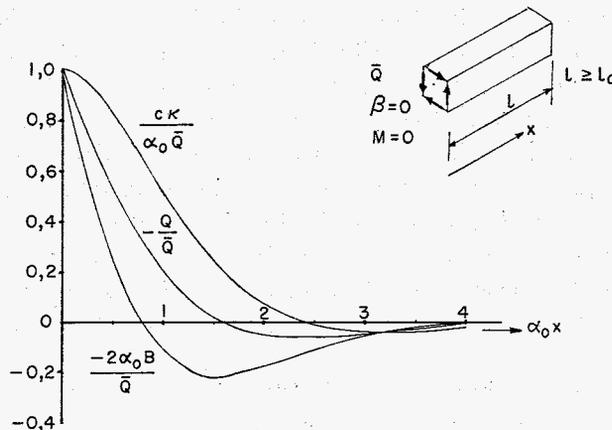


Fig. 5.2. Dimensionslose Schnittgrössen in Abhängigkeit von $\alpha_0 x$.

Querschotte) isoliert und zwei Probleme löst, nämlich die Probleme mit und ohne Wölbbehinderung an der Stelle der Querschotte (Fig. 5.3b bzw. 5.3c) und mit der gegebenen Belastung \bar{Q} . Wir werden uns im folgenden auf diese Probleme beschränken. Dabei wird in 5.2 der Einfluss der Angriffsstelle $x=q$ von \bar{Q} analysiert, falls die Länge des Teils (Querschottenabstand) $2l_0$ ist (siehe Fig. 5.4), und nachher in 5.3 den Einfluss der Länge $2l$ des Trägerteils betrachten, falls die Belastung \bar{Q} in der Mitte angreift (siehe Fig. 5.7).

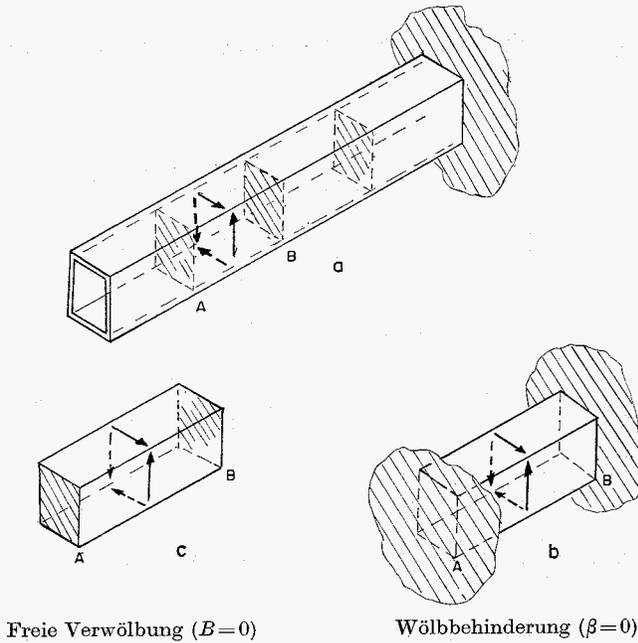


Fig. 5.3. Charakteristische Probleme, falls der Querschottenabstand kleiner als l_0 ist.

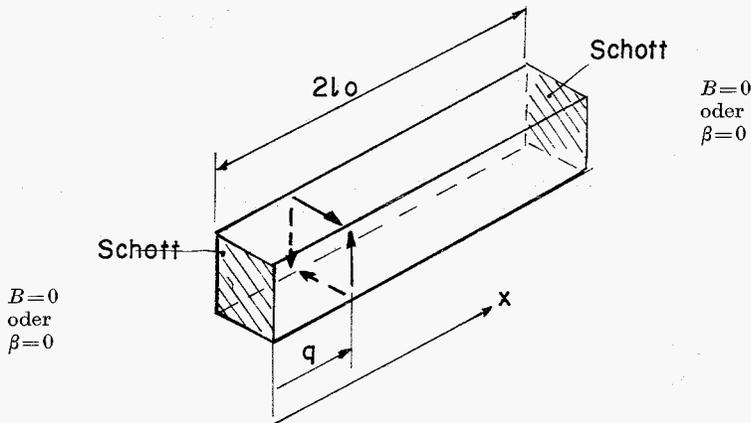


Fig. 5.4. Belastung mit einem Bimoment \bar{Q} mit beliebiger Angriffsstelle $x=q$, falls der Querschottenabstand grösser ist als $2l_0$.

5.2. Querschottenabstand $2l_0$ und veränderlicher Angriffspunkt der Belastung \bar{Q}

Wir werden nun die Wirkung von q/l_0 auf den Spannungszustand mit verschiedenen Randbedingungen genauer betrachten.

Da der Schottabstand $2l_0$ ist, werden die Bedingungen am Rand $x=2l_0$ (bzw. $x=0$) keine Rolle spielen, wenn $q \leq l_0$ (bzw. $q \geq l_0$) ist.

In Fig. 5.5 und 5.6 sind die Grössen $\frac{\alpha_0 B}{Q}$ und $\frac{c\kappa}{\alpha_0 Q}$ gegeben für $q/l_0 = 0,25$, 0,50 und 1,00.

Aus diesen Figuren folgt, dass der Spannungszustand am gefährlichsten ist für $q/l_0 = 1$.

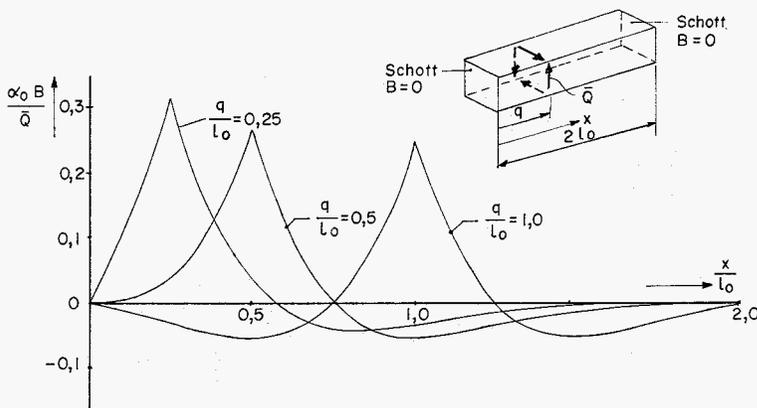


Fig. 5.5a. $\frac{\alpha_0 B}{Q} = \frac{\alpha_0 B}{Q} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

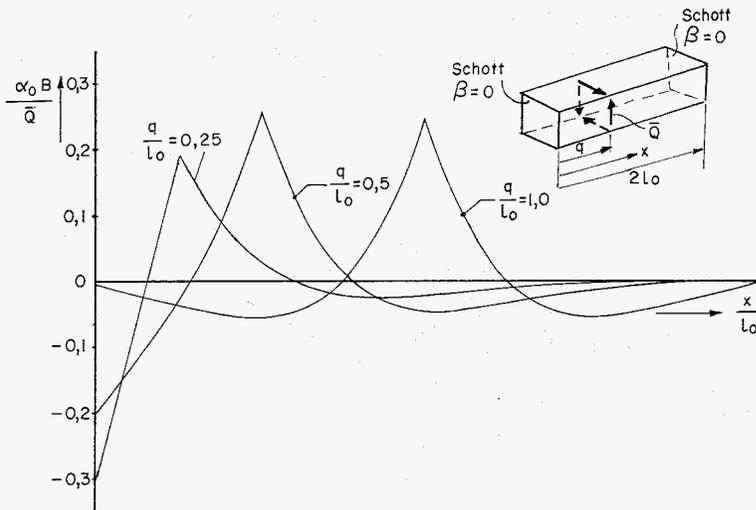


Fig. 5.5b. $\frac{\alpha_0 B}{Q} = \frac{\alpha_0 B}{Q} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

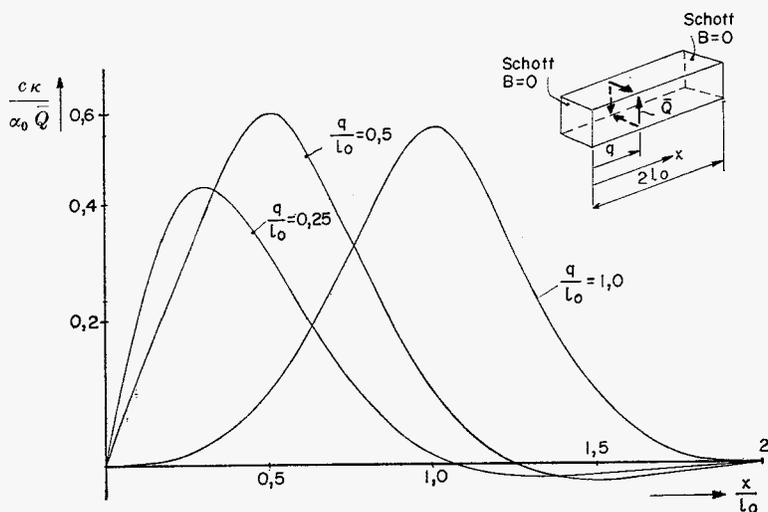


Fig. 5.6a. $\frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

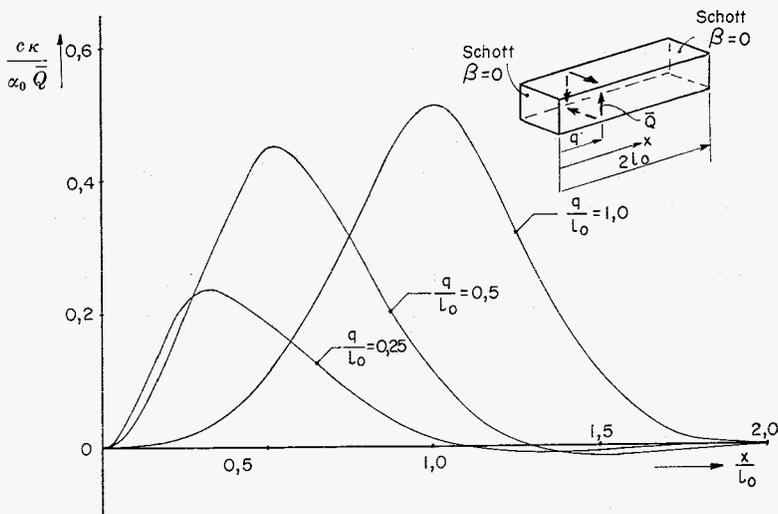


Fig. 5.6b. $\frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

5.3. Querschottabstand kleiner als $2l_0$ und Belastung in der Mitte

Der Einfluss des Abstandes zwischen den Schotten, $2l$, bei einem in der Mitte mit einem transversalen Bimoment \bar{Q} belasteten Trägerteil, wie in Fig. 5.7, kommt in den Fig. 5.8a, 5.8b, 5.9a und 5.9b zum Ausdruck. Die auftretenden Biege- und Membranspannungen sind maximal im Querschnitt, wo \bar{Q} eingeleitet wird ($x/l=1,0$). Werden die Querschotte näher zueinander

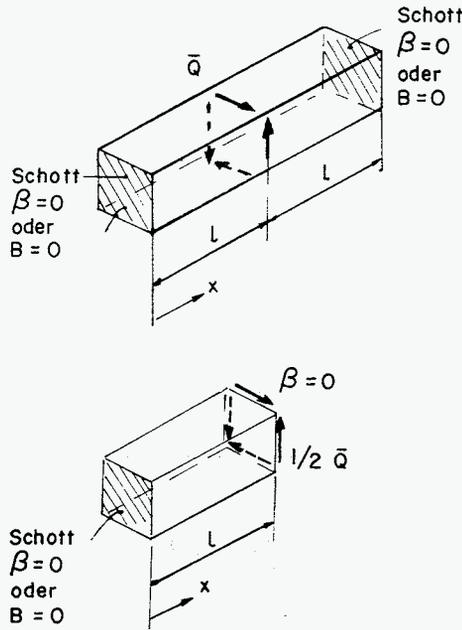


Fig. 5.7. Belastung mit einem, in der Mitte angreifenden, Bimoment \bar{Q} , falls der Querschottabstand kleiner ist als $2l_0$.

gestellt, so nehmen die Biegespannungen ab, weil sich der Querschnitt weniger verformt. Die axialen Normalspannungen für $x/l = 1,0$ erreichen einen Extremwert für einen bestimmten Wert von l/l_0 , wie aus Fig. 5.8a und 5.9a hervorgeht.

Ist die Verwölbung in den Endquerschnitten behindert, so sind die auftretenden Biegespannungen im allgemeinen kleiner als mit freier Verwölbung.

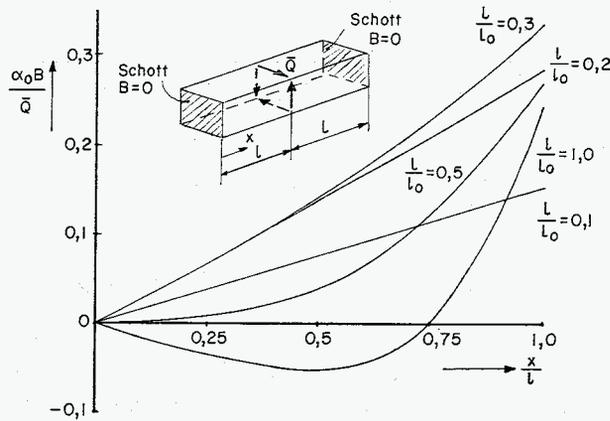


Fig. 5.8a. $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

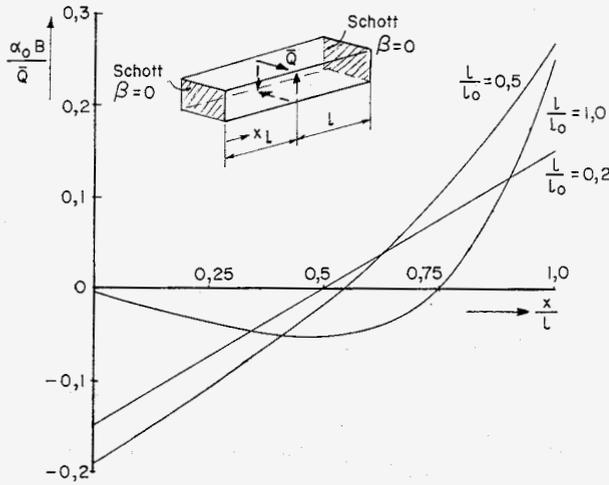


Fig. 5.8b. $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

Aus Fig. 5.8b und 5.9b ergibt sich der Einfluss des Behinderens oder Nichtbehinderens der Verwölbung auf die axialen Normalspannungen.

Die Deutung der graphischen Darstellungen kann – für Träger mit konstanter Wandstärke – vereinfacht werden mittels der in [2] und [11] gegebenen Gleichungen für die Extremwerte der axialen Normalspannung (σ_{ax}) und der Biegespannung (σ_{sb}) in einem Querschnitt.

$$\sigma_{ax} = -\frac{1}{2} \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \frac{\alpha_0 \bar{Q}}{t^2}, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{sb} = \frac{3}{4} \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \frac{\alpha_0 \bar{Q}}{t^2}. \quad (5.2)$$

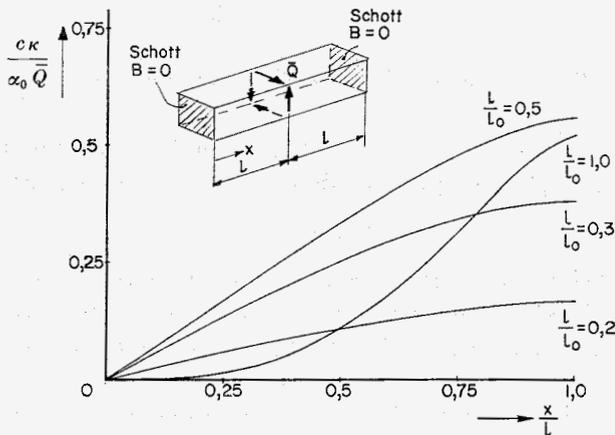


Fig. 5.9a. $\frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

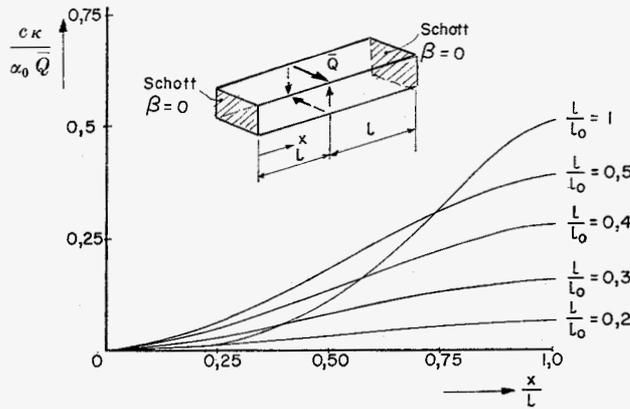


Fig. 5.9b. $\frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

6. Die nicht-idealen Querschotte

Im vorhergehenden wurde stets vorausgesetzt, dass jedes Querschott in der Ebene starr und senkrecht zur Ebene völlig flexibel sei. Wir werden untersuchen unter welchen Umständen diese Voraussetzung anwendbar ist.

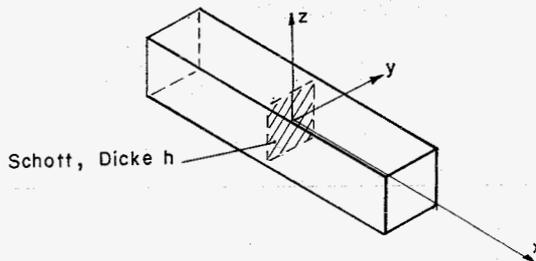


Fig. 6.1. Kastenträger mit nicht-idealem Querschott.

In der Theorie für Kastenträger ohne Querschotte oder mit idealen Querschotten (siehe z. B. [1, 2, 7]) gilt für die axialen Verschiebungen u :

$$u = \beta(x) y z, \tag{6.1}$$

wobei $\beta(x)$ den axialen Verlauf der Verwölbung charakterisiert. Auch wenn es im Träger nicht-ideale Querschotte gibt, kann man voraussetzen, dass Verschiebungen an den Rändern der Schotte ebenfalls durch diese Formel gegeben werden.

Nach der Theorie der Plattenbiegung können derartige Verschiebungen an den Rändern auftreten, wenn die Platte auf die in Fig. 6.2 gezeichnete Weise belastet wird.

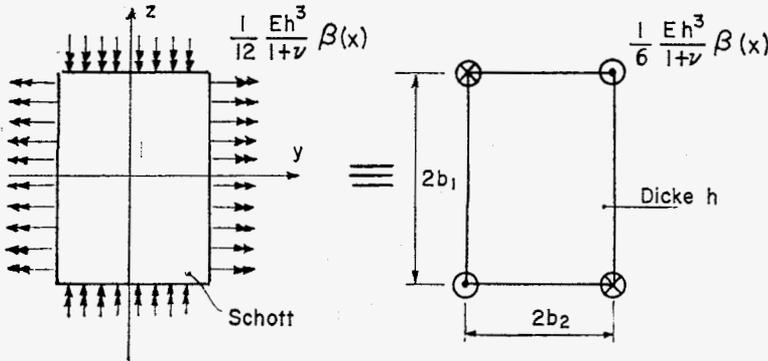


Fig. 6.2. Belastung der Querschotte.

Am Träger wird ein Gleichgewichtssystem angreifen, das wir als axiales Bimoment B_s mit der Grösse (siehe Fig. 6.3)

$$B_s = -\frac{2}{3} \frac{E^* h^3}{1 + \nu^*} b_1 b_2 \beta \quad (6.2)$$

betrachten können, wobei h , b_1 und b_2 in Fig. 6.2 gegeben und E^* und ν^* die Materialeigenschaften der Schotte sind.

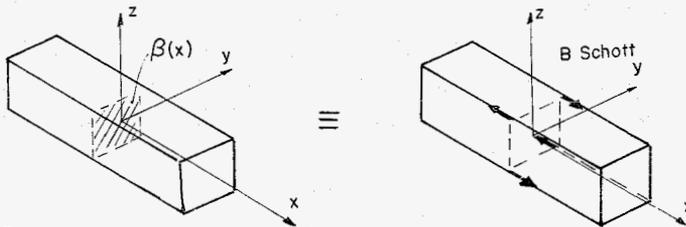


Fig. 6.3. Durch die nicht-ideale Querschotte verursachte zusätzliche Belastung des Trägers.

Von der Bedeutung dieser Belastung lässt sich ein Eindruck gewinnen, wenn man einen Träger mit der Länge grösser als l_0 mit einem axialen Bimoment \bar{B} belastet und die Verwölbung in den beiden Lagen in Fig. 6.4a und 6.4b vergleichen.

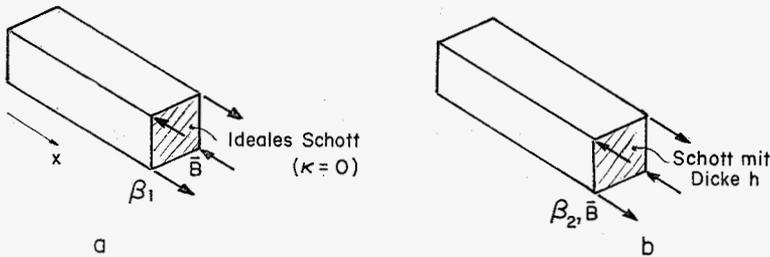


Fig. 6.4. Träger mit einer idealen und nicht-idealen Querschotte (Fig. a, bzw. Fig. b), belastet mit einem Bimoment \bar{B} .

Falls β_1 und β_2 die Verwölbung charakterisieren und das Querschott ideal ist (Fig. 6.4a) bzw. eine bestimmte Steifigkeit senkrecht zur Ebene hat (Fig. 6.4b), so gilt für den Zusammenhang zwischen β_1 , β_2 und \bar{B} :

$$\bar{B} = 2 a_1 \alpha_0 \beta_1, \quad (\text{Fig. 6.4 a}) \quad (6.3)$$

$$\bar{B} = 2 a_1 \alpha_0 \beta_2 (1 + k_\beta) \quad (\text{Fig. 6.4 b}) \quad (6.4)$$

mit:

$$a_1 = \frac{4}{3} E b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2), \quad (6.5)$$

$$k_\beta = \frac{E^* h^3 b_1 b_2}{3 (1 + \nu^*) \alpha_0 a_1}. \quad (6.6)$$

Wenn t_1 und t_2 gleich t sind und sowohl Träger wie Schotte dieselben Materialeigenschaften haben, gilt:

$$k_\beta \approx 0,2 \sqrt{\frac{h^6}{b_1 b_2 (b_1 + b_2) t^3}}. \quad (6.7)$$

Aus (6.7) geht hervor, dass k_β viel kleiner ist als 1, wenn das Querschott als Platte betrachtet werden kann, also $h \ll b_1$ und $h \ll b_2$ und wenn h und t Größen gleicher Ordnung sind.

In ähnlicher Weise kann man analysieren, unter welchen Umständen das Querschott in der Ebene als starr betrachtet werden kann.

Wenn der Querschnitt deformiert, wird die Schotte an den Rändern mit Schubspannungen belastet, die ein Gleichgewichtssystem \bar{Q} bilden. Wir berechnen die Querschnittsverformung κ für die beiden in Fig. 6.5 gezeichneten Situationen. Es gilt:

$$\bar{Q} = -\frac{c \kappa_1}{2 \alpha_0}, \quad (\text{Fig. 6.5 a}) \quad (6.8)$$

$$\bar{Q} = -\frac{c \kappa_2}{2 \alpha_0} (1 + k_\kappa) \quad (\text{Fig. 6.5 b}) \quad (6.9)$$

mit:

$$c = \frac{4 E t_1^3 t_2^3}{(1 - \nu^2) (b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}, \quad (6.10)$$

$$k_\kappa = \frac{8 E^* b_1 b_2 h \alpha_0}{(1 + \nu^*) c}. \quad (6.11)$$

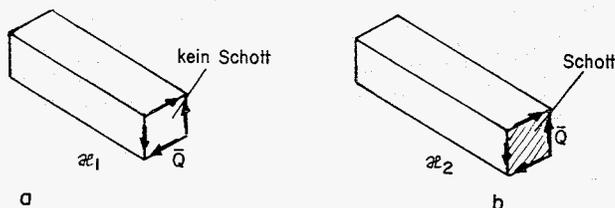


Fig. 6.5. Träger ohne und mit Endschott (Fig. a, bzw. Fig. b), belastet mit einem Bimoment \bar{Q} .

Für einen Kastenträger mit $t_1 = t_2 = t$, mit $E^* = E$ und $\nu^* = \nu$ kann man statt (6.11) schreiben:

$$k_\kappa = 5,47 \frac{h}{t} \sqrt{\frac{b_1 b_2 (b_1 + b_2)}{t^3}}. \quad (6.12)$$

Aus (6.12) und (6.9) kann man schliessen, dass κ_2 hinsichtlich κ_1 vernachlässigt werden kann.

Weil für übliche Abmessungen der Schotte $k_\beta \ll 1$ und $k_\kappa \gg 1$ ist, wird mit einem idealen Querschott die Realität hinreichend gut beschrieben. Übrigens ist es sehr wohl möglich, das wirkliche Verhalten der Schotte in den Rechenprogrammen [9] und [10] zu berücksichtigen.

7. Schlussbemerkungen

Unter der Annahme, dass sich der Trägerquerschnitt in einer bestimmten Weise deformieren kann, ist es möglich, den Einfluss von Querschotten auf den Spannungsverlauf zu analysieren.

Wenn die Belastung mittels eines Querschotts eingeleitet wird, so wird die Stärke des Trägers durch zusätzliche Querschotte ungünstig beeinflusst (siehe 4.).

Wird die Belastung, und insbesondere ein transversales Bimoment, zwischen zwei Querschotten eingeleitet, so können die in 5. dargestellten Figuren bei der Berechnung des optimalen Abstandes zwischen den Querschotten zu Hilfe gezogen werden.

Im allgemeinen kann man den Schluss ziehen, dass es wenig zweckvoll ist, den Abstand zwischen den Schotten kleiner als $0,5l_0$ zu wählen.

Literatur

- [1] VLASOV, V. S.: Thin-walled elastic beams, 2nd. ed., Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961).
- [2] JANSSEN, J. D.: Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige kokers, Dissertation, Technische Hogeschool Eindhoven (1967).
- [3] HEILIG, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau 1961, Heft 11, S. 333/349.
- [4] FLÜGGE, W. und MARGUERRE, K.: Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben. Ingenieur-Archiv, XVIII (1950), S. 23/38.
- [5] LACHER, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast. Der Stahlbau 1962, Heft 10, S. 299/308, und Heft 11, S. 325/335.
- [6] RESINGEE, F.: Der dünnwandige Kastenträger. Forschungsheft aus dem Gebiet des Stahlbaus Nr. 13, Stahlbau-Verlags-G.m.b.H., Köln 1959.

- [7] DABROWSKI, R.: Einfluss der Querschnittsverformung auf die Normalspannungen in Biegestäben. Schlussbericht Stahlbautagung TH-Dresden 1959, VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin 1961.
- [8] CSONKA, P.: Torsion of a square-shaped tube clasped in at both ends. Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Acta Technica XXIV (1959), H. 3-4, S. 379/390.
- [9] VELDPAUS, F. E.: Berekening van rechthoekige kokers met starre profiellijn, Rechenprogramm, Technische Hogeschool Eindhoven, nr. 05063120 (1969).
- [10] VELDPAUS, F. E.: Berekening van rechthoekige kokers met deformeerbare profiellijn, waarin ideale dwarschotten zijn aangebracht, Rechenprogramm Technische Hogeschool Eindhoven, nr. 05063346 (1969).
- [11] JANSSEN, J. D. und VELDPAUS, F. E.: Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt. Abhandlungen IVBH, Bd. 32-II, 1972, S. 85-106.

Zusammenfassung

Der Einfluss von Querschotten auf den Spannungs- und Verformungszustand dünnwandiger Kastenträger mit Rechteckquerschnitt wird untersucht. Diese Analyse stützt sich auf die Torsionstheorie nach Vlasov. Dabei wird der Frage, unter welchen Umständen die Verformung des Trägerquerschnitts vernachlässigbar klein ist, besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Hieraus ergeben sich Richtlinien für die Anwendung von Querschotten. Namentlich zeigt sich, dass der Spannungszustand ungünstiger werden kann, wenn mehrere Querschotten angebracht werden.

Summary

The influence of cross-ties on the behaviour of thin walled box girders of rectangular section is examined. This analysis is founded on the torsion theory of Vlasov. Special attention is paid to the circumstances under which the deformation of the girder section can be neglected. Therefrom result directions for the application of cross-ties, in particular that the tension condition can become unfavourable if several cross-ties are employed.

Résumé

On examine l'influence de parois transversales sur l'état de tension et de déformation de poutres en caisson minces à section rectangulaire. Cette analyse est basée sur la théorie de torsion selon Vlasov. Une attention particulière est attribuée aux circonstances dans lesquelles la déformation de la section de la poutre est négligeable. Il en résultent des lignes directives pour l'emploi de parois transversales, en particulier l'état de tension peut s'avérer défavorable lorsque plusieurs parois transversales sont appliquées.

WE-10-39

DER EINFLUSS VON QUERSCHOTTEN AUF DAS
VERHALTEN VON KASTENTRAEGERN MIT
RECHTECKQUERSCHNITT.

J.D. Janssen und
F.E. Veldpaus.

Literatur.

- [1] VLASOV, V.S.: Thin-walled elastic beams, 2nd. ed., Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961).
- [2] JANSSEN, J.D.: Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige kokers, Dissertation, Technische Hogeschool Eindhoven (1967).
- [3] HEILIG, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, Der Stahlbau 1961, Heft 11, S.333/49.
- [4] FLÜGGE, W. und MARGUERRE, K.: Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben, Ingenieur Archiv, XVIII (1950)S. 23/38.
- [5] LACHER, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast.
Der Stahlbau 1962, Heft 10, S. 299/308 und Heft 11, S. 325/335.
- [6] RESINGER, F.: Der dünnwandige Kastenträger.
Forschungsheft aus dem Gebiet des Stahlbaus Nr.13, Stahlbau-Verlags G.m.b.H., Köln 1959.
- [7] DABROWSKI, R.: Einfluss der Querschnittsverformung auf die Normalspannungen in Biegestäben. Schlussbericht Stahlbautagung TH-Dresden 1959, VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin 1961.
- [8] CSONKA, P.: Torsion of a square-shaped tube clasped in at both ends.
Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Acta Technika XXIV(1959)H.3-4, S. 379/90.

- [9] VELDPAUS, F.E.: Berekening van rechthoekige kokers met starre profiellijn, Rechenprogramm, Technische Hogeschool Eindhoven, nr. 0506320(1969).
- [10] VELDPAUS, F.E.: Berekening van rechthoekige kokers met deformeerbare profiellijn, waarin ideale dwarsschotten zijn aangebracht, Technische Hogeschool Eindhoven, nr. 05063346(1969).
- [11] JANSSEN, J.D. und VELDPAUS, F.E.: Ueber die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt, ... *

* Veröffentlichung, die zusammen mit dieser Arbeit ist angeboten worden.

1. Einleitung.

Für die Berechnung des in Abb. 1.1 gezeigten Kastenträgers mit Rechteckquerschnitt, am Ende $x = 0$ eingespannt und am Ende $x = l$ belastet durch Normalspannungen $\bar{\sigma}_x(s)$ und Schubspannungen $\bar{\tau}(s)$, ist es im allgemeinen nicht gestattet nur die im Abb. 1.2 gezeigten Spannungsergebnisse zu betrachten.

Abb. 1.1 Abb. 1.2

Das bedeutet dass von einem Spannungssystem wie im Abb. 1.1, ausser den resultierenden Kräften und Momenten auch bestimmte Gleichgewichtssysteme wichtig sind. Theoretisch und experimentell ist nachweislich [2] dass Berücksichtigung der sogenannten axialen- und transversalen Bimomente, \bar{B} bzw. \bar{Q} , eine hinreichend genaue Beschreibung der Realität ergibt. Mit diesen Spannungsgrössen \bar{B} und \bar{Q} hängen die Verwölbung bzw. die Querschnittsverformung als Verschiebungsgrössen zusammen [1].

Insbesondere der Einfluss der Querschnittsverformung wird manchmal nicht berücksichtigt [3,4]. Dieses Verfahren ist nur dann erlaubt wenn die Querschnittstreue unter gegebener Belastung mittels (vieler) Querschotten und einer Querschotte an der Krafteinleitungsstelle garantiert ist.

Wir werden den Einfluss von Querschotten auf das Verhalten der Kastenträger behandeln. Daraus resultieren Richtlinien für die Anwendung von Querschotten. Ausserdem werden wir den Zustand untersuchen, der auftritt wenn die Belastung zwischen Querschotten eingeleitet wird.

Der Einfluss der Querschnittsverformung und die Wirkung von Schotten ist schon öfters in wissenschaftlichen Abhandlungen erörtert worden, z.B. in den Arbeiten von V. Vlasov [1], J. Janssen [2], G. Lacher [5], F. Resinger [6], R. Dabrowski [7] und P. Csonka [8]. Analog der Arbeitsweise in [2] gründet sich die Theorie auf das Prinzip der minimalen potentiellen Energie. Mit der Formulierung in Matrixschreibweise entsteht eine übersichtliche und leicht programmierbare Darstellung der Berechnung.

Der Spannungs- und Verformungszustand infolge \bar{N} , \bar{D}_y , \bar{D}_z , \bar{M}_y und \bar{M}_z (Abb. 1.2) hängt nicht zusammen mit den Spannungen und Verformungen infolge \bar{M}_x , \bar{B} und \bar{Q} , und kann hinreichend genau beschrieben werden mit der Theorie nach Bernoulli-Navier. Deshalb können wir uns beschränken auf Belastungen durch \bar{M}_x , \bar{B} und \bar{Q} . Für einen Kastenträger mit doppelt-symmetrischem Querschnitt bedeutet das, dass die auftretenden Spannungen und Verschiebungen antimetrisch sind mit Rücksicht auf beide Symmetrieachsen des Querschnittes.

2. Bezeichnungen:

Für alle Bezeichnungen in dieser Arbeit beziehen wir uns auf [11]
mit Ausnahme der Grössen E^* , ν^* , h , k_β und k_μ :

E^*	-	Elastizitätsmodul	} der Querschotte
ν^*	-	Querdehnungszahl	
h	-	Stärke	

$$k_\beta = \frac{E^*}{3(1+\nu^*)} \cdot \frac{h^3 b_1 b_2}{\alpha_0 a_1}$$

$$k_\mu = \frac{8E^*}{1+\nu^*} \cdot \frac{b_1 b_2 h \alpha_0}{c}$$

3. Einige Ergebnisse für Kastenträger mit verformbarem Rechteckquerschnitt.

In [1] und [2] ist eine Theorie aufgestellt worden die verwendbar ist für Kastenträger ohne Querschotten. Wir werden die Resultate kurz zusammenfassen.

Wenn $u(x,s)$ und $v(x,s)$ die Verschiebung in axialer Richtung bzw. Umlaufsrichtung sind (Abb.3.1), dann ist die Grundhypothese dieser Theorie, dass man schreiben darf:

$$u(x,s) = \beta(x) \cdot \varphi(s) \quad (3.1)$$

$$v(x,s) = \theta(x) \cdot h(s) + \kappa(x) \cdot m(s) \quad (3.2)$$

Für die Funktionen φ , h und m der Umlaufskoordinate s (Abb. 3.1) gilt:

$$\varphi(s) = y(s) \cdot z(s) \quad (3.3)$$

$$h(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2 \\ b_1 & \text{für } z = \pm b_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$m(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2 \\ -b_1 & \text{für } z = \pm b_1 \end{cases} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (3.5)$$

Abb. 3.1

Als Schnittgrößen treten nur das axiale Bimoment $B(x)$, das Torsionsmoment $M(x)$ und das transversale Bimoment $Q(x)$ auf. Wenn es in einem Querschnitt axiale Normalspannungen $\sigma(x,s)$ und Schubspannungen $\tau(x,s)$ gibt (z.B. Abb. 1.1) so lässt sich für B , M und Q schreiben:

$$B(x) = \int_F \sigma(x,s) \varphi(s) dF \quad (3.6)$$

$$M(x) = \int_F \tau(x,s) h(s) dF \quad (3.7)$$

$$Q(x) = \int_F \tau(x,s) m(s) dF \quad (3.8)$$

Mittels des Prinzips der minimalen potentiellen Energie ist das Resultat der Ansätze für die Verschiebungen, (3.1) und (3.2), ein System von drei linearen Differentialgleichungen in β , ϑ und κ [2]. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen enthält sechs Integrationskonstanten die als Komponenten eines Spaltenvektors C aufgefasst werden können. Mit den Matrizen $W(x)$ und $F(x)$ von der Ordnung (3×6) kann die allgemeine Lösung folgenderweise geschrieben werden:

$$w(x) = \begin{bmatrix} \beta(x) \\ \vartheta(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix} = W(x) \cdot C \quad (3.9)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} B(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = F(x) \cdot C \quad (3.10)$$

Die Koeffizienten von $W(x)$ und $F(x)$ sind von Vlasov in [1] (S. 240 und 241) gegeben worden. Es sind lineare Kombinationen der folgenden Funktionen der axialen Koordinate:

$$1, x, \cosh(\alpha x) \sin(\gamma x), \cosh(\alpha x) \cos(\gamma x), \sinh(\alpha x) \cos(\gamma x), \sinh(\alpha x) \sin(\gamma x).$$

Die Konstanten α und γ sind völlig bedingt durch die Abmessungen des Querschnittes und die Querdehnungszahl ν .

Es gilt [2,9]:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2(1+\varepsilon) \quad (3.11)$$

$$\gamma^2 = \alpha_0^2(1-\varepsilon) \quad (3.12)$$

$$\text{mit } \alpha_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2} \cdot \frac{t_1^3 t_2^3}{b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2)(b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \cdot \frac{t_1 t_2 (b_1 t_1 + b_2 t_2)(b_1 t_2 + b_2 t_1)^2}{b_1^2 b_2^2 (b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}} \quad (3.14)$$

Weil B und Q Gleichgewichtssysteme sind, wird in "einiger Entfernung" von der Stelle wo B und Q eingeleitet werden, der

Einfluss dieser Belastung vernachlässigbar sein. Wir können eine Länge l_0 definieren mit der Eigenschaft dass in einer Entfernung l_0 vom belasteten Querschnitt keine merkliche Wirkung von B und Q resultiert. Das bedeutet dass für einen Kastenträger mit Länge l grösser als l_0 die Spannungen und Verformungen am Ende $x = 0$ nicht merklich beeinflusst werden von den mit Verwölbung (B, β) und Querschnittsverformung (Q, κ) zusammenhängenden Randbedingungen am Ende $x = l$. Derartige Kastenträger werden wir "unendlich lang" nennen. Nach [11] können wir ansetzen:

$$l_0 = \frac{\pi}{\alpha_0} \quad (3.15)$$

Die axialen Membranspannungen sind dem axialen Bimoment $B(x)$ und der Funktion $\varphi(s)$ proportional. Die Extremwerte treten mithin auf in den Eckpunkten des Trägerquerschnittes. Die Schubspannungen können betrachtet werden als die Summe der mit $M(x)$ und $h(s)$ und mit $Q(x)$ und $m(s)$ proportionalen Beiträge. Die Querschnittsverformung verursacht in Längsschnitten ausserdem biegende Momente dessen Grösse mit $\kappa(x)$ proportional ist. Die Extremwerte dieser Momente treten in den Eckpunkten auf.

4. Der Einfluss von mehreren, in gleichem Abstand gestellten Querschotten.

4.1. Einleitung.

Zur Bestimmung des Einflusses von Querschotten betrachten wir einen Kastenträger mit in gleichem Abstand gestellten Querschotten (Abb. 4.1). Der Träger ist am Ende $x = 0$ eingespannt und am Ende $x = 1$ belastet von einem Torsionsmoment \bar{M}_x , das durch eine Endschotte eingeleitet wird. Jede Querschotte ist starr in der Ebene der Schotte und völlig flexibel senkrecht zur Ebene.

Abb. 4.1

Wir werden für zwei Träger, deren Querschnitt in Abb. 4.5 gezeichnet ist und deren Länge gleich l_0 bzw. $0,4 l_0$ ist, die axiale Membranspannung σ_a infolge des axialen Bimomentes B , die Schubspannung τ_e infolge des transversalen Bimomentes Q und die Biegespannung σ_b infolge der Querschnittsverformung in Abhängigkeit von x berechnen. Interessant ist auch der Abstand, über den die Wirkung der Wölbbehinderung bei $x = 0$ wahrnehmbar ist.

Wenn das Torsionsmoment \bar{M}_x mittels einer Endschotte eingeleitet wird und es keine anderen Querschotten gibt, ist die Vergleichspannung in der Einspannung maximal.

Gleichfalls, wenn die Querschnittstreue mittels genügend vieler Querschotten garantiert ist, ist der Spannungszustand in der Einspannung am gefährlichsten. Es ist zu erwarten, dass auch für das in Abb. 4.1 gegebene Problem der Querschnitt $x = 0$ massgebend sein wird für die Stärke des Trägers. Die Spannungen in diesem Querschnitt sind völlig bestimmt durch das axiale Bimoment $B_0 = B(x=0)$, das transversale Bimoment $Q_0 = Q(x=0)$ und das Torsionsmoment $M_0 = \bar{M}_x$. Wir werden den Einfluss von der Anzahl der Querschotten auf B_0 und Q_0 untersuchen.

Es ist fast selbstverständlich, dass wir zur Lösung des Problems wie in Abb. 4.1 elektronische Rechenmaschinen einschalten werden. Es liegt nahe Übertragungsmatrizen zu gebrauchen mit denen die interessanten Verschiebungs- und Schnittgrößen in einem bestimmten

Querschnitt ausgedrückt werden in den nämlichen Grössen in einem anderen Querschnitt. In dieser Weise wäre es möglich β , ϑ , B , M und Q für $x = 0$ auszudrücken in β , ϑ , B , M und Q für $x = 1$. Aber diese Methodik veranlasst eine Reihe von numerischen und andersartigen Komplikationen die nicht einfach gelöst werden können.

Ein besseres Verfahren bekommt man, wenn man von der Methode der finiten Elemente ausgeht. Dabei werden die "Verschiebungen" β , ϑ und \varkappa in den Knotenpunkten des Trägers betrachtet als die Unbekannten des Problem. In Abb. 4.2 ist ein Kastenträgerelement gezeichnet mit Knotenpunkten (\equiv Querschnitten) 1 und 2.

Abb. 4.2

Knotenpunkte werden immer lokalisiert in Querschnitten wo "Kräfte" B , M , Q oder "Verschiebungen" β , ϑ , \varkappa einen vorgeschriebenen Wert haben. Infolgedessen werden wir bei jeder Querschotte einen Knotenpunkt nehmen.

Mittels (3.9) und (3.10) kann die Steifigkeitsmatrix Q_e dieses Elementes berechnet werden, denn diese Matrix gibt den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen β , ϑ und \varkappa und den Schnittgrössen B , M und Q in den Knotenpunkten des Elementes.

Es gilt:

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \end{bmatrix} \cdot C \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} -f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(1) \end{bmatrix} \cdot C \quad (4.2)$$

Mit der Lösung von C aus (4.1):

$$C = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

kann für (4.2) geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} -f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Folglich gilt für die Steifigkeitsmatrix Q_e :

$$Q_e = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \end{bmatrix}^{-1}$$

Mit der, in der Methode der finiten Elemente üblichen Arbeitsweise, kann die totale Steifigkeitsmatrix für die gesamte Konstruktion zusammengesetzt werden, wobei alle geometrische Bedingungen erfüllt werden. Im vorliegenden Problem bedeutet das beispielsweise dass in jedem Querschnitt mit Querschotte, κ den Wert null haben soll.

Auch diese Arbeitsweise bringt numerische Komplikationen mit sich, da es in der totalen Steifigkeitsmatrix Koeffiziente gibt die in Grösse ganz verschieden sind. Die Ursache muss man suchen in der Differenz zwischen der Torsionssteifigkeit und den interessanten Steifigkeiten bei Verwölbung und Querschnittsverformung. Jedoch, diese Schwierigkeiten können einfach und zweckmässig gelöst werden.

Das dargestellte Verfahren ist programmiert worden für den elektronischen Rechenautomaten EL-X8 der Technischen Hochschule Eindhoven [9, 10].

4.2. Kastenträger mit Länge l grösser l_0 .

Wenn die Länge des Trägers in Abb. 4.1 grösser l_0 ist (siehe Gleichung (2.15)) ist der Einfluss von Wölbbehinderung am Rand $x = 0$ vernachlässigbar für die Verschiebungen und Spannungen am Rand $x = 1$. Das axiale und transversale Bimoment in der Einspannung (B_0 , bzw. Q_0) sind dann unabhängig von der Länge des Trägers. Sind in einem Träger mit $l \gg l_0$ in gleicher Distanz l_s Querschotten befestigt dann kann die Wirkung von der Schottenabstand leicht berechnet werden.

Für Träger ohne Querschotten - und deshalb auch wenn der Schottenabstand $l_s \gg l_0$ - gilt für das Problem von Abb. 4.1 [11]:

$$B_0(\lambda) = -4 \mu \frac{\varepsilon}{\alpha_0} M \quad \text{für} \quad \lambda \geq 1 \quad (4.6)$$

$$Q_0(\lambda) = 4 \mu \varepsilon M \quad \text{für} \quad \lambda \geq 1 \quad (4.7)$$

mit:

$$\lambda = \frac{l_s}{l_0} \quad (4.8)$$

$$\mu = \frac{-b_1 t_2 + b_2 t_1}{b_1 t_2 + b_2 t_1} \quad (4.9)$$

ist die Querschnittstreue durch genügend viele Querschotten gewährleistet worden ($\lambda \rightarrow 0$) dann gilt [11]:

$$B_0(\lambda) = -\mu \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\alpha_0} M \quad \text{für} \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (4.10)$$

$$Q_0(\lambda) = \mu M \quad \text{für} \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

Für Werte von λ zwischen 0 und 1 kann für $B_0(\lambda)$ und $Q_0(\lambda)$ berechnet werden:

$$B_0(\lambda) = B_0(1) + [B_0(0) - B_0(1)] f_1(\lambda, \varepsilon) \quad (4.12)$$

$$Q_0(\lambda) = Q_0(1) + [Q_0(0) - Q_0(1)] f_2(\lambda, \varepsilon) \quad (4.13)$$

In Abb. 4.3 und 4.4 sind f_1 und f_2 gegeben als Funktionen von λ mit ε als Parameter. Wir bemerken dass f_1 und f_2 nur von λ und ε abhängig sind.

Abb. 4.3
Abb. 4.4

Es lässt sich erkennen dass die Einspanngrößen durch den Gebrauch von Querschotten beträchtlich zunehmen können im Vergleich zu der Situation dass keine Schotten benutzt werden. Das bedeutet folglich auch dass die Spannungssituation in dem Träger durch Querschotten gefährlicher werden kann.

Die Torsionssteifigkeit des Trägers nimmt beim Aufstellen von Querschotten nur sehr wenig zu.

In Abb. 4.6, 4.7 und 4.8 sind für einen Träger mit einem Querschnitt nach Abb. 4.5 die am meisten interessanten Spannungen gegeben als Funktion der axialen Koordinate bei einer Belastung von einem Torsionsmoment $\bar{M}_x = 2000 \text{ Nm}$. In diesen grafischen Darstellungen tritt der Schottenabstand als Parameter auf. Die Bredtsche Schubspannung beträgt 5 N/mm^2 . Für diesen Träger gilt $l_0 = 2300 \text{ mm}$ und $\varepsilon = 0,012$. Wir bemerken dass $\lambda = 0$ unendlich viele Schotten entspricht. Für $\lambda = 0,125$ ist der Schottenabstand $l_s = 287 \text{ mm}$.

Abb. 4.5
Abb. 4.6
Abb. 4.7
Abb. 4.8

Aus diesen Darstellungen geht hervor dass mit zunehmender Schottenanzahl, der Abstand worüber die Abweichung von der Bredtschen Theorie infolge Wölbbehinderung für $x = 0$ wahrnehmbar ist, sich deutlich mindert. Das bedeutet dass die in Abb. 4.6, 4.7 und 4.8 für $l_s = 575 \text{ mm}$ ($\lambda = 0,25$) gezeichneten Kurven auch verwendbar sind für Träger mit grösserer Länge, z.B. 1000 mm .

4.3. Kastenträger mit Länge l kleiner l_0 .

Auch für kurze Träger ($l < l_0$) kann die Wirkung von Querschotten analysiert werden. Obwohl keineswegs notwendig, werden wir uns auch jetzt beschränken auf die Situation mit in gleichem Abstand gestellten Schotten.

Die Parameter, die das Verhalten des Trägers bestimmen, sind $\frac{l}{l_0}$, $\frac{l_s}{l}$ und ε . Mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit der Resultate werden wir uns beschränken auf einen Wert von ε , nämlich $\varepsilon = 0,012$. Dieser Wert stimmt z.B. überein mit dem Querschnitt in Abb. 4.5.

In Abb. 4.9, 4.13 werden einige interessante Resultate präsentiert für den Träger in Abb. 4.5, belastet mit einem Torsionsmoment $\bar{M}_x = 2000 \text{ Nm}$. Die in diesen grafischen Darstellungen

gegebene Daten können einfach transformiert werden nach Trägern mit anderen Abmessungen, da nur die genannten Parameter massgebend sind. Abb. 4.9 und 4.10 geben den Einfluss von Schottenabstand l_s und Trägerlänge l (bezogen auf l_0) auf die Extremwerte der axialen Normalspannung und der extra Schubspannung im Querschnitt $x = 0$, wo die Verwölbung behindert ist. Sowohl die Anwesenheit von Querschotten wie auch die Kürzung des Trägers ergeben eine Steigerung der untersuchten Spannungen. In Abb. 4.11, 4.13 ist für einen Träger mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$ der Verlauf der interessanten Spannungen in axialer Richtung gegeben mit dem Schottenabstand als Parameter.

Hierdurch lässt sich feststellen, dass infolge einer wachsenden Anzahl von Schotten die Membranspannungen in der Einspannung erheblich zunehmen können während die maximale Biegespannungen nachlassen.

Zusammenfassend können wir schliessen dass nicht nur für Träger mit $l > l_0$ sondern auch für kurze Träger ($l < l_0$), der Spannungszustand durch Querschotten ungünstig beeinflusst wird.

Abb. 4.9
Abb. 4.10
Abb. 4.11
Abb. 4.12
Abb. 4.13

5. Die Wirkung einer Belastung, die nicht mittels einer Querschotte eingeleitet wird.

5.1. Einleitung.

In den vorigen Kapiteln ist angenommen worden dass die Belastung, insbesondere das Torsionsmoment, mittels einer Querschotte eingeleitet wird. In der Praxis wird diese Situation nicht immer auftreten, z.B. da die Einleitungsstelle der Belastung variabel ist. Deshalb werden wir den Spannungszustand analysieren der in einem Träger mit Querschotten auftritt, wenn dieser zwischen den Schotten belastet wird. Dabei ist eine Belastung mit einem transversalen Bimoment insbesondere für die Praxis von Bedeutung.

Wenn der Abstand zwischen der Einleitungsstelle der Belastung und der nächsten Querschotte grösser ist als l_0 , kann die Wirkung der Schotten auf den Spannungsverlauf in der Umgebung der Einleitungsstelle vernachlässigt werden.

In Abb. 5.1 und 5.2 sind einige Belastungssituationen weiter ausgearbeitet. Massgebend für die Membranspannungen sind die Schnittgrössen B und Q , weil die Biegespannungen vom Produkt $c\kappa$ eindeutig bestimmt werden. Die maximale Biegespannung ist z.B. gleich $\frac{1}{4} \cdot \frac{|c\kappa|}{t^2}$. Für die Bedeutung von c , κ und t siehe 2 und [11].

Die Resultate in Abb. 5.1 und 5.2 gelten für alle Träger mit $\epsilon \ll 1$ (siehe [11]).

Abb. 5.1
Abb. 5.2

Anhand von Abb. 5.1 und 5.2 kann man feststellen, dass das wohl oder nicht Behindern der Verwölbung bei einer Belastung mit einem transversalen Bimoment von grösster Bedeutung ist. Behindert man die Verwölbung so nimmt die maximale axiale Membranspannung zu mit einem Faktor 1,56, während die maximale Biegespannung mit einem Faktor 4 abnimmt.

Wenn die Belastung in einer Entfernung weniger als l_0 von der

nächsten Querschotte angreift, wird das Verhalten des Trägers in der Gegend der Einleitungsstelle mitbestimmt durch die Stelle und die Anzahl der übrigen Querschotten und deshalb durch den ganzen Träger.

Den wirklichen Verlauf der Spannungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschotten eines Trägers (z.B. der Teil zwischen A und B in Abb. 5.3.a) können wir dadurch begrenzen, indem wir jenen Teil (einschliesslich die zwei Querschotten) isolieren und zwei Probleme lösen, namentlich: die Probleme mit und ohne Wölbbehinderung an der Stelle der Querschotten (Abb. 5.3.b bzw. 5.3.c) und mit der gegebenen Belastung \bar{Q} . Wir werden uns im Folgenden auf diese Probleme beschränken. Dabei werden wir in 5.2 den Einfluss der Angriffsstelle $x = q$ von \bar{Q} analysieren falls die Länge des Teils (Querschottenabstand) $2l_0$ ist (siehe Abb. 5.4) und nachdem in 5.3 den Einfluss der Länge $2l_0$ des Träger-teils betrachten falls die Belastung \bar{Q} in der Mitte angreift (siehe Abb. 5.5).

Abb. 5.3.a
Abb. 5.3.b
Abb. 5.3.c

5.2. Querschottenabstand $2l_0$ und veränderlicher Angriffspunkt der Belastung \bar{Q} .

Wir werden die Wirkung von q/l_0 auf den Spannungszustand mit verschiedenen Randbedingungen unter die Lupe nehmen.

Abb. 5.4

Weil der Schottenabstand $2l_0$ ist werden die Bedingungen am Rand $x = 2l_0$ (bzw. $x = 0$) keine Rolle spielen, wenn $q \leq l_0$ (bzw. $q \geq l_0$) ist.

In Abb. 5.5 und 5.6 sind die Grössen $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}}$ und $\frac{c_M}{\alpha_0 \bar{Q}}$ gegeben für $\frac{q}{l_0} = 0,25$, $0,50$ und $1,00$.

Aus diesen Abbildungen ergibt sich dass der Spannungszustand am gefährlichsten ist für $\frac{q}{l_0} = 1$.

Abb. 5.5.a
Abb. 5.5.b
Abb. 5.6.a
Abb. 5.6.b

5.3. Querschottenabstand kleiner als $2l_0$ und Belastung in der Mitte.

Der Einfluss des Abstandes zwischen den Schotten, $2l$, bei einem in der Mitte mit einem transversalen Bimoment \bar{Q} belasteten Trärgerteil, wie in Abb. 5.7, kommt zum Ausdruck in den Abb. 5.8.a, 5.8.b, 5.9.a und 5.9.b. Die auftretenden Biege- und Membranspannungen sind maximal im Querschnitt wo \bar{Q} eingeleitet wird ($x/l = 1,0$). Wenn die Querschotten näher zueinander gestellt werden, nehmen die Biegespannungen ab weil der Querschnitt weniger verformt. Die axialen Normalspannungen für $x/l = 1,0$ erreichen einen Extremwert für einen bestimmten Wert von l/l_0 wie aus Abb. 5.8.a und 5.9.a hervor geht.

Abb. 5.7

Ist die Verwölbung in den Endquerschnitten behindert, so sind die auftretenden Biegespannungen im allgemeinen kleiner als mit freier Verwölbung. Aus Abb. 5.8.b und 5.9.b ergibt sich der Einfluss vom wohl oder nicht Behindern der Verwölbung auf die axialen Normalspannungen.

Die Deutung der graphischen Darstellungen kann - für Träger mit konstanter Wandstärke - vereinfacht werden mittels der in 2 und [11] gegebenen Gleichungen für die Extremwerte der axialen Normalspannung (σ_{ax}) und der Biegespannung (σ_{sb}) in einem Querschnitt.

$$\sigma_{ax} = -\frac{1}{2} \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \cdot \frac{\alpha_0 \bar{Q}}{t^2} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{sb} = \frac{3}{4} \cdot \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \cdot \frac{\alpha_0 \bar{Q}}{t^2} \quad (5.2)$$

Abb. 5.8.a
Abb. 5.8.b
Abb. 5.9.a
Abb. 5.9.b

6. Die nicht-ideale Querschotte.

Im Vorhergehenden haben wir stets vorausgesetzt dass jede Querschotte in der Ebene starr und senkrecht zur Ebene völlig flexibel wäre. Wir werden untersuchen unter welchen Umständen die Voraussetzung anwendbar ist.

Abb. 6.1

In der Theorie für Kastenträger ohne Querschotten oder mit idealen Querschotten (siehe z.B. [1,2,7]) gilt für die axialen Verschiebungen u :

$$u = \beta(x) \cdot y \cdot z \quad (6.1)$$

wobei $\beta(x)$ den axialen Verlauf der Verwölbung charakterisiert. Auch wenn es im Träger nicht-ideale Querschotten gibt, kann vorausgesetzt werden dass Verschiebungen an den Rändern der Schotten ebenfalls durch diese Formel gegeben werden.

Laut der Theorie der Plattenbiegung können derartige Verschiebungen an den Rändern auftreten wenn die Platte auf die in Abb. 6.2 gezeichnete Weise belastet wird.

Abb. 6.2

Auf dem Träger wird ein Gleichgewichtssystem angreifen, dass wir als ein axiales Bimoment B_s mit der Grösse (siehe Abb. 6.3)

$$B_s = - \frac{2}{3} \frac{E^* h^3}{1+\nu^*} \cdot b_1 b_2 \cdot \beta \quad (6.2)$$

betrachten können wobei h , b_1 und b_2 in Abb. 6.2 gegeben sind und E^* und ν^* die Materialeigenschaften der Schotte sind.

Abb. 6.3

Von der Bedeutung dieser Belastung können wir einen Eindruck gewinnen wenn wir einen Träger mit der Länge grösser als l_0 mit einem

axialen Bimoment \bar{B} belasten und die Verwölbung in den beiden Situationen in Abb. 6.4.a und 6.4.b vergleichen.

Abb. 6.4

Falls β_1 und β_2 die Verwölbung charakterisieren und die Querschotte ideal ist (Abb. 6.4.a) bzw. eine bestimmte Steifigkeit senkrecht zur Ebene hat (Abb. 6.4.b), gilt für den Zusammenhang zwischen β_1 , β_2 und \bar{B} :

$$\bar{B} = 2 a_1 \alpha_0 \beta_1 \quad (6.3)$$

$$\bar{B} = 2 a_1 \alpha_0 \beta_2 (1+k_\beta) \quad (6.4)$$

mit:

$$a_1 = \frac{4}{3} E b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2) \quad (6.5)$$

$$k_\beta = \frac{E^* h^3 b_1 b_2}{3(1+\nu^*) \alpha_0 a_1} \quad (6.6)$$

Wenn t_1 und t_2 gleich t sind und Träger und Schotte dieselbe Materialeigenschaften haben, gilt:

$$k_\beta \approx 0,2 \sqrt{\frac{h^6}{b_1 b_2 (b_1 + b_2) t^3}} \quad (6.7)$$

Aus (6.7) geht hervor dass k_β viel kleiner ist als 1 wenn die Querschotte als eine Platte betrachtet werden kann, also $h \ll b_1$ und $h \ll b_2$ und wenn h und t Grössen gleicher Ordnung sind.

In ähnlicher Weise kann analysiert werden unter welchen Umständen die Querschotte in der Ebene als starr betrachtet werden kann.

Wenn der Querschnitt deformiert wird die Schotte an den Rändern mit Schubspannungen belastet, die ein Gleichgewichtssystem \bar{Q} bilden. Wir berechnen die Querschnittsverformung κ für die beiden in Abb. 6.5 gezeichneten Situationen. Es gilt:

$$\bar{Q} = - \frac{c \kappa_1}{2\alpha_0} \quad (6.8)$$

$$\bar{Q} = - \frac{c \kappa_2}{2\alpha_0} (1 + \kappa_\kappa) \quad (6.9)$$

mit:

$$c = \frac{4 E t_1^3 t_2^3}{(1 - \nu^2)(b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)} \quad (6.10)$$

$$\kappa_\kappa = \frac{8 E^* b_1 b_2 h \alpha_0}{(1 + \nu^*) c} \quad (6.11)$$

Abb. 6.5

Für einen Kastenträger mit $t_1 = t_2 = t$, mit $E^* = E$ und $\nu^* = \nu$ kann man statt (6.11) schreiben:

$$\kappa_\kappa = 5,47 \frac{h}{t} \sqrt{\frac{b_1 b_2 (b_1 + b_2)}{t^3}} \quad (6.12)$$

Aus (6.12) und (6.9) können wir schliessen dass κ_2 hinsichtlich κ_1 vernachlässigt werden kann.

Weil für übliche Abmessungen der Schotte $k_\beta \ll 1$ und $k_\kappa \gg 1$ wird mit einer idealen Querschotte die Realität genügend gut beschrieben. Übrigens ist es sehr wohl möglich das wirkliche Verhalten der Schotte in den Rechenprogrammen [9] und [10] zu berücksichtigen.

7. Schlussbemerkungen.

Mit der Annahme dass der Trägerquerschnitt in einer bestimmten Weise deformieren kann ist es möglich den Einfluss von Querschotten auf den Spannungsverlauf zu analysieren.

Wenn die Belastung mittels einer Querschotte eingeleitet wird so wird die Stärke des Trägers durch extra Querschotten ungünstig beeinflusst (siehe 4.).

Wenn die Belastung, und insbesondere ein transversales Bimoment, zwischen zwei Querschotten eingeleitet wird, so können die in 5. präsentierten Abbildungen bei der Berechnung des optimalen Abstandes zwischen den Querschotten Hilfe leisten.

Im allgemeinen können wir schliessen dass es wenig zweckvoll ist den Abstand zwischen den Schotten kleiner als $0,5 l_0$ zu nehmen.

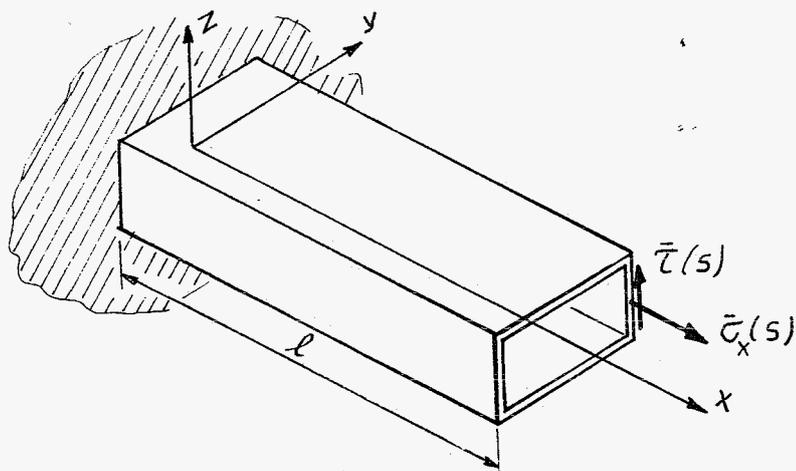


Abb. 1.1

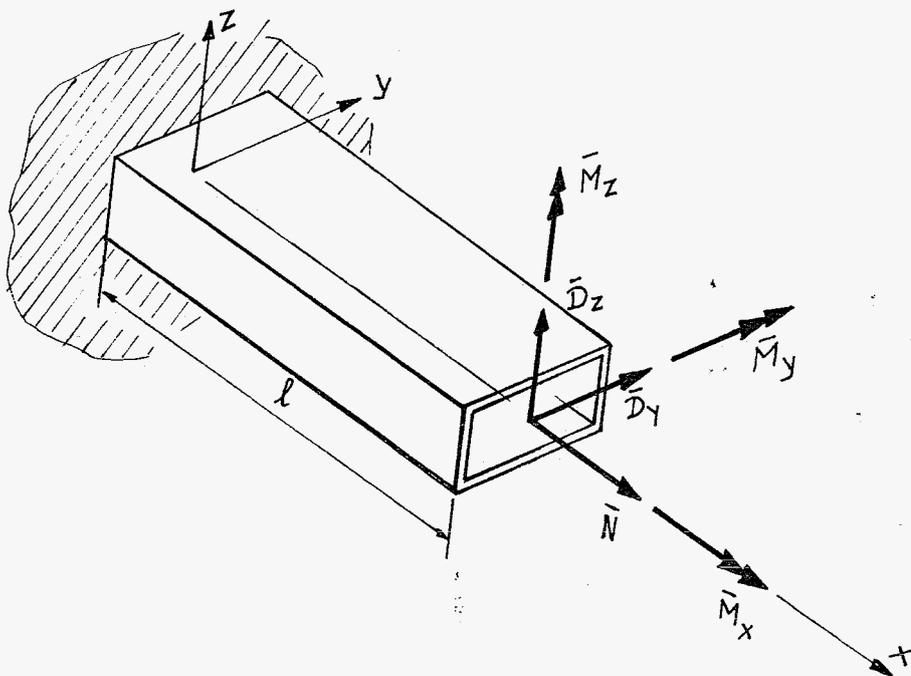


Abb. 1.2

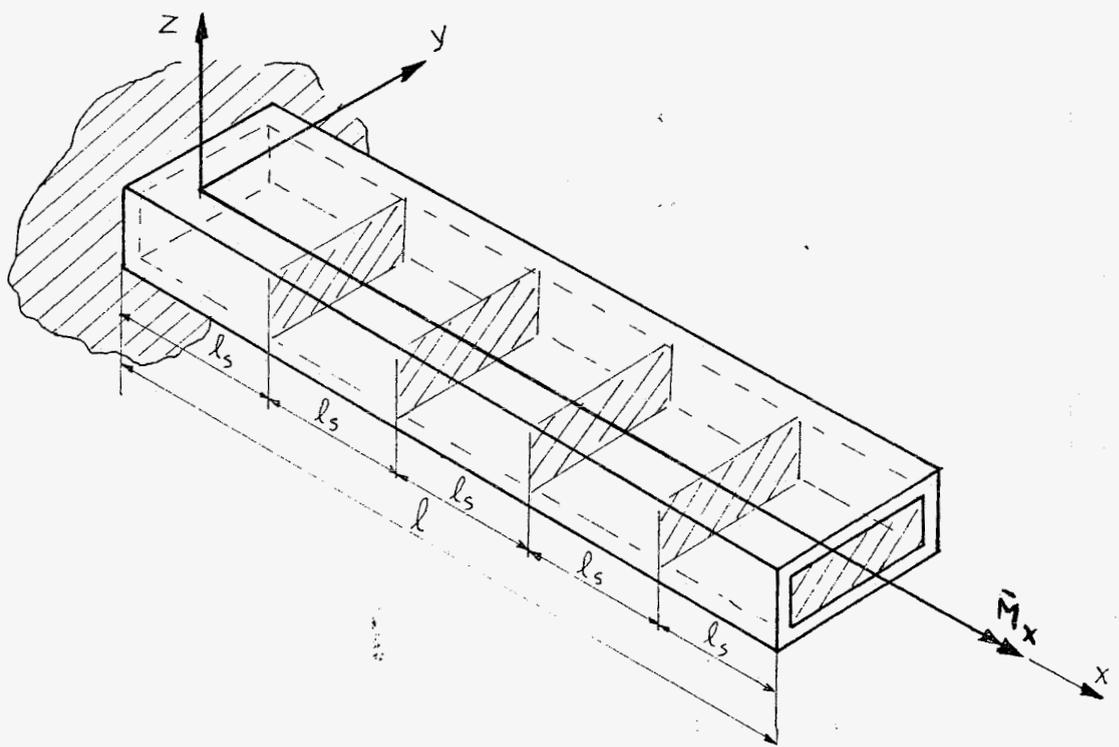


Abb. 4.1

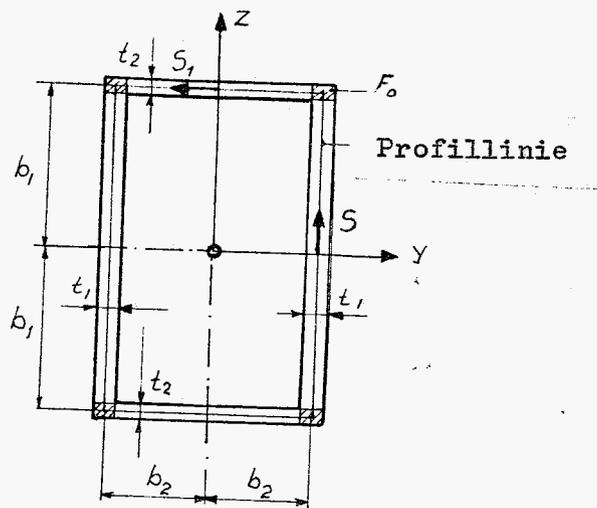


Abb. 3.1

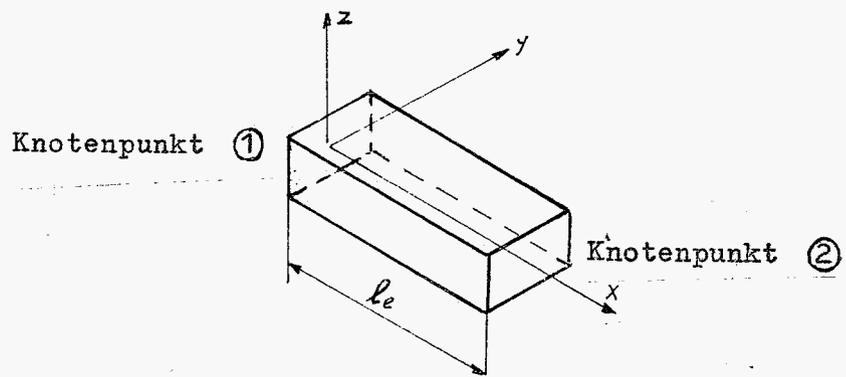


Abb. 4.2

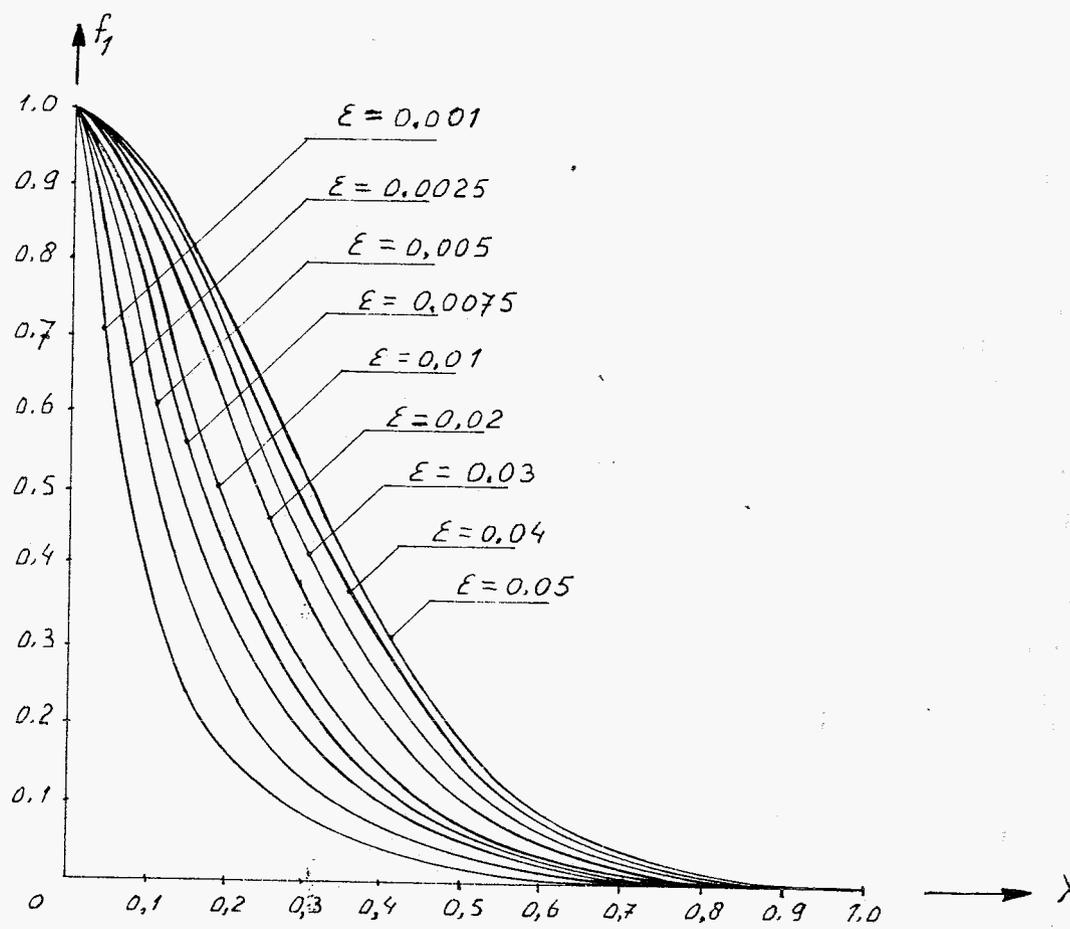


Abb. 4.3

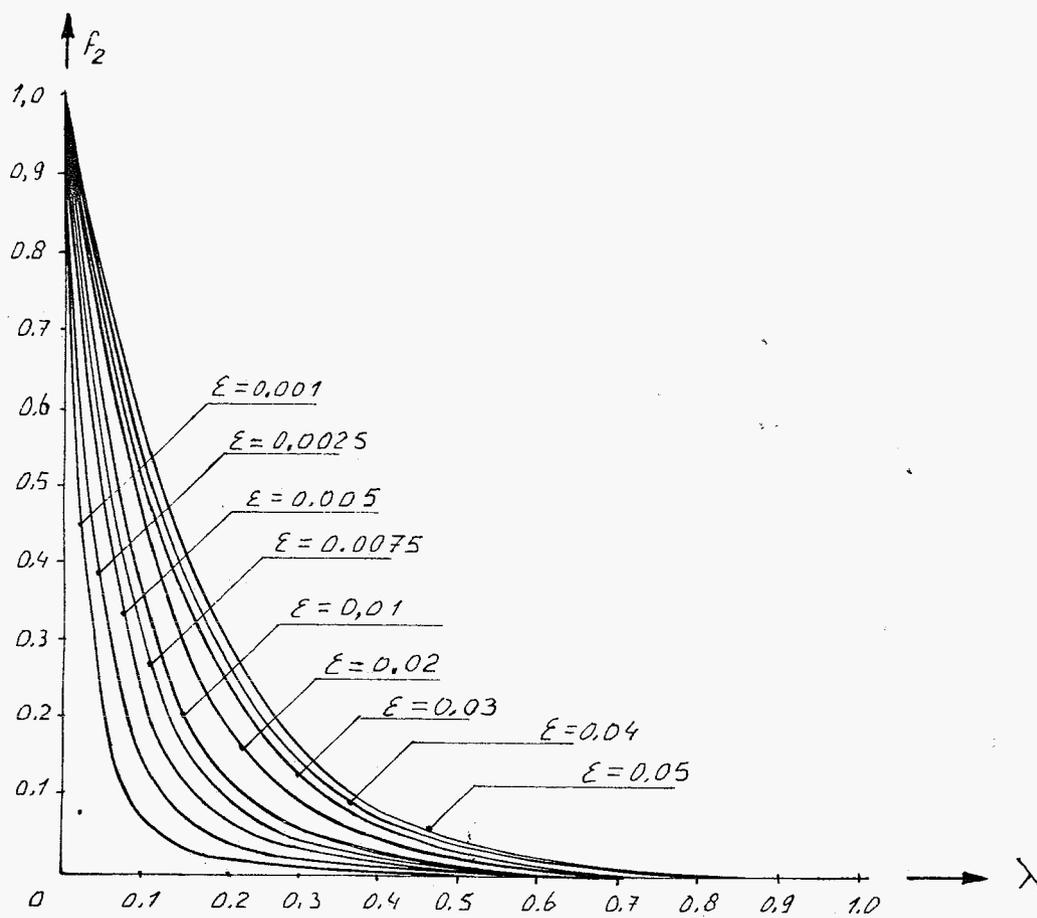
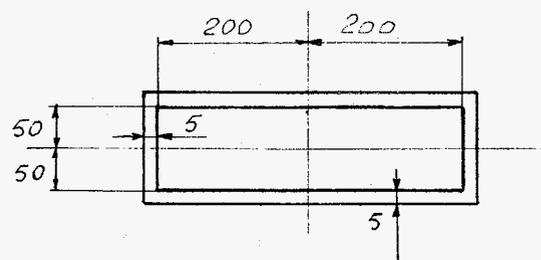


Abb. 4.4



Länge 2300 mm
Abmessungen in mm

Abb. 4.5

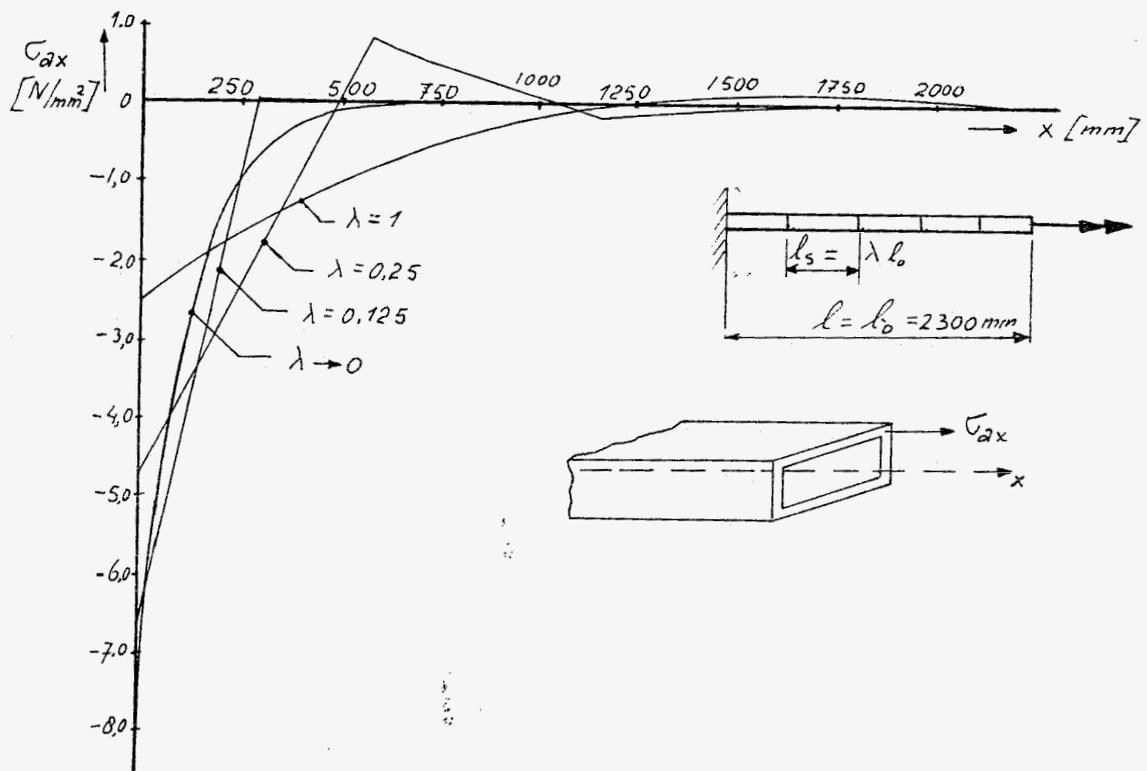


Abb. 4.6

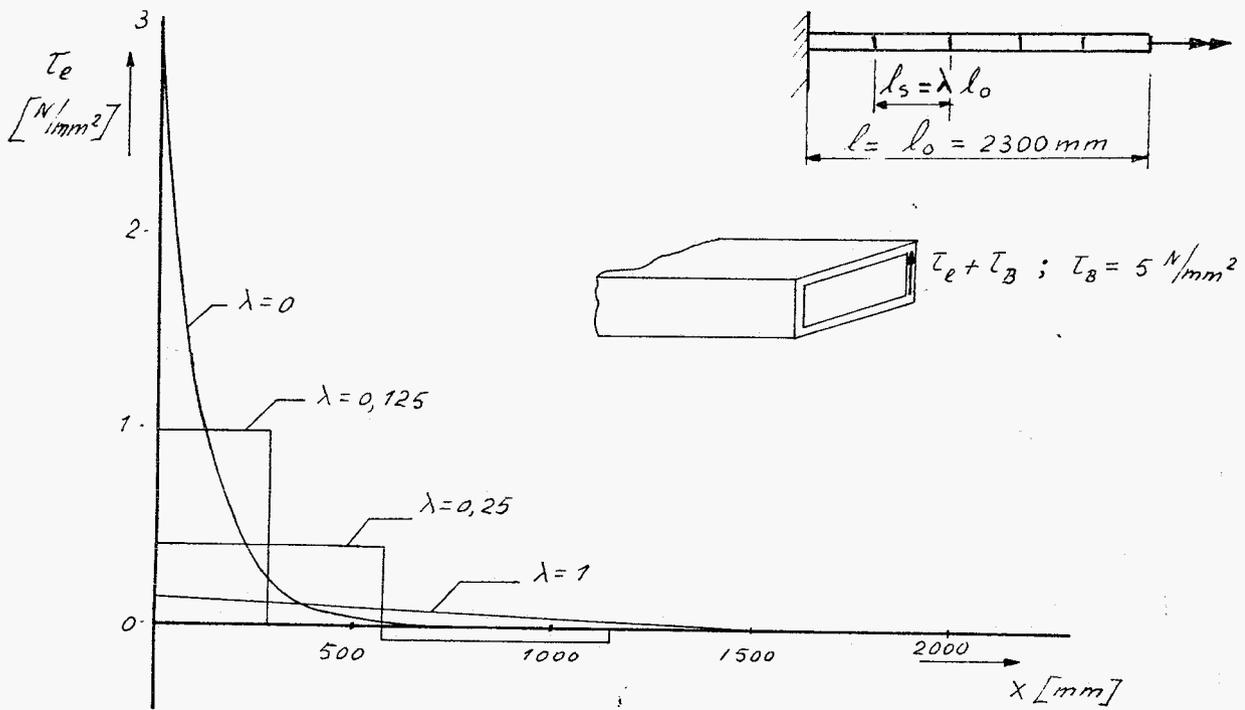


Abb. 4.7

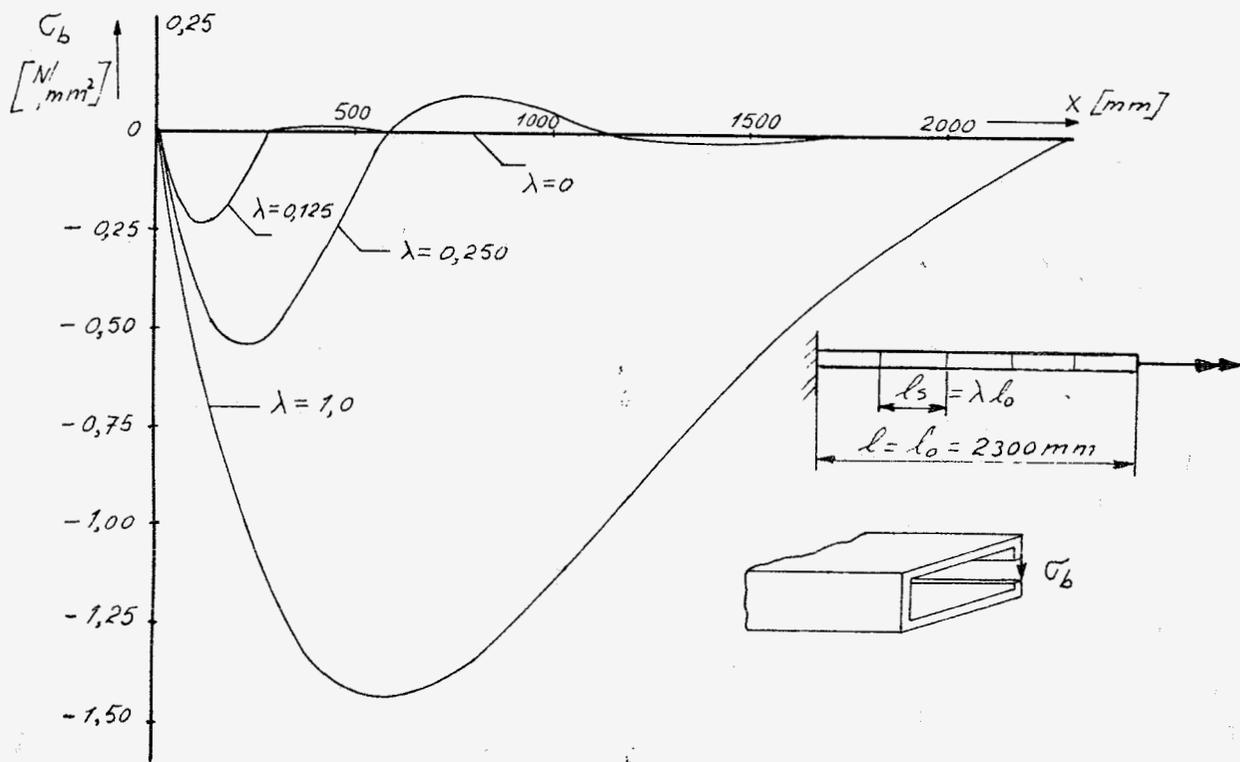


Abb. 4.8

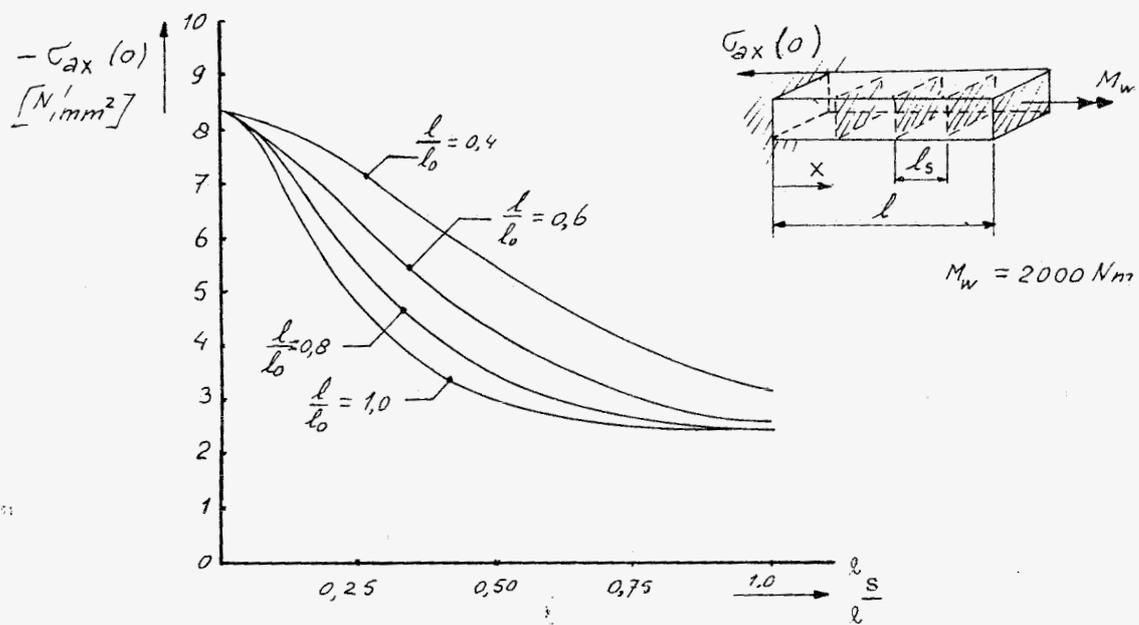


Abb. 4.9

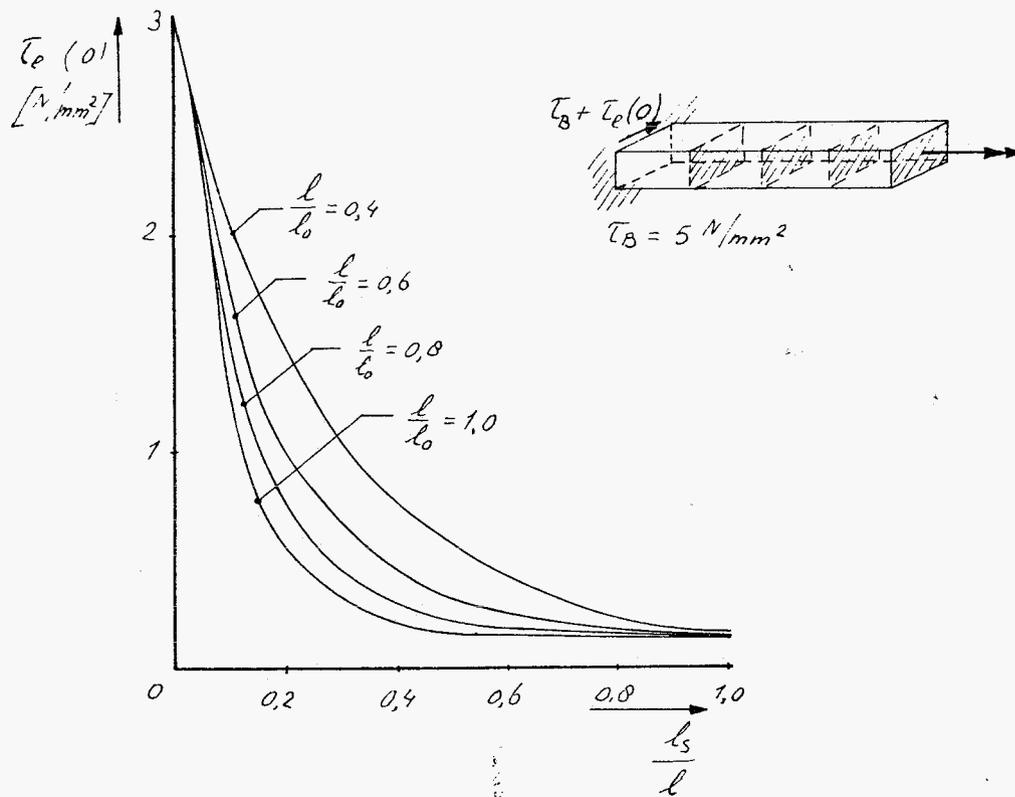


Abb. 4.10

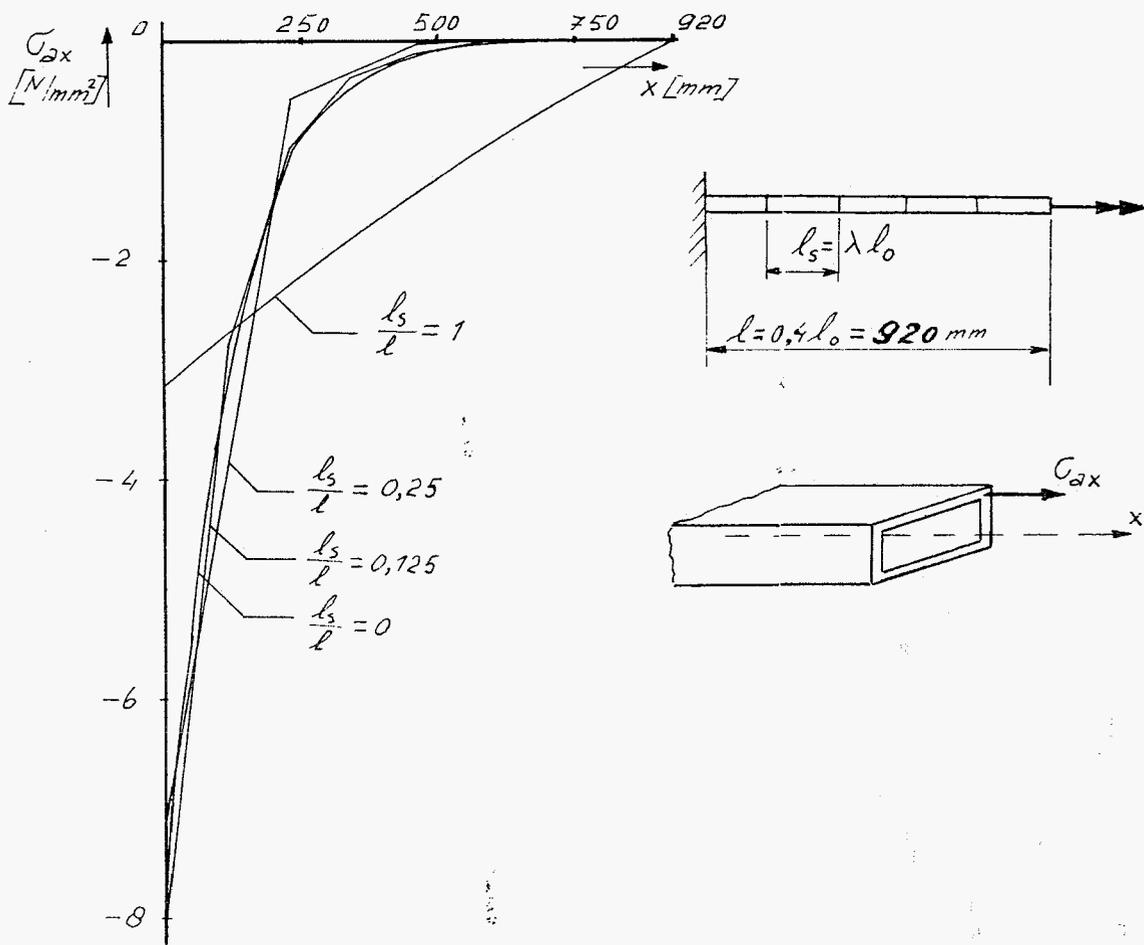


Abb. 4.11

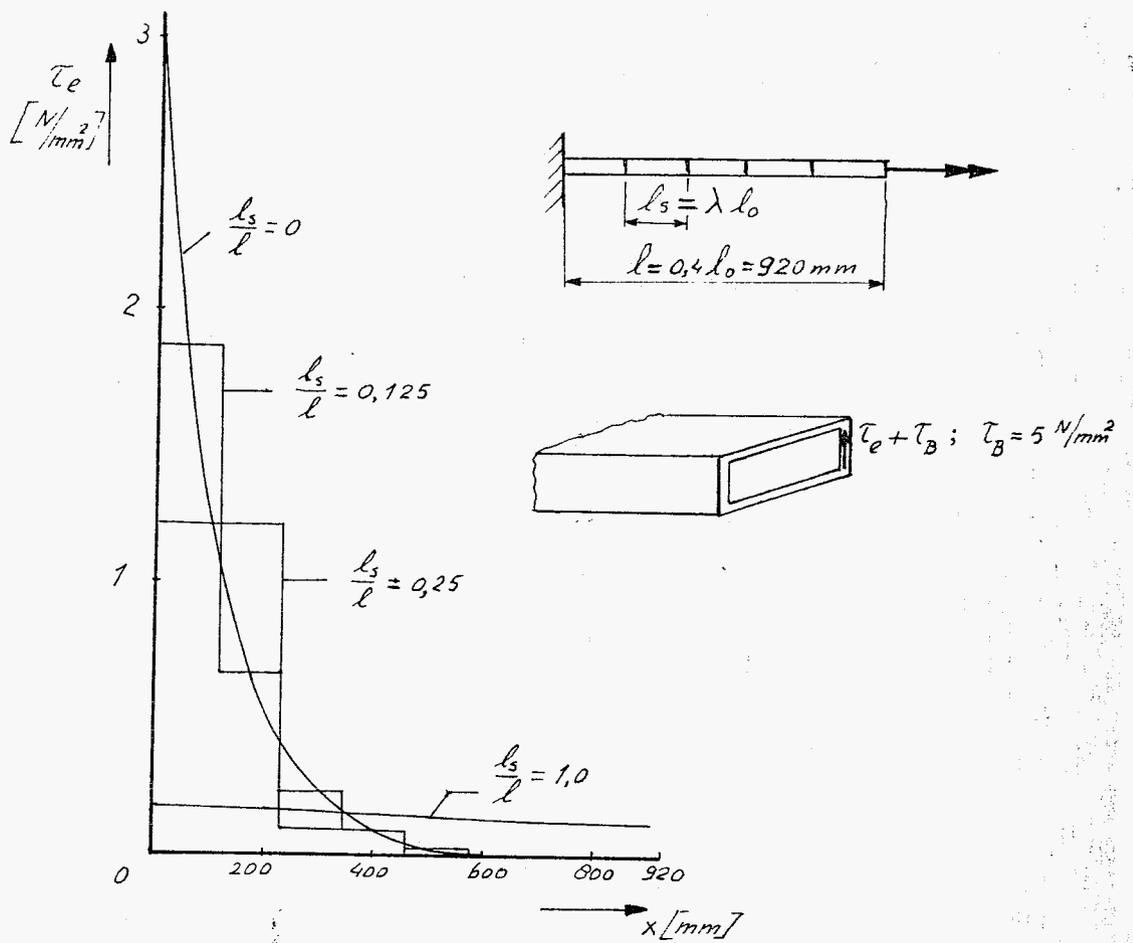


Abb. 4.12

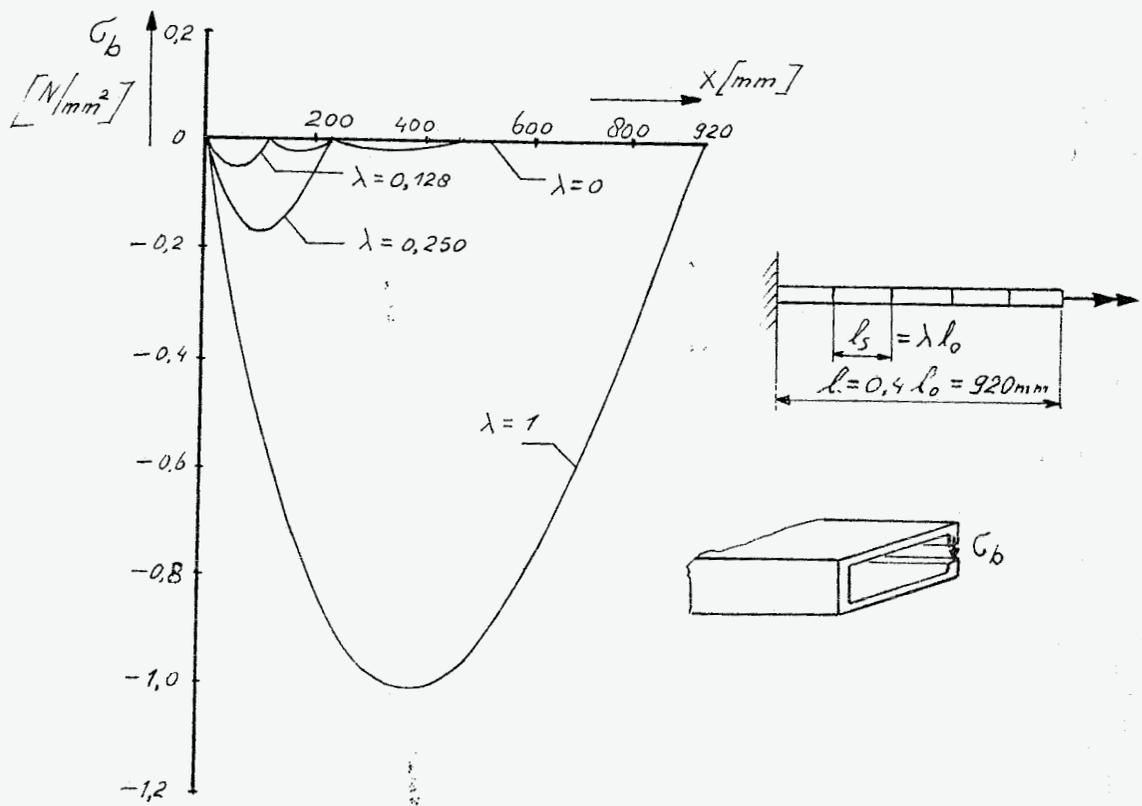


Abb. 4.13

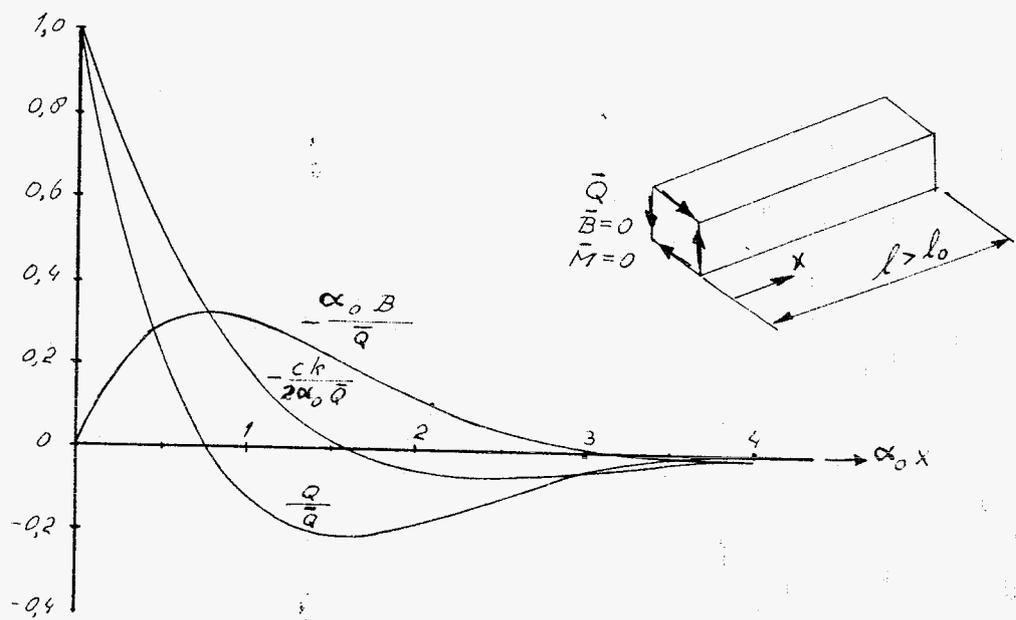


Abb. 5.1

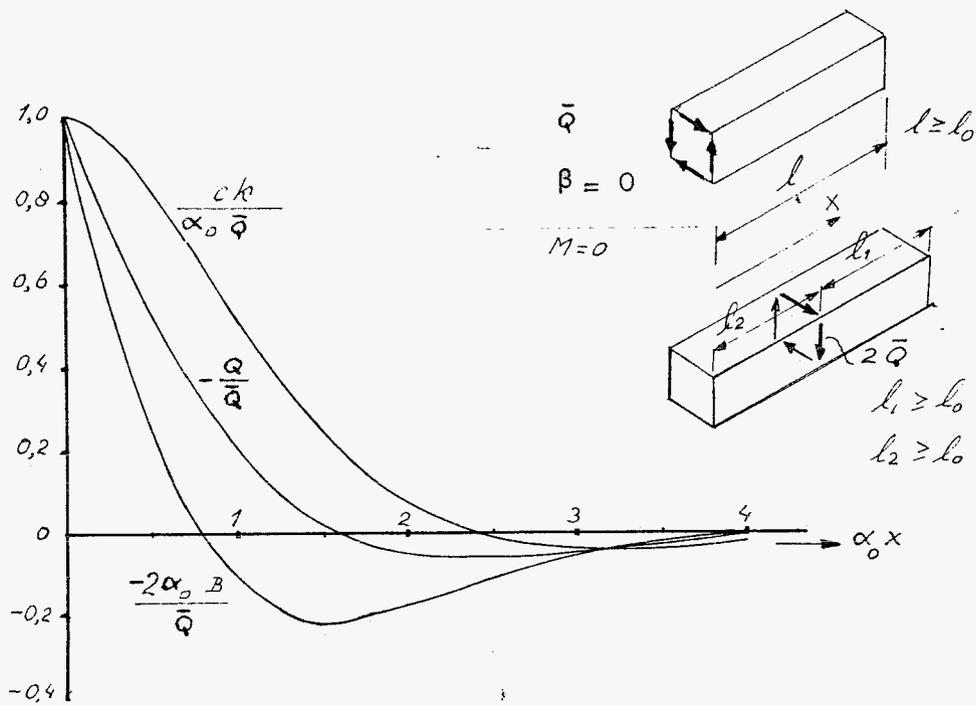
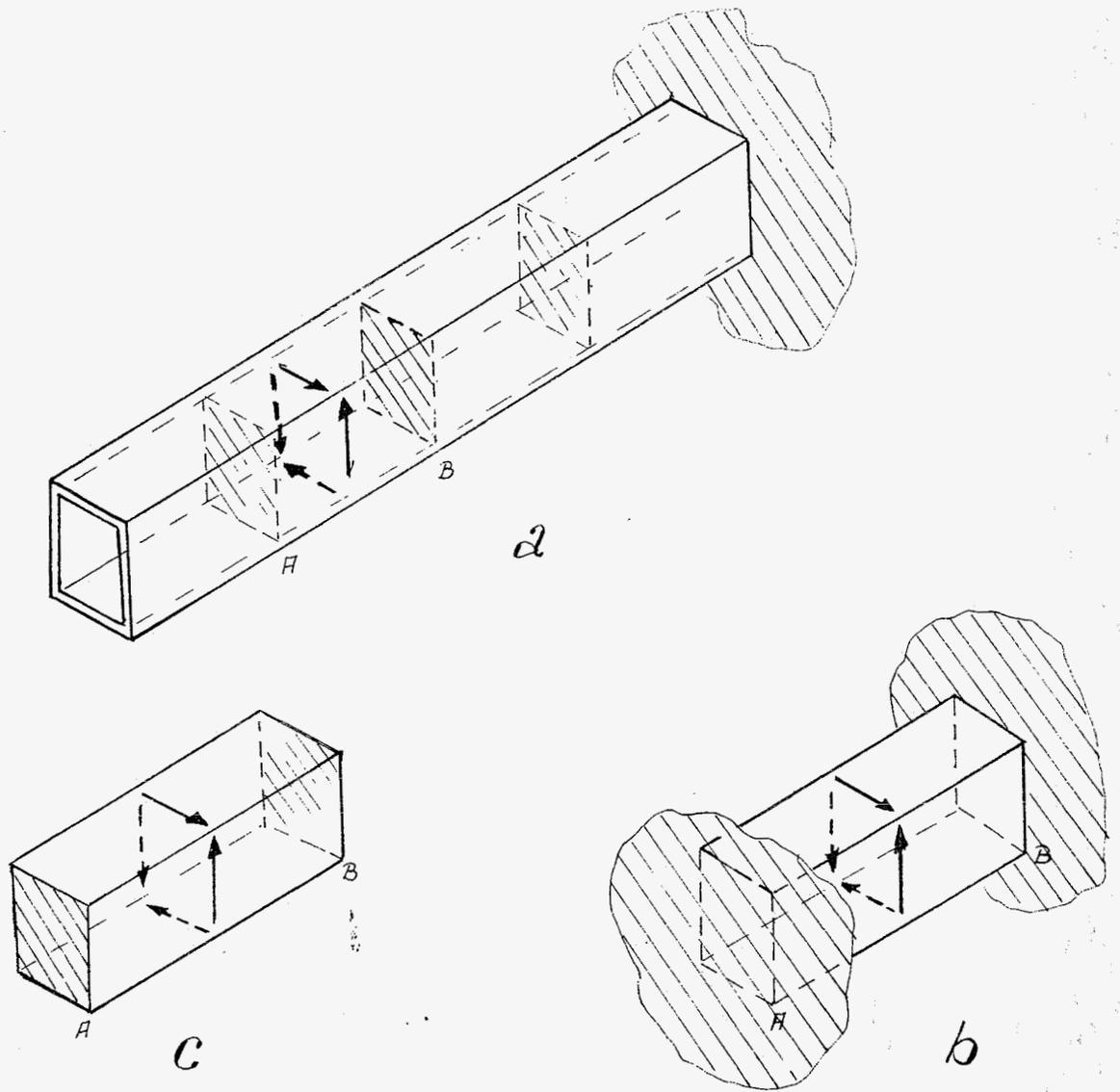


Abb. 5.2



Freie Verwölbung ($B = 0$)

Wölbbehinderung ($\beta = 0$)

Abb. 5.3

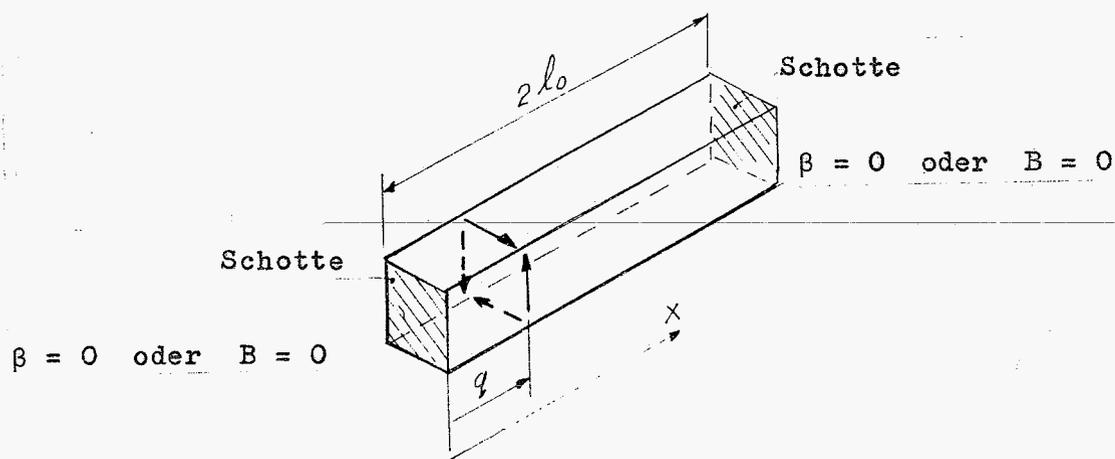


Abb. 5.4

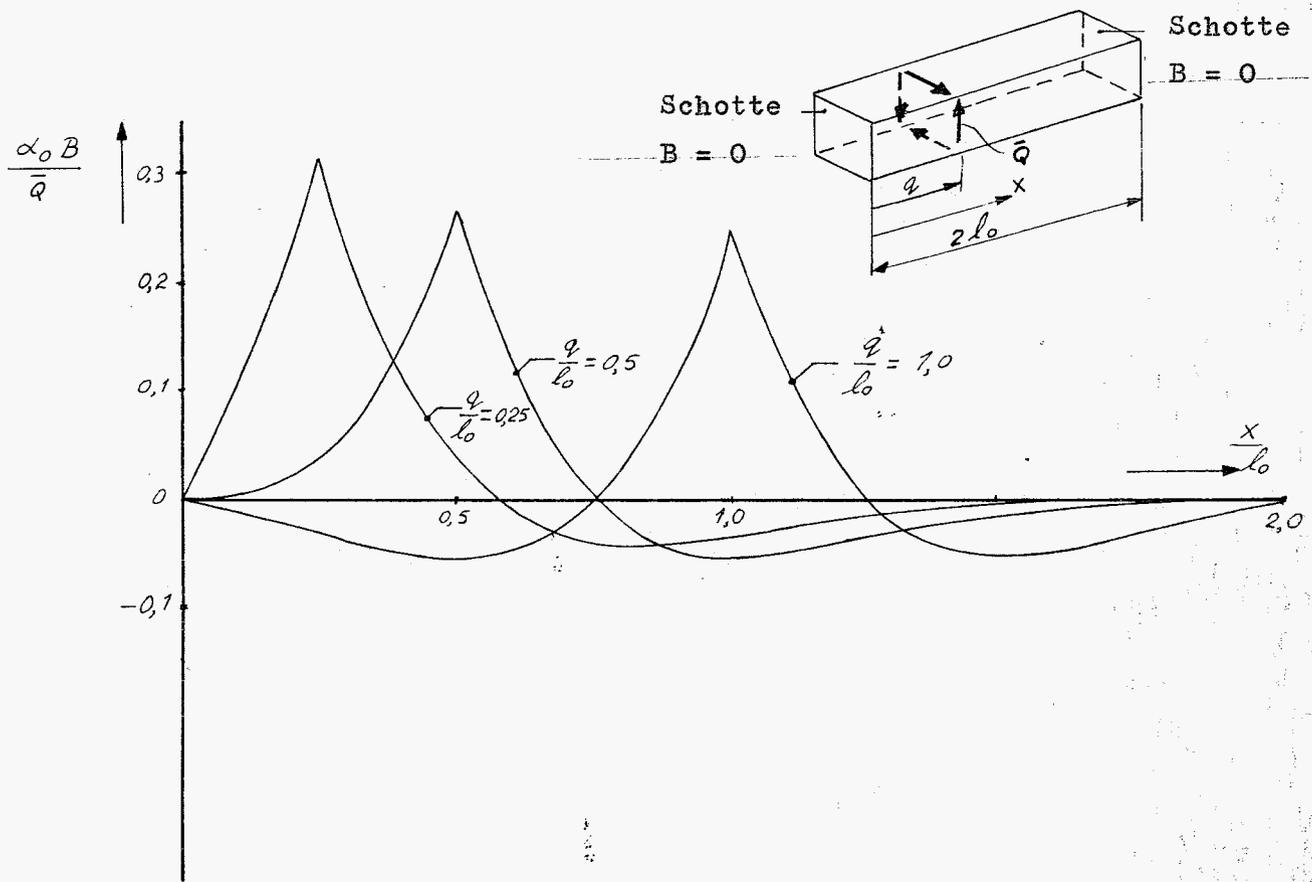


Abb. 5.5.a

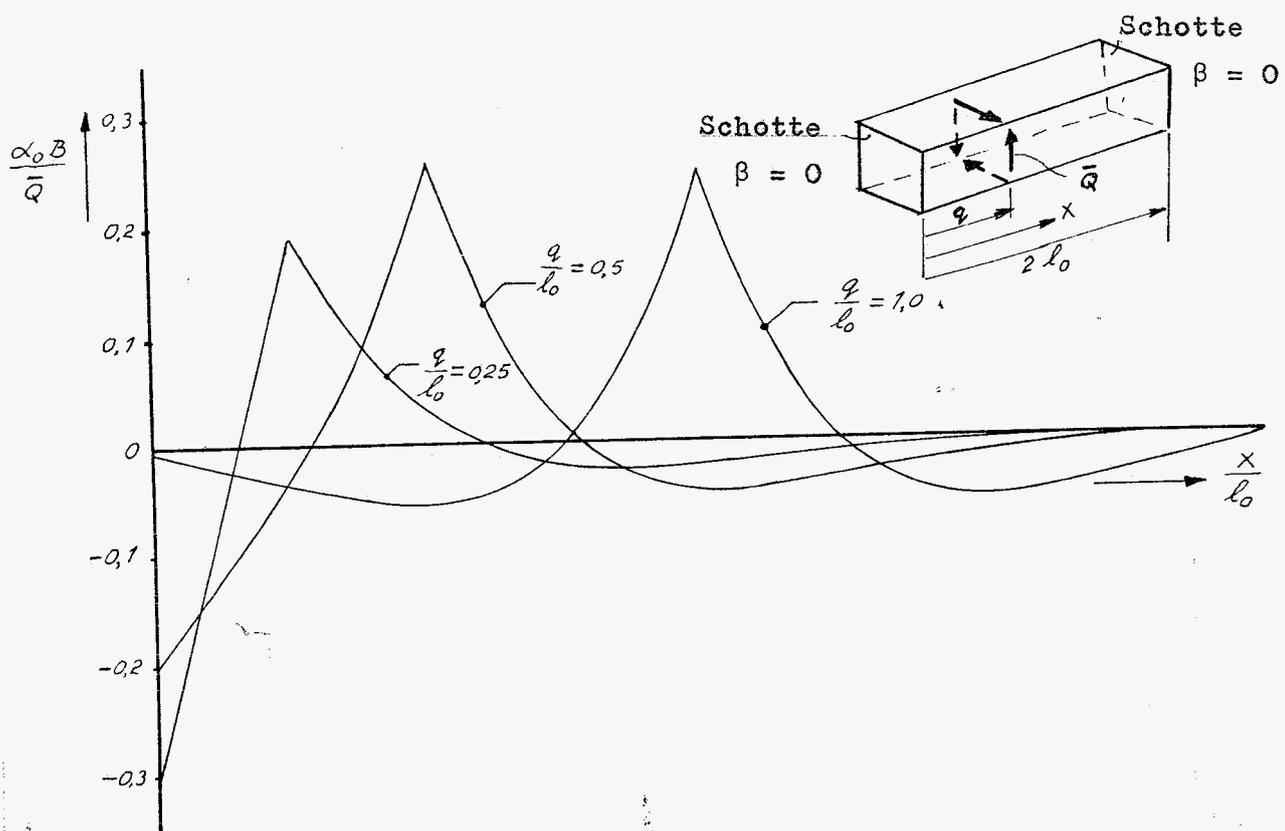


Abb. 5.5.b

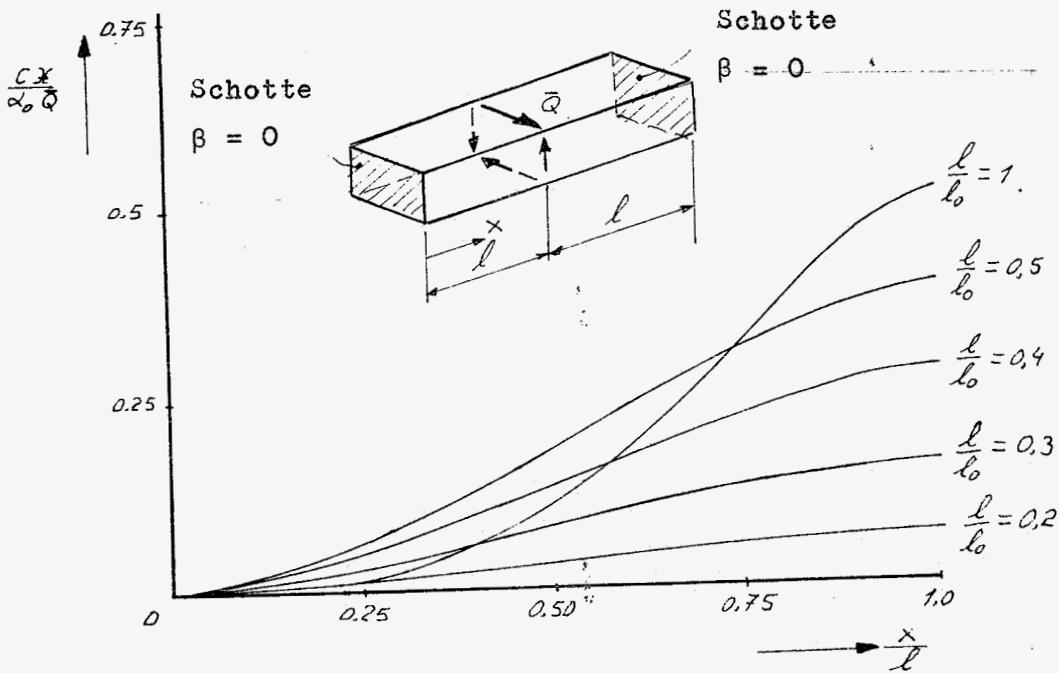


Abb. 5.9.b

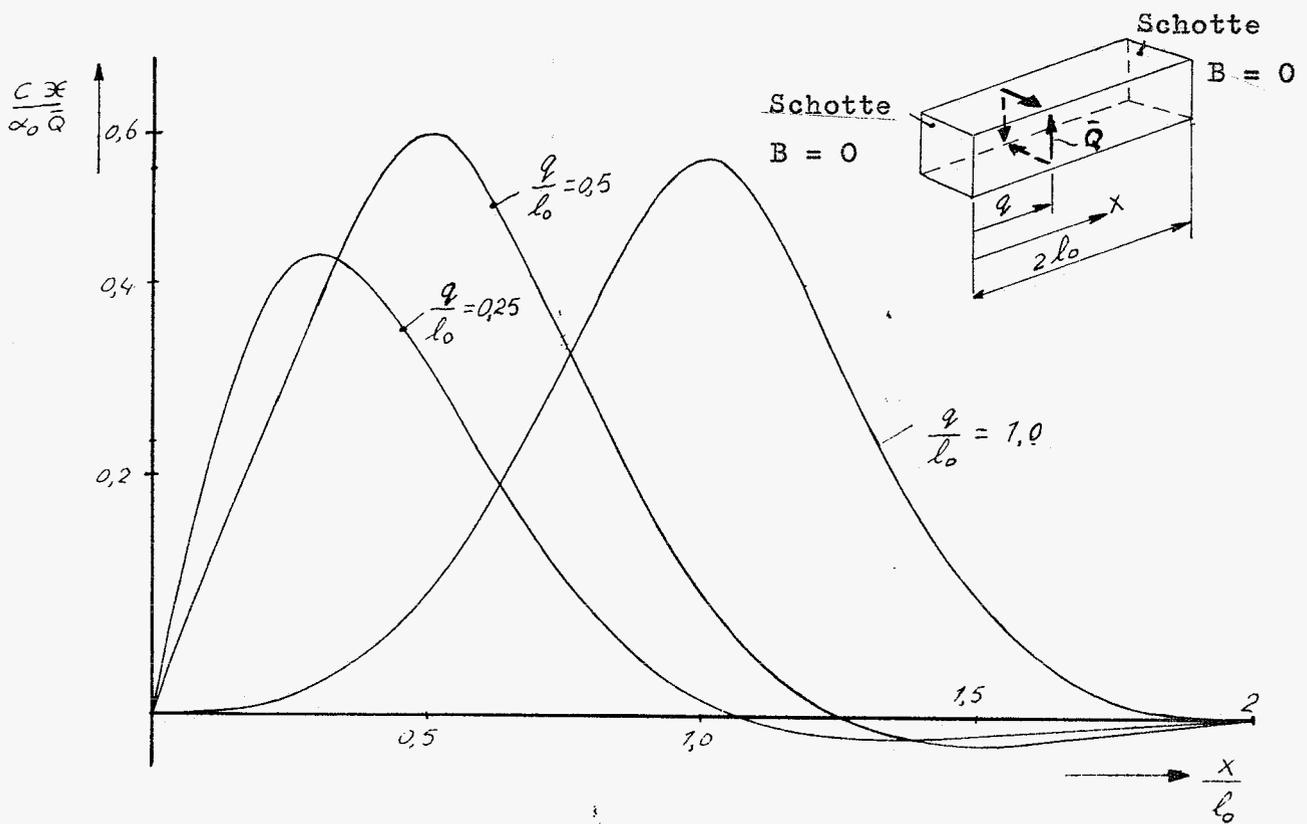


Abb. 5.6.a

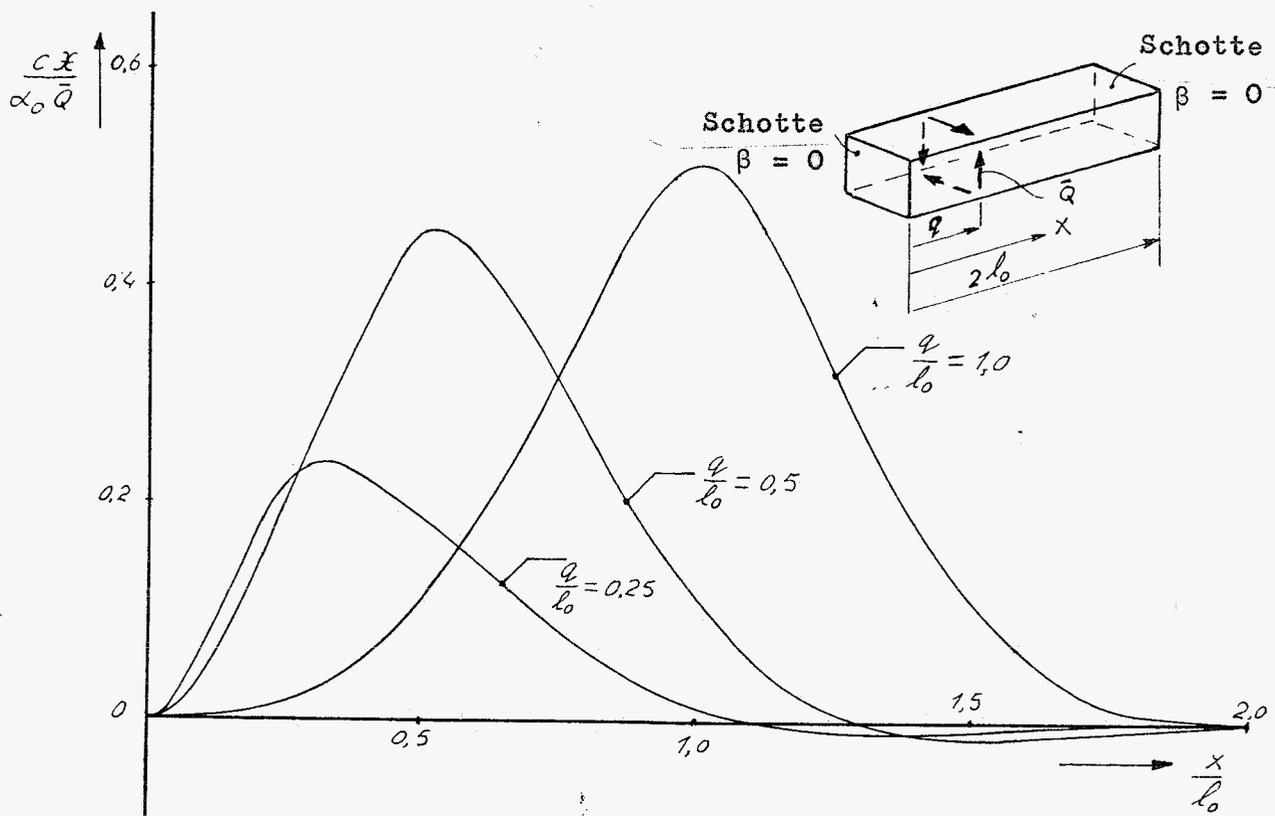


Abb. 5.6.b

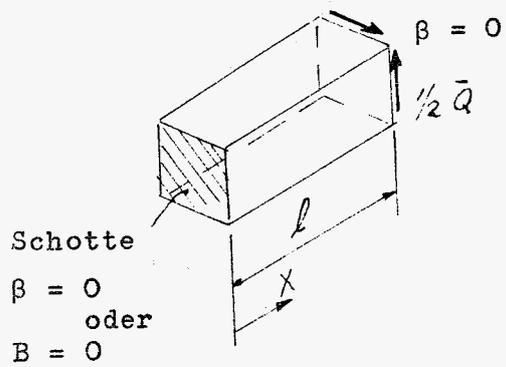
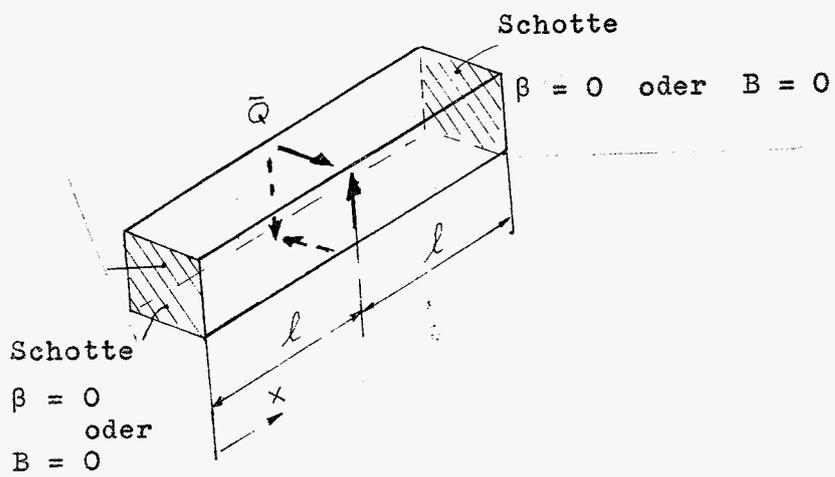


Abb. 5.7

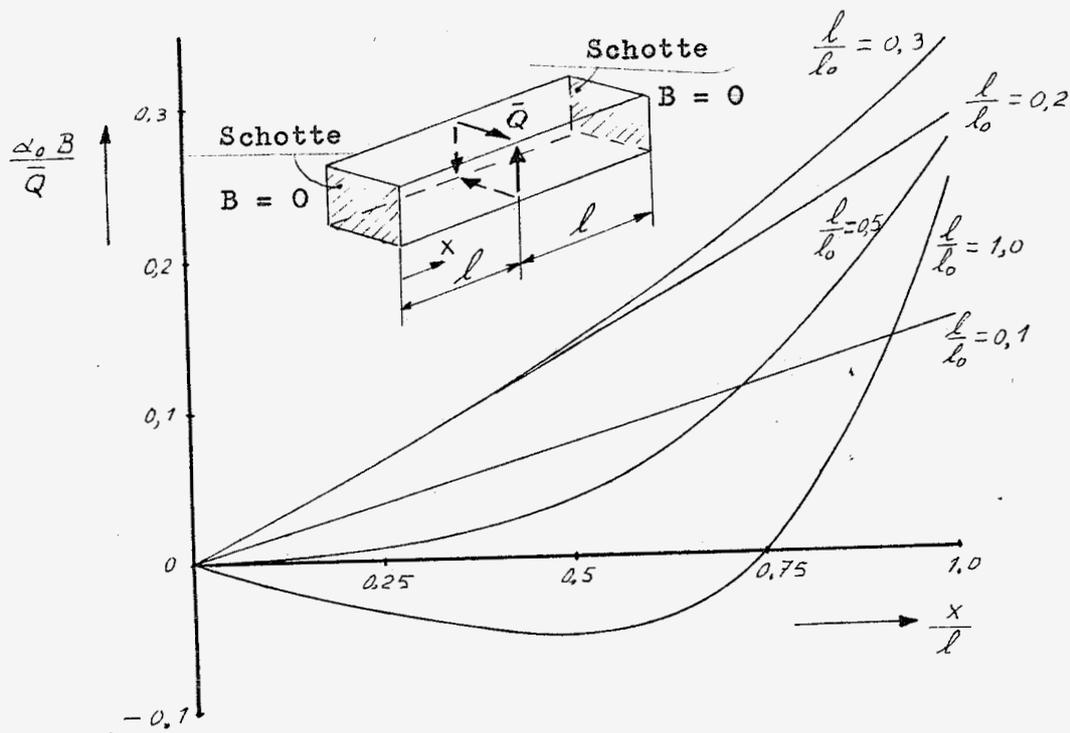


Abb. 5.8.a

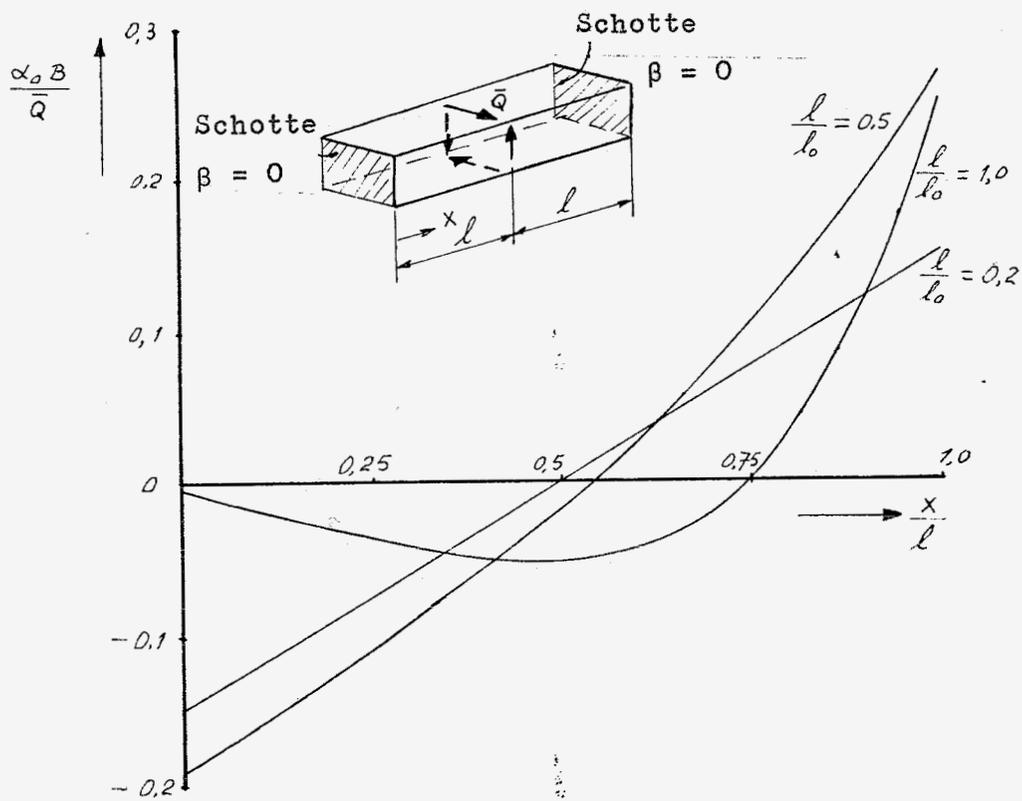


Abb. 5.8.b

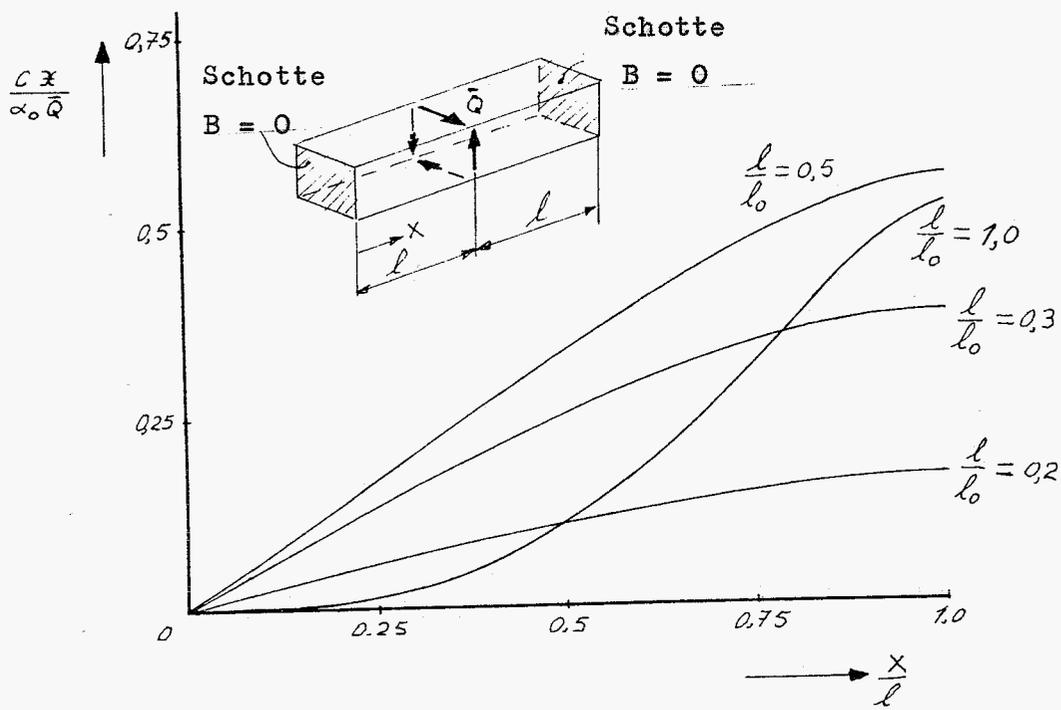


Abb. 5.9.a

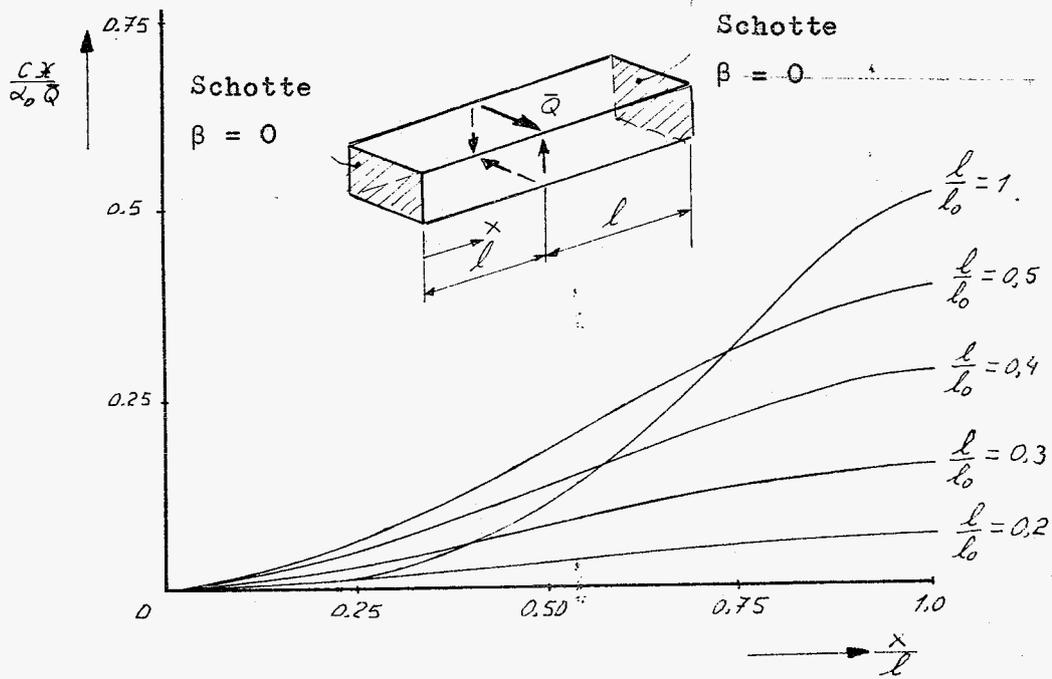


Abb. 5.9.b

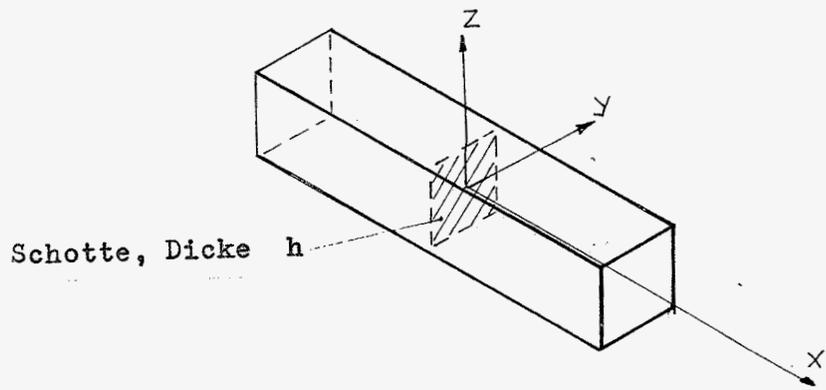


Abb. 6.1

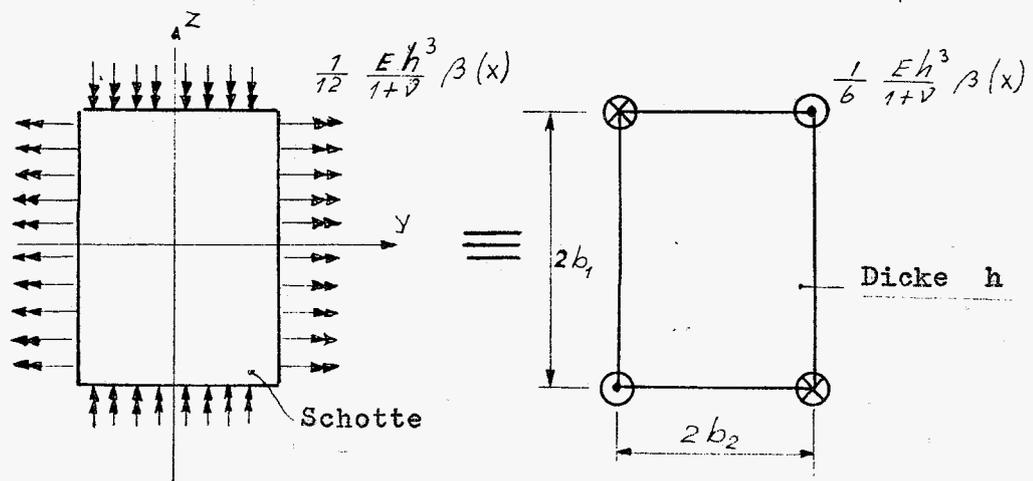


Abb. 6.2

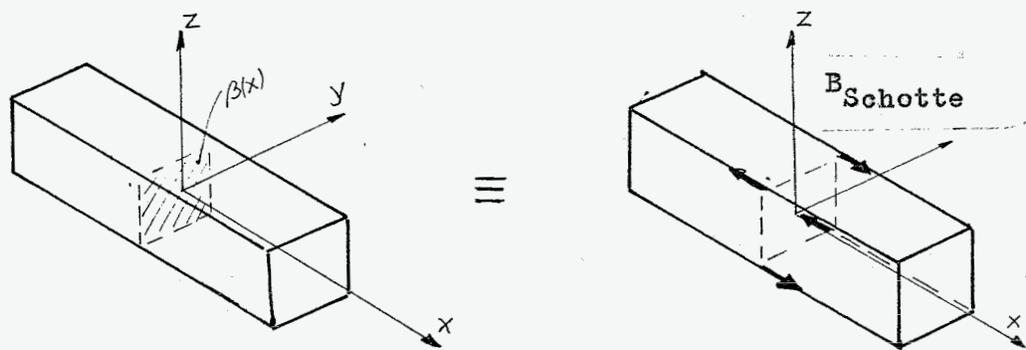


Abb. 6.3

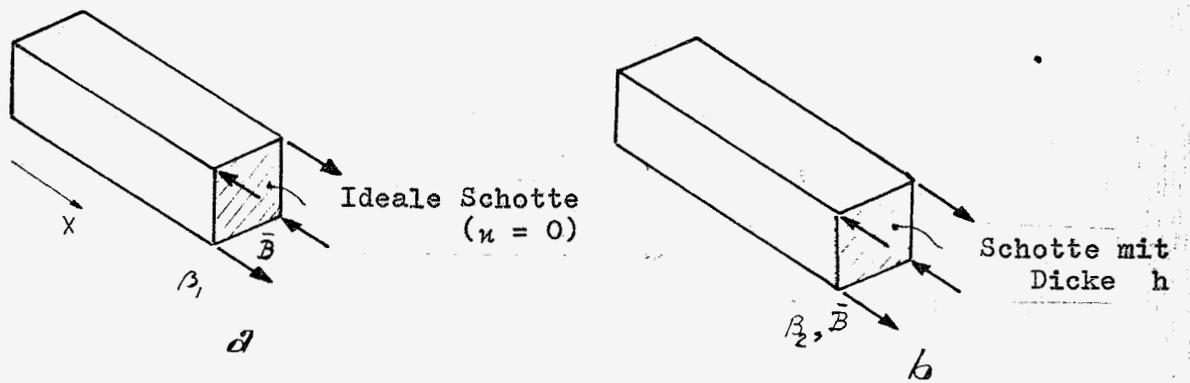
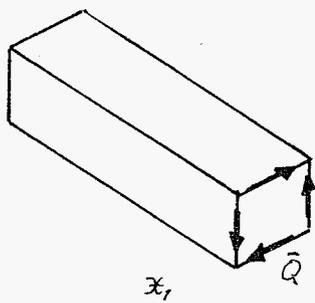
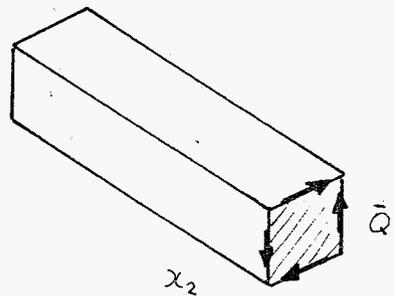


Abb. 6.4



Keine Schotte

a



nicht-starre
Schotte

b

Abb. 6.5

Bildunterschriften:

- Abb. 1.1 Der Träger mit Belastung im Endquerschnitt.
- 1.2 Die in der klassischen Theorie interessante Belastungsgrössen.
- 3.1 Der Trägerquerschnitt.
- 4.1 Kastenträger mit 5 Querschotten (einschliesslich Endschotte).
- 4.2 Trägerelement.
- 4.3 $f_1 = f_1(\lambda, \varepsilon)$
- 4.4 $f_2 = f_2(\lambda, \varepsilon)$
- 4.5 Querschnitt des Trägers.
- 4.6 $\sigma_{ax} = \sigma_{ax}(x, \lambda)$
- 4.7 $\tau_e = \tau_e(x, \lambda)$
- 4.8 $\sigma_b = \sigma_b(x, \lambda)$
- 4.9 $\sigma_{ax} = \sigma_{ax}\left(\frac{l_s}{l}, \frac{l}{l_0}\right)$
- 4.10 $\tau_e = \tau_e\left(\frac{l_s}{l}, \frac{l}{l_0}\right)$
- 4.11 $\sigma_{ax} = \sigma_{ax}\left(x, \frac{l_s}{l}\right)$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$
- 4.12 $\tau_e = \tau_e\left(x, \frac{l_s}{l}\right)$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$
- 4.13 $\sigma_b = \sigma_b\left(x, \frac{l_s}{l}\right)$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$
- 5.1 Dimensionslose Schnittgrössen in Abhängigkeit von $\alpha_0 x$.
- 5.2 Dimensionslose Schnittgrössen in Abhängigkeit von $\alpha_0 x$.
- 5.3 Charakteristische Probleme falls der Querschottenabstand kleiner als l_0 ist.
- 5.4 Belastung mit einem Bimoment \bar{Q} mit beliebiger Angriffsstelle $x = q$ falls der Querschottenabstand grösser ist als $2l_0$.
- 5.5.a $\frac{\alpha_0 B}{Q} = \frac{\alpha_0 B}{Q}\left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0}\right)$ falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

$$5.5.b \quad \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right) \quad \text{falls} \quad \beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$$

$$5.6.a \quad \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right) \quad \text{falls} \quad B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$$

$$5.6.b \quad \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right) \quad \text{falls} \quad \beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$$

5.7 Belastung mit einem, in der Mitte angreifenden Bimoment \bar{Q} falls der Querschottenabstand kleiner ist als $2l_0$.

$$5.8.a \quad \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{1}{l_0} \right) \quad \text{falls} \quad B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$$

$$5.8.b \quad \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{1}{l_0} \right) \quad \text{falls} \quad \beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$$

$$5.9.a \quad \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{1}{l_0} \right) \quad \text{falls} \quad B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$$

$$5.9.b \quad \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c\kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{1}{l_0} \right) \quad \text{falls} \quad \beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$$

6.1 Kastenträger mit nicht-idealer Querschotte.

6.2 Belastung der Querschotte.

6.3 Durch die nicht-ideale Querschotte verursachte zusätzliche Belastung des Trägers.

6.4 Träger mit einer idealen und nicht-idealen Querschotte (Bild a, bzw. Bild b), belastet mit einem Bimoment \bar{B} .

6.5 Träger ohne und mit Endschotte (Bild a, bzw. Bild b), belastet mit einem Bimoment \bar{Q} .