Ervaringen met de wiskundige omgangstaal WOT

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1980-09

juni 1980

Ervaringen met de wiskundige omgangstaal WOT

door

L.S. van Benthem Jutting, J.G.M. Donkers,
W.H.J.H. van Meeuwen, R.P. Nederpelt,
C.P. van Nieuwkasteele en J.T. Udding.

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Nederland

Inhoud:

1. Inleiding

De Wiskundige OmgangsTaal WOT is een systeem van regels en notaties waarmee men een wiskundige gedachtengang overzichtelijk en helder gestructureerd op papier kan zetten. Het voorlopige ontwerp van WOT is afkomstig van N.G.de Bruijn (zie [4] én [5]). Hij ging uit van ideeën die ter sprake komen in zijn college Taal en Structuur van de Wiskunde ([3]). Het WOT-systeem als geheel is nog niet in een definitieve vorm uitgewerkt.

Een aantal leden van de wiskunde-afdeling van de Technische Hogeschool Eindhoven (de"WOT-groep") heeft ervaringen opgedaan met het schrijven van wiskundeteksten volgens de voorlopige conventies van WOT. Dit memorandum is te beschouwen als een verslag van de werkzaamheden en de bevindingen van deze groep in de periode mei tot oktober 1979. Het geeft WOT-vertalingen van een drietal wiskundeteksten, met een toelichting. De WOT-groep bestond in deze tijd uit:

L.S. van Benthem Jutting, J.G.M. Donkers, W.H.J.H. van Meeuwen, R.P. Nederpelt, C.P. van Nieuwkasteele en J.T. Udding.

Dit memorandum heeft de volgende inhoud.
In paragraaf 2 wordt een overzicht gegeven van de taalmiddelen van WOT die gebruikt zijn bij het schrijven van de wiskundeteksten.
In paragraaf 3 worden de vertalingen in WOT gegeven van een drietal wiskundige teksten uit één gebied: de algemene topologie. De teksten zijn genomen uit hoofdstuk 5 van het boek Algebra en Analyse van S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint ([1]), een Nederlandstalig leerboek voor jongerejaars wiskundestudenten aan universiteiten en hogescholen.
De drie teksten behelzen:

1. <u>een stukje algemene theorie</u> (5.1 - 5.1.3, blz. 235-236 uit Algebra en Analyse; de definities van topologische ruimte en van enige daarmee samenhangende begrippen, gevolgd door een aantal directe consequenties);
2. <u>de uitwerking van een opgave</u> (5.3.9, blz.244; over verbanden tussen enige topologische begrippen);
3. <u>het bewijs van een stelling</u> (5.7.7, blz.258; "een continue afbeelding met een compacte verzameling als domein is uniform continu").

Elk van deze vertalingen wordt gevolgd door een korte toelichting. (De drie WOT-teksten zijn afkomstig van verschillende auteurs; dit is nog merkbaar aan de verschillen in stijl en notatie.)
Algemene opmerkingen over het gebruik van WOT en over de met WOT opgedane ervaringen staan in paragraaf 4.
De teksten uit het boek Algebra en Analyse waarvan vertalingen zijn gemaakt, zijn gereproduceerd in een appendix.

De auteurs van dit memorandum wijzen er met enige nadruk op dat de voorbeeldteksten niet in een soort "standaard-WOT" zijn geschreven. De teksten zijn bedoeld om weer te geven hoe de taalmiddelen van WOT in de praktijk kunnen worden toegepast, en zijn in dat opzicht illustratief. Maar aan andere aspecten, zoals variatie in stijl en woordkeus - van belang voor een goede leesbaarheid - is weinig aandacht geschonken. Bovendien zal men in de teksten weinig toelichting vinden.

2. Overzicht van de gebruikte taalmiddelen uit WOT

a. Onderstellingen, introducties

In een wiskundige redenering kan men op twee manieren een bewering toevoegen die maar een beperkte geldigheidsduur heeft: door een onderstelling te maken ("Stel dat de driehoek gelijkbenig is") of door een variabele van een zeker "type" te introduceren ("Laat x een (willekeurig) reëel getal zijn"). Dit kan cumulatief gebeuren: binnen het geldigheidsgebied van de ene onderstelling of introductie kan men een andere opvoeren. Op elke plaats in een (WOT-)tekst kan men daarom een context aanwijzen die bestaat uit:

1. de op dat ogenblik geldige onderstellingen, en
2. de op dat ogenblik geldige, in de tekst geïntroduceerde variabelen, elk met een beschrijving van hun type.

Niet alleen het begin van de geldigheidsduur van onderstellingen en geïntroduceerde variabelen wordt in WOT duidelijk aangegeven, maar ook het einde daarvan. Dit gebeurt als volgt. Een tekstgedeelte waarin wordt verondersteld dat een propositie P (uitgedrukt m.b.v. bekende en geldige grootheden) geldig is, wordt zó gemarkeerd:

```
┌──────────────────┐
│ Onderstel dat P  │
├──────────────────┘
│ ----
│ ----
└
```

De onderstelling staat in een rechthoekige contextvlag; de betreffende tekst staat rechts van de vlaggestok. De onderstelling houdt op geldig te zijn aan de voet van de vlaggestok.

De introductie van een variabele wordt gemarkeerd door een gepunte contextvlag:

```
┌──────────────────┐
│ Laat x ∈ A zijn   >
├──────────────────┘
│ ----
│ ----
└
```

Hier is x de geïntroduceerde variabele; A dient uitgedrukt te zijn m.b.v. bekende of geldige grootheden. De vlaggestok geeft opnieuw de geldigheidsduur aan.

De onderstelling dat de propositie P geldig is, vindt meestal plaats om een bewijs van een implicatie van de vorm $P \Rightarrow Q$ of van de negatie $\neg P$ te leveren. De introductie van een variabele x die een element van de verzameling A representeert, leidt meestal een bewijs van een generalisatie in, die bijvoorbeeld de gedaante $\forall_{x \in A}$ [R(x)] heeft. Zie hiervoor [6].

Een bewijs kan altijd zo georganiseerd worden dat de vlaggestokken "genest" voorkomen. Een onderbreking in de geldigheidsduur kan desondanks gewenst zijn, en kan worden aangegeven door een onderbreking in de vlaggestok:

Het taalgebruik in verband met onderstellingen en introducties ligt, ook in dit memorandum, niet vast. In plaats van

Laat $x \in A$ zijn 〉 wordt bijvoorbeeld ook geschreven

Laat $x \in A$ 〉 of $x \in A$ 〉 (Vgl. § 4.1.)

Vlaggen worden soms gecombineerd. Voorbeelden:

Laat V_1 en V_2 gesloten verzamelingen zijn 〉

Laat $V \subset R$ 〉 Stel dat V compact is

b. Namen

Welbepaalde objecten kunnen in een zekere context een naam krijgen door middel van een naamsdefinitie. De volgende voorbeelden ontlenen we aan [5b]: "Het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek ABC wordt het zwaartepunt van die driehoek genoemd"; "π := de halve omtrek van een cirkel met straal 1". Namen gedefinieerd in een niet-lege context mogen alleen dan buiten die context gebruikt worden als ze voorzien zijn van passende argumenten (zie § 4.2).

c. Substantieven

Een substantief karakteriseert een bepaalde klasse. Zo hoort het substantief "natuurlijk getal" bij de klasse $\mathbb{N}$. Een substantief kan, zoals hier blijkt, meer zijn dan een enkel zelfstandig naamwoord; andere voorbeelden: "kwadratische vorm", "deler van k" (zie weer [5b]).

Door substantiefbinding kan aan een predikaat een substantief worden toegevoegd. Hiervoor wordt de hoofdletter S gebruikt. Zo kan aan het predikaat: "$k < 1000$", waarin de variabele k een geheel getal voorstelt, het substantief: $S_{k\in\mathbb{Z}}\ [k < 1000]$ worden toegevoegd. De laatste uitdrukking luidt in woorden: "geheel getal kleiner dan 1000", of: "geheel getal k met $k < 1000$". Met behulp van deze notatie kunnen substantieven gemakkelijk gedefinieerd worden, bijv.:

even getal := $S_{k\in\mathbb{Z}}\ [\exists_{m\in\mathbb{Z}}\ [k=2m]]$.

(WOT kent ook adjectieven. Zie hiervoor [5b].)

d. Zinnen

Een zin drukt een bewering uit. Deze kan door woorden, door formules of door een combinatie zijn vastgelegd. Door middel van een zinsdefinitie kan een (nieuwe) zin in de plaats treden van een andere, bijv.: n en m zijn relatief priem := (g.g.d.(n,m) = 1).

e. Typeringen

Een typering legt een verband tussen een object en zijn klasse. Als x een element is van klasse A, noteren we dit verband (zoals gebruikelijk) door $x \in A$. Als het substantief B de klasse A karakteriseert, kunnen we ook noteren $x : B$ (of ook: x is een B). In dat geval duiden $x \in A$ en $x : B$ hetzelfde verband aan. Voorbeeld: als $\mathbb{N}$ de verzameling van de natuurlijke getallen is, zijn "$n \in \mathbb{N}$" en "n : natuurlijk getal" verwisselbare uitspraken, omdat "natuurlijk getal" een substantief (een genererende naam) is behorend bij $\mathbb{N}$. De notatie $f : V \to R$ is in overeenstemming met het bovenstaande; we lezen: "f is een functie van V naar R".

Om van klasse naar substantief te komen, kan de bovenindex $^{\downarrow}$ gebruikt worden; voorbeeld: $\mathbb{N}^{\downarrow}$ staat voor "natuurlijk getal". (De pijl naar boven wordt wel gebruikt om een substantief in de bijbehorende klasse over te voeren: $(\text{natuurlijk getal})^{\uparrow}$ en $\mathbb{N}$ zijn synoniem.)

f. Standaardsymbolen en -namen

In een stuk WOT-tekst mogen ook namen, symbolen en dergelijke gebruikt worden die in het verleden gedefinieerd zijn. Hun betekenis wordt bekend verondersteld.

Namen en symbolen worden zoveel mogelijk op de gebruikelijke manier genoteerd. We geven hieronder enige voorbeelden.
- verzamelingsnotatie: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1000\}$, $\{1,2,\ldots,k\}$.
- $\mathbb{R}^+$ voor $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- logische operatoren, zoals $\Rightarrow$ voor implicatie ("als....dan", en niet "dus"), $\neg$ voor negatie, $\wedge$ voor conjunctie , $\vee$ voor disjunctie.
- quantoren: $\forall$ en $\exists$, voor respectievelijk "voor alle" en "er is".
- de verzamelingsoperatoren $\cup$ en $\cap$ voor vereniging en doorsnede.
- $\subset$ voor de inclusierelatie, $\in$ voor de elementrelatie.
- $P(X)$ voor de machtsverzameling van X, d.i. de collectie van alle deelverzamelingen van X.
- V^* voor het complement van V (t.o.v. een bekend universum).

Minder gebruikelijk is het door Freudenthal geïntroduceerde symbool Ψ voor functievorming. Voorbeeld: $\Psi_{x \in \mathbb{R}}\ [x^2]$ duidt de functie aan die aan elk reëel getal x de waarde x^2 toevoegt.
Commentaar verweven in een WOT-tekst, wordt wel vermeld tussen vierkante haken.

g. Afleidingsregels en logische wetten

We houden ons aan de regels van de natuurlijke deductie (zie bijvoorbeeld [2]), een systeem dat heel dicht staat bij de gebruikelijke manier van redeneren. Voor het werken met existentie, zie § 4.1. Ten overvloede zij vermeld dat we ons baseren op klassieke logica.

Tenslotte vestigen wij er de aandacht op, dat WOT niet bedoeld is om teksten te verfraaien, te vervolledigen of gegarandeerd foutloos te maken. WOT wil de structuur van wiskundige teksten verhelderen en WOT staat een consequente, duidelijke manier van uitdrukken voor. Maar binnen dit raam is veel variatie mogelijk. In de woorden van De Bruijn: WOT is (en blijft) een levende taal.

3.1 Algebra en Analyse, 5.1 t/m 5.1.2

Laat R een niet-lege verzameling zijn

Laat $\mathcal{T} \subset P(R)$ zijn

$T_1 := \emptyset \in \mathcal{T} \wedge R \in \mathcal{T}$.

$T_2 := \forall_{O_1 \in \mathcal{T}} \forall_{O_2 \in \mathcal{T}} [O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}]$.

$T_3 := \forall_{A:\text{indexverz.}} \forall_{O:A \to \mathcal{T}} [\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{T}]$.

topologische ruimte := $S_{R:\text{niet-lege verz}, \mathcal{T} \in P(R)} [T_1(R,\mathcal{T}) \wedge T_2(R,\mathcal{T}) \wedge T_3(R,\mathcal{T})]$.

Stel dat $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte is

open verzameling := $\mathcal{T}^{\downarrow}$.

punt := $R^{\downarrow}$.

topologie:= $S_{\mathcal{T} \subset P(R)} [(R,\mathcal{T})$ is een topologische ruimte].

Laat $P \in R$ zijn

omgeving van P:= $S_{\Omega:\text{open verz.}} [P \in \Omega]$.

gesloten verzameling := $S_{V \in P(R)} [R \backslash V \in \mathcal{T}]$.

[opgave 5.1.2a : Bewijs dat R gesloten is.]

$R \backslash R = \emptyset$ en $\emptyset \in \mathcal{T}$, dus R is gesloten.[opg.5.1.2a af]

[opgave 5.1.2b : Bewijs dat $\emptyset$ gesloten is.]

$R \backslash \emptyset = R$ en $R \in \mathcal{T}$, dus $\emptyset$ is gesloten.[opg.5.1.2b af]

[opgave 5.1.2c : Bewijs dat de vereniging van twee gesloten verzamelingen weer gesloten is.]

Laat V_1 en V_2 gesloten verzamelingen zijn [Bewijs dat $V_1 \cup V_2$ gesloten is.]

Dan $R \backslash V_1 \in \mathcal{T}$ en $R \backslash V_2 \in \mathcal{T}$. Ook: $R \backslash (V_1 \cup V_2) = (R \backslash V_1) \cap (R \backslash V_2)$.

Omdat T_2, is $(R \backslash V_1) \cap (R \backslash V_2)$ open, dus $V_1 \cup V_2$ is gesloten.

[opg. 5.1.2c af]

[opgave 5.1.2d: Bewijs dat de doorsnede van willekeurig veel gesloten verzamelingen weer gesloten is.]

Laat A : indexverz. zijn en laat $V : A \to P(R)$ zijn

Stel $\forall_{\alpha \in A} [V_\alpha$ is gesloten] [Bewijs dat $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ gesloten is.]

Dan is $\forall_{\alpha \in A} [R \backslash V_\alpha$ open]. Er geldt: $R \backslash \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (R \backslash V_\alpha)$.

Omdat T_3, is $\bigcup_{\alpha \in A} (R \backslash V_\alpha)$ open, dus $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ is gesloten.

[opg. 5.1.2d af]

Opmerkingen

1) Een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ is een geordend tweetal verzamelingen met een speciale structuur; omdat $\mathcal{T}$ een deelverzameling is van $P(R)$, kan de tweede component van het paar (de $\mathcal{T}$) niet bestaan zolang de eerste (de R) niet bekend is. Er zijn in de wiskunde ook drietallen, viertallen enz. met een dergelijke structuur, waarbij de k-de component mag afhangen van één of meer voorafgaande componenten (men denke bijvoorbeeld aan het algebraïsche begrip "groep"). De Bruijn spreekt in deze gevallen van telescopen. Men kan ze zien als speciaal gestructureerde, samengestelde substantieven. Voor telescopen zou een speciale notatie gebruikt kunnen worden, bijvoorbeeld:

$$\text{topologische ruimte} := S^{(2)}_{R,\mathcal{T}\,|\,R:\text{niet-lege verz.},\mathcal{T}\subset P(R)}[T_1(R,\mathcal{T}) \wedge$$
$$\wedge\ T_2(R,\mathcal{T}) \wedge T_3(R,\mathcal{T})]\ .$$

2) Merk op dat $R^{\downarrow}$ een korte notatie is voor $S_{x\in R}\ [x \in R]$ (of $S_{x\in R}\ [\ ]$).

3) In de WOT-tekst komt O voor als indicerende functie : $A \to \mathcal{T}$. Een functiewaarde schrijven we als O_α in plaats van $O(\alpha)$, in overeenstemming met de gewoonte. Merk op dat O_1 en O_2 geen functies of functiewaarden, maar open verzamelingen aanduiden. Dit kan misschien verwarring geven. Het is nog niet duidelijk hoe in het algemeen het best met indiceringen gewerkt kan worden.

4) We hebben ons de vrijheid veroorloofd om na de definitie van het substantief "gesloten verzameling" ook het adjectief "gesloten" te gebruiken, zonder formele definitie. Dit is hier mogelijk omdat het substantief "gesloten verzameling" opgebouwd is uit een bijvoeglijk en een zelfstandig naamwoord. We pleiten ervoor om dit gebruik ook algemeen in WOT op te nemen.

5) Kritiek op de tekst in het boek:

a) "Open verzameling" is te vroeg gedefinieerd (in def.5.11 in plaats van daarna).

b) Het is beter om bij de definitie van topologie duidelijk uit te laten komen dat we alleen van een topologie op R spreken als het paar $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte is..

3.2 Algebra en Analyse, opgave 5.3.9

Inleiding.

In deze opgave gebruiken we de volgende begrippen:

1 $R := \mathbb{R}^2$,

2 $T := \{O \in P(R) \mid \forall_{\underline{a}\in O}\ \exists_{\delta\in\mathbb{R}^+}\ \forall_{\underline{x}\in R}\ [|\underline{x} - \underline{a}| < \delta \Rightarrow \underline{x} \in O]\}$,

3 $d := \Psi_{(\underline{x},\underline{y})\in R\times R}[|\underline{x} - \underline{y}|]$.

4 Opmerking: (R,T) is een topologische ruimte. (5.1.6)

5 " (R,d) is een metrische ruimte. (5.2.2)

6 $\underline{x} \in R$

7 $\rho \in \mathbb{R}^+$

8 $B_{\underline{x},\rho} := B_{\underline{x},\rho}$ t.o.v. R en d.

9 $O \in P(R)$

10 O is open := O is open t.o.v. R en T.

11 $\underline{x} \in R$

12 omgeving van $\underline{x}$:= omgeving van $\underline{x}$ t.o.v. R en T.

13 $V \subset R$

14 verdichtingspunt van V := verdichtingspunt van V t.o.v. R en T.(5.3.6)

15 randpunt van V := randpunt van V t.o.v. R en T.(5.3.8)

16 inwendig punt van V := inwendig punt van V t.o.v. R en d.(5.2.7)

17 geïsoleerd punt van V := geïsoleerd punt van V t.o.v. R en T.(5.3.7)

Einde inleiding.

Te bewijzen is

18 $V \subset R$

19 i] := inwendige punten van V zijn verdichtingspunten van V,

20 ii] := geïsoleerde punten van V zijn randpunten van V,

21 iii] := randpunten van V zijn verdichtingspunt of geïsoleerd punt van V.

ad regel 16: Volgens de vertaler zou inwendig punt beter als algemeen topologisch begrip kunnen worden gedefinieerd.

22 $\underline{x}$: inwendig punt van V

23 O : omgeving van $\underline{x}$

24 $\exists_{a \in \mathbb{R}^+} [B_{\underline{x},a} \subset V]$. (wegens 22)

25 Kies zo'n a

26 $B_{\underline{x},a}$ is open. (5.2.10)

27 $B_{\underline{x},a} \cap O$ is open.

28 $\underline{x} \in B_{\underline{x},a} \cap O$.

29 dus $\exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} \forall_{\underline{y} \in \mathbb{R}} [|\underline{x} - \underline{y}| < \delta \Rightarrow \underline{y} \in B_{\underline{x},a} \cap O]$. (wegens 2)

30 Kies zo'n δ

31 $\underline{y}_0 := \underline{x} + (\delta/2, 0)$.

32 $\underline{y}_0 \neq \underline{x}$.

33 $|\underline{y}_0 - \underline{x}| = \delta/2$.

34 $|\underline{y}_0 - \underline{x}| < \delta$.

35 dus $\underline{y}_0 \in B_{\underline{x},a} \cap O$.

36 $\underline{y}_0 \in V$. (wegens 25)

37 $\underline{y}_0 \in O$.

38 dus $\exists_{\underline{y} \in O} [\underline{y} \in V \wedge \underline{y} \neq \underline{x}]$.

39 "

40 $\underline{x}$: verdichtingspunt van V.

41 $\forall_{\underline{x}\text{ : inwendig punt van V}} [\underline{x}$: verdichtingspunt van V]. (i]')

ad regel 25: We verwijzen de lezer naar paragraaf 4, deel 1, van dit memorandum voor een beschrijving van de existentie-eliminatie, zoals die hier toegepast wordt (en verderop in de tekst nog een aantal malen zal terugkomen).

42 $\underline{x}$: geïsoleerd punt van V

43 O : omgeving van $\underline{x}$

44 $\underline{x} \in V$.

45 $\underline{x} \in O$.

46 $O \cap V \neq \emptyset$.

47 $\exists_{O_1 : \text{ omgeving van } \underline{x}} [O_1 \cap V = \{\underline{x}\}]$. (wegens 42)

48 Kies zo'n O_1

49 $O_1 \cap O$ is open.

50 $\underline{x} \in O_1 \cap O$.

51 dus $\exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} \forall_{\underline{y} \in R} [|\underline{y} - \underline{x}| < \delta \Rightarrow \underline{y} \in O_1 \cap O]$.

52 Kies zo'n δ

53 $\underline{y}_0 := \underline{x} + (\delta/2,0)$.

54 $\underline{y}_0 \neq \underline{x}$.

55 $\underline{y}_0 \in O$.

56 $\underline{y}_0 \in O_1$.

57 $\underline{y}_0 \notin V$.

58 daarom $\underline{y}_0 \in O \cap V^*$.

59 $O \cap V^* \neq \emptyset$.

60 "

61 $\underline{x}$: randpunt van V.

62 $\forall_{\underline{x}: \text{geïsoleerd punt van } V} [\underline{x} : \text{randpunt van } V]$. (ii])

(commentaar: het bewijs gaat net als in het bewijs van i])

63 $\underline{x}$: randpunt van V

64 $\neg$($\underline{x}$: verdichtingspunt van V)

65 $\exists_{O:\text{omgeving van } \underline{x}}\ \forall_{\underline{y} \in O}\ [\underline{y} \in V \Rightarrow \underline{y} = \underline{x}]$.

66 Kies zo'n O

67 $\underline{y} \in O \cap V$

68 $\underline{y} = \underline{x}$.

69 $\forall_{\underline{y} \in O \cap V}\ [\underline{y} = \underline{x}]$.

70 $O \cap V \neq \emptyset$. (wegens 63)

71 $\exists_{\underline{z} \in R}\ [\underline{z} \in O \cap V]$.

72 Kies zo'n $\underline{z}$

73 $\underline{z} = \underline{x}$.

74 $\underline{x} \in O \cap V$.

75 "

76 $O \cap V = \{\underline{x}\}$. (wegens 69 en 75)

77 $\exists_{O:\text{omgeving van } \underline{x}}\ [O \cap V = \{\underline{x}\}]$.

78 "

79 $\underline{x}$: geïsoleerd punt van V.

80 ($\underline{x}$: verdichtingspunt van V) $\vee$ ($\underline{x}$: geïsoleerd punt van V).

81 $\forall_{\underline{x}:\text{ randpunt van V}}\ [\underline{x}\text{:verdichtingspunt van V} \vee \underline{x}\text{:geïsoleerd punt van V}]$. (iii])

Einde opgave 5.3.9

Opmerkingen

1) bij regels 4 tot en met 12: Is het niet handig om herdefinities in één klap te geven? Bijv.:"In deze opgave gebruiken we alle topologische definities t.o.v. R en T."

2) bij regel 16: Op- of aanmerkingen over de oorspronkelijke tekst behoren niet in de WOT-tekst te worden opgenomen, ook niet als commentaar, maar kunnen worden vermeld in voetnoten.

3) bij regel 53: De naam $\underline{y}_0$ die in deze regel een betekenis krijgt,had in regel 31 reeds een (andere) betekenis gekregen. We hanteren hier de conventie dat de oude betekenis hiermee vervalt.

3.3 <u>Algebra en Analyse, stelling 5.7.7</u>

("Laten (R,d) en (R',d') metrische ruimten zijn, $V \subset R$, f een afbeelding van V in R'. Als V compact is en f continu op V dan is f uniform continu op V.")

1 Laat (R,d) en (R',d') metrische ruimten zijn

2 Laat $V \subset R$ 〉 Stel dat V compact is

3 Laat $f : V \to R'$ 〉 Stel dat f continu is

4 Dus $\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \forall_{P\in V} \exists_{\delta\in\mathbb{R}^+} \forall_{Q\in B_{P,\delta}} [d'(f(P),f(Q)) < \varepsilon]$.

5 Laat $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

6 Dan geldt $\forall_{P\in V} \exists_{\delta\in\mathbb{R}^+} \forall_{Q\in B_{P,\delta}} [d'(f(P),f(Q)) < \varepsilon/2]$.

7 Toepassing van het keuze-axioma levert:

8 $\exists_{\delta:V\to\mathbb{R}^+} \forall_{P\in V} \forall_{Q\in B_{P,\delta(P)}} [d'(f(P),f(Q)) < \varepsilon/2]$.

9 Laat $\delta: V \to \mathbb{R}^+$ 〉 Stel dat $\forall_{P\in V} \forall_{Q\in B_{P,\delta(P)}} [d'(f(P),f(Q)) < \varepsilon/2]$

10 Definieer $A := \{B_{P,\frac{1}{2}\delta(P)} \mid P \in V\}$.

11 Op grond van 5.2.10 is A een verzameling open verzamelingen.

12 Laat $P \in V$

13 Dan geldt $P \in B_{P,\delta(P)}$,

14 $\exists_{O\in A} [P \in O]$.

15 $\forall_{P\in V} \exists_{O\in A} [P \in O]$.

16 Dus A is een overdekking van V met open verzamelingen.

17 V is compact.

18 Dus $\exists_{A' \subset A, A'\text{eindig}} [A'$ is overdekking van $V]$.

19 En dus $\exists_{k\in\mathbb{N}} \exists_{g:\{1,\dots,k\}\to V} [V \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{g_i,\frac{1}{2}\delta(g_i)}]$.

20 Laat $k \in \mathbb{N}, g:\{1,\ldots,k\} \to V$ ⟩ Stel dat $V \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{g_i,\frac{1}{2}\delta(g_i)}$

21 $\{\frac{1}{2}\delta(g_i) \mid i \in \{1,\ldots,k\}\}$ is een eindige niet-lege deelverzameling

22 van $\mathbb{R}$, dus kunnen we definiëren

23 $\delta_0 := \min\{\frac{1}{2}\delta(g_i) \mid i \in \{1,\ldots,k\}\}$.

24 Dan geldt $\delta_0 > 0$.

25 Laat $P_1, Q_1 \in V$ ⟩ Stel dat $d(P_1,Q_1) < \delta_0$

26 Er geldt $V \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{g_i,\frac{1}{2}\delta(g_i)}$.

27 Dus $\exists_{i\in\{1,\ldots,k\}} [P_1 \in B_{g_i,\frac{1}{2}\delta(g_i)}]$.

28 Laat $i \in \{1,\ldots,k\}$ ⟩ Stel dat $P_1 \in B_{g_i,\frac{1}{2}\delta(g_i)}$

29 Nu geldt $\delta_0 \leq \frac{1}{2}\delta(g_i)$.

30 Dus geldt $d(P_1,Q_1) < \frac{1}{2}\delta(g_i)$.

31 Dus $d(g_i,Q_1) \leq d(g_i,P_1) + d(P_1,Q_1)$

32 $< \frac{1}{2}\delta(g_i) + \frac{1}{2}\delta(g_i) = \delta(g_i)$.

33 Dus $Q_1 \in B_{g_i,\delta(g_i)}$.

34 Dus $d'(f(g_i),f(Q_1)) < \varepsilon/2$.

35 En ook $d'(f(g_i),f(P_1)) < \varepsilon/2$.

36 Dus $d'(f(P_1),f(Q_1)) < \varepsilon$.

37 Conclusie: $d'(f(P_1),f(Q_1)) < \varepsilon$.

38 Conclusie: $\forall_{P_1,Q_1\in V} [d(P_1,Q_1) < \delta_0 \Rightarrow d'(f(P_1),f(Q_1)) < \varepsilon]$.

39 Dus $\exists_{\delta_1\in\mathbb{R}^+} \forall_{P_1,Q_1\in V} [d(P_1,Q_1) < \delta_1 \Rightarrow d'(f(P_1),f(Q_1)) < \varepsilon]$.

40 Conclusie: idem

41 Conclusie: idem

42 Conclusie: $\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}^+} \forall_{P,Q\in V} [d(P,Q) < \delta \Rightarrow d'(f(P),f(Q)) < \varepsilon]$.

43 Dus: f is uniform continu op V.

Opmerkingen

1) Opvoer van variabelen en van direct daarop volgende onderstellingen over die variabelen, noteren we in één blok. Zoals blijkt levert dit bij de afvoer geen problemen op.

2) We nemen aan dat de opvoer van een paar (R,d) als metrische ruimte mogelijk is. Vergelijk de definitie van topologische ruimte in § 3.1.

3) In mededelingen als "V is compact" (waarbij $V \subset R$) wordt onderdrukt dat compactheid t.o.v. de door d geïnduceerde topologie bedoeld wordt. Evenmin wordt expliciet vermeld dat in de definitie van bijv. $B_{P,\delta}$ de metriek d gebruikt is.

4) In plaats van de gebruikelijke notatie van een functiewaarde hanteren we de subscript-notatie (b.v. g_i i.p.v. $g(i)$) indien het argument de rol van een index vervult.

5) Namen van op te voeren variabelen worden weloverwogen gekozen. Soms identiek aan in vergelijkbare rol voorkomende gebonden variabelen, soms daarvan in accent of subscript verschillend. Van het gebruik van de δ in $\exists_{\delta \in \mathbb{R}^+}$ en $\exists_{\delta : V \to \mathbb{R}^+}$ in opvolgende zinnen gaat een sterke suggestie uit, die weliswaar het verschil in typering niet goed benadrukt, maar de leesbaarheid van $\delta(P)$ vergroot.

6) Tijdens de vertaling bleek dat het volgen van de tekst toepassing van het keuze-axioma vereist.

4. Algemene opmerkingen

1. In de wiskundige schrijftaal ligt niet vast op welke wijze men gebruik kan maken van een existentiële bewering (dat is een bewering van de vorm $\exists_{x\in A}$ [P(x)]). Het is ongewenst om de gebonden variabele x uit de bewering $\exists_{x\in A}$ [P(x)] zonder meer als "constante" op te vatten, zoals in de zin: "$\exists_{x\in \mathbb{R}}$ [$x \geq 1$], dus $x > 0$". De introductie van x op een dergelijke impliciete wijze kan gemakkelijk tot conflicten leiden.

In de natuurlijke deductie is het niet ongebruikelijk om als volgt te handelen. De uitgangssituatie is dat de bewering $\exists_{x\in A}$ [P(x)] geldig is, terwijl deze existentie van belang is voor de afleiding van de bewering Q. Om deze afleiding te realiseren voert men eerst een variabele $x' \in A$ op, vervolgens onderstelt men dat P(x') geldt en daarna leidt men Q af op grond van de geldigheid van $x' \in A$ en P(x'), dus zonder een direct beroep op de geldigheid van $\exists_{x\in A}$ [P(x)]. Deze afleiding van Q, gecombineerd met de geldigheid van de genoemde existentiële bewering, maakt tenslotte dat Q ook geldig is <u>buiten</u> de context van de variabele x' en de onderstelling P(x').

Schematisch ziet dit bewijsprocédé - genaamd existentie-eliminatie - er als volgt uit (de linkerversie is in WOT-notatie; de rechter in de notatie van natuurlijke deductie).

$\exists_{x\in A}$ [P(x)]

Laat $x' \in A$ zijn

Onderstel P(x')

....

....

Q

Q

$$\frac{\exists_{x\in A}[P(x)] \qquad \begin{array}{c}(x'\in A, P(x'))\\ \\ Q\end{array}}{Q}$$

De zinsdelen $x' \in A$, P(x')en Q kunnen in een concrete situatie gecompliceerd van vorm zijn. Een voorschrift dat dwingt om deze zinsdelen te herhalen, zoals dat in de bovenstaande schema's gebeurt, lijkt daarom niet altijd praktisch. Een gedeeltelijke oplossing is om de twee vlaggen uit het linker schema samen te voegen in de enkele introductie:

Kies zo een x

Van beide geschetste vormen, met twee gecombineerde vlaggen en met één, vindt men voorbeelden in de vertalingen uit paragraaf 3.

2. Het in dit memorandum toegepaste systeem van vlaggen met vlaggestokken zorgt ervoor dat geïntroduceerde variabelen en onderstellingen een zichtbare, wel-bepaalde levensduur hebben. Iets dergelijks geldt echter niet voor <u>constanten</u> (dat zijn gedefinieerde namen en substantieven). Om een voorbeeld te geven: in dit stuk wordt de constante B gebruikt, die men als volgt gedefinieerd kan denken:

Laat (R,d) een metrische ruimte zijn

Laat $P \in R$ zijn en $r \in \mathbb{R}^+$

$B_{P,r} := \{Q \in R \mid d(P,Q) < r\}$

(Merk op dat door de bovenstaande wijze van noteren bij elk gebruik van B wèl steeds de laatste twee argumenten ("de P en de r") moeten worden neergeschreven, maar dat de eerste twee ("de R en de d") weggelaten mogen worden. De conventie die door deze notatiewijze wordt gesuggereerd maken we verder niet expliciet.)
Nu mag de constante B ook worden gebruikt in elk stuk tekst dat hierop volgt, buiten de twee vlaggen, mits er duidelijk is welke metrische ruimte men bedoelt èn er aan B passende onder-indices worden meegegeven; in de metrische ruimte $(\mathbb{R}^2, |\ |)$ mag men het bijvoorbeeld hebben over $B_{(1,1),\sqrt{2}}$, of over $B_{P_0,\delta(P_0)}$ voor bekende $P_0 \in \mathbb{R}^2$ en $\delta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$.

Een dergelijke afspraak over het gebruik van constanten is wenselijk en praktisch. Toch zijn er in dit verband enige vragen. (1) Als men later aan B een andere betekenis wil geven (men kan bijvoorbeeld denken aan de Bernoulli-polynomen), kan dat dan zonder meer? (2) Zou er ook een taalmiddel moeten zijn waarmee het einde van de geldigheid van een constante kan worden aangegeven?

We geven geen definitieve antwoorden op deze vragen. Wel geven we het volgende in overweging:

(1) Het lijkt ons aanvaardbaar dat een woord (of symbool) mag worden hergedefinieerd, mits men afspreekt dat na herdefinitie de oude betekenis verloren is.

(2) Een paragraafsysteem kan helpen om de geldigheid te beperken: men kan overeenkomen dat een constante zonder meer geldig is binnen de paragraaf van definitie, maar daarbuiten alleen onder vermelding van die paragraaf. Verdergaande taalmiddelen (bijvoorbeeld een mogelijkheid om de constante c af te voeren met "exit c") lijken voorlopig onnodig.
In dit verband merken we op dat er wel behoefte bestaat aan een taalmiddel om het einde van een teksteenheid te kunnen markeren, bijvoorbeeld het einde van een bewijs of van de uitwerking van een opgave (vgl. het teken $\square$, dat wel gebruikt wordt voor: einde bewijs).

3. Men kan zich afvragen of het nuttig is om bepaalde letters te reserveren voor een bepaald gebruik, door bijvoorbeeld af te spreken: n is altijd een natuurlijk getal, ε altijd een positief reëel getal. Een weloverwogen, specifiek gebruik van letters (en woorden) lijkt aanbevelenswaardig, omdat er een suggestieve werking van uit kan gaan. Deze werking kan bijvoorbeeld berusten op klankovereenkomst ("O duidt steeds een open verzameling aan") of op gewoonte ("ε is steeds groter dan 0"). Toch lijkt het niet wenselijk om taalmiddelen ter beschikking te stellen die een dergelijk specifiek gebruik officieel maken. Als bijvoorbeeld een open verzameling in het algemeen door de letter O gaat worden voorgesteld, hoe geeft men dan een <u>rij</u> open verzamelingen weer? Een oplossing als $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ brengt met zich mee dat de letter O nu zelf geen open verzameling meer voorstelt, maar een functie (van $\mathbb{N}$ naar de collectie van open verzamelingen).

4. Tijdens de besprekingen kwam naar voren dat WOT zeer geschikt is om de structuur van een tekst te verduidelijken. In het bijzonder lijkt WOT een goed middel om toe te passen bij de voorbereiding van een les (voordracht enz.) die aan de hand van de wiskundige tekst zal worden gegeven. Sommige specifieke moeilijkheden van een tekst, die bijvoorbeeld door een grote gedachtensprong of een verborgen definitie worden veroorzaakt, komen bij een vertaling in WOT onontkoombaar aan de oppervlakte.

Literatuur

[1] S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint: Algebra en Analyse, 2e herziene druk. Academic Service, Den Haag, 1976.

[2] J.M. Anderson and H.W. Johnstone: Natural Deduction. Wadsworth Publication Co., Belmont, U.S.A., 1962.

[3] N.G. de Bruijn: Collegesyllabus Taal en Structuur van de Wiskunde. Voorjaarssemester 1978, Technische Hogeschool Eindhoven.

[4] N.G. de Bruijn: Overzicht van WOT, gekoppeld aan getypeerde verzamelingstheorie. Ongepubliceerd, maart 1979.

[5] N.G. de Bruijn: (a) Wees contextbewust in WOT; (b) Grammatica van WOT; (c) Van alles en nog wat over gebonden variabelen in wiskundige taal; (d) Wiskundigen, let op Uw Nederlands.
Euclides, 55e jaargang, no.1,2,6 en 10 (1979/80).

[6] R.P. Nederpelt: Bewijsmethoden. Aanvullende syllabus bij de instructie Algebra en Analyse. Onderafdeling der Wiskunde, T.H. Eindhoven, januari 1976.

Appendix

Drie teksten uit Algebra en Analyse van S.T.M. Ackermans en J.H. van Lint.

1. Blz. 235-236.

5.1. Topologische ruimten

Om een aantal eigenschappen van **R** en **C**, o.a. van limieten, te bestuderen, voeren we abstracte structuren in waarin dezelfde eigenschappen te vinden zijn. Stellingen over **R** en **C** zijn dan gevolgen van meer algemene uitspraken. Bovendien is dan duidelijker welke eigenschappen van **R** en **C** we gebruiken om deze stellingen te bewijzen.

5.1.1. DEFINITIE. *Een topologische ruimte* (R,T) *is een niet lege verzameling* R *met een collectie* T *van deelverzamelingen, die we open verzamelingen in* R *noemen, met de volgende eigenschappen:*

T1 : $\emptyset \in T$, $R \in T$,

T2 : $\forall_{O_1 \in P(R)} \forall_{O_2 \in P(R)} [(O_1 \in T \wedge O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)]$,

T3 : $(\forall_{\alpha \in A} [O_\alpha \in T]) \Rightarrow (\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in T)$.

In T3 stelt A een willekeurige indexverzameling voor. In woorden: de doorsnede van twee open verzamelingen is open (T2) en de vereniging van willekeurig veel open verzamelingen is open (T3). De elementen van R noemen we *punten* van de ruimte R. De collectie $T \subset P(R)$ heet een *topologie* van R. Als in een topologische ruimte (R,T) de verzameling Ω open is en $P \in R$, $P \in \Omega$, dan noemen we Ω een *omgeving* van P. Sommige auteurs nemen de definitie van omgeving nog ruimer en noemen $V \in P(R)$ een omgeving van P als er een open verzameling Ω is met $P \in \Omega \subset V$. Erg veel verschil maakt dit niet.
Een verzameling $V \in P(R)$ heet *gesloten* deelverzameling van de topologische ruimte (R,T) als $R \backslash V \in T$. Anders gezegd: een gesloten verzameling is het complement van een open verzameling.

5.1.2. OPGAVE. Zij (R,T) een topologische ruimte. Bewijs dat R en $\emptyset$ gesloten zijn. Bewijs dat de vereniging van twee gesloten verzamelingen gesloten is en dat de doorsnede van willekeurig veel gesloten verzamelingen gesloten is.

2. Blz. 244.

5.3.9. OPGAVE. Zij $R:=\mathbb{R}^2$, T als in 5.1.6, $V\subset R$. Ga na dat

(i) inwendige punten van V zijn verdichtingspunten van V,

(ii) geïsoleerde punten van V zijn randpunten van V,

(iii) randpunten van V zijn verdichtingspunt of geïsoleerd punt van V.

3. Blz. 258.

5.7.7. STELLING. *Laten* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$*,* f *een afbeelding van* V *in* R'*. Als* V *compact is en* f *continu op* V *dan is* f *uniform continu op* V.

Bewijs. f is continu in ieder punt van V, dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{P\in V}\ \exists_{\delta(P)>0}\ \forall_{Q\in B_{P,\delta(P)}}\ [d'(f(P),f(Q))<\tfrac{\varepsilon}{2}].$$

Het stelsel $\{B_{P,\frac{1}{2}\delta(P)} \mid P\in V\}$ is een overdekking van V met open verzamelingen. Deze bevat een eindige deeloverdekking. Laten $P_1,P_2,\ldots,P_k$ de middelpunten van de bollen van deze deeloverdekking zijn en $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta_{P_i} \mid 1\le i\le k\}$. Dan volgt uit $d(A,B)<\delta$ dat A en B in éénzelfde bol van het stelsel $\{B_{P_i,\delta(P_i)} \mid 1\le i\le k\}$ liggen en dus $d'(f(A),f(B))<\varepsilon$. Hiermee is aangetoond dat bij iedere $\varepsilon>0$ een $\delta>0$ is met de in 5.7.4 geëiste eigenschap.