

Enige aspecten van het dynamisch gedrag van de slede-aandrijving van een numeriek bestuurd werktuigmachine

Citation for published version (APA):

Oosterling, J. A. J. (1980). *Enige aspecten van het dynamisch gedrag van de slede-aandrijving van een numeriek bestuurd werktuigmachine*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0488). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1980

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

ARK
01
WPA

WT 0488

th e

Eindhoven University of Technology

Department of Mechanical Engineering

ENIGE ASPECTEN VAN HET DYNAMISCH GEDRAG VAN DE SLEDE-AANDRIJVING
VAN EEN NUMERIEK BESTUURDE WERKTUIGMACHINE.

Auteur: H. Oosterling.

PT-Rapport nr. 0488

november, 1980.



Division of Production Technology

Eindhoven
Netherlands

Inhoud.

blz.

INLEIDING.....	2
HOOFDSTUK 1. De combinatie servomotor - tachometer.....	3
1.1 Metingen aan de machine.....	3
1.2 Het mathematisch model van de motor- tacho- combinatie.....	5
1.3 Samenvatting.....	10
HOOFDSTUK 2. De sledepartij.....	11
2.1 Het dynamisch gedrag.....	11
2.2 Torsietrillingen van de sledepartij.....	12
2.3 Modelvorming van de sledepartij.....	14
BIJLAGEN.	
1. Afleiding van de D.V. van de motor-tacho-combinatie.....	17
2. De demping b_3	19
3. Berekening van de laagste eigenfrequentie van de sledepartij.....	20
4. Torsietrillingen in assen.....	21
LITERATUURLIJST.....	24

INLEIDING.

In het kader van de eindstudie aan de Technische Hogeschool te Eindhoven bij de afdeling der Werktuigbouwkunde, wordt door Han Oosterling, onder leiding van Prof.dr.ir. A.C.H. van der Wolf en ir. P.C. Mulders, beiden verbonden aan de THE, en ir. P. Erens, werkzaam bij Hembrug te Zaandam, een studie gemaakt over enkele aspecten van numeriek bestuurd werktuigmachines.

Het betreft hier een studie van de dynamische eigenschappen van het besturingsgedeelte voor de gereedschapsslede, bestaande uit versterker, servomotor, sledepartij, verplaatsings- en snelheidsopnemers met terugkoppelingen.

In dit tussentijds verslag wordt een deelonderzoek beschreven. Namelijk een onderzoek naar de dynamische eigenschappen van de servomotor met snelheidsopnemer en de sledepartij. In hoofdstuk 1 wordt de servomotor met snelheidsopnemer behandeld en hoofdstuk 2 handelt over de sledepartij.

Han Oosterling.
November, 1980.

HOOFDSTUK 1. De combinatie servomotor - tachometer.

1.1 Metingen aan de machine.

Een servomotor met tachometer, die door de Hembrug bij een van zijn draaibanken wordt gebruikt voor de aandrijving van de x- en de z-as van de slede, is op de TH onderzocht. Het gaat hier om een schijf-ankermotor van BBC: type BBCAXEM F12 T M19P. Van belang is het dynamisch gedrag van deze motor. Een kenmerk van schijfankermotoren is de relatief lage massa-tragheid van de rotor en het relatief hoge koppel, dat geleverd kan worden. Deze motoren hebben dan ook een grote bandbreedte. Bij dit type bedraagt de bandbreedte 17 Hz.

Er is een meetopstelling gemaakt om de BBC AXEM motor door te meten (Fig. 1.).

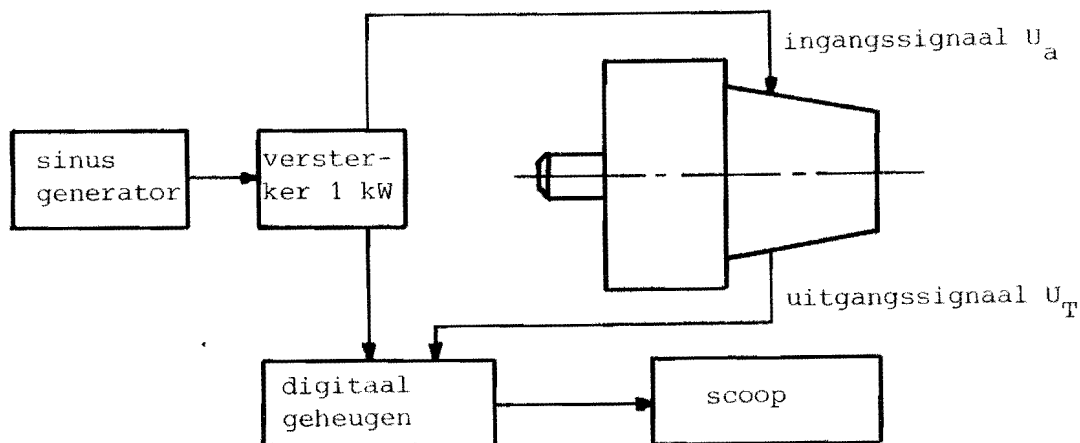
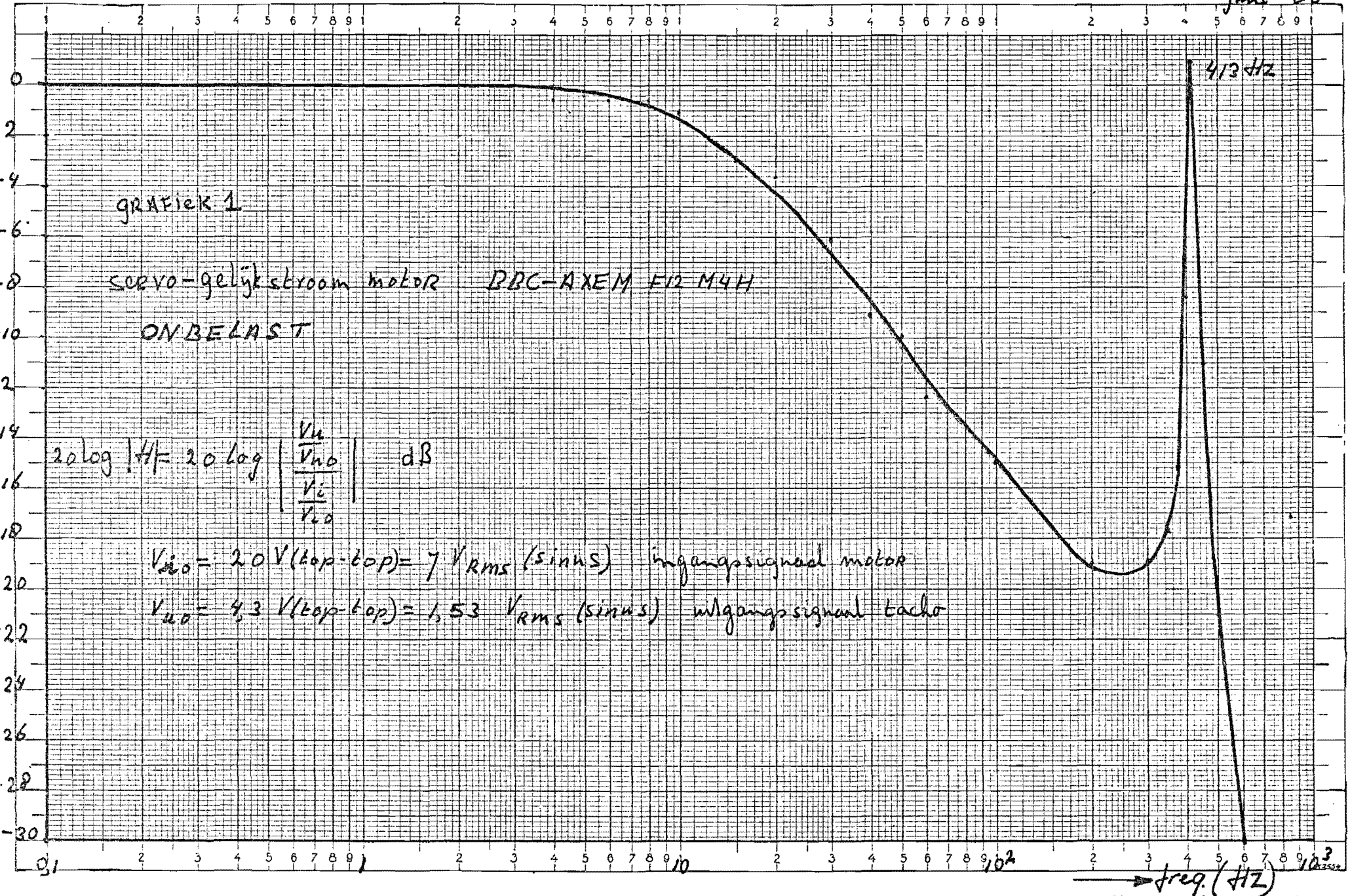


Fig. 1. Meetopstelling voor de BBC AXEM motor.

De resultaten zijn weergegeven in grafiek 1 t/m 5. Hierna volgt een korte bespreking van de meetresultaten.

Jun 80



grafiek 1

Servo-gelijkstroom motor BBC-AXEM F12 M4H

ONBELAST

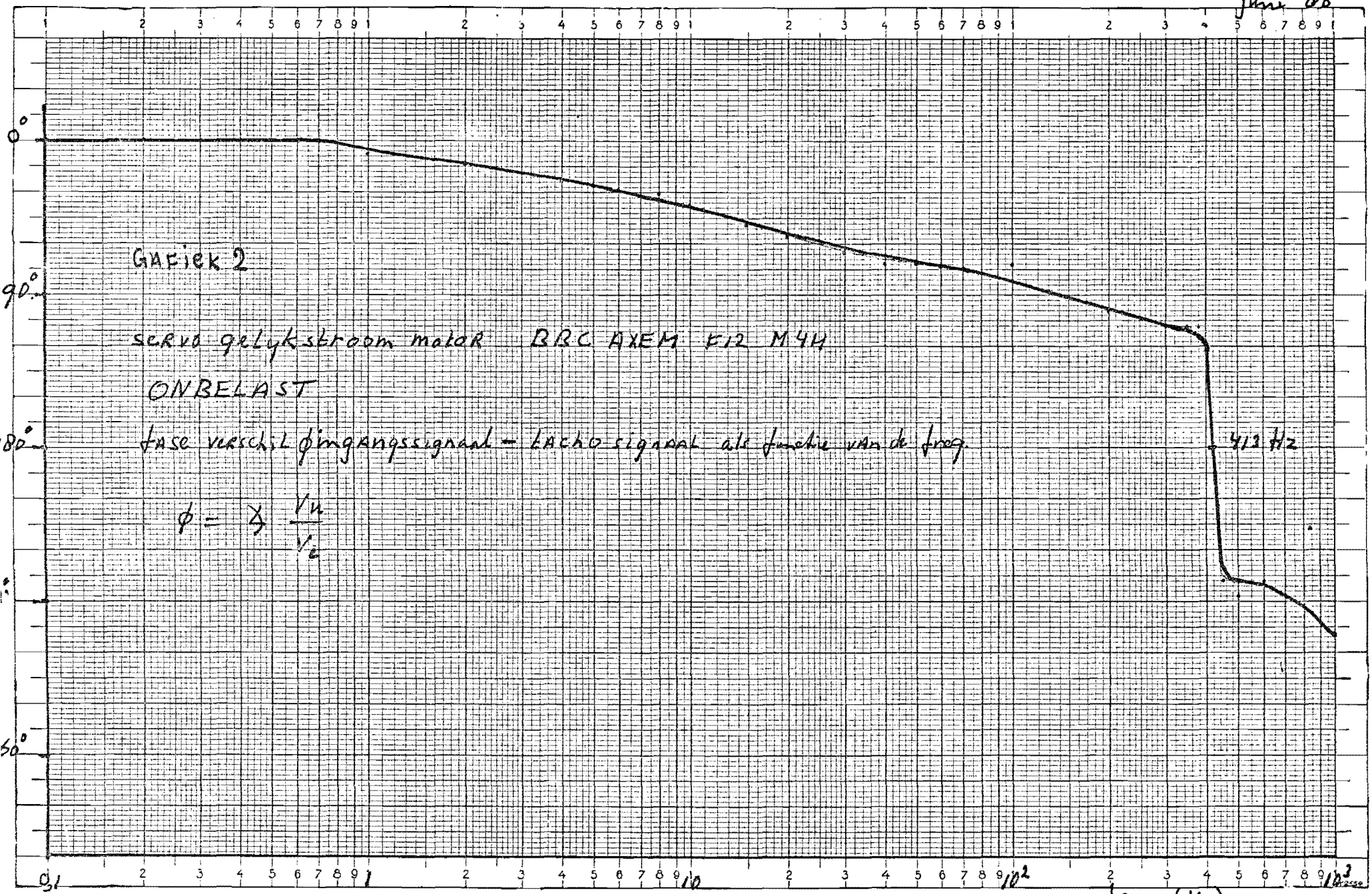
$$20 \log |H| = 20 \log \left| \frac{V_u}{V_{in}} \right| \text{ dB}$$

$V_{in} = 20 \text{ V (top-top)} = 7 \text{ V}_{RMS} \text{ (sinus)}$ ingangssignaal motor

$V_{uo} = 4,3 \text{ V (top-top)} = 1,53 \text{ V}_{RMS} \text{ (sinus)}$ uitgangssignaal tacho

4.13 Hz

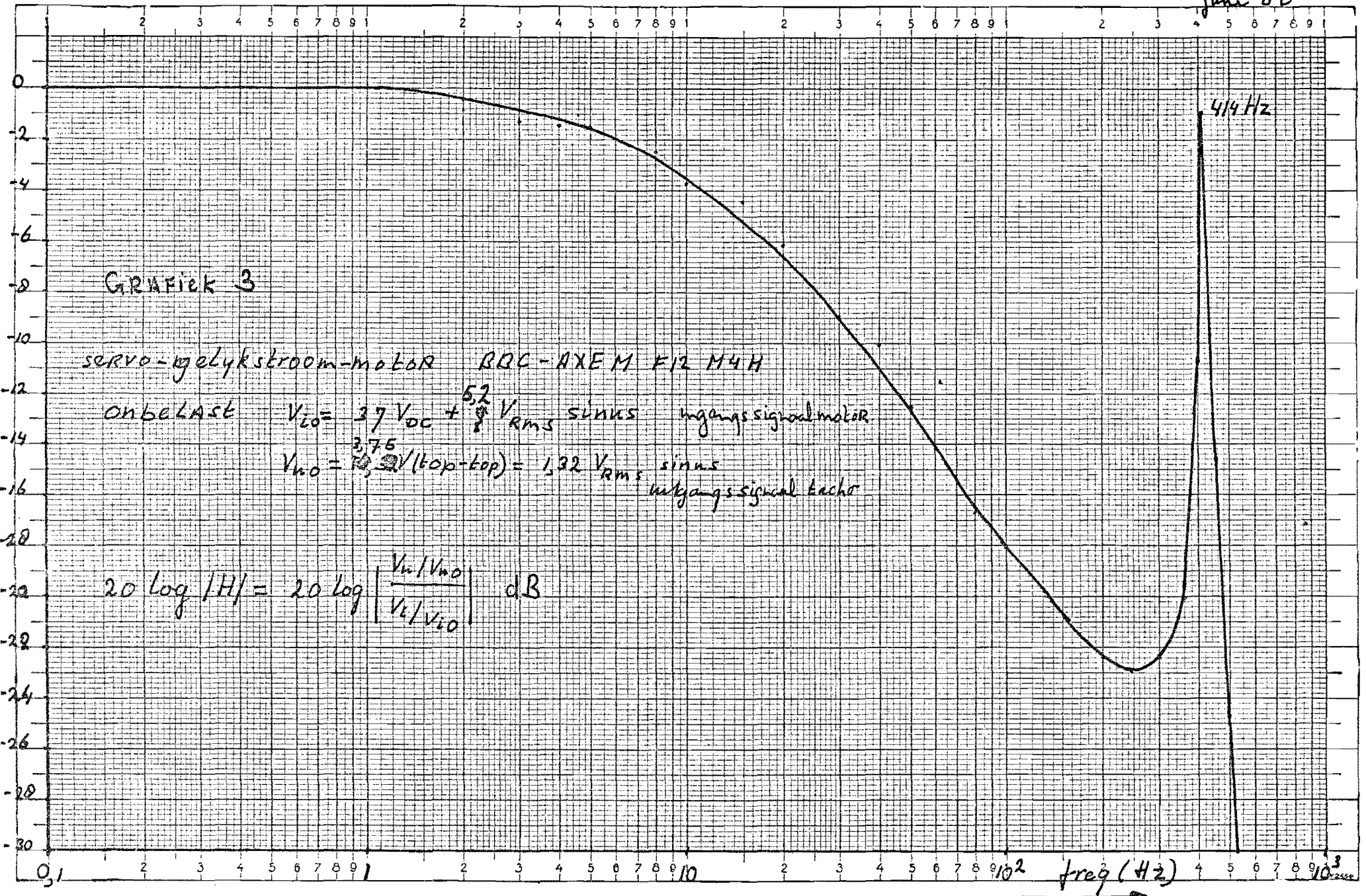
Jun 20

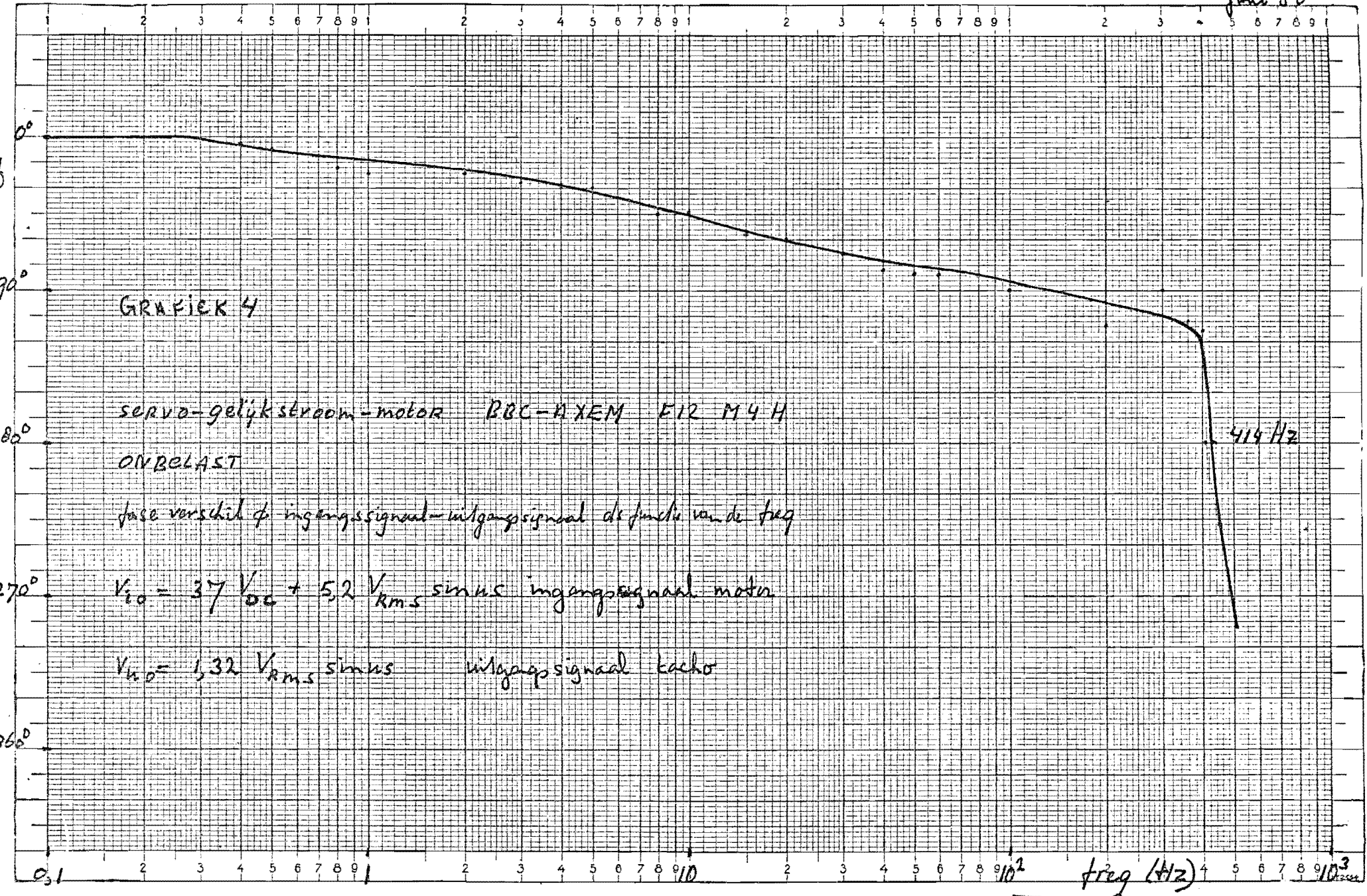


$$\phi = \frac{1}{4} \frac{1}{1/2}$$

→ freq. (Hz)

Jun 20





Jan '80

GRAFIEK 5

servo-gelijkstroom-motor BBC-AXEM

Achspanning V_u als functie van ingangsspanning motor V_i

$$V_{i,max} = 50 \text{ VDC}$$

$$V_{u,max} = 13,4 \text{ VDC}$$

V_u (ach)

10

5

0

0

10

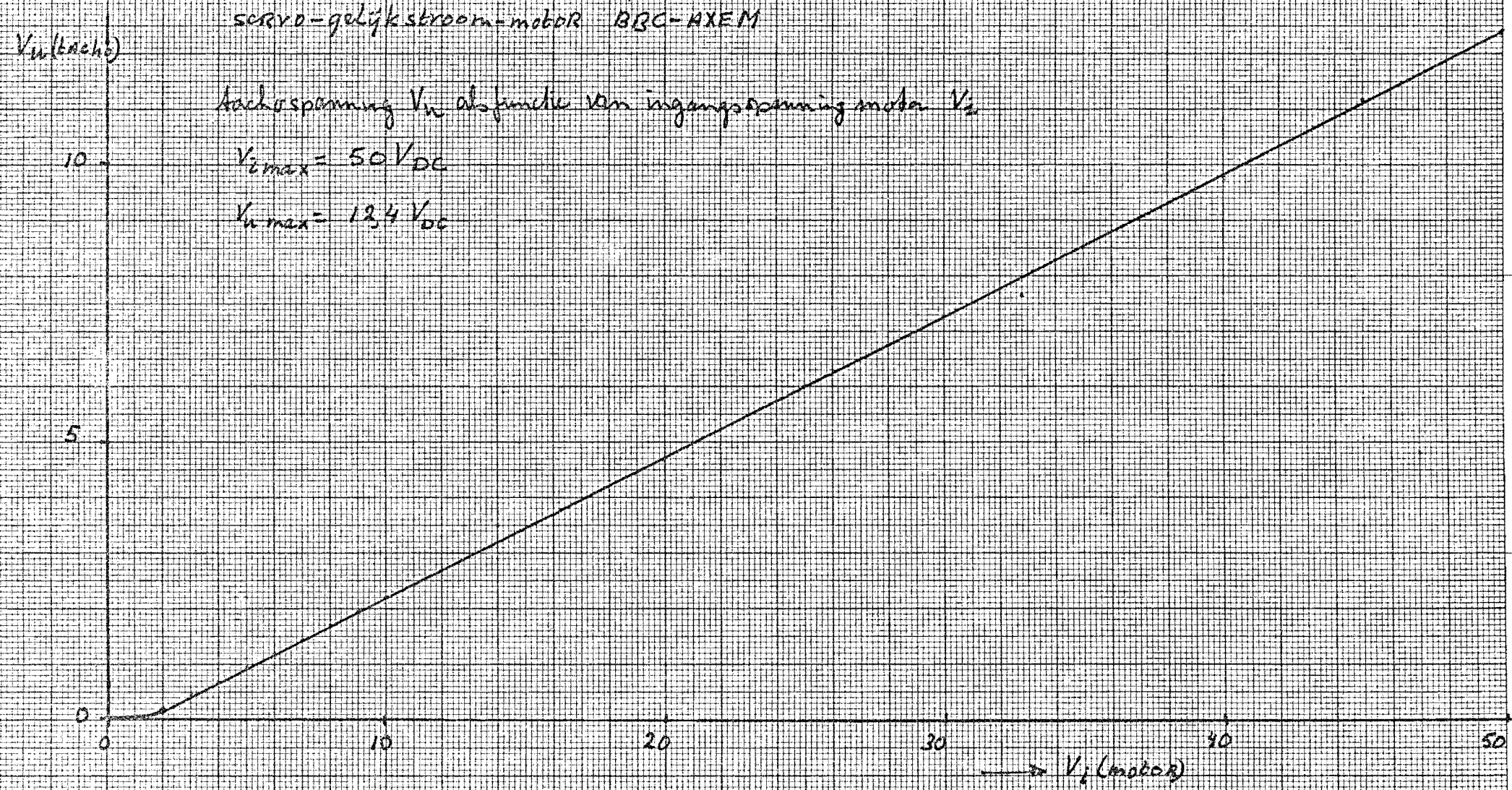
20

30

40

50

V_i (motor)



Uit grafiek 1 en 2, de bodediagrammen, blijkt een 1e orde afval met een sterke slingering bij 413 Hz voor te komen. Bij frequenties hoger dan 600 Hz is er nauwelijks meer sprake van een betrouwbaar uitgangssignaal. Het 3 dB punt van de 1e orde afval ligt bij 17 Hz. De 1e orde afval wordt veroorzaakt door de massatraagheid van de rotor van de motor en tachometer samen. De sterke opslingering is waarschijnlijk het gevolg van het bereiken van de mechanische eigenfrequentie van het systeem rotormotor - as - rotortacho: een systeem met 2 massa's, die verbonden zijn door een torsieveer (Fig. 2).

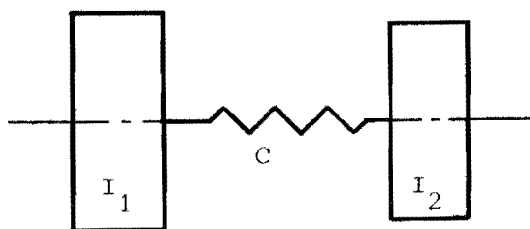


Fig. 2. Model van motor-tacho-combinatie van BBC-AXEM motor.

- I_1 massatraagheid van de motor.
- I_2 massatraagheid van de tacho.
- C veerstijfheid van verbindingsas.

Grafiek 3 en 4 geven de meetresultaten weer bij een ingangssignaal, dat opgebouwd is uit een gelijkspanning en een wisselspanning. Het gevolg is, dat de motor nu een richting uit blijft draaien. Het resultaat komt overeen met dat uit grafiek 1 en 2. In grafiek 5 is het verband gemeten tussen de tachospanning U_T en de rotorspanning (= ingangssignaal) U_a . Hieruit volgt:

$$\frac{U_T}{U_a} = 0,248 \quad \text{bij } \omega = 0 \text{ Hz.}$$

1.2 Het mathematisch model van de motor-tacho-combinatie.

Na de metingen is het nu van belang de resultaten te vergelijken met de resultaten, die volgen uit berekeningen aan het wiskundig model van deze motor. In het hiervolgende stuk zal een model ontwikkeld worden en vergeleken worden met de werkelijkheid.

We zullen ons eerst concentreren op het mechanische deel van de motor-tacho-combinatie. In Fig. 3 vindt U een model hiervan.

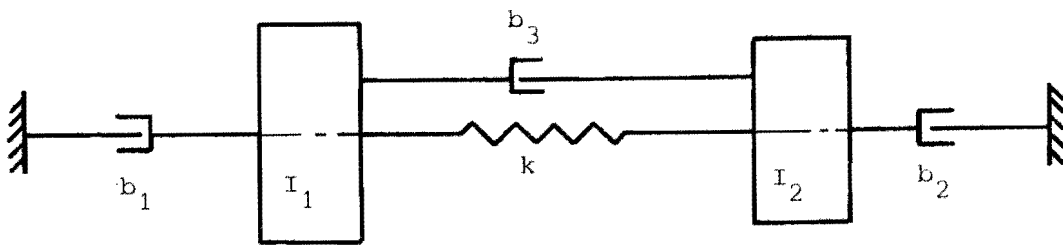


Fig. 3. Model van het mechanisch gedeelte van de motor-tacho-combinatie.

b_1, b_2 : visceuze wrijving t.g.v. lagerwrijving.

b_3 : visceuze wrijving als benadering voor demping in de verbindingen tussen de beide rotors.

I_1 : massatraagheid van de rotor van de motor.

I_2 : massatraagheid van de rotor van de tacho.

k : veerstijfheid voor torsie van de verbindingsas.

Opgemerkt kan worden, dat dit een vrij algemeen geldend model is voor het mechanische deel van een motor-tacho-combinatie. Het kan waarschijnlijk ook gebruikt worden bij motoren met een normale rotor: d.w.z. een rotor met grotere dikte en kleinere diameter.

Om de differentievergelijking uit het model af te leiden is gebruik gemaakt van de graphe-theorie. [1]. De graphe van deze elektromotor is weergegeven in Fig. 4. Hierin zijn alle machinegegevens terug te vinden, die van belang zijn voor het dynamisch gedrag.

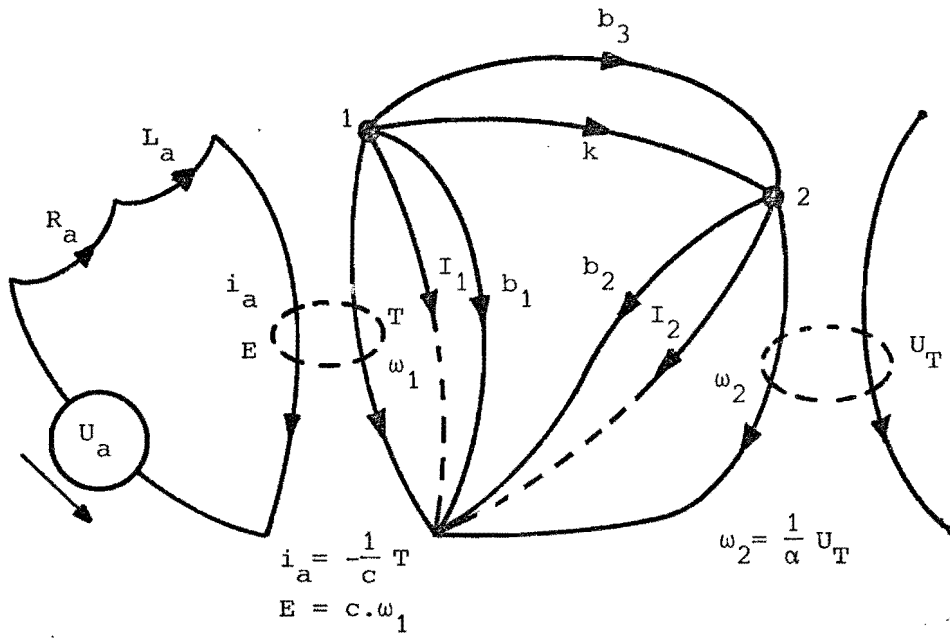


Fig. 4. Graphe van de motor-tacho-combinatie.

U_a : ingangsspanning motor	b_3 : verbindingsdemping
R_a : rotorweerstand motor	b_1, b_2 : lagerwrijving
L_a : zelfinductie rotor motor	k : veerstijfheid voor torsie
E : tegen EMK motor	I_1 : massatraagheid rotor motor
i_a : rotorstroom motor	I_2 : massatraagheid rotor tacho
c : machine constante motor	ω_1 : hoeksnelheid rotor motor
T : koppel	ω_2 : hoeksnelheid rotor tacho
	$1/\alpha$: machine constante tacho
	U_T : uitgangsspanning tacho

Uit deze graphe is een 4e orde DV te destilleren van de volgende vorm (bijlage 1), geschreven in het Laplace domein.

$$\frac{U_T}{U_a} = \frac{m_0 + m_1 s}{n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0} \quad (1)$$

waarvan de noemer ontbonden kan worden in:

$$(s-s_1)(s-s_2) \left(\frac{s^2}{\omega_0} + \frac{2\beta}{\omega_0} s + 1 \right) \quad (2)$$

Vergelijking (2) kan natuurlijk nog verder ontbonden worden, maar omdat we bij dit model een opslingering in amplitude karakteristiek verwachten, dus 2 complexe wortels, is het in deze vorm geschreven. Hier stelt ω_0 de eigenfrequentie en β de relatieve demping voor. De amplitude karakteristiek van vergl. (1) is in Fig. 5 weergegeven.

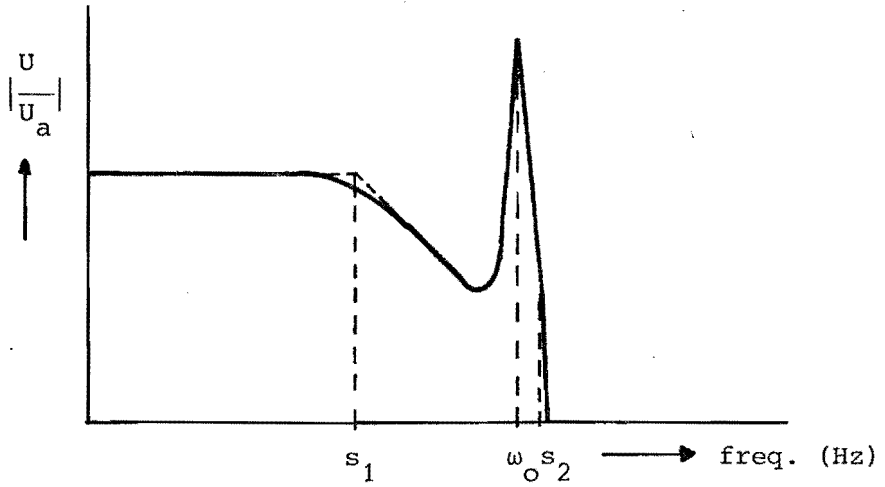
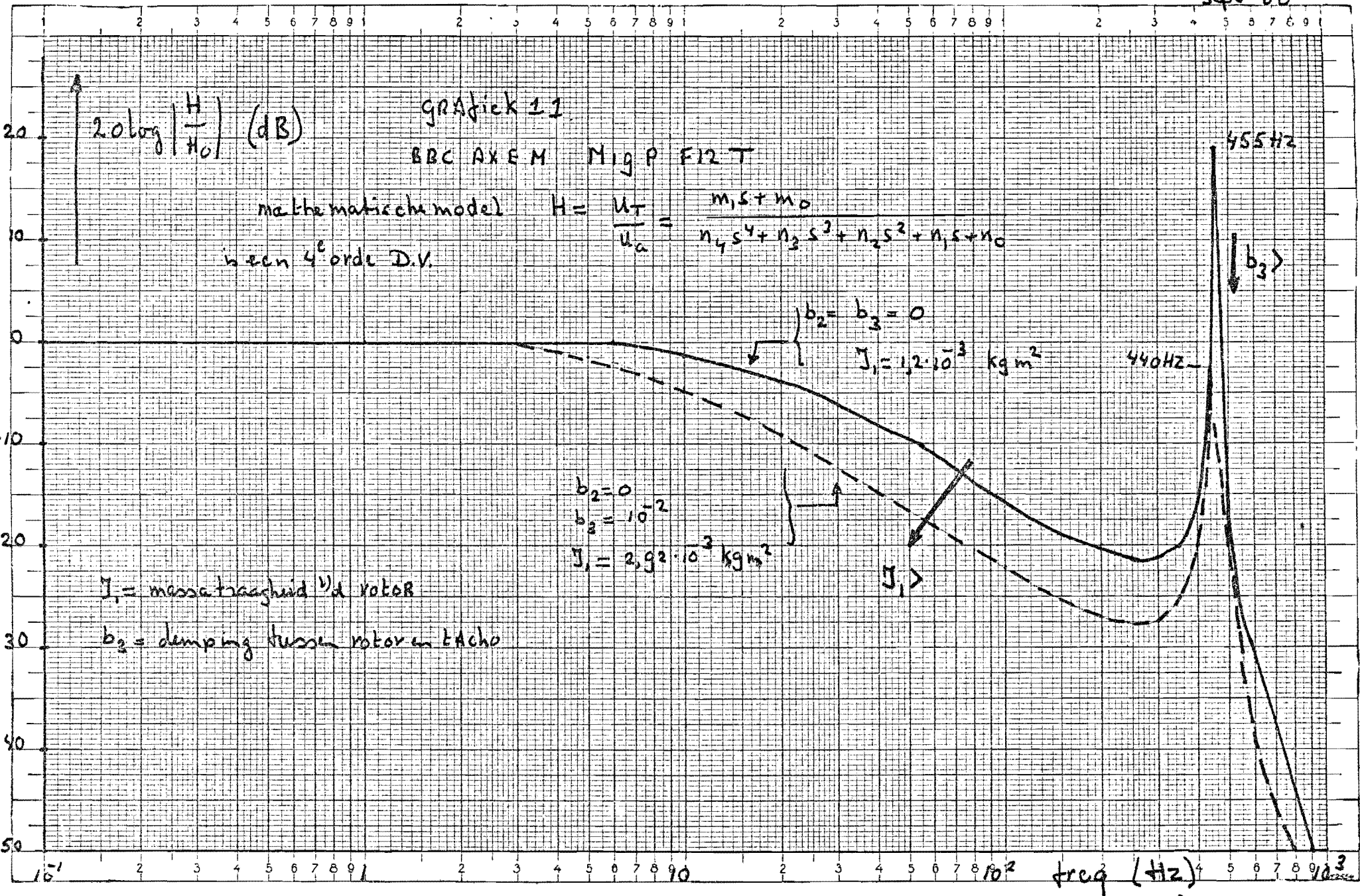


Fig. 5. Amplitude karakteristiek motor-tacho-combinatie volgens het mathematisch model.

Als we de gegevens van de BBC AXEM F12T M19P invullen in vergelijking (1) vinden we grafiek 11.

sept 80



$20 \log \left| \frac{H}{H_0} \right| \text{ (dB)}$

grafiek 11

BBC AXEM MIP FIRT

mathematisch model $H = \frac{U_T}{U_a} = \frac{m_1 s + m_0}{n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}$
 een 4^e orde D.V.

$b_2 = b_3 = 0$
 $J_1 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

$b_2 = 0$
 $b_3 = 10^{-2}$
 $J_2 = 2,92 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$

$J_1 =$ massa traagheid v.d. rotor

$b_3 =$ demping tussen rotor en tacho

freq (Hz)

De benodigde berekeningen voor het bepalen van de grafiek zijn uitgevoerd met behulp van een programma, dat geschreven is voor een programmeerbaar zakrekenmachine.

In deze grafiek is de invloed van verandering van I_1 , (massatraagheid van de rotor van de motor) weergegeven. Het 3 dB punt s_1 schuift op naar een lagere frequentie bij toenemende massatraagheid I_1 . Deze I_1 neemt bijvoorbeeld toe als er een last gekoppeld wordt aan de as van de motor.

Ook is de situatie, waarbij de demping b_2 , van de lagering van de tacho, en b_3 , de verbindingsdemping, gelijk zijn aan nul, weergegeven. De resonantiepiek is nu veel hoger dan de gemeten waarde.

Het blijkt, dat de hoogte van deze piek bijna uitsluitend wordt beïnvloed door b_3 . Uit berekening blijkt verder, dat variatie van b_1 en b_2 , de lagerdemping, weinig invloed heeft op de overdrachtsfunctie.

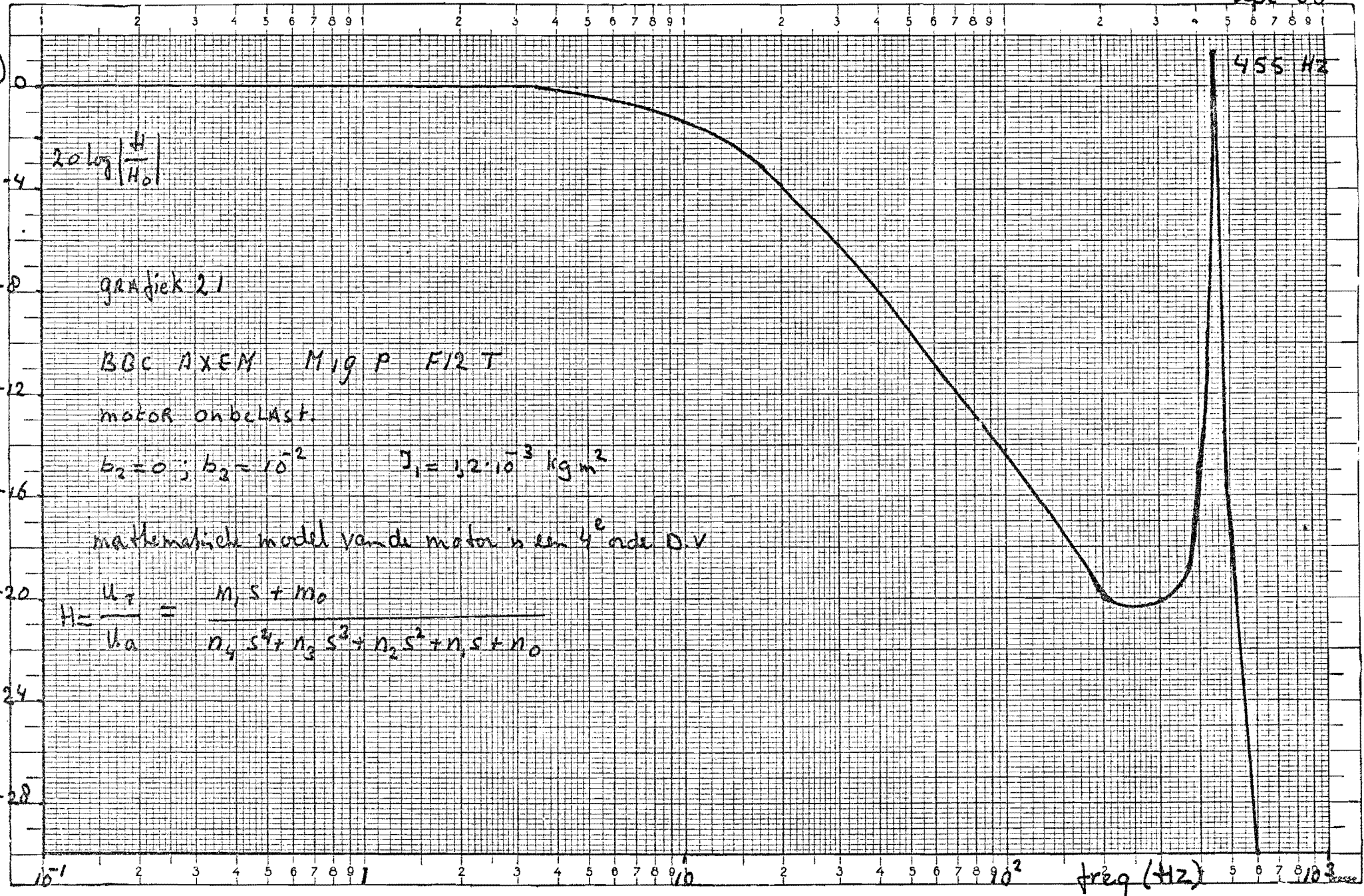
In grafiek 21 en 31 zijn respectievelijk de amplitude, en fase-karakteristiek weergegeven van de BBX AXEM F12T M19P. De demping b_3 is zo aangepast, dat de hoogte van de resonantiepiek overeenkomt met die van de metingen. Het is nauwelijks mogelijk b_3 te berekenen (bijlage 2).

Uit vergelijking van grafieken 1 en 2 met 21 en 31 blijkt dat dit model goed voldoet. Om de gevoeligheid voor verandering van b_3 van de resonantiepiek weer te geven volgen enkele waarden:

b_3 [kg m ² /s]	hoogte van de piek 20 log H/H ₀ dB
10 ⁻⁴	19
10 ⁻²	1,3
10 ⁻¹	-13

Tabel 1. Gevoeligheid van de hoogte van de resonantiepiek voor verandering van b_3 , de verbindingsdemping.

sept '80



$$20 \log \left| \frac{H}{H_0} \right|$$

grafiek 21

BBC AXEM M19 P F12 T

motor onbelast.

$$b_2 = 0; b_3 = 10^{-2}$$

$$J_1 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

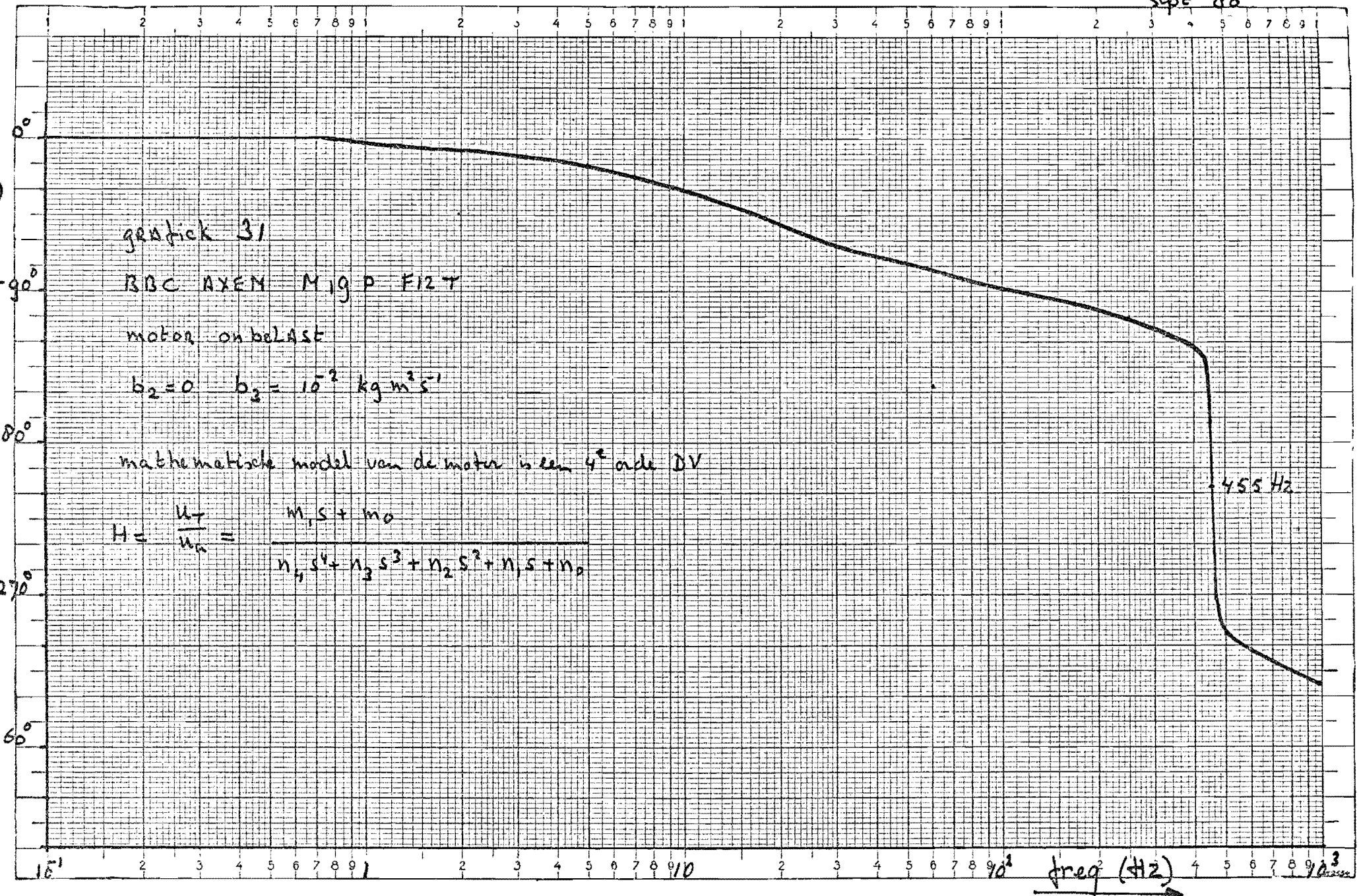
mathematisch model van de motor is een 4^e orde O.V

$$H = \frac{U_T}{U_a} = \frac{n_1 s + m_0}{n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}$$

455 Hz

freq (Hz)

sept '80



Nu wordt geprobeerd de karakteristieke grootheden van de overdrachtsfunctie, s_1 , s_2 en ω_0 , uit te drukken in de machinegegevens. De relatieve demping β kan niet benaderd worden door een eenvoudige uitdrukking, maar slechts berekend worden uit de overdrachtsfunctie.

Benadering voor s_1 .

Verondersteld wordt, dat de kantelfrequentie s_1 veroorzaakt wordt door de massatraagheid van de rotor van de motor en tacho. In dat geval kunnen we s_1 benaderen door [2]:

$$s_1 \approx \frac{C^2}{R_a(I_1 + I_2)} \cdot \frac{1}{2\pi} \quad \text{Hz} \quad (3)$$

(voor de betekenis van de symbolen zie Fig. 4.)

Benadering voor s_2 .

Er van uitgaand, dan $\frac{1}{s_2}$ de elektrische tijdconstante van de motor is, kan s_2 benaderd worden door [2]:

$$s_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R_a}{L_a} \quad \text{Hz} \quad (4)$$

Benadering voor f_0 .

Verondersteld wordt, dat f_0 de eigenfrequentie is van het mechanische systeem: rotor-as-rotor tacho (Fig. 2).

In dat geval is een goede benadering voor f_0 [3]:

$$f_0 \approx \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_1 \cdot I_2}} \cdot k \cdot \frac{1}{2\pi} \quad (5)$$

Uit vergelijking van de waarden voor s_1 , s_2 en f_0 , berekend uit de DV (1), met de benadering voor deze grootheden blijkt, dat de benaderingen goed voldoen. De afwijkingen met de waarden uit DV (1) zijn kleiner dan 5%. Dit is nagegaan voor verschillende waarden van I_1 , b_1 , b_2 , b_3 en k .

1.3 Samenvatting.

De conclusie die uit dit onderzoek volgt luidt:

Het dynamisch gedrag van de schijfankermotor BBC AXEM F12T M19P kan beschreven worden door 3 karakteristieke grootheden, die de vorm van de bodediagrammen bepalen, namelijk: s_1 , s_2 en ω_0 (fig. 5). De benaderingen voor s_1 , s_2 en f_0 uitgedrukt in de machinegegevens vindt U in vergelijking (3), (4) en (5).

Het lijkt aannemelijk, dat deze benaderingen ook gelden voor andere typen elektromotoren met tachometers en niet alleen voor deze schijfankermotor.

HOOFDSTUK 2. De sledepartij.

2.1 Het dynamisch gedrag.

In dit hoofdstuk zal het dynamisch gedrag van de sledepartij van een numeriek bestuurd werktuigmachine onderzocht worden.

Een schematische weergave van de sledepartij vindt U in Fig. 6.

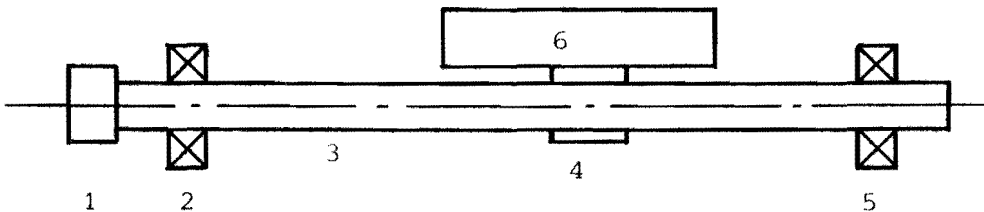


Fig. 6. Schematische weergave van een sledepartij.

- 1 - koppeling
- 2,5 - lagers
- 3 - spindel
- 4 - kogelomloopmoer
- 6 - slede voor gereedschap

Er treden twee soorten trillingen op bij de sledepartij. Namelijk longitudinale trillingen en rotatietrillingen.

Bij de Hembrug wordt voor de positiebepaling van de slede gebruik gemaakt van een indirect meetsysteem, dat het aantal omwentelingen van de spindel meet.

Bij een dergelijk systeem zijn de translatietrillingen niet van belang, wel de torsietrillingen. Translatietrillingen hebben wel invloed op de oppervlaktekwaliteit van het werkstuk, maar worden niet gemeten met een indirect meetsysteem. Alleen bij een direct meetsysteem, d.i.: positiemeting aan de slede, worden deze trillingen gemeten [4].

We zullen ons in dit onderzoek beperken tot sledepartijen met een indirect meetsysteem en ons concentreren op het verschijnsel torsietrillingen.

2.2. Torsietrillingen van de sledepartij.

Om aan het systeem te rekenen, moet eerst een model gemaakt worden. Voorlopig zullen we in dit model de coulombse, en viskeuze wrijving tussen de geleidingen en de slede buiten beschouwing laten. Indien nodig en mogelijk zal hier later nog op terug gekomen worden.

Grootheden die invloed hebben op de waarde van de eigenfrequentie zijn: - torsiestijfheid van de spindel, koppeling en kogelomloopmoer
- massatraagheidsmoment van de spindel, koppeling en slede.

Bij een dergelijk licht gedempt systeem wordt de grootte van de eigenfrequentie nauwelijks beïnvloed door de in het systeem aanwezige demping. Het is gerechtvaardigd deze demping bij de bepaling van de laagste eigenfrequentie buiten beschouwing te laten.

- De torsiestijfheid -

Een goede benadering voor de torsiestijfheid van de spindel wordt gegeven door (6).

$$C_T = \frac{GI}{l} = \frac{G\pi}{2} \left(\frac{d_k^4 + d_b^4}{4} \right) \cdot \frac{1}{l} \quad (6)$$

met C_T torsiestijfheid.
I polair traagheidsmoment
l lengte spindel
 d_k kerndiameter spindel
 d_b buitendiameter spindel
G glijdingsmodules

De torsiestijfheid van de koppeling wordt door de fabrikant gegeven. Torsiestijfheid kogelomloopmoer: hier kan bijvoorbeeld de axiale stijfheid van de moer voor genomen worden.

Uit de literatuur [5] blijkt, dat de axiale stijfheid van de moer veel groter is dan de torsiestijfheid van de spindel. Het is misschien gerechtvaardigd om de slede star verbonden te beschouwen aan de spindel.

- Het massatraagheidsmoment -

Het massatraagheidsmoment van de spindel kan op een aantal manieren benaderd worden:

- 1) door het massatraagheidsmoment van een uniforme as met diameter d_b :

$$I_{sp} = \frac{\pi d_b^4 \rho l}{32} \quad (7)$$

- 2) door benaderingsformule voor trapezevormige draad:

$$I_{sp} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d_k + d_b}{4} \right)^4 \rho \cdot l \quad (8)$$

- 3) een zeer nauwkeurige benadering wordt gegeven in de dissertatie van Peter Wolters [4], blz. 83, waarbij de geometrie van de kogelloopbaan in de berekening betrokken wordt (Fig. 7).

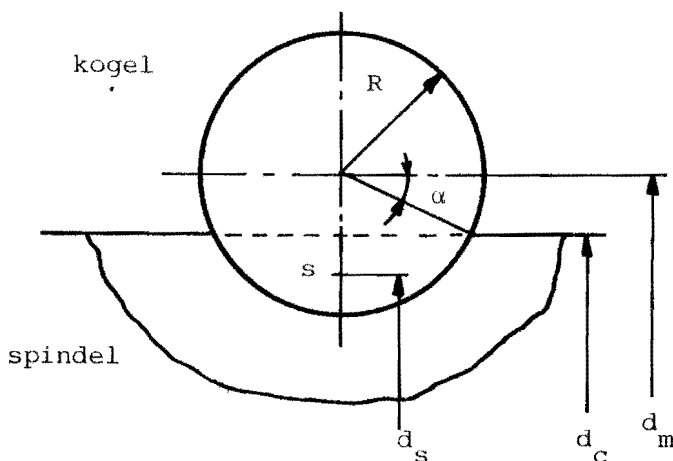


Fig. 7. Geometrie van de kogelloopbaan.

Het massatraagheidsmoment van de koppeling en het gereduceerd massatraagheidsmoment van de slede zijn volgens de geijkte formules te berekenen.

2.3 Modelvorming van de sledepartij.

Nu volgt de beschrijving van mogelijke modellen. Om de modellen wat met elkaar te kunnen vergelijken is met gegevens van de numeriek bestuurd draaibank CNC 200 van Hembrug de laagste eigenfrequentie van de sledepartij berekend volgens de verschillende modellen. (Bijlage 3).

Model 1.

De sledepartij wordt beschouwd als een combinatie van 2 massa's verbonden met een torsie veer (Fig. 8).

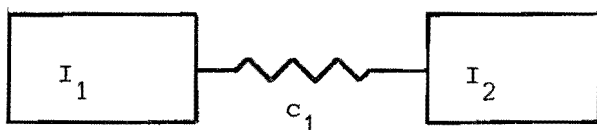


Fig. 8. Een model van de sledepartij.

$$I_1 = I_{kopp} + \frac{1}{2}I_{sp} \quad (9) \quad c_1 = \frac{C_{kopp} \cdot C_{sp}}{C_{kopp} + C_{sp}} \quad (11)$$

$$I_2 = I_{slede} + \frac{1}{2}I_{sp} \quad (10)$$

I_{kopp} = massatraagheidsmoment koppeling

I_{sp} = massatraagheidsmoment spindel

I_{slede} = gereduceerd massatraagheidsmoment slede

C_{kopp} = torsiestijfheid koppeling

C_{sp} = torsiestijfheid spindel

Opm.: de factor $\frac{1}{2}$ in (9) en (10) is arbitrair gekozen.

Voor de CNC 200 levert dit een laagste eigenfrequentie $f_0 = 520\text{Hz}$.

Model 2.

Hier zijn andere randvoorwaarden gebruikt dan in model 1. Een van de uiteinden is verbonden met de vaste wereld (Fig. 9). Een vergelijking van de eigenfrequenties is dan ook wat moeilijk. Toch is een berekening van de laagste eigenfrequentie uitgevoerd.

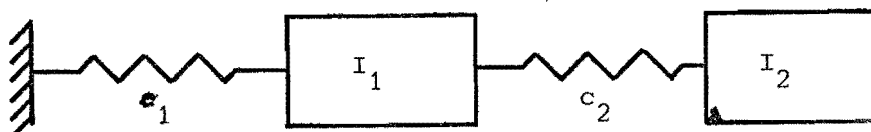


Fig. 9. Een model van de sledepartij.

$$I_1 = I_{\text{kopp}} + \frac{1}{2} I_{\text{sp}}$$

$$I_2 = I_{\text{slede}} + \frac{1}{2} I_{\text{sp}}$$

$$C_1 = C_{\text{kopp}}$$

$$C_2 = C_{\text{sp}}$$

Voor de CNC 200 $f_o = 360 \text{ Hz.}$

Model 3.

In dit model werden het massa traagheidsmoment en torsiestijfheid van de koppeling en de slede vertaald in een lengte l en diameter d van een uniforme as. Deze as heeft hetzelfde massa traagheidsmoment en dezelfde torsiestijfheid als de koppeling of slede.

Op deze manier wordt de sledepartij weergegeven door een as, opgebouwd uit verschillende deelasen (Fig. 10).

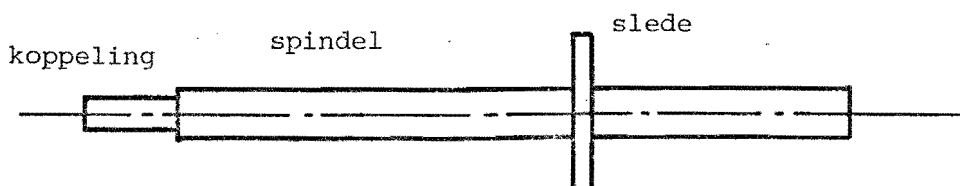


Fig. 10. Model van sledepartij.

Nu wordt volgens de Rayleigh-Ritz-methode [7] de laagste eigenfrequentie f_0 bepaald (Bijlage 4). De randvoorwaarden zijn hier dezelfde als bij model 1, zodat vergelijking van de eigenfrequenties hier wel zin heeft. Voor de CNC 200 is volgens deze methode de laagste eigenfrequentie $f_0 = 786$ Hz. Het verschil met model 1 is nogal groot. Het lijkt gerechtvaardigd om aan deze laatste berekeningsmethode de voorkeur te geven. In hoeverre dit juist is, zal onderzocht worden aan de hand van een model van een sledepartij, dat door Hembrug ter beschikking gesteld wordt. Op dit moment is dat model nog niet beschikbaar.

Om volgens de Rayleigh-Ritz-methode de laagste eigenfrequentie te bepalen, is een programma geschreven voor een programmeerbare zakrekenmachine. Met behulp van dit programma is het verloop van de laagste eigenfrequentie f_0 als functie van de plaats van de slede wat nader onderzocht (Grafiek 4.1). Dat de grootste waarde voor f_0 bereikt wordt als de slede ongeveer in het midden staat, is te verklaren uit het feit, dat de sledemassa zich juist in een knoop bevindt en slechts zeer weinig beweegt. De totale kinetische energie blijft gelijk, dus gaat de eigenfrequentie omhoog.

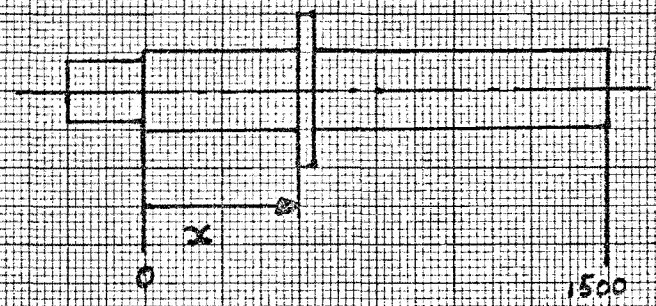
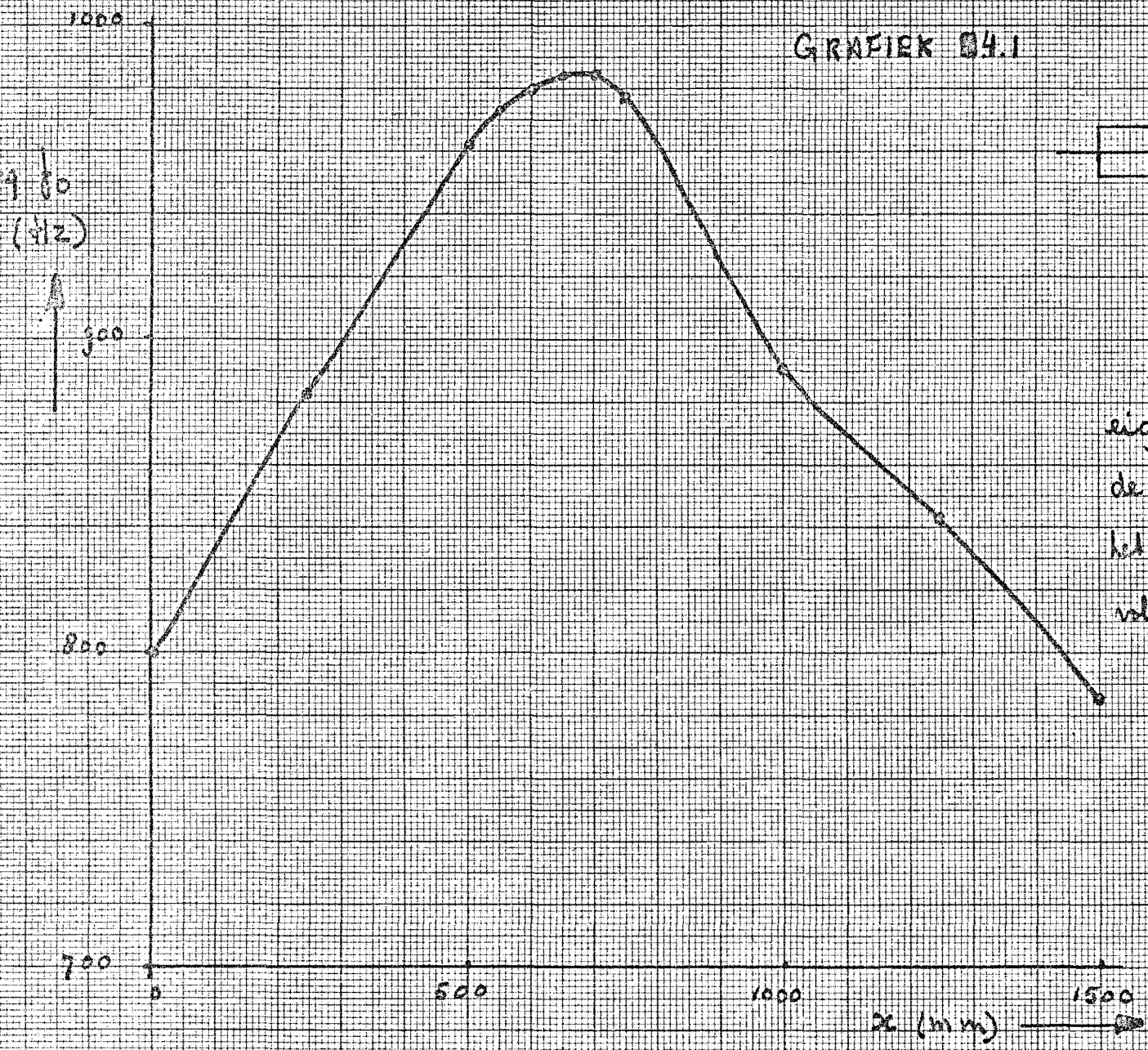
Verder is de gevoeligheid voor verandering van de spindeldiameter d_{sp} nog onderzocht. (Tabel 2.).

d_{sp} mm	f_0 Hz
31	701
33	747
35	786
37	818
39	845

Tabel 2. Eigenfrequentie f_0 bij verschillende waarden van d_{sp} , de spindeldiameter.

Aan de hand van metingen aan een sledepartij zal nagegaan worden welk model het beste voldoet.

GRAFIEK 04.1



eigenfrequentie f_0 als functie van de plaats van de slide x volgens het mathematisch model: berekening volgens de Rayleigh-Ritz-methode.

BIJLAGE 1. Afleiding van de D.V. van de motor-tacho-combinatie.

Uitgaande van de graphe in Fig. 4 kan de D.V. afgeleid worden voor dit systeem.

Voor het linker deel van de graphe geldt:

$$U_a = R_a + s.L_a + E \quad (1)$$

$$E = c \cdot \omega_1 \quad (2)$$

Voor het middenstuk geldt voor knooppunt 1:

$$T = (b_1 + b_2 + \frac{k}{s} + I_1 \cdot s) \omega_1 - \frac{k}{s} \omega_2 \quad (3)$$

Voor knooppunt 1:

$$(b_3 + \frac{k}{s}) \omega_1 = (b_3 + b_2 + \frac{k}{s} + I_2 \cdot s) \omega_2 \quad (4)$$

Voor het rechterdeel geldt:

$$\omega_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot U_T \quad (5)$$

Na enig rekenwerk volgt uit vergelijking (1) t/m (5) een D.V. van de volgende vorm:

$$\frac{U_T}{U_a} = \frac{m_0 + m_1 \cdot s}{n_4 \cdot s^4 + n_3 \cdot s^3 + n_2 \cdot s^2 + n_1 \cdot s + n_0} \quad (6)$$

waarbij voor de coëfficiënt geldt:

$$m_0 = \alpha \cdot k$$

$$m_1 = \alpha \cdot b_3$$

$$n_4 = \frac{L_a \cdot I_1 \cdot I_2}{c}$$

$$n_3 = \frac{R_a \cdot I_1 \cdot I_2}{c} + \frac{L_a}{c} \{b_1 \cdot I_2 + b_2 \cdot I_1 + b_3 \cdot (I_1 + I_2)\}$$

$$n_2 = \frac{R_a}{c} \{b_1 \cdot I_2 + b_2 \cdot I_1 + b_3 \cdot (I_1 + I_2)\} + c \cdot I_2 \\ + \frac{L_a}{c} \{b_2(b_1 + b_3) + b_3(b_1 + b_2) + k(I_1 + I_2)\}$$

$$n_1 = \frac{R_a}{c} \{b_2(b_1 + b_3) + b_3(b_1 + b_2) + k(I_1 + I_2)\} \\ + c(b_2 + b_3) + \frac{L_a \cdot k}{c} (b_1 + b_2 + b_3)$$

$$n_0 = \frac{R_a \cdot k}{c} (b_1 + b_2 + b_3)$$

BIJLAGE 2. De demping b_3 .

De demping die optreedt in de verbindingen tussen de rotor van de motor en de as en de rotor van de tacho en de as, is hier voorgesteld door visceuze demping. Dit is niet helemaal juist maar voor een lichtgedempt systeem zoals hier is dit een goede benadering. Een andere mogelijkheid was om structurele demping te gebruiken: d.i. demping evenredig met de verplaatsing. Omdat dit in de graphe-theorie wat moeilijker in te bouwen is en omdat de verschillen waarschijnlijk verwaarloosbaar klein blijven, is visceuze demping aangenomen.

BIJLAGE 3. Berekening laagste eigenfrequentie van de sledepartij.

— Gegevens van de CNC 200:

massa slede $m = 235$ kg.

diameter spindel $d = 35$ mm.

spoed spindel $s = 5$ mm.

lengte spindel $l = 1500$ mm.

massatraagheid spindel $I_{sp} = \frac{\pi \rho d^4 l}{32} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$

torsiestijfheid spindel $C_{sp} = \frac{C_p I}{l} = \frac{C \pi d^4}{32 l} = 7,86 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad.}$

gereduceerde massatraagheid slede $I_{sL} = \frac{ms^2}{4\pi^2} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$

massatraagheid koppeling $I_{kopp} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$

torsiestijfheid koppeling $C_{kopp} = 23 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad}$

— Laagste eigenfrequentie volgens model van Fig. 8.

$$I_1 = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$I_2 = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$C_1 = 5,85 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad}$$

Eigenfrequentie:

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{C_1 \cdot \frac{I_1 + I_2}{I_1 \cdot I_2}} = 520 \text{ Hz}$$

— Laagste eigenfrequentie volgens Fig. 9:

$$C_1 = 23 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad}$$

$$C_2 = 7,85 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad}$$

Laagste eigenfrequentie volgens [6]:

$$\omega_o^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c_{11}}{a_{11}} + \frac{c_{22}}{a_{22}} - \sqrt{\left(\frac{c_{11}}{a_{11}} - \frac{c_{22}}{a_{22}} \right)^2 + \frac{4 c_{12}}{a_{11} a_{22}}} \right]$$

$$\text{met: } c_{11} = c_1 + c_2 \quad a_{11} = I_1$$

$$c_{22} = c_2 \quad a_{22} = I_2$$

$$c_{12} = -c_2$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \omega_o = 360 \text{ Hz.}$$

Bijlage 4.

Torsie trillingen in assen

Berekeningsmethode.

Berekening gaat volgens de Rayleigh-Ritz-methode.

Er wordt een beginschatting gemaakt voor een aantal mode-vormen.

Randcondities worden in rekening gebracht door de modes hieraan te laten voldoen. Er wordt nu aangenomen dat de uitwijking te schrijven is als een lineaire combinatie van deze aangenomen vormen $\phi_i(x)$

$$v(x) = q_1 \phi_1(x) + q_2 \phi_2(x) + \dots + q_n \phi_n(x) = \sum_{i=1}^n q_i \phi_i(x)$$

De potentiële energie in het systeem is dan voor het geval $v(x)$ een torsie voorstelt

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l G J(x) v'(x, t)^2 dx$$

G glijdingsmodulus
 J polair traagheidsmoment

En de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l I(x) \dot{v}^2(x, t) dx$$

I massa traagheidsmoment per meter

Deze uitdrukkingen worden ingevuld in de r de vergl van Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) = \int_0^l \mathbb{I}(x) \left[\sum_{i=1}^n \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) \right] \phi_r(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t) \int_0^l \mathbb{I}(x) \phi_i(x) \phi_r(x) dx = \sum_{i=1}^n m_{ri} \ddot{q}_i$$

$$\text{met } m_{ri} = m_{ir} = \int_0^l \mathbb{I}(x) \cdot \phi_r(x) \cdot \phi_i(x) dx$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_r} = \int_0^l G(x) \left[\sum_{i=1}^n \phi_i'(x) q_i(t) \right] \phi_r'(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^n q_i(t) \int_0^l G(x) \phi_i'(x) \phi_r'(x) dx = \sum_{i=1}^n k_{ri} q_i$$

$$\text{met } k_{ri} = k_{ir} = \int_0^l G(x) \phi_r'(x) \phi_i'(x) dx$$

De rde vgl van Lagrange wordt hiermee

$$\sum_{i=1}^n m_{ri} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n k_{ri} q_i = 0$$

Met $\ddot{q}_i = -\omega^2 q_i$ en notatie in matrix-voorn wordt dit

$$-\omega^2 [m] \{q\} + [k] \{q\} = \{0\}$$

Door het eigenwaarde-probleem op te lossen kan ω en $\{q\}$ bepaald worden.

Keuze van de functies $\phi_i(x)$

Bekken worden de torsiehoeken waarbij beide einden vrij zijn
De randvoorwaarden luiden dan

$$\begin{aligned} \varphi(0) &\neq 0 \\ \frac{d\varphi}{dx}(0) &= 0 \end{aligned}$$

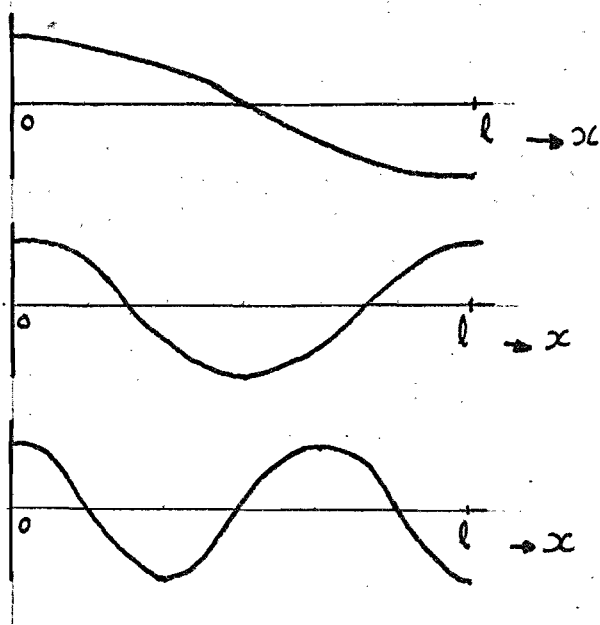
$$\begin{aligned} \varphi(l) &\neq 0 \\ \frac{d\varphi}{dx}(l) &= 0 \end{aligned}$$

Voor beginschaktingen van de modes nemen we de volgende functies.

$$\phi_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$\phi_2(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

$$\phi_3(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$$



Uniforme as met lengte l , massaheavheidsmoment per meter I , en torsiestijfheid GJ

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{lI}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{lI}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{lI}{2} \end{pmatrix}$$

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{GJ\pi^2}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4GJ\pi^2}{2l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9GJ\pi^2}{2l} \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ}{I}} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\omega_2 = 2\omega_1 ; \omega_3 = 3\omega_1$$

$$\{\phi_1\}^T = \{1 \ 0 \ 0\}$$

$$\{\phi_2\}^T = \{0 \ 1 \ 0\}$$

$$\{\phi_3\}^T = \{0 \ 0 \ 1\}$$

LITERATUURLIJST.

- [1] Shearer Murphy.
Introduction to systems dynamics.

- [2] J.C. Cool, F.J. Schijft, T.J. Viersma.
Regeltechniek

- [3] S. Timoshenko, D.H. Young.
Technische Mechanica.

- [4] P. Wolters.
Rechnerunterstützte dimensionierung von Vorschubantrieben für
numerisch gesteuerte Werkzeugmaschinen.
Dissertation TH-Aachen, 1976.

- [5] F.D. Kopperschlager.
Über die Auslegung mechanischer Übertragungselemente an
numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen.
Dissertation TH-Aachen, 1969.

- [6] . Klotter.
Technische Schwingungslehre.
Springer-Verlag Berlin, 1960.

- [7] Hurty, Rubinstein.
Dynamics of Structures.