Het niet-lineaire veersysteem benaderd volgens de methode van Ritz-Galerkin

WE-65-45

Het niet-lineaire veersysteem benaderd volgens de methode van Ritz-Galerkin.

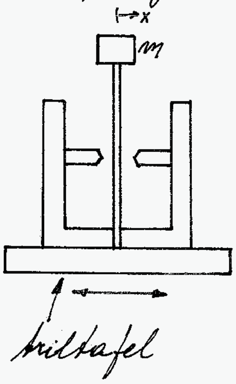
J.W.H. Leers . Juli 1965

Opdracht.

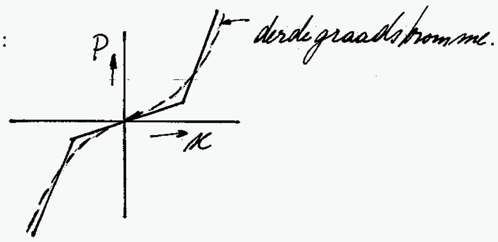
Maak m.b.v. magneetjes een niet-liniair veersysteem, zodanig dat de krachten tussen de magneetjes de niet-liniaire veer vervangen, en werk dit systeem uit volgens de methode van Ritz-Galerkin.

Uitvoering

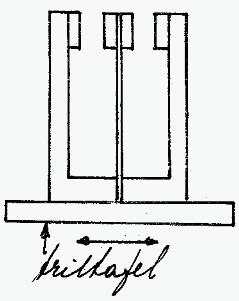
In eerste instantie is gedacht aan een uitbreiding van het systeem dat in januari 1964 reeds onderzocht is door Dhr. A.A.F. van de Ven.



De uitslag van de verticale strip, waaraan de massa m bevestigd is, wordt beperkt door twee horizontale pennen, die instelbaar zijn.
De veerkarakteristiek voor de massa m heeft de volgende vorm:



De veerkarakteristiek is benaderd door een derdegraadskromme.



Er is gedacht aan een vervanging van de massa m door twee magneetjes plus twee magneetjes die deze massa afstoten, aantrekken of gecombineerd werken.

De veerkarakteristiek voor de massa m is hier een vloeiende kromme, die geen knik vertoont en wordt bepaald door de stijfheid van de verticale strip en de kracht tussen de magneetjes.
Bij dit systeem traden moeilijkheden op, omdat de eigenfrequentie te laag werd en de triltafel niet geschikt is voor lage frequenties beneden 10 hertz.

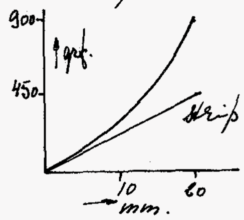
de maximale kracht tussen de magneetjes is 450 grf.

Het gewicht per magneet is 22 grf.

de versnellingsmeter, die op de massa geplaatst wordt, weegt 18 grf.

De afstand tussen de magneten mag niet te klein zijn, omdat de magneten tijdens het trillen, elkaar niet mogen raken.

Stel: afstand tussen de magneetjes is 20 mm.



Willen de magneten voor een voldoende niet-liniair effect zorgen, dan mag de stijfheid van de strip niet te groot zijn.

Stel: bij maximale uitslag de tegenwerkende kracht van de strip gelijk aan die van de magneetjes.

De eigenfrequentie van het liniaire systeem wordt:

Massa m: $\frac{2 \times 22 + 18}{10^3} = 62 \times 10^{-3} \frac{\text{grf sec}^2}{\text{cm}}$

De veerstijfheid c: $\frac{450}{2} = 225$ grf/cm.

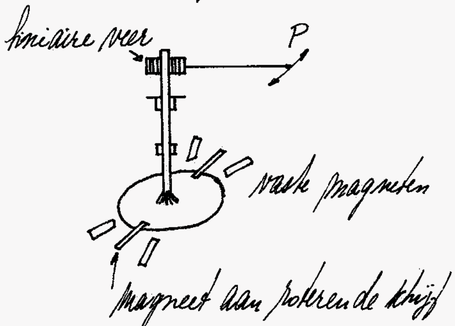
$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{225}{62 \times 10^{-3}} = 3620$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} = 9{,}55 \text{ hertz.}$$

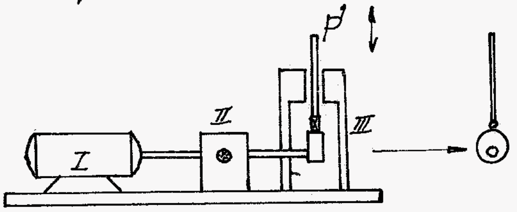
Deze frequentie lijkt redelijk.

Het systeem is geprobeerd maar gaf juist door deze lage eigenfrequentie slechte resultaten omdat de triltafel hiervoor niet geschikt is.

Het volgend systeem is gebouwd m.b.v. de FAG x2. bouwdoos en is in dit verslag behandeld.



Ook van dit systeem is de eigenfrequentie laag.



De aandrijving.

I gelijkstroom motortje

II Toerental instelling m.b.v. twee schijfwieletjes

III nokken mechanisme.

De aandrijving van het geschetste systeem is geschikt voor frequenties vanaf 2 hertz en hoger.

Conclusie

Er waren drie mogelijkheden:

1e De magneetjes vervangen door sterkere magneetjes, zodat de eigenfrequentie hoger zou worden en de triltafel gebruikt kon worden.

2e dezelfde magneten gebruiken maar een aandrijving nemen die geschikt is voor lage frequenties.

3e Een ander systeem zoeken.

De punten twee en drie zijn gecombineerd uitgevoerd.

De experimentele en theoretisch berekende Amplitude-frequentie grafiek komen redelijk overeen. Zie bldz. 22A

Inhoudsopgave. blz.

Literatuur.

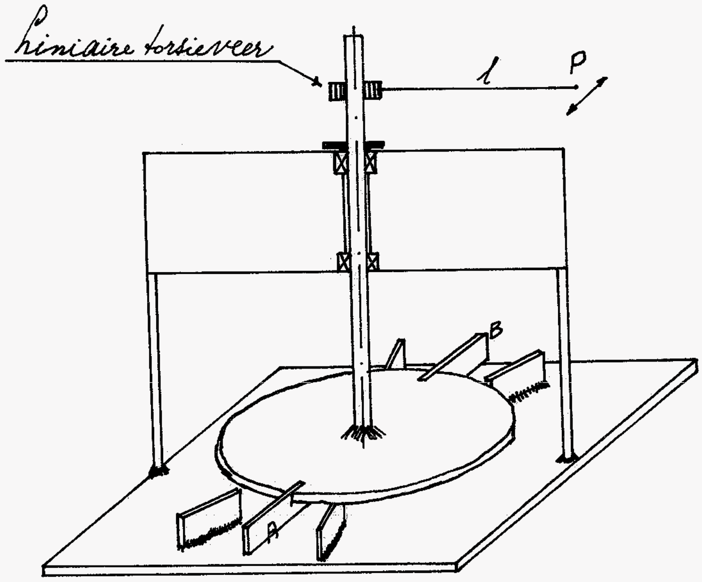
College dictaat: „Voortgezette Dynamica"

Verslag van dhr A.A.F. van de Ven over een niet-lineaire trilling (januari 1964)

Technische Mechanik door Rüdiger - Kneschke Band 3

Publikatie: Non-liniair Vibration problems treated by the Averaging Method of W. Ritz door K. Klotter.

Het niet liniaire veersysteem



Het beschouwde systeem bestaat uit een verticaal draaibare as, die loodrecht staat op een horizontale schijf, waaraan twee magneten (A en B) bevestigd zijn.
Deze magneten kunnen bewegen tussen twee paar andere magneten, die aan de vaste grondplaat bevestigd zijn, en wel zodanig dat de magneten A en B afgestoten worden.
De afstotende kracht is niet liniaire met de hoekverdraaiing en zorgt voor het niet liniaire gedeelte van de veerkarakteristiek.
Aan het boveneinde van de verticale as is een liniaire torsieveer bevestigd, waarvan een uiteinde aan de verticale as vastzit en het andere aan het horizontale staafje l, dat draaibaar is om de verticale as.
Het systeem wordt aangedreven in het punt P zodanig dat P beweegt volgens $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$.

Stel:

I (grfcmsec^2) : het roterende massatraagheidsmoment.

$M_t = a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5$: het tegenwerkend moment t.g.v. de liniaire veer en de magneten samen.
M_t (grfcm)
φ (rad)

$\rho\dot{\varphi}$: de demping
ρ (grfcm/rad/sec)

$M_v = d\varphi$: het moment t.g.v. de liniaire torsieveer.
M_v (grfcm)
φ (rad)

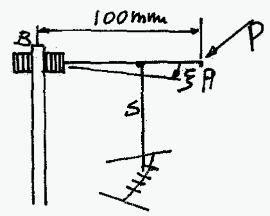
Voor het systeem geldt: $\bar{M} = \dot{\bar{D}}$ of $M = I\ddot{\varphi}$

de differentiaalvergelijking voor dit systeem is dus:

$$\underline{I\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5 = d\varphi_0 \cos \omega t}$$

Het bepalen van de karakteristieke grootheden van het systeem.

I De liniaire veerkarakteristiek.

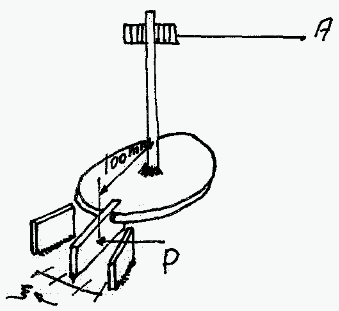


De roterende schijf wordt vastgezet.
Op een afstand 100 mm van B wordt de horizontale kracht P, loodrecht op AB, als functie van de hoek ξ gemeten, m.b.v. een krachtmeter.

Op de grondplaat is een gradenverdeling geplakt. Door aan de horizontale staaf AB een verticaal staafje S te bevestigen, kan de hoek ξ in graden worden afgelezen.
De kracht P (grf) als functie van de hoek ξ (grad) is uitgezet in grafiek I op blz. 3A
Het moment uitgevoerd door de liniaire torsieveer $M_v = 57,14\ \xi$

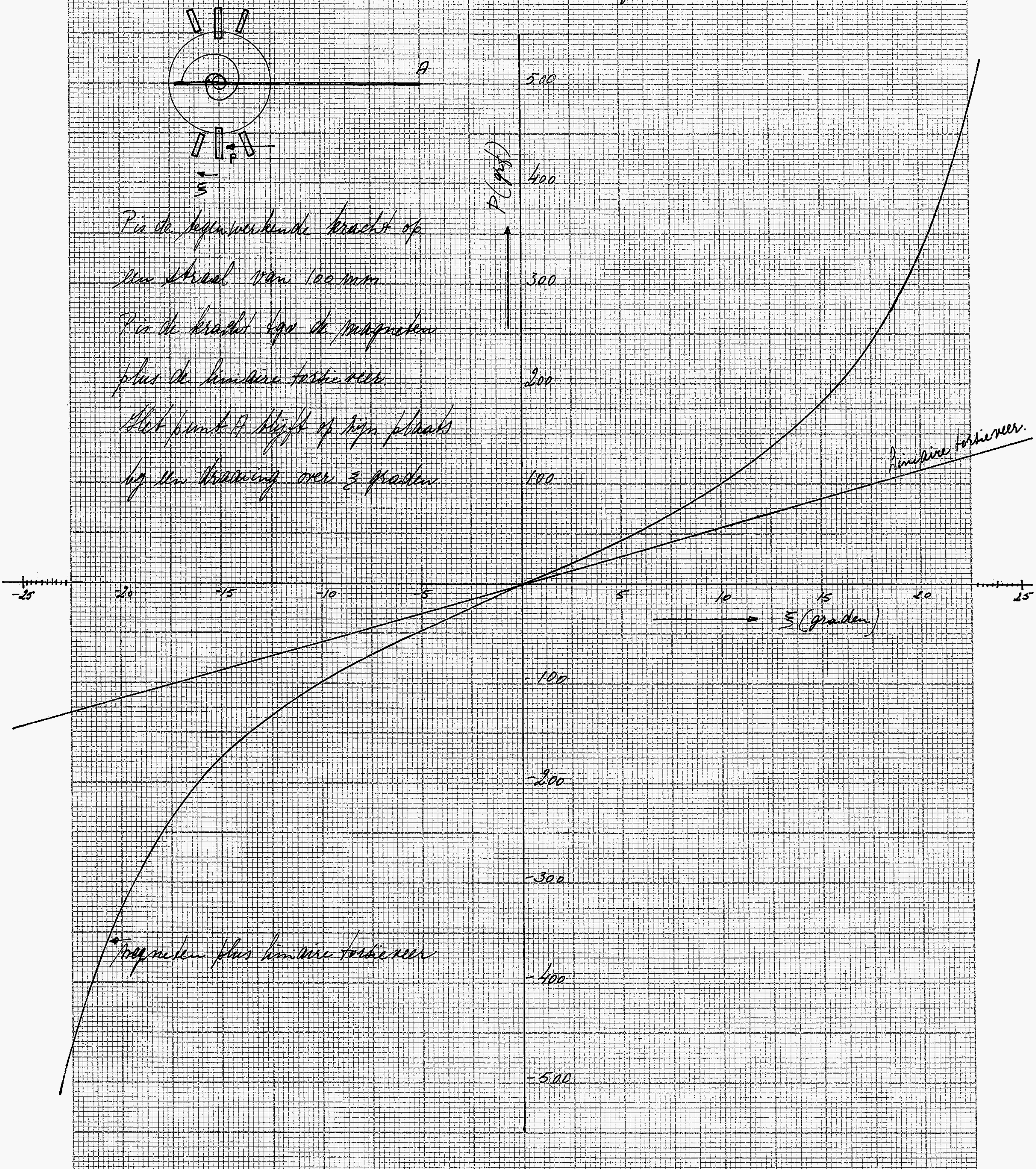
M_v (grfcm)
ξ (graden)

II De nietliniaire veerkarakteristiek van magneten + liniaire veer samen.



Het punt A wordt vastgezet.
Op een afstand 100 mm van de verticale as wordt de horizontale kracht P loodrecht op de magneten gemeten m.b.v. een krachtmeter.
De hoek ξ wordt afgelezen op de gradenverdeling.
De kracht P (grf) als functie van de hoek ξ (grad) is uitgezet in grafiek I op blz. 3A

grafiek I



P is de tegenwerkende kracht op een straal van 100 mm
P is de kracht t.g.v. de magneten plus de lineaire torsieveer.
Het punt A blijft op zijn plaats bij een draaiing over ξ graden.

De kracht P (grf) als functie van de hoek ξ (grad) is uit de grafiek bepaald m.b.v. de methode der kleinste kwadraten.

$$P = 9{,}3708\,\xi + 0{,}00050453\,\xi^3 + 0{,}000043185\,\xi^5 \qquad P\ (\text{grf})$$

$$\xi\ (\text{graden})$$

$$M_t = 93{,}708\,\xi + 0{,}0050453\,\xi^3 + 0{,}00043185\,\xi^5 \qquad M_t\ (\text{grfcm})$$

III Bepaling van massatraagheidsmoment J en dempingscoëfficient ρ

Op de horizontale schijf is een versnellingsmeter van het type Brüel en Kjaer bevestigd.
Via een versterker en voedingsapparaat wordt de beweging van de versnellingsmeter geregistreerd op een oscillograaf.
In de versterker is een differentiaalschakeling gebouwd, zodat de verplaatsing, snelheid of versnelling gemeten kan worden.
Het beeld op het scherm kan makkelijk gefotografeerd worden met een speciaal voor dit doel te gebruiken oscilloscope camera.
Zet men de versterker op verplaatsing en stelt men een bepaalde tijdbasis op de oscillograaf in dan kan de frequentie bepaald worden door de standaardtijd T (sec) op de gemaakte foto te meten. Frequentie $f = \frac{1}{T}$
Bij de bepaling van massatraagheidsmoment en dempingscoëfficient is alleen gebruik gemaakt van de liniaire veer.
De tegenwerkende magneten, die op de grondplaat zitten, zijn weggenomen.
Voor dit systeem geldt de volgende differentiaalvergelijking:

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + d\varphi = 0 \quad \text{voor een vrije trilling.}$$

J: massatraagheidsmoment (grfcmsec^2)
$\rho\dot{\varphi}$: het dempend moment
$d\varphi$: het tegenwerkend moment van de liniaire veer
φ: hoekverdraaiing in rad.

De vrije uitdemping van dit liniaire systeem is gefotografeerd.

Van de liniaire veer is bekend $M_v = 57{,}14\,\xi$ $\quad M_v$ (grfcm) $\quad \xi$ (graden)

of $M_v = 57{,}14 \times \frac{180}{\pi} \times \varphi$

$M_v = 3280\,\varphi$ $\quad \varphi$ (rad.)

De differentiaalvergelijking is nu:

$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + 3280\,\varphi = 0$ met algemene oplossing:

$$\varphi = e^{-\frac{\rho}{2J}t}\left\{A\cos\sqrt{\frac{d}{J} - \frac{\rho^2}{4J^2}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{d}{J} - \frac{\rho^2}{4J^2}}\,t\right\}$$

Stel: $t = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$$\varphi = B\,e^{-\frac{\rho}{2J}t}\sin\sqrt{\frac{d}{J} - \frac{\rho^2}{4J^2}}\,t$$

Stel: $\frac{d}{J} \gg \frac{\rho^2}{4J^2}$ dan is $\omega_0 = \sqrt{\frac{d}{J}}$ $\qquad \omega_0 = 2\pi f$

$J = \frac{d}{\omega_0^2}$ $\qquad d = 3280$

ω_0 wordt uit de foto bepaald

Is φ maximaal dan geldt $\varphi(n) = e^{-\frac{\rho}{2J}t}$

Voor een tijdstip T sec. later is φ weer maximaal en geldt $\varphi(n+1) = e^{-\frac{\rho}{2J}(t+T)}$

dus $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = e^{-\frac{\rho}{2J}T}$

De quotiënten $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ zijn uit de foto bepaald en daar J en T nu ook bekend zijn, kan ρ bepaald worden.

Ingestelde tijdbasis op de oscillograaf 0,5 sec. per cm.

Opgemeten : 3 perioden (trillingen) over 17 mm.

Door het fotograferen 9 mm op de foto ≙ 10 mm op scherm van oscillograaf

Aantal trillingen per sec. $\frac{9 \times 3}{17 \times 0,5} = 3,2$.

Frequentie: $f = 3,2$ hertz.

$$J = \frac{d}{\omega_0^2} = \frac{3280}{4\pi^2 f^2} = \frac{3280}{4\pi^2 \cdot 3,2^2} = 8,12 \text{ grfcmsec}^2$$

$$\underline{J = 8,12 \text{ grfcmsec}^2.}$$

Demping: $\frac{\varphi_{(n+1)}}{\varphi_{(n)}} = e^{-\frac{\rho}{2J}T}$

$$^{e}\log \varphi_{(n+1)} - {}^{e}\log \varphi_{(n)} = -\frac{\rho}{2J}T$$

$$\rho = \frac{2J}{T}\left[{}^{e}\log \varphi_{(n)} - {}^{e}\log \varphi_{(n+1)}\right]$$

$$\rho = 2 \times 8,12 \times 3,2 \times 2,3 \left[{}^{10}\log \varphi_{(n)} - {}^{10}\log \varphi_{(n+1)}\right]$$

$$\rho = 119,7\left[{}^{10}\log \varphi_{(n)} - {}^{10}\log \varphi_{(n+1)}\right]$$

Opgemeten waarden van $\varphi_{(n)}$'s uit de foto in mm:

18, 16. 14. 12. 10,25 9. 7,5

$$\underline{\rho = 7,77 \text{ grfcmsec}}/\text{rad.}$$

De differentiaalvergelijking voor het beschouwde systeem.

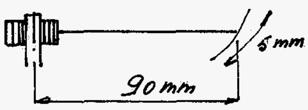
Op blz. 1 is de algemene vorm gegeven:

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5 = d\varphi_0 \cos \omega t \qquad \varphi\,(\text{rad})$$

J : 8,12 grfcmsec^2

ρ : 7,77 grfcm sec/rad.

φ_0 : $\frac{2,5}{90}$ rad.



M_t : totale tegenwerkend moment : $93{,}708\,\xi + 0{,}0050453\,\xi^3 + 0{,}00043185\,\xi^5$
M_t (grfcm) ξ grad.

M_v : tegenwerkend moment liniaire torsieveer : $57{,}14\,\xi$
M_v (grfcm) ξ grad.

De differentiaalvergelijking wordt dus:

$$8{,}12\,\ddot{\varphi} + 7{,}77\,\dot{\varphi} + \left(\frac{180}{\pi} \times 93{,}708\right)\varphi + \left(\frac{180^3}{\pi^3} \times 0{,}0050453\right)\varphi^3 + \left(\frac{180^5}{\pi^5} \times 0{,}00043185\right)\varphi^5 = \frac{2{,}5}{90} \times \frac{180}{\pi} \times 57{,}14 \cos(\omega t)$$

φ (rad)

of

$$\frac{\pi}{180} \times 8{,}12\,\ddot{\xi} + \frac{\pi}{180} \times 7{,}77\,\dot{\xi} + 93{,}708\,\xi + 0{,}0050453\,\xi^3 + 0{,}00043185\,\xi^5 = \frac{2{,}5}{90} \times \frac{180}{\pi} \times 57{,}14 \cos(\omega t)$$

ξ (grad)

$$\underline{0{,}1418\,\ddot{\xi} + 0{,}1358\,\dot{\xi} + 93{,}708\,\xi + 0{,}0050453\,\xi^3 + 0{,}00043185\,\xi^5 = 91{,}1 \cos(\omega t)}$$

Iets over variatierekening ter inleiding van de methode van Ritz-Galerkin. (Zie boek; Rüdiger - Kneschke. Technische Mechanik Band 3. blz. 242-251)

We bekijken eerst: $J(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ = extreem (1)

Dit probleem is een variatieprobleem.

De grondfunktie F is bekend. De opgave is nu een functie $y(x)$ zodanig te bepalen, dat aan (1) voldaan is.

$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ noemt men funktionaal.

We nemen aan dat de functie F en $y(x)$ tweemaal differentieerbaar is naar x, y en y'.

Om een voorwaarde voor $y(x)$ te vinden, bekijken we de tweemaal differentieerbare functie $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, waarin $\eta(x)$ in het interval (a, b) begrensd is. ε is een parameter.

Nu wordt $J(\bar{y}(x)) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')\,dx$.

$J(\bar{y}(x))$ is een functie van ε geworden en wordt aangeduid met $J(\varepsilon)$.

Voor $\varepsilon = 0$ is $\bar{y} = y$. $J(\varepsilon)$ moet dan een extreme waarde aannemen.

Er moet dus gelden $\left.\dfrac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial \bar{y}}\,\eta(x) + \frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial \bar{y}'}\,\eta'(x)\right] dx$$

We weten: $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{y}} = \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \dfrac{\partial F}{\partial y}$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} = \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \bar{y}'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$\left.\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx = 0$$

$$\left.\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_a^b + \int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\eta\,dx = 0$$

Uit deze voorwaarde kan een differentiaalvergelijking afgeleid worden, indien $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_a^b$ nul te maken is.

$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_a^b$ is nul indien:

1e $\quad \eta(x)\big|_a = \eta(x)\big|_b = 0$

of als:
2e $\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_a = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_b = 0$

Het 2e noemt men de natuurlijke randvoorwaarden van het variatieprobleem.

Er moet nu dus gelden $\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\eta\,dx = 0$

Hieruit volgt: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

of $\quad \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$

of $\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

Het variatieprobleem is nu vervangen door een tweede orde differentiaalvergelijking, die aangeduid wordt als de differentiaalvergelijking van Euler.

Meestal gebruikt men een andere notatie, nl die volgens Lagrange.

$\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\,\eta(x)$ wordt geschreven als.

$\delta y = \bar{y} - y = \varepsilon\,\eta$

Bij verdere uitwerking krijgt men dan

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\, dx = 0$$

en hieruit volgt weer de differentiaalvergelijking van Euler.

Uit de grondfunctie $F(x, y, y')$ kan makkelijk de differentiaal-vergelijking van Euler bepaald worden.
Het omgekeerde, uit een tweede orde differentiaalvergelijking, de grondfunctie F bepalen is veel moeilijker.
Er kan wel aangetoond worden dat voor de functie F oneindig veel oplossingen mogelijk zijn.

De methode van Ritz-Galerkin geeft nu een goede benadering voor de functie $y(x)$ uit een gegeven tweede orde differentiaal-vergelijking, m.b.v. variatierekening, zonder dat de grondfunctie F expliciet bepaald wordt.
Dat F niet expliciet bepaald hoeft te worden is het grote voordeel van deze methode.

De methode van Ritz en van Ritz-Galerkin.

De op te lossen differentiaalvergelijking is: $G(x, y, y', y'') = 0$

met randvoorwaarden $y(x)\big|_a = \overset{a}{y}$

$y(x)\big|_b = \overset{b}{y}$

Deze differentiaalvergelijking is aequivalent aan het variatieprobleem:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx = \text{extreem.}$$

met randvoorwaarden: $y(x)\big|_a = \overset{a}{y}$

$y(x)\big|_b = \overset{b}{y}$

Als benaderingsoplossing kiest men de functie $\bar{y} = \overset{0}{v}(x) + \sum_{n=1}^{p} \overset{n}{c}\,\overset{n}{v}(x)$

waarbij $\overset{0}{v}$ en $\overset{n}{v}(x)$ zo gekozen worden, dat geldt:

$$\overset{0}{v}(x)\big|_a = \overset{a}{y} \qquad \overset{0}{v}(x)\big|_b = \overset{b}{y}$$

$$\overset{n}{v}(x)\big|_a = 0 \qquad \overset{n}{v}(x)\big|_b = 0$$

Door deze keuze is aan de randvoorwaarden van y voldaan. De functie $\bar{y}$ is afhankelijk van de nog vrije parameters $\overset{n}{c}$. Bepaalt men deze parameters $\overset{n}{c}$ nu zodanig, dat $J(\bar{y})$ een extreme waarde aanneemt, dan kan men verwachten dat $\bar{y}(x)$ een goede benadering is voor de exacte oplossing $y(x)$. Deze benadering is natuurlijk sterk afhankelijk van de keuze van de functies $v(x)$ en zal des te beter zijn naarmate $v(x)$ meer de exacte benadering is.

Bovendien is een betere benadering te verwachten naarmate men meer termen bij de keuze van $\bar{y}$ meeneemt.

De voorwaarden om $J(\bar{y})$ extreem te maken, zijn

$$\frac{\partial}{\partial \overset{n}{c}} J(\overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \cdots \overset{p}{c}) = 0 \qquad n = 1, 2 \cdots p.$$

Deze p vergelijkingen noemt men de vergelijkingen van Ritz.
Is de grondfunctie F bekend, dan kan op deze manier $y(x)$ benaderd worden door $\bar{y}(x)$.
Deze methode duidt men aan als de methode van Ritz.

Meestal is de grondfunctie F echter onbekend en dan moet men de benaderingsmethode van Ritz-Galerkin gebruiken.
De benaderingsfunctie $\bar{y}(x)$ wordt hier op dezelfde manier gekozen nl $\bar{y}(x) = \overset{0}{v}(x) + \sum_{n=1}^{p} \overset{n}{c} \overset{n}{v}(x)$ met bijbehorende randvoorwaarden.
Ter bepaling van de parameters $\overset{n}{c}$ moet voldaan worden aan:

$$\frac{\partial}{\partial \overset{n}{c}} J\{\bar{y}(x, \overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \cdots \overset{p}{c})\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \overset{n}{c}} J(\overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \cdots \overset{p}{c}) = 0$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \overset{n}{c}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \overset{n}{c}} \right] dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \overset{n}{v} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \overset{n}{v}' \right] dx = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \overset{n}{c}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \overset{n}{v} \right]_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right] \overset{n}{v} \, dx = 0$$

De term $\left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \overset{n}{v} \right]_a^b = 0$ door de keuze van de functie v in a en b

De term $\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'}$ is identiek aan de differentiaalvergelijking $\hat{G}(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')$. Zie blz. 9
De voorwaarden om $J(\bar{y})$ extreem te maken, zijn hier dus:

$$\int_a^b [G(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')] \overset{n}{v} \, dx = 0 \qquad n = 1, 2, \cdots p$$

Dit zijn de vergelijkingen van Galerkin.
p vergelijkingen met p onbekenden, nl $\overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \cdots \overset{p}{c}$.

De methode van Ritz-Galerkin toegepast op een tweede-orde differentiaalvergelijking.

(Zie publikatie van K. Klotter. Non-linair Vibration Problems treated by the averaging method of W. Ritz.

De op te lossen differentiaalvergelijking heeft de volgende vorm:

$$a\ddot{q} + b\,g(\dot{q}) + c\,f(q) = P\cos\Omega t$$

We nemen aan dat de functies $g(\dot{q})$ en $f(q)$ oneven zijn, dus

$$-f(q) = f(-q)$$

$$-g(\dot{q}) = g(-\dot{q})$$

We krijgen de differentiaalvergelijking in de volgende vorm.

$$E \equiv \ddot{q} + 2Dk\,g(\dot{q}) + k^2 f(q) - p\cos\tau = 0$$

$$2Dk = \frac{b}{a} \qquad p = \frac{P}{a}$$

$$k^2 = \frac{c}{a} \qquad \tau = \Omega t$$

We zoeken een periodieke oplossing q die we alsvolgt benaderen:

$$\bar{q} = \vartheta\cos(\tau - \varepsilon)$$

$$\bar{q} = A\cos\tau + B\sin\tau \qquad A = \vartheta\cos\varepsilon \quad B = \vartheta\sin\varepsilon$$

Wanneer de term $\frac{\partial F}{\partial \bar{q}'}\,\bar{\gamma}\,\Big|_a^b$ nul is, is aan de randvoorwaarden voldaan. (zie blz 9)

Er wordt verondersteld, dat er een periodieke funktie $F(\tau, q, q')$ bestaat met periode 2π zodanig dat $\int_0^{2\pi} F(\tau, q, q')\,d\tau =$ extreem aquivalent is aan de hierboven genoemde differentiaalvergelijking met als oplossing een periodieke funktie q

Is er een periodieke F dan is $\frac{\partial F}{\partial \bar{q}'}$ ook periodiek en de term

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{q}'}\cos\tau\,\Big|_0^{2\pi} = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}'}\sin\tau\,\Big|_0^{2\pi} = 0$$

De voorwaarden volgens Galerkin worden hier dus:

1e $\int_0^{2\pi} E(\bar{q})\cos\tau = 0$ en 2e $\int_0^{2\pi} E(\bar{q})\sin\tau = 0$

Bekijk eerst:

$$\int_0^{2\pi} g(\bar{q})\cos\tau\,d\tau = \int_0^{2\pi} g\left[-\Omega q\sin(\tau-\varepsilon)\right]\cos\tau\,d\tau = -\int_0^{2\pi} g(q\Omega\sin p)\cos(p+\varepsilon)\,dp$$

$$= -\int_0^{2\pi} g(\Omega q\sin p)(\cos p\cos\varepsilon - \sin p\sin\varepsilon)\,dp$$

$$= 4\sin\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega q\sin p)\sin p\,dp.$$

$$\int_0^{2\pi} g(\bar{q})\sin\tau\,d\tau = \int_0^{2\pi} g\left[-\Omega q\sin(\tau-\varepsilon)\right]\sin\tau\,d\tau = -\int_0^{2\pi} g(\Omega q\sin p)\sin(p+\varepsilon)\,dp$$

$$= -\int_0^{2\pi} g(\Omega q\sin p)(\sin p\cos\varepsilon + \cos p\sin\varepsilon)\,dp$$

$$= -4\cos\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega q\sin p)\sin p\,dp$$

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{q})\cos\tau\,d\tau = \int_0^{2\pi} f\left[q\cos(\tau-\varepsilon)\right]\cos\tau\,d\tau = \int_0 f(q\cos p)\cos(p+\varepsilon)\,dp$$

$$= \int_0^{2\pi} f(q\cos p)(\cos p\cos\varepsilon - \sin p\sin\varepsilon)\,dp$$

$$= 4\cos\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(q\cos p)\cos p\,dp$$

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{q})\sin\tau\,d\tau = \int_0^{2\pi} f\left[q\cos(\tau-\varepsilon)\right]\sin\tau\,d\tau = \int_0^{2\pi} f(q\cos p)\sin(p+\varepsilon)\,dp$$

$$= \int_0^{2\pi} f(q\cos p)(\sin p\cos\varepsilon + \cos p\sin\varepsilon)\,dp$$

$$= 4\sin\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(q\cos p)\cos p\,dp.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(\tau-\varepsilon)\cos\tau\,d\tau = \int_0^{2\pi}(\cos\tau\cos\varepsilon + \sin\tau\sin\varepsilon)\cos\tau\,d\tau = \pi\cos\varepsilon$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(\tau-\varepsilon)\sin\tau\,d\tau = \int_0^{2\pi}(\cos\tau\cos\varepsilon + \sin\tau\sin\varepsilon)\sin\tau\,d\tau = \pi\sin\varepsilon$$

Voorwaarde

$$1^e.\quad \int_0^{2\pi} E(\bar{q})\cos\tau\, d\tau = \int_0^{2\pi}\left[-\Omega^2 q\cos(\tau-\varepsilon) + 2Dk\, g(\dot{q}) + k^2 f(\bar{q}) - p\cos\tau\right]\cos\tau\, d\tau = 0$$

$$2^e\quad \int_0^{2\pi} E(\bar{q})\sin\tau\, d\tau = \int_0^{2\pi}\left[-\Omega^2 q\cos(\tau-\varepsilon) + 2Dk\, g(\dot{q}) + k^2 f(\bar{q}) - p\cos\tau\right]\sin\tau\, d\tau = 0$$

$$1^e\quad -\Omega^2 q\pi\cos\varepsilon + 2Dk.\, 4\sin\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega q\sin p)\sin p\, dp + k^2.\, 4\cos\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(q\cos p)\cos p\, dp - \pi p = 0$$

$$2^e\quad -\Omega^2 q\pi\sin\varepsilon \mp 2Dk.\, 4\cos\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega q\sin p)\sin p\, dp + k^2.\, 4\sin\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(q\cos p)\cos p\, dp = 0$$

$$1^e\quad -\frac{\Omega^2}{k^2}\cos\varepsilon + 2D\sin\varepsilon\,\frac{4}{kq\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega q\sin p)\sin p\, dp + \cos\varepsilon\,\frac{4}{q\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(q\cos p)\cos p\, dp - \frac{p}{k^2 q} = 0$$

$$2^e\quad -\frac{\Omega^2}{k^2}\sin\varepsilon - 2D\cos\varepsilon\,\frac{4}{kq\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega q\sin p)\sin p\, dp + \sin\varepsilon\,\frac{4}{q\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(q\cos p)\cos p\, dp = 0$$

Noem $\eta^2 = \dfrac{\Omega^2}{k^2}$ $\qquad F(q) = \dfrac{4}{\pi q}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(q\cos p)\cos p\, dp$

$s = \dfrac{p}{k^2} = \dfrac{P}{c}$ $\qquad G(\Omega, q) = \dfrac{4}{kq\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega q\sin p)\sin p\, dp$

de beide voorwaarden worden nu:

$$1^e\quad -\eta^2\cos\varepsilon + 2D\,G(\Omega,q)\sin\varepsilon + F(q)\cos\varepsilon = \left(\frac{s}{q}\right)$$

$$2^e\quad -\eta^2\sin\varepsilon - 2D\,G(\Omega,q)\cos\varepsilon + F(q)\sin\varepsilon = 0$$

of
$$-\eta^2 + F(q) = \left(\frac{s}{q}\right)\cos\varepsilon$$
$$2D\,G(\Omega,q) = \left(\frac{s}{q}\right)\sin\varepsilon$$

of.
$$\left[F(q) - \eta^2\right]^2 + 4D^2 G^2(\Omega,q) = \left(\frac{s}{q}\right)^2$$
$$\tan\varepsilon = \frac{2D\,G(q,\Omega)}{F(q) - \eta^2}$$

De berekende Amplitude als functie van de frequentie

Op blz. 7 is de differentiaalvergelijking voor het onderzocht systeem bepaald:

$$0,1418\,\ddot{\xi} + 0,1358\,\dot{\xi} + 93,708\,\xi + 0,0050453\,\xi^3 + 0,00043185\,\xi^5 = 91,1\cos(\omega t)$$

of $$0,1418\,\ddot{\xi} + 0,1358\,\dot{\xi} + 93,708\left[\xi + 5,37\times10^{-5}\xi^3 + 0,461\times10^{-5}\xi^5\right] = 91,1\cos(\omega t)$$

Deze differentiaalvergelijking wordt met de benaderingsmethode van Ritz-Galerkin opgelost, zoals behandelt op blz. 13

De opgeloste differentiaalvergelijking had de volgende algemene vorm:

$$a\ddot{q} + b\,g(\dot{q}) + c\,f(q) = P\cos(\Omega t) \quad \text{met } -g(\dot{q}) = g(-\dot{q})$$
$$-f(q) = f(-q)$$

of $$\ddot{q} + 2Dk\,g(\dot{q}) + k^2 f(q) - p\cos\tau = 0$$

met $2Dk = \dfrac{b}{a}$ $\qquad \tau = \Omega t$

$k^2 = \dfrac{c}{a}$

$p = \dfrac{P}{a}$

Als benadering is genomen $\bar{q} = \mathcal{Q}\cos(\tau - \varepsilon)$ met als oplossing:

$$\left[F(\mathcal{Q}) - \eta^2\right]^2 + 4D^2 G^2(\Omega,\mathcal{Q}) = \left(\frac{s}{\mathcal{Q}}\right)^2 \qquad (1)$$

$$\tan\varepsilon = \frac{2D\,G(\Omega,\mathcal{Q})}{F(\mathcal{Q}) - \eta^2}$$

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{k^2} \qquad F(\mathcal{Q}) = \frac{4}{\pi\mathcal{Q}}\int_0^{\pi/2} f(\mathcal{Q}\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$$

$$s = \frac{p}{k^2} = \frac{P}{c} \qquad G(\Omega,\mathcal{Q}) = \frac{4}{\Omega\pi\mathcal{Q}}\int_0^{\pi/2} g(\Omega\mathcal{Q}\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

Voor bovengenoemde differentiaalvergelijking geldt dus:

$a = 0,1418$ $\qquad g(\dot{\xi}) = \dot{\xi}$

$b = 0,1358$ $\qquad f(\xi) = \xi + 5,37\times10^{-5}\xi^3 + 0,461\times10^{-5}\xi^5$

$c = 93,708$

$P = 91,1$

$$F(\xi) = \frac{4}{\pi\varphi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\varphi\cos\beta + 5{,}37\times10^{-5}\varphi^3\cos^3\beta + 0{,}461\times10^{-5}\varphi^5\cos^5\beta\right]\cos\beta\, d\beta$$

$$F(\xi) = \frac{4}{\pi\varphi}\left[\frac{\pi}{4}\varphi + 5{,}37\times10^{-5}\varphi^3\times\frac{3}{16}\pi + 0{,}461\times10^{-5}\varphi^5\times\frac{5}{32}\pi\right]$$

$$F(\xi) = 1 + 4{,}0275\times10^{-5}\varphi^2 + 0{,}288\times10^{-5}\varphi^4.$$

$$G(\Omega,\varphi) = \frac{4}{k\pi\varphi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Omega\varphi\sin\beta\sin\beta\, d\beta$$

$$G(\Omega,\varphi) = \frac{4}{k\pi\varphi}\Omega\frac{\pi}{4}\varphi = \frac{\Omega}{k} = \eta$$

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{k^2} = \frac{4\pi^2 f^2}{\frac{c}{a}}$$ f is de frequentie

$$\eta^2 = \frac{4\pi^2 f^2}{\frac{93{,}708}{0{,}1418}} = 0{,}0596 f^2.$$

$$s = \frac{P}{c} = \frac{91{,}1}{93{,}708} = 0{,}972.$$

$$2Dk = \frac{b}{a} \Rightarrow 4D^2 = \frac{b^2}{a^2k^2}.$$

$$k^2 = \frac{c}{a}.$$

$$4D^2G^2 = 4D^2\eta^2 = \frac{b^2}{a^2k^2}\cdot\frac{\Omega^2}{k^2} = \frac{b^2}{c^2}\Omega^2 = \frac{b^2}{c^2}4\pi^2 f^2 = \frac{0{,}1358^2}{93{,}708^2}\cdot 4\pi^2 f^2 = 8{,}3\times10^{-5} f^2.$$

De oplossing wordt dus

$$\left[F(\xi) - \eta^2\right]^2 + 4D^2G^2(\Omega,\varphi) = \left(\frac{s}{\varphi}\right)^2$$

$$\left[1 + 4{,}0275\times10^{-5}\varphi^2 + 0{,}208\times10^{-5}\varphi^4 - 0{,}0596 f^2\right]^2 + 8{,}3\times10^{-5} f^2 = \left(\frac{0{,}972}{\varphi}\right)^2$$

Hierin is: φ: de amplitude in graden

f : de frequentie.

te zien dat de invloed van de demping klein is en verwaarlozen deze in de berekening, zodat de op te lossen vergelijking gegeven wordt door:

$$\left[1 + 4{,}027 \times 10^{-5}\,\varphi^2 + 0{,}288 \times 10^{-5}\,\varphi^4 - 0{,}0596\,f^2\right]^2 = \left[\frac{0{,}972}{\varphi}\right]^2$$

De ruggegraat van het systeem krijgt men als $P \cos\omega t = 0$ dus als $s = \frac{P}{c} = 0$

De vergelijking voor de ruggegraad luidt:

$$1 + 4{,}027 \times 10^{-5}\,\varphi^2 + 0{,}288 \times 10^{-5}\,\varphi^4 - 0{,}0596\,f^2 = 0$$

f	φ (grad)
4,09	0
4,1	4,3
4,15	9,6
4,5	16,1
5	19,8

Daar de demping nul verondersteld wordt, is $\tan \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$
$\varepsilon = \pi$

Voor $\varepsilon = 0$, de trilling is in fase, wordt de amplitude-frequentie relatie gegeven door de volgende vergelijking:

$$1 + 4{,}027 \times 10^{-5}\,\varphi^2 + 0{,}288 \times 10^{-5}\,\varphi^4 - 0{,}0596\,f^2 = \frac{0{,}972}{\varphi}$$

of: $$0{,}288\,\varphi^5 + 4{,}027\,\varphi^3 + \varphi \times 10^5\left[1 - 0{,}0596\,f^2\right] = 97200$$

f	φ (grad)
2	1,0
3	2,1
3,5	3,55
4	10,6
4,5	17,2
5.	20,7.

Voor $\varepsilon = \pi$, de trilling is in tegenfase, luidt de amplitude-frequentie relatie

$$0{,}288\,\vartheta^5 + 4{,}027\,\vartheta^3 + \vartheta \times 10^5 \left[1 - 0{,}0596\, f^2\right] = -97200$$

f	ϑ (grad)	
4,4	6,7	
4,5	4,69	14,8
5	1,98	19,6
6	0,85	

Daar er demping is het systeem is, zal de ruggegraat de beide andere grafieken in een bepaald punt snijden

$$\left[F(\vartheta) - \eta^2\right]^2 + 4 b^2 G^2(\vartheta, \Omega) = \left[\frac{S}{\vartheta}\right]^2$$

Ruggegraat $F(\vartheta) - \eta^2 = 0$

Het snijpunt ligt op de kromme : $4b^2G^2 = \left(\frac{S}{\vartheta}\right)^2$

of $2bG = \frac{S}{\vartheta}$ $\qquad$ G is hier η (zie blz. 17)

$$2b\eta\vartheta = S.$$

Op blz. 17 is berekend: $4b^2G^2 = 8{,}3 \times 10^{-5} f^2.$

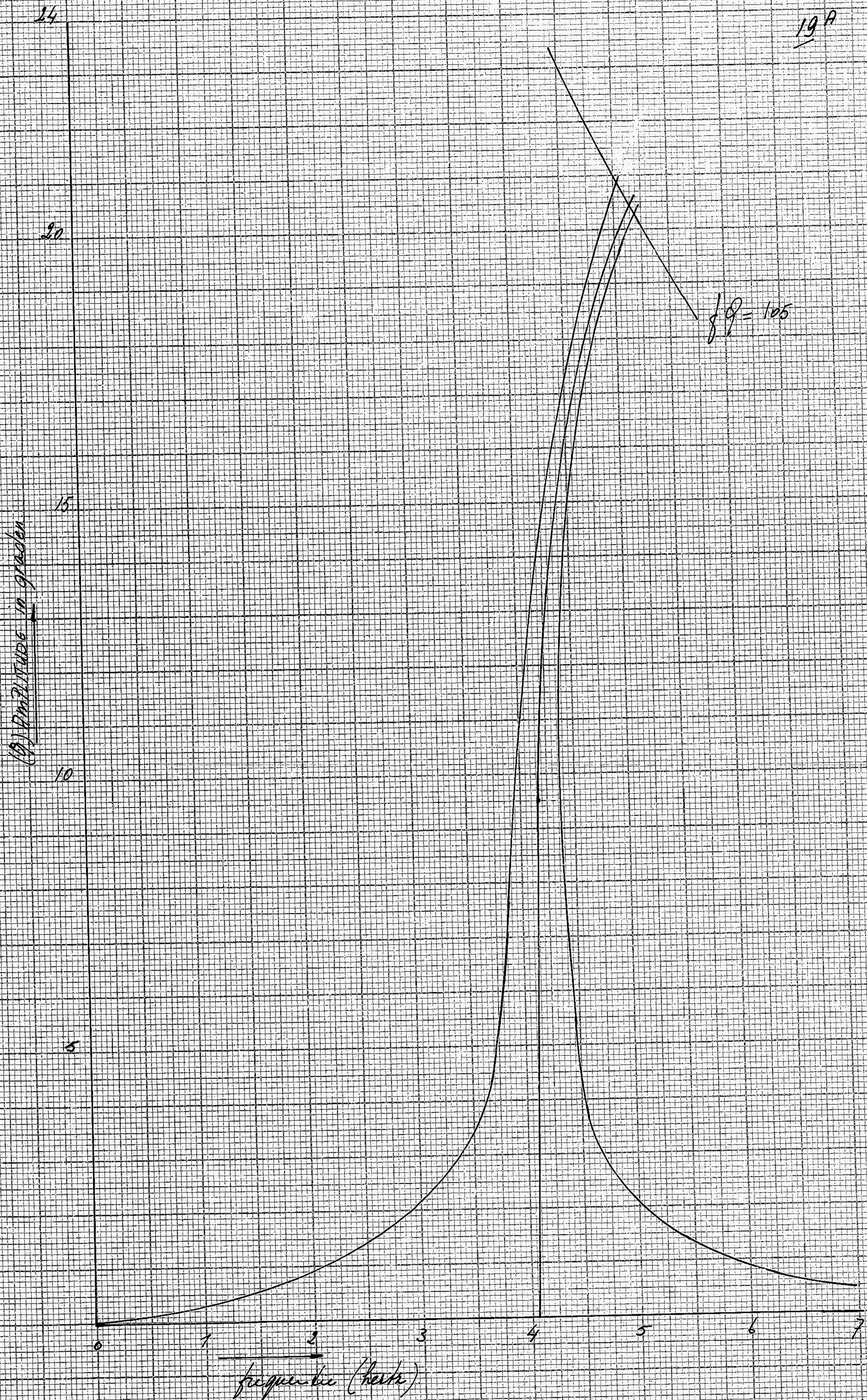
$$\left(\frac{S}{\vartheta}\right)^2 = \left[\frac{0{,}972}{\vartheta}\right]^2$$

$$8{,}3 \times 10^{-5} f^2 \vartheta^2 = 0{,}972^2$$

$$f\vartheta = \frac{0{,}972}{\sqrt{8{,}3 \times 10^{-5}}} = 105$$

f	ϑ (grad)
4,5	23,3
5	21.
5,5	19,1

De berekende amplitude-frequentie karakteristiek is op de volgende blz. 19a in grafiek gebracht.


24
20
15
10
5
(θ) Amplitude in graden
0
1
2
3
4
5
6
7
frequentie (hertz)
∫θ = 105

De gemeten amplitude als functie van de frequentie.

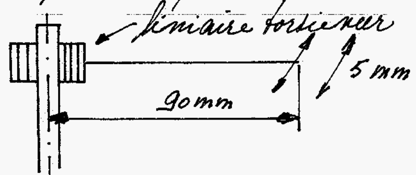
De meting van de amplitude als functie van de frequentie is uitgevoerd m.b.v de op blz. 4 reeds aangeduide versnellingsmeter van het type Brüel en Kjaer, die op de horizontale schijf bevestigd is.

De beweging van de versnellingsmeter is geregistreerd op een oscillograaf.

De versterker tussen versnellingsmeter en oscillograaf is op verplaatsing gezet, zodat het beeld op het scherm de beweging van de schijf als functie van de tijd registreerd.

Dit beeld is gefotografeerd mbv een speciale oscilloscope Camera.

De amplitude van de aandrijving φ_0, wordt constant gehouden.



$$\varphi_0 = \frac{2,5}{90} \text{ rad.}$$

De frequentie f wordt veranderd mbv de schijfwielen tussen electromotortje en nokkenschijf

Daar de ingestelde tijdbasis van de oscillograaf bekend is, kan de frequentie uit de foto bepaald worden door het opmeten van het aantal trillingen per cm.

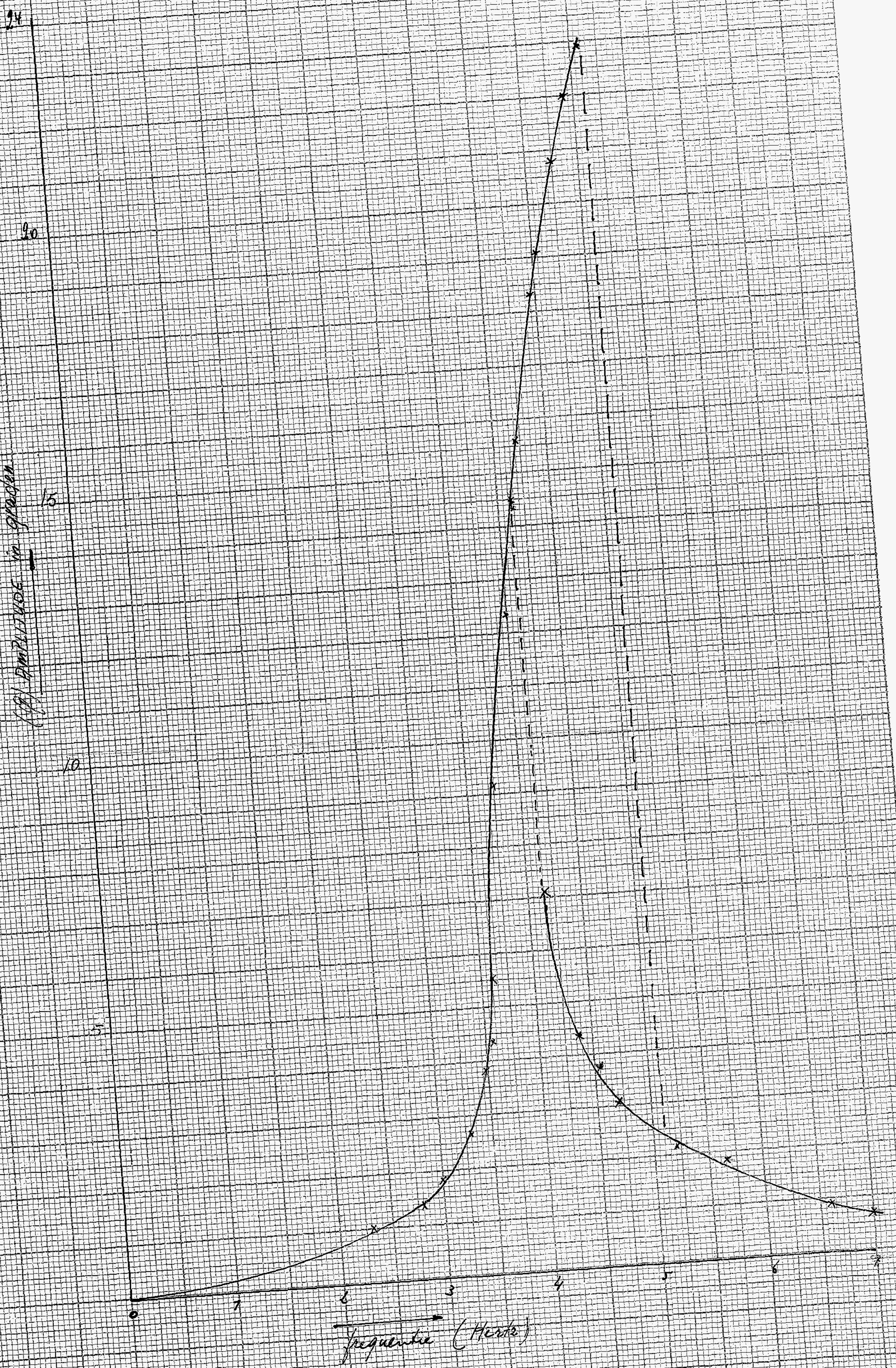
Er is een ijking gemaakt tussen de opgemeten amplitude op de foto en de werkelijke amplitude van de schijf.

Werkelijke ampl. φ (graden)	Opgemeten ampl. op de foto (mm)
20	17,5
18	15,4
15	13
10	8,25

Foto no 1 t/m 13 is genomen bij toenemende frequentie
Foto no 14 t/m 22 is genomen bij afnemende frequentie
Foto no 46 t/m 53 is genomen bij toenemende frequentie.

Foto No	Gemeten top-top waarde mm	Gemeten frequentie	Amplitude θ (graad).
1	9,1	3,6	5,51.
2	15,1	3,75	9,16
3	20,7	4.	12,35
4	25,1	4,125	14,5
5	27.	4,2	15,6
6	32	4,45	18,3
7	33,4	4,55	19,1
8	36,4	4,75	20,8
9	40	5,09	22,9
10	38,4	4,9	22
11	41,6	5,14	23,8
12	3,6	5,2	2,18
13	3,7	5,66	1,88
14	5	4,7	3,03
15	6,2	4,55	3,76
16	7,2	4,375	4,37
17	11,7	4,167	7,1
18	25	4,125	14,4
19	23,2	4,07	13,4
20	19,1	3,91	11,6
21	13,6	3,725	8,25
22	9,5	3,633	5,76
46	16,5	2,33	1
47	23	2,01	1,39
48	15,5	3	1,88
49	22	3,3	2,67
50	31,5	3,5	3,83
51	35	3,57	4,25
52	11,8	7,1	0,72
63	14	6,6	0,86

Deze waarden zijn op de volgende bldz. in grafiek gebracht.



(θ) AMPLITUDE in graden
24
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
frequentie (Hertz)

Vergelijken van theoretische en gemeten amplitude-frequentie relatie

Op de volgende blz. zijn de theoretische en gemeten relatie in een grafiek ondergebracht.
We bekijken de theoretische relatie tussen ϑ en f, omdat verondersteld wordt dat de fout in de gemeten waarden, klein is.
De invloed van de demping wordt verwaarloosd.
De differentiaalvergelijking is:

$$\frac{\pi}{180} J \ddot{\xi} + C\left(\xi + 5{,}37\times10^{-5}\xi^3 + 0{,}461\times10^{-5}\xi^5\right) = P\cos\omega t$$

$J = 8{,}12$ gr fcm sec^2
$C = 93{,}708$ gr fcm/grad.
$P = 91{,}1$.

$$F(\xi) = 1 + 5{,}37\times10^{-5}\times\frac{3}{4}\vartheta^2 + 0{,}461\times10^{-5}\times\frac{5}{8}\vartheta^4$$

$$F(\xi) = 1 + 4{,}027\times10^{-5}\vartheta^2 + 0{,}288\times10^{-5}\vartheta^4$$

$$\eta^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\omega^2}{\frac{c}{\frac{\pi}{180}J}} = \frac{4\pi^2 f^2}{\frac{c}{\frac{\pi}{180}J}}$$

De vergelijking tussen ϑ en f is:

$$\left[F(\xi) - \eta^2\right]^2 = \left[\frac{S}{\vartheta}\right]^2$$

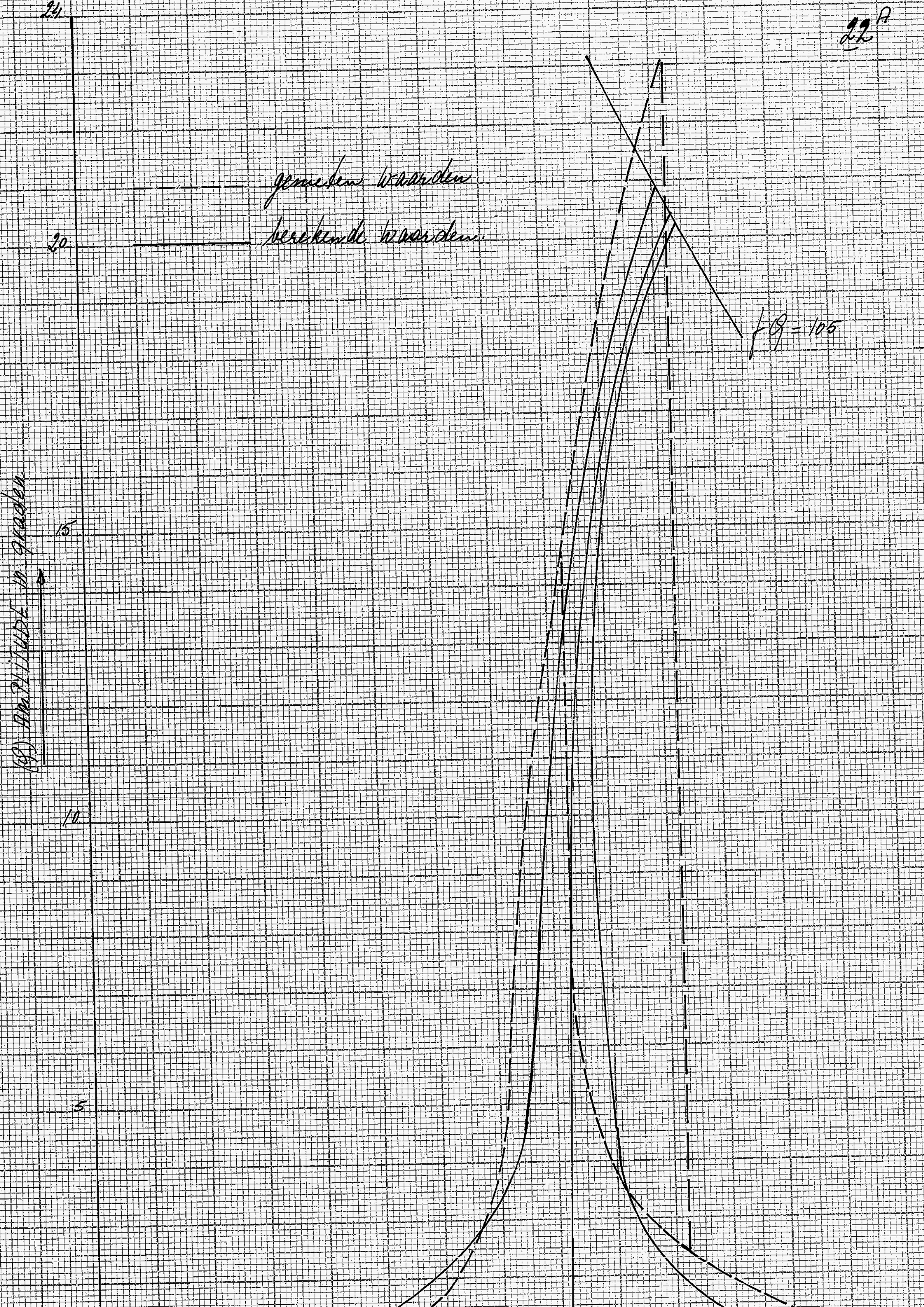
$$\left[1 + 4{,}027\times10^{-5}\vartheta^2 + 0{,}288\times10^{-5}\vartheta^4 - \frac{4\pi^2 f^2}{\frac{c}{\frac{\pi}{180}J}}\right]^2 = \left[\frac{\frac{91{,}1}{c}}{\vartheta}\right]^2$$

Vergelijking voor de ruggegraat:

$$1 + 4{,}027\times10^{-5}\vartheta^2 + 0{,}288\times10^{-5}\vartheta^4 - \frac{4\pi^2 f^2}{\frac{c}{\frac{\pi}{180}J}} = 0$$

De ruggegraat wordt beter (benadert beter de gemeten waarden) als:

$0{,}288\times10^{-5}$ kleiner is
c kleiner is
J groter is.



gemeten waarden
berekende waarden
(θ) AMPLITUDE in graden
θ = 105
frequentie (hertz)
24
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7

Voor de frequenties $f=2$ en $f=3$ hertz. wordt de relatie tussen ϑ en f gegeven door:

$$1 + 4{,}027 \times 10^{-5}\,\vartheta^2 + 0{,}288 \times 10^{-5}\,\vartheta^4 - \frac{4\pi^2 f^2}{\dfrac{c}{\frac{\kappa}{1000} J}} = \frac{91{,}1}{\dfrac{c}{\vartheta}}$$

of door: $0{,}288\,\vartheta^5 + 4{,}027\,\vartheta^3 + \vartheta \times 10^5 \left[1 - \dfrac{4\pi^2 f^2}{\dfrac{c}{\frac{\kappa}{100} J}}\right] = \dfrac{91{,}1}{c}$

Daar ϑ klein is ($\vartheta \approx 1$) kan deze relatie geschreven worden als:

$$\vartheta = \frac{\dfrac{91{,}1}{c} \times 10^{-5}}{1 - \dfrac{4\pi^2 f^2}{\dfrac{c}{\frac{\kappa}{100} J}}} \qquad (1)$$

Voor de frequenties $f=6$ en $f=7$ hertz. wordt de relatie gegeven door

$$\vartheta = -\frac{\dfrac{91{,}1}{c} \times 10^{-5}}{1 - \dfrac{4\pi^2 f^2}{\dfrac{c}{\frac{\kappa}{100} J}}} \qquad (2)$$

De gemeten waarden worden beter benaderd als:

$\left.\begin{array}{l} c \text{ is groter} \\ J \text{ is kleiner} \end{array}\right\}$ (1)

Bij (2) zijn de afwijkingen groter dan bij (1)

J is groter geeft hier een verbetering.

Waarin de afwijking hoofdzakelijk zit, is moeilijk te zeggen.
Het is mogelijk dat de waarde van J te klein is.
Een iets grotere waarde voor J geeft een verbetering.
Bovendien moeten we bedenken dat de berekening volgens Ritz-Galerkin ook een benaderingsmethode is.

Het is ook mogelijk dat de fout in de gemeten waarden zit, omdat de laagste ijking tussen werkelijke amplitude en amplitude op de oscillograaf bij 10 graden is geweest (bldz. 20).

De grootte van de amplitude beneden 10 graden is bepaald door interpolatie. Er is wel verondersteld dat de amplitude op de oscillograaf en de werkelijke amplitude een lineair verband hebben. Bovendien komen de amplituden bij $f=2, 3, 6$ en 7 beter overeen als de factor 91,1 uit de vergelijkingen (1) en 2) op blz. 23 kleiner wordt:

$$\frac{2,5}{90} \times \frac{180}{\pi} \times 57,14 = 91,1.$$

$\frac{2,5}{90} = \varphi_0$ (rad). De amplitude van de aandrijving. Deze is nauwkeurig opgemeten.

Het is wel goed mogelijk dat de factor 57,14 (veerconstante van de lineaire torsieveer) niet goed is, omdat de amplitude hier klein is. De juiste veerstijfheid bij deze kleine hoekverdraaiing is moeilijk te bepalen, omdat de kracht op de veer dan klein is.

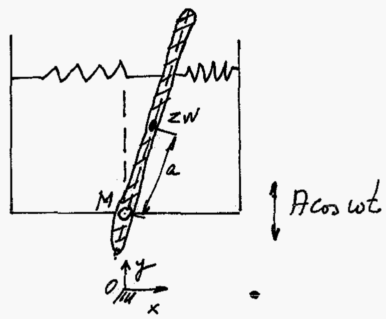
Conclusie

Bekijken we de gemeten en berekende relatie tussen φ en f (blz. 22A) dan mag verondersteld worden dat de resultaten redelijk zijn. Waarin de verschillen tussen beide waarden precies zitten, is moeilijk te zeggen.

Het niet-lineaire karakter van het veersysteem is echter zeer duidelijk te zien in het verloop van de φ-f relatie.

Opdracht.

I Onderzoek naar de stabiele en instabiele gebieden van het volgende systeem:



de staaf kan roteren om M.
zwaartepuntsafstand a.
massa m
massatraagheidsmoment t.o.v. het zwaartepunt: I_z
Het systeem trilt verticaal t.o.v. het vaste punt O volgens: $A \cos \omega t$.

II Is een onderzoek naar deze gebieden mogelijk m.b.v. de Schenck triltafel, door juiste keuze van de afmetingen en karakteristieken (zoals a, I_z, m, de veerconstante).

III Zo ja, onderzoek het systeem m.b.v. de triltafel.

Conclusie

Daar de amplitude A van de triltafel klein is, $A_{max} = 2,4$ mm, zal een onderzoek m.b.v. de triltafel weinig resultaat opleveren.
Om resultaten te krijgen, zou de totale lengte van de staaf en de zwaartepuntsafstand a slechts enkele millimeters mogen bedragen. en dit is constructief zeer moeilijk te verwezenlijken.
Een onderzoek is mogelijk wanneer men een apparaat ter beschikking heeft, waarvan A_{max} tussen de 10 à 20 cm ligt.

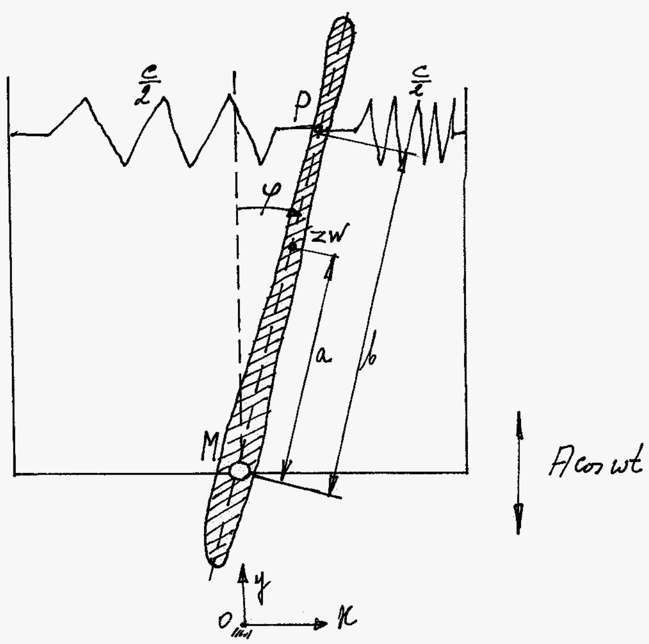
Inhoudsopgave.

Literatuur:

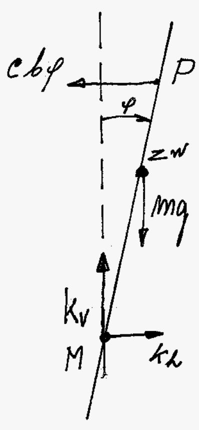
Non linear vibrations : Stoker.

Nicht liniaire Mechanik : Hans Kauderer

demping



Van het hierboven geschetste systeem wordt de bewegingsvergelijking bepaald.
De gearceerde balk kan roteren om het punt M.
Twee massaloze veren (veerconstante van een veer is $\frac{c}{2}$) zijn op een afstand b van het punt M aan de staaf bevestigd.
Het gehele systeem wordt in verticale richting harmonisch bewogen t.o.v. het vaste punt O volgens: $A\cos\omega t$



Op de staaf werken de volgende krachten;

in punt M: Horizontaal K_h.
Verticaal K_v

in het zwaartepunt: verticaal mg.

de veerkracht in het punt P: horizontaal $cb\varphi$.

De coördinaten van het zwaartepunt zijn:

$$x_{zw} = a\sin\varphi$$

$$y_{zw} = a\cos\varphi + A\cos\omega t$$

Het zwaartepunt.

$x_{zw} = a \sin\varphi$ $\qquad$ $y_{zw} = a\cos\varphi + A\cos\omega t$

$\dot{x}_{zw} = a\cos\varphi\,\dot{\varphi}$ $\qquad$ $\dot{y}_{zw} = -a\sin\varphi\,\dot{\varphi} - A\omega\sin\omega t$

$\ddot{x}_{zw} = -a\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + a\cos\varphi\,\ddot{\varphi}$ $\qquad$ $\ddot{y}_{zw} = -a\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - a\sin\varphi\,\ddot{\varphi} - A\omega^2\cos\omega t$

Voor kleine trillingen om M is de hoek φ klein.

$\sin\varphi \approx \varphi$
$\cos\varphi \approx 1.$

Stel: bijv. $\varphi = \varphi_0 \sin\lambda t$
$\dot{\varphi} = \varphi_0\lambda\cos\lambda t \rightarrow \dot{\varphi}^2 = \varphi_0^2\lambda^2\cos\lambda t$
$\ddot{\varphi} = -\varphi_0\lambda^2\sin\lambda t$

We zien $\dot{\varphi}^2 \ll \ddot{\varphi}$

Er geldt nu in goede benadering.

$\ddot{x}_{zw} = a\ddot{\varphi}$ $\qquad$ $\ddot{y}_{zw} = -a\dot{\varphi}^2 - a\varphi\ddot{\varphi} - A\omega^2\cos\omega t$

Voor niet alte kleine ω wordt $\ddot{y}_{zw} = -A\omega^2\cos\omega t$

Voor het zwaartepunt geldt de wet van Newton $\vec{K} = m\vec{a}$

Horizontaal: $K_h - cb\varphi = ma\ddot{\varphi} \rightarrow K_h = ma\ddot{\varphi} + cb\varphi$

Verticaal: $K_v - Mg = -mA\omega^2\cos\omega t \rightarrow K_v = m(g - A\omega^2\cos\omega t)$

Het impulsmoment t.o.v het zwaartepunt is $D = J_z\cdot\dot{\varphi}$

J_z is het massatraagheidsmoment t.o.v. het zwaartepunt om de z-as.

Voor het zwaartepunt geldt $\dot{D} = M$.

$J_z\ddot{\varphi} = K_v a\varphi - K_h\cdot a - cb\varphi(b-a)$

$J_z\ddot{\varphi} = ma(g - A\omega^2\cos\omega t)\varphi - ma^2\ddot{\varphi} - cba\varphi - cb\varphi(b-a)$

$(J_z + ma^2)\ddot{\varphi} + (cb^2 - mag + maA\omega^2\cos\omega t)\varphi = 0$

$J_M = J_z + ma^2$ $\quad$ J_M is het massatraagheidsmoment t.o.v. het punt M.

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{cb^2 - mag}{J_M} + \frac{ma}{J_M}A\omega^2\cos\omega t\right)\varphi = 0$$

Houden we het punt M stil t.o.v. het punt O dan is $A\cos\omega t = 0$

Er geldt dan $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$

$$\omega_0^2 = \frac{cb^2 - mag}{J_M}$$

W_0 noemen we de eigenfrequentie

De bewegingsvergelijking is nu te schrijven als:

$$\ddot{\varphi} + \left(W_0^2 + \frac{ma}{J_M} A\omega^2 \cos\omega t\right)\varphi = 0$$

Stel: $\omega t = \tau$ $\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{d\varphi}{d\tau} \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$.

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left(\frac{W_0^2}{\omega^2} + \frac{ma}{J_M} A\cos\tau\right)\varphi = 0$$

Deze differentiaalvergelijking is liniair, waarbij de coefficient voor de φ (norconstante) een functie van de tijd is en wel harmonisch.

Deze D.V. is de z.g. differentiaalvergelijking van Mathieu

De algemene vorm van deze D.V. is

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + (\delta + \varepsilon\cos z)\varphi = 0 \qquad \delta = \frac{W_0^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon = \frac{ma}{J_M} A$$

J_M is te schrijven als: $J_M = M\rho^2$

ρ is de massatraagheidsstraal. $\Big\} \longrightarrow \varepsilon = \frac{a}{\rho^2} A$.

Stabile en instabile gebieden van de D.V. van Mathieu

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + (\delta + \varepsilon \cos z)\varphi = 0$$ We nemen δ, ε en z reëel

In het algemeen bestaan er twee onafhankelijke oplossingen.
$\varphi_1(z)$ en $\varphi_2(z)$

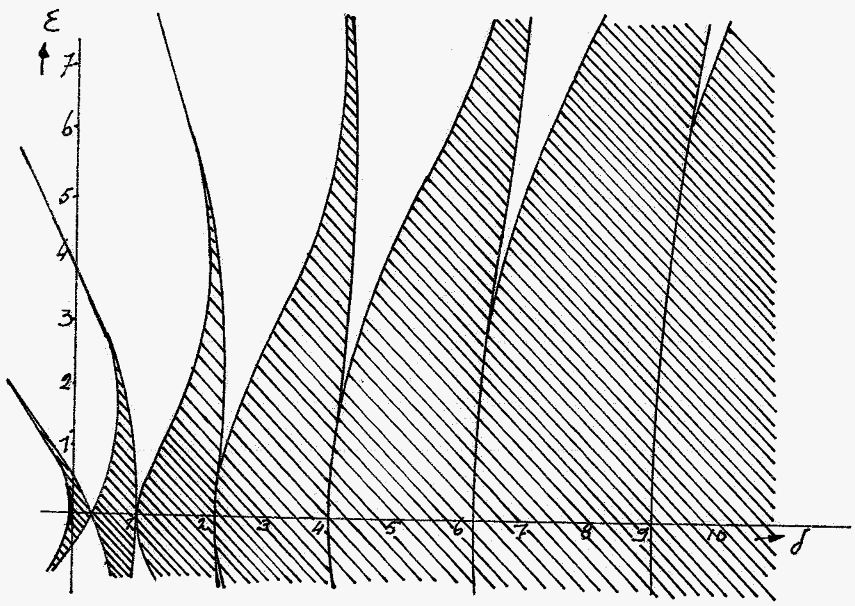
De algemene oplossing is dan: $\varphi(z) = c_1\varphi_1(z) + c_2\varphi_2(z)$

Is $|\varphi_1(z)|$ en $|\varphi_2(z)|$ begrensd voor elke z, dan is ook $\varphi(z)$ begrensd.
Deze oplossingen noemen we stabiel.

Is of $|\varphi_1(z)|$ of $|\varphi_2(z)|$ niet begrensd voor elke z, dan is φ_z ook niet begrensd
Deze oplossingen noemen we instabiel.

Bijv. $\varphi_1(z) = e^z$, maakt $\varphi(z)$ instabiel.

De oplossingen voor $\varphi(z)$ zijn volkomen bepaald door de waarden van δ en ε, en dus ook de stabile en instabile gebieden.



Stabile en instabile gebieden van de Mathieu vergelijking
De gearceerde gebieden zijn de stabile

Men kan bewijzen dat de oplossing $\varphi(z)$ voor punten op de lijnen die de stabile en instabile gebieden scheiden, periodisch is, met periode 2π of 4π

$\varphi(z)$ heeft dus de vorm : $\varphi(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nz) + b_n \sin(nz)$

Verder kan men bewijzen, door $\ddot{\varphi}(z)$ en $\varphi(z)$ in de D.V. in te vullen, dat de oplossing voor $\varphi(z)$; ofwel $\varphi(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nz)$

of $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nz)$ is.

Er is ook te bewijzen dat voor een bepaalde waarde van ε en δ slechts een oplossing mogelijk is.

De D.V. geeft de volgende betrekkingen tussen de coëfficiënten

$$\begin{cases} \delta a_0 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 = 0 \\ (\delta - n^2) a_n + \frac{\varepsilon}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \\ \qquad n = 1, 2, \cdots \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} (\delta - 1) b_1 + \frac{\varepsilon}{2} b_2 = 0 \\ (\delta - n^2) b_n + \frac{\varepsilon}{2}(b_{n-1} + b_{n+1}) = 0 \\ \qquad n = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

De oplossingen van δ en ε, die er voor zorgen dat niet alle waarden van a_n en b_n nul zijn, geven de lijnen $\delta(\varepsilon)$ die de stabile en instabile gebieden scheiden.

<u>Voor kleine waarden van ε is $\delta(\varepsilon)$ als volgt te benaderen.</u>

Voor $\varepsilon = 0$ komen de stabile en instabile gebieden samen in de punten $\delta = \frac{n^2}{4}$ $n = 0, 1, 2.$ $\qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} + (\delta + \varepsilon \cos z)\varphi = 0$

$\varphi(z)$ in deze punten is periodisch, met periodieke oplossingen in de termen $\sin \frac{n}{2} z$ en $\cos \frac{n}{2} z$.

Voor $\varepsilon \neq 0$ is $\varphi(z)$ periodiek met periode 2π of 4π

We verwachten voor $\varepsilon \to 0$ dat $\varphi(z)$ te schrijven is in termen $\sin\left(\frac{n}{2}z\right)$ of $\cos\left(\frac{n}{2}z\right)$

We zien $\varphi(z, \varepsilon)$ en $\delta(\varepsilon)$

We schrijven,

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \cdots$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2.$$

φ_0 is $\cos\left(\frac{n}{2}z\right)$ of $\sin\left(\frac{n}{2}z\right)$

φ_1, φ_2 enz hebben periode 2π of 4π

$$\delta_0 = \frac{n^2}{4}.$$

Invullen in de D.V. geeft de volgende betrekkingen.

$$\varphi_0'' + \delta_0\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_1'' + \delta_0\varphi_1 = -\delta_1\varphi_0 - \varphi_0\cos z$$

$$\varphi_2'' + \delta_0\varphi_2 = -\delta_2\varphi_0 - \delta_1\varphi_1 - \varphi_1\cos z$$

--- - = -------

We nemen $\underline{n = 0}$

$\delta_0 = 0$ $\qquad$ φ_0 is $\cos\left(\frac{n}{2}z\right)$ of $\sin\left(\frac{n}{2}z\right)$

φ_0 is 1 of 0

Neem $\varphi_0 = 1$.

$$\varphi_1'' = -\delta_1 - \cos z$$

Daar φ_1 periodiek moet zijn, volgt dat $\delta_1 = 0$

$$\varphi_1 = \cos z + c$$

$$\varphi_2'' = -\delta_2 - (\cos z + c)\cos z$$

$$= -\delta_2 - \frac{1}{2} - c\cos z - \frac{1}{2}\cos 2z$$

φ_2 moet periodiek zijn, $\to$ $\delta_2 = -\frac{1}{2}.$

De oplossing $\delta(\varepsilon)$ wordt in benadering $\underline{\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \cdots}$

<u>Neem $n = 1.$</u>

$\delta_0 = \frac{1}{4}$ $\qquad$ φ_0 is $\cos\frac{z}{2}$ of $\sin\frac{z}{2}.$

We nemen eerst $\varphi_0 = \cos\frac{z}{2}.$

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{4}\varphi_1 = \left(-\delta_1 - \cos z\right)\cos\frac{z}{2}$$

$$= \left(-\delta_1 - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}z$$

Stel $-\delta_1 - \frac{1}{2} \neq 0$

φ_1 heeft nu een oplossing van de vorm $\varphi_1 = z \sin\frac{z}{2}.$

$$\varphi_1 = z\sin\frac{z}{2}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \sin\frac{z}{2} + \frac{1}{2}z\cos\frac{z}{2}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{2}\cos\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{z}{2} - \frac{1}{4}z\sin\frac{z}{2}.$$

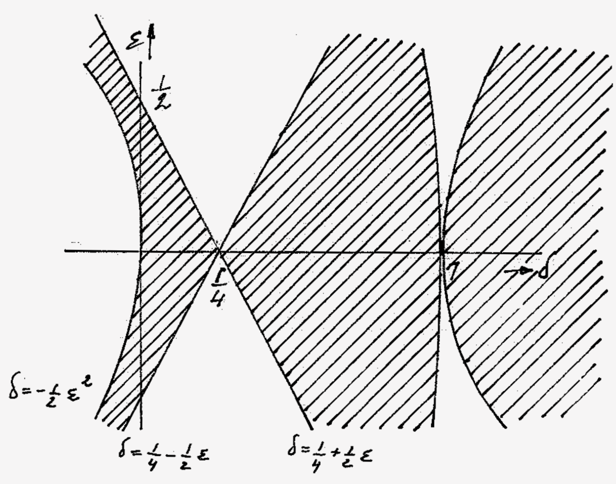
$$\cos\frac{z}{2} - \frac{1}{4}z\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{4}z\sin\frac{z}{2} = \left(-\delta_1 - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{z}{2}.$$

Dus φ_1 is niet periodisch.

$$-\delta_1 - \frac{1}{2} = 0 \qquad \delta_1 = -\frac{1}{2}.$$

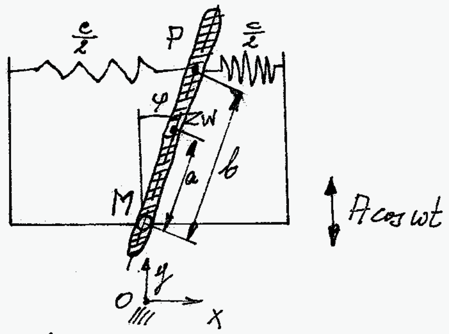
$$\underline{\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon.}$$

Nemen we $\varphi_0 = \sin\left(\frac{n}{2}z\right)$, dan wordt $\underline{\delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon.}$



gearceerde gebied is stabiel
ε is klein.

Karakteristieke grootheden van het systeem.



We hebben afgeleid dat de bewegingsvergelijking de volgende vorm heeft.

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{ma}{I_M} A\cos\tau\right)\varphi = 0$$

$\omega t = \tau$ — a: zwaartepuntsafstand tot M.

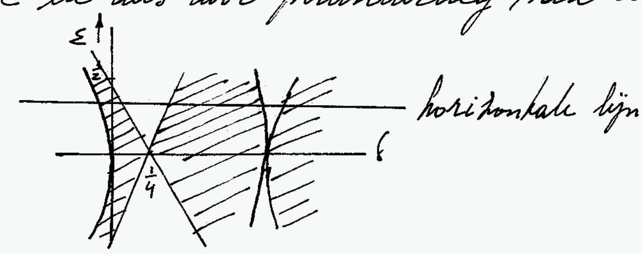
$\omega_0^2 = \frac{cb^2 - mag}{I_M}$ — I_M: Massatraagheidsmoment t.o.v. M.

Algemene vorm van de D.V. $\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon\cos\tau)\varphi = 0$

$$\delta = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon = \frac{ma}{I_M} A$$

Door bovengeschetst systeem op een triltafel te zetten, is in principe de stabile en instabile toestand te bepalen.
Heeft men de amplitude A van de triltafel ingesteld, dan kan men tijdens het trillen van de tafel enkel de frequentie veranderen.
Kiezen we de waarden van c, b, m, a, I_M en A, dan kunnen we δ veranderen door de opgedrukte frequentie te veranderen.
In de δ-ε grafiek doorlopen we dan een horizontale lijn voor de ingestelde waarde van ε.
Veranderen we vervolgens m, a, I_M of A dan krijgen we een andere waarde van ε en dus door verandering van ω een nieuwe horizontale lijn.



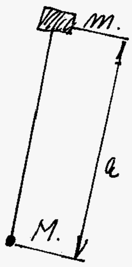
De moeilijkheid is echter dat we met de ter beschikking zijnde triltafel de waarde van ε niet groot genoeg kunnen krijgen, omdat $A_{max} = 2,4$ mm bij een maximale frequentie van 40 Hz.

De grootte van ε wordt bepaald door de vorm van de staaf en de amplitude A van de triltafel.

V.B.

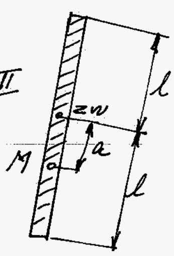
Massa m op afstand a van M aan gewichtsloze starre staaf.

I



$$\varepsilon = \frac{ma}{J_M}.A = \frac{ma}{ma^2}.A = \frac{A}{a}.$$

II



$$\varepsilon = \frac{ma}{J_M}.A = \frac{ma}{\frac{1}{3}ml^2+ma^2}.A = \frac{1}{a+\frac{1}{3}\frac{l^2}{a}}.A.$$

voor $l = a\sqrt{3}$ is ε max.

$$\varepsilon_{max} = \frac{A}{2a}.$$

We zien dat de grootte van ε_{max} afhankelijk is van a.
Nemen we a heel klein ($A_{max} = 2,4$ mm) bijv. 2,4 mm dan is ε_{max} voor geval I gelijk aan 1 en voor II gelijk aan $\frac{1}{2}$.
Het realiseren van een kleine a is echter zeer moeilijk, omdat men er voor moet zorgen dat de wrijving in de lagering van punt M klein is.
Stellen we a minimaal bijv. 50 mm., dan wordt ε_{max}

$$\varepsilon_{max} \text{ bij I} = \frac{2,4}{50} = 0,048$$

$$\varepsilon_{max} \text{ bij II} = \frac{2,4}{2 \times 50} = 0,024.$$

Kijken we naar de δ-ε grafiek voor de stabiele en instabiele gebieden dan zien we dat we met behulp van de triltafel slechts een zeer

klein gebied kunnen onderzoeken.
Bij enige wrijving in de lagering worden de stabiele gebieden bovendien nog groter. (Lit: Nicht linaire Mechanik. Hans Kauderer blz. 509 en 510)
Meting op deze manier zal weinig resultaat opleveren.
Vergroten van de ε_{max} is voor dit systeem denkelijk niet mogelijk tenminste wanneer we a min. op 50 mm houden en A_{max} op 2,4 mm.
Om ε groot te krijgen moet de zwaartepuntsafstand a groot zijn en het massa traagheidsmoment t.o.v. punt M klein.
Dit is alleen mogelijk voor kleine waarden van a.
Men kan ε groter krijgen door de amplitude A groot te maken.
Dit is echter niet mogelijk met de triltafel.

<u>Conclusie</u>

Voor meting aan het beschreven systeem is de triltafel niet geschikt.
Men zou een apparaat moeten maken dat een grote amplitude A mogelijk maakt.

Febr. 65

Electrische Analogon voor Torsie

J.W.H. Leers.

Inhoudsopgave.

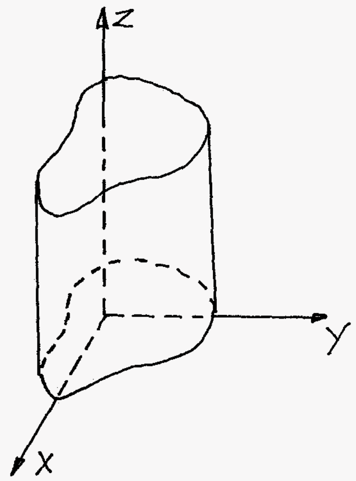
Gebruikte literatuur.

Theory of Elasticity door Timoshenko en Goodier

Publikatie: The Torsion Problem - A New Twist. door J.H. Swannel

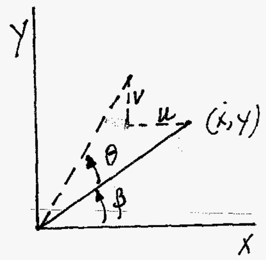
Conducting-sheet analogy for stress concentrations in twisted structural sections door C.W. Beadle en H.D. Conway.

Wringing van homogene balken.



We maken gebruik van de semi-inverse methode van de Saint-Venant, d.w.z. we maken een aantal aannamen over spannings-, rek-, of vervormingscomponenten en laten hierbij nog zoveel vrijheid over dat te voldoen is aan de evenwichtsvrgl, de compatibiliteitsvrgl. en de randvoorwaarden.
Is dit mogelijk dan hebben we ook de exacte oplossing. (Eenduidigheidsstelling van Kirchhoff).

Aannamen.



$(x,y) = r e^{i\beta}$

$(x-u,\ y+v) = r e^{i(\theta+\beta)}.$

$-u + iv = r e^{i\beta}\left(e^{i\theta} - 1\right) = (x+iy)\left(e^{i\theta}-1\right)$

Voor $\theta \ll 1$ geldt $e^{i\theta} - 1 = i\theta$

$$u = -\theta y$$
$$v = \theta x$$

Verder nemen we aan dat θ evenredig is met z.

$\theta = \alpha z.$ (α is hoekverdraaiing per lengte-eenheid,

$$u = -\alpha z y.$$
$$v = \alpha z x$$
$$w = \alpha \psi(x,y).$$

We stellen de welving onafhankelijk van z.

Evenwichtsvergelijkingen. $(\tau_{ij,j} = 0)$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Aanname: Het zijdelings oppervlak is spanningsvrij.

Uit momentenevenwicht volgt: $(\tau_{ij} = \tau_{ji})$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Wet van Hooke.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Bepaling van de spanningen.

We hadden aangenomen:

$$u = -\alpha z y$$
$$v = \alpha z x$$
$$w = \alpha \psi(x, y)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0. \qquad \tau_{xy} = 0.$$

$$\gamma_{xz} = \alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \Rightarrow \tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\gamma_{yz} = \alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \Rightarrow \tau_{yz} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)$$

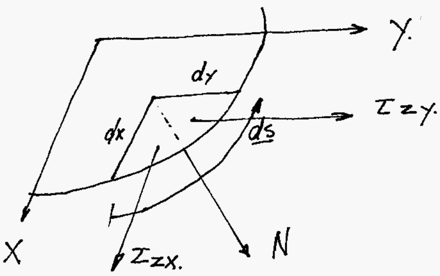
Uit de evenwichtsvergelijking volgt: $\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$

Voor de welvingsfunctie $\psi(x,y)$ geldt dus:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0}$$

Aan de compatibiliteitsvgl. is voldaan als ψ een continue different. ba[ar] functie van x en y is

Randvoorwaarden.



$$\tau_{zx}\cos(N,x) + \tau_{zy}\cos(N,y) = 0 \qquad (1)$$

$$\cos(N,x) = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos(N,y) = -\frac{dx}{ds}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)\frac{dx}{ds} = 0$$

Df: $\frac{d\psi}{dn} = \text{grad}\,\psi . \underline{n}$ Vector $\underline{n}$ is de eenheidsvector in richting N.

$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(N,x) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(N,y)$$

Op de rand moet dus voldaan zijn aan:

$$\frac{d\psi}{dn} = y\cos(N,x) - x\cos(N,y)$$

We moeten nog aantonen dat de dwarskrachten D_x en D_y beide nul zijn.

$$D_x = \iint_{opp.} \tau_{zx}\,dx\,dy = \iint_{opp.} G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)dx\,dy$$

$$= G\alpha\iint_{opp}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{x\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)\right\}\right]dx\,dy.$$

Volgens Gauss geldt: $\iint_\tau \text{div}\,\underline{a}\,d\tau = \int_S (\underline{a},\underline{n})\,ds$. $\quad \text{div}\,\underline{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y}$

$$D_x = G\alpha \int_{\text{contour } s} x\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)\cos(N,x) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)\cos(N,y)\right]ds.$$

De vorm [- - - -] is volgens (1) (bovenaan de blz) gelijk aan nul op de rand.

Dus $D_x = 0$.

Evenzo is af te leiden dat: $D_y = 0$

Volgens Gauss geldt ook: $\iint_\tau \text{div}\,\underline{a}\,d\tau = \oint_s (\underline{a},\underline{n})\,ds$.

$\underline{a} = \text{grad}\,\varphi$. $\quad \iint_\tau(\text{div grad}\,\varphi)\,d\tau = \oint_s \frac{d\varphi}{dn}\,ds = 0$.

Op het oppervlak geldt $\nabla^2\psi = 0$ of $\text{div grad}\,\psi = 0$ Dus op rand $\oint_s \frac{d\psi}{dn}\,ds = 0$

Korte Samenvatting.

Voor zuiver wringen van homogene balken met enkelvoudig samenhangende doorsnede loodrecht op de symmetrie as geldt:

$$u = -\alpha z y. \qquad \alpha \text{ is hoekverdraaiing per lengte eenheid.}$$
$$v = \alpha z x$$
$$w = \alpha \psi(x,y) \qquad \psi \text{ is de welvingsfunctie.}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

ψ moet een continue differentieerbare functie zijn, met randvoorwaarde

$$\frac{d\psi}{dn} = \text{grad}\,\psi \cdot \underline{n} = y\cos(N,x) - x\cos(N,y)$$

of: $\oint_S \frac{d\psi}{dn}\,ds = 0$

Toegevoegde welvingsfunctie: φ.

We voegen aan de welvingsfunctie ψ een andere continue - differentieerbare functie $\varphi(x,y)$ toe.
De functie $\psi + i\varphi$ is nu een holomorfe functie in het gebied R, dat omsloten wordt door de contour S.
De functie φ moet aan de Cauchy-Riemann voorwaarde voldoen.

nl. $$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Het torsieprobleem is nu ook te schrijven in termen van de toegevoegde welvingsfunctie $\varphi(x,y)$.

$$\boxed{\text{Er geldt } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \nabla^2 \psi = \nabla^2 \varphi = 0}$$

Spanningen.

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) = G\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\right)$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) = G\alpha\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\right)$$

Wringend Moment.

$$M_w = \iint_{opp} (x \cdot \tau_{zy} - y \times \tau_{zx})\, dx\, dy$$

$$= G\alpha \iint_{opp.} \left(x^2 + y^2 - x\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$= G \iint_{opp} \left(x^2 + y^2 - x\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy \times \alpha$$

$$M_w = D \times \alpha. \qquad (D: \text{torsiestijfheid}).$$

Randvoorwaarden.

$$\frac{d\psi}{dn} = \text{grad}\,\psi . \underline{n} = y \cos(N,x) - x \cos(N,y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\cos(N,x) + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cos(N,y) = y\cos(N,x) - x\cos(N,y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(N,x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(N,y) = y\cos(N,x) - x\cos(N,y)$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + C$$

Poolcoördinaten.

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \nabla^2 \varphi.$$

φ is de toegevoegde welvingsfunctie.

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\right)$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\right)$$

Stel: $r(x,y)$

$\theta(x,y)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

$$x = r\cos\theta$$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\sin\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta - r\sin\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$y = r\sin\theta$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial y}\sin\theta + r\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

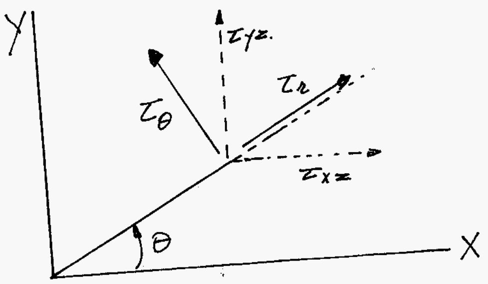
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\right) = G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} - r\sin\theta\right)$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\right) = G\alpha\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r} + r\cos\theta\right)$$



$$\tau_r = \tau_{xz}\cos\theta + \tau_{yz}\sin\theta$$

$$\tau_\theta = -\tau_{xz}\sin\theta + \tau_{yz}\cos\theta$$

$$\tau_r = G\alpha\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\cos^2\theta}{r} - r\sin\theta\cos\theta$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\sin^2\theta}{r} + r\cos\theta\sin\theta\Big]$$

$$\boxed{\tau_r = G\alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right]}$$

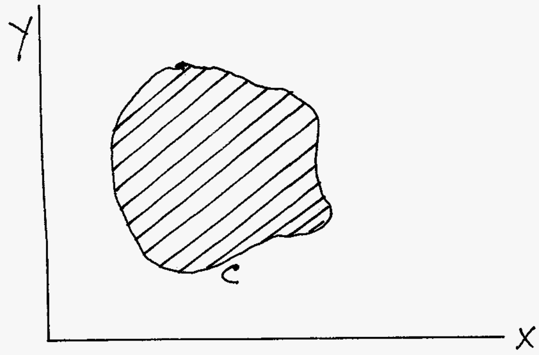
$$\tau_\theta = G\alpha\Big[-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin^2\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} + r\sin^2\theta$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos^2\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} + r\cos^2\theta\Big]$$

$$\boxed{\tau_\theta = G\alpha\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r\right]}$$

<u>Randvoorwaarde:</u> $\varphi = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + C$

$$\varphi = \frac{1}{2}r^2 + C.$$

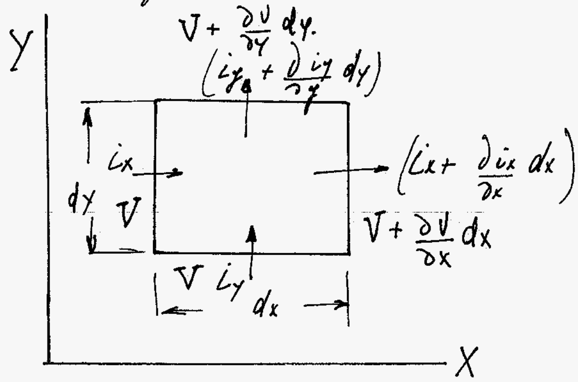
Het electrisch analogon dat voldoet aan de vergelijking $\nabla^2 V = 0$.



We maken gebruik van z.g. weerstandspapier. Het weerstandspapier ligt in het x-y vlak. Hebben we nu een balk met een loodrechte doorsnede zoals hiernaast getekend, dan is m.b.v. van dit papier de toegevoegde welvingsfunctie $\varphi(x,y)$ te realiseren

Teken op het papier m.b.v. zilverinkt de contour C.
Leg op C een electrische spanning V aan die gelijk is aan $\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2} r^2$.
De spanning in het gebied voldoet aan de vergelijking $\nabla^2 V = 0$

Bewijs



In x richting geldt: $\Delta V_x = -I_x R_x$

ΔV = spanningsverschil

I = totale stroom

R = weerstand.

ρ = specifieke weerstand. (wordt constant verondersteld)

$$\Delta V_x = \frac{\partial V}{\partial x} dx.$$

$$I_x = i_x \, dy \qquad \Delta V_x = -I_x R_x$$

$$R_x = \rho \frac{dx}{dy} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} dx = -i_x \, dy \, \rho \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -i_x . \rho . \Rightarrow i_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\text{Evenzo: } \frac{\partial V}{\partial y} = -i_y . \rho . \Rightarrow i_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial y}.$$

De verandering van de stroomdichtheid is: $\frac{\partial i_x}{\partial x} dx\,dy + \frac{\partial i_y}{\partial y} dy\,dx$

In het stationnaire geval is deze nul, d.w.z. bij het aanleggen van een gelijkspanning aan de contour zal naar verloop van tijd de stroom geen functie meer van de tijd zijn.

In het stat. geval geldt: $\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = 0$

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Kijken we naar de torsieformules voor balken dan zien we dat de electrische spanning V overeenkomt met de toegevoegde welvingsfunctie φ.

Door aan de rand een spanning $V = \frac{1}{2} r^2$ aan te leggen, is de functie $\varphi(x, y)$ te bepalen door m.b.v. een voltmeter de spanning in de punten (x, y) te meten.

Het bepalen van de spanningen m.b.v. de spanningsfunctie: f

Definieer $f = \varphi - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Er geldt: $\nabla^2 \varphi = 0$ Randvoorwaarde $\varphi = \frac{1}{2} r^2 + c$.

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\right)$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\right)$$

$$\nabla^2 f = \nabla^2 \varphi - 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 f = -2.} \quad \text{(Poisson vergl.)}$$

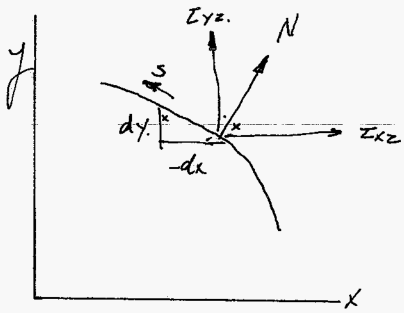
Randvoorwaarde $f = \varphi - \frac{1}{2} r^2$

$$\boxed{f = \tfrac{1}{2} r^2 - \tfrac{1}{2} r^2 + c = C.}$$

$$\tau_{xz} = G\alpha \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\tau_{yz} = -G\alpha \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Randvoorwaarde voor meervoudig samenhangend gebied (doorsnede)



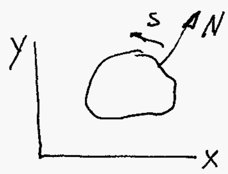
$$\int \tau\, ds = \int\left[-\tau_{xz}\cos(N,y) + \tau_{yz}\cos(N,x)\right] ds$$

$$= \int\left(\tau_{xz}\frac{dx}{ds} + \tau_{yz}\frac{dy}{ds}\right) ds$$

Zie blz. 2. $\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)$ ψ is welvingsfunctie

$\tau_{yz} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)$ $W = \alpha\,\psi(x,y)$.

$$\oint_s \tau\, ds = G\alpha \oint_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) ds + G\alpha \oint_s\left(-y\frac{dx}{ds} + x\frac{dy}{ds}\right) ds.$$



$$\oint \tau\, ds = G\alpha \oint_s d\psi + G\alpha \oint_s (x\,dy - y\,dx)$$

$$\int \tau\, ds = 2G\alpha A$$

A is het omsloten oppervlak: $A = \oint_s x\,dy = -\oint_s y\,dx$

Kijken we nu naar de spanningsfunctie f, dan volgt

$$\int \tau\, ds = G\alpha \int\left[-\tau_{xz}(\cos(N,y)) + \tau_{yz}.\cos(N,x)\right] ds = 2G\alpha A$$

$$\int \tau\, ds = G\alpha \int\left[-\frac{\partial f}{\partial y}(\cos N,y) - \frac{\partial f}{\partial x}\cos(N,x)\right] ds = 2G\alpha A$$

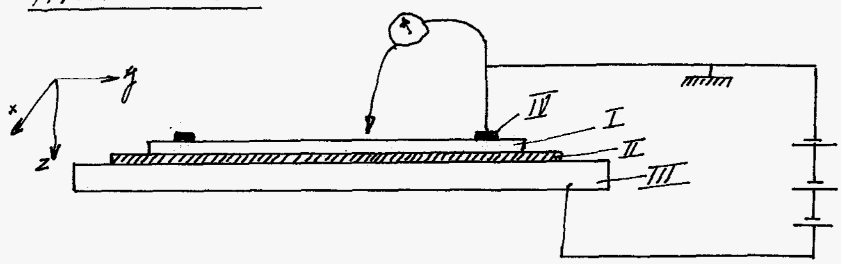
$$+\int \frac{df}{dn}\, ds = +\int (\operatorname{grad} f, \underline{n})\, ds = -2A$$

Het electrisch Analogon voor de vergelijking $\nabla^2 f = -2$. (Poisson vergelijking)

Hiervoor bestaan twee methodes. (Zie de publicatie "The Torsion Problem — A New Twist door J. H. Swannell)

Methode I

f aan rand is nul.



I Weerstandspapier

II Halfgeleider

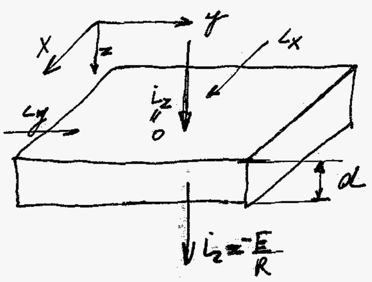
III Metalen basis

IV Contour getekend met zilverinkt.

De stroom zal in het hierboven getekende geval door de halfgeleider lopen. Veronderstellen we dat de spanning van de metalen basis E is en die van het weerstandspapier Φ en veronderstellen we tevens dat $E \gg \Phi$ dan is er in z richting een spanningsverschil over de halfgeleider van $E - \Phi \approx E$

Wordt de weerstand v/d halfgeleider in z-richting constant ter grootte R verondersteld dan is de stroom i_z door de halfgeleider $\approx \frac{E}{R}$ (constant)

In het weerstandspapier I vloeien dus stromen in x, y en z richting.
d is de dikte van het weerstandspapier.
de totale verandering v/d stroom $-\left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y}\right) - i_z$ moet nul zijn,



Continuiteitsvergelijking zie blz. 8 en 9.

Voor $-\left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y}\right)$ geldt (blz 9): $\frac{1}{\rho}\nabla^2\Phi = -\left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y}\right)$

Voor i_z geldt hier: $\frac{E}{R} = -i_z$

De stroom i_z is op het bovenvlak natuurlijk nul. Op het ondervlak, dus het vlakje dat aan de halfgeleider raakt, is de stroom $i_z = -\frac{E}{R}$.

Hier geldt dus $\frac{1}{\rho}\nabla^2\Phi + \frac{E}{R} = 0$

$$\boxed{\nabla^2\Phi = -\frac{\rho E}{R}}$$

ρ: specifieke weerstand van I

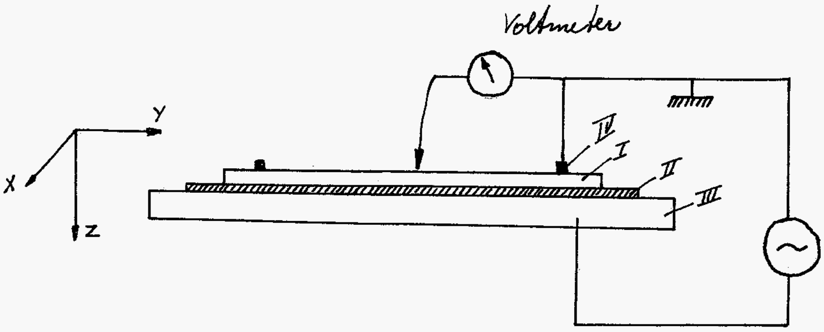
E: spanning van III

R: weerstand van II in z richting

Φ aan de rand (op zilverinkt) is nul (aan aarde gelegd)

Is ρ en R bekend, dan is E zodanig te kiezen, dat geldt: $-\frac{\rho E}{R} = -2$.

Methode II.



Laagfrequente wisselspanning.

I Weerstandspapier

II Isolatie laag.

III Metalen basis

IV Contour getekend met zilverinkt.

De hierboven geschetste opstelling is een condensator, waarbij I en III de condensatorplaten voorstellen en II het diëlectricum.

Over de platen I en III staat een laagfrequente wisselspanning

De spanning Φ van het weerstandspapier is hier niet constant, maar een functie v/d tijd.

Stel: de spanning E v/d metalen basis is veel groter dan Φ. $E \gg \Phi$

Voor de condensator geldt algemeen: $q = CV$.

als $E \gg \Phi$, dan is $V \approx E$

q : ladingsverschil over de platen
V : spanningsverschil over de platen
C = capaciteit.

$$E = E_m \sin 2\pi n t \quad \text{(aangelegd)}$$

$$q = C . E_m \sin 2\pi n t .$$

$$i_z = -\frac{dq}{dt} = -C . E_m 2\pi n \cos 2\pi n t$$ ($\frac{dq}{dt}$ is de z.g. diëlectrische stroom tussen de platen)

Voor het weerstandspapier geldt (zie blz. 11) ; $-\left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y}\right) - i_z = 0$

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 \Phi + 2\pi n . C E_m \cos 2\pi n t = 0$$

$$\text{of} \quad \nabla^2 \Phi = -2\pi n \rho C E_m \cos 2\pi n t$$

Het rechterlid varieert met de tijd. Daar bij een condensator de spanning t.o.v. de stroom 90° in fase verschoven is, varieert de spanning Φ ook met een $\cos 2\pi n t$.

Meet men de spanning Φ m.b.v een voltmeter voor wisselstromen, die de effectieve waarde van de spanning geeft, dan wordt de vergelijking:

$$\nabla^2 \Phi = -2\pi\eta\rho l E'$$

(E' is de effectieve waarde van de aangelegde spanning, en blijft verder constant)

Deze vergelijking is onafhankelijk van de tijd.

Wil men deze methode gebruiken, dan bekent men naast de doorsnede die men wil onderzoeken nog een andere doorsnede bijv. een cirkel, en zet hierop precies dezelfde spanning als op de te onderzoeken doorsnede. Voor een cirkel is de theoretische waarde van de spanning Φ bekend, en hieruit kan men dan de waarde α (de hoekverdraaiing per lengte eenheid) bepalen.

Er geldt algemeen: (zie blz. 6)

$$\nabla^2 f = -2$$

$$\tau_{xz} = G\alpha \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = -G\alpha \frac{\partial f}{\partial x}$$

f aan de rand is nul (of constant)

→ of: definieer functie F als volgt:

$$f = \frac{F}{G\alpha}$$

$$\nabla^2 F = -2G\alpha$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

F aan de rand is nul (of constant)

Voor de cirkel geldt:

$$F = -\frac{G\alpha}{2}\left(r^2 - R^2\right) \qquad \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F^2}{\partial \theta^2}$$

$$\nabla^2 F = -G\alpha - G\alpha = -2G\alpha.$$

F is nul aan de rand.

Voor $r=0$, dus in het middelpunt is de waarde van $F_m = +\frac{G\alpha R^2}{2}$

Voor de cirkel geldt $\alpha = \frac{2F_m}{GR^2}.$

Heeft men beide doorsneden aan dezelfde spanning gelegd, dan geldt voor beide doorsnede $\nabla^2 F = -2G\alpha = -2\pi\eta\rho C E'$

De waarde van α is dus voor beide doorsnede hetzelfde.

De grootte van α berekent men dus m.b.v. van de spanning (F_m) in het middelpunt van de cirkel.

$$\alpha = \frac{2F_m}{GR^2}.$$

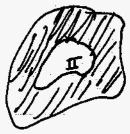
De spanningen zijn afhankelijk van de afgeleide in x en y richting.

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Deze methode heeft verder het voordeel dat bij een meervoudige doorsnede het analogon automatisch goed blijft, als men het gat dat door de volgende doorsnede ontstaat dicht verft met zilverinkt.

Bv.



I

Wil men bijv. de gearceerde doorsnede onderzoeken, dan tekent men de buitencontour (I) met zilververf op het weerstandspapier. Vervolgens tekent men de open ruimte binnen de contour II dicht met zilverinkt.

De aan te leggen spanning wordt aan contour I, de buitencontour, geaard. (zie schets op blz. 12).

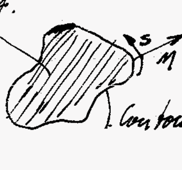
Bewijs: Volgens blz. 10 is de randvoorwaarde: $\oint \frac{df}{dn}\, ds = -2A$

of voor: $\frac{F}{G\alpha} = f$

$$\oint \frac{dF}{dn}\, ds = -2AG\alpha$$

A is het omsloten opp.
f is spanningsfunctie

zilververf.



Contour II

Op de contour geldt $\oint i\, ds = \oint \frac{\frac{d\phi}{dn}}{\rho}\, ds$

i: stroomsterkte in de richting van n
ρ: specifieke weerstand.

Algemeen geldt $\bar{I} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,\bar{V}$ ($\bar{I}$ vector corresponderend met de stroomsterkte)
$\bar{V}$ spanningsvector.

De spanning Φ binnen de contour is hier constant.

De gradiënt van Φ aan de rand is dus $\frac{d\Phi}{dn}$.

i is hier dus de stroomsterkte die in de richting van n, in het gearceerde opperlak vloeit.

De $\int i\,ds$ is de totale stroom die via de contour het gearceerde opperlak binnenstroomt.

De $\int i\,ds$ is dus gelijk aan de totale stroom die via het opperlak in z richting uit het weerstandspapier vloeit.

Volgens blds. 12. geldt $i_z = -\dfrac{dq}{dt} = -2\pi n C E_m \cos 2\pi n t$

De totale stroom is : $i_z \times A = -2\pi n C A E_m \cos 2\pi n t$. A (opp. gearceerde gedeelte)

dus $\int i\,ds = -2\pi n C A E_m \cos 2\pi n t$

We hadden (zie blds. 14) $\int i\,ds = \dfrac{\int \frac{d\phi}{dn} ds}{\rho}$

$$\text{Dus } \frac{\int \frac{d\phi}{dn} ds}{\rho} + 2\pi n C A E_m \cos 2\pi n t = 0$$

$$\text{of } \int \frac{d\phi}{dn} ds = -A C\, 2\pi n \rho\, E_m \cos 2\pi n t$$

$$\int \frac{d\phi}{dn} ds = -A C\, 2\pi n \rho\, E' \quad (E' \text{ is effectieve spanning})$$

$$-C\, 2\pi n \rho E' = -2 G \alpha. \quad (\text{zie blds. } 14)$$

$$\text{Dus } \int \frac{d\phi}{dn} ds = -2 A G \alpha.$$

Φ correspondeert hier met de functie $F = f \cdot G\alpha$.

Er is dus automatisch voldaan aan $\int \dfrac{\partial F}{\partial n} ds = -2 A G \alpha$.

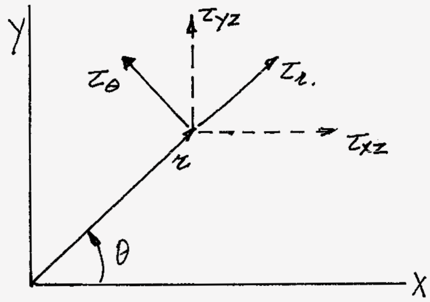
Onderzoek aan twee doorsneden m.b.v. het electrisch analogon dat voldoet aan $\nabla^2 V = 0$ (zie blz. 8)

Algemeen. φ is de toegevoegde welvingsfunctie

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{of} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

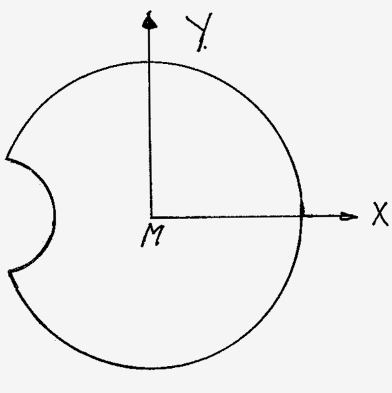
$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\right) \qquad \tau_r = G\alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\right) \qquad \tau_\theta = G\alpha\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r\right]$$

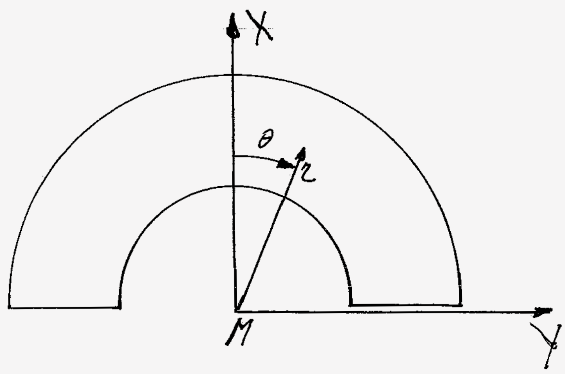


Randvoorwaarde $\varphi = \frac{1}{2} r^2 + C$.

De onderzochte doorsneden zijn:

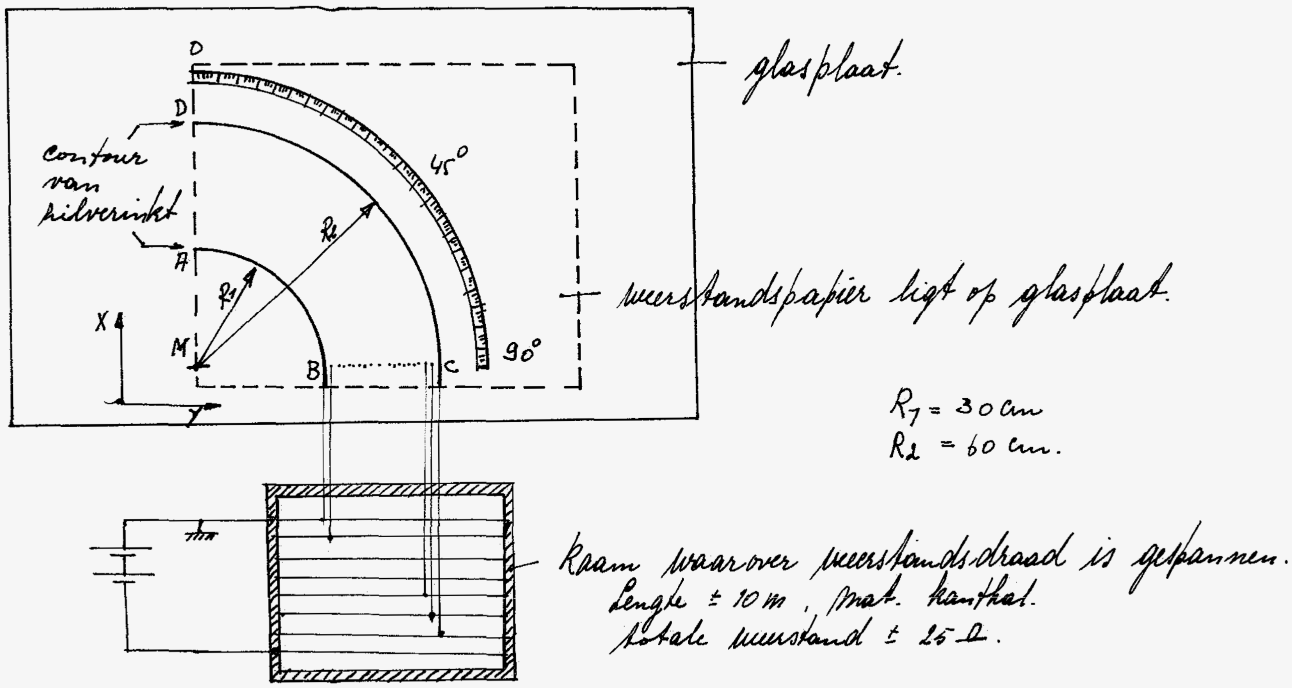


II



I

Opstelling voor doorsnede I



$R_1 = 30$ cm
$R_2 = 60$ cm.

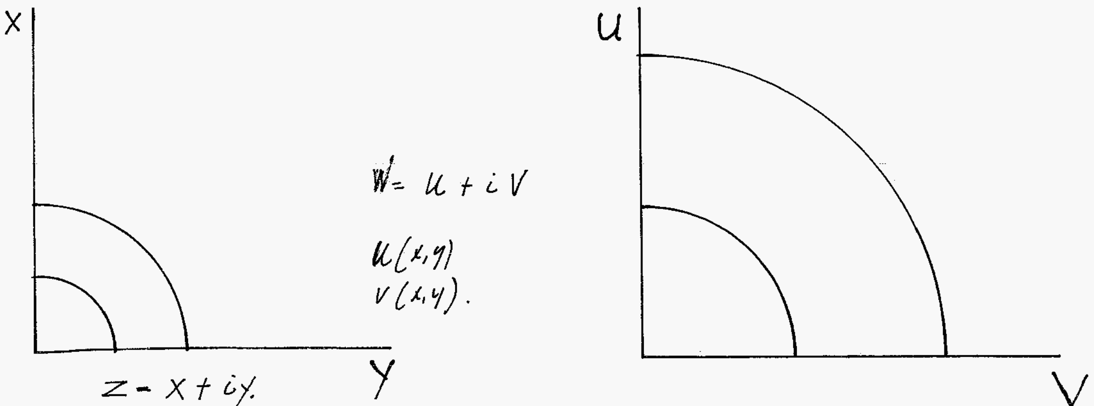
De uiteinden van deze weerstandsdraad worden verbonden met de klemmen van twee in serie geschakelde 12 volts accus.
De spanning over de weerstandsdraad loopt van 0 tot ± 24 volt.
De aan te leggen spanningsverdeling aan de omtrek van de getekende (halve) doorsnede moet verlopen volgens $\frac{1}{2} x^2 + c$.
De spanning over AB is dus constant, over BC is het spanningsverloop kwadratisch en over CD is de spanning weer constant.
Over de lijn BC is om de 1,5 cm een electrisch kabeltje met behulp van een klontje zilverinkt op het weerstandspapier geplakt.
Het andere uiteinde van het kabeltje wordt verbonden met een punt van de weerstandsdraad over het raam, dat een spanning heeft, die overeenkomt met de aan te leggen spanning.
De spanning op de punten over de lijn BC wordt gemeten m.b.v. een digitale voltmeter.
We kunnen hier volstaan met de halve doorsnede omdat de lijn MAD een symmetrielijn is.
De electrische spanning over AD heeft hier geen afgeleide naar y, blijft in

horizontale richting dus even constant.
De electrische stroom in horizontale richting is dus nul.
Door de lijn AD nu op de rand van het weerstandspapier te leggen, kan er geen stroom in horizontale richting vloeien.
Het stroomloos zijn in horizontale richting over AD is hier eigenlijk de randvoorwaarde.

Keuze van de afmetingen van de doorsnede en aan te leggen spanning.

In ons voorbeeld is: $R_1 = 30\text{cm}$, $R_2 = 60\text{cm}$. dus $\frac{R_2}{R_1} = 2$.

Wil men echter de zelfde doorsnede onderzoeken, wat betreft de vorm, maar met andere stralen bijv. $R_1 = 2\text{cm}$ en $R_2 = 4\text{cm}$ ($\frac{R_2}{R_1} = 2$ moet men handhaven) dan gaat men als volgt te werk.



Maak van de oorspronkelijke doorsnede een conforme afbeelding. In ons geval een lineaire afbeelding, m.b.v. de functie $W = U(x,y) + iV(x,y)$

De Cauchy-Riemann relatie moet gelden: nl.
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{of } \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Bij een lineaire afbeelding geldt: $W = nx + i\,ny = nz$

dus $u = nx$
$v = ny$

Aan de Cauchy-Riemann voorwaarde is voldaan.

De toegevoegde welvingsfunctie $\varphi(x,y) = \varphi[u(x,y),\ v(x,y)]$

Er geldt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right].$$

Vullen we de Cauchy-Riemann relatie in bovenstaande vergelijking in, dan krijgen we:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right].$$

De verg. $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ wordt dus $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0$ voor elke conforme afbeelding.

De randvoorwaarde wordt:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2) + C = \tfrac{1}{2}r^2 + C = \tfrac{1}{2}\,\frac{u^2+v^2}{\eta^2} + C = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{\eta^2} + C.$$

De spanningen worden:

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\right) = G\alpha\left(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{v}{\eta}\right)$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\right) = G\alpha\left(-\eta\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{u}{\eta}\right).$$

Legt men in plaats van de spanning: $\varphi = \tfrac{1}{2}r^2 + C$ de spanning $\varphi' = \lambda\varphi$ aan de rand aan, dan voldoet de functie φ' ook aan de verg. van Laplace $\nabla^2\varphi' = 0$

De randvoorwaarde wordt dan:

$$\varphi' = \lambda\varphi = \lambda\frac{1}{2}r^2 + C = \frac{\lambda}{\eta^2}\frac{1}{2}R^2 + \lambda C.$$

De spanningen worden:

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\right) = G\alpha\left(\frac{\eta}{\lambda}\frac{\partial\varphi'}{\partial v} - \frac{v}{\eta}\right)$$

$$\tau_{yz} = G\alpha\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\right) = G\alpha\left(-\frac{\eta}{\lambda}\frac{\partial\varphi'}{\partial u} + \frac{u}{\eta}\right)$$

of, in poolcoördinaten

$$\tau_r = G\alpha\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = G\alpha\left[\frac{\eta}{\lambda}\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}\right]$$

$$\tau_\theta = G\alpha\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r\right) = G\alpha\left[-\frac{\eta}{\lambda}\frac{\partial\varphi'}{\partial R} + \frac{R}{\eta}\right].$$

Bij ons onderzoek zullen we geen gebruik maken van de liniaire afbeelding, wel van $\varphi' = \lambda\varphi$.

Daar we ter beschikking hebben een spanning van 24 Volt nemen we $\lambda = \frac{1}{90}$

$$\varphi' = \frac{1}{2}\lambda r^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{90}\times r^2.$$

$$\varphi'_{max} = \frac{1}{2}\times\lambda\times 60^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{90}\times 3600 = 20 \text{ volt}$$

$$\varphi'_{min.} = \frac{1}{2}\times\lambda\times 30^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{90}\times 900 = 5 \text{ volt.}$$

1cm $\triangleq$ 1 volt.

We leggen dus de volgende spanningen aan:

over AB (binnenrand) 5 volt

over DC (buitenrand) 20 volt

De spanning over BC verloopt kwadratisch van B naar C van 5 tot 20 Volt.

De afstand tussen twee punten op BC is 1,5 cm genomen.

De grootte v/d spanning wordt gemeten met een digitale voltmeter. Deze geeft afhankelijk v/d grootte van het getal, de volgende decimalen:

4 dec.	van 0 tot 0,1599
3 dec.	van 0,1599 tot 1,599
2 dec.	van 1,599 tot 15,99
1 dec	van 15,99 tot 159,9

Nadat de spanning φ' aan de rand is aangelegd, wordt de spanning φ' op verschillende plaatsen op de doorsnede gemeten, m.b.v. de digitale voltmeter.

Aan de digitale voltmeter zitten twee draden. Een draad wordt met de aarde van het accucircuit verbonden en de andere wordt aan een potloodstift bevestigd.

Legt men nu een liniaal door het middelpunt M (zie blz. 17) onder een bepaalde hoek θ, dan kan men m.b.v. de potloodstift de spanning φ' op verschillende waarden van r bij de gekozen hoek θ meten en in een tabel schrijven.

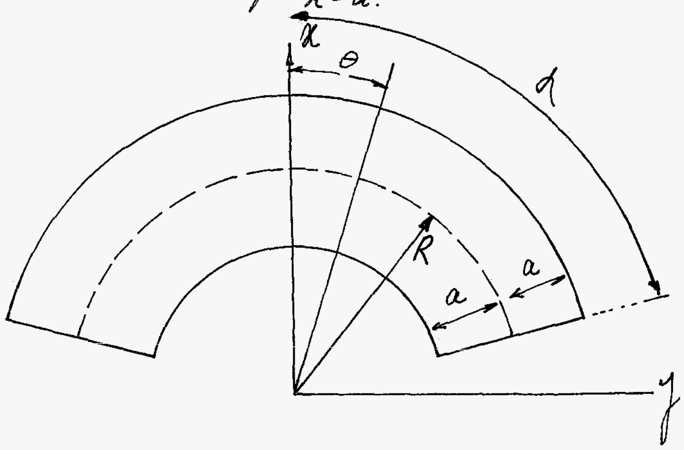
Voor gemeten waarden zie grafiek op blz. 23.

De theoretische waarden van de functie φ is te vinden in een uitgave van ir. J.D. Janssen, Enige Studies Op Het Gebied Van De Torsie Van Balken. 1963.
Afdeling der Werktuigbouwkunde, Groep Technische Mechanica.

Op blz. -26- van deze uitgave staat vermeld:

$$\psi = -\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}(R-a)^2 + \frac{4aR}{p}\log\frac{r}{R-a} - \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{2.(R^2+a^2)p^2}{(p^2+n^2\pi^2)n\pi} \frac{\cosh\frac{2n\pi}{p}.\theta}{\cosh\frac{2n\pi}{p}\alpha} \sin\left[\frac{2n\pi}{p}\log\frac{r}{R-a}\right.$$

met $p = 2\log\frac{R+a}{R-a}$.



Voor ons voorbeeld geldt dus:

$R = 45$
$a = 15$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$

Met de functie ψ is hier bedoeld de spanningsfunctie f volgens blz. 1

$$\varphi = f + \frac{1}{2}r^2 = \psi + \frac{1}{2}r^2$$

$$\varphi' = \lambda\varphi = \frac{1}{90}\left[\frac{1}{2}(R-a)^2 + \frac{4aR}{p}\log\frac{r}{R-a} - \sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{2.(R^2+a^2)p^2}{(p^2+n^2\pi^2)n\pi}\frac{\cosh.\frac{2n\pi}{p}\theta}{\cosh\frac{2n\pi}{p}\alpha}\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\log\frac{r}{R}\right.\right.$$

De functiewaarde van φ' (theoretische waarde) is voor verschillende waarden van θ en r nummeriek uitgerekend door de computor IBM 1620.

Het rekenprogramma is toegevoegd in Bijlage I

Van de somfunctie zijn de eerste drie termen meegenomen.

Door de snelle convergentie van deze som is de max. fout kleiner dan $\frac{1}{2}$%

In de grafiek op de volgende bldz (23) zijn voor $\theta = 0°, 75°, 85°$ en $90°$ de theoretische en de gemeten waarden uitgezet.

Beide waarden komen goed overeen.

De grootste afwijkingen treden op bij $\theta = 90°$. Dit is in principe niet mogelijk, omdat voor $\theta = 90°$ de functie φ' juist aangelegd is. Er zit echter een kleine onnauwkeurigheid in de theoretische formule van φ' die groter wordt met toenemende θ en hier max. is, vandaar het verschil in beide waarden.

De vorm van de onnauwkeurigheid is hetzelfde voor $\theta = 85°$ en $\theta = 90°$

Hierdoor is te verklaren dat bij $\theta = 85°$ de theoretische waarden van φ' tussen $r = 30$ cm en $r = 43$ cm kleiner zijn dan de gemeten en tussen $r = 43$ cm en $r = 58$ cm groter dan de gemeten.

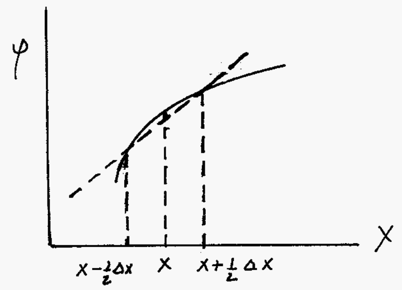
Bij $\theta = 0°$ liggen de theoretische waarden iets lager dan de gemeten en bij $\theta = 75°$ liggen ze iets hoger.

De contour $R_1 = 30$ cm en $R_2 = 60$ cm is met zilverinkt op het weerstandspapier getekend. Hierdoor is een kleine onnauwkeurigheid (~ 2 mm) in de stralen R_1 en R_2 mogelijk.

Bij de meting lag de liniaal langs M en θ zodanig, dat het punt nul op de liniaal boven M was. Op deze manier is een systematische fout in r mogelijk.

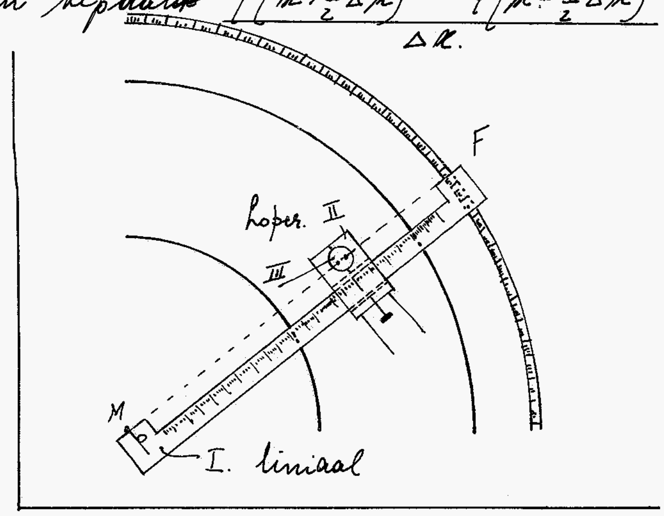
Het meten van de afgeleide van de toegevoegde welvingsfunctie $\varphi' = x\varphi$

Het principe van de meetmethode:



Wil men in het punt x de afgeleide naar x bepalen, dan meet men de functie waarde in het punt $x+\frac{1}{2}\Delta x$ is $\varphi'(x+\frac{1}{2}\Delta x)$ en in het punt $x-\frac{1}{2}\Delta x$ is $\varphi'(x-\frac{1}{2}\Delta x)$.

Men bepaalt $\dfrac{\varphi'(x+\frac{1}{2}\Delta x) - \varphi'(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$.



Om $\varphi'(x+\frac{1}{2}\Delta x) - \varphi'(x-\frac{1}{2}\Delta x)$ ineens te kunnen meten, is het hierboven geschetste apparaatje gemaakt.

De liniaal I en de loper II zijn gemaakt van doorzichtige kunstof.

Op de loper zit een drukknop III. Onder de drukknop zijn via veertjes en een geleiding twee messing staafjes bevestigd. De uiteinden van deze staafjes zijn puntvormig en op een vaste afstand van elkaar boven de lijn MF. De beide puntjes zijn via twee electrische draadjes verbonden met een digitale voltmeter. Drukt men op de drukknop dan komen de beide puntjes op het papier op de lijn MF en op de digitale voltmeter is het spanningsverschil $\varphi'(r+\frac{1}{2}\Delta r) - \varphi'(r-\frac{1}{2}\Delta r)$ af te lezen. De afstand Δr tussen de puntjes is bekend.

De gemeten waarde voor $\dfrac{\partial\varphi'}{\partial r} = \dfrac{\varphi'(r+\frac{1}{2}\Delta r) - \varphi'(r-\frac{1}{2}\Delta r)}{\Delta r}$.

De beide puntjes kunnen ook loodrecht op MF gezet worden, zodat

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} = \frac{\varphi'(\theta + \frac{1}{2}\Delta\theta) - \varphi'(\theta - \frac{1}{2}\Delta\theta)}{r\,\Delta\theta}$$ gemeten kan worden.

De veertjes onder de drukknop zorgen er voor dat de beide puntjes bij het indrukken van de knop steeds met een constante instelbare kracht op het weerstandspapier drukken.

M.b.v. deze methode hebben we $\frac{\partial \varphi'}{\partial r}$ gemeten voor $\theta = 0°, 5°$, en $80°$ en de afstand tussen de puntes was 3,25 mm en 6,75 mm.

Ook de theoretische waarde van $\frac{\partial \varphi'}{\partial r}$ is uitgerekend voor $\theta = 0°, 5°$ en $80°$.

Zie bldz. 27.

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{g_0}\left[\frac{4ak}{pr} - \frac{1}{r}\sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{4(k^2+a^2)p}{p^2+n^2\pi^2} \frac{\cosh \frac{2n\pi}{p}\theta}{\cosh \frac{2n\pi}{p}\alpha} \cos\frac{2n\pi}{p} \log\frac{r}{k-a}\right]$$

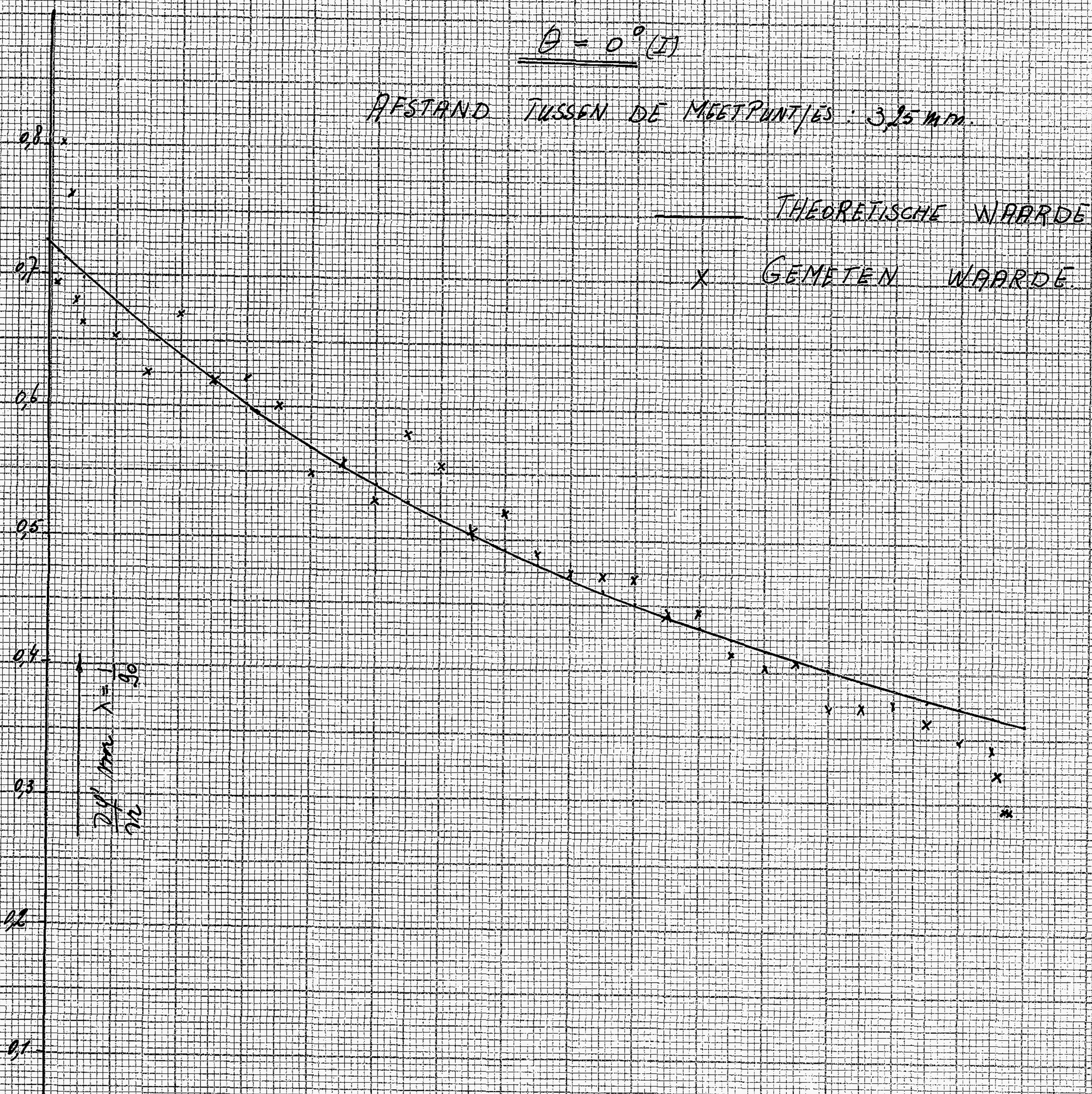
Voor tabel zie volgende bldz. (26).

$\frac{\partial \varphi'}{\partial r}$ is in grafiek gebracht op bldz. (27.)

Theoretische en gemeten waarden van $\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$.

	$\theta = 0°$			$\theta = 5°$		$\theta = 80°$		
straal	Theor.	I 3,25 mm	II 6,75 mm	I 3,25 mm	II 6,75 mm	Theor.	I 3,25 mm	II 6,75 mm
r (cm)	$\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial r}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial r}$	$\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$	$\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$	$\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$	$\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$	$\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$
30						0,612		
30,2	0,716	0,693	0,65	0,748	0,614		0,616	0,497
30,4	0,712	0,804	0,74	0,692	0,734		0,634	0,537
30,6	0,706	0,763	0,719	0,739	0,754		0,656	0,534
30,8	0,702	0,68	0,68	0,804	0,74		0,613	0,526
31	0,698	0,661	0,656	0,75	0,739		0,572	0,516
32	0,676	0,652	0,659	0,686	0,656		0,539	0,491
33	0,656	0,625	0,622	0,65	0,654	0,561	0,604	0,471
34	0,636	0,67	0,622	0,61	0,615		0,539	0,496
35	0,618	0,618	0,586	0,636	0,596		0,524	0,486
36	0,601	0,621	0,602	0,632	0,611	0,538	0,554	0,475
37	0,585	0,6	0,567	0,579	0,576		0,605	0,455
38	0,569	0,547	0,527	0,535	0,548		0,529	0,489
39	0,555	0,556	0,544	0,56	0,556	0,523	0,524	0,497
40	0,541	0,526	0,555	0,57	0,54		0,536	0,491
41	0,528	0,581	0,546	0,524	0,531		0,508	0,499
42	0,515	0,556	0,534	0,548	0,519	0,509	0,52	0,484
43	0,504	0,502	0,489	0,539	0,511		0,57	0,479
44	0,492	0,52	0,5	0,526	0,501		0,545	0,491
45	0,481	0,489	0,473	0,489	0,471	0,5	0,484	0,508
46	0,471	0,474	0,453	0,462	0,461		0,526	0,516
47	0,461	0,474	0,446	0,456	0,449		0,512	0,514
48	0,451	0,471	0,454	0,446	0,442	0,487	0,469	0,457
49	0,442	0,442	0,44	0,446	0,439		0,469	0,491
50	0,433	0,446	0,428	0,444	0,434		0,428	0,486
51	0,424	0,412	0,421	0,397	0,394	0,473	0,409	0,481
52	0,416	0,403	0,392	0,422	0,404		0,44	0,486
53	0,408	0,409	0,402	0,419	0,404		0,436	0,49
54	0,402	0,369	0,372	0,397	0,38	0,455	0,461	0,469
55	0,393	0,369	0,348	0,382	0,366		0,4	0,444
56	0,386	0,371	0,369	0,375	0,38		0,412	0,494
57	0,379	0,36	0,338	0,332	0,34	0,436	0,412	0,461
58	0,373	0,348	0,342	0,348	0,33		0,406	0,447
59	0,366	0,342	0,317	0,32	0,317		0,418	0,456
59,2		0,322	0,314	0,314	0,317		0,378	0,465
59,4		0,298	0,306	0,332	0,33		0,418	0,466
59,6		0,298	0,348	0,348	0,322.		0,421.	0,444
59,8			0,31.	0,336			0,388	0,392.
60	0,3602.					0,416		

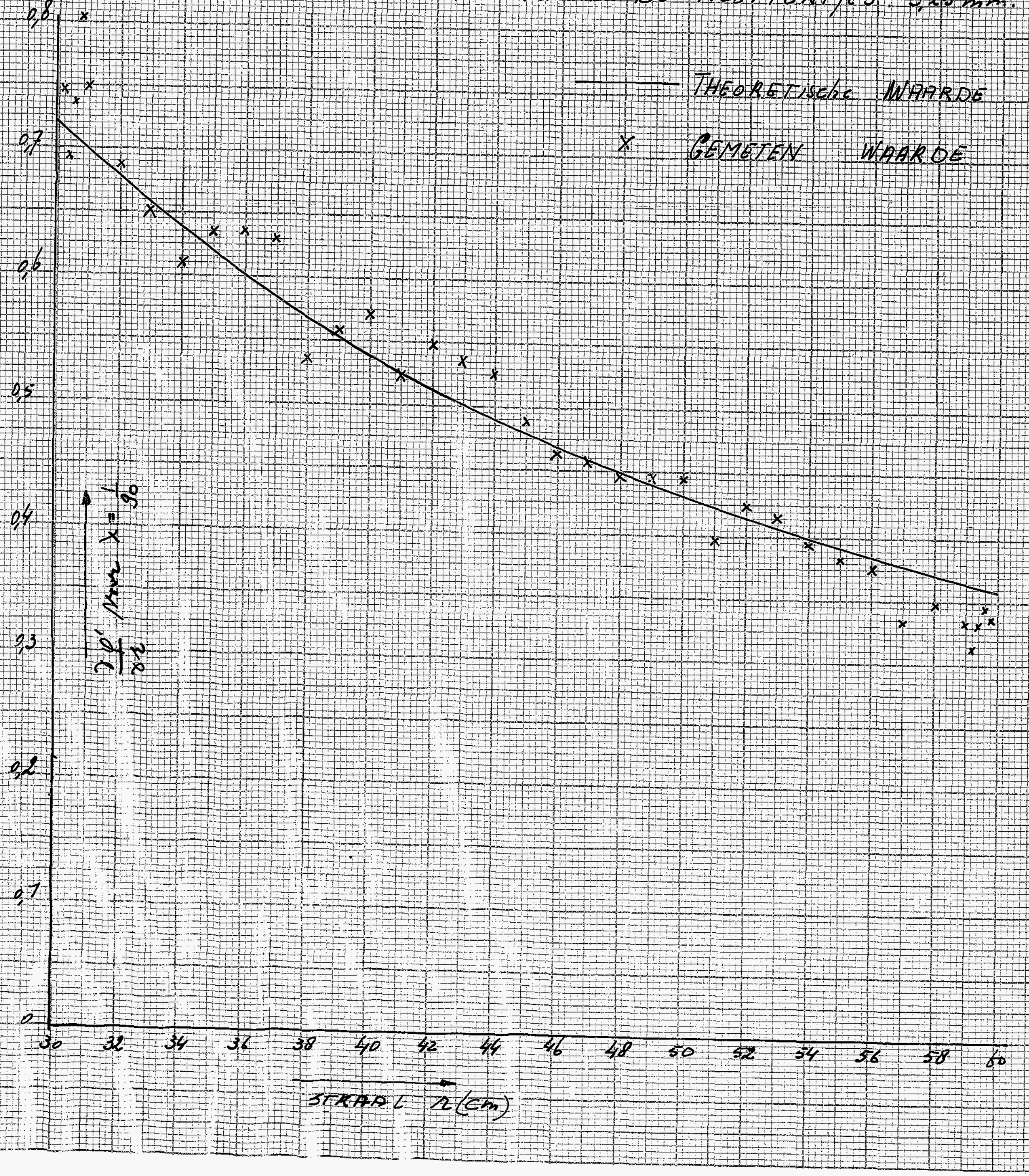
De theoretische waarden van $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ voor $\theta = 0°$ en $\theta = 5°$ zijn hetzelfde.
In de tabellen I en II is voor een afstand tussen de puntjes van resp. 3,25 mm en 6,75 mm de gemeten afgeleide naar r genoteerd.

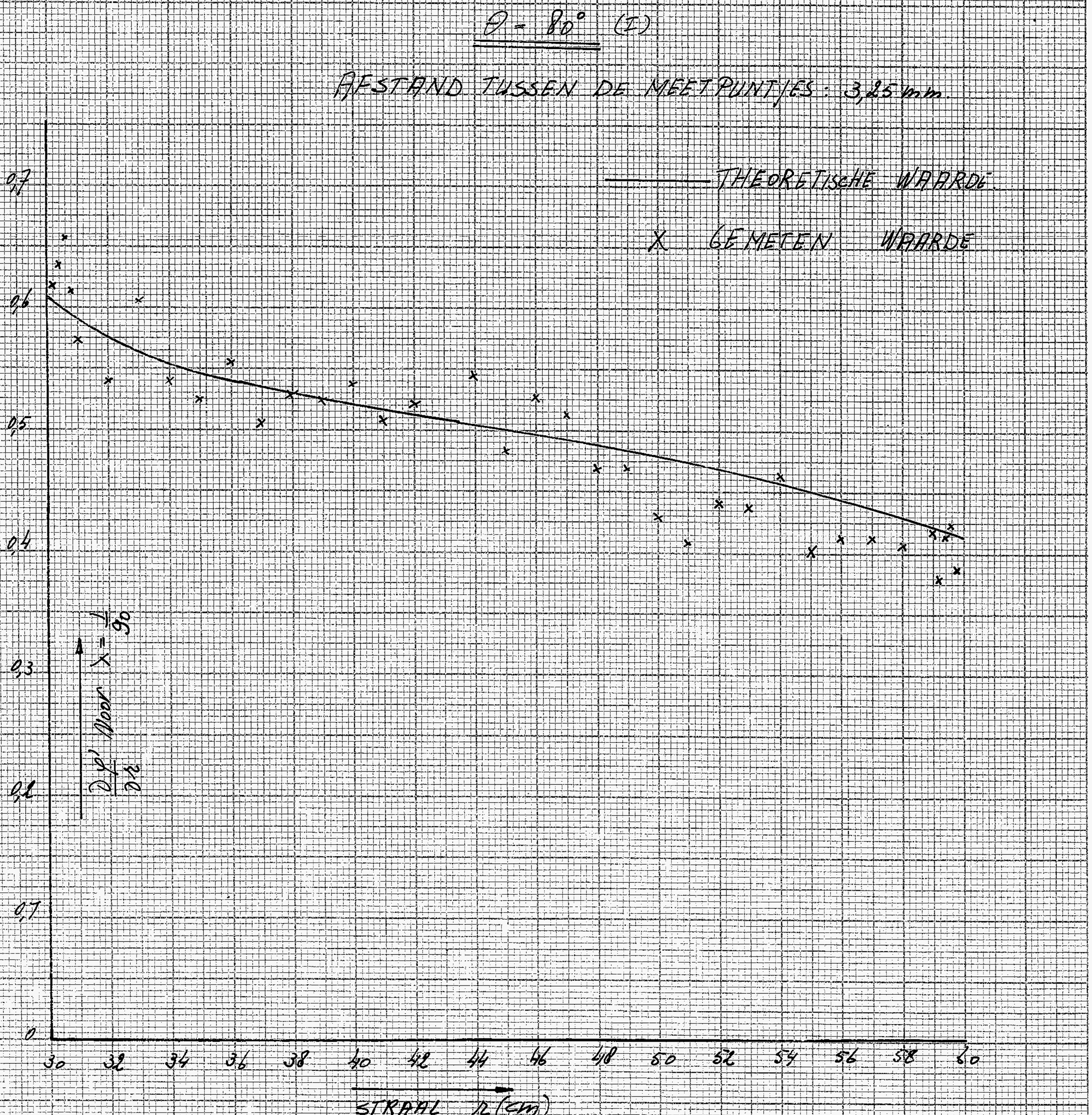


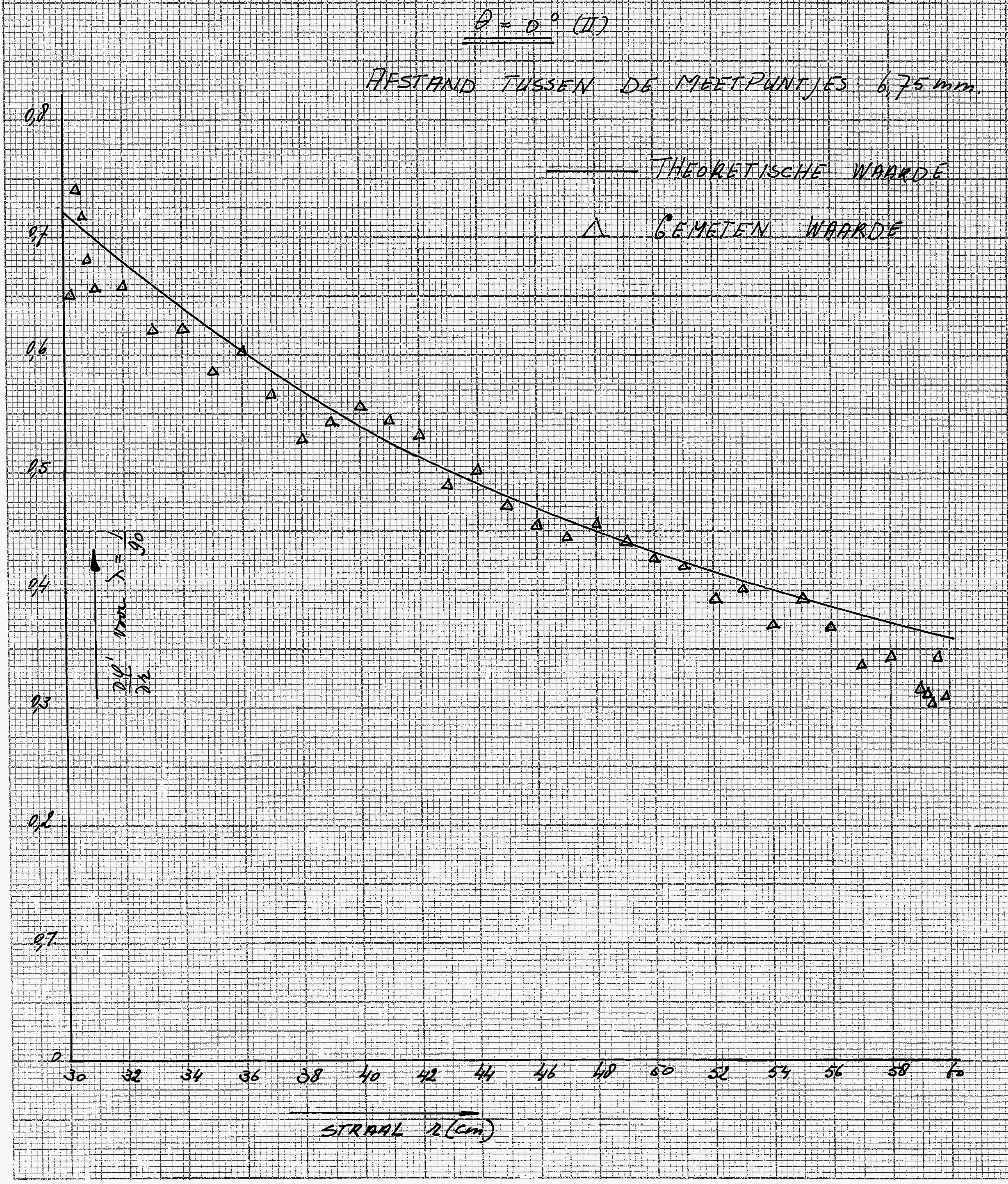
θ = 0° (I)
AFSTAND TUSSEN DE MEETPUNTJES : 3,25 mm.
THEORETISCHE WAARDE
X GEMETEN WAARDE
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
STRAAL r (cm)

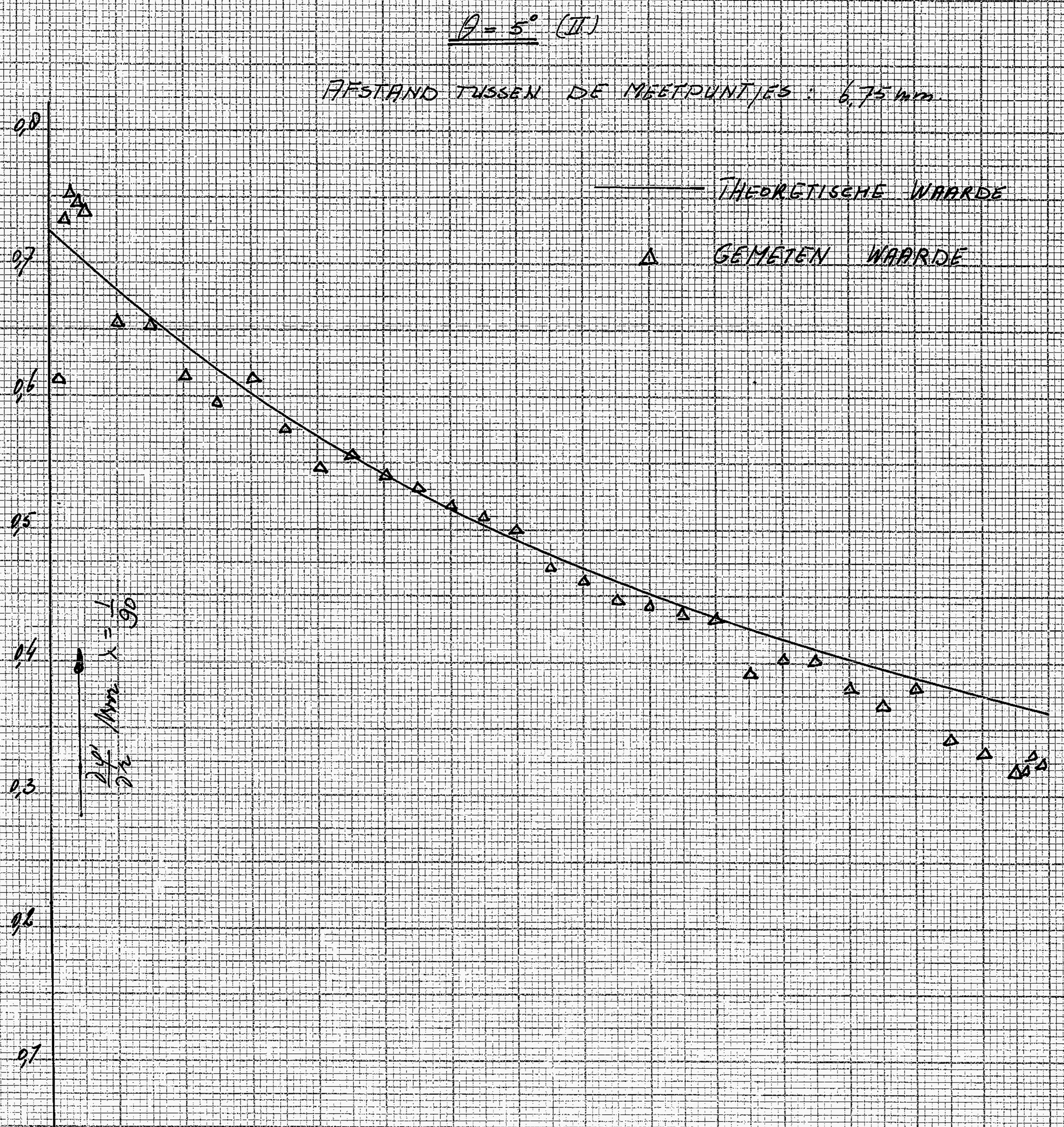
$\theta = 5°$ (I)

AFSTAND TUSSEN DE MEETPUNTJES: 3,25 mm.




θ = 80° (I)
AFSTAND TUSSEN DE MEETPUNTJES: 3,25 mm
THEORETISCHE WAARDE
X GEMETEN WAARDE
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
∂φ'/∂r voor λ = 1/90
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
STRAAL r (cm)

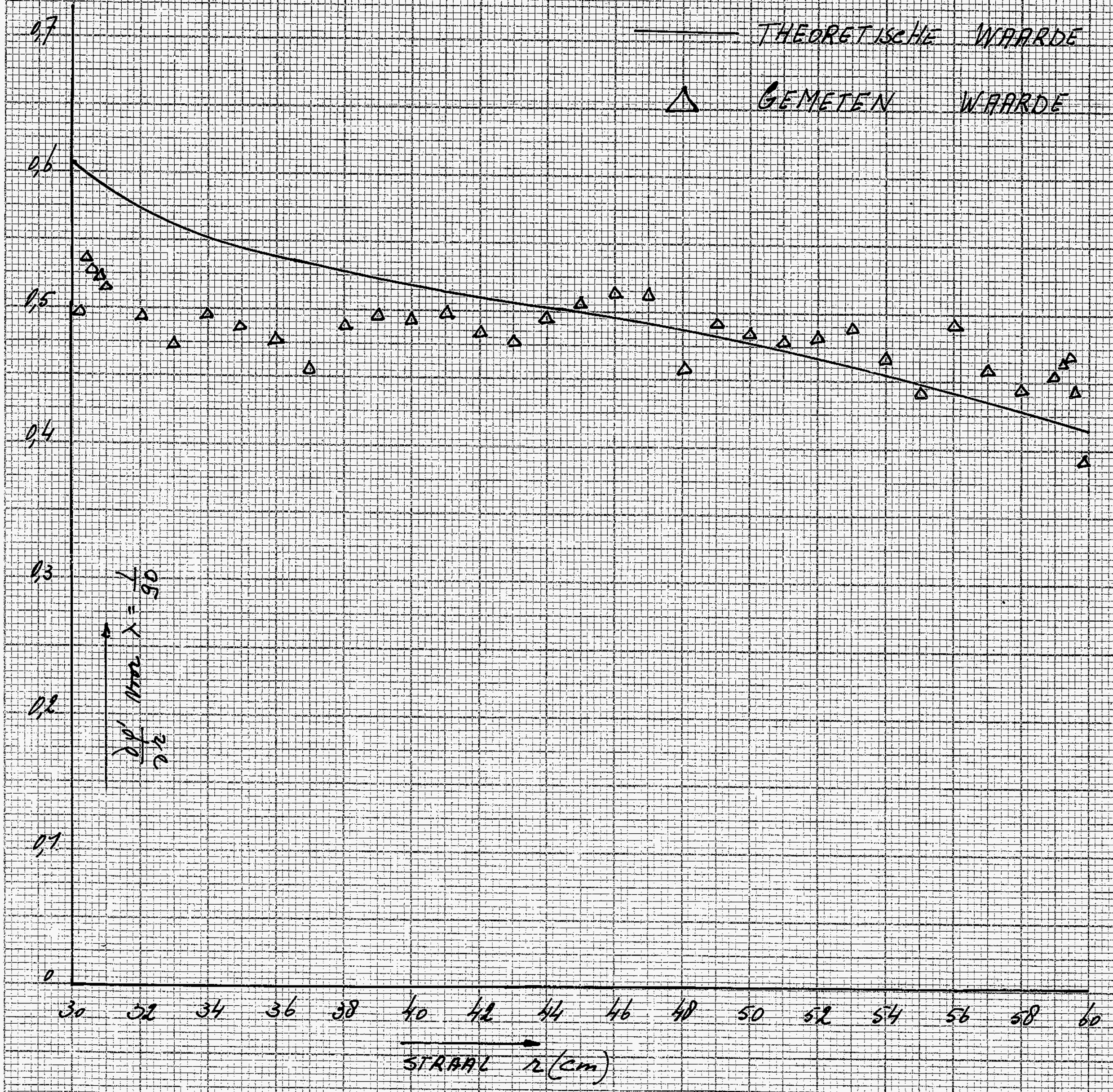

θ = 0° (II)
AFSTAND TUSSEN DE MEETPUNTJES: 6,75 mm.
THEORETISCHE WAARDE
GEMETEN WAARDE
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
STRAAL r (cm)



$\theta = 5°$ (II)
AFSTAND TUSSEN DE MEETPUNTJES : 6,75 mm
THEORETISCHE WAARDE
GEMETEN WAARDE
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
$\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$ /Vpm $\lambda = \frac{1}{90}$
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
STRAAL r (cm)

θ = 80° (II)

AFSTAND TUSSEN DE MEETPUNTJES: 6,75 mm

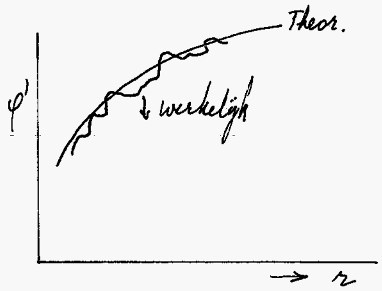


De grafieken $\theta = 0°$ (II) en $\theta = 5°$ (II) geven iets betere resultaten dan $\theta = 0°$ (I) en $\theta = 5°$ (I).

De spreiding in de metingen bij II is kleiner dan bij I.

Bij het meten van de afgeleide meten we de functie φ' op twee plaatsen die kort bij elkaar liggen. De gemeten waarde $\varphi'(r+\frac{1}{2}\Delta r) - \varphi'(r-\frac{1}{2}\Delta r)$ is klein. Kleine afwijkingen in de functiewaarde $\varphi'(r)$ geven relatief grote fouten in de afgeleiden

Kijken we naar de grafiek van de functiewaarde φ' op blz. 23 dan zou men willen veronderstellen dat de gemeten functie φ' redelijk goed is.



Sterk overdreven vertoont de functie φ' echter volgens die hiernaast getekende figuur.

De afwijking in de functie φ' is denkelijk hoofdzakelijk te wijten aan het niet constant zijn van de specifieke weerstand ρ van het weerstandspapier.

Neemt men de afstand tussen de puntjes groter dan meet men een betere gemiddelde waarde van $\frac{\partial \varphi'}{\partial r}$. Hier zal de spreiding dan ook kleiner zijn.

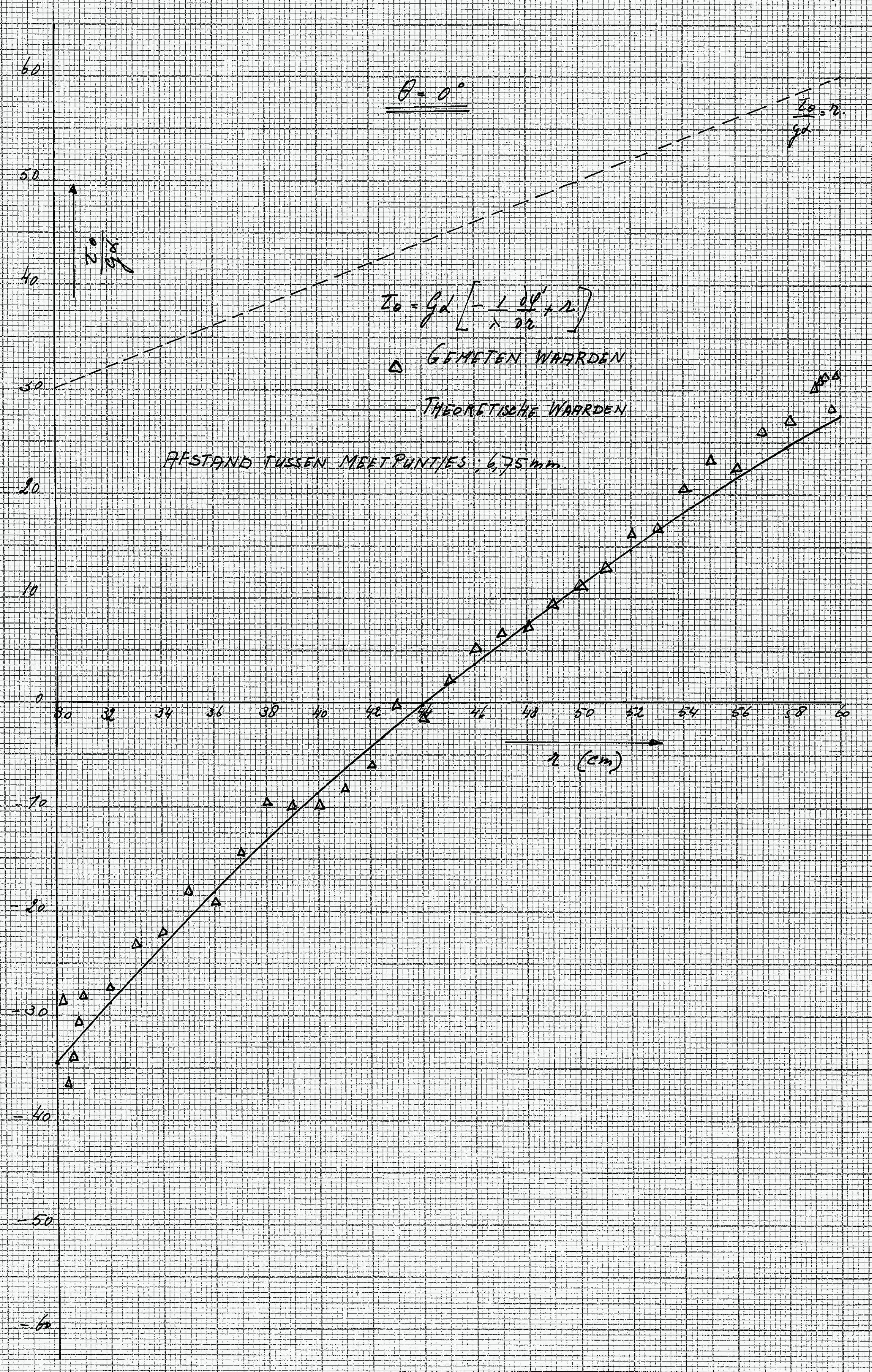
Bij $\theta = 0°$ (I) en $\theta = 5°$ (I) is de afwijking dicht bij $r = 30$ cm tamelijk groot. Dit is denkelijk te wijten aan kleine onnauwkeurigheden aan de rand van zilververf. Er treden als het ware kleine kerfspanningen op door het ruw zijn van het buitenoppervlak. Dit komt natuurlijk bij kleine afstand tussen de meetpuntjes goed tot uitdrukking. Zie ook $\theta = 80°$ (I)

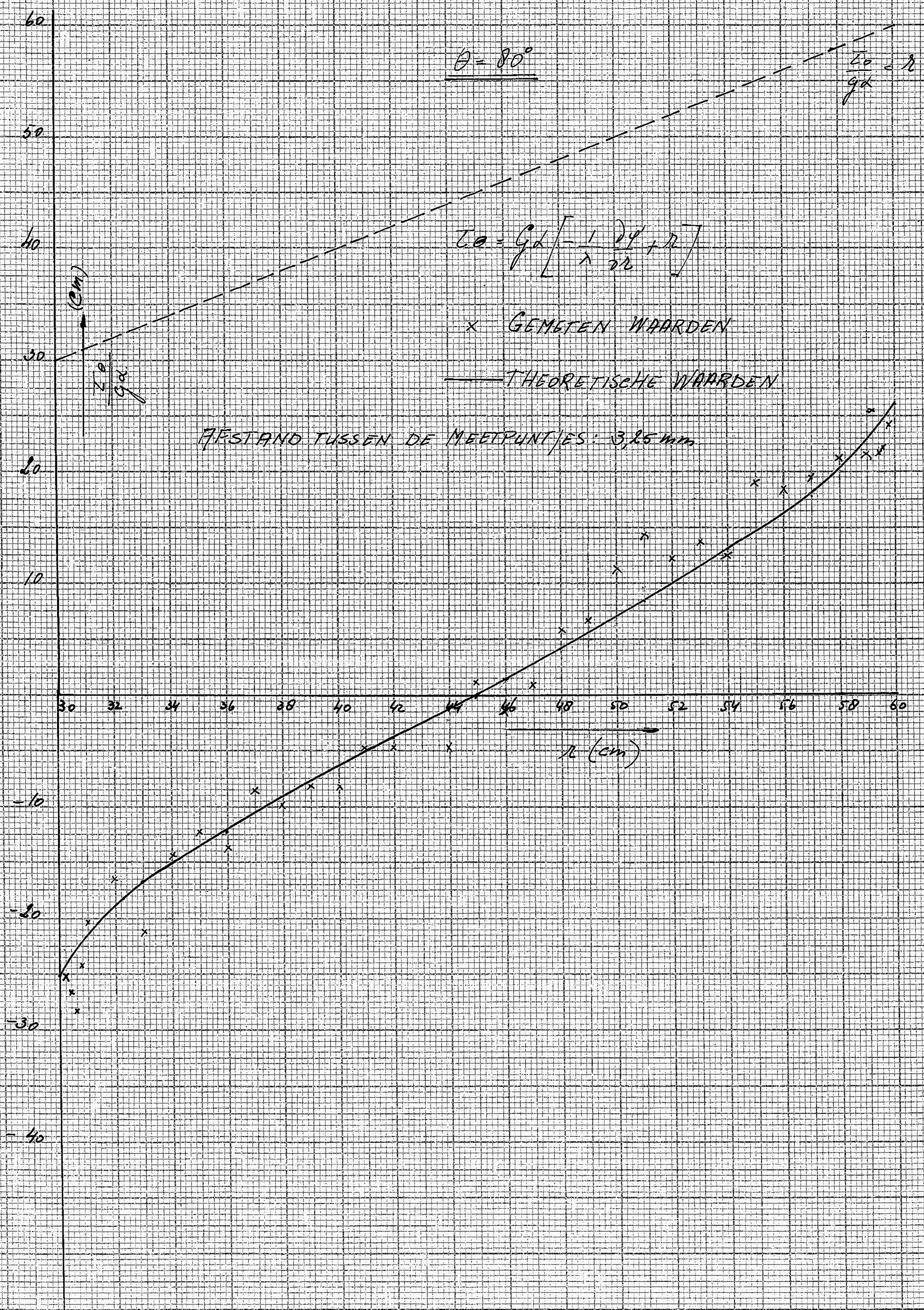
Bij $\theta = 80°$ (II) is de gemeten waarde tussen $30 \leq r \leq 44$ (cm) systematisch kleiner dan de theoretische. Dit is moeilijk te verklaren.

Het spanningsverloop τ_θ voor $\theta = 0°$ en $\theta = 80°$

Volgens blz. 20 is de schuifspanning $\tau_\theta = G\alpha\left[-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi'}{\partial r} + r\right]$

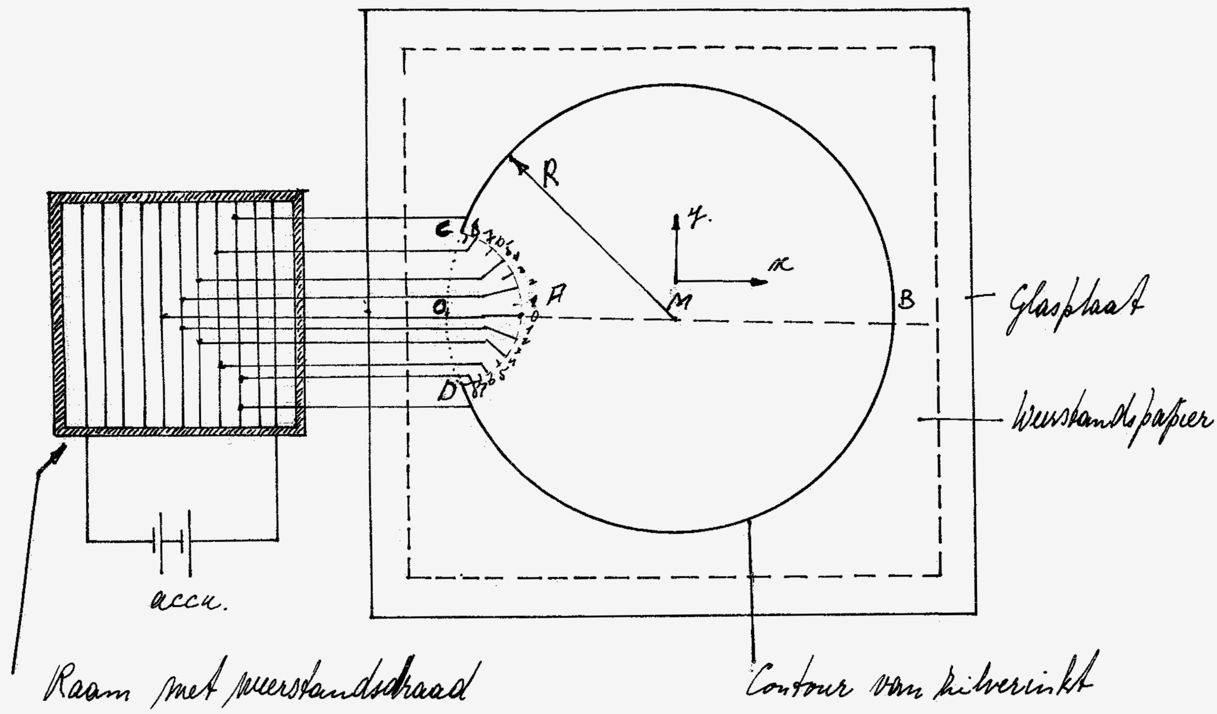
M.b.v. de grafieken $\theta = 0°$ (II) en $\theta = 80°$ (I) op blz. 27 die zowel de theoretische als gemeten waarden van $\frac{\partial\varphi'}{\partial r}$ geven zijn de grafieken voor de schuifspanning τ_θ zonder meer te tekenen. Zie blz. (30)


θ = 0°
$\frac{\tau_0}{g\alpha} = r$
$\frac{\tau_0}{g\alpha}$
$\tau_0 = G\alpha\left[-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi'}{\partial r} + r\right]$
GEMETEN WAARDEN
THEORETISCHE WAARDEN
AFSTAND TUSSEN MEETPUNTJES : 6,75 mm.
r (cm)
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60



$\theta = 80°$
$\frac{\tau_\theta}{G\alpha} = r$
$\tau_\theta = G\alpha\left[-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\right]$
× GEMETEN WAARDEN
—— THEORETISCHE WAARDEN
AFSTAND TUSSEN DE MEETPUNTJES: 3,25 mm
$\frac{\tau_\theta}{G\alpha}$ (cm)
r (cm)
60
50
40
30
20
10
-10
-20
-30
-40
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60

Onderzoek aan de as met spiegleuf. (doorsnede II zie blz. 16)



Het geheel is symmetrisch t.o.v. de lijn AMB

De aan te leggen spanningen aan de rand dus ook.

Bij de uitvoering van de proef zijn de draadjes met hetzelfde cijfertje eerst met elkaar verbonden en het ene uiteinde is aan het weerstandsdraad gelegd. Dit is hierboven dus foutief aangegeven.

Bij de eerste meting is de straal $MB = 30$ cm genomen
en $OA = 6$ cm genomen

Over de lijn AMB is de functiewaarde $\varphi' = \lambda \varphi$ (φ is de toegevoegde welvings-functie) en $\frac{\partial \varphi'}{\partial x}$ gemeten. Als oorsprong is het punt M genomen.

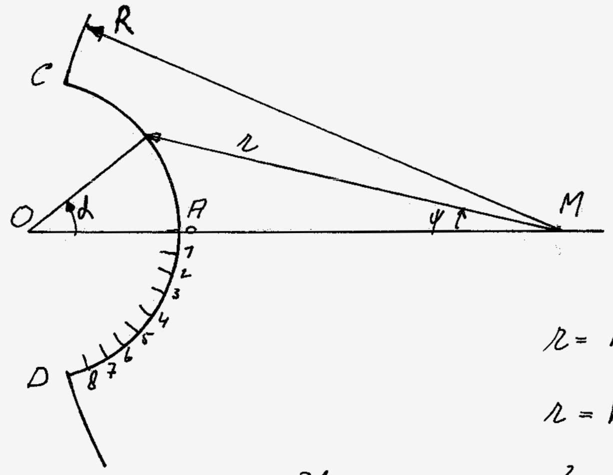
De aan te leggen spanning aan de rand is $\varphi' = \lambda \varphi = \lambda \frac{1}{2} r^2$.

Voor $\lambda = 0{,}04$ genomen.

De spanning over de contour van zilverinkt is dus constant,

deze is: $\lambda \frac{1}{2} k^2 = 0{,}04 \times \frac{1}{2} \times 30^2 = 18$ Volt.   1 cm $\triangleq$ 1 Volt.

De afstand tussen twee opeenvolgende cijfertjes op het boogje CAO dat O als middelpunt heeft is 1 cm genomen.



Er geldt: $r \sin\psi = OA \sin\alpha$

$OA \cos\alpha + r\cos\psi = R$

$r\cos\psi = (R - OA\cos\alpha)$

$r = \sqrt{(OA\sin\alpha)^2 + (r\cos\psi)^2}$

$r = \sqrt{(OA\sin\alpha)^2 + (R - OA\cos\alpha)^2}$

Algemeen: $r^2 = OA^2 + R^2 - 2\,OA.R.\cos\alpha.$

Hier is: $OA = 6$ cm.
$R = 30$ cm.

φ' aan de rand is: $\varphi' = \lambda\varphi = \lambda \frac{1}{2} r^2$

$= 0{,}04 \times \frac{1}{2} \times [6^2 + 30^2 - 2.6.30.\cos\alpha]$

$\varphi' = 18{,}72 - 7{,}2\cos\alpha$

De hoek α tussen twee opeenvolgende punten is $\frac{1}{6}$ rad.

φ' in punt A is $18{,}72 - 7{,}2 = 11{,}52$ Volt.

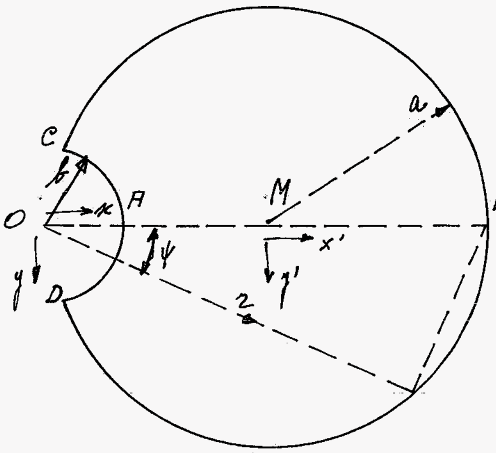
Punt	Aan te leggen spanning φ'
0	11,52
1	11,62
2	11,917
3	12,401
4	13,062
5	13,879
6	14,837
7	15,89
8	17,027
Zilververf.	18,0

De functie φ' langs AMB is gemeten m.b.v. een digitale voltmeter en potloodstift. Zie grafiek op blz. (35)

<u>Theoretische waarde van φ' op AMB</u>

In het boek "Theory of Elasticity" van Timoshenko en Goodier is op blz. 268 gegeven:

$$\phi = \frac{F}{4}\left(x^2+y^2\right) - \frac{Fa}{2} r\cos\psi + \frac{Fb^2}{2}\frac{a}{r}\cos\psi - \frac{F}{4}b^2.$$



Met ϕ is hier de spanningsfunctie bedoeld, die voldoet aan:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = F$$

Nemen we voor $F = -2$ dan is $\phi = f$

f is de spanningsfunctie volgens blz. 10

De functie $\phi = f$ voldoet aan de randvoorwaarde ϕ is nul op de rand.

$$f = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + ar\cos\psi - ab^2\frac{\cos\psi}{r} + \frac{1}{2}b^2$$

$$f = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + ax - ab^2\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}b^2.$$

We willen als oorsprong echter het punt M hebben, omdat t.o.v. M de aan te leggen spanning aan de rand eenvoudiger is. De spanning over de boog CBD is dan constant.

We nemen als nieuwe coördinaten t.o.v. M; x' en y'

Dit is een translatie : $x' = x - a$ $\qquad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1$

$y' = y \qquad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1$

$$f \text{ t.o.v. } M = f_M = -\frac{1}{2}\left[(x'+a)^2 + y'^2\right] + a(x'+a) - ab^2\frac{x'+a}{(x'+a)^2+y'^2} + \frac{1}{2}b^2$$

Door deze translatie blijft gelden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = -2$

en f blijft nul op de rand.

De toegevoegde welvingsfunctie φ t.o.v. $M = \varphi_M = f_M + \frac{1}{2}(x'^2+y'^2)$ (zie blz. 10)

$$\varphi_M = -\frac{1}{2}\left[(x'+a)^2+y'^2\right] + a(x'+a) - ab^2\frac{x'+a}{(x'+a)^2+y'^2} + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(x'^2+y'^2)$$

$$\varphi_M = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - ab^2\frac{x'+a}{(x'+a)^2+y'^2}.$$

$$\varphi_M \text{ op } AMB_{(y'=0)} = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - \frac{ab^2}{x'+a}.$$

$$\frac{\partial\varphi_M}{\partial x'} = -ab^2\frac{(x'+a)^2+y'^2-(x'+a)2(x'+a)}{\left[(x'+a)^2+y'^2\right]^2}.$$

$$\frac{\partial\varphi_M}{\partial x'}(y'=0) \text{ op } AMB = \frac{ab^2}{(x'+a)^2}$$

$$\varphi' = \lambda\varphi. \qquad \varphi'_M \text{ op } AMB_{(y'=0)} = \lambda\left[\frac{1}{2}(a^2+b^2) - \frac{ab^2}{x'+a}\right]$$

$$\frac{\partial\varphi'_M}{\partial x'}(y'=0) \text{ op } AMB = \lambda\frac{\partial\varphi_M}{\partial x'}(y'=0) = \lambda\cdot\frac{ab^2}{(x'+a)^2}$$

Voor ons proefstuk is: $\lambda = 0{,}04$

$$a = 30$$
$$b = 6.$$

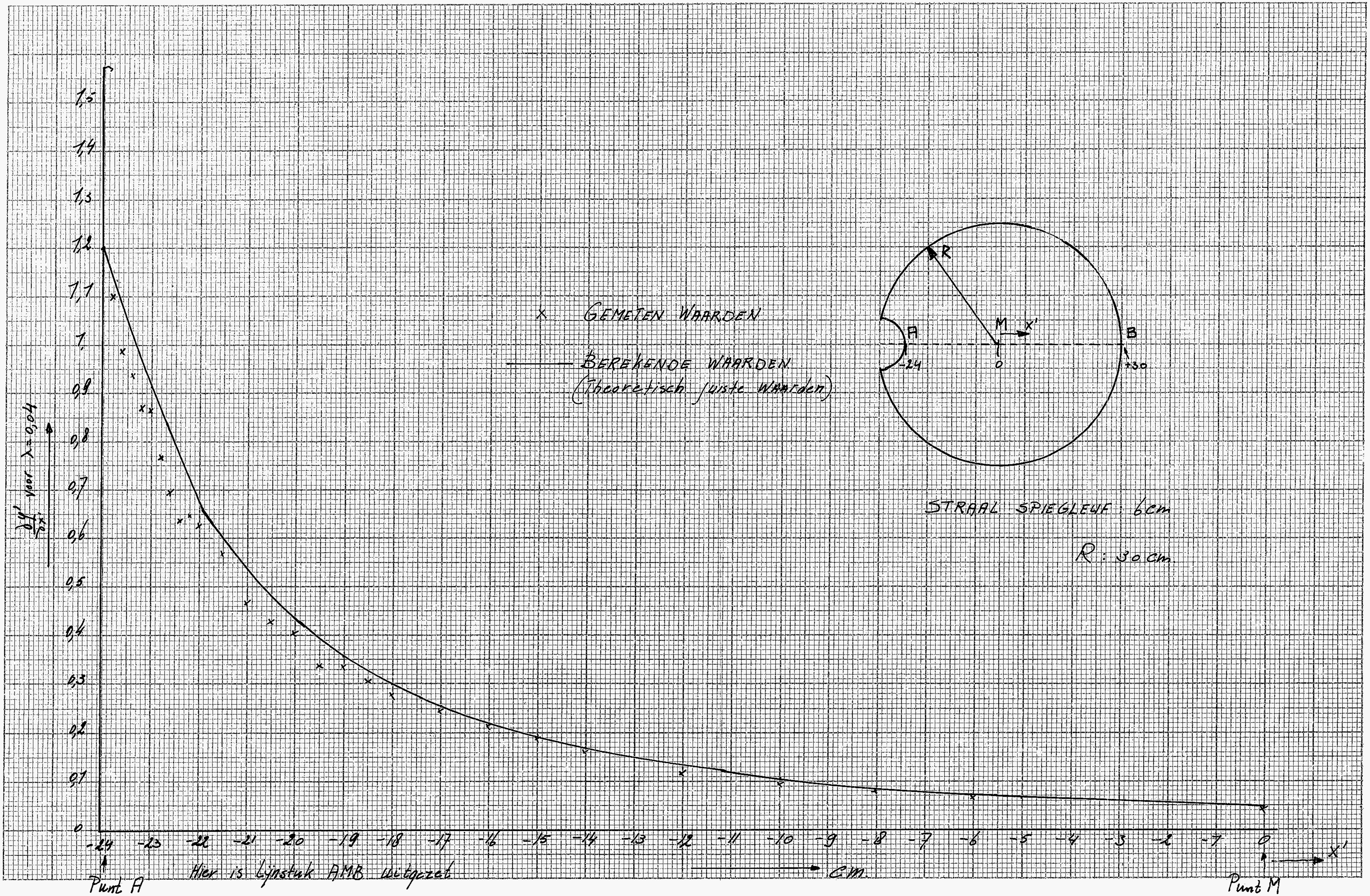
$$-24 \leq x' \leq 30$$

De waarden voor $\varphi'_M(y'=0)$ en $\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}(y'=0)$ zijn uitgerekend en in grafiek gebracht. Zie blz.(35)

De gemeten waarden van $\varphi'_M(y'=0)$ en van $\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}(y'=0)$ zijn in dezelfde grafiek aangegeven.

$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}(y'=0)$ is gemeten op een manier als aangegeven op blz. 24.

De afstand tussen de meetpuntjes is 3,25 mm genomen.



× GEMETEN WAARDEN
—— BEREKENDE WAARDEN
(Theoretisch juiste waarden)
STRAAL SPIEGLEUF: 6cm
R: 30cm
M
X'
A
B
R
-24
0
+30
$\frac{\partial y'}{\partial x'}$ voor $\lambda = 0{,}04$
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-24 -23 -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0
X'
Cm.
Punt A
Hier is lijnstuk AMB uitgezet
Punt M

Bepalen van $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ in het punt A door middel van interpolatie voor verschillende waarden van R. $R = 30, 24, 18, 12, 6$ (cm)

straal spiegleuf = 6 cm.

Voor λ is de waarde 0,08 genomen.

De eerste meting is uitgevoerd voor $R = 30$ cm.
straal spiegleuf = 6 cm.

de spanning aan de rand is aangelegd volgens de formule op blz (32)

$$\varphi'_{rand} = \lambda \varphi = \lambda \tfrac{1}{2} r^2 = \lambda \times \tfrac{1}{2} \times \left[OA^2 + R^2 - 2\, OA.R \cos\alpha \right] \quad (\mathrm{I})$$

$$= 0{,}08 \times \tfrac{1}{2} \left[36 + 900 - 360 \cos\alpha \right]$$

$$\varphi'_{rand.} = 37{,}44 - 14{,}4 \cos\alpha$$

De spanningen zijn precies het dubbele als die uit de tabel op blz. (32)

φ' in A = 23,04 Volt
φ' op zilverinkt = 36. volt

We hebben door de 2 accus van 12 Volt samen 24 volt ter beschikking.

Van φ' mag zonder bezwaar een constante afgetrokken worden. De afgeleiden worden hierdoor niet beinvloed. We nemen φ' in A = 3,04 Volt

φ' op zilverinkt = 16. volt

In de buurt van A wordt $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ gemeten over de lijn AMB. volgens de methode van blz. 24. De grafiek door deze punten geeft $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ in het punt A. Zie grafiek op volgende blz. (37)

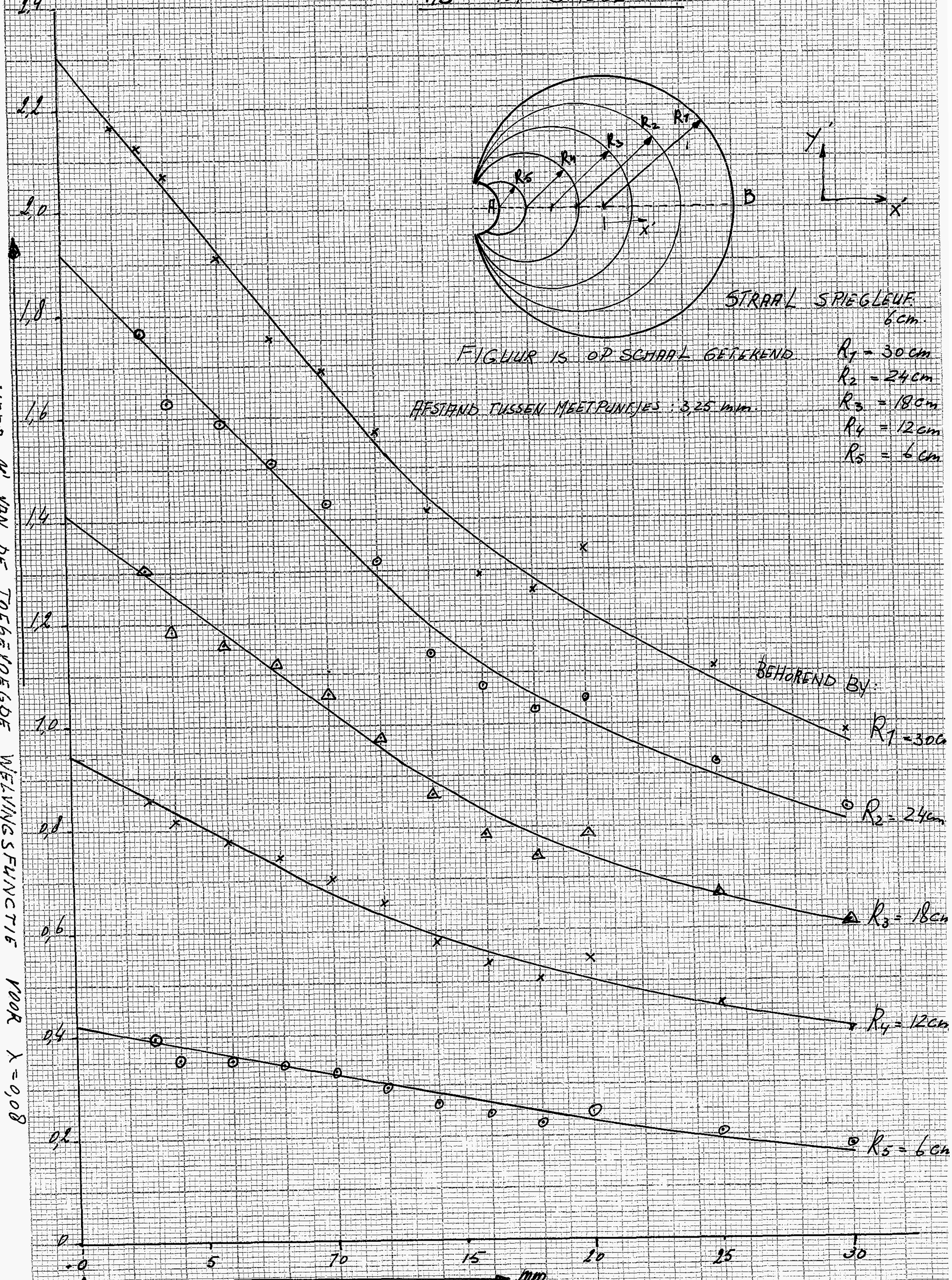
Vervolgens wordt met zilverinkt $R = 24$ cm getekend.

De spanning aan de rand wordt volgens bovenstaande formule (I) aangelegd. Ook hier wordt $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ gemeten in de buurt van A.

Verder wordt R 18, 12 en 6 cm genomen.

de grafiek op de volgende blz. geeft de gevonden waarden van $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ in het punt A.

AS MET SPIEGLEUF



punt A ⟶ naar B

Hier is een klein stukje van het lijnstuk AB uitgezet, nl van A tot 30 mm rechts van A.

De theoretische waarde van $\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$ in het punt A is:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\frac{ab^2}{(x'+a)^2}$$

Zie blz. (34)

x' in A : $x' = -a+b$.

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} \text{ in } A = \lambda\frac{ab^2}{(-a+b+a)^2} = \lambda a.$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} \text{ in } A = \lambda R = 0{,}08 \times R.$$

	Theoretisch	Gemeten
R cm.	$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$ in A	$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$ in A
30	2,4	2,3
24	1,92	1,92
18	1,44	1,41
12	0,96	0,94
6	0,48	0,42

Gemeten; volgens grafiek op blz. (37)

Kijken we naar de grafiek op de vorige blz. dan zien we dat bijv. bij 20 mm rechts van A de gemeten waarde van $\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$ bij alle genomen waarden van R hoger ligt dan de theoretische.
Dit komt denkelijk door een afwijking van de specifieke weerstand van het papier op die plaats.

Het schuifspanningsverloop over de lijn AMB. ($\tau_{z'y'}$)

Zie grafiek op de volgende blz. (40)

Voor : straal spiegleuf = 6cm

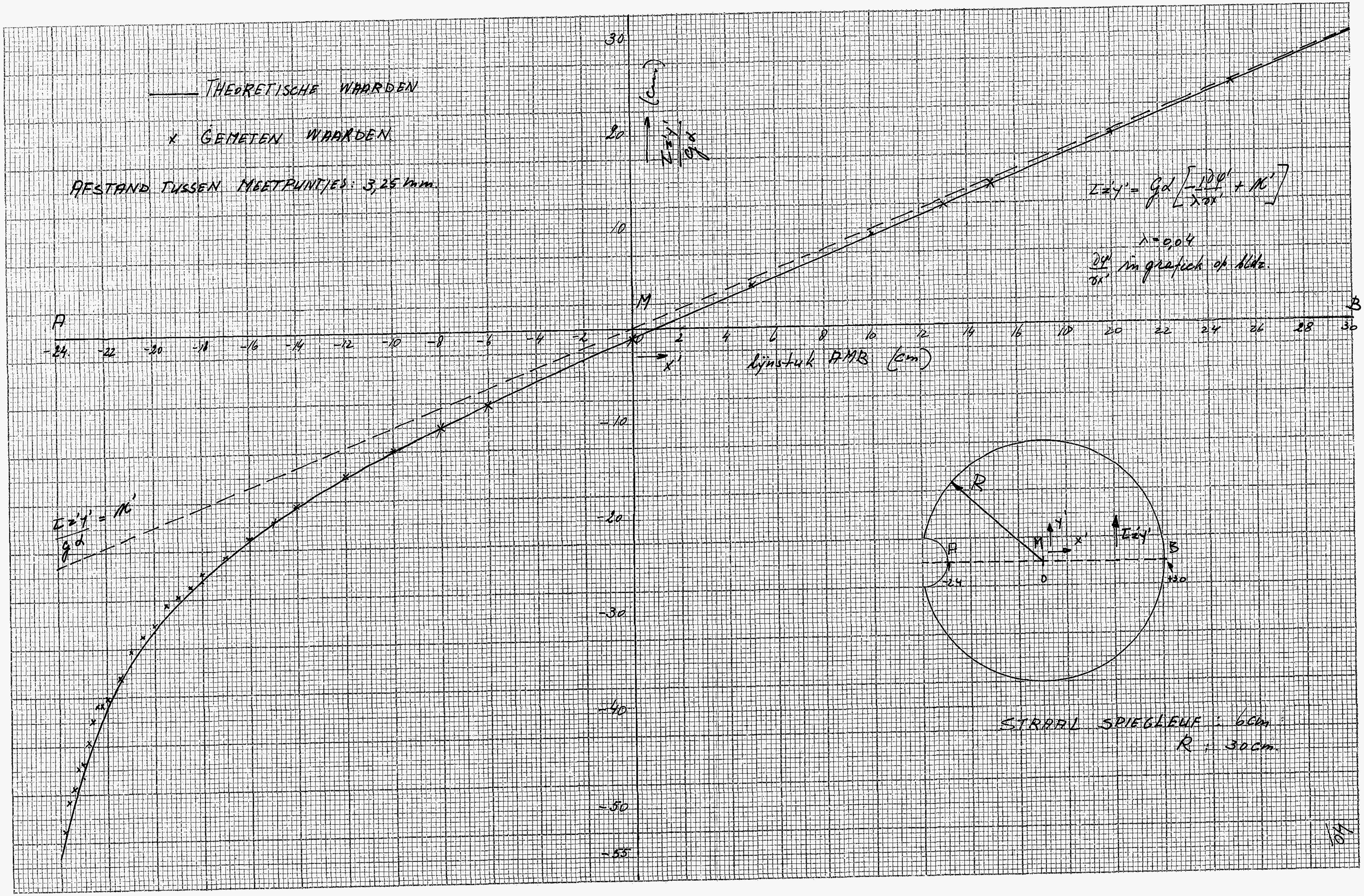
$R = 30cm$

$\lambda = 0{,}04$

is de waarde van $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ over het lijnstuk AMB gemeten en aangegeven in de grafiek op blz. (35)

De schuifspanning $\tau_{z'y'} = G\alpha \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + x' \right]$ volgens blz. 20.

$\tau_{z'y'}$ over AMB is nu zonder meer in grafiek te brengen.



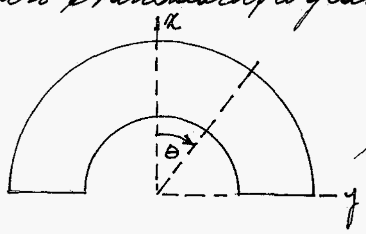
THEORETISCHE WAARDEN
x GEMETEN WAARDEN
AFSTAND TUSSEN MEETPUNTJES: 3,25 mm.
$\frac{\tau_{z'y'}}{G\alpha}$ (cm)
$\tau_{z'y'} = G\alpha\left[-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} + K'\right]$
$\lambda = 0{,}04$
$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$ in grafiek op blz.
$\frac{\tau_{z'y'}}{G\alpha} = K'$
lijnstuk AMB (cm)
A
M
B
x'
R
y'
$\tau_{z'y'}$
O
-24
+30
STRAAL SPIEGLEUF: 6 cm.
R: 30 cm.
40

Het bepalen van de afgeleide van φ' uit de gemeten waarde van φ' m.b.v. de methode der kleinste kwadraten.

Heeft men de functie φ' gemeten dan kan men een hogere graadskromme door deze punten bepalen volgens de methode van de kleinste kwadraten. M.b.v de Computer IBM 1620 (Afdeling Wiskunde) kan men een zesde graads polynoom door de meetpunten bepalen.

Voor deze methode is n.l. een standaardprogramma (Codenummer 154E) aanwezig.

Van de onderzochte doorsnede

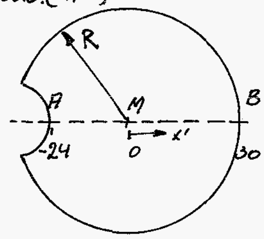


is de functiewaarde φ' gemeten bij $\theta = 80°$

De gemeten afgeleide m.b.v. de meetpuntjes is reeds uitgezet in de grafieken $\theta = 80°$ (I) en $\theta = 80°$ (II) op blz. (27)

De afgeleide bepaald met de hierboven aangegeven methode is uitgezet in de grafiek op de volgende blz. (41^A)

Ook voor de doorsnede



is de functiewaarde φ' gemeten over de lijn AMB

$R = 30$ cm $\lambda = 0{,}04$.

Straal spiegleuf = 6 cm Zie grafiek op blz. (35)

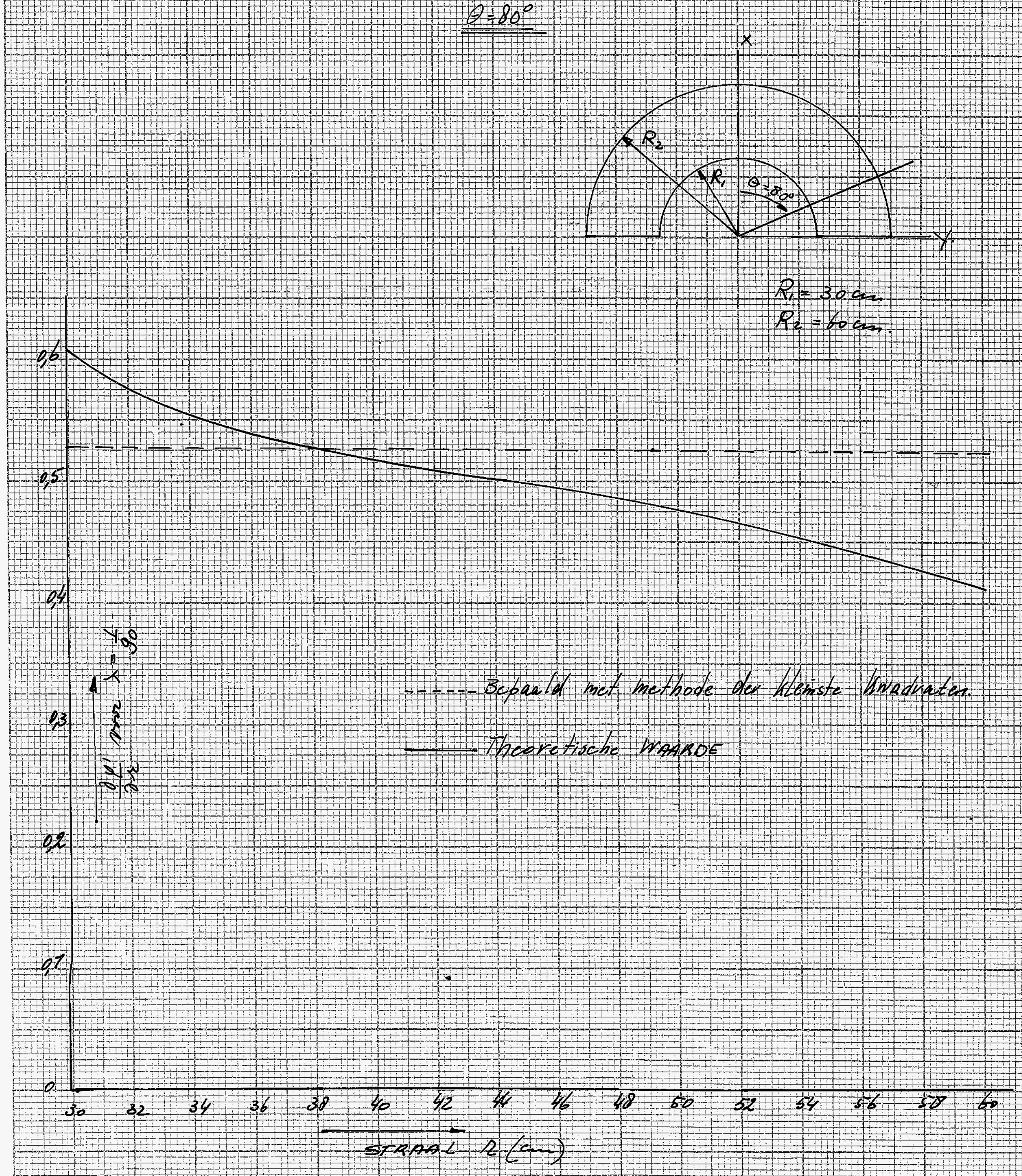
De afgeleide $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ over AMB is ook bepaald m.b.v. de meetpuntjes.

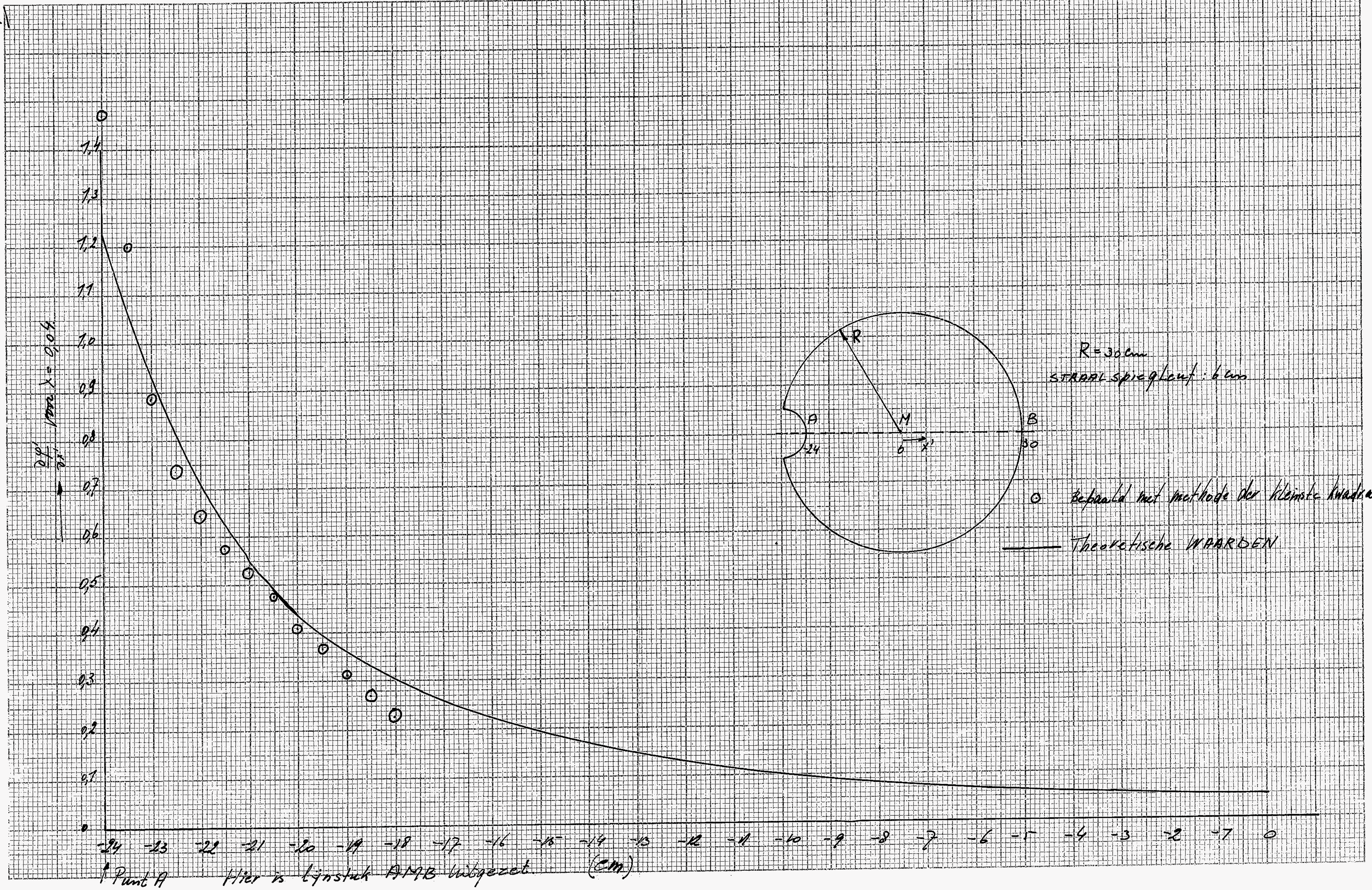
Zie grafiek op blz. (27)

De afgeleide $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ is volgens bovenstaande meethode bepaald m.b.v. een zesdegraadspolynoom door de meetpunten gelegen tussen $-24 \leq x' \leq 18$ (cm)

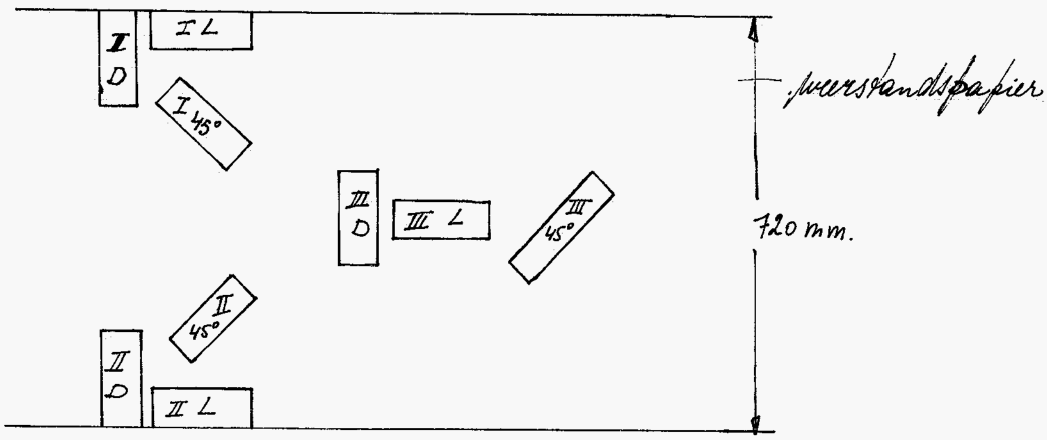
Voor de grafiek zie blz. (41^B)

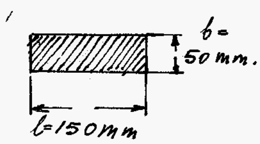
De gevonden resultaten van de afgeleide zijn slechter dan de resultaten gevonden m.b.v. de meetpuntjes.

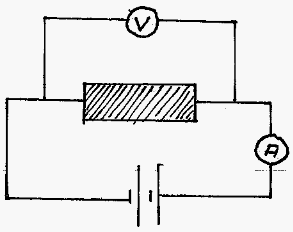

θ=80°
X
Y
R_2
R_1
θ=80°
R_1 = 30 cm
R_2 = 60 cm
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
------Bepaald met methode der kleinste kwadraten.
——Theoretische WAARDE
STRAAL R (cm)


$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$ voor $\lambda = 0,04$
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-24
-23
-22
-21
-20
-19
-18
-17
-16
-15
-14
-13
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
Punt A
Hier is lijnstuk AMB uitgezet
(cm)
R
A
M
B
24
0
30
x'
R = 30 cm
STRAAL spiegelent : 6 cm
Bepaald met methode der kleinste kwadraten.
Theoretische WAARDEN

De specifieke weerstand ρ van het gebruikte weerstandspapier







	I L	I D	I 45°	II L	II D	II 45°	III L	III D	III 45°
V volt	20	20	20	20	20	20	20	20	20
A mA.	3,32	2,88	2,85	3,66	3,2	3,32	3,5	2,96	3,1.
ρ Ω	2070	2318	2340	1820	2080	2010	1900	2255	2150
ρ %	4,15%	15,3%	16,4%	8,45%	0,8 %	4,16%	9,4%	11,9%	7,3%

De proefstukjes zijn op de hierboven aangegeven plaatsen uit het papier geknipt. De spanning V en de stroomsterkte A zijn volgens bovenstaande methode gemeten.

$V = A.R.$ V = spanning (Volts)
A = Ampère (
R = weerstand.

$V = A. \frac{l}{b} \rho.$

$$\rho = \frac{V}{A. \frac{l}{b}}$$

Gemiddelde waarde van ρ = 2097 Ω

De afwijking in % is gegeven in de tabel. (ρ%)

Bijlage I

de formule die uitgerekend werd, is (zie blz. 21)

$$\varphi' = \frac{\lambda}{u^2}\left[\frac{1}{2}(R-a)^2 + \frac{4aR}{p}\log\frac{r}{R-a} - \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{2(R^2+a^2)p^2}{(p^2+n^2\pi^2)n\pi}\cdot\frac{\cosh\left(\frac{2n\pi}{p}\theta\right)}{\cosh\left(\frac{2n\pi}{p}\alpha\right)}\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\log\frac{r}{R-a}\right)\right]$$

Constanten: $\lambda = 0{,}4$ $\;\;$ $u = 6$ $\Big\} \rightarrow \frac{\lambda}{u^2} = \frac{1}{90}$ $\;\;$ Variable : r $\;\;$ Parameter : θ

$R = 45$

$a = 15$

$p = 2\log\left(\frac{R+a}{R-a}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

Van de somfunctie zijn de eerste drie termen meegenomen.

Parameter : θ = 0, 5, 10, 45, 75, 80, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90

Variable : r =

30	32	59,4
30,2	enz. in stappen	59,6
30,4	van 1 tot	59,8
30,6	58	60.
30,8	59	
31	59,2	

Programma.

Gegeven bandje 20 FORMAT (F 4.0)

```
bb0.
bb5.
b70.
b45.
b75.
b80.
b83.
b85.
b86.
b87.
b88.
b89.
b90.
```

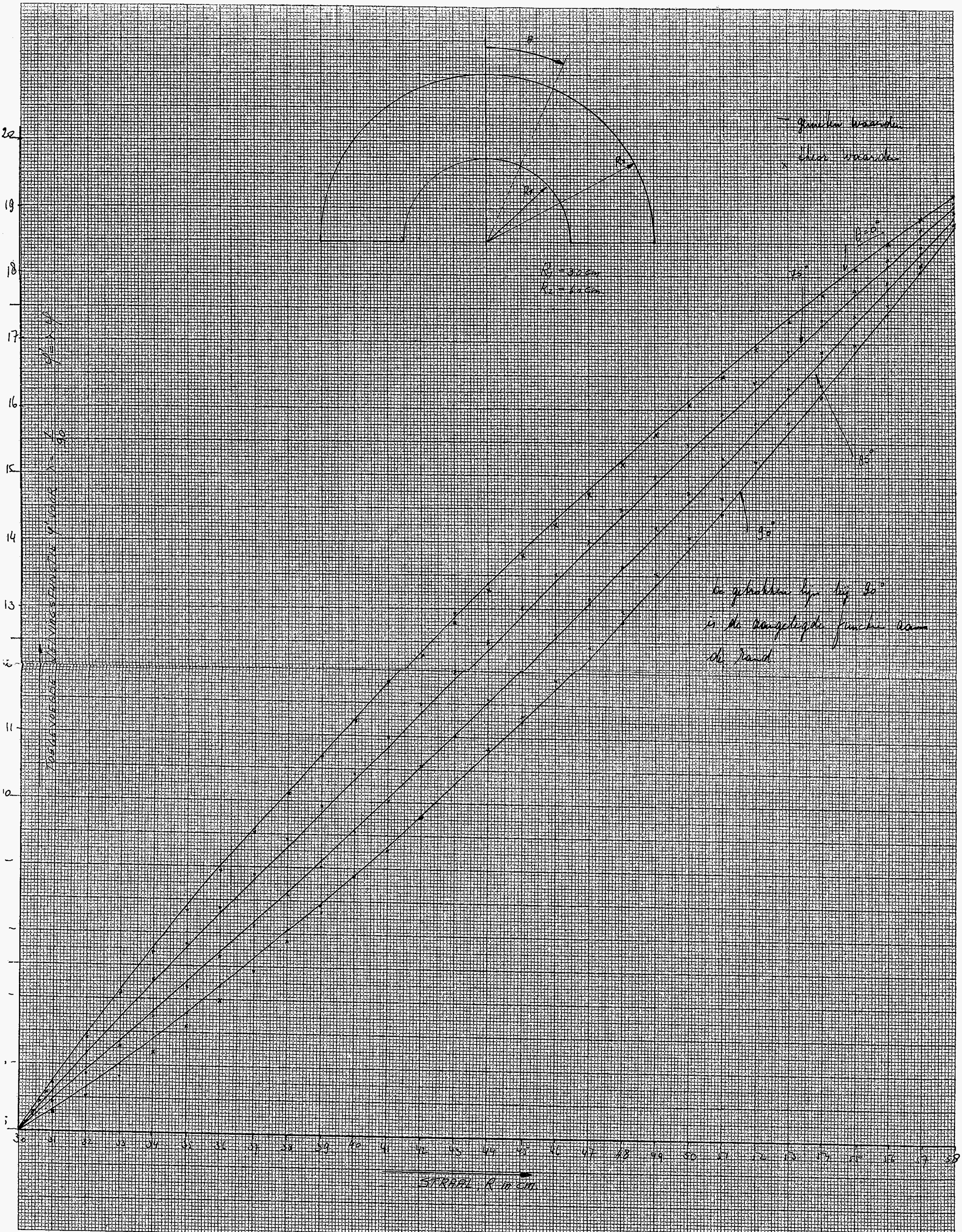
Programma bandje.

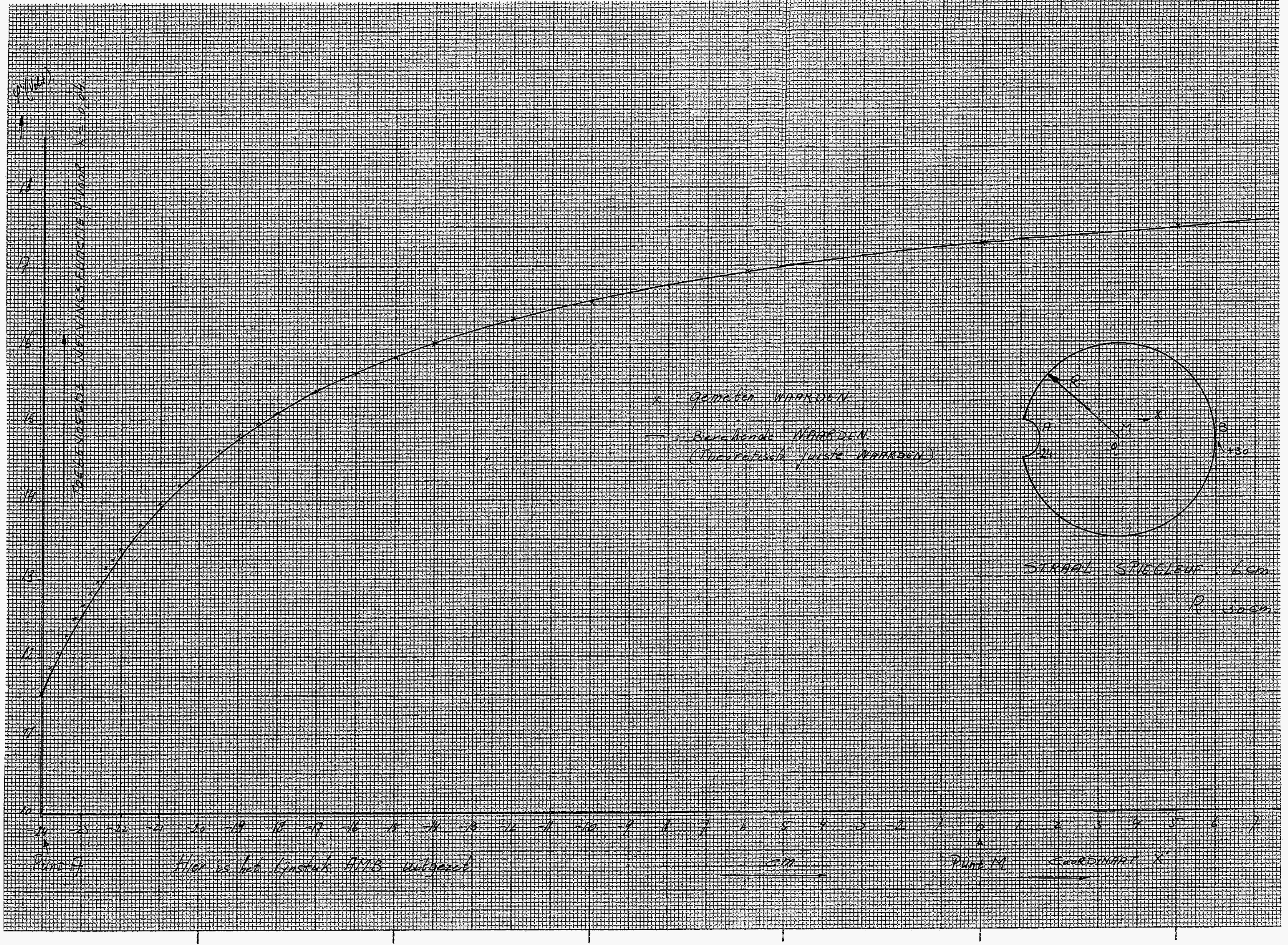
```
20    FORMAT (F4.0)
30    FORMAT (F5.1, 5H, F10.5)
      HLAB = 0.4
        U = 6.
        R = 45.
       AA = 15.
      PI = 3.1415927
      ALPHA = 1.5707964
      A = HLAB/(U**2.)
      B = 0.5 * ((R-AA)**2.)
      P = 2. * LOG((R+AA)/(R-AA))
      C = 4. * AA * R/P
      EE = 2. * PI/P
      EF = 3. * EE
      EG = 5. * EE
      FK = 2. * (R**2. + AA**2.) * (P**2.)
      DE = FK/(((P**2. + PI**2.) * PI * (EXP(ALPHA*EE) + EXP(-ALPHA*EE)))
      DF = FK/(((P**2. + 9.*(PI**2.)) *3.* PI * (EXP(ALPHA*EF) + EXP(-ALPHA*EF)))
      DG = FK/(((P**2. + 25.*(PI**2.)) *5.* PI * (EXP(ALPHA*EG) + EXP(-ALPHA*EG)))
 3    DO 15, I = 1,13
      ACCEPT TAPE 20, THETA
      PUNCH TAPE 20, THETA
      TET = THETA * PI/180.
      FE = EXP(EE*TET) + EXP(-EE*TET)
      FF = EXP(EF*TET) + EXP(-EF*TET)
```

```
      FG = EXP(EG*TET) + EXP(-EG*TET)
      AR = 30.
      J = 1
4     G = LOG (AR/(R-AR))
      HE = SIN (EE*G)
      HF = SIN (EF*G)
      HG = SIN (EG*G)
      PHI = A*(B+C*G-DE*FE*HE-DF*FF*HF-DG*FG*HG)
      PUNCH TAPE 30, AR, PHI
      IF (AR-31.) 5,6,6
5     AR = AR + 0.2
      GO TO 4
6     J = J+1
      IF (J-30) 7,8,8
7     AR = AR+7.
      GO TO 4
8     IF (AR-60.) 5,15,15
15    CONTINUE
      STOP
      END
```

Uitvoering.

Pons gegevenband
Pons programmaband
Vertalen van source programma
Leg DATA-bandje (gegeven bandje) op
Draaien van programma met alle switches af.
Resultaten komen uit machine via pons
Decoderen van de ponsband


θ
R1
R2
R1 = 30 cm
R2 = 60 cm
gemeten waarden
theor waarden
θ = 0°
75°
85°
90°
de getrokken lijn bij 90°
is de aangelegde functie aan
de rand
TOEGEVOEGDE WELVINGSFUNCTIE φ' VOOR λ = 1/90   φ' = λ φ
STRAAL, R in CM
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
20
19
18
17
16
15
14
13
11
10


x : gemeten WAARDEN
— : Berekende WAARDEN
(Theoretisch juiste WAARDEN)
STRAAL SPIEGELUF : 6cm
R : 30 cm
Punt A
Hier is het lijnstuk AMB uitgezet
cm
Punt M
COORDINAAT X