

Geometrisch niet-lineaire torsie van rechte balken met dubbelsymmetrische dwarsdoorsneden

Citation for published version (APA):

Wanrooij, van, R. R. M. (1987). *Geometrisch niet-lineaire torsie van rechte balken met dubbelsymmetrische dwarsdoorsneden*. (DCT rapporten; Vol. 1987.058). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1987

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

GEOMETRISCH NIET-LINEAIRE TORSIE VAN RECHTE BALKEN MET DUBBELSYMMETRISCHE
DWARSDOORSNEDEN.

WFN - 87.058

STAGEVERSLAG VAN P.P.M. V. WANROOIJ

SUPERVISORS: DR. IR. C. MENKEN.

IR G.V. ERP.

Juli 1987.

Inleiding

In deze theorie wordt niet alleen de torsie volgens de St. Venant beschouwd, maar wordt tevens een propositie van Reissner uitgewerkt. Reissner stelt voor om de werving niet n.b.v. de specifieke wringhoek te beschrijven, maar met een onbekende modulusfunctie α . Het is evident dat de klassieke theorie dan geheel in het kader van deze formulering past.

De theorie is opgezet voor balken met dubbelsymmetrische dwarsdoorsneden en beperkt zich tot lineair elastische materialen, zoals metalen. (De voorbeelden hebben allemaal betrekking op aluminium). De rekken blijven dus klein. Omdat het materiaalgedrag reeds bekend is, worden de evenwichtsvergelijkingen bepaald n.b.v. het principe v.d. minimale potentiële energie.

De twee modellen worden getoetst aan de hand van enkele concrete voorbeelden. De doorsneden behoren steeds tot een bepaalde klasse, zodat de specifieke kenmerken van die klasse kenbaar worden. Het blijkt dat het gedrag van een balk met een willekeurige doorsnede kan worden voorspeld aan de hand van enkele kantallen. De meetresultaten zijn bevredigend, maar het is onduidelijk welk model nu de beste resultaten geeft.

Aan fouten is geen aandacht besteed. Deze kunnen globaal worden ingedeeld naar modelfouten en meetfouten.

Inhoud

	<u>PAGINA</u>
1. KINEMATICA	1
2. DE POTENTIËLE ENERGIE	3
2.1. DE ELASTISCHE ENERGIE	3
2.2. DE POTENTIËLE ENERGIE	5
3. DE EVENWICHTSVERGELIJKINGEN.	8
3.1. REISSNER-THEORIE.	8
3.2. ST. VENANT-THEORIE.	9
4. VRIJE WELVING	11
4.1. ST. VENANT-THEORIE	11
4.2. REISSNER-THEORIE.	12
5. EENZIJDIG VERHINDERDE WELVING	14
5.1. ST. VENANT-THEORIE	14
5.2. REISSNER-THEORIE	15
6. VERHINDERDE WELVING	17
6.1. ST. VENANT-THEORIE	17
6.2. REISSNER-THEORIE	17
7. RECHTHOEKIGE DOORSNEDE	19
7.1. GEOMETRISCHE GROOTHEDEN	19
7.2. VRIJE WELVING	21
7.3. VERHINDERDE WELVING.	24

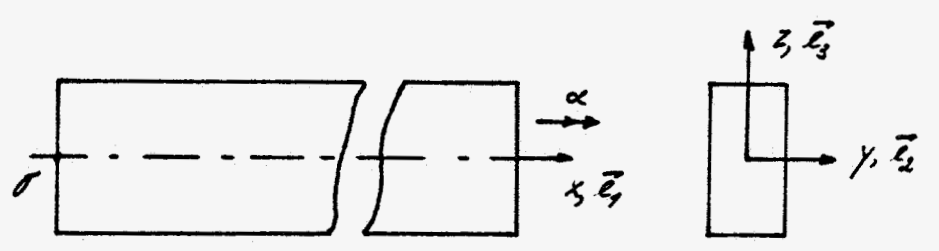
8.	Ronde buis	29
8.1.	GEOMETRISCHE GROOTHEDEN.	29
8.2.	PLASTISCHE DEFORMATIE	29
8.3.	NIET-LINEAIR GEDRAG.	
9.	HET KOKERPROFIEL	32
9.1.	GEOMETRISCHE GROOTHEDEN.	32
9.2.	Vrije wending	33
9.3.	VERHINDERDE WENDING	34
10.	HET I-PROFIEL	38
10.1.	GEOMETRISCHE GROOTHEDEN	38
10.2.	Vrije wending	39
10.3.	VERHINDERDE WENDING	41
11.	DUNNANDIG GEHEENDE DOORSNEDEN.	46
11.1.	ALGEMEEN	46
11.2.	GEOMETRISCHE GROOTHEDEN.	46
11.3.	Vrije wending	47
11.4.	VERHINDERDE WENDING	47
12.	KONKLUSIES	51
13.	PROGRAMMATUUR	53
13.1.	ALGEMEEN.	53
13.2.	PROGRAMMA VAXIB	54
13.3.	PROGRAMMA RAXIB.	55
14.	LITERATUUR	58

APPENDIX A	59
APPENDIX B	60
APPENDIX C	61
APPENDIX D	63
APPENDIX E	65
APPENDIX F	67
APPENDIX G	69
APPENDIX H	83
APPENDIX I	94
APPENDIX K	98

1 KINEMATICA

Uitgangspunt is een rechte balk met een dubbelsymmetrische dwarsdoorsnede, zoals getekend is in figuur 1. Het materiaal is homogeen, lineair elastisch en isotroop. Elk materieel punt wordt beschreven door een orthogonaal coördinatensysteem (x, y, z) . De symmetrie impliceert dat het zwaartepunt en het dwarskrachtenmiddelpunt samenvallen. De balkas is de lijn door de zwaartepunten van de dwarsdoorsneden. Een materieel punt op de balkas wordt gerepresenteerd door een vektor.

$$\vec{x}_0 = x \vec{e}_x \tag{1.1}$$



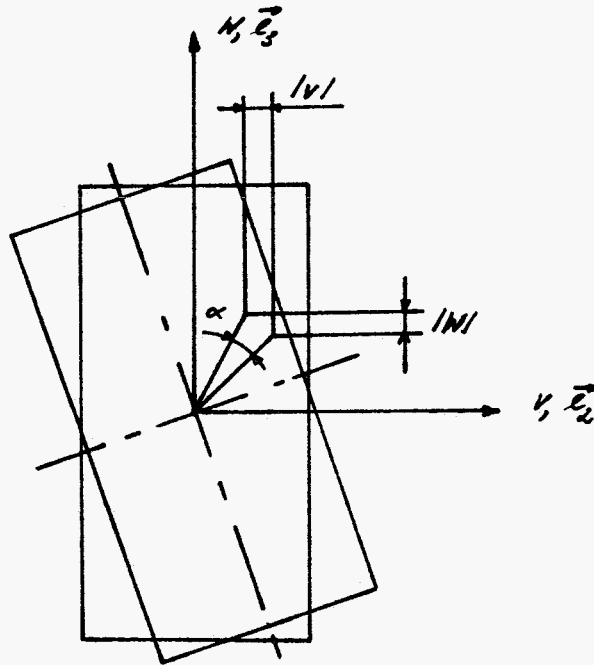
Figuur 1.

Een eis aan het verplaatsingsveld is dat het linkervuiteinde ($x=0$) niet mag roteren. Deze restrictie doet evenwel niet veel afbreuk aan de algemene theorie.

De verplaatsing van een materieel punt is denkbeeldig opgebouwd uit een starre rotatie om het zwaartepunt in het vlak van de dwarsdoorsnede en een verplaatsing evenwijdig aan de balkas (axiale verplaatsing). Met behulp van figuur 2 kunnen makkelijk de componenten van de verplaatsing t.g.v. de rotatie bepaald worden.

$$v = y (\cos \alpha - 1) - z \sin \alpha \tag{1.2}$$

$$w = y \sin \alpha + z (\cos \alpha - 1) \tag{1.3}$$



Figuur 2.

Met betrekking tot de axiale verplaatsing suggereert Reissner het volgende verband:

$$u = u_0(x) + a(x) \xi(y, z) \quad (1.4)$$

$u_0 = u_0(x)$; de axiale verplaatsing v.h. zwaartepunt.

$a = a(x)$; de modulusfunctie

$\xi = \xi(y, z)$; de welfunctie

De welfunctie is bekend uit de literatuur. [1]

St. Venant stelde voor om het volgende verband te nemen:

$$u = u_0(x) + \theta(x) \cdot \xi(y, z) \quad (1.5)$$

$\theta = \theta(x)$; de specifieke hoekverdraaiing $\frac{d\alpha}{dx}$

Historisch gezien volgt (1.4) uit (1.5). Echter wiskundig gezien, is (1.5) een bijzonder geval van (1.4). In de volgende hoofdstukken wordt daarom steeds uitgegaan van de Reissner-theorie.

2. DE POTENTIELE ENERGIE

2.1. DE ELASTISCHE ENERGIE

DE ELASTISCHE ENERGIE OF REKENERGIE WORDT UITGEBREIDT BEHANDELD IN [3]. HET EEN EN ANDER WORDT NOG IN HET KORT AFGELEID. UIT HET VERPLAATSINGVELD (1.2), (1.3) EN (1.4) KUNNEN DE PARTIELE AFGELEIDEN BEPAALED WORDEN.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \epsilon + a' \xi ; \quad \epsilon = \frac{du_0}{dx}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = a \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = a \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\theta (y \sin \alpha + z \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \cos \alpha - 1 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\sin \alpha$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \theta (y \cos \alpha - z \sin \alpha)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \sin \alpha$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \cos \alpha - 1$$

DIT LEIDT TOT DE VOLGENDE GREEN-LAGRANGE REKKEN:

$$\gamma_{11} = \epsilon + a' \xi + \frac{1}{2} \kappa^2 \theta^2 ; \quad \kappa^2 = y^2 + z^2$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z \right) \quad (2.2)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \right)$$

DE ELASTISCHE ENERGIE KAN ALS EEN FUNKTIONAAL VAN DE REKKEN WORDEN GESCHREVEN.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[E \gamma_{11}^2 + 4G (\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2) \right] dV \quad (2.3)$$

SUBSTITUTIE VAN DE REKKEN GEEFT:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} E \int_V \left[\xi^2 + 2Ea'\xi + a'^2\xi^2 + E\kappa^2\theta^2 + a'\xi\kappa^2\theta^2 + \frac{1}{4}\kappa^4\theta^4 \right] dV \\ + \frac{1}{2} G \int_V \left[a^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \theta^2 z^2 - 2\theta z a \frac{\partial \xi}{\partial y} + a^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \theta^2 y^2 \right. \\ \left. + 2\theta y a \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] dV \quad (2.4) \end{aligned}$$

ER GELDT:

$$\begin{aligned} \int_A \xi dA = 0 \\ \int_A z^2 \xi dA = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

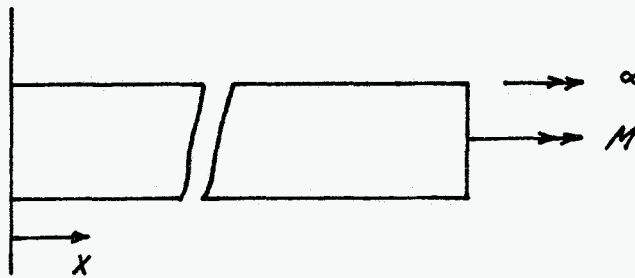
DAN WORDT DE FUNKTIONAAL VOOR DE ELASTISCHE ENERGIE:

$$\begin{aligned} U = \int_V \frac{E}{2} \left[\xi^2 + a'^2 \xi^2 + E\kappa^2 \theta^2 + \frac{1}{4} \kappa^4 \theta^4 \right] dV + \frac{E}{2} \int_V \left\{ a^2 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] + \theta^2 z^2 + 2\theta a \left[y \frac{\partial \xi}{\partial z} - z \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] \right\} dV \quad (2.6) \end{aligned}$$

DE FUNKTIONAAL VOOR DE KLASSIEKE THEORIE WORDT GEVONDEN DOOR $a(x)$ TE VERVANGEN DOOR $\theta(x)$.

2.2. DE POTENTIELE ENERGIE

In hoofdstuk 1 is een beperking opgelegd aan de kinematika v.d. balk. Aan de uiteindelijke belasting wordt eveneens een beperking opgelegd. De balk wordt aan een zijde ($x=0$) belast door een torsiemoment. Ook deze restrictie doet niet veel afbreuk aan de algemene theorie. In figuur 3 is de balk met de uiteindelijke belasting getekend.



Figuur 3.

Voor de potentiële energie geldt nu:

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{1}{2} E \int_V (\epsilon^2 + a^2 \xi^2 + \epsilon \kappa^2 \theta^2 + \frac{1}{4} \kappa^4 \theta^4) dV + \frac{1}{2} \int_V \{ a^2 [\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \\
 & \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2] + \theta^2 \kappa^2 + 2\theta a [y \frac{\partial \xi}{\partial z} - z \frac{\partial \xi}{\partial y}] \} dV \\
 & - \int_0^l M \theta dx \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Het is mogelijk om de volume-integralen n.b.v. enkele definities en tussenresultaten te transformeren naar een lijnintegraal.

De dwarsdoorsnede A wordt begrensd door een randkromme S . Voor de wellevingsfunctie geldt [1]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } A \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} m_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} m_z = z m_y - y m_z \quad \text{op } \mathcal{S} \quad (2.9)$$

DEFINIEER EEN TORSIEGROOTHEID D , WAARVOOR GELDT:

$$D = \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right\} dA \quad (2.10)$$

M.B.V. DE STELLING VAN GREEN (APPENDIX A) VOLGT:

$$D = \int_{\mathcal{S}} \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} m_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} m_z \right) d\mathcal{S} - \int_A \xi \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) dA \quad (2.11)$$

M.B.V. (2.8) EN (2.9) VOLGT:

$$D = \int_{\mathcal{S}} (z m_y - y m_z) \xi d\mathcal{S} \quad (2.12)$$

M.B.V. DE STELLING VAN STOKES (APPENDIX A) VOLGT:

$$D = \int_A \left(z \frac{\partial \xi}{\partial y} - y \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) dA \quad (2.13)$$

DE TORSIE-INTEGRAAL KOMT OORSPRONKELIJK UIT DE ST. VENANT-THEORIE [1].

HET BLIJKT ECHTER, DAT DEZE GROOTHEID OOK BIJ DE REISSNER-THEORIE VAN BELANG IS.

$$J = \int_A \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dA \quad (2.14)$$

$$J = \int_A \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] dA + I_0 + 2 \int_A \left(y \frac{\partial \xi}{\partial z} - z \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) dA \quad (2.15)$$

M.B.V. (2.10) EN (2.13) VOLGT:

$$J = I_0 - D. \quad (2.16)$$

LATER WORDT NOG VEELVULDIG GEBRUIK GEMAAKT VAN DIT RESULTAAT.

DEFINITIES:

$$H = \int_A z^4 dA \quad (2.17)$$

$$T = \int_A \xi^2 dA \quad (2.18)$$

$$I_0 = \int_A \kappa^2 dA \quad (2.19)$$

M.B.V. DE VOORGAANDE RESULTATEN EN DEFINITIES IS HET MOGELIJK OM (2.7) TE TRANSFORMEREN NAAR EEN LININTEGRAL.

$$P = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EA \dot{e}^2 + \frac{1}{2} E \pi a'^2 + \frac{1}{8} E H \theta^4 + \frac{1}{2} G D a^2 - G D \theta a + \frac{1}{2} f I_0 \theta^2 + \frac{1}{2} E I_0 \epsilon \theta^2 - M \theta \right] dx \quad (2.20)$$

3. DE EVENNICHTSVERGELIJKINGEN.

3.1. REISSNER-THEORIE

EEN KRITERIUM VOOR DE EVENNICHTSVERGELIJKINGEN IS EEN STATIONAIRE WAARDE VAN DE POTENTIELE ENERGIE.

$$\delta P = 0 \quad (3.1)$$

DE VARIATIE-VARIABLEN ZIJN u , α EN θ .

Mit (2.20) volgt:

$$\delta P = \int_0^l [EA\epsilon \delta \epsilon + EA\alpha' \delta \alpha' + \frac{1}{2} E H \theta^2 \delta \theta + \gamma D a \delta a - \gamma D \theta \delta a - \gamma D a \delta \theta + \gamma I_0 \theta \delta \theta + EI_0 \epsilon \theta \delta \theta + \frac{1}{2} EI_0 \theta^2 \delta \epsilon - M \delta \theta] dx$$

$$\delta P = \int_0^l [EA\epsilon \frac{d\delta u}{dx} + EA\alpha' \frac{d\delta \alpha}{dx} + \frac{1}{2} E H \theta^2 \frac{d\delta \alpha}{dx} + \gamma D a \delta a - \gamma D \theta \delta a - \gamma D a \frac{d\delta \alpha}{dx} + \gamma I_0 \theta \frac{d\delta \alpha}{dx} + EI_0 \epsilon \theta \frac{d\delta \alpha}{dx} + \frac{1}{2} EI_0 \theta^2 \frac{d\delta u}{dx} - M \frac{d\delta \alpha}{dx}] dx \quad (3.2)$$

$$\delta P = - \int_0^l [EA\epsilon' \delta u + EA\alpha'' \delta \alpha + \frac{3}{2} E H \theta^2 \theta' \delta \alpha - \gamma D a \delta a + \gamma D \theta \delta a - \gamma D a' \delta \alpha + \gamma I_0 \theta' \delta \alpha + EI_0 \epsilon \theta' \delta \alpha + EI_0 \epsilon' \theta \delta \alpha + EI_0 \theta \theta' \delta u] dx + [EA\epsilon \delta u + EA\alpha' \delta \alpha + \frac{1}{2} E H \theta^2 \delta \alpha - \gamma D a \delta \alpha + \gamma I_0 \theta \delta \alpha + EI_0 \epsilon \theta \delta \alpha + \frac{1}{2} EI_0 \theta^2 \delta u - M \delta \alpha]_0^l \quad (3.3)$$

DE EIS DAT BIJ EVENNICHT (3.1) GELDIG IS VOOR ONAFHANKELIJKE VARIATIES V. d. VRIJHEIDSGRADEN LEIDT TOT DE EVENNICHTSVERGELIJKINGEN EN DE DYNAMISCHE RANDVOORWAARDEN.

$$EA\epsilon' + EI_0 \theta \theta' = 0 \quad ; \quad 0 < x < l. \\ [EA\epsilon + \frac{1}{2} EI_0 \theta^2] \delta u = 0; \quad x = 0, l. \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma D(a-\theta) - E\pi a'' &= 0 ; 0 < x < l \\ E\pi a' \delta a &= 0 ; x=0, l. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} E H \theta^2 \theta' - \gamma D a' + \gamma I_0 \theta' + E I_0 E' \theta + E I_0 E \theta' &= 0 ; 0 < x < l \\ \left[\frac{1}{2} E H \theta^3 - \gamma D a + \gamma I_0 \theta + E I_0 E \theta - M \right] \delta x &= 0 ; x=l \end{aligned} \quad (3.6)$$

AAN HET EINDE VAN DE VOLGENDE PARAGRAAF WORDEN NOG ENIGE KANTTEKeningen geplaatst t.a.v. deze vergelijkingen.

3.2. ST. VENANT-THEORIE

DE EVENNICHTSVERGELIJKINGEN ZIJN MAKKELIJK AF TE LEIDEN UIT (3.3). VERVANG BIJTOE $a(x)$ DOOR $\theta(x)$.

$$\begin{aligned} \delta P = & - \int_0^l [E A E' \delta u + E \pi \theta'' \delta \theta + \frac{3}{2} E H \theta^2 \theta' \delta x - \gamma D \theta' \delta x + \gamma I_0 \theta' \delta x \\ & + E I_0 E \theta' \delta x + E I_0 E' \theta \delta x + E I_0 \theta \theta' \delta x] dx + [E A E \delta u + \\ & E \pi \theta' \delta \theta + \frac{1}{2} E H \theta^3 \delta x - \gamma D \theta \delta x + \gamma I_0 \theta \delta x + E I_0 E \theta \delta x + \frac{1}{2} E I_0 \theta^2 \delta u \\ & - M \delta x]_0^l \end{aligned} \quad (3.7)$$

HET IS DUIDELIJK DAT HET VARIATIE-PROCES NOG NIET IS VOLTOOID.

$$\begin{aligned} \delta P = & - \int_0^l [E A E' \delta u - E \pi \theta'' \delta x + \frac{3}{2} E H \theta^2 \theta' \delta x - \gamma D \theta' \delta x + \gamma I_0 \theta' \delta x \\ & + E I_0 E \theta' \delta x + E I_0 E' \theta \delta x + E I_0 \theta \theta' \delta x] dx + [- E \pi \theta'' \delta x + \\ & E A E \delta u + E \pi \theta' \delta \theta + \frac{1}{2} E H \theta^3 \delta x - \gamma D \theta \delta x + \gamma I_0 \theta \delta x + E I_0 E \theta \delta x + \\ & \frac{1}{2} E I_0 \theta^2 \delta u - M \delta x]_0^l \end{aligned} \quad (3.8)$$

UIT (3.8) VOLGEN WEER DE EVENNICHTSVERGELIJKINGEN MET DE BIJBEHORENDE DYNAMISCHE RANDVORWAARDEN.

$$EA\varepsilon' + EI_0\theta\theta' = 0 \quad ; \quad 0 < x < l. \quad (3.9)$$

$$[EA\varepsilon + \frac{1}{2}EI_0\theta^2] \delta u = 0 \quad ; \quad x = 0, l.$$

$$-E\theta'''' + \frac{3}{2}E\theta^2\theta' + GJ\theta' + EI_0\varepsilon\theta' + EI_0\varepsilon'\theta = 0 \quad ; \quad 0 < x < l. \quad (3.10)$$

$$[-E\theta'' + \frac{1}{2}E\theta^2 + GJ\theta + EI_0\varepsilon\theta - M] \delta \alpha = 0 \quad ; \quad x = l.$$

$$E\theta'\delta\theta = 0 \quad ; \quad x = 0, l. \quad (3.11)$$

HET STELSEL DIFFERENTIALVERGELIJKINGEN IS ZOMEL BIJ DE REISSNER-THEORIE ALS BIJ DE ST. VENANT-THEORIE NIET-LINEAIR. INDIEN DE NIET-LINEAIRE TERMEN VERWAARLOOSD WORDEN, RESULTEREN BEIDE STELSLS IN EEN AANTAL LINEAIRE DIFFERENTIALVERGELIJKINGEN MET DYNAMISCHE RANDVOORWAARDEN.

AAN ELKE SPECIFIEKE SITUATIE ZIJN EEN AANTAL KINEMATISCHE EN DYNAMISCHE RANDVOORWAARDEN GEKOPPELD. IN DE VOLGENDE HOOFDSTUKKEN WORDEN ENKELE SPECIFIEKE GEVALLEN NADER BEKEKEN.

4. VRIJE WELVIJG.

4.1. ST. VENANT-THEORIE.

Met vrije welviing wordt bedoeld dat de balk aan beide uiteinden vrij kan welven.

De kineatische randvoorwaarden zijn nu bekend.

$$\alpha(0) = 0 \quad (4.1)$$

Mit de evenwichtsvergelijkingen en de bijbehorende dynamische randvoorwaarden (3.9) t.m. (3.11) volgt dan:

$$E = \frac{-I_0}{2A} \theta^2 \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.2)$$

$$M = \gamma \theta + \frac{1}{2} E H \theta^3 + E I_0 \theta - E \pi \theta'' \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.3)$$

$$\theta'(0) = \theta'(l) = 0. \quad (4.4)$$

Elimineren van E uit de relatie voor het torsiemoment geeft:

$$M = \gamma \theta + \frac{1}{2} E \left(H - \frac{I_0^2}{A} \right) \theta^3 - E \pi \theta'' \quad (4.5)$$

In de lineaire theorie geldt voor het moment:

$$M = \gamma \theta - E \pi \theta'' \quad (4.6)$$

In appendix B is de algemene oplossing bepaald.

$$\theta(x) = \frac{M}{\gamma} + C \cosh \mu x + D \sinh \mu x \quad ; \quad \mu^2 = \frac{\gamma}{E \pi} \quad (4.7)$$

M.b.v. de randvoorwaarden (4.4) volgt:

$$\theta(x) = \frac{M}{\gamma} \quad (4.8)$$

DE SPECIFIEKE HOEKVERDRAAIING IS DUS KONSTANT. FYSISCH GEZIEN IS DIT RESULTAAT TRIVIAAL. BIJ DE NIET-LINEAIRE THEORIE IS HET VEEL MOEILIJKER OM MATHEMATISCH TE BENIJZEN DAT DE SPECIFIEKE WRINGHOEK $\theta(x)$ KONSTANT IS. IN APPENDIX G IS EEN VOLLEDIG BENIJS OPGEVONEN.

UIT (4.5) VOLGT DAN:

$$M = GJ\theta + \frac{1}{2}E\left(H - \frac{I_0^2}{A}\right)\theta^3 \quad (4.9)$$

DE OPLOSSING VAN DIT DERDEGRADS POLYNOM IS EXACT TE BEPALEN (APPENDIX D). IN DE PRAKTIJK IS DIT ECHTER NIET NOODZAKELIJK.

STEL:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1 + \frac{9G^3\theta^3}{27E\left(H - \frac{I_0^2}{A}\right)M^2}}{27E\left(H - \frac{I_0^2}{A}\right)M^2}} \quad (4.10)$$

VOOR θ GELDT DAN:

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{M}{E\left(H - \frac{I_0^2}{A}\right)}} \left[\sqrt[3]{1 + \varphi} - \sqrt[3]{-1 + \varphi} \right] \quad (4.11)$$

4.2. DE REISSNER-THEORIE.

UIT DE VERGELIJKINGEN (3.4), (3.5) EN (3.6) VOLGT:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{I_0}{A} \theta^2 \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.12)$$

$$GJ(a - \theta) - EI_0 a'' = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.13)$$

$$M = GJ_0 \theta - GJ a + \frac{1}{2} E H \theta^3 + E I_0 \theta \quad ; \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.14)$$

$$a'(0) = a'(l) = 0 \quad (4.15)$$

NEMEN WIJ NEER ALLEEN DE LINEAIRE TERMEN, DAN VOLGT:

$$GD(a-\theta) - EAa'' = 0 \quad (4.16)$$

$$M = GI_0\theta - GDa \quad (4.17)$$

$$a'(0) = a'(l) = 0 \quad (4.18)$$

ELIMINATIE VAN DE SPECIFIEKE WRINGHOEK GEEFT:

$$M = GI_0a - \frac{EI_0}{D} a'' \quad (4.19)$$

DEZE DIFFERENTIAALVERGELIJKING IS VAN HETZELFDE TYPE ALS (4.6). OOK DE RAND-VOORWAARDEN ZIJN PRECIES EENDER. DE MODULUSFUNKTIE IS DUS EEN KONSTANTE.

$$a(x) = \frac{M}{GI_0} \quad (4.20)$$

UIT (4.16) VOLGT:

$$\theta = a = \frac{M}{GI_0} \quad (4.21)$$

BEIDE MODELLEN GEVEN N.B.T. DE LINEAIRE THEORIE DUS DEZELFDE OPLOSSING

UIT (4.12), (4.13) EN (4.14) VOLGT:

$$M = GI_0\theta + \frac{1}{2}E(H - \frac{I_0^2}{A})\theta^3 - EAa'' \quad (4.22)$$

HET IS TE BEMIJZEN DAT DE TWEEDE AFGELEIDE V.D. MODULUSFUNKTIE $a(x)$ GELIJK AAN NUL MOET ZIJN. (ZIE APPENDIX E). UIT (4.13) EN (4.22) VOLGT DAN:

$$a = \theta = \text{KONSTANT.} \quad (4.23)$$

$$M = GI_0\theta + \frac{1}{2}E(H - \frac{I_0^2}{A})\theta^3 \quad (4.24)$$

ALLE VOORGAANDE RESULTATEN ZIJN MIN OF MEER TRIVIAAL.

DE TWEE MODELLEN LEVEREN BIJ VRIJE WELVING DUS IDENTIEKE OPLOSSINGEN.

5. EENZIJDIG VERHINDERDE WELVING

5.1. ST. VENANT-THEORIE

Bij DE EENZIJDIG VERHINDERDE WELVING WORDT EEN UITEINDE V.D. BALK ($x=0$) ZODANIG VERBONDEN MET DE VASTE WERELD, DAT EEN AXIALE VERPLAATSING TER PLEKKE V.D. VERBINDING ONMOGELIJK IS. HET ANDERE UITEINDE KAN MEER VRIJ WELVEN.

DE KINEMATISCHE RANDVOORWAARDEN ZIJN IN DIT GEVAL:

$$\alpha(0) = \theta(0) = u(0) = 0 \quad (5.1)$$

DE LINEAIRE VERGELIJKINGEN EN DE DYNAMISCHE RANDVOORWAARDEN VOLGEN MEER UIT (3.9), (3.10) EN (3.11).

$$M = \frac{EI}{R} \theta - EI \theta'' \quad (5.2)$$

$$\theta'(l) = 0$$

DE ALGEMENE OPLOSSING IS IN APPENDIX B BEPAALD.

$$\theta(x) = \frac{M}{\frac{EI}{R}} + C \cosh \mu x + D \sinh \mu x \quad ; \quad \mu^2 = \frac{EI}{EI} \quad (5.3)$$

DE KOEFFICIENTEN C EN D WORDEN N.B.V. DE RANDVOORWAARDEN BEPAALD.

$$\theta(x) = \frac{M}{\frac{EI}{R}} \left[1 - \cosh \mu x + \tanh \mu l \sinh \mu x \right] \quad (5.4)$$

VOOR DE NIET-LINEAIRE THEORIE GELDT:

$$E = -\frac{I_0}{2A} \theta^2 \quad 0 \leq x \leq l \quad (5.5)$$

$$M = \frac{EI}{R} \theta + \frac{1}{2} E I_0 \theta^3 + E I_0 E \theta - EI \theta'' = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \quad (5.6)$$

$$u(0) = \theta(0) = \theta'(l) = 0 \quad (5.7)$$

OF:

$$M = \frac{EI}{R} \theta + \frac{1}{2} E \left(H - \frac{I_0^2}{A} \right) \theta^3 - EI \theta'' \quad (5.8)$$

$$\theta(0) = \theta'(l) = 0$$

HET IS EVIDENT DAT EEN ANALYTISCHE OPLOSSING VAN DEZE DIFFERENTIALVERGELIJ-
KINGEN NAHENDIG ONMOGELIJK IS.

5.2. REISSNER-THEORIE

DE EVENWICHTSVERGELIJKINGEN VOLGEN NEER UIT (3.4), (3.5) EN (3.6).

$$\zeta D(a - \theta) - E I a'' = 0 \quad (5.9)$$

$$M = \zeta I_0 \theta - \zeta D a \quad (5.10)$$

$$a(0) = a'(l) = 0. \quad (5.11)$$

VOOR DE MODULUSFUNKTIE GELDT:

$$a(x) = -\frac{M}{\zeta D} + \frac{I_0}{D} \theta \quad (5.12)$$

ER IS DUS EEN EENDUIDIG VERBAND TUSSEN DE MODULUSFUNKTIE EN DE SPECIFIE-
KE WRINGHOEK. SUBSTITUTIE VAN (5.12) IN (5.9) GEEFT:

$$M = \zeta \zeta a - E I \frac{I_0}{D} a'' \quad (5.13)$$

$$a(0) = a'(l) = 0 \quad (5.14)$$

ELIMINEREN VAN $a(x)$ UIT HET STELSEL GEEFT:

$$M = \zeta \zeta \theta - E I \frac{I_0}{D} \theta'' \quad (5.15)$$

$$\theta(0) = \frac{M}{\zeta I_0} ; \theta'(l) = 0 \quad (5.16)$$

MERK OP DAT HET VERSCHIL TUSSEN $a(x)$ EN $\theta(x)$ ALLEEN AFHANKELIJK IS VAN
EEN RANDWAARDE.

T.O.V. DE ST. VENANT-THEORIE BLIJFT OOK DE FAKTOR $\frac{I_0}{D}$ VAN BELANG TE ZIJN.

DE ALGERENE OPLOSSING VAN (5.15) IS REEDS EERDER AAN DE ORDE GESTELD.

(Appendix B).

Mit (5.13) EN (5.14) volgt dan:

$$a(x) = \frac{M}{\gamma \gamma} \left[1 - \cosh \mu x + \tanh \mu l \sinh \mu x \right]; \quad \mu^2 = \frac{\gamma \gamma D}{EI I_0} \quad (5.17)$$

Mit (5.15) EN (5.16) volgt:

$$\theta(x) = \frac{M}{\gamma \gamma} \left[1 - \frac{D}{I_0} \cosh \mu x + \frac{D}{I_0} \tanh \mu l \sinh \mu x \right]; \quad \mu^2 = \frac{\gamma \gamma D}{EI I_0} \quad (5.18)$$

DE NIET-LINEAIRE EVENWICHTSVERGELIJKINGEN EN DE BIJBEHOORENDE RANDVOORWAARDEN

zijn:

$$E = -\frac{I_0}{2A} \theta^2 \quad (5.19)$$

$$\gamma D(a - \theta) - E \theta a'' = 0 \quad (5.20)$$

$$M = \gamma I_0 \theta - \gamma D a + \frac{1}{2} E \theta^3 + EI_0 \epsilon \theta \quad (5.21)$$

$$a(0) = a'(l) = 0 \quad (5.22)$$

6. VERHINDERDE WELVING

6.1. ST. VENANT-THEORIE

DE BALK IS NU AAN TWEE ZIJDEN VOLLEDIG INGEKLEND. DE KINEMATISCHE RANDVOORWAARDEN ZIJN DAN:

$$\begin{aligned} u(0) = u(l) = 0 \\ \theta(0) = \theta(l) = 0 \\ \alpha(0) = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

DE LINEAIRE VERGELIJKING (ZIE 3.9 t.n. 3.99) IS:

$$M = \frac{EI}{l} \theta - EI \theta'' \quad (6.2)$$

VOOR DE OPLOSSING DIE AAN DE RANDVOORWAARDEN VOLDOET GELDT:

$$\theta(x) = \frac{M}{EI} \left[1 - \cosh \mu x + \frac{\cosh \mu l - 1}{\sinh \mu l} \sinh \mu x \right]; \quad \mu^2 = \frac{EI}{EI} \quad (6.3)$$

DE NIET-LINEAIRE VERGELIJKINGEN ZIJN:

$$AE' + I_0 \theta \theta' = 0 \quad (6.4)$$

$$M = \frac{EI}{l} \theta + \frac{1}{2} EI \theta^3 + EI_0 \theta \theta' - EI \theta'' \quad (6.5)$$

6.2. PREISSNER-THEORIE

DE KINEMATISCHE RANDVOORWAARDEN ZIJN:

$$\begin{aligned} u(0) = u(l) = 0 \\ a(0) = a(l) = 0 \\ \alpha(0) = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

DE LINEAIRE VERGELIJKINGEN ZIJN NEER:

$$gD(a-\theta) - EIa'' = 0 \quad (6.7)$$

$$M = gI_0\theta - gDa \quad (6.8)$$

Voor de specifieke wringhoek volgt:

$$M = gI_0\theta - EI \frac{I_0}{D} \theta'' \quad (6.9)$$

$$\theta(0) = \theta(l) = \frac{M}{gI_0} \quad (6.10)$$

$$\theta(x) = \frac{M}{gI_0} \left[1 - \frac{D}{I_0} \cosh \mu x + \frac{D}{I_0} \frac{\cosh \mu l - 1}{\sinh \mu l} \sinh \mu x \right]; \mu^2 = \frac{gI_0 D}{EI I_0} \quad (6.11)$$

Voor de modulusfunctie volgt:

$$M = gI_0 a - EI \frac{I_0}{D} a'' \quad (6.12)$$

$$a(0) = a(l) = 0. \quad (6.13)$$

$$a(x) = \frac{M}{gI_0} \left[1 - \cosh \mu x + \frac{\cosh \mu l - 1}{\sinh \mu l} \sinh \mu x \right]; \mu^2 = \frac{gI_0 D}{EI I_0} \quad (6.14)$$

Het is evident dat de faktor $\frac{D}{I_0}$ meer een belangrijke rol speelt.

De niet-lineaire vergelijkingen volgen meer uit (3.4) en (3.6).

$$AE' + I_0 \theta \theta' = 0 \quad (6.15)$$

$$gD(a-\theta) - EIa'' = 0 \quad (6.16)$$

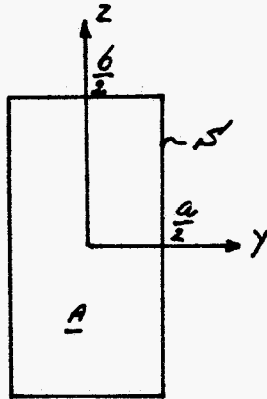
$$M = gI_0\theta - gDa + \frac{1}{2} E H \theta^3 + EI_0 E \theta \quad (6.17)$$

De lineaire differentiaalvergelijkingen zijn voor drie typische situaties opgelost. De niet-lineaire differentiaalvergelijkingen worden numeriek opgelost. In de volgende hoofdstukken wordt de theorie toegepast bij enkele karakteristieke dwarsdoorsneden.

4. RECHTHOEKIGE DOORSNEDE

4.1. GEOMETRISCHE GROOTHEDEN.

DEZE DOORSNEDE BEHOORT TOT DE KLASSE VAN MASSIEVE DOORSNEDEN EN IS REEDS IN HET VERLEDEN UITGEBREIDT ONDERZOEKT.



FIGUUR 4.

DE OORSPRONG V.V. ASSENSTELSEL LIGT, ZOALS REEDS EERDER VERMELD IS, IN HET ZWAARTEPUNT. UIT FIGUUR 4 VOLGT VOOR HET POLAIR TRAGHEIDSMOMENT:

$$I_0 = \int_A (y^2 + z^2) dA$$

$$I_0 = \frac{1}{12} [ba^3 + ab^3] \quad (7.1)$$

HET POLAIR TRAGHEIDSMOMENT BESTAAT DUS UIT DE SOM VAN DE TRAGHEIDSMOMENTEN VOOR BUIGING.

VOOR DE NIET-LINEAIRE TORSIEGROOTHEID H GELDT:

$$H = \int_A (y^2 + z^2)^2 dA$$

$$H = \frac{ba^5 + ab^5}{80} + \frac{a^3b^3}{72} \quad (7.2)$$

BIJ DE VRIJE HELVING IS NOG DE KOEFFICIENT $(H - \frac{I_0^2}{A})$ VAN BELANG.

$$\frac{H - I_0^2}{A} = \frac{ab(a^4 + b^4)}{180} \quad (7.3)$$

MERK OP DAT DEZE KOEFFICIENT INDERDAAD ALTIJD POSITIEF IS.

VOOR HET BEPALEN VAN DE TORSIE-INTEGRAAL EN DE WELVINGSIKTEGRAAL MOET EERST DE WELVINGSFUNKTIE BEKEND ZIJN. HET BLIJKT DAT DE OPLOSSING EEN ONEINDIGE REEKS IS. MEN KAN OOK EEN BENADERING VOOR DE WELVINGSFUNKTIE KIEZEN. IN APPENDIX F WORDT DIT VERDER UITGEWERKT.

$$y = \frac{1}{3} b a^3 \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \right] \quad (7.4)$$

$$T = \left[\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right]^2 \frac{a^3 b^3}{144} \quad (7.5)$$

INDIEN DE DOORSNEDEN SLANK IS, DIT WIL ZEGGEN $b/a \gg 1$, ZIJN DEZE WAARDEN NAFFENOMER EXAKT.

IN APPENDIX G WORDEN DE WELVINGSFUNKTIE, TORSIE-INTEGRAAL EN WELVINGSIKTEGRAAL EXAKT BEPALD.

$$y = \frac{1}{3} b a^3 \left[1 - \frac{6}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh \frac{(n+1/2)\pi b}{a}}{a} \cdot \frac{1}{(n+1/2)^5} \right] \quad (7.6)$$

$$\frac{T}{a^5 b} = \frac{b^2}{144 a^2} + \frac{16}{\pi^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \left[-2 + \frac{4a}{(2n+1)\pi b} \frac{\tanh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}{2a} \right. \\ \left. - \frac{a}{(2n+1)\pi b} \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi b}{a}}{\cosh^2 \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right] \quad (7.7)$$

IN DE TABEL ZIJN NOG ENIGE WAARDEN GEGEVEN.

$\frac{b}{a}$	$\frac{\gamma}{ba^3}$	$\frac{\eta}{ba^3}$
1	0,941	$0,934 \cdot 10^{-3}$
2	0,229	$0,902 \cdot 10^{-1}$
4	0,201	$0,857 \cdot 10^{-1}$
6	0,298	0,222
8	0,307	0,664
10	0,312	$0,275 \cdot 10$
∞	0,333	

TABEL 1.

$$\gamma = kba^3; \quad 0,941 < k < 0,333.$$

7.2. VRIJE WELVING.

7.2.1. PLASTISCHE DEFORMATIE

OF EEN SPANNINGSTOESTAND AL OF NIET PLASTISCHE DEFORMATIE VERDOORZAAKT, KAN MEN KONTROLEREN AAN DE HAND VAN EEN VLOEIKRITERIUM. BIJ VRIJE WELVING IS HET TOELAATBAAR OM DE AXIALE SPANNING σ_{xx} TE VERNAARLOZEN. HET VLOEIKRITERIUM VOLGENS VAN MISES WORDT DAN:

$$\frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2} = \tau_M \quad (7.8)$$

DE MAXIMALE SCHUIFSpanning is in appendix 5 bepaald. In de onderstaande tabel zijn een aantal numerieke waarden opgesomd.

b/a	1	1,5	2	4	5	6	8
τ_M 500	0,672	0,847	0,930	0,997	0,999	1,000	1,000

TABEL 2.

$$\tau_H = q \gamma \theta a ; 0,672 < q < 1$$

M.b.v. (7.8) volgt:

$$\theta_{pl} = \frac{\sigma_v}{q a \gamma \sqrt{s}} \quad (7.9)$$

7.2.2. NIET-LINEAIR GEDRAG

In het geval van vrije wending geldt:

$$M = \gamma \gamma \theta + \frac{1}{2} E \left(H - \frac{I_0^2}{A} \right) \theta^3$$

M.b.v. de resultaten uit de voorgaande paragrafen volgt:

$$M = \gamma k b a^3 \frac{\tau_m}{\gamma q a} + E \cdot \frac{ab(a^2 + b^2)}{360} \frac{1}{q^3} \left[\frac{\tau_H}{\gamma a} \right]^3$$

$$\frac{M}{\frac{k}{q} \tau_H b a^2} = 1 + \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{k q^2} \cdot \frac{E}{\gamma} \left(\frac{\tau_H}{\gamma} \right)^2 \left[1 + \frac{b^4}{a^4} \right] \quad (7.10)$$

Door middel van afschatten kan men de orde grootte v.d. niet-lineaire term bepalen.

$$\frac{1}{k q^2} < 10^{-5}$$

$$\frac{E}{\gamma} < 3$$

$$\frac{\tau_H}{\gamma} \approx 10^{-2}$$

Dan volgt voor het moment:

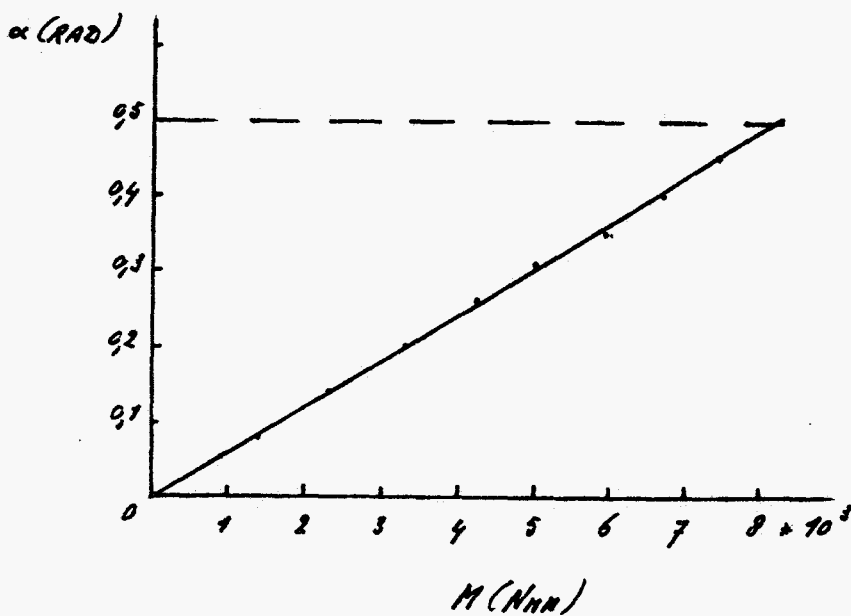
$$\frac{M}{\frac{k}{q} \tau_H b a^2} = 1 + 0,3 \cdot 10^{-6} \left[1 + \frac{b^4}{a^4} \right] \quad (7.11)$$

DE BIJDRAGE V.D. NIET-LINEAIRE TERM ZAL I.H.A. GERING ZIJN. DIT BETEKENT DAT MEN IN DE PRAKTIJK MEESTAL DE LINEAIRE THEORIE MOET GEBRUIKEN.

$$M = 970$$

(7.12).

IN FIGUUR 5 ZIJN EEN AANTAL MEETWAARDEN INGETEKEND.



$$b = 20.1 \text{ mm}$$

$$a = 3.2 \text{ ''}$$

$$L = 310 \text{ ''}$$

$$\theta_{pL} = 1,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{RAD}}{\text{mm}}$$

$$C_{0,2} = 220 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

FIGUUR 5.

BIJ DE BOVENSTAANDE FIGUUR HOREN NOG DE VOLGENDE GEGEVENS:

$$f = 25300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$E = 65300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$A = 64.32 \text{ mm}^2$$

$$I_0 = 2220 \text{ mm}^4$$

$$H = 135012 \text{ mm}^6$$

$$J = 997,6 \text{ mm}^4$$

$$r = 1657 \text{ mm}^6$$

7.3. VERHINDERDE WELVING

IN DE VORIGE PARAGRAAF IS AFGELEID DAT DE NIET-LINEAIRE TERM BIJ VRIJE WELVING NIET VAN BELANG IS. HETZEELDE GELDT BIJ DE EENZYDIG VERHINDERDE WELVING, HETGEEN RECHTSTREEKS VOLGT UIT DE VERGELIJKINGEN (5.8) EN (5.29). BIJ DE VERHINDERDE WELVING MOET MEN BEDENKEN DAT DE SPECIFIEKE HOEKVERDRAAIING VEEL KLEINER IS DAN BIJ EEN VRIJ WELVENDE BALK, ZODAT OOK DAN ALLEEN NAAR DE LINEAIRE TERMEN VAN BELANG ZIJN (ZIE (6.5) EN (6.17)). DE NIET-LINEAIRE STELSLS ZIJN NUMERIEK OP-GELOST. (FIGUUR 6). HIERVOOR ZIJN DE GEFEVENS UIT DE VORIGE PARAGRAAF GEBRUIKT.

HET VERSCHIL MET DE LINEAIRE THEORIE BLIJKT NIET TE ZIJN.

DE GETEKENDE FUNKTIES VERANDEREN STERK AAN DE VITEINDEN. DIT IS UITERAARD HET GEVOLG V.D. WELVINGSVERHINDERING. DE LENGTE VAN DEZE ZONE WORDT AANGEWID MET L_1 . UIT (6.3), (6.11) EN (6.14) BLIJKT DAT DE FAKTOR $\frac{E\Gamma}{\gamma\gamma}$ VERANTWOORDELIJK IS VOOR DE DISKREPANTIE TUSSEN DE KLASSIEKE THEORIE EN DE REISSNER-THEORIE.

DE LENGTE L_1 KAN MEN SCHATTEN. NEMEN WIJ (6.2) ALS UITGANGSPUNT, DAN VOLGT:

$$M \approx \gamma\gamma\theta \left[1 + \frac{E\Gamma}{\gamma\gamma} \frac{1}{x^2} \right] \quad (7.13)$$

$$M \approx \gamma\gamma\theta [1 + \delta]$$

DELTA IS DE RELATIEVE FOUT T.O.V. DE STATIONAIRE WAARDE. STEL DAT DE RELATIEVE FOUT 5% MOET ZIJN, DAN GELDT:

$$\frac{E\Gamma}{\gamma\gamma} \frac{1}{x^2} \approx 0,05$$

$$x \approx \sqrt{20} \cdot \sqrt{\frac{E\Gamma}{\gamma\gamma}} \quad (7.14)$$

VOOR DE DOORSNEDEN UIT FIGUUR 6 GELDT:

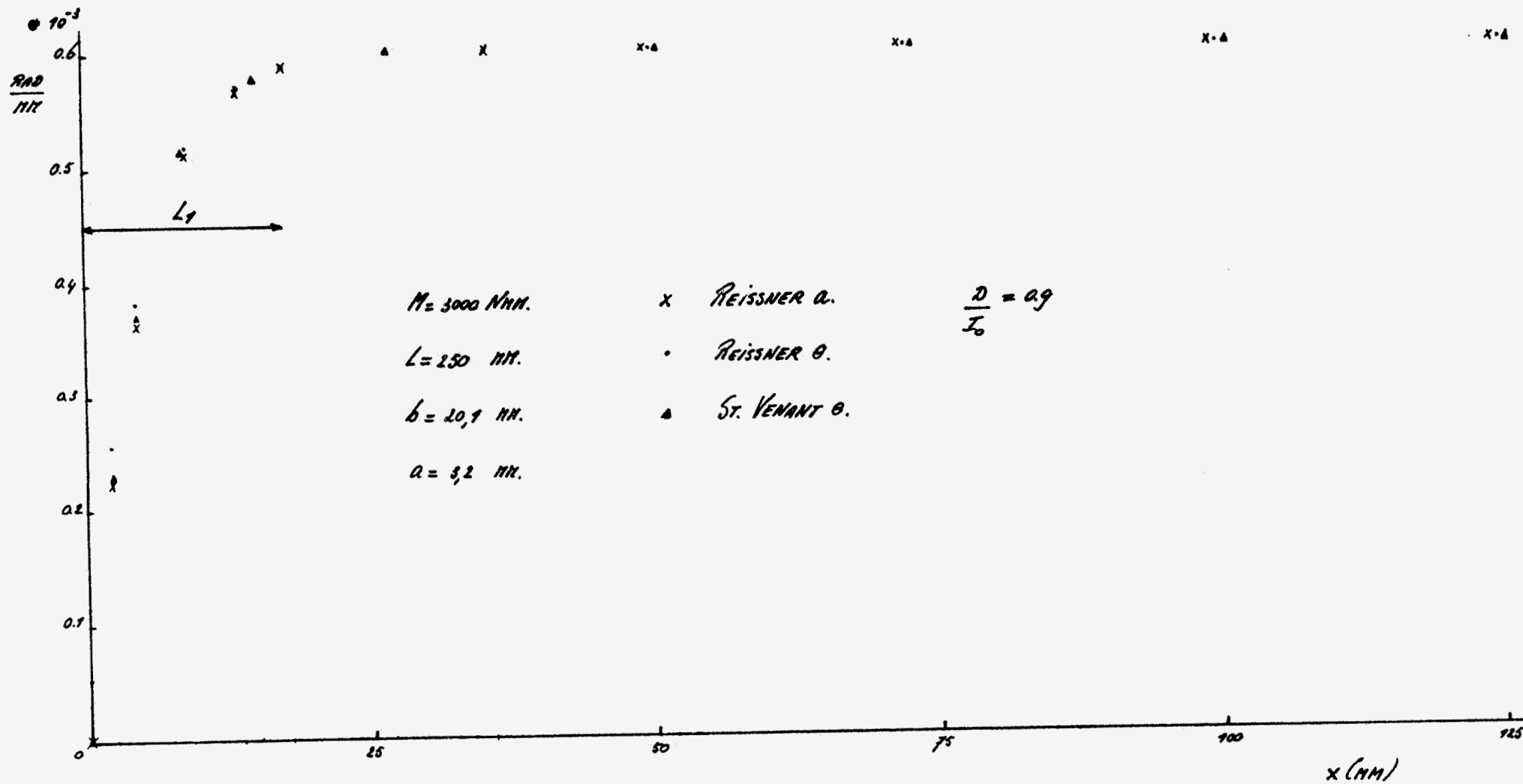


FIGURE 6

$$x \approx 21 \text{ mm.}$$

Na 15 mm is $\theta(x)$ al nagenoeg stationair.

Voor (6.92) geldt:

$$x \approx \sqrt{\frac{E\pi}{g\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{I_0}{D}} \cdot \sqrt{20} \quad (7.15)$$

Voor de doorsnede uit Figuur 6 geldt:

$$x \approx 22 \text{ mm.}$$

De analyse van (6.9) lijkt enigszins af omdat de randvoorwaarden inhomogeen zijn.

Voor de tweede afgeleide volgt:

$$\theta''(x) \approx \frac{\theta(0) - \theta(x)}{x^2}$$

Substitutie in (6.9) geeft:

$$M \approx g\gamma\theta \left[1 + \frac{E\pi}{g\gamma} \frac{I_0}{D} \frac{1 - \frac{\theta(0)}{\theta(x)}}{x^2} \right]$$

Als de stationaire waarde wordt bereikt, geldt:

$$\theta(x) = \frac{M}{g\gamma}$$

M.b.v. (6.90) volgt dan:

$$M \approx g\gamma\theta \left(1 + \frac{E\pi \cdot 1}{g\gamma x^2} \right)$$

De lengte L_1 wordt dan weer:

$$x \approx \sqrt{\frac{E\pi}{g\gamma}} \sqrt{20} \quad (7.16)$$

M.b.v. (6.7) kunnen wij ook nog schatten wanneer de modulusfunctie en de specifieke hoekverdraaiing gelijk zijn.

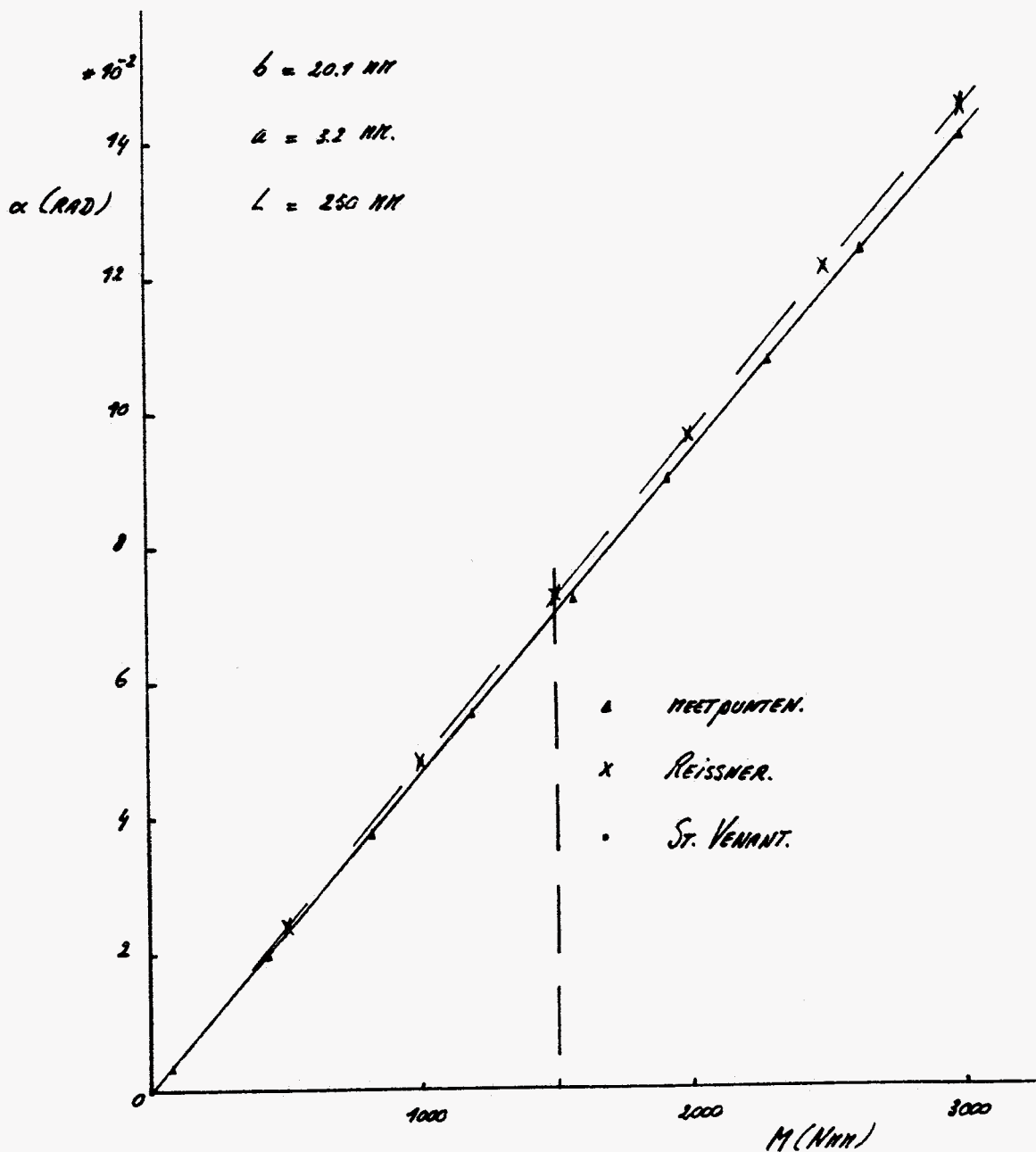
$$x \approx \sqrt{\frac{EP}{\rho D}} \sqrt{20} \quad (7.97)$$

Voor Figuur 6 geldt:

$$x \approx 6,5 \text{ mm. (In werkelijkheid 4 mm)}$$

De relaties (7.94) t.m. (7.97) bieden de mogelijkheid om redelijk snel inzicht te verkrijgen over het verloop van de diverse functies.

In Figuur 7 is de hoekverdraaiing op $x=L$ versus het moment uitgezet.



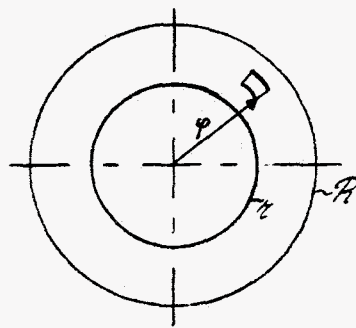
FIGUUR 7

BEIDE MOELLEN LEVEREN HETZEELDE RESULTAAT. DE AFWIJKING T.O.V. DE GENETEN PUNTEN
IS MAXIMAAL 3%. DE VLOEIGRENS IS DAN WEL AL RUIM GEDASSEERD.

8. Ronde buis.

8.1. GEOMETRISCHE GROOTHEDEN.

DE buis zal NIET WELVEN, ZODAT DEZE DOORSNEDE EIGENLIJK NIET INTERESSANT IS. EEN ANDER PUNT IS HET NIET-LINEAIRE GEDRAG VAN DE buis. VOOR EEN ANALYSE MOETEN MEER ENKELE GEOMETRISCHE GROOTHEDEN BEDAARD WORDEN.



$$r \leq \varphi \leq R$$

$$r = \frac{r}{R}$$

FIGUUR 8.

VOOR HET POLAIR TRAGHEIDSMOMENT GELDT WEER:

$$I_0 = \int_A \varphi^2 dA$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} R^4 (1 - r^4) \quad (8.1)$$

VOOR DE NIET-LINEAIRE TORSIEGROOTHEID H GELDT:

$$H = \int_A \varphi^4 dA$$

$$H = \frac{\pi}{3} R^6 (1 - r^6) \quad (8.2)$$

8.2. PLASTISCHE DEFORMATIE

VOOR DE SCHUIFSPANNINGEN GELDT:

$$\sigma_{xy} = -\gamma \theta z \quad (8.3)$$

$$\sigma_{xz} = \gamma \theta y \quad (8.4)$$

VOOR DE MAXIMALE SCHUIFSpanning GELDT:

$$\tau = \gamma \theta R. \quad (8.5)$$

HET VLOEKriterium VAN VAN MISES LUIDT:

$$\tau = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \quad (8.6)$$

HET MATERIAAL ZAL PLASTISCH DEFORMEREN INDIEN (8.5) GELIJK WORDT AAN (8.6).

$$\theta_{pl} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3} \gamma R} \quad (8.7)$$

8.3. NIET-LINEAIR GEDRAG.

DE EVENWICHTSVERGELIJKING VOLGT UIT (6.5) EN (6.17).

$$M = \gamma I_0 \theta + \frac{1}{2} E H \theta^3 + E I_0 \epsilon \theta \quad (8.8)$$

$$M = \gamma I_0 \theta \left(1 + \frac{E \epsilon}{\gamma}\right) + \frac{1}{2} E H \theta^3$$

DE REK VAN DE BALKAS IS KLEIN T.O.V. EEN.

$$M = \gamma I_0 \theta + \frac{1}{2} E H \theta^3 \quad (8.9)$$

SUBSTITUTIE VAN (8.1), (8.2) EN (8.7) GEEFT:

$$\frac{\sqrt{3} M \gamma R}{\sigma_v} = \frac{\pi}{2} \gamma R^4 (1 - \epsilon^4) + \frac{\pi}{6} E R^6 (1 - \epsilon^6) \cdot \left[\frac{\sigma_v}{\sqrt{3} \gamma R} \right]^2$$

$$\frac{2 \sqrt{3} M}{\sigma_v \pi R^3} = (1 - \epsilon^4) + \frac{E}{3 \gamma} (1 - \epsilon^6) \left(\frac{\sigma_v}{\gamma} \right)^2$$

$$\frac{2\sqrt{3}M}{\sigma_v \pi R^3 (1-\epsilon^4)} = 1 + \frac{E}{9\zeta} \left[1 + \frac{\epsilon^4}{(1+\epsilon^2)} \right] \left(\frac{\sigma_v}{\zeta} \right)^2 \quad (8.10)$$

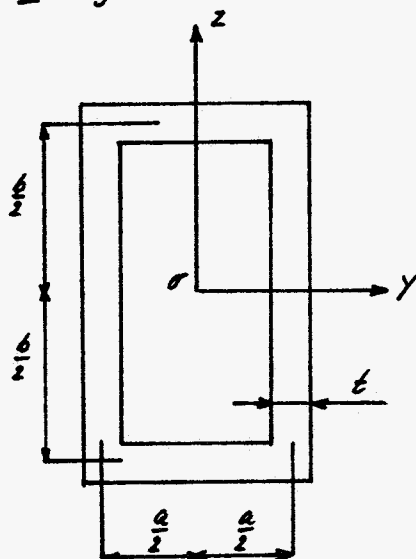
HET IS DUIDELIJK DAT DE NIET-LINEAIRE TERM VOOR GEEN ENKELE WAARDE VAN ϵ EEN NOemensWAARDIGE bijDRAGE LEVERT.

EEN KLEINE WAARDE VAN ϵ KOMT OVEREEN MET EEN MASSIEVE DOORSNEDE. EEN RELATIEF GROTE WAARDE VAN ϵ HOORT BIJ EEN DUNNANDIGE BUIS. SCHIJNBAAR ZIJN DUNNANDIGE GESLOTEN DOORSNEDEN BERMATE STIJF DAT DE LINEAIRE THEORIE GELDIG BLIJFT. HIERVAN WORDT IN HET VOLGENDE HOOFDSTUK GEBROUK GEMAAKT.

9. HET KOKERPROFIEL.

9.1. GEOMETRISCHE GROOTHEDEN

DE KOKER IS GETEKEND IN FIGUUR 9.



FIGUUR 9.

$$A = 2t(a+b) \quad (9.1)$$

$$I_0 = \int_A (y^2 + z^2) dA$$

$$I_0 = \frac{1}{12} [(a+t)(b+t)^3 - (a-t)(b-t)^3 + (b+t)(a+t)^3 - (b-t)(a-t)^3] \quad (9.2)$$

$$H = \int_A (y^4 + z^4 + 2y^2z^2) dA$$

$$H = H_1 + H_2 + H_3 \quad (9.3)$$

$$H_1 = \int_A y^4 dA$$

$$H_1 = \frac{1}{80} [(a+t)^5(b+t) - (a-t)^5(b-t)] \quad (9.4)$$

$$H_2 = \int_A z^4 dA$$

$$H_2 = \frac{1}{80} [(b+t)^5(a+t) - (b-t)^5(a-t)] \quad (9.5)$$

$$H_3 = 2 \int_A y^2 z^2 dA$$

$$H_3 = \frac{1}{72} [(a+t)^3 (b+t)^3 - (a-t)^3 (b-t)^3] \quad (9.6)$$

Wij beperken ons tot dunwandige kokers.

$$t \ll a$$

$$t \ll b$$

De TORSIE-INTEGRAAL EN DE WELVINGSINTEGRAAL VAN DIT DUNWANDIGE PROFIEL WORDEN UITVOERIG BEHANDELD IN []

$$J = \frac{2t^3}{3} (a+b) + \frac{2(ab)^2 t}{(a+b)} \quad (9.7)$$

$$I = \frac{a^2 b^2 (b-a)^2 t}{24(a+b)} ; b \neq a \quad (9.8)$$

9.2. VRIJE WELVING.

9.2.1. PLASTISCHE DEFORMATIE

M.B.V. DE WELVINGSFUNKTIE [9] KAN MEN DE MAXIMALE SCHUIFSpanning BEPALEN.

$$\tau = g\theta \left(\frac{ba}{a+b} + t \right) \quad (9.9)$$

M.B.V. HET VLOEIKRITERIUM VAN VON MISES VOLGT:

$$\theta_{pl} = \frac{\sigma_v}{g\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{ba}{b+a} + t} \quad (9.10)$$

9.2.2. NIEt-LINEAIR GEDERF.

IN PARAGRAF 8.3 IS REEDS OPGEMERKT DAT BIJ DUNWANDIG GESLOTEN DOORSNEDEN DE LINEAIRE THEORIE NAH WORDEN TOEGEPAST.

IN HET GEVAL VAN VRIJE WELVING GELDT VOOR HET MOMENT:

$$M = GJ\theta + \frac{1}{2} E (H - I_0^2) \theta^3 \quad (9.11)$$

DAT DE DERDEGRAADSTERM NIET VAN BELANG IS, WORDT NOG EENS AAN DE HAND VAN EEN KONKREET VOORBEELD GEDEMONSTREERD.

$$\begin{aligned} \text{STEL: } a &= 9 \text{ MM} & G &= 250 \text{ N/MM}^2 \\ b &= 19 \text{ MM} & E &= 65000 \text{ N/MM}^2 \\ t &= 1 \text{ MM} & J &= 25000 \text{ N/MM}^2 \end{aligned}$$

DE GEOMETRISCHE GROOTHEDEN WORDEN Bepaald MET DE BETREKKINGEN UIT PARAGRAAF 9.1.

$$A = 56 \text{ MM}^2$$

$$J = 2089 \text{ MM}^4$$

$$I_0 = 3190 \text{ MM}^4$$

$$H = 298500 \text{ MM}^6$$

$$P = 6770 \text{ MM}^6$$

M.B.V. (9.10) VOLGT:

$$\theta_{0L} = 0.81 \cdot 10^{-3} \text{ RAD}$$

MM

VOOR HET MOMENT VOLGT DAN:

$$M = 42300 + 2 \text{ NMM}$$

TEN GEVOLGE VAN DE GROTE TORSIESTIJFHEID Blijft DE SPECIFIEKE HOEKVERDRAAIING klein. Dit verklaart waarom DE BIJDRAGE V.D. DERDEGRAADSTERM NIET IS.

9.3. VERBODERDE WELVING.

IN NEZEN IS DEZE PARAGRAAF EEN AFSPIEGELING VAN PARAGRAAF 7.3.

TEN GEVOLGE VAN DE RELATIEF GROTE STIJFHEID IS DE FAKTOR $\frac{D}{I_0}$ MEESTAL MAAR EEN

FRAKTIE VAN EÉN. VOOR HET VOORBEELD UIT PARAGRAAF 9.2. GELDT:

$$\frac{D}{I_0} = 0.35$$

IN FIGUUR 10 ZIJN ENKELE FUNKTIES GETEKEND. DE LENGTE V.D. ZONE MET WELVINGSVERRINDERING KAN NEER VOOR IEDERE FUNKTIE APART WORDEN BEPALD. DE SCHATTING IS GEBASEERD OP EEN RELATIEVE FOOT VAN 5%.

Bij beide modellen geldt voor de specifieke hoekverdraaiing:

$$x \approx \sqrt{\frac{20 \cdot EI'}{57}}$$

$$x \approx 73 \text{ mm. (In werkelijkheid 90 mm.)}$$

VOOR DE MODULUSFUNKTIE GELDT:

$$x \approx \sqrt{\frac{20 \cdot EI' \cdot I_0}{57 D}}$$

$$x \approx 22 \text{ mm. (In werkelijkheid 15 mm.)}$$

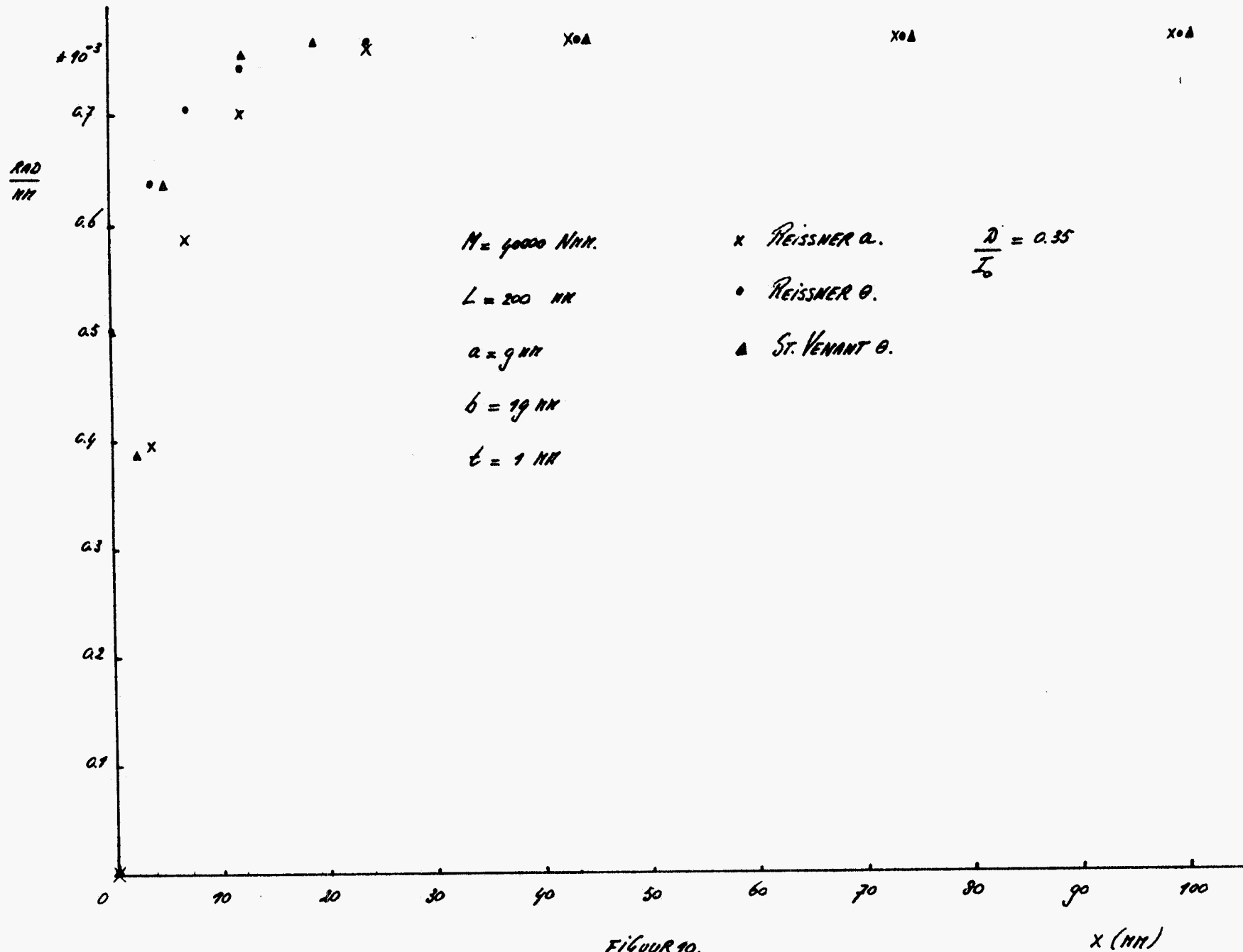
DE MODULUSFUNKTIE IS NEER GELIJK AAN DE SPECIFIEKE HOEKVERDRAAIING ALS GELDT:

$$x \approx \sqrt{\frac{20 \cdot EI'}{90}}$$

$$x \approx 98 \text{ mm. (In werkelijkheid 93 mm.)}$$

DE TWEË MODELLEN PRODUCEREN PAS EEN IDENTIEKE OPLOSSING ALS DE STATIONAIRE WAARDE WORDT BEREIKT, DUS NA 15 MM. HET VERSCHIL IS MERKBAAR OVER EEN RELATIEVE LENGTE VAN 15%. DE OORZAAK HIERVAN IS DE FAKTOR $\frac{D}{I_0}$ (ZIE OOK FIGUUR 6).

IN FIGUUR 11 IS DE HOEKVERDRAAIING OP $x = l$ TEGEN HET MOMENT UITGEZET.



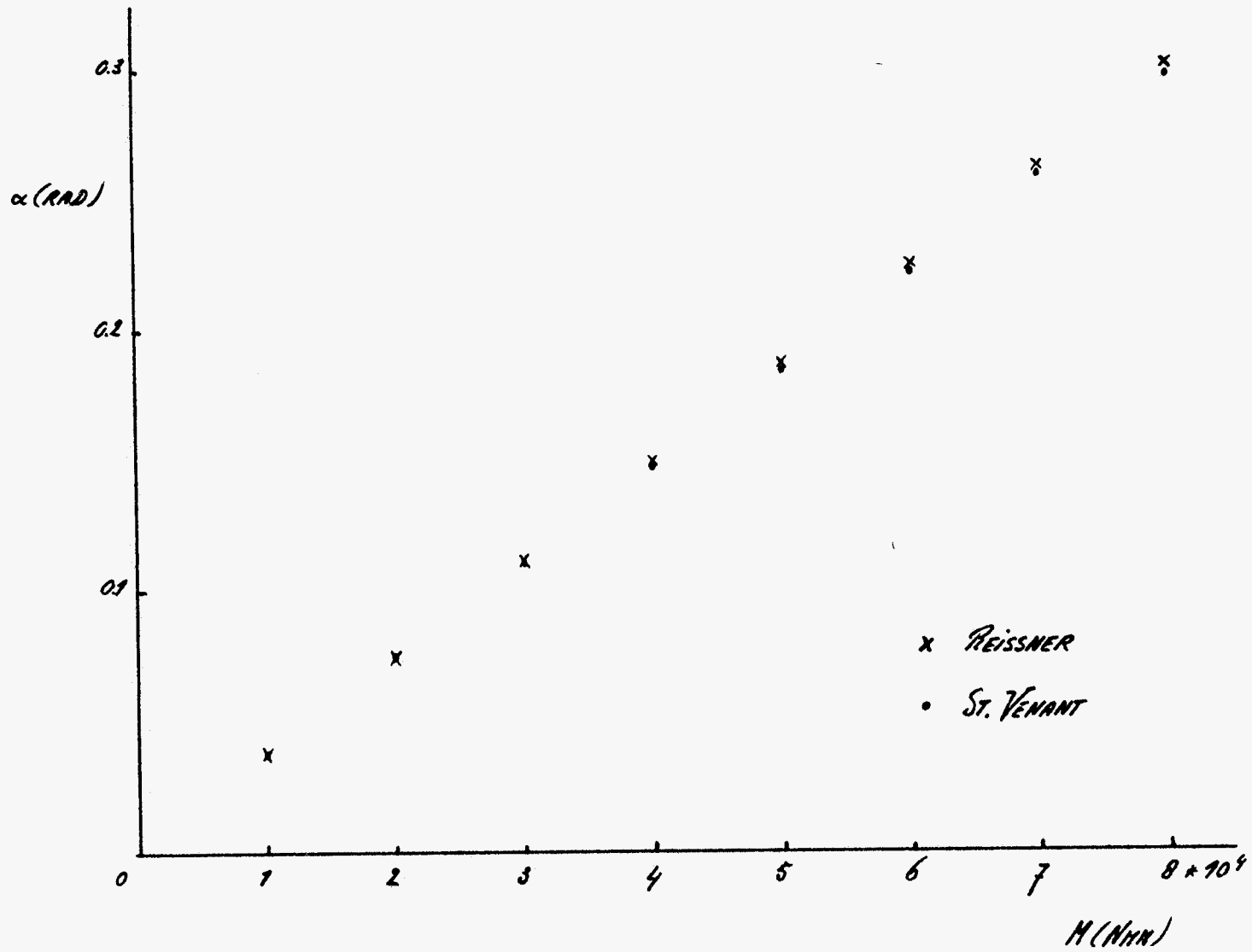
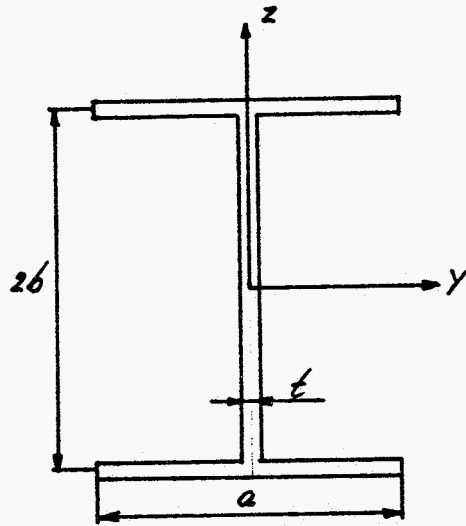


FIGURE 11

10. HET I-PROFIEL

10.1. GEOMETRISCHE GROOTHEDEN.

DE DOORSNEDE VAN EEN DERGELIJK PROFIEL IS GEHEEL OPEN. IN DIT HOOFDSTUK WORDT ALLEEN HET DUNNANDIGE PROFIEL BEHANDELD. IN FIGUUR 12 IS DE DWARSDOORSNEDE GETEKEND.



FIGUUR 12.

VOOR DE OPPERVLAKTE GELDT:

$$A = 2at + 2bt - t^2 \quad (10.1)$$

VOOR HET POLAIR TRAGHEIDSMOMENT GELDT:

$$I_0 = \frac{(2b-t)t^3 + (2b-t)^3 t}{12} + \frac{a^3 t + t^3 a}{6} + 2atb^2 \quad (10.2)$$

VOOR DE NIET-LINEAIRE TORSIEGROOTHEID H GELDT:

$$H = \int_A (y^4 + 2z^2 y^2 + z^4) dA \quad (10.3)$$

$$H = H_1 + H_2 + H_3$$

$$H_1 = \int_A y^4 dA$$

$$H_1 = \frac{(2b-t)t^5}{80} + \frac{ta^5}{40} \quad (10.4)$$

$$H_2 = 2 \int_A y^2 z^2 dA$$

$$H_2 = \frac{a^3 [(2b+t)^3 - (2b-t)^3] + t^3 (2b-t)^3}{72} \quad (10.5)$$

$$H_3 = \int_A z^4 dA$$

$$H_3 = \frac{(2b-t)^5 t + a [(2b+t)^5 - (2b-t)^5]}{80} \quad (10.6)$$

EEN METHODE OM DE WELVINGSFUNKTIE TE BENADEREN STAAT UITGEBREIDT BESCHREVEN IN [1]. IN DE PRAKTIJK BLIJVEN DEZE BENADERINGEN GOED TE VOLDOEN. VOOR DE WELVINGSFUNKTIE VINDT MEN:

$$\text{BOVENFLENS: } \xi = y(2b-z)$$

$$\text{LÏF: } \xi = yz \quad (10.7)$$

$$\text{ONDERFLENS: } \xi = -y(2b+z)$$

M.b.v. (2.94) volgt voor de TORSIE-INTEGRAAL:

$$J = \frac{2}{3} b t^3 + \frac{2}{3} a t^3 \quad (10.8)$$

M.b.v. (2.98) volgt voor de WELVINGSINTEGRAAL:

$$I = \frac{t^3 b^3}{18} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} \right)^3 + \frac{3a^3}{6t^2} + 1 \right] \quad (10.9)$$

10.2. Vrije welving

10.2.1. Plastische deformatie

Voor de schuifspanningen geldt:

$$\tau_{xy} = g_0 \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} - z \right]$$

$$\tau_{xz} = g_0 \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} + z \right]$$

Met behulp van (9.7) kan men de schuifspanningen bepalen. Ten aanzien van het Lijf volgt:

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = 2g\theta y.$$

De schuifspanning is dus maximaal aan de rand van het Lijf:

$$\tau_{\max} = g\theta b$$

Ten aanzien van de bovenflens volgt:

$$\tau_{xy} = 2g\theta(b-z)$$

$$\tau_{xz} = 0$$

Ook hier is de schuifspanning maximaal aan de rand.

$$\tau_{\max} = g\theta b. \quad (9.10)$$

In de onderflens vindt men uiteraard dezelfde maximale schuifspanning.

De specifieke wringhoek waarbij het materiaal vloeit kan men bepalen m.b.v. het vloeikriterium van von Mises.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}}$$

m.b.v. (9.10) volgt:

$$\theta_{pl} = \frac{\sigma_v}{g\sqrt{3}b} \quad (9.11)$$

10.2.2. Niet-Linear Gedrag.

Open doorsneden zijn relatief slap, zodat de specifieke wringhoek vrij groot zal zijn. De karakteristiek is dus waarschijnlijk niet-linear. Dit wordt gedemonstreerd aan de hand van een concreet voorbeeld.

$$\text{Stel: } a = 6,5 \text{ mm.}$$

$$b = 7,375 \text{ mm}$$

$$t = 9,75 \text{ mm}$$

$$L = 150 \text{ mm.}$$

$$G_v = 205 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 60500 \text{ N/mm}^2$$

$$G = 24900 \text{ N/mm}^2$$

Voor de geometrische grootheden geldt dan:

$$A = 20,25 \text{ mm}^2$$

$$J = 3,9 \text{ mm}^4$$

$$I^* = 1878 \text{ mm}^6$$

$$I_0 = 737 \text{ mm}^4$$

$$H = 38000 \text{ mm}^6$$

Uit (10.11) volgt:

$$\theta_{pL} = 6,55 \cdot 10^{-3} \text{ rad/mm.}$$

Voor de hoekverdraaiing op $x=L$ geldt dan:

$$\alpha_{pL} = 6,98 \text{ rad.}$$

In figuur 13 is de hoekverdraaiing als functie van het moment getekend. Tevens zijn enkele meetwaarden ingetekend. De relatieve afwijking bedraagt plusminus 5%.

10.3. Verhinderde wending.

De Reissner-theorie en de St. Venant-theorie geven voor de lineaire theorie dezelfde oplossing, immers:

$$\frac{D}{I_0} = 0,995$$

Uit de voorgaande paragraaf blijkt reeds dat bij grotere hoeken ook de niet-lineaire termen van belang zijn. Een gedetailleerde analyse wordt dan veel moeilijker.

In figuur 14 zijn m.b.t. het voorbeeld uit de vorige paragraaf een aantal funk-

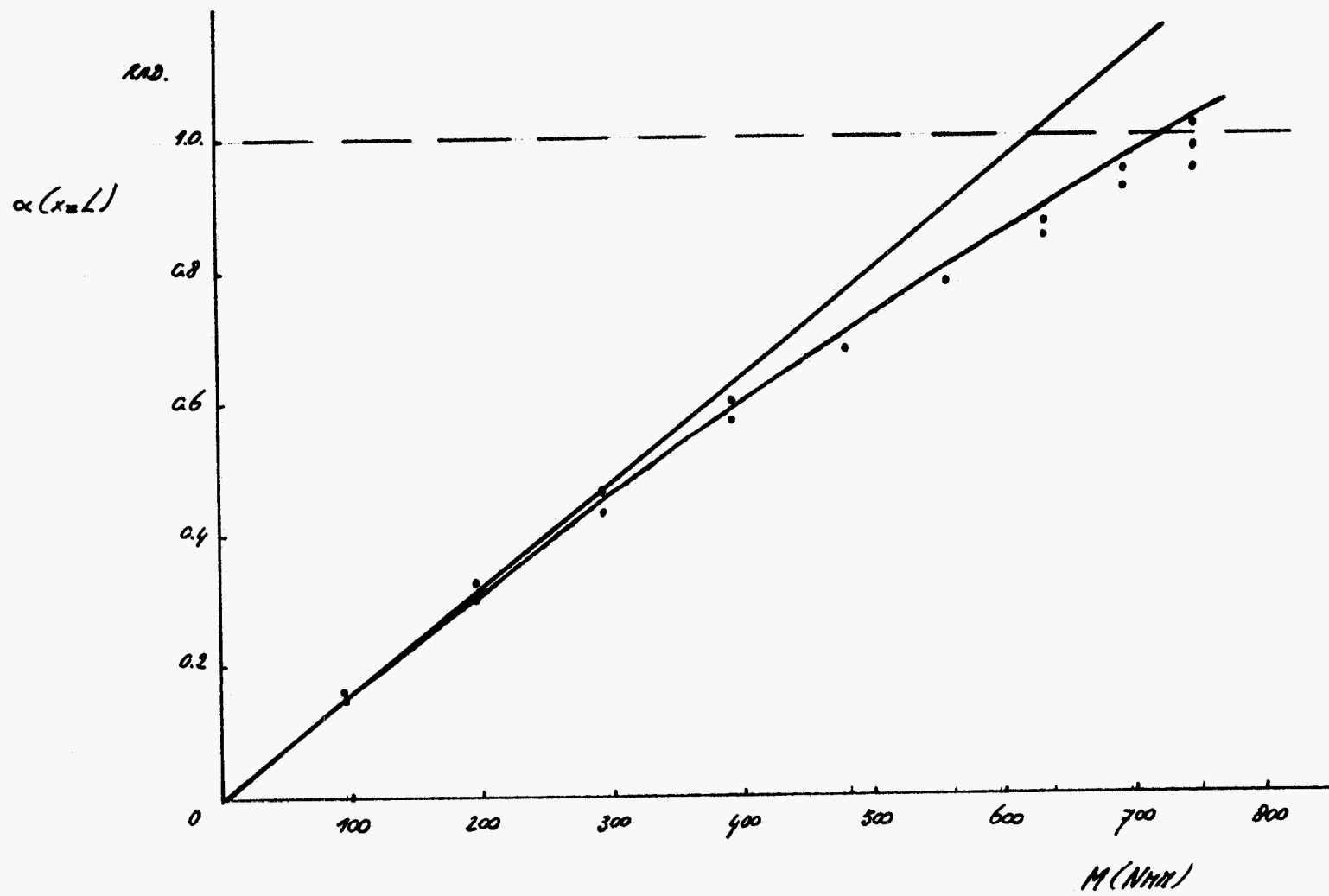


FIGURE 13.

ties getekend. De modulusfunctie en de specifieke wringhoek bereiken vanwege de geringe torsiestijfheid niet hun stationaire waarde. Bij het Reissner-model is de modulusfunctie gelijk aan de specifieke wringhoek (met een relatieve afwijking van 1%), indien:

$$x \approx \sqrt{100 \cdot \frac{EI}{GJ}}$$

$$x \approx 25 \text{ mm. (In werkelijkheid 15 mm)}$$

De afwijking tussen beide modellen bedraagt ongeveer 2%.

Bij een goede doorsnede produceren beide modellen dus nauwelijks dezelfde oplossing.

Ten slotte merken wij op dat de inhomogene randvoorwaarde $\theta(0)$ zeer klein is t.o.v. de maximale specifieke wringhoek.

$$\theta(0) \approx \frac{M}{GJ_0}$$

In figuur 15 is de hoekverdraaiing op $x=L$ tegen het moment uitgezet. De relatieve afwijking bedraagt ongeveer 3%.

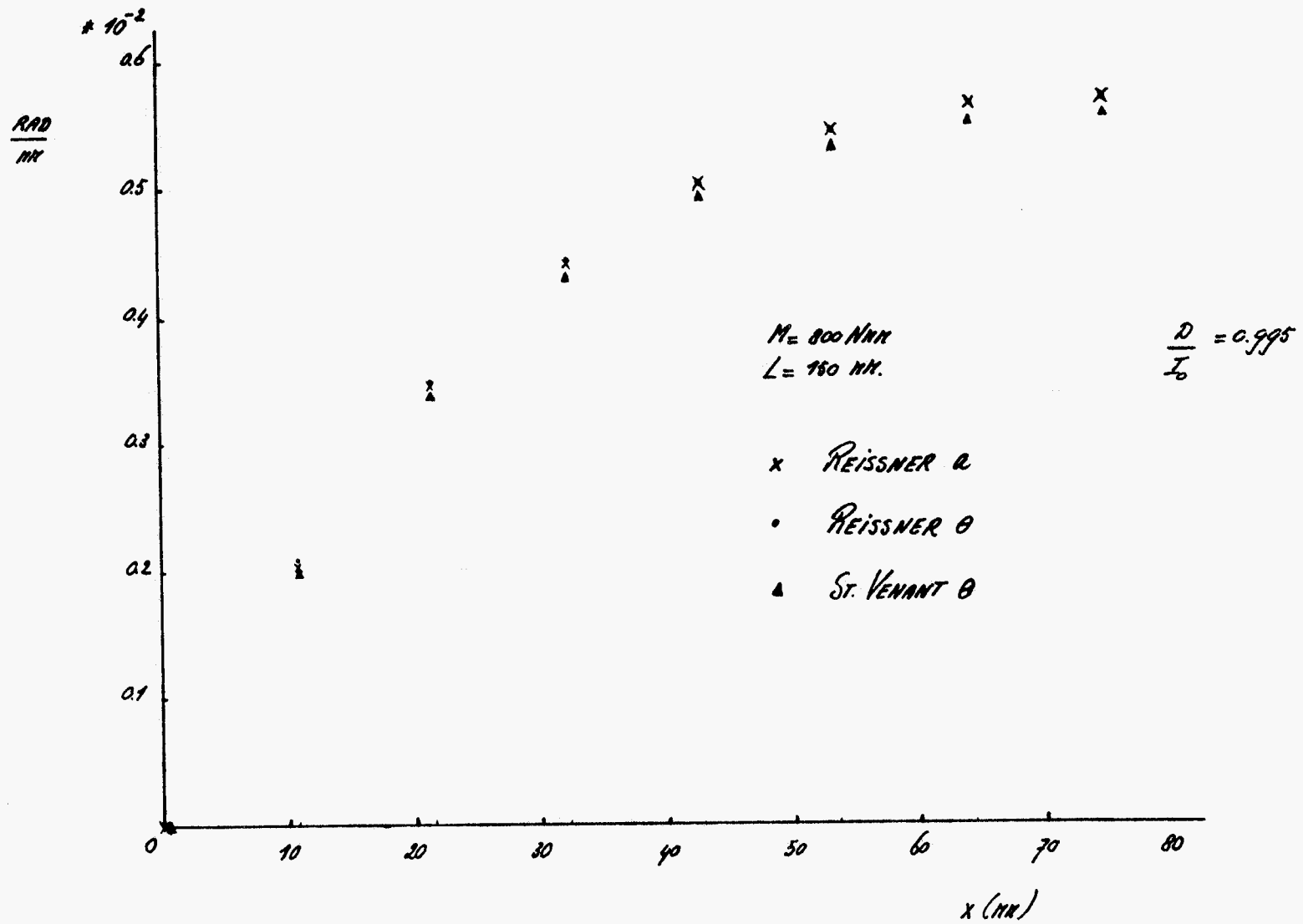


FIGURE 14

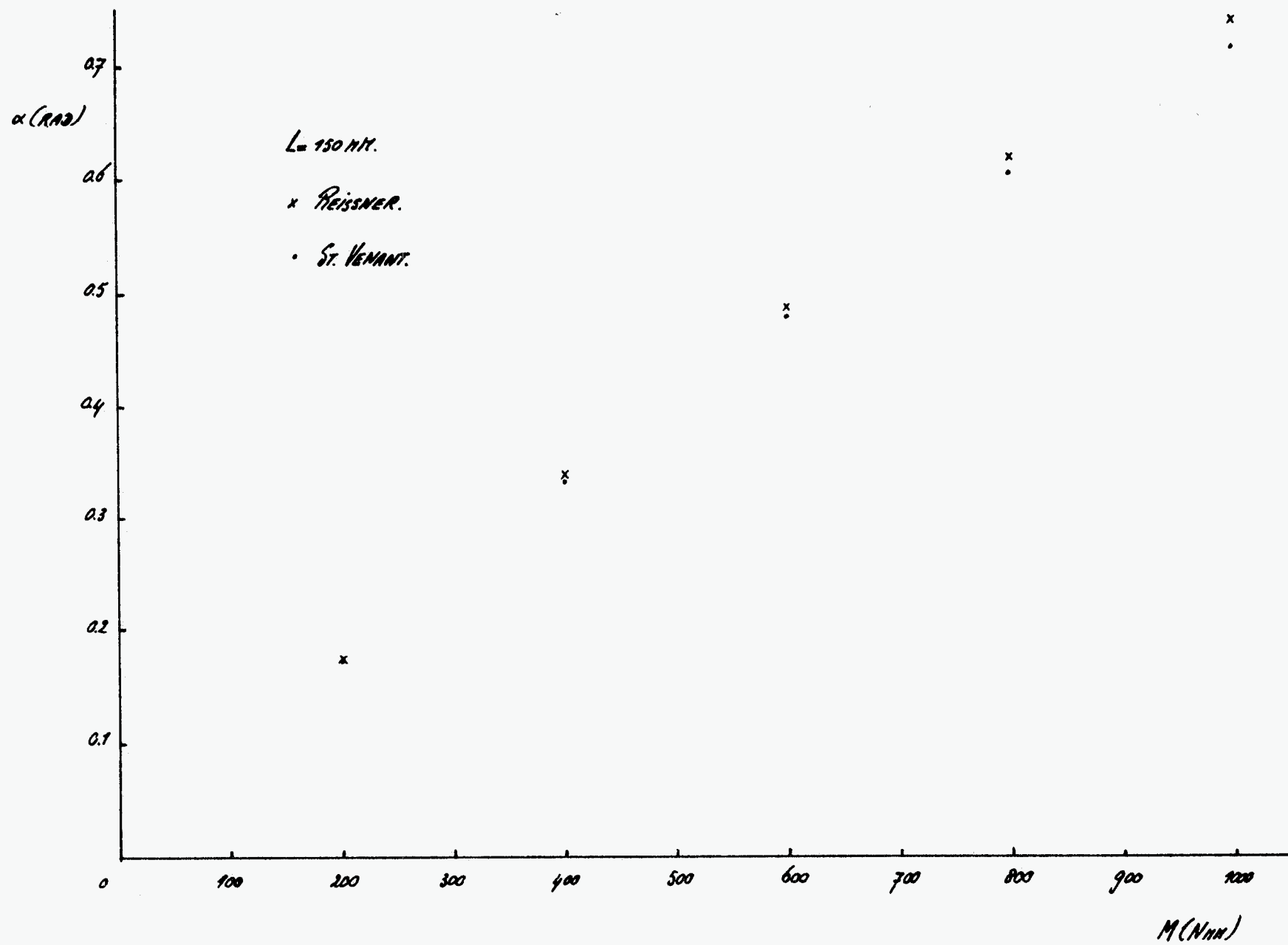


FIGURE 15

11. DUNWANDIG GEMENGDDE DOORSNEDEN

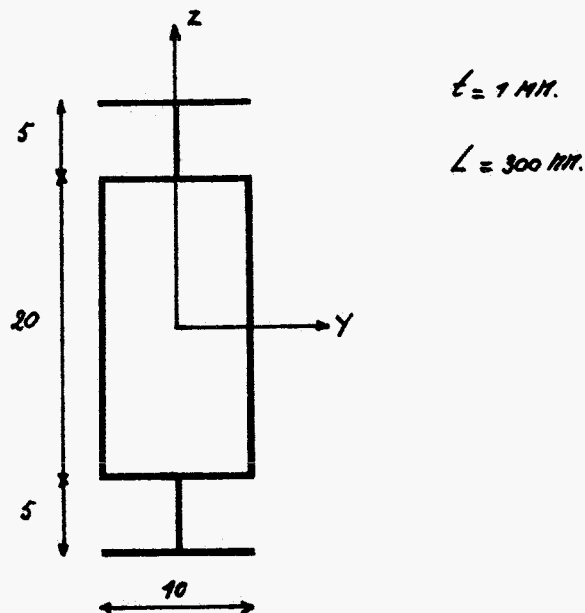
11.1. ALGEMEEN.

EEN GEMENGDDE DOORSNEDE HEEFT ZONEL GESLOTEN ALS OPEN DELEN.

EEN ANALYSE VAN DERGELIJKE PROFIELEN IS BIJNA NIET MEER MOGELIJK ZONDER GEBRUIK TE MAKEN VAN NUMERIEK GEREEDSCHAP. DE KARAKTERISTIEKE EIGENSCHAPPEN MOETEN DAN OOK AAN DE HAND VAN EEN OF MEERDERE KONKRETE VOORBEELDEN WORDEN BEPALD.

11.2. GEOMETRISCHE GROOTHEDEN.

IN FIGUUR 16 IS EEN GEMENGDDE DOORSNEDE GETEKEND EN VOORZIEN VAN AFMETINGEN.



FIGUUR 16.

HET GESLOTEN DEEL K.O.M. DE KOKER IN HOOFDSTUK 9.

DE GEOMETRISCHE GROOTHEDEN ZIJN NUMERIEK BEPALD.

$$A = 84 \text{ mm}^2$$

$$J = 2204 \text{ mm}^4$$

$$I = 40039 \text{ mm}^6$$

$$H = 1431680 \text{ mm}^6$$

$$I_0 = 9214 \text{ mm}^4$$

$$D = 7070 \text{ mm}^4$$

VERGELIJKEN WIJ DEZE WAARDEN MET DIE VAN HET HOEKPROFIEL, DAN VOLGT:

$$\frac{A_g}{A_k} = 1,5.$$

$$\frac{J_g}{J_k} = 1,06.$$

$$\frac{I_g}{I_k} = 5,9.$$

$$\frac{H_g}{H_k} = 4,8.$$

$$\frac{I_{0g}}{I_{0k}} = 2,9.$$

$$\frac{D_g}{D_k} = 64.$$

(11.1)

11.3. Vrije werving.

DE BASISVERGELIJKING VOOR HET MOMENT IS WEER:

$$M = GJ\theta + \frac{1}{2}E \left(H - \frac{I_0^2}{A} \right) \theta^3$$

BIJ GESLOTEN DOORSNEDEN SPEELT DE NIET-LINEAIRE TERM GEEN ROL. DE STIJFHEID VAN DE GEMENGDEN DOORSNEDE WORDT I.H.A. VOORNAMELIJK BEPAALD DOOR DE GESLOTEN DELEN, ZO DAT OOK DAN ALLEEN DE LINEAIRE TERM VAN BELANG IS.

11.4. Verhinderde werving.

NET ALS BIJ DE HOEK ZIJN WEER DE LINEAIRE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN KRACHT. ER IS REEDS OP GEWEZEN DAT DE MATEN VAN OVEREENSTEMMING TUSSEN DE

MODELLEN DAN GEHEEL AFHANKELIJK IS VAN DE FAKTOR $\frac{D}{I_0}$. UIT (11.1) VOLGT DAT HET POLAIR TRAGHEIDSMOMENT EN DE NIET-LINEAIRE TORSIEGROOTHEID D DOOR HET AANBRENGEN VAN OPEN DELEN BEHOORLIJK TOENEMEN, TERWIJL DE TORSIE-INTEGRAAL NA-GENEGE KONSTANT BLIJFT. HET GENEWY IS DAT DE FAKTOR $\frac{D}{I_0}$ OOK GROTER WORDT. VOOR HET VOORBEELD GELDT:

$$\frac{D}{I_0} = 0,76.$$

IN FIGUUR 17 IS DE NUMERIEKE OPLOSSING VAN ENKELE FUNKTIES GETEKEND.

DE SPECIFIEKE HOEKVERDRAAIING IS KONSTANT ALS GELDT:

$$x \approx \sqrt{\frac{20 \cdot E\pi}{\gamma}} \quad (11.2)$$

$$x \approx 30,5 \text{ MM. (IN WERKELIJKHEID 21 MM.)}$$

DEZE LENGTE IS VEEL GROTER DAN BIJ HET KOKERPROFIEL OMDAT DE MELVING'S-INTEGRAAL VEEL GROTER IS. IN FEITE KAN MET BEHOEF VAN (11.2) DE DOORSNEDE GUA GEDRAG IN-GEDEELD WORDEN BIJ DE GESLOTEN OF DE OPEN DOORSNEDEN.

VOOR DE MODULUSFUNKTIE GELDT:

$$x \approx \sqrt{\frac{20 \cdot E\pi \cdot I_0}{\gamma D}}$$

$$x \approx 35 \text{ MM. (IN WERKELIJKHEID 25 MM.)}$$

BIJ HET REISSNER-MODEL IS DE MODULUSFUNKTIE GELIJK AAN DE SPECIFIEKE WRINGHOEK ALS GELDT:

$$x \approx \sqrt{\frac{20 \cdot E\pi}{\gamma D}}$$

$$x \approx 17 \text{ MM. (IN WERKELIJKHEID 13 MM.)}$$

NA 14 MM IS DE AFWIJKING TOSSEN DE MODELLEN MINDER DAN 5%, ZODAT ER VERSCHIL IS OVER 9,3% VAN DE LENGTE.

IN FIGUUR 18 IS DE HOEKVERDRAAIING OP $x=L$ VERSUS HET MOMENT GETEKEND.

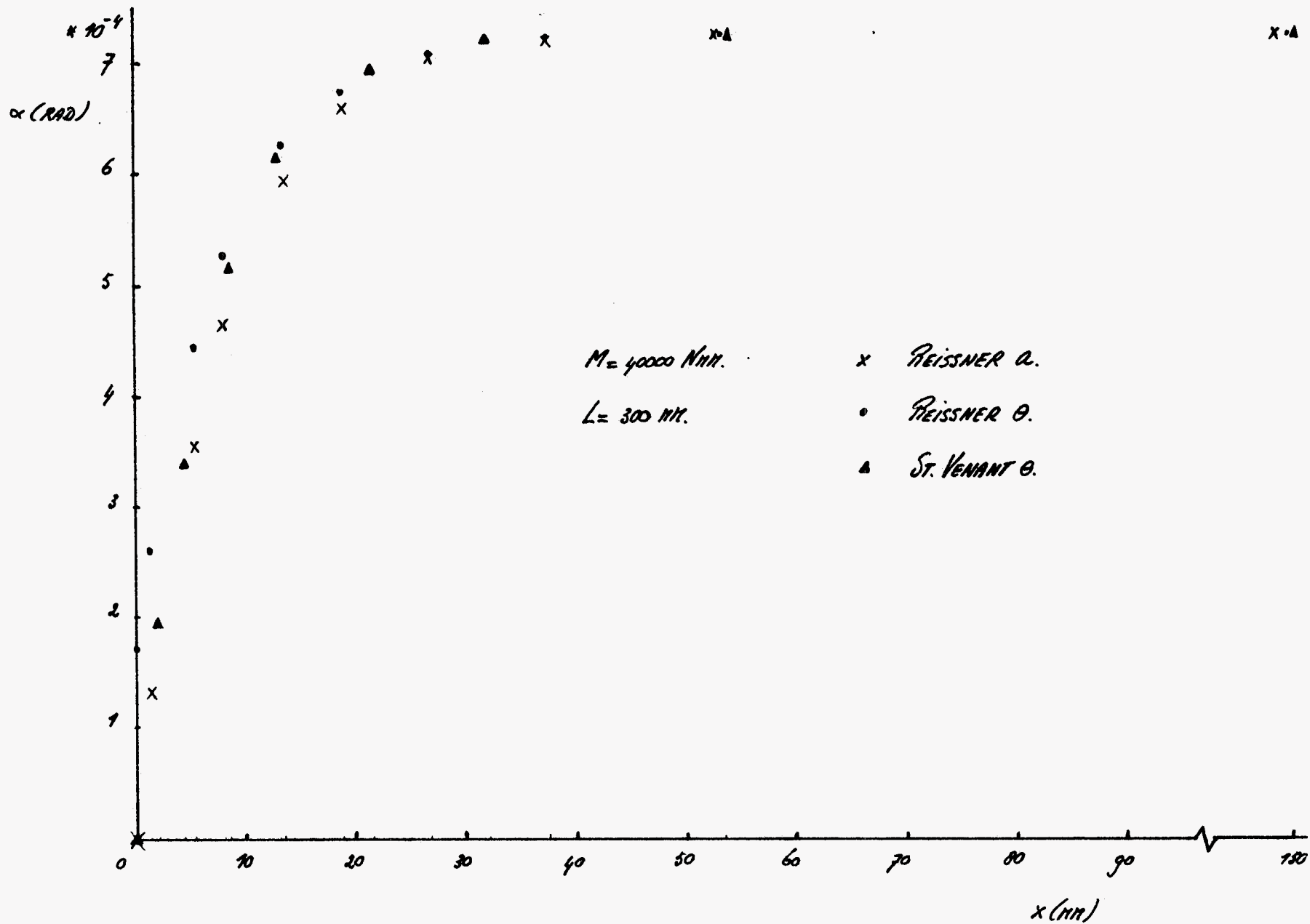


FIGURE 17.

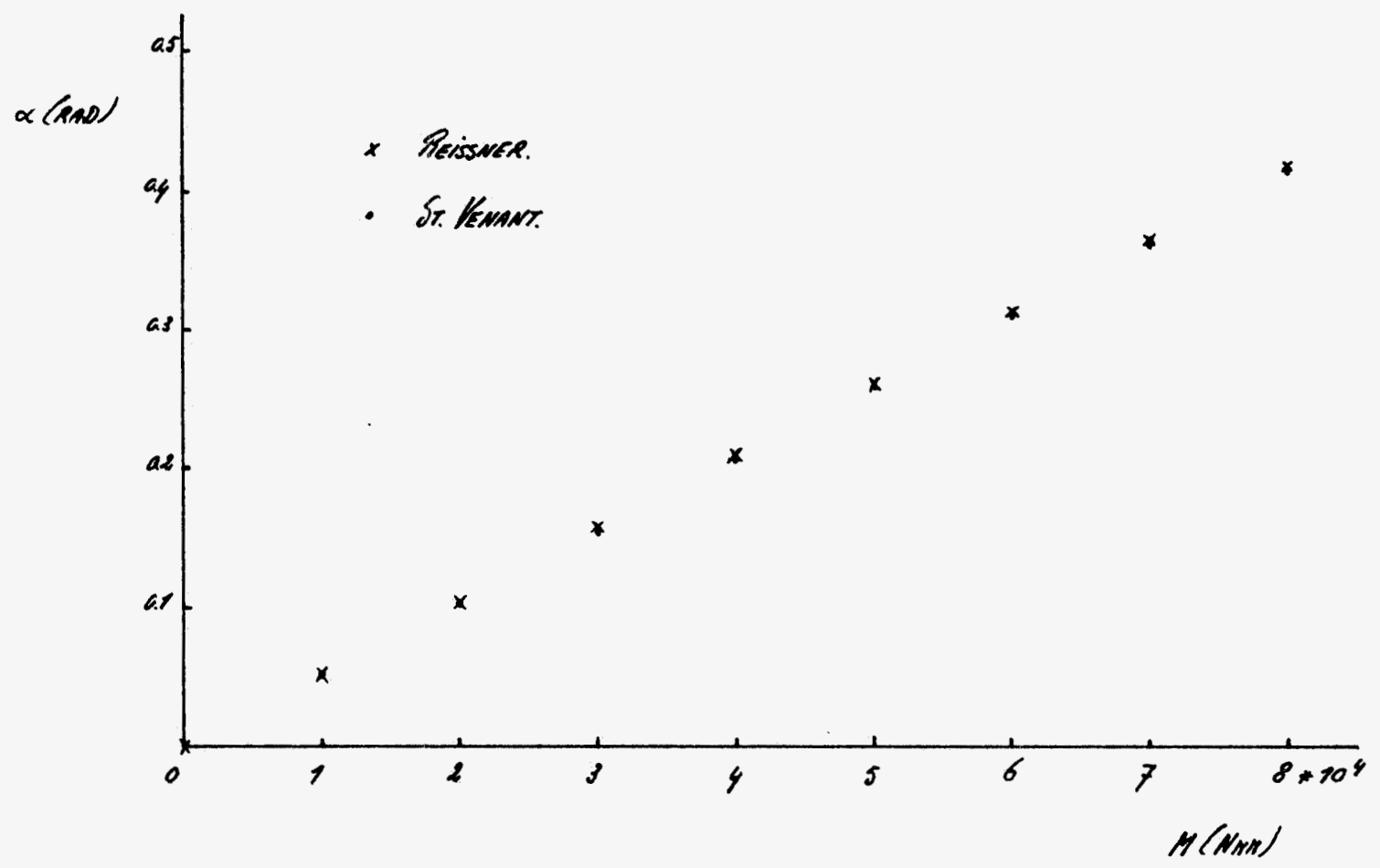


FIGURE 18.

12. KONKLUSIES

In het geval van vrije wending geven beide modellen dezelfde oplossing.

$$M = GJ\theta + \frac{1}{2}E\left(H - \frac{I_0^2}{A}\right)\theta^3$$

De derdegraadsterm is alleen van belang bij dunwandig open doorsneden.

Deze term is overigens altijd positief.

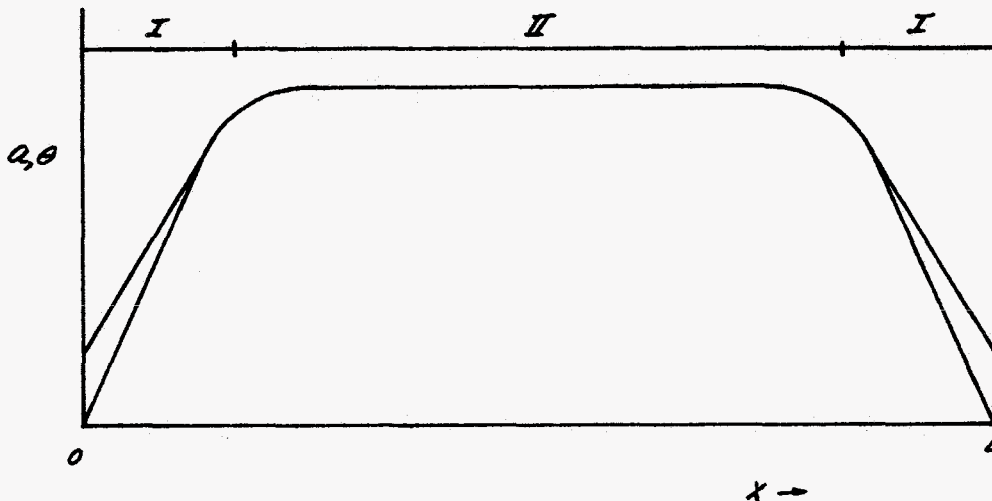
Bij de verhinderde wending worden differenties tussen de modellen bepaald door één faktor, namelijk:

$$\frac{D}{I_0}$$

Voor dunwandig open doorsneden geldt: $\frac{D}{I_0} \approx 1$. In dat geval zijn de verschillen over de gehele lengte v.d. balk klein.

Het algemene beeld v.d. modulusfunctie en de specifieke hoekverdraaiing is

geschetst in de onderstaande figuur.



De lengte van gebied I wordt bepaald door een kental. Voor de specifieke hoekverdraaiing geldt:

$$\sqrt{\frac{EI'}{GJ}}$$

Voor de modulusfunctie geldt:

$$\sqrt{\frac{E\pi \cdot I_0}{GJ \cdot D}}$$

Inherent aan de open doorsnede is de geringe torsiestijfheid, zodat de stationaire waarde (gebied II) vaak niet bereikt wordt.

De gekende doorsnede zal i.h.a. qua gedrag overeenkomen met de gesloten doorsnede, omdat de gesloten delen de eigenschappen sterk beïnvloeden.

Bij de Weisner-theorie is over een bepaalde lengte verschil tussen de specifieke wrijfhoek θ en de modulusfunctie. Deze lengte is afhankelijk v.h. volgende kental:

$$\sqrt{\frac{E\pi}{GJ}}$$

Zijn deze functies nu nauwelijks gelijk, dan zijn ook de stelsels differentiaalvergelijkingen gelijk, zodat de modellen dan vrijwel een identieke oplossing produceren. (enkele procenten afwijking).

13. PROGRAMMATUUR.

13.1. ALGEMEEN.

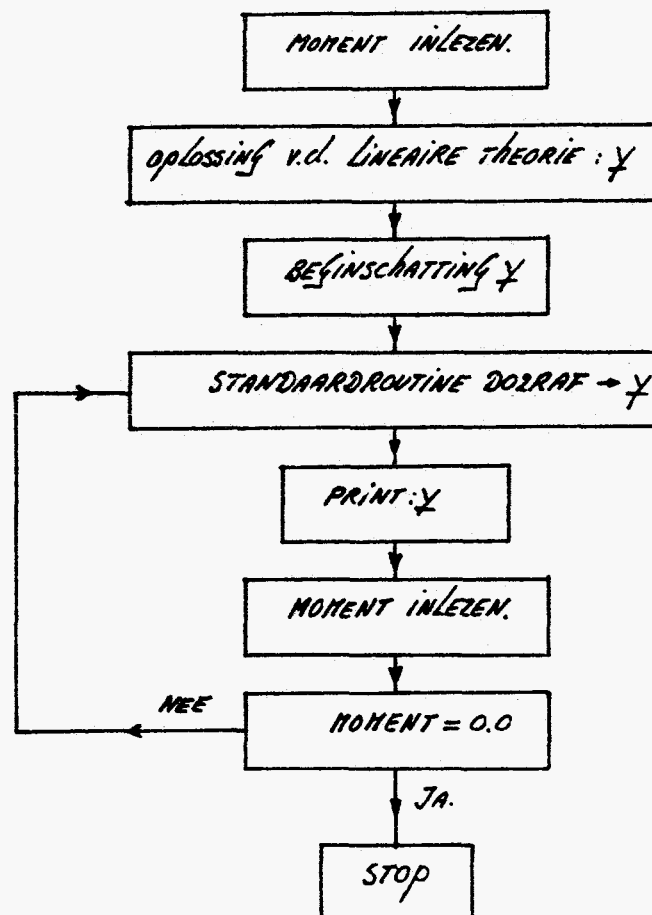
DE NIET-LINEAIRE STELSLS DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN WORDEN NUMERIEK OPGELOST. HIERBIJ WORDT GEBRUIK GEMAAKT VAN EEN STANDAARDROUTINE. EEN BESCHRIJVING VAN DE BETREFFENDE ROUTINE START IN APPENDIX H. HET STELSSEL MOET GETRANSFORMEERD WORDEN NAAR DE VOLGENDE VORM:

$$y' = f(x, y)$$

OM VOOR IEDERE VARIABLE y_i EEN ADEQUATE TOLERANTIE TE KRIJGEN WORDT GEBRUIK GEMAAKT VAN EEN DIMENSIELOZE KOÖRDINAAT ξ .

$$x = l\xi ; 0 \leq \xi \leq 1.$$

DE PROGRAMMA'S ZIJN KORT EN DE STRUKTUUR IS DUIDELIJK. DE GLOBALE STRUKTUUR ZIET ER ALS VOLGT UIT:



13.2. PROGRAMMA VAXIS

Dit programma heeft betrekking op het St. Venant-model. De melving wordt aan de twee uiteinden verhinderd (axiaal inkekkende balk).

Uitgangspunt zijn de vergelijkingen (6.4) en (6.5).

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} + I_0 \frac{d\alpha}{dx} \frac{d^2 \alpha}{dx^2} = 0 \quad (13.1)$$

$$M = \frac{GJ}{\rho} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{1}{2} E H \frac{d^3 u}{dx^3} + E I_0 \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d\alpha}{dx} - E I_0 \frac{d^3 \alpha}{dx^3} \quad (13.2)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$\alpha(0) = 0$$

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (13.3)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(l) = 0$$

M.b.v. de dimensieloze coördinaat ξ volgt:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{-I_0}{AR} \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{d^2 \alpha}{d\xi^2} \quad (13.4)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{d\xi^3} = \frac{-MR^3}{EI} + \frac{GJR^2}{EI} \frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{I_0 l}{I} \frac{d^2 u}{d\xi^2} \frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{H}{2I} \frac{d^3 u}{d\xi^3} \quad (13.5)$$

$$\text{Stel: } \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ u' \\ \alpha \\ \alpha' \\ \alpha'' \end{bmatrix} ; \quad ' = \frac{d}{d\xi} \quad (13.6)$$

$$\gamma' = \begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ \alpha' \\ \alpha'' \\ \alpha''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ h_1(\gamma_1, \gamma_5) \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ h_2(\gamma_2, \gamma_4) \end{bmatrix} \quad (13.7)$$

Voor de randvoorwaarden volgt:

$$y_3(0) = 0$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad (13.8)$$

$$y_4(0) = y_4(l) = 0$$

Merk op dat het oorspronkelijke stelsel differentiaalvergelijkingen is gereduceerd tot een stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen. De betrekkingen (13.7) en (13.8) zijn de basis van de standaardroutine (zie appendix H).

Het algoritme start met de oplossing v.d. lineaire theorie. Voor de hoekverdraaiing geldt:

$$\alpha(\xi) = \frac{ML}{EI} \left[\xi - \frac{\sinh \mu \xi}{\mu} + \frac{\cosh \mu - 1}{\mu \sinh \mu} [\cosh \mu \xi - 1] \right]; \quad \mu^2 = \frac{EI}{EI} \cdot l^2 \quad (13.9)$$

D.i.v. differentiëren kan men makkelijk de afgeleiden bepalen.

Het complete programma staat in appendix I.

13.3. PROGRAMMA RAXIB.

Dit programma heeft betrekking op de Reissner-theorie. De balk is aan beide zijden ingeklemd.

De kinematische randvoorwaarden zijn:

$$\alpha(0) = 0$$

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (13.10)$$

$$a(0) = a(l) = 0$$

Uit (3.4) t.n. (3.6) volgt:

$$AE' + I_0 \theta \theta' = 0 \quad (13.11)$$

$$gD(a-\theta) - EI a'' = 0 \quad (13.12)$$

$$\frac{3}{2} E H \theta \theta' - gD a' + g I_0 \theta' + EI_0 E' \theta + EI_0 \theta \theta' = 0 \quad (13.13)$$

DE DYNAMISCHE RANDVOORWAARDE LUIDT:

$$\left[\frac{1}{2} E H \theta^3 + G I_0 \theta + E I_0 E \theta - M \right]_L = 0 \quad (13.14)$$

M.b.v. (13.11) EN (13.13) VOLGT:

$$\theta' = \frac{G D \alpha'}{E \left[\frac{3}{2} H - \frac{I_0^2}{A} \right] \theta^2 + G I_0 \left[1 + \frac{E E}{G} \right]} \quad (13.15)$$

VOOR METALEN IS DE REK ϵ KLEIN.

$$|\epsilon| \ll 1.$$

M.b.v. (13.14) EN (13.15) VOLGT:

$$\left[\frac{1}{2} E H \theta^3 + G I_0 \theta - M \right]_L = 0 \quad (13.16)$$

$$\theta' = \frac{G D \alpha'}{E \left[\frac{3}{2} H - \frac{I_0^2}{A} \right] \theta^2 + G I_0} \quad (13.17)$$

M.b.v. DE KOÖRDINAAT ξ VOLGT:

$$\frac{d^2 \alpha}{d\xi^2} = \frac{G D L^2}{E I} \left[a - \frac{1}{L} \frac{d\alpha}{d\xi} \right] \quad (13.18)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d\xi^2} = \frac{G D L \frac{d\alpha}{d\xi}}{E \left[\frac{3}{2} H - \frac{I_0^2}{A} \right] \frac{d\alpha}{d\xi} \frac{1}{L^2} + G I_0} \quad (13.19)$$

DEFINIEER NEER EEN VEKTOR MET VARIABELEN.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} ; \quad ' = \frac{d}{d\xi} \quad (13.20)$$

$$Y' = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \\ \alpha' \\ \alpha'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ g_1(Y_1, Y_3) \\ Y_4 \\ g_2(Y_2, Y_4) \end{bmatrix} \quad (13.21)$$

DE BIJBEHOORENDE RANDVOORWAARDEN ZIJN:

$$\alpha(0) = 0$$

$$\alpha(0) = \alpha'(0) = 0 \quad (13.22)$$

$$\left[\frac{EH}{2L^3} \frac{d\alpha^3}{d\xi} + \frac{gI_0}{L} \frac{d\alpha}{d\xi} - M \right]_{\xi=1} = 0$$

HET PROGRAMMA START MET DE OPLOSSING VAN DE LINEAIRE THEORIE.

$$\alpha(\xi) = \frac{M}{gI} \left[1 - \cosh \mu \xi + \frac{\cosh \mu - 1}{\sinh \mu} \sinh \mu \xi \right]; \quad \mu^2 = \frac{gI_0}{EI_0} L^2 \quad (13.23)$$

$$\alpha(\xi) = \frac{ML}{gI} \left[\xi - \frac{D}{I_0} \frac{\sinh \mu \xi}{\mu} + \frac{D}{I_0} \frac{\cosh \mu \xi - 1}{\mu \sinh \mu} \left[\cosh \mu \xi - 1 \right] \right] \quad (13.24)$$

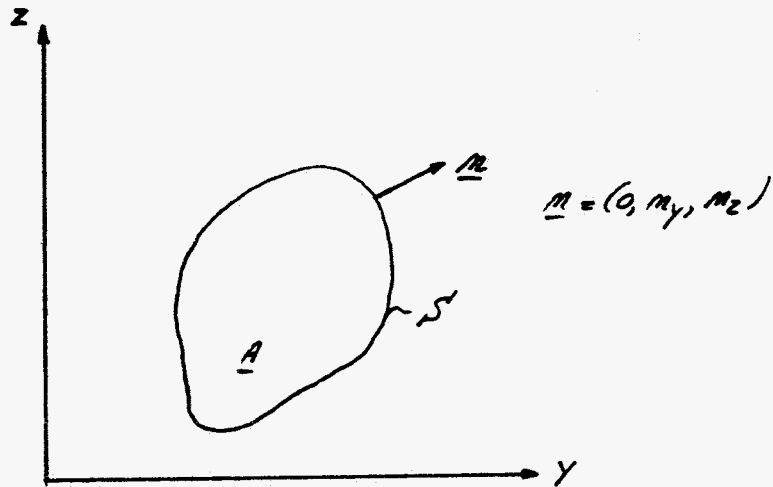
HET VOLLEDIGE PROGRAMMA IS OPGENOMEN IN APPENDIX K.

14. LITERATUUR

1. BREKELMANS, N.A.M. : TOEPASBARE STERKTELEER
2. BREKELMANS, N.A.M. : ENERGIEPRINCIPES EN STERKTELEER.
3. ERP, G.M. VAN : THE NON-LINEAR FLEXURAL-TORSIONAL BEHAVIOUR OF STRAIGHT SLENDER ELASTIC BEAMS WITH ARBITRARY CROSS-SECTIONS.

APPENDIX A.

DE STELLINGEN VAN STOKES EN GREEN HEBBEN BETREKKING OP EEN PLAT OPPER-
VLAK A MET EEN RANDKROMME S .



FIGUUR A1

STEL DAT $\alpha(y, z)$ EN $\beta(y, z)$ FUNKTIES ZIJN OP A EN S .

THEOREMA VAN GREEN:

$$\int_A \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} dA = - \int_A \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} dA + \int_S \alpha \beta m_y dS \quad (A1)$$

$$\int_A \alpha \frac{\partial \beta}{\partial z} dA = - \int_A \beta \frac{\partial \alpha}{\partial z} dA + \int_S \alpha \beta m_z dS \quad (A2)$$

STELLING VAN STOKES:

$$\int_A \frac{\partial \alpha}{\partial y} dA = \int_S \alpha m_y dS \quad (A3)$$

$$\int_A \frac{\partial \alpha}{\partial z} dA = \int_S \alpha m_z dS \quad (A4)$$

APPENDIX B.

WITGRANFSPUNT is (4.6)

$$M = \frac{q}{l} \theta - EI \theta'' \quad (B.1)$$

EERST WORDT DE OPLOSSING VAN DE HOMOGEENE D.V. Bepaald:

$$\theta'' - \mu^2 \theta = 0 ; \mu^2 = \frac{q}{EI} \quad (B.2)$$

STEL ALS OPLOSSING:

$$\theta(x) = A e^{\lambda x} \quad (B.3)$$

SUBSTITUTIE VAN (B.3) IN (B.2) GEEFT:

$$A(\lambda^2 - \mu^2) e^{\lambda x} = 0 ; \forall x.$$

$$\lambda = \mu \vee \lambda = -\mu$$

DAN WORDT (B.3):

$$\theta(x) = A e^{\mu x} + B e^{-\mu x} \quad (B.4)$$

$$\theta(x) = \frac{(A+B)(e^{\mu x} + e^{-\mu x})}{2} + \frac{(A-B)(e^{\mu x} - e^{-\mu x})}{2} \quad (B.5)$$

$$\theta(x) = C \cosh \mu x + D \sinh \mu x \quad (B.6)$$

EEN PARTIKULIERE OPLOSSING VAN (B.1) IS:

$$\theta(x) = \frac{\pi}{q} \quad (B.7)$$

SUPERPOSITIE VAN (B.6) EN (B.7) GEEFT DE TOTALE OPLOSSING.

$$\theta(x) = \frac{\pi}{q} + C \cosh \mu x + D \sinh \mu x ; \mu^2 = \frac{q}{EI} \quad (B.8)$$

APPENDIX C.

DIFFERENTIËREN VAN (4.5) GEEFT:

$$\frac{3}{2} E \left(H - \frac{I_0^2}{A} \right) \theta^2 \theta' + \gamma \theta' - E \pi \theta''' = 0 \quad (C1)$$

$$\theta''' = \frac{3 \left(H - \frac{I_0^2}{A} \right) \theta^2 \theta'}{2\pi} + \frac{\gamma \theta'}{E\pi} \quad (C2)$$

BESCHOUW NU DE VOLGENDE INTEGRAL:

$$\int_0^l [\theta''']^2 dx = \int_0^l \theta''' d(\theta') = \theta'' \theta' \Big|_0^l - \int_0^l \theta' \theta'' dx \quad (C3)$$

M.b.v. (4.4) EN (C2) VOLGT:

$$\int_0^l [\theta''']^2 dx = - \int_0^l \left\{ \frac{3 \left(H - \frac{I_0^2}{A} \right) \theta^2 \theta'^2}{2\pi} + \frac{\gamma \theta'^2}{E\pi} \right\} dx \quad (C4)$$

DE INTEGRAND VAN (C4) IS POSITIEF ALS VOLGT:

$$\frac{I_0^2}{A} - H \leq \frac{2\gamma}{3E\theta^2} \quad (C5)$$

MEN KAN BEMERKEN DAT AAN (C5) ALTIJD WORDT VOLDAAN.

VERDEEL HET OPPERVLAK A IN m (ONEINDIG VEEL) INFINITESIMALE OPPERVLAKJES.

$$AH = A \int_A \kappa^4 dA = \sum_{i=1}^m \Delta A_i \sum_{i=1}^m \kappa_i^4 \Delta A_i \quad (C6)$$

$$I_0^2 = \left[\int_A \kappa^2 dA \right]^2 = \sum_{i=1}^m (\kappa_i^2 \Delta A_i) \sum_{i=1}^m (\kappa_i^2 \Delta A_i) \quad (C7)$$

$$AH - I_0^2 = \sum_{i=1}^m \Delta A_i \sum_{i=1}^m \kappa_i^4 \Delta A_i - \sum_{i=1}^m (\kappa_i^2 \Delta A_i) \sum_{i=1}^m (\kappa_i^2 \Delta A_i) \quad (C8)$$

$$AH - I_0^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \kappa_i^4 \Delta A_i \Delta A_j - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \kappa_i^2 \kappa_j^2 \Delta A_i \Delta A_j$$

$$AH - I_0^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (\kappa_i^2 - \kappa_j^2) \kappa_i^2 \Delta A_i \Delta A_j \quad (69)$$

VERNISSELEN VAN i EN j GEEFT:

$$AH - I_0^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (\kappa_j^2 - \kappa_i^2) \kappa_j^2 \Delta A_i \Delta A_j \quad (69)$$

DE SOM VAN (69) EN (69) GEEFT:

$$2(AH - I_0^2) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (\kappa_i^2 - \kappa_j^2)^2 \Delta A_i \Delta A_j \quad (69)$$

KONKLUSIE:

$$\frac{H - I_0^2}{A} \geq 0 \quad (69)$$

AAN (65) WORDT DUS ALTIJD VOLDAAN. MET (64) VOLGT DAN:

$$\int_0^l [\theta'']^2 dx \leq 0 \quad (69)$$

VANWEGE DE KONTINUÏTEIT MOET GELDEN:

$$\theta'' = 0 \quad (69)$$

M.B.V. (4.4) VOLGT:

$$\theta = \text{KONSTANT.} \quad (69)$$

Appendix D

DE KUBISCHE VERGELIJKING HEEFT DE VOLGENDE VORM:

$$Ax^3 + Bx + C = 0 \quad (D1)$$

OVEREENKONSTIG (4.9) GELDT VOOR DE KOEFFICIËNTEN A, B EN C:

$$A > 0, B > 0, C < 0 \quad (D2)$$

$$x^3 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \quad (D3)$$

STEL:

$$\frac{B}{A} = p; \quad \frac{C}{A} = q. \quad (D4)$$

DEFINITIE VAN DE DISKRIMINANT:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (D5)$$

MERK OP DAT DE DISKRIMINANT ALTIJD POSITIEF IS. DIT HEEFT TOT GEVOLG DAT (D1) NAAR EEN REËLE OPLOSSING HEEFT.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \quad (D6)$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{C}{2A} + \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 + \left(\frac{B}{3A}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{C}{2A} - \sqrt{\left(\frac{C}{2A}\right)^2 + \left(\frac{B}{3A}\right)^3}}$$

STEL:

$$\varphi = \sqrt{1 + \frac{4B^3}{27AC^2}} \quad (D7)$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{C}{2A} + \frac{|C|}{2A} \varphi} + \sqrt[3]{-\frac{C}{2A} - \frac{|C|}{2A} \varphi} \quad (D8)$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{|c|}{2A} (1 + \varphi)} - \sqrt[3]{\frac{|c|}{2A} (-1 + \varphi)}. \quad (29)$$

DEZE OPLOSSING IS REËL EN POSITIEF.

APPENDIX E.

EERST WORDT UIT (4.12) T.M. (4.14) HET EEN EN ANDER AFGELEID.

UIT (4.12) VOLGT:

$$E' = \frac{-I_0}{A} \theta \theta' \quad (E1)$$

UIT (4.13) VOLGT:

$$a''' = \frac{qD}{EI} (a' - \theta') \quad (E2)$$

DIFFERENTIËREN VAN (4.14) GEEFT:

$$0 = qI_0 \theta' - qDa' + \frac{3}{2} EH \theta^2 \theta' + EI_0 E' \theta + EI_0 E \theta' \quad (E3)$$

DE REK E EN ZIJNS AFGELEIDE KUNNEN GEËLININEERD WORDEN M.B.V. (4.12) EN

(E1).

$$0 = qI_0 \theta' - qDa' + \frac{3}{2} EH \theta^2 \theta' - \frac{3}{2} EI_0^2 \theta^2 \theta'$$

$$\theta' = \frac{qDa'}{qI_0 + \frac{3}{2} E (H - I_0^2) \theta^2} \quad (E4)$$

BESCHOUW NU DE VOLGENDE INTEGRAL:

$$\int_0^l a''^2 dx = \int_0^l a'' da' = [a'' a']_0^l - \int_0^l a' a''' dx \quad (E5)$$

M.B.V. (4.15) VOLGT:

$$\int_0^l a''^2 dx - \int_0^l a' a''' dx \quad (E6)$$

SUBSTITUTIE VAN (E2) GEEFT:

$$\int_0^l a''^2 dx = - \frac{qD}{EI} \int_0^l a'^2 \left(1 - \frac{qD}{qI_0 + \frac{3}{2} E (H - I_0^2) \theta^2} \right) dx \quad (E7)$$

DE INTEGRAND IS ALTIJD POSITIEF, WANT:

$$I_0 > D$$

(E8)

$$H - \frac{I_0^2}{A} > 0$$

UIT HET OOGPUNT v.d. KONTINUITEIT VOLGT DAN EEN BELANGRIJKE KONKLUSIE, NAMELIJK:

$$a'' = 0$$

(E9)

M.B.V. (4.95) VOLGT DAN DIREKT:

$$a = \text{KONSTANT}$$

(E10)

Appendix F

In het geval van uniforme torsie (specifieke hoekverdraaiing is konstant) geldt voor de elastische energie per lengte-eenheid (zie 2.20):

$$U = \frac{1}{2} E A E^2 + \frac{1}{8} E H \theta^4 + \frac{1}{2} G (I_0 - D) \theta^2 + \frac{1}{2} E I_0 \theta^2 \quad (F_1)$$

M.b.v. (2.16) volgt:

$$U = \frac{1}{2} E A E^2 + \frac{1}{8} E H \theta^4 + \frac{1}{2} E I_0 \theta^2 + \frac{1}{2} G J \theta^2 \quad (F_2)$$

Het deel van de elastische energie per lengte-eenheid dat betrekking heeft op de wervingsfunctie noemen wij U^* .

M.b.v. (2.14) volgt:

$$U^* = J = \int_A \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dA. \quad (F_3)$$

Deze "energie" dient voor een zekere benaderingsfunctie ξ^* te worden geminimaliseerd.

Bij dubbelsymmetrische doorsneden moet men rekening houden met de antisymmetrie v.d. werving t.o.v. de symmetrie-assen.

Stel:

$$\xi^* = \alpha y z \quad (F_4)$$

Alfa is een nader te bepalen konstante.

Substitutie van (F4) in (F3) geeft:

$$U^* = \int_A \left[z^2 (\alpha - 1)^2 + y^2 (\alpha + 1)^2 \right] dA \quad (F_5)$$

$$U^* = \frac{(\alpha - 1)^2 a b^3 + (\alpha + 1)^2 b a^3}{12} \quad (F_6)$$

$$\delta U^* = \frac{(\alpha - 1) a b^3 + (\alpha + 1) b a^3}{6} \delta \alpha \quad (F_7)$$

De funktional U^* is stationair, indien geldt:

$$\delta U^* = 0$$

$$(\alpha-1)ab^3 + (\alpha+1)ba^3 = 0$$

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \quad (F8)$$

EEN BENADERING VOOR DE WELVINGSFUNKTIE WORDT DAN:

$$\xi^*(y,z) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot yz \quad ; \quad a \neq b. \quad (F9)$$

VOOR EEN VIERKANT IS (F9) NIET GELDIG. DE WELVINGSFUNKTIE ξ^* IS DAN NIET ANTIHETRISCH T.O.V. DE SYMMETRIE-ASSEN.

IS $\frac{a}{b} \ll 1$, DAN BLIJKT (F9) EEN ZEER GOEDE BENADERING TE ZIJN.

$$\xi^* \approx yz \quad (F10)$$

DE TORSIE-INTEGRAAL KAN WORDEN BERAALD DOOR (F9) TE SUBSTITUEREN IN (F6)

$$J = \frac{1}{3} b a^3 \left[\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \right] \quad (F11)$$

VOOR DE WELVINGSIKTEGRAAL GELDT:

$$T = \int_A \xi^2 dA.$$

M.B.V. (F9) WORDT DIT:

$$T = \left[\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right]^2 \frac{a^3 b^3}{144} \quad (F12)$$

Appendix f

IN DEZE APPENDIX WORDEN DE TORSIE-INTEGRAAL EN DE WELVIJGHSINTEGRAAL VAN EEN RECHTHOEKIGE DWARSDOORSNEDE EXAKT BEPAALD.

UITGANGSPUNT IS DE LINEAIRE THEORIE. BIJ UNIFORME TORSIE GELDT DAN VOOR DE VERPLAATSINGEN:

$$u = \omega \xi(y, z) \quad ; \quad \omega = \frac{du}{dx} = \text{konstant.}$$

$$v = -\alpha z$$

$$w = \alpha y$$

(41)

VOOR DE REKKELEN GELDT:

$$E_{xy} = E_{yx} = \frac{1}{2} \omega \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z \right)$$

$$E_{xz} = E_{zx} = \frac{1}{2} \omega \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y \right)$$

(42)

$$E_{xx} = E_{yy} = E_{zz} = E_{yz} = E_{zy} = 0.$$

VOOR DE SPANNINGEN GELDT:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2G E_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2G E_{xz}$$

(43)

Dus:

$$\sigma_{xy} = G \omega \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z \right)$$

$$\sigma_{xz} = G \omega \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y \right)$$

(44)

INTRODUCIEER NU EEN TORSIEFUNKTIE $F(y, z)$, WAARVOOR GELDT:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial y} - z$$

(45)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = - \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y \right)$$

(46)

DITFERENTIËREN VAN (45) EN (46) GEEFT:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2 \quad (47)$$

Op DE RANDKROMME S GELDT:

$$\frac{\partial S}{\partial y} m_y + \frac{\partial S}{\partial z} m_z = z m_y - y m_z \quad (48)$$

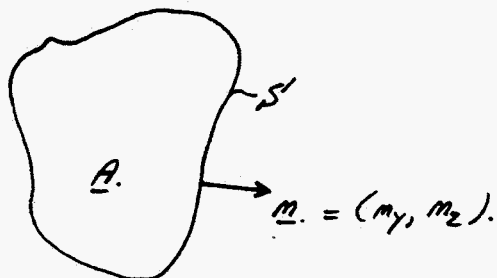
M.b.v. (45) EN (46) VOLGT:

$$\left(z + \frac{\partial F}{\partial z}\right) m_y - \left(y + \frac{\partial F}{\partial y}\right) m_z = z m_y - y m_z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} m_y - \frac{\partial F}{\partial y} m_z = 0 \quad (49)$$

DE RANDKROMME S KAN BESCHREVEN WORDEN DOOR EEN IMPLICIETE FUNKTIE K .

$$K(y, z) = 0 ; y, z \in S. \quad (50)$$



FIGUUR

DE GRADIËNT VAN K STAAT LOODRECHT OP S .

$$\nabla K = \lambda \underline{m} \quad (51)$$

NEMEN WIJ HET UITWENDIG PRODUCT VAN ∇F EN ∇K , DAN VOLGT:

$$\nabla F \times \nabla K = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial y} m_z - \frac{\partial F}{\partial z} m_y, 0, 0 \right)$$

M.b.v. (49) VOLGT:

$$\nabla F \times \nabla K = 0 \quad (52)$$

DE GRADIËNTEN HEBBEN DUS DEZEELFDE RICHTING.

$$\nabla F = \mu \cdot \nabla K; \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (43)$$

UIT DE LAATSTE VERGELIJKING KAN MEN KONKLUDEREN DAT DE TORSIEFUNKTIE OP DE RAND KONSTANT IS.

VOOR HET TORSIEMOMENT M GELDT:

$$M = \int_A \gamma \omega.$$

$$M = \int_A \gamma \omega \int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + y \right)^2 \right] dA \quad (44)$$

SUBSTITUTIE VAN (43) EN (46) GEEFT:

$$M = \gamma \omega \int_A \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dA. \quad (45)$$

M.B.V. HET THEOREMA VAN GREEN (APPENDIX A) VOLGT:

$$M = - \gamma \omega \int_A F \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) dA + \gamma \omega \int_S F \left(\frac{\partial F}{\partial z} m_z + \frac{\partial F}{\partial y} m_y \right) dS$$

MAKEN WIJ NU GEBRUIK VAN (47) EN VAN HET FEIT DAT DE TORSIEFUNKTIE OP DE RAND S KONSTANT IS, DAN VOLGT:

$$M = 2 \gamma \omega \int_A F dA \quad (46)$$

VOOR DE TORSIE-INTEGRAAL J VOLGT EENVOUDIG:

$$J = 2 \int_A F(y, z) dA. \quad (47)$$

BESCHOUW NU HET VOLGENDE MATHEMATISCHE PROBLEEM:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2 \quad 0 < y < a; \quad 0 < z < b \quad (48)$$

$$F(y, 0) = F(y, b) = 0 \quad 0 \leq y \leq a \quad (49)$$

$$F(0, z) = F(a, z) = 0 \quad 0 \leq z \leq b$$

DE TORSIEFUNKTIE IS OP DE RAND KONSTANT. BETREKKING (44) KAN GESPLITST WORDEN IN EEN OPPERVLAKTE-INTEGRAAL EN EEN LIJNINTEGRAAL OVER DE KROMME S . DE LIJNINTEGRAAL LEVERT ECHTER GEEN BIJDRAGE, ZODAT DE KONSTANTE NIET VAN BELANG IS. DE BOVENSTAANDE FORMULERING WORDT OOK WEL EEN DIRICHLET-PROBLEEM VOOR DE POISSON VERGELIJKING GENDEND.

EERST WORDT EEN PARTIKULIERE OPLOSSING Bepaald.

STEL:

$$u = u(y) \quad (420)$$

DEZE OPLOSSING MOET AAN DE DIFFERENTIALVERGELIJKING (48) VOLDOEN.

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -2 \quad (421)$$

$$u(y) = -y^2 + C_0 y + C_1$$

ADEQUATE RANDVOORWAARDEN (ZIE 49) ZIJN:

$$u(0) = u(a) = 0 \quad (422)$$

VOOR DE PARTIKULIERE OPLOSSING GELDT DAN:

$$u(y) = y(a-y). \quad (423)$$

STEL:

$$F(y,z) = u(y) + v(y,z) \quad (424)$$

DAN IS $v(y,z)$ DE OPLOSSING VAN:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < y < a; \quad 0 < z < b \quad (425)$$

$$v(y,0) = v(y,b) = -y(a-y) \quad 0 \leq y \leq a \quad (426)$$

$$v(0,z) = v(a,z) = 0 \quad 0 \leq z \leq b$$

DIT IS DE ZOFENANDE LAPLACE-VERGELIJKING MET INHOMOGENE RANDVOORWAARDEN.

HET PROBLEEM IS OPLOSBAAR N.B.V. SEPERATIE VAN VARIABELEN.

STEL:

$$v(y,z) = Y(y) \cdot Z(z) \quad (427)$$

SUBSTITUTIE VAN (427) IN (425) GEEFT:

$$y''(y)z(z) + y(y)z''(z) = 0$$

$$-\frac{y''(y)}{y(y)} = \frac{z''(z)}{z(z)} = \lambda ; \lambda = \text{konstant.} \quad (428)$$

M.b.v. (428) kan men dan voor $y(y)$ het volgende eigenwaardeprobleem formuleren

$$y''(y) + \lambda y(y) = 0 \quad (429)$$

$$y(0) = y(a) = 0 \quad (430)$$

Stel: $\lambda = 0$

$$y(y) = Ay + B ; A = B = 0$$

Deze oplossing is triviaal. Nu is dus geen eigenwaarde.

Stel: $\lambda \neq 0$; λ is i.h.a. complex

$$y(y) = A \cos \sqrt{\lambda} y + B \sin \sqrt{\lambda} y \quad (431)$$

$$y(0) = A = 0$$

$$y(a) = B \sin \sqrt{\lambda} a = 0$$

Er zijn nu twee mogelijkheden.

$$B = 0 \vee \sin \sqrt{\lambda} a = 0 \quad (432)$$

De eerste mogelijkheid geeft weer een triviale oplossing.

Aan de tweede gelijkheid wordt voldaan, indien:

$$\sqrt{\lambda} a = m\pi ; m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Eigenwaarden:

$$\lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 ; m \in \mathbb{N} \quad (433)$$

Eigenfuncties:

$$\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) ; m \in \mathbb{N} \quad (434)$$

Voor de functie $z(z)$ geldt dan:

$$z''(z) - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 z(z) = 0 \quad (435)$$

$$z(z) = A \exp\left[\frac{m\pi z}{a}\right] + B \exp\left[-\frac{m\pi z}{a}\right] \quad (936)$$

ER IS NU EEN VOORRAAD VAN FUNKTIES GEGREED DIE AAN DE LAPLACE VERGELIJKING EN AAN DE RANDVOORWAARDEN OP $y=0$ EN $y=a$ VOLDOEN.

$$f_m(y, z) = \exp\left[\frac{m\pi z}{a}\right] \sin \frac{m\pi y}{a} \quad ; m \in \mathbb{N}. \quad (937)$$

$$g_m(y, z) = \exp\left[-\frac{m\pi z}{a}\right] \sin \frac{m\pi y}{a} \quad ; m \in \mathbb{N}. \quad (938)$$

DE TOTALE OPLOSSING BESTAAT UIT LINEAIRE KOMBINATIES VAN (937) EN (938).

$$v(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m \exp\left[\frac{m\pi z}{a}\right] + B_m \exp\left[-\frac{m\pi z}{a}\right] \right\} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (939)$$

DE KOEFFICIENTEN A_m EN B_m WORDEN ZO DANIG BEPAARD, DAT (939) TEVENS VOLDOET AAN DE INHOMOGENE RANDVOORWAARDEN (936).

$$v(y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m) \sin \frac{m\pi y}{a} = -y(a-y) \quad ; 0 \leq y \leq a \quad (940)$$

$$v(y, b) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m \exp\left[\frac{m\pi b}{a}\right] + B_m \exp\left[-\frac{m\pi b}{a}\right] \right\} \sin \frac{m\pi y}{a} = -y(a-y) \quad (941)$$

$; 0 \leq y \leq a$

ONTWIKKEL DE FUNKTIE $-y(a-y)$ IN EEN FOURIER-SINUSREEKS.

$$-y(a-y) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (942)$$

$$c_m = -\frac{2}{a} \int_0^a y(a-y) \sin \frac{m\pi y}{a} dy$$

$$c_m = \frac{4a^2}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] \quad (943)$$

$$c_m = \begin{cases} 0 & ; m = \text{EVEN.} \\ \frac{-8a^2}{m^3\pi^3} & ; m = \text{ONEVEN.} \end{cases} \quad (944)$$

VOOR DE KOËFFICIENTEN A_m EN B_m VOLGT:

$$A_m + B_m = C_m$$

$$A_m \exp\left[\frac{m\pi b}{a}\right] + B_m \exp\left[-\frac{m\pi b}{a}\right] = C_m.$$

$$B_m = \frac{C_m \left[\exp\left(\frac{m\pi b}{a}\right) - 1 \right]}{\left[\exp\left(\frac{m\pi b}{a}\right) - \exp\left(-\frac{m\pi b}{a}\right) \right]}$$

$$B_m = \frac{C_m \exp\left[\frac{m\pi b}{2a}\right]}{2 \cosh\left[\frac{m\pi b}{2a}\right]} \quad (945)$$

$$A_m = \frac{C_m \left[1 - \exp\left(-\frac{m\pi b}{a}\right) \right]}{\left[\exp\left(\frac{m\pi b}{a}\right) - \exp\left(-\frac{m\pi b}{a}\right) \right]}$$

$$A_m = \frac{C_m \exp\left[-\frac{m\pi b}{2a}\right]}{2 \cosh\left[\frac{m\pi b}{2a}\right]} \quad (946)$$

M.B.V. (945) EN (946) WORDT (939):

$$v(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{2 \cosh\left[\frac{m\pi b}{2a}\right]} \left[\exp\left\{\frac{m\pi}{a}\left(z - \frac{b}{2}\right)\right\} + \exp\left\{-\frac{m\pi}{a}\left(z - \frac{b}{2}\right)\right\} \right] \cdot \sin\left[\frac{m\pi y}{a}\right]$$

$$v(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{\cosh\left[\frac{m\pi}{a}\left(z - \frac{b}{2}\right)\right]}{\cosh\left[\frac{m\pi b}{2a}\right]} \cdot \sin\left[\frac{m\pi y}{a}\right] \quad (947)$$

M.B.V. (944) VOLGT:

$$v(y, z) = \frac{-9a^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cosh\left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\left(z - \frac{b}{2}\right)\right]}{(2m+1)^3 \cosh\left[\frac{(2m+1)\pi b}{2a}\right]} \cdot \sin\left[\frac{(2m+1)\pi y}{a}\right] \quad (948)$$

$$F(y,z) = u(y) + v(y,z)$$

$$F(y,z) = y(a-y) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi y}{a}}{(2m+1)^3} \cdot \frac{\cosh \frac{(2m+1)\pi(z-\frac{b}{2})}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \quad (949)$$

VOOR DE TORSIE-INTEGRAL (949) VOLGT NA TERMSWIJZE INTEGRATIE:

$$y = \frac{1}{3}ba^3 - \frac{2a^4}{\pi^5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tanh \frac{(m+\frac{1}{2})\pi b}{a}}{(m+\frac{1}{2})^5}$$

$$y = \frac{1}{3}ba^3 \left[1 - \frac{6}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^5} \cdot \frac{\tanh \frac{(m+\frac{1}{2})\pi b}{a}}{a} \right\} \right] \quad (950)$$

NORDEN IN (950) a EN b VERNISSELD DAN MOET HET RESULTAAT GELYK BLYVEN.

DAT BLYKT INDERDAAD HET GEVAL TE ZYJN.

HEEFT DE OORSPRONG V.H. ASSENSTELSEL MEER BETREKKING OP HET ZWAARTEPUNT DAN

VOLGT NA TRANSFORMATIE VOOR DE SPANNINGSFUNKTIE:

$$F(y,z) = \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a}}{(2m+1)^3} \cdot \frac{\cosh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \quad (951)$$

M.B.V. (95) EN (96) KAN DE WELDIJNSFUNKTIE OP EEN KONSTANTE NA WORDEN BEPAALED.

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{8a}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a}}{(2m+1)^2} \cdot \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \quad (952)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y - \frac{8a}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a}}{(2m+1)^2} \cdot \frac{\cosh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \quad (953)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -y - \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\xi(y, z) = yz + \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right)}{(2m+1)^3} \cdot \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} + C(y) \quad (454)$$

DIFFERENTIËREN VAN DEZE BETREKKING GEEFT:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = z - \frac{8a^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} + C'(y) \quad (455)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = z + \frac{\partial F}{\partial z}$$

M.b.v. (452) volgt:

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C$$

DE NULWINKSFUNKTIE IS NIET EENDUIDIG BEPAALD. HET IS DUS NOODZAKELIJK OM EEN EXTRA WAARWAARDE TE FORMULEREN [].

$$\int_A \xi(y, z) dA = 0. \quad (456)$$

NA INTEGRATIE VOLGT:

$$C = 0$$

$$\xi(y, z) = yz + \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right)}{(2m+1)^3} \cdot \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \quad (457)$$

DE NULWINKSFUNKTIE ξ HEEFT DE VOLGENDE EIGENSCHAPPEN:

$$\xi(0, z) = 0$$

$$\xi(y, 0) = 0$$

$$\int_A \xi dA = 0$$

$$\int_A \xi y dA = 0$$

$$\int_A \xi z dA = 0$$

Voor de HELMOLTSZINTEGRAAL geldt:

$$\Gamma = \int_A \xi^2 dA$$

Stel:

$$\xi(y, z) = yz + \varphi(y, z). \quad (458)$$

DAN WORDT DE HELMOLTSZINTEGRAAL:

$$\Gamma = \int_A y^2 z^2 dA + 2 \int_A yz \varphi dA + \int_A \varphi^2 dA \quad (459)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$$

DE DRIE DELEN WORDEN ACHTEREENVOLGENDS UITGEBERKT.

$$\Gamma_1 = \int_A y^2 z^2 dA$$

$$\Gamma_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz$$

$$\Gamma_1 = \frac{a^3 b^3}{144} \quad (460)$$

$$\Gamma_2 = 2 \int_A yz \varphi dA$$

$$\Gamma_2 = \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3 \cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y \cos \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \cdot \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{a} dz \quad (461)$$

DE TWEE INTEGRALEN WORDEN AFZONDERLIJK BEHANDELD.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y \cos \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a} dy = \frac{a}{(2m+1)\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y d \sin \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a}$$

$$= \frac{a}{(2m+1)\pi} \left[y \sin \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sin \frac{(2m+1)\pi(\frac{a}{2}+y)}{a} dy \right]$$

$$= \frac{-a}{(2m+1)\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right)}{a} dy$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right)}{a} dy = \frac{-2a^2}{(2m+1)^2 \pi^2} \quad (y62)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{a} dz = \frac{a}{(2m+1)\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z d \cosh \frac{(2m+1)\pi z}{a}$$

$$= \frac{a}{(2m+1)\pi} \left[z \cosh \frac{(2m+1)\pi z}{a} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cosh \frac{(2m+1)\pi z}{a} dz \right]$$

$$= \frac{a}{(2m+1)\pi} \left[\frac{b \cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}{2a} - \frac{2a}{(2m+1)\pi} \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}{2a} \right]$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{a} dz = \frac{ab}{(2m+1)\pi} \left[\frac{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}{2a} - \frac{2a}{(2m+1)\pi b} \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}{2a} \right] \quad (y63)$$

M.b.v. (y61), (y62) EN (y63) volgt dan:

$$P_2 = \frac{-32a^5 b}{\pi^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} \left[1 - \frac{2a}{(2m+1)\pi b} \frac{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}{2a} \right] \quad (y64)$$

$$P_3 = \int_A \varphi^2(y, z) dA$$

$$P_3 = \frac{64a^4}{\pi^6} \int_A \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right)}{(2m+1)^3} \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \right]^2 dA. \quad (y65)$$

DIT RESULTAAT KAN ANZIENLIJK VEREENVOUDIGD WORDEN N.B.V. DE ORTHOGONALITEITSEIGENSCHAP T.A.V. DE COSINUS.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{k\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right) \cos \frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right) dy = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \frac{a}{2} & k = m \end{cases} \quad (966)$$

DEZE BELANGRIJKE EIGENSCHAP MAAKT HET MOGELIJK OM HET INTEGRALTEKEN BINNEN HET SOMMATIONTEKEN TE BRENGEN.

$$I_3 = \frac{64a^4}{\pi^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\cos^2 \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right) dy}{(2m+1)^6}}{\frac{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sinh^2 \frac{(2m+1)\pi z}{a} dz}{\cosh^2 \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}} \quad (967)$$

DE INTEGRALEN WORDEN MEER AFZONDERLIJK BEHANDELD.

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} [\cos 2\varphi + 1]$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\cos^2 \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right) dy}{a} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[1 + \frac{\cos \frac{(2m+1)2\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right)}{a} \right] dy$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\cos^2 \frac{(2m+1)\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + y\right) dy}{a} = \frac{a}{2} \quad (968)$$

$$\sinh^2 \varphi = \frac{1}{2} [\cosh 2\varphi - 1]$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sinh^2 \frac{(2m+1)\pi z}{a} dz}{a} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{\cosh \frac{(2m+1)2\pi z}{a}}{a} - 1 \right] dz$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sinh^2 \frac{(2m+1)\pi z}{a} dz}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{a}{2\pi(2m+1)} \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi b}{a}}{a} \quad (969)$$

N.B.V. (967), (968) EN (969) VOLGT:

$$\Gamma_3 = \frac{16a^5b}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a}{\pi b(2m+1)} \cdot \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi b}{a}}{(2m+1)^6 \cdot \frac{\cosh^2 \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}{2a}} - 1 \quad (470)$$

M.b.v. (460), (464) EN (470) WORDT DE MELVINGSINTEGRAL :

$$\frac{\Gamma}{a^5b} = \frac{b^2}{144a^2} + \frac{16}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} \left[-2 + \frac{4a}{(2m+1)\pi b} \frac{\tanh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}{2a} + \frac{a}{-1 + \frac{(2m+1)\pi b \sinh \frac{(2m+1)\pi b}{a}}{\cosh^2 \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}} \right] \quad (471)$$

DE GEOMETRISCHE GROOTHEDEN DIE BETREKKING HEBBEN OP DE MELVING ZIJN NIJ BEKEND.

MET DE TORSIEFUNKTIE OFTEWEL SPANNINGSFUNKTIE KAN MEN GERAKTELIJK DE SCHUIFSpanningen bepalen.

Mit (44), (45) EN (46) volgt:

$$\sigma_{xy} = \gamma \omega \frac{\partial F}{\partial z} \quad (472)$$

$$\sigma_{xz} = -\gamma \omega \frac{\partial F}{\partial y} \quad (473)$$

M.b.v. (452) volgt:

$$\sigma_{xy} = -\gamma \omega \frac{8a}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi}{2} \left(\frac{a}{2} + y \right)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{\sinh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \quad (474)$$

M.b.v. (453) volgt:

$$\sigma_{xz} = \gamma \omega \left[2y + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi}{2} \left(y + \frac{a}{2} \right)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{\cosh \frac{(2m+1)\pi z}{a}}{\cosh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \right] \quad (475)$$

Voor $b \geq a$ blijkt dat de maximale schuifspanning aanwezig is in de punten
 $(y, z) = (\pm \frac{a}{2}, 0)$

$$\tau_{xy} = \gamma_0 \left[a - \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{\cosh(2n+1)\pi b} \right] \quad (476)$$

$2a$

APPENDIX H

D02 - Ordinary Differential Equations

D02RAF

D02RAF - NAG FORTRAN Library Routine Document

NOTE: before using this routine, please read the appropriate implementation document to check the interpretation of *bold italicised* terms and other implementation-dependent details. The routine name may be precision-dependent.

1. Purpose

D02RAF solves the two-point boundary-value problem with general boundary conditions for a system of ordinary differential equations, using a deferred correction technique and Newton iteration.

2. Specification

```

SUBROUTINE D02RAF (N, MNP, NP, NUMBEG, NUMMIX, TOL, INIT, X,
1  Y, IY, ABT, FCN, G, IJAC, JACOB, JACOBG, DELEPS,
2  JACEPS, JACGEP, WORK, LWORK, IWORK, LIWORK, IFAIL)
C  INTEGER N, MNP, NP, NUMBEG, NUMMIX, INIT, IY, IJAC, LWORK,
C  1  IWORK(LIWORK), LIWORK, IFAIL
C  real TOL, X(MNP), Y(IY,MNP), ABT(N), DELEPS, WORK(LWORK)
C  EXTERNAL FCN, G, JACOB, JACOBG, JACEPS, JACGEP

```

3. Description

D02RAF solves a two-point boundary-value problem for a system of N ordinary differential equations in a range (A,B) with $B > A$. The system is written in the form

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

and the derivatives f_i are evaluated by a subroutine FCN supplied by the user. With the differential equations (1) must be given a system of N (nonlinear) boundary conditions

$$g_i(y(A), y(B)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

where

$$y(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x)]^T. \quad (2)$$

The functions g_i are evaluated by a subroutine G supplied by the user. The solution is computed using a finite-difference technique with deferred correction allied to a Newton iteration to solve the finite-difference equations. The technique used is described fully in [1].

The user must supply an absolute error tolerance and may also supply an initial mesh for the finite-difference equations and an initial approximate solution (alternatively a default mesh and approximation are used). The approximate solution is corrected using Newton iteration and deferred correction. Then, additional points are added to the mesh and the solution is recomputed with the aim of making the error everywhere less than the user's tolerance and of approximately equidistributing the error on the final mesh. The solution is returned on this final mesh.

If the solution is required at a few specific points

then these should be included in the initial mesh. If, on the other hand, the solution is required at several specific points then the user should use the interpolation routines provided in the E01 chapter if these points do not themselves form a convenient mesh.

The Newton iteration requires Jacobian matrices

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right], \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_j(A)} \right] \text{ and } \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_j(B)} \right].$$

These may be supplied by the user through subroutines JACOB for $\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right]$ and JACOBG for the others. Alternatively the Jacobians may be calculated by numerical differentiation using the algorithm described in [2].

For problems of the type (1) and (2) for which it is difficult to determine an initial approximation from which the Newton iteration will converge, a continuation facility is provided. The user must set up a family of problems

$$y' = f(x, y, \epsilon), \quad g(y(A), y(B), \epsilon) = 0 \quad (3)$$

where $f = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$ etc., and where ϵ is a continuation parameter. The choice $\epsilon = 0$ must give a problem (3) which is easy to solve and $\epsilon = 1$ must define the problem whose solution is actually required. The routine solves a sequence of problems with ϵ values

$$0 = \epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_p = 1 \quad (4)$$

The number p and the values ϵ_i are chosen by the routine so that each problem can be solved using the solution of its predecessor as a starting

approximation. Jacobians $\frac{\partial f}{\partial \epsilon}$ and $\frac{\partial g}{\partial \epsilon}$ are required and they may be supplied by the user via routines JACEPS and JACGEP respectively or may be computed by numerical differentiation.

4. References

- [1] PEREYRA, V.
PASVA3: An Adaptive Finite-Difference Fortran Program for First Order Nonlinear, Ordinary Boundary Problems. In Childs, B., Scott, M., Daniel, J.W., Denman, E., and Nelson, P. (eds.) 'Codes for Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations', Lecture Notes in Computer Science, 76, 1979.
- [2] CURTIS, A.R., POWELL, M.J.D. and REID, J.K.
On the Estimation of Sparse Jacobian Matrices. J. Inst. Maths. Applics, 13, pp. 117-119, 1974.

5. Parameters

N - INTEGER.

On entry, N must specify the number of differential equations.
Unchanged on exit.

MNP - INTEGER.

On entry, MNP must be set to the maximum permitted number of points in the finite-difference mesh, $MNP \geq 32$. If LWORK or LIWORK (see below) is too small then internally MNP will be replaced by the maximum permitted by these values. (A warning message will be output if on entry IFAIL is set to obtain monitoring information.)
Unchanged on exit.

NP - INTEGER.

Before entry, NP must be set to the number of points to be used in the initial mesh $4 \leq NP \leq MNP$.
On exit, NP contains the number of points in the final mesh.

NUMBEG - INTEGER.

On entry, NUMBEG must specify the number of left hand boundary conditions (that is the number involving y(A) only).
 $0 \leq NUMBEG < N$.
Unchanged on exit.

NUMMIX - INTEGER.

On entry, NUMMIX must specify the number of coupled boundary conditions (that is the number involving both y(A) and y(B)).
 $0 \leq NUMMIX$;
 $NUMBEG + NUMMIX \leq N$.
Unchanged on exit.

TOL - real.

On entry, TOL must specify a positive absolute error tolerance. If
 $A = x_1 < x_2 < \dots < x_{NP} = B$
is the final mesh, $z_j(x_i)$ is the j(th) component of the approximate solution at x_i , and $y_j(x)$ is the j(th) component of the true solution of (1) and (2), then, except in extreme circumstances, it is expected that
 $|z_j(x_i) - y_j(x_i)| \leq TOL, \quad i = 1, 2, \dots, NP,$
 $j = 1, 2, \dots, N.$
(5)

Unchanged on exit.

INIT - INTEGER.

On entry, INIT must specify whether the user wishes to supply an initial mesh and approximate solution ($INIT \neq 0$) or whether default values are to be used, ($INIT = 0$).
Unchanged on exit.

X - real array of DIMENSION (MNP).

Before entry, the user must set $X(1) = A$ and $X(NP) = B$. If $INIT = 0$ on entry a default equispaced mesh will be used, otherwise the user must specify a mesh satisfying
 $A = X(1) < X(2) < \dots < X(NP) = B$ (6)
On exit, $X(1), X(2), \dots, X(NP)$ define the final mesh (with the returned value of NP) satisfying (6).

Y - real array of DIMENSION (IY, MNP).

If $INIT = 0$ on entry, then Y need not be set.
If $INIT \neq 0$ before entry, then the array Y must contain an initial approximation to the solution such that $Y(J, I)$ contains an approximation to
 $y_j(x_I), \quad I = 1, 2, \dots, NP,$
 $J = 1, 2, \dots, N.$
On a successful exit Y contains the approximate solution $z_j(x_i)$ satisfying (5) on the final mesh, that is
 $Y(J, I) = z_j(x_I), \quad I = 1, 2, \dots, NP,$
 $J = 1, 2, \dots, N,$
where NP is the number of points in the final

mesh. If an error has occurred then Y contains the latest approximation to the solution. The remaining columns of Y are not used.

IY - INTEGER.

On entry, IY must specify the first dimension of Y as declared in the calling (sub)program. $IY \geq N$.

Unchanged on exit.

ABT - real array of DIMENSION (N).

On successful exit, ABT(I), $I = 1, 2, \dots, N$, holds the largest estimated error (in magnitude) of the I(th) component of the the solution over all mesh points.

FCN - SUBROUTINE, supplied by the user.

FCN must evaluate the functions f_i (i.e., the derivatives y'_i) at the general point X for a given value of EPS (see equation 3).

Its specification is:

```
SUBROUTINE FCN(X, EPS, Y, F, N)
INTEGER N
real X, EPS, Y(N), F(N)
```

X - real.

On entry, X specifies the value of the argument X. Its value must not be changed.

EPS - real.

On entry, EPS specifies the value of the continuation parameter, ϵ . This is 1 if continuation is not being used. Its value must not be changed.

Y - real array of DIMENSION (N).

On entry, Y(i) contains the value of the argument y_i for $i = 1, 2, \dots, N$. These values must not be changed.

F - real array of DIMENSION (N).

On exit, F(i) must contain the values of f_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

N - INTEGER.

On entry, N specifies the number of equations. Its value must not be changed.

FCN must be declared as EXTERNAL in the (sub)program from which D02RAF is called.

G - SUBROUTINE, supplied by the user.

G must evaluate the boundary conditions in equation (3) and place them in BC(i) $i = 1, 2, \dots, N$.

Its specification is:

```
SUBROUTINE G(EPS, YA, YB, BC, N)
INTEGER N
real EPS, YA(N), YB(N), BC(N)
```

EPS - real.

On entry, EPS specifies the value of the continuation parameter, ϵ . This is 1 if continuation is not being used. Its value must not be changed.

YA - real array of DIMENSION (N).

On entry, YA(i) contains the value $y_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$. These values must not be changed.

YB - real array of DIMENSION (N).

On entry, YB(i) contains the value $y_i(B)$, $i = 1, 2, \dots, N$. These values must not be changed.

BC - real array of DIMENSION (N).

On exit, BC(i) must contain the value $g_i(y(A), y(B), \epsilon)$, $i = 1, 2, \dots, N$. These must be ordered as follows:

- (i) First, the NUMBEG conditions involving only $y(A)$ (that is YA).
- (ii) Next, the NUMMIX coupled conditions involving both $y(A)$ and $y(B)$ (that is YA and YB).
- (iii) Finally, the $N - \text{NUMBEG} - \text{NUMMIX}$ conditions involving $y(B)$ (that is YB).

N - INTEGER.

On entry, N specifies the number of equations. Its value must not be changed.

G must be declared as EXTERNAL in the (sub)program from which D02RAF is called.

IJAC - INTEGER.

If, on entry, IJAC = 0 then the Jacobian matrices for the Newton iterations are calculated by numerical differentiation, and the parameters JACOB, JACOBG, JACEPS and JACGEP may be replaced by dummy actual parameters in the call to D02RAF. (The NAG routines D02GAZ, D02GAY, D02GAX and D02GAX respectively may be used as the dummy parameters.) If IJAC \neq 0 then the user must supply routines JACOB and JACOBG and also when continuation is used, routines JACEPS and JACGEP.

Unchanged on exit.

D02RAF

D02 - Ordinary Differential Equations

JACOBF - SUBROUTINE, supplied by the user.

JACOBF must evaluate the Jacobian $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$ at the point (x,y) and place $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ in $F(i,j)$,

$i,j = 1,2,\dots,N$.

Its specification is:

```
SUBROUTINE JACOBF(X, EPS, Y, F, N)
  INTEGER N
  real X, EPS, Y(N), F(N, N)
```

X - real.

On entry, X specifies the value of the argument X. Its value must not be changed.

EPS - real.

On entry, EPS specifies the value of the continuation parameter ϵ . This is 1 if continuation is not being used. Its value must not be changed.

Y - real array of DIMENSION (N).

On entry, Y(i) contains the value of the argument y_i , $i = 1,2,\dots,N$. These values must not be changed.

F - real array of DIMENSION (N,N).

On exit, F(i,j) contains the value of $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, evaluated at the point (x,y) , for $i,j = 1,2,\dots,N$.

N - INTEGER.

On entry, N specifies the number of equations. Its value must not be changed.

JACOBF must be declared as EXTERNAL in the (sub)program from which D02RAF is called.

JACOBG - SUBROUTINE, supplied by the user.

JACOBG must evaluate the Jacobians $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j(A)}\right)$ and $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j(B)}\right)$ and place them in AJ and BJ respectively. The ordering of the rows of AJ and BJ must correspond to the ordering of the boundary conditions described in the specification of subroutine G above.

The specification of JACOBG is:

```
SUBROUTINE JACOBG(EPS, YA, YB,
  1 AJ, BJ, N)
  INTEGER N
  real EPS, YA(N), YB(N),
  1 AJ(N, N), BJ(N, N)
```

EPS - real.

On entry, EPS specifies the value of the continuation parameter, ϵ . This is 1 if continuation is not being used. Its value must not be changed.

YA - real array of DIMENSION (N).

On entry, YA(i) contains $y_i(A)$, $i = 1,2,\dots,N$. These values must not be changed.

YB - real array of DIMENSION (N).

On entry, YB(i) contains the value of $y_i(B)$, $i = 1,2,\dots,N$. These values must not be changed.

AJ - real array of DIMENSION (N,N).

On exit, AJ(i,j) contains $\frac{\partial g_i}{\partial y_j(A)}$,
 $i,j = 1,2,\dots,N$.

BJ - real array of DIMENSION (N,N).

On exit, BJ(i,j) contains $\frac{\partial g_i}{\partial y_j(B)}$,
 $i,j = 1,2,\dots,N$.

N - INTEGER.

On entry, N specifies the number of equations. Its value must not be changed.

JACOBG must be declared as EXTERNAL in the (sub)program from which D02RAF is called.

DELEPS - real.

Before entry, DELEPS must be given a value which specifies whether continuation is required. If $DELEPS \leq 0.0$ or $DELEPS \geq 1.0$ then it is assumed that continuation is not required. If $0.0 < DELEPS < 1.0$ then it is assumed that continuation is required unless $DELEPS < macheps^{\dagger}$ (where $macheps$ is the smallest number such that $1.0 + macheps > 1.0$) when an error exit is taken. DELEPS is used as the increment $e_2 - e_1$ (see (4)) and the choice $DELEPS = 0.1$ is recommended.

On exit, DELEPS contains an overestimate of the increment $e_p - e_{p-1}$ (in fact the value of

the increment which would have been tried if the restriction $\epsilon_p = 1$ had not been imposed). If continuation was not requested then DELEPS = 0.0 on exit.

If continuation is not requested then the parameters JACEPS and JACGEP may be replaced by dummy actual parameters in the call to D02RAF. (The NAG routines D02GAZ and D02GAX respectively may be used as the dummy parameters.)

JACEPS - SUBROUTINE, supplied by the user.

JACEPS must evaluate the derivative $\frac{\partial f_i}{\partial \epsilon}$ at the point X if continuation is being used. Otherwise the user is advised to use D02GAZ as the actual parameter JACEPS.

The specification of JACEPS is:

```
SUBROUTINE JACEPS(X, EPS, Y, F, N)
INTEGER N
real X, EPS, Y(N), F(N)
```

X - *real*.

On entry, X specifies the value of the argument X. Its value must not be changed.

EPS - *real*.

On entry, EPS must specify the value of the continuation parameter, ϵ . Its value must not be changed.

Y - *real* array of DIMENSION (N).

On entry, Y(i) contains the solution values y_i at the point X, $i = 1, 2, \dots, N$. These values must not be changed.

F - *real* array of DIMENSION (N).

On exit, F(i) must contain $\frac{\partial f_i}{\partial \epsilon}$ at the point (x, y), $i = 1, 2, \dots, N$.

N - INTEGER.

On entry, N specifies the number of equations. Its value must not be changed.

JACEPS must be declared as EXTERNAL in the (sub)program from which D02RAF is called.

JACGEP - SUBROUTINE, supplied by the user.

JACGEP must evaluate the derivatives $\frac{\partial g_i}{\partial \epsilon}$ if continuation is being used. Otherwise the user is advised to use D02GAX as the actual

parameter for JACGEP.

The specification of JACGEP is:

```
SUBROUTINE JACGEP(EPS, YA, YB,
1 BCEP, N)
INTEGER N
real EPS, YA(N), YB(N), BCEP(N).
```

EPS - *real*.

On entry, EPS must specify the value of the continuation parameter ϵ . Its value must not be changed.

YA - *real* array of DIMENSION (N).

On entry, YA(i) contains the value of $y_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, N$. These values must not be changed.

YB - *real* array of DIMENSION (N).

On entry, YB(i) contains the value of $y_i(B)$, $i = 1, 2, \dots, N$. These values must not be changed.

BCEP - *real* array of DIMENSION (N).

On exit, BCEP(i) must contain $\frac{\partial g_i}{\partial \epsilon}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

N - INTEGER.

On entry, N specifies the number of equations. Its value must not be changed.

JACGEP must be declared as EXTERNAL in the (sub)program from which D02RAF is called.

WORK - *real* array of DIMENSION (LWORK).

Used as working space.

LWORK - INTEGER.

On entry, LWORK must specify the dimension of the array WORK.

$LWORK \geq MNP(3N^2 + 6N + 2) + 4N^2 + 3N$

Unchanged on exit.

IWORK - INTEGER array of DIMENSION (LIWORK).

Used as working space.

LIWORK - INTEGER.

On entry, LIWORK must specify the dimension of the array IWORK:

$LIWORK \geq MNP \times (2 \times N + 1) + N_{if}$
IJAC $\neq 0$

and

$$\text{LIWORK} \geq \text{MNP} \times (2 \times \text{N} + 1) + \text{N}^2 + 4 \times \text{N} + 2,$$

if $\text{IJAC} = 0$.

Unchanged on exit.

IFAIL - INTEGER.

For this routine, the normal use of IFAIL is extended to control the printing of error messages and monitoring information as well as specifying hard or soft failure (see Chapter P01).

Before entry, IFAIL must be set to a value with the decimal expansion cba, where each of the decimal digits c, b and a must have the value 0 or 1.

a = 0 specifies hard failure, otherwise soft failure;

b = 0 suppresses error messages, otherwise error messages will be printed (see Section 6);

c = 0 suppresses monitoring information, otherwise monitoring information will be printed.

The recommended value for inexperienced users is 110 (i.e. hard failure with all error messages and monitoring information printed).

Unless the routine detects an error (see Section 6), IFAIL contains 0 on exit.

6. Error Indicators and Warnings

Errors detected by the routine:

IFAIL = 1

One or more of the parameters N, MNP, NP, NUMBEG, NUMMIX, TOL, DELEPS, LWORK or LIWORK has been incorrectly set, or $X(1) \geq X(\text{NP})$ or the mesh points X(I) are not ordered as in (6).

IFAIL = 2

A finer mesh is required for the accuracy requested; that is MNP is not large enough. This error exit normally occurs when the problem being solved is difficult (for example, there is a boundary layer) and high accuracy is requested. A poor initial choice of mesh points will make this error exit more likely.

IFAIL = 3

The Newton iteration has failed to converge. There are several possible causes for this error:

- (i) Faulty coding in one of the Jacobian calculation routines;
- (ii) If $\text{IJAC} = 0$ then inaccurate Jacobians may have been calculated numerically (this is a very unlikely cause);
- (iii) A poor initial mesh or initial approximate solution has been selected either by the user or by default or there are not enough points in the initial mesh. Possibly, the user should try the continuation facility.

IFAIL = 4

The Newton iteration has reached roundoff error level. It could be however that the answer returned is satisfactory. The error is likely to occur if too high an accuracy is requested.

IFAIL = 5

The Jacobian calculated by JACOBG (or the equivalent matrix calculated by numerical differentiation) is singular. This may occur due to faulty coding of JACOBG or, in some circumstances, to a zero initial choice of approximate solution (such as is chosen when $\text{INIT} = 0$).

IFAIL = 6

There is no dependence on ϵ when continuation is being used. This can be due to faulty coding of JACEPS or JACGEP or, in some circumstances, to a zero initial choice of approximate solution (such as is chosen when $\text{INIT} = 0$).

IFAIL = 7

DELEPS is required to be less than macheps for continuation to proceed. It is likely that either the problem (3) has no solution for some value near the current value of EPS (see the advisory print out from D02RAF) or that the problem is so difficult that even with continuation it is unlikely to be solved using this routine. If the latter cause is suspected then using more mesh points initially may help.

IFAIL = 8

IFAIL = 9

Indicates that a serious error has occurred in

a call to D02RAF or D02RAR respectively. Check all array subscripts and subroutine parameter lists in calls to D02RAF. Seek expert help.

7. Auxiliary Routines

Details are distributed to sites in machine-readable form.

8. Timing

There are too many factors present to quantify the timing. The time taken is negligible only on very simple problems.

9. Storage

The storage occupied by internally declared arrays is 250 *real* elements.

10. Accuracy

The solution returned by the routine will be accurate to the user's tolerance as defined by the relation (5) except in extreme circumstances. The final error estimate over the whole mesh for each component is given in the array ABT. If too many points are specified in the initial mesh, the solution may be more accurate than requested

and the error may not be approximately equidistributed.

11. Further Comments

The routine uses a labelled COMMON block AD02RA.

The user is strongly recommended to set IFAIL to obtain self-explanatory error messages, and also monitoring information about the course of the computation. The user may select the channel numbers on which this output is to appear by calls of X04AAF (for error messages) or X04ABF (for monitoring information) – see Section 13 for an example. Otherwise the default channel numbers will be used, as specified in the implementation document.

In the case where the user wishes to solve a sequence of similar problems, the use of the final mesh and solution from one case as the initial mesh is strongly recommended for the next.

12. Keywords

Boundary Value Problems,
Deferred Correction,
Differential Equations, ordinary,
Finite – Difference Method.

13. Example

We solve the differential equation

$$y''' = -yy'' - 2\epsilon(1-y^2)$$

with $\epsilon = 1$ and boundary conditions

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(10) = 1$$

to an accuracy specified by $TOL = 1.0E-4$. The continuation facility is used with the continuation parameter ϵ introduced as in the differential equation above and with $DELEPS = 0.1$ initially. (The continuation facility is not needed for this problem and is used here for illustration.)

Note the calls to X04AAF and X04ABF prior to the call to D02RAF.

WARNING: This *single precision* example program may require amendment for certain implementations. The results produced may not be the same. If in doubt, please seek further advice (see *Essential Introduction* to the Library Manual).

13.1. Program Text

```
C   D02RAF EXAMPLE PROGRAM TEXT
C   MARK 8 RELEASE. NAG COPYRIGHT 1979.
C   .. LOCAL SCALARS ..
      REAL DELEPS, TOL
      INTEGER I, IFAIL, IJAC, INIT, J, LIWORK, LWORK, MNP, N, NOUT,
      * NP, NUMBEG, NUMMIX
C   .. LOCAL ARRAYS ..
      REAL ABT(3), WORK(2128), X(40), Y(3,40)
      INTEGER IWORK(303)
C   .. SUBROUTINE REFERENCES ..
```

D02RAF

D02 - Ordinary Differential Equations

```

C   D02RAF, X04AAF, X04ABF
C   ..
EXTERNAL FCN, G, JACEPS, JACGEP, JACOBF, JACOBG
DATA NOUT /6/
WRITE (NOUT,99997)
WRITE (NOUT,99996)
CALL X04AAF(1, NOUT)
CALL X04ABF(1, NOUT)
TOL = 1.0E-4
LWORK = 2128
LIWORK = 303
MNP = 40
N = 3
NP = 17
NUMBEG = 2
NUMMIX = 0
X(1) = 0.0
X(NP) = 10.0
INIT = 0
DELEPS = 0.1
IJAC = 1
IFAIL = 111
CALL D02RAF(N, MNP, NP, NUMBEG, NUMMIX, TOL, INIT, X, Y, 3,
* ABT, FCN, G, IJAC, JACOBF, JACOBG, DELEPS, JACEPS, JACGEP,
* WORK, LWORK, IWORK, LIWORK, IFAIL)
IF (IFAIL.NE.0) GO TO 20
WRITE (NOUT,99999) NP
WRITE (NOUT,99998) (X(J),(Y(I,J),I=1,N),J=1,NP)
WRITE (NOUT,99995) (ABT(I),I=1,N)
20 STOP
99999 FORMAT (27HOSOLUTION ON FINAL MESH OF , I2, 7H POINTS/7X,
* 4HX(I), 5X, 5HY1(I), 8X, 5HY2(I), 8X, 5HY3(I))
99998 FORMAT (1X, OPF10.3, 1P3E13.4)
99997 FORMAT (4(1X/), 31H D02RAF EXAMPLE PROGRAM RESULTS/1X)
99996 FORMAT (1X/37HOCALCULATION USING ANALYTIC JACOBIANS)
99995 FORMAT (38HOMAXIMUM ESTIMATED ERROR BY COMPONENTS/1H , 10X,
* 1P3E13.4)
END
SUBROUTINE FCN(X, EPS, Y, F, M)
C   .. SCALAR ARGUMENTS ..
REAL EPS, X
INTEGER M
C   .. ARRAY ARGUMENTS ..
REAL F(M), Y(M)
C   ..
F(1) = Y(2)
F(2) = Y(3)
F(3) = -Y(1)*Y(3) - 2.0*(1.0-Y(2)*Y(2))*EPS
RETURN
END
SUBROUTINE G(EPS, Y, Z, AL, M)
C   .. SCALAR ARGUMENTS ..
REAL EPS
INTEGER M
C   .. ARRAY ARGUMENTS ..

```



```

      REAL AL(M), Y(M), Z(M)
C
      ..
      AL(1) = Y(1)
      AL(2) = Y(2)
      AL(3) = Z(2) - 1.0
      RETURN
      END
      SUBROUTINE JACEPS(X, EPS, Y, F, M)
C
      .. SCALAR ARGUMENTS ..
      REAL EPS, X
      INTEGER M
C
      .. ARRAY ARGUMENTS ..
      REAL F(M), Y(M)
C
      ..
      F(1) = 0.0
      F(2) = 0.0
      F(3) = -2.0*(1.0-Y(2)*Y(2))
      RETURN
      END
      SUBROUTINE JACGEP(EPS, Y, Z, AL, M)
C
      .. SCALAR ARGUMENTS ..
      REAL EPS
      INTEGER M
C
      .. ARRAY ARGUMENTS ..
      REAL AL(M), Y(M), Z(M)
C
      ..
C
      .. LOCAL SCALARS ..
      INTEGER I
C
      ..
      DO 20 I=1,3
          AL(I) = 0.0
20 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE JACOFB(X, EPS, Y, F, M)
C
      .. SCALAR ARGUMENTS ..
      REAL EPS, X
      INTEGER M
C
      .. ARRAY ARGUMENTS ..
      REAL F(M,M), Y(M)
C
      ..
C
      .. LOCAL SCALARS ..
      INTEGER I, J
C
      ..
      DO 40 I=1,3
          DO 20 J=1,3
              F(I,J) = 0.0
20 CONTINUE
40 CONTINUE
      F(1,2) = 1.0
      F(2,3) = 1.0
      F(3,1) = -Y(3)
      F(3,2) = 4.0*Y(2)*EPS
      F(3,3) = -Y(1)
      RETURN

```

```

      END
      SUBROUTINE JACOBG(EPS, Y, Z, A, B, M)
C     .. SCALAR ARGUMENTS ..
      REAL EPS
      INTEGER M
C     .. ARRAY ARGUMENTS ..
      REAL A(M,M), B(M,M), Y(M), Z(M)
C     ..
C     .. LOCAL SCALARS ..
      INTEGER I, J
C     ..
      DO 40 I=1,3
        DO 20 J=1,3
          A(I,J) = 0.0
          B(I,J) = 0.0
20     CONTINUE
40     CONTINUE
      A(1,1) = 1.0
      A(2,2) = 1.0
      B(3,2) = 1.0
      RETURN
      END

```

13.2. Program Data

None.

13.3. Program Results

D02RAF EXAMPLE PROGRAM RESULTS

CALCULATION USING ANALYTIC JACOBIANS

D02RAF MONITORING INFORMATION

MONITORING NEWTON ITERATION

```

NUMBER OF POINTS IN CURRENT MESH = 17
CORRECTION NUMBER 0 RESIDUAL SHOULD BE .LE. 1.00E 00
ITERATION NUMBER 0 RESIDUAL = 1.00E 00
SQUARED NORM OF CORRECTION = 9.90E 01
SQUARED NORM OF GRADIENT = 1.00E 00
SCALAR PRODUCT OF CORRECTION AND GRADIENT = 1.00E 00
ITERATION NUMBER 1 RESIDUAL = 5.59E-01
CONTINUATION PARAMETER EPSILON = 2.00E-01 DELEPS = 2.00E-01

```

MONITORING NEWTON ITERATION

Monitoring information omitted.

```

NUMBER OF NEW POINTS 5
MONITORING NEWTON ITERATION

```

```

NUMBER OF POINTS IN CURRENT MESH = 33
CORRECTION NUMBER 1 RESIDUAL SHOULD BE .LE. 1.22E-05
ITERATION NUMBER 0 RESIDUAL = 3.58E-04

```

SQUARED NORM OF CORRECTION = 1.70E-06
 SQUARED NORM OF GRADIENT = 2.89E-07
 SCALAR PRODUCT OF CORRECTION AND GRADIENT = 1.28E-07
 ITERATION NUMBER 1 RESIDUAL = 2.70E-08
 MESH SELECTION

NUMBER OF NEW POINTS 0
 CORRECTION NUMBER 1 ESTIMATED MAXIMUM ERROR = 6.92E-05

ESTIMATED ERROR BY COMPONENTS
 6.92E-05 1.81E-05 6.42E-05
 SOLUTION ON FINAL MESH OF 33 POINTS

X(I)	Y1(I)	Y2(I)	Y3(I)
0.000	0.0000E 00	0.0000E 00	1.6872E 00
0.062	3.2142E-03	1.0155E-01	1.5626E 00
0.125	1.2532E-02	1.9536E-01	1.4398E 00
0.188	2.7476E-02	2.8159E-01	1.3203E 00
0.250	4.7578E-02	3.6049E-01	1.2054E 00
0.375	1.0149E-01	4.9760E-01	9.9235E-01
0.500	1.7093E-01	6.0965E-01	8.0477E-01
0.625	2.5299E-01	6.9991E-01	6.4376E-01
0.703	3.0954E-01	7.4673E-01	5.5629E-01
0.781	3.6950E-01	7.8708E-01	4.7842E-01
0.938	4.9776E-01	8.5129E-01	3.4901E-01
1.094	6.3461E-01	8.9774E-01	2.5017E-01
1.250	7.7761E-01	9.3077E-01	1.7628E-01
1.458	9.7480E-01	9.5983E-01	1.0768E-01
1.667	1.1768E 00	9.7733E-01	6.3852E-02
1.875	1.3815E 00	9.8758E-01	3.6741E-02
2.031	1.5362E 00	9.9224E-01	2.3792E-02
2.188	1.6915E 00	9.9523E-01	1.5143E-02
2.500	2.0031E 00	9.9828E-01	5.8470E-03
2.656	2.1591E 00	9.9900E-01	3.5275E-03
2.813	2.3153E 00	9.9943E-01	2.0894E-03
3.125	2.6277E 00	9.9983E-01	7.0180E-04
3.750	3.2526E 00	9.9998E-01	1.1337E-04
4.375	3.8776E 00	1.0000E 00	6.5600E-06
5.000	4.5026E 00	1.0000E 00	5.7085E-06
5.625	5.1276E 00	1.0000E 00	-1.2928E-06
6.250	5.7526E 00	1.0000E 00	5.4482E-07
6.875	6.3776E 00	1.0000E 00	-2.2880E-07
7.500	7.0026E 00	1.0000E 00	8.9176E-08
8.125	7.6276E 00	1.0000E 00	-3.5784E-08
8.750	8.2526E 00	1.0000E 00	1.5339E-08
9.375	8.8776E 00	1.0000E 00	-6.7001E-09
10.000	9.5026E 00	1.0000E 00	3.5393E-09

MAXIMUM ESTIMATED ERROR BY COMPONENTS

6.9244E-05 1.8051E-05 6.4213E-05

Appendix I

VAXIB

DATE & TIME PRINTED: TUESDAY, JULY 7, 1987 @ 09:06:32.

```

100  C   PROGRAMMA VAXIB (TORSIE VAN AXIAAL INGEKLEMDE
110  C   BALKEN VOLGENS DE ST. VENANT)
120  C   NUM. OPL. VAN HET NIET-LINEAIRE
130  C   TORSIE-PROBLEEM.
140  C   RANDVOORWAARDEN : u(0)=u(1)=0
150  C   a^(0)=a^(1)=0
160  FILE 5(KIND=REMOTE)
170  FILE 6(KIND=REMOTE)
180  FILE 7(KIND=DISK,PROTECTION=SAVE,NEWFILE=TRUE,AREASIZE=15)
190  BLOCK GLOBALS
200  $ INCLUDE "NAGFLIB/FORTRAN/DECLARATION ON APPL"
210  END
220  C
230  $ INCLUDE "NAGFLIB/D/FORTRAN/DO2RAF ON APPL"
240  $ INCLUDE "NAGFLIB/X/FORTRAN/XO4AAF ON APPL"
250  $ INCLUDE "NAGFLIB/X/FORTRAN/XO4ABF ON APPL"
260  $ INCLUDE "NAGFLIB/D/FORTRAN/DO2GAZ ON APPL"
270  $ INCLUDE "NAGFLIB/D/FORTRAN/DO2GAX ON APPL"
280  C
290  COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
300  REAL OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
310  C
320  REAL DELEPS, TOL
330  INTEGER I, IFAIL, IJAC, INIT, J, LIWORK, LWORK, MNP, N,
340  *NP, NUMBEG, NUMMIX, IY
350  INTEGER IWORK(2000)
360  REAL ABT(5), WORK(14000), X(100), Y(5, 100), XWER(100),
370  *SOL(5, 100), ERR(5)
380  C   SUBROUTINES
390  EXTERNAL FCN, G, JACOB, JACOBG, DO2GAZ, DO2GAX
400  WRITE (6, 600)
410  READ (5, /) TOL
420  IY=5
430  LWORK=14000
440  LIWORK=2000
450  MNP=100
460  N=5
470  NP=15
480  NUMBEG=3
490  NUMMIX=0
500  INIT=1
510  DELEPS=2.0
520  IJAC=1
530  IFAIL=110
540  C
550  C
560  WRITE(7, 500)
570  WRITE(6, 100)
580  READ(5, /) OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO
590  WRITE(7, 200) OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO
600  WRITE(7, 400)
610  WRITE(7, 400)
620  C   INLEZEN VAN DE MESH
630  DO 50 I=1, 100
640  X(I)=0.0
650  50 CONTINUE
660  DO 30 I=1, NP
670  X(I)=(I-1)/((NP-1)*1.0)

```

```

680      30 CONTINUE
690      WRITE(7,400)
700      WRITE(7,400)
710      WRITE(6,110)
720      READ(5,/)MO
730      WRITE(7,210)MO
740      C      STARTEN MET DE OPLOSSING VH LIN. PROBLEEM
750      CALL START(NP,Y,J,I)
760      C
770      640 CALL DO2RAF(N,MNP,NP,NUMBEG,NUMMIX,TOL,INIT,X,Y,IY,
780      *ABT,FCN,G,IJAC,JACOBG,JACOBG,DELEPS,DO2GAZ,DO2GAX,
790      *WORK,LWORK,IWORK,LIWORK,IFAIL)
800      IF(IFAIL.NE.0) GO TO 20
810      WRITE (7,99) NP
820      DO 70 J=1,NP
830          SOL(1,J)=Y(1,J)
840          SOL(2,J)=Y(2,J)/LE
850          SOL(3,J)=Y(3,J)
860          SOL(4,J)=Y(4,J)/LE
870          SOL(5,J)=Y(5,J)/(LE*LE)
880          XWER(J)=LE*X(J)
890      70 CONTINUE
900      WRITE (7,98) (XWER(J),(SOL(I,J),I=1,N),J=1,NP)
910      ERR(1)=ABT(1)
920      ERR(2)=ABT(2)/LE
930      ERR(3)=ABT(3)
940      ERR(4)=ABT(4)/LE
950      ERR(5)=ABT(5)/(LE*LE)
960      WRITE (7,95) (ERR(I),I=1,N)
970      WRITE(7,400)
980      WRITE(7,400)
990      WRITE(6,300)
1000     READ(5,/)MO
1010     WRITE(7,210)MO
1020     IF (MO .NE. 0.0) GO TO 640
1030     20 STOP
1040     99 FORMAT(27H SOLUTION ON FINAL MESH OF , I2 , 7H POINTS/7X,
1050     *1HX,11X, 1HU ,14X , 2HU ,13X , 1Ha,14X,2Ha ,13X
1060     *3Ha ,/)
1070     98 FORMAT (1X , F10.3,5E16.6)
1080     95 FORMAT (38H MAXIMUM ESTIMATED ERROR BY COMPONENTS/1H ,10X,
1090     *5E16.6)
1100     100 FORMAT(' TYPE DE WAARDEN VAN A,J,E,G,GAMMA,L,H,Io IN',/)
1110     200 FORMAT(' A=',F18.5,/, ' J=',F18.5,/, ' E=',F18.5,/, ' G=',F18.5,/,
1120     @' GAMMA=',F14.5,/, ' L=',F18.5,/, ' H=',F18.5,/, ' Io=',F17.5,/)
1130     300 FORMAT(' GEEF EEN NIEUWE WAARDE VOOR MO (STOPPEN=0)')
1140     110 FORMAT(' TYPE DE WAARDE VAN HET MOMENT IN',/)
1150     210 FORMAT(' MOMENT=',F12.5,/)
1160     400 FORMAT(' ***** ',/)
1170     500 FORMAT(' SOLUTION OF THE TORSIONAL PROBLEM',/,
1180     *' WITH RESPECT TO THE CLASSICAL THEORY',/)
1190     600 FORMAT(' GEEF DE TOL. ',/)
1200     END
1210     C
1220     C
1230     SUBROUTINE FCN(X,EPS,Y,F,M)
1240     COMMON/GLOBAL/OP, TI,EM,GM,GA,LE,HO,IO,MO
1250     REAL EPS,X,TI,EM,GM,GA,LE,HO,IO,MO,OP
1260     INTEGER M
1270     REAL F(M),Y(M)
1280     C
1290     F(1)=Y(2)

```

```

1300      F(2)=-IO*Y(4)*Y(5)/(OP*LE)
1310      F(3)=Y(4)
1320      F(4)=Y(5)
1330      F(5)=-MO*LE*LE*LE/(EM*GA)+GM*TI*LE*LE*Y(4)/(EM*GA)
1340      @+IO*LE*Y(2)*Y(4)/GA+HO*Y(4)*Y(4)*Y(4)/(2*GA)
1350      RETURN
1360      END
1370      C
1380      SUBROUTINE G(EPS,Y,Z,AL,M)
1390      REAL EPS
1400      INTEGER M
1410      REAL AL(M),Y(M),Z(M)
1420      AL(1)=Y(3)
1430      AL(2)=Y(1)
1440      AL(3)=Y(4)
1450      AL(4)=Z(1)
1460      AL(5)=Z(4)
1470      RETURN
1480      END
1490      C
1500      C
1510      C
1520      SUBROUTINE JACOB(X, EPS, Y, F, M)
1530      COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
1540      REAL EPS, X, OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
1550      INTEGER M, I, J
1560      REAL F(M,M), Y(M)
1570      DO 40 I=1,5
1580          DO 20 J=1,5
1590              F(I,J)=0.0
1600      20 CONTINUE
1610      40 CONTINUE
1620      F(1,2)=1.0
1630      F(2,4)=-IO*Y(5)/(OP*LE)
1640      F(2,5)=-IO*Y(4)/(OP*LE)
1650      F(3,4)=1
1660      F(4,5)=1
1670      F(5,2)=IO*LE*Y(4)/GA
1680      F(5,4)=GM*TI*LE*LE/(EM*GA)+IO*LE*Y(2)/GA+3*HO*Y(4)*Y(4)
1690      @/(2*GA)
1700      RETURN
1710      END
1720      SUBROUTINE JACOBG(EPS,Y,Z,A,B,M)
1730      REAL EPS
1740      INTEGER M,I,J
1750      REAL A(M,M),B(M,M),Z(M),Y(M)
1760      DO 40 I=1,5
1770          DO 20 J=1,5
1780              A(I,J)=0.0
1790              B(I,J)=0.0
1800      20 CONTINUE
1810      40 CONTINUE
1820      A(1,3)=1.0
1830      A(2,1)=1.0
1840      A(3,4)=1.0
1850      B(4,1)=1.0
1860      B(5,4)=1.0
1870      RETURN
1880      END
1890      C
1900      SUBROUTINE START(NP,Y,N,M)
1910      COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO

```

```
1920      INTEGER I, NP, M, N
1930      REAL Y(N, M), K, MO, LE, GM, TI, EM, GA, X, MU, CHMU, SHMU, CHMUX, SHMUX
1940      MU=SQRT((GM*TI)/(EM*GA))*LE
1950      CHMU=(EXP(MU)+EXP(-MU))/2
1960      SHMU=(EXP(MU)-EXP(-MU))/2
1970      K=(MO*LE)/(GM*TI)
1980      DO 10 I=1, NP
1990          X=(I-1)/((NP-1)*1.0)
2000          CHMUX=(EXP(MU*X)+EXP(-MU*X))/2
2010          SHMUX=(EXP(MU*X)-EXP(-MU*X))/2
2020          Y(1, I)=0.0
2030          Y(2, I)=0.0
2040          Y(3, I)=K*(X-SHMUX/MU+(CHMU-1)*(CHMUX-1)/(MU*SHMU))
2050          Y(4, I)=K*(1-CHMUX+(CHMU-1)*SHMUX/SHMU)
2060          Y(5, I)=K*(-MU*SHMUX+(CHMU-1)*MU*CHMUX/SHMU)
2070 10 CONTINUE
2080      RETURN
2090      END
```

RAXIB

DATE & TIME PRINTED: TUESDAY, JULY 7, 1987 @ 08:58:53.

```

100 C PROGRAMMA RAXIB (AXIAAL INGEKLEMDE BALKEN VOL_
110 C GENS REISSNER TORSIE)
120 C NUM. OPL. V.H.NIET LINEAIRE
130 C TORSIE-PROBLEEM
140 C RANDVOORWAARDEN :u(0)=u(1)=0
150 C a(0)=a(1)=0;alfa(0)=0
160 FILE 5(KIND=REMOTE)
170 FILE 6(KIND=REMOTE)
180 FILE 7(KIND=DISK,PROTECTION=SAVE,NEWFILE=TRUE,AREASIZE=15)
190 BLOCK GLOBALS
200 $ INCLUDE "NAGFLIB/FORTRAN/DECLARATION ON APPL"
210 END
220 $ INCLUDE "NAGFLIB/D/FORTRAN/DO2RAF ON APPL"
230 $ INCLUDE "NAGFLIB/X/FORTRAN/XO4AAF ON APPL"
240 $ INCLUDE "NAGFLIB/X/FORTRAN/XO4ABF ON APPL"
250 $ INCLUDE "NAGFLIB/D/FORTRAN/DO2GAZ ON APPL"
260 $ INCLUDE "NAGFLIB/D/FORTRAN/DO2GAX ON APPL"
270 C
280 COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
290 REAL OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO, DD
300 C
310 REAL DELEPS, TOL
320 INTEGER I, IFAIL, IJAC, INIT, J, LIWORK, LWORK, MNP, N,
330 *NP, NUMBEG, NUMMIX, IY
340 INTEGER IWORK(1500)
350 REAL ABT(4), WORK(10000), X(100), Y(4, 100), XWER(100), SOL(4, 100),
360 *ERR(4)
370 C
380 C SUBROUTINES
390 EXTERNAL FCN, G, JACOB, JACOBG, DO2GAZ, DO2GAX
400 WRITE (6, 500)
410 READ (5, /) TOL
420 IY=4
430 LWORK=10000
440 LIWORK=1500
450 MNP=100
460 N=4
470 NP=15
480 NUMBEG=2
490 NUMMIX=0
500 INIT=1
510 DELEPS=2.0
520 IJAC=1
530 IFAIL=110
540 MAXDIF=0
550 C
560 C
570 WRITE(7, 120)
580 WRITE(7, 400)
590 WRITE(7, 400)
600 WRITE(6, 100)
610 READ(5, /) OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO
620 DD=IO-TI
630 WRITE(7, 200) OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, DD
640 WRITE(7, 400)
650 WRITE(7, 400)
660 C INLEZEN V.D. MESH
670 DO 50 I=1, 100

```



```

680         X(I)=0.0
690     50 CONTINUE
700         DO 30 I=1,NP
710             X(I)=(I-1)/((NP-1)*1.0)
720     30 CONTINUE
730         WRITE(7,400)
740         WRITE(7,400)
750         WRITE(6,110)
760         READ(5,/)MO
770         WRITE(7,210)MO
780     C     STARTEN MET DE OPL. V.H. LIN. PROBLEEM
790         CALL START(NP,Y,J,I)
800     C
810     640 CALL DO2RAF(N,MNP,NP,NUMBEG,NUMMIX,TOL,INIT,X,Y,IY,
820         *ABT,FCN,G,IJAC,JACOBFB,JACOBG,DELEPS,DO2GAZ,DO2GAX,
830         *WORK,LWORK,IWORK,LIWORK,IFAIL)
840         IF(IFAIL .NE. 0) GO TO 20
850         WRITE(7,99)NP
860         DO 70 J=1,NP
870             SOL(1,J)=Y(1,J)
880             SOL(2,J)=Y(2,J)/LE
890             SOL(3,J)=Y(3,J)
900             SOL(4,J)=Y(4,J)/LE
910             XWER(J)=LE*X(J)
930     70 CONTINUE
940         WRITE(7,98)(XWER(J),(SOL(I,J),I=1,N),J=1,NP)
950         ERR(1)=ABT(1)
960         ERR(2)=ABT(2)/LE
970         ERR(3)=ABT(3)
980         ERR(4)=ABT(4)/LE
990         WRITE(7,95) (ERR(I),I=1,N)
1010        WRITE(7,400)
1020        WRITE(7,400)
1030        WRITE(6,300)
1040        READ(5,/)MO
1050        WRITE(7,210)MO
1060        IF (MO .NE. 0.0) GO TO 640
1070     20 STOP
1080     99 FORMAT(27H SOLUTION ON FINAL MESH OF , I2 , 7H POINTS/7X,
1090         *1HX,10X,1Ha,16X,2Ha,12X,4Halfa,12X,5Halfa,/)
1100     98 FORMAT(1X,F10.3,4E16.6)
1110     95 FORMAT(38H MAXIMUM ESTIMATED ERROR BY COMPONENTS/1H ,10X,
1120         *4E16.6)
1130     100 FORMAT(' TYPE DE WAARDEN VAN A,J,E,G,GAMMA,L,H,Io IN',/)
1140     200 FORMAT(' A=',F18.5,/, ' J=',F18.5,/, ' E=',F18.5,/, ' G=',F18.5,/,
1150         @' GAMMA=',F14.5,/, ' L=',F18.5,/, ' H=',F18.5,/,
1160         @' Io=',F17.5,/, ' D=',F18.5,/)
1170     300 FORMAT(' GEEF EEN NIEUWE WAARDE VOOR MO (STOPPEN=0)',/)
1180     110 FORMAT(' TYPE DE WAARDE VAN HET MOMENT IN',/)
1190     210 FORMAT(' MOMENT=',F12.5,/)
1200     400 FORMAT(' *****',/)
1210     120 FORMAT(' SOLUTION OF THE PROBLEM POSTULATED BY REISSNER',/)
1230     500 FORMAT(' GEEF DE TOL. ',/)
1240     END
1250     C
1260     C
1270     SUBROUTINEFCN(X,EPS,Y,F,M)
1280     COMMON/GLOBAL/OP, TI,EM,GM,GA, LE, HO, IO, MO
1290     REAL EPS,X,OP, TI,EM,GM,GA, LE, HO, IO, MO, DD
1300     INTEGER M
1310     REAL F(M),Y(M)
1320     C

```

```

1330      DD=IO-TI
1340      F(1)=Y(2)
1350      F(2)=GM*DD*LE*(Y(1)*LE-Y(4))/(EM*GA)
1360      F(3)=Y(4)
1370      F(4)=(LE*DD*Y(2))/(EM/(GM*LE*LE)*(1.5*HO-IO*IO/OP)
1380      @*Y(4)**2+IO)
1390      RETURN
1400      END
1410      C
1420      SUBROUTINE G(EPS,Y,Z,AL,M)
1430      COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
1440      REAL EPS, OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO, DD
1450      INTEGER M
1460      REAL AL(M), Y(M), Z(M)
1470      DD=IO-TI
1480      AL(1)=Y(1)
1490      AL(2)=Y(3)
1500      AL(3)=Z(1)
1510      AL(4)=EM*HO*Z(4)**3/(2*LE**3)
1520      @+IO*GM*Z(4)/LE-MO
1530      RETURN
1540      END
1550      C
1560      C
1570      C
1580      SUBROUTINE JACOB(X, EPS, Y, F, M)
1590      COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
1600      REAL EPS, X, OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO, DD
1610      INTEGER M, I, J
1620      REAL F(M,M), Y(M)
1630      DD=IO-TI
1640      DO 40 I=1,4
1650          DO 20 J=1,4
1660              F(I,J)=0.0
1670      20 CONTINUE
1680      40 CONTINUE
1690      F(1,2)=1.0
1700      F(2,1)=GM*DD*LE*LE/(EM*GA)
1710      F(2,4)=-GM*DD*LE/(EM*GA)
1720      F(3,4)=1.0
1730      F(4,2)=LE*DD/(3*EM*HO/(2*LE*LE*GM)*Y(4)*Y(4)+IO)
1740      F(4,4)=-3*Y(2)*Y(4)*DD*EM*HO/((LE*GM)*((3*EM*HO*Y(4)*Y(4)
1750      @/(2*LE*LE*GM)+IO)**2))
1760      RETURN
1770      END
1780      C
1790      C
1800      SUBROUTINE JACOBG(EPS,Y,Z,A,B,M)
1810      COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
1820      REAL EPS, OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO, DD
1830      INTEGER M, I, J
1840      REAL A(M,M), B(M,M), Z(M), Y(M)
1850      DD=IO-TI
1860      DO 40 I=1,4
1870          DO 20 J=1,4
1880              A(I,J)=0.0
1890              B(I,J)=0.0
1900      20 CONTINUE
1910      40 CONTINUE
1920      A(1,1)=1.0
1930      A(2,3)=1.0
1940      B(3,1)=1.0

```

```

1950      B(4,4)=3*EM*HO*Z(4)*Z(4)/(2*LE**3)+IO*GM/LE
1960      RETURN
1970      END
1980      C
1990      C
2000      SUBROUTINE START(NP,Y,N,M)
2010      COMMON/GLOBAL/OP, TI, EM, GM, GA, LE, HO, IO, MO
2020      INTEGER I, NP, M, N
2030      REAL Y(N,M), K, MO, LE, GM, TI, EM, GA, X, MU, CHMU, SHMU, CHMUX, SHMUX,
2040      @DD
2050      DD=IO-TI
2060      MU=SQRT((GM*TI*DD)/(EM*GA*IO))*LE
2070      CHMU=(EXP(MU)+EXP(-MU))/2
2080      SHMU=(EXP(MU)-EXP(-MU))/2
2090      K=(MO*LE)/(GM*IO)
2100      DO 10 I=1, NP
2110          X=(I-1)/((NP-1)*1.0)
2120          CHMUX=(EXP(MU*X)+EXP(-MU*X))/2
2130          SHMUX=(EXP(MU*X)-EXP(-MU*X))/2
2140          Y(1,I)=K*IO/(TI*LE)*(1-CHMUX+(CHMU-1)*SHMUX/SHMU)
2150          Y(2,I)=K*IO/(TI*LE)*(-MU*SHMUX+(CHMU-1)*MU*CHMUX/SHMU)
2160          Y(3,I)=K*DD/TI*(X-SHMUX/MU+(CHMU-1)*(CHMUX-1)/(MU*SHMU))
2170          @ +K*X
2180          Y(4,I)=K*DD/TI*(1-CHMUX+(CHMU-1)*SHMUX/SHMU)+K
2190      10 CONTINUE
2200      RETURN
2210      END

```