

## Over de restspanningen die optreden na het koud richten van een zwak gekromde as

**Citation for published version (APA):**

Esmeijer, W. L. (1966). *Over de restspanningen die optreden na het koud richten van een zwak gekromde as*. (DCT rapporten; Vol. 1966.010). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1966

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Over de restspanningen die optreden na het koud richten van  
een zwak gekromde as.

Inhoudsopgave:

1. Inleiding
2. Schematisering van de berekening
3. Fase 1 van het koud richten
4. Fase 2 van het koud richten
5. Voorbeeld.

Eindhoven, 25 maart 1966

prof.ir. W.L. Esmeijer.

1. Inleiding

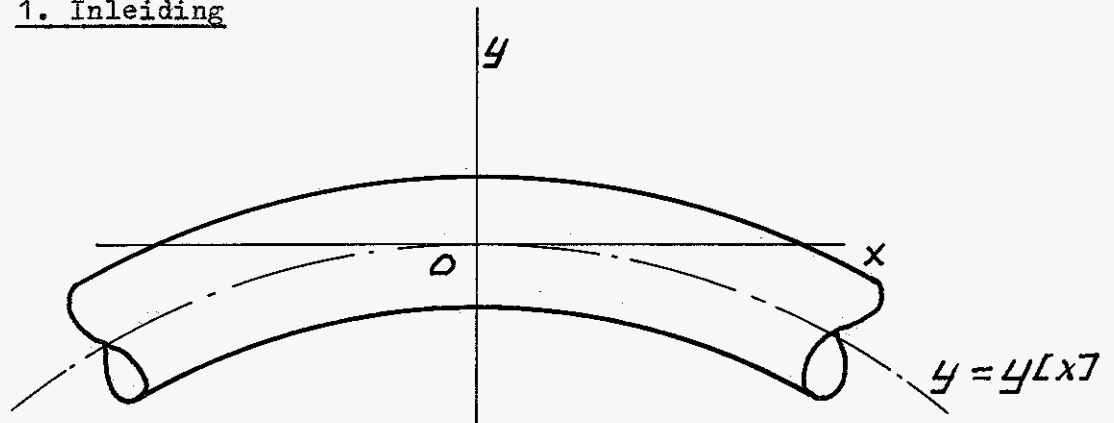


fig.1

De hartlijn van de in fig.1 getekende as ligt in het x-y vlak. Aangenomen wordt dat de hartlijn in O een kleine initiële kromming  $\frac{1}{\rho_0} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$  bezit en dat de as in deze toestand spanningsloos is. N.b.: Zowel in fig.1 als in de navolgende analyse bezit  $\rho_0$  een negatieve waarde.

De dwarsdoorsnede van de as is getekend in fig.2.

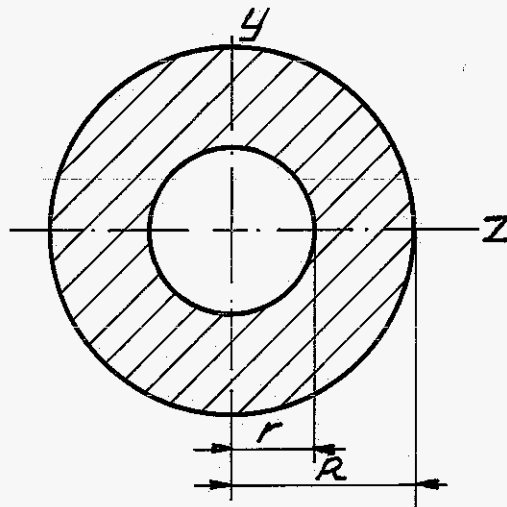


fig.2

$$I_z = \frac{\pi}{4} R^4 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right\}$$

$$W_z = \frac{\pi}{4} R^3 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right\}$$

$$\frac{r}{R} = \gamma.$$

Het elimineren van deze kromming door koud richten gebeurt in twee fasen.

Fase 1: De as wordt zodanig belast dat ten gevolge van het in doorsnede  $x = 0$  optredende buigend moment daar ter plaatse gedeeltelijk of geheel vloeien optreedt. Dit buigend moment zal  $M_1$

worden genoemd, positief gerekend wanneer het materiaal rechts van de doorsnede een koppel uitoefent op het materiaal links van de doorsnede dat gericht is tegen de draairichting van de klok. Fase 2: De as wordt ontlast. Dit betekent dat er in de doorsnede  $x = 0$  een extra buigend moment  $M_2$  wordt aangebracht (tekenafspraken als onder fase 1) zodanig dat

$$M_1 + M_2 = 0.$$

De eis waaraan moet worden voldaan is: eindkromming nul.

De vraag die moet worden beantwoord luidt: hoe groot zijn de restspanningen?

## 2. Schematisering van de berekening

Gezien de trekkromme van staal (fig.3) hanteren we het in fig.4 geïdealiseerde spanning-rek diagram.

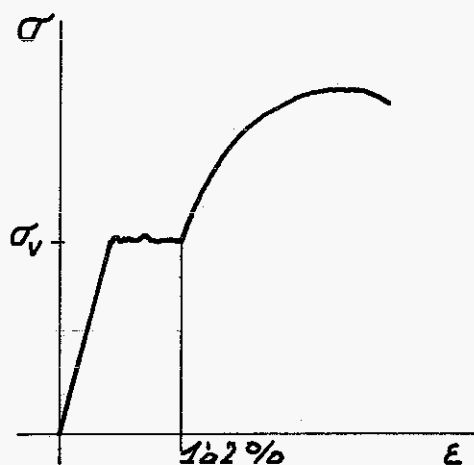


fig.3

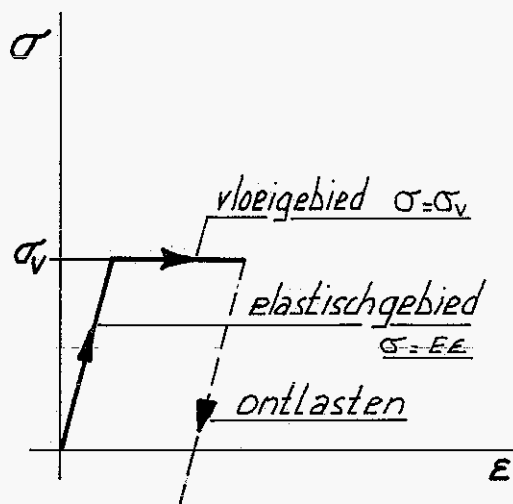


fig.4

In het kader van de technische theorie van elastische- en plastische vervorming van balken en assen kunnen we stellen:

- a) Vlakke doorsneden blijven vlak.
- b) Normaalspanningen in de dwarsdoorsnede zijn met de rekken gekoppeld zoals fig.4 aangeeft.

3. Fase 1 van het koud richten

De spanningsverdeling in doorsnede  $x = 0$  is aan het einde van fase 1 zoals fig.5 aangeeft.

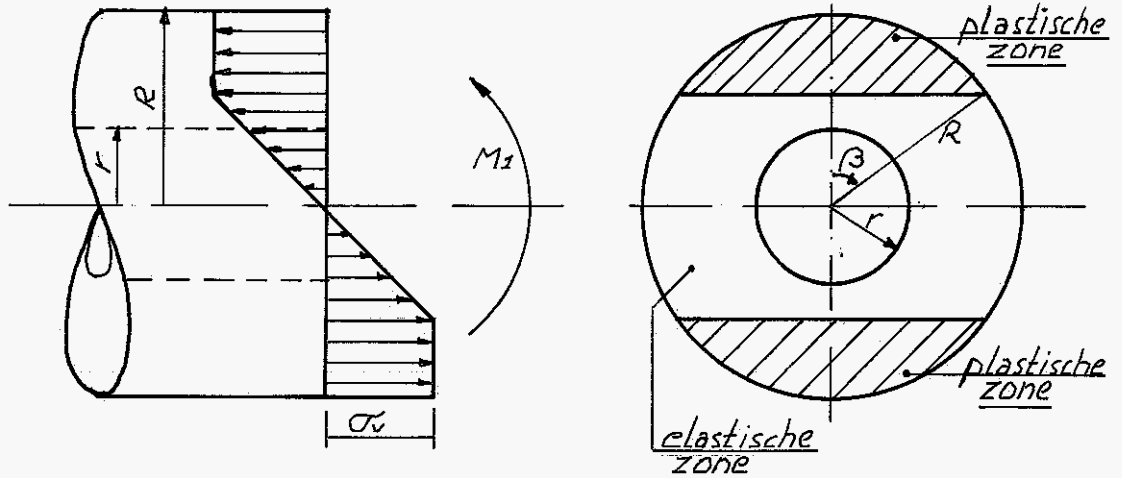


fig.5

In het volgende zal het geval worden beschouwd dat de plastische zone niet of ten hoogste juist raakt aan de omtrek van het gat d.w.z.  $\frac{r}{R} \leq \cos \beta$ .

$$M_1 = 4 \sigma_v R^3 \left[ \int_{\alpha=0}^{\beta} \sin^2 \alpha \cos \alpha \, d\alpha + \int_{\alpha=\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin^2 \alpha \cos \alpha \, d\alpha \right] +$$

$$- \frac{\pi}{4} r^3 \cdot \sigma_v \frac{r}{R \cos \beta}.$$

Na uitwerking van de integralen en invoering van  $\frac{r}{R} = \gamma$  volgt:

$$M_1 = \sigma_v R^3 \left[ \frac{\frac{\pi}{2}(1-\gamma^4) - \beta}{2 \cos \beta} + \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin^3 \beta \right] \text{ met } 0 < \beta < \arccos \gamma.$$

De kromming ten gevolge van  $M_1$  bedraagt:

$$\frac{1}{\rho_1} = + \frac{\sigma_v}{E} \frac{1}{R \cos \beta}.$$

4. Fase 2 van het koud richten

Ontlasten betekent dat wordt aangebracht een moment  $M_2 = -M_1$ . Daar de resulterende spanningen tijdens het ontlasten beneden de vloeigrens blijven, mag volgens het  $\sigma - \epsilon$  diagram het ontlasten zuiver elastisch worden beschouwd.

Er ontstaat dan het volgende beeld (fig.6).

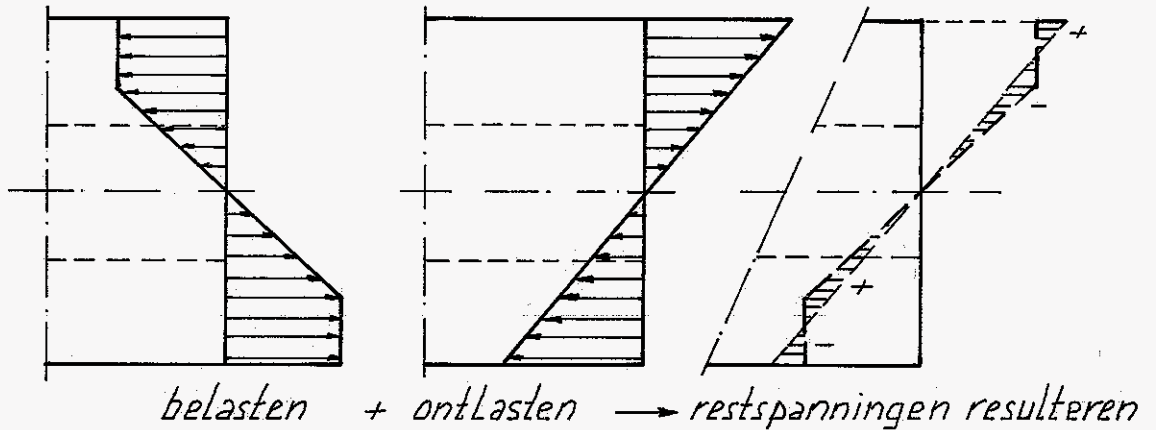


fig.6

De kromming ten gevolge van  $M_2 = -M_1$  bedraagt:

$$\frac{1}{\rho_2} = - \frac{M_1}{E \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)} = - \frac{M_1}{E \frac{\pi}{4} R^4 (1 - \gamma^4)}$$

Uit de eis van koud richten volgt:

$$+ \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 0.$$

$$- \frac{1}{\rho_0} = \frac{\sigma_v}{E} \frac{1}{R \cos \beta} - \frac{M_1}{E \frac{\pi}{4} R^4 (1 - \gamma^4)} \quad \text{met}$$

$$M_1 = \sigma_v R^3 \left[ \frac{\frac{\pi}{2}(1 - \gamma^4) - \beta}{2 \cos \beta} + \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin^3 \beta \right]$$

bepierking:  $0 < \beta < \arccos \gamma$ .

Uit deze relaties volgt:

$$- \frac{1}{\rho_0} = \frac{\sigma_v}{RE} \left[ \frac{1}{\cos \beta} - \frac{4}{\pi(1 - \gamma^4)} \left\{ \frac{\frac{\pi}{2}(1 - \gamma^4) - \beta}{2 \cos \beta} + \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin^3 \beta \right\} \right].$$

$$- \frac{1}{\rho_0} = \frac{2\sigma_v}{\pi RE (1 - \gamma^4)} \left[ \frac{\beta}{\cos \beta} - \sin \beta - \frac{2}{3} \sin^3 \beta \right].$$

Ter afkorting stellen we:

$$\lambda = \frac{\beta}{\cos \beta} - \sin \beta - \frac{2}{3} \sin^3 \beta.$$

In bijgaande tabel zijn de resultaten van een numerieke uitwerking opgenomen; van een essentieel deel van de functie  $\lambda = \lambda(\varphi)$  is bijgaande grafische voorstelling gemaakt (zie einde van het rapport).

Uit voorgaande relatie volgt:

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{P_0} \cdot R (1 - \gamma^4)}{\frac{2}{\pi} \frac{\sigma_v}{E}} .$$

Van de restspanningen aan de omtrek van de dwarsdoorsnede wordt het maximum  $\sigma_{mr}$  berekend.

$$\sigma_{mr} = \frac{M}{\frac{\pi}{4} R^3 (1 - \gamma^4)} - \sigma_v$$

$$\sigma_{mr} = \frac{4}{\pi} \sigma_v \left[ \frac{1}{1 - \gamma^4} \left\{ \frac{\frac{\pi}{2}(1 - \gamma^4) - \beta}{2 \cos \beta} + \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin^3 \beta \right\} \right] - \sigma_v$$

$$\sigma_{mr} = \sigma_v \left[ \frac{1}{\cos \beta} - \frac{2}{\pi(1 - \gamma^4)} \lambda - 1 \right] .$$

Daar  $\gamma = \frac{r}{R}$  geldt, kan in vele gevallen met goede benadering worden gesteld, zowel in de uitdrukking voor  $\lambda$  als in die voor  $\sigma_{mr}$ :

$1 - \gamma^4 \approx 1$ . Deze benadering zullen we aanhouden.

Ter afkorting stellen we

$$\delta = \frac{1}{\cos \beta} - 1 - \frac{2}{\pi} \lambda , \text{ zodat } \sigma_{mr} = \delta \sigma_v .$$

Van de functie  $\delta = \delta(\varphi)$  is bijgaande grafische voorstelling gemaakt.

5. Voorbeeld

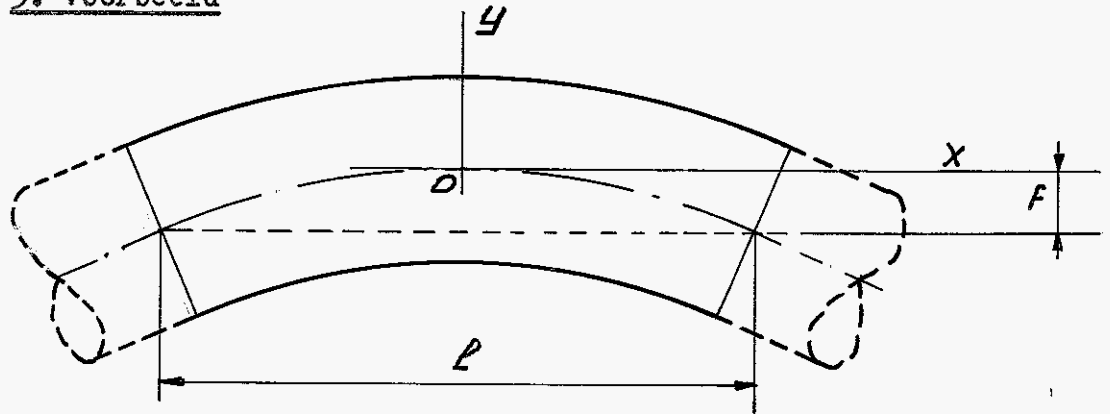


fig.7

De in fig.7 geschetste as is over een lengte  $l$  zwak cirkelvormig gebogen met „pijl“  $f$ .

Er geldt dan:

$$-\frac{1}{\rho_0} = \frac{8f}{l^2}.$$

De handelingen die moeten worden verricht om te komen tot de bepaling van  $\sigma_{mr}$  na koud richten volgen zonder moeite uit de gegeven grafieken waarbij twee uitgewerkte voorbeelden zijn weergegeven.



$\beta (^{\circ})$	$\beta (\text{rad})$	$\lambda \cdot 10^3$	$\delta$
0	0	0	0
5	0,0873	0,0350	0,0038
10	0,1745	0,0983	0,0153
15	0,2618	0,6597	0,0349
20	0,3491	2,7998	0,0642
25	0,4363	8,4999	0,0980
30	0,5236	21,2837	0,1412
35	0,6109	46,383	0,1913
40	0,6981	91,466	0,2472
45	0,7854	167,91	0,3073
50	0,8727	291,95	0,3698
55	0,9599	487,91	0,4328
60	1,0472	795,39	0,4936
65	1,1344	1281,7	0,5502
70	1,2217	2079,2	0,6007
75	1,3090	3491,7	0,6412
80	1,3963	7122,9	-----
85	1,4835	15364	-----
90	1,5708	$\infty$	-----

$$\lambda = \frac{\frac{8f}{2\pi} \cdot R}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_V}{E}} = \frac{\beta}{\cos \beta} - \left( \sin \beta + \frac{2}{3} \sin^3 \beta \right)$$

$$\delta = \frac{1}{\cos \beta} - 1 - \frac{2}{\pi} \lambda = \frac{\sigma_{mz}}{\sigma_V}$$

18 maart 1966

F. J. de G.

