Een electrisch analogon voor loodrecht op hun vlak belaste platen

Citation for published version (APA):
Brekelmans, W. A. M., & Vermeulen, J. B. (1969). *Een electrisch analogon voor loodrecht op hun vlak belaste platen*. (DCT rapporten; Vol. 1969.020). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:
Gepubliceerd: 01/01/1969

Document Version:
Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

• A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
• The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
• The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Download date: 17. Nov. 2023

WE 69-20

Een electrisch analogon voor loodrecht op hun vlak belaste platen.

Eindhoven, augustus 1969

ir. W.A.M. Brekelmans.
J.B. Vermeulen.

1. Inhoudsopgave

2. De theorie van loodrecht op hun vlak belaste platen.

Bij de afleiding van de theorie van loodrecht op hun vlak belaste platen wordt uitgegaan van een aantal aannamen, die hier nog eens zullen worden genoemd:

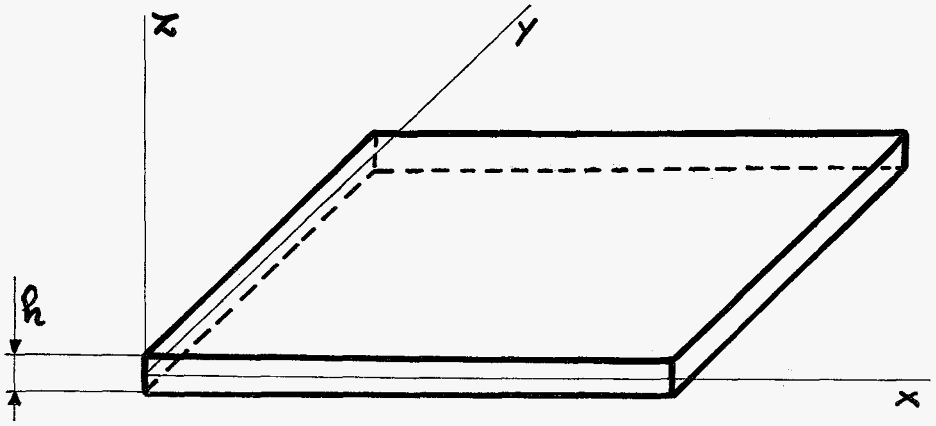
1) In onbelaste toestand is de plaat vlak.
2) Het materiaal, waarvan we de plaat vervaardigd denken is elastisch, homogeen en isotroop.
3) De dikte van de plaat is klein ten opzichte van andere afmetingen.
4) De dikte van de plaat is constant (niet essentieel).
5) De vervormingen zijn klein ten opzichte van de afmetingen van de plaat; de hoekverdraaiingen zijn klein ten opzichte van 1.
6) Het „ stekelhuidprincipe" geldt: aanvankelijk rechte lijnen, loodrecht op het middenvlak blijven na de vervorming recht en loodrecht op het middenvlak (m.a.w. het effect van de afschuiving wordt verwaarloosd).
7) De rek van het middenvlak verwaarlozen we ten opzichte van de rekken, die een gevolg zijn van buiging.
8) Op vlakken evenwijdig aan het middenvlak werkt een te verwaarlozen normaalspanning.

De theorie zal worden afgeleid met twee verschillende coördinatenstelsels:

a) een cartesisch coördinatenstelsel.
b) een polair coördinatenstelsel.

We doen dit omdat we later, afhankelijk van het dan onderhavige probleem aan een van beide stelsels de voorkeur geven.

2a) afleiding van de algemene plaattheorie in cartesische coördinaten



middenvlak van de plaat : $z=0$

w: doorbuiging van het middenvlak in positieve z-richting, $w = w(x,y)$.

We nemen een punt P in gedachte op een afstand z van het middenvlak. In belaste toestand geldt :

$$\begin{cases} \text{verplaatsing van } P \text{ in x-richting}, \; u = -z\dfrac{dw}{dx} \\ \text{verplaatsing van } P \text{ in y-richting}, \; v = -z\dfrac{dw}{dy} \end{cases}$$

Voor de rekken geldt derhalve :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Via de Wet van Hooke komen we tot de spanningen:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \nu\frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

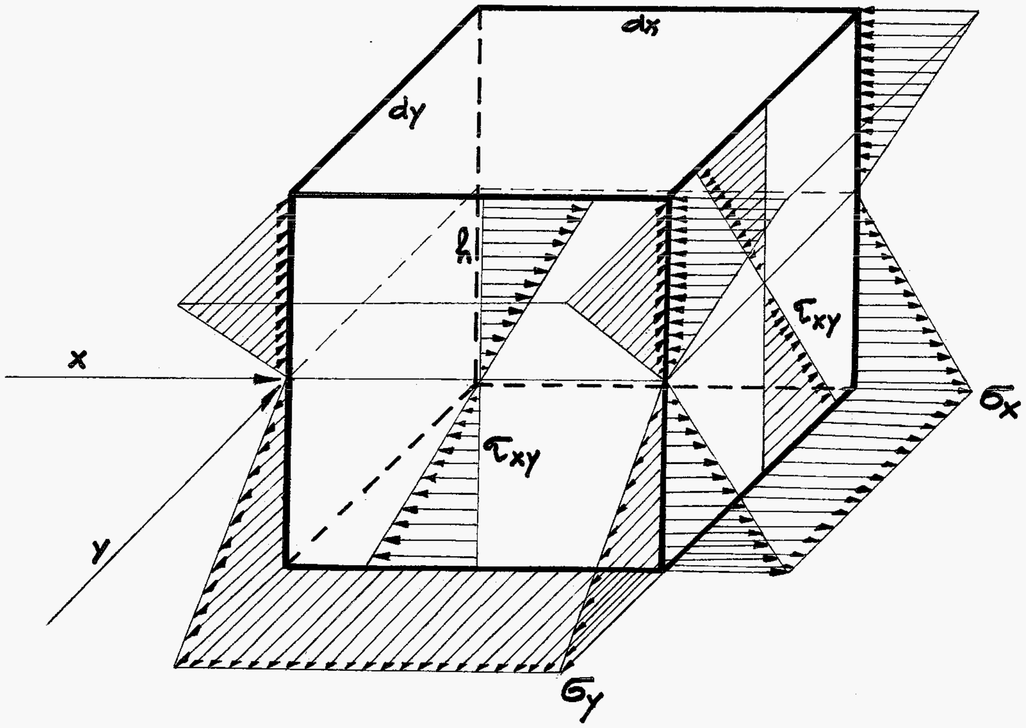
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dy^2} + \nu\frac{d^2w}{dx^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\left(-2z\frac{d^2w}{dxdy}\right) = -\frac{Ez}{1+\nu}\;\frac{d^2w}{dxdy}$$

We tekenen nu een infinitesimaal blokje begrensd door de coördinaten:

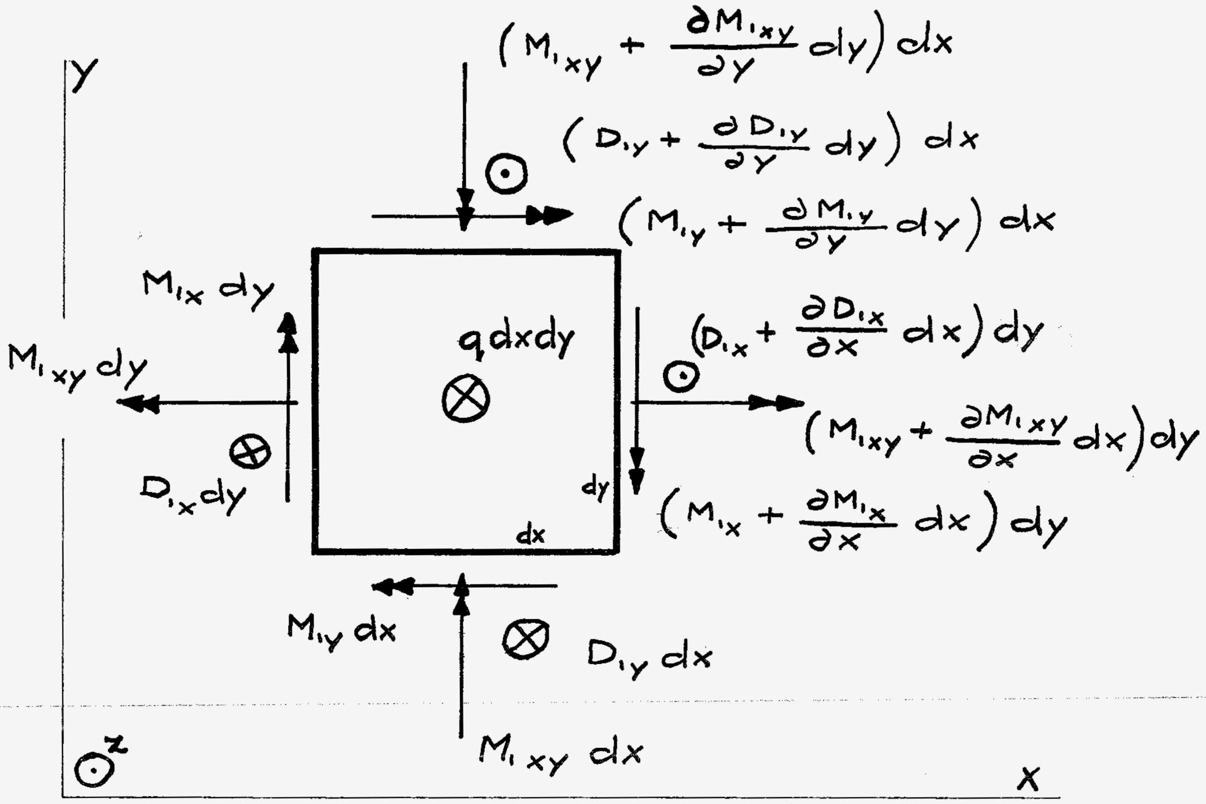
in x-richting: x en $x+dx$
in y-richting: y en $y+dy$
in z-richting: $-h/2$ en $h/2$

met de erop werkende spanningen, waarbij voor de tekening is aangenomen dat alle tweede afgeleiden van w positief zijn.



Behalve de getekende spanningen werken er op de zijvlakken, en voor,- en achtervlak van het blokje nog schuifspanningen in z-richting, die evenwicht moeten handhaven in z-richting, met de uitwendige belasting op onder,- of bovenvlak.

Onderstaande figuur geeft een beeld van het blokje, van boven af gezien, met alle erop werkende krachten en momenten.



M_{1x}, M_{1y}, M_{1xy} : koppels per eenheid van lengte van het snijvlak.

D_{1x}, D_{1y} : krachten per eenheid van lengte van het snijvlak.

q: belasting per eenheid van oppervlak.

$$M_{1x}\, dy = -\int_{z=-h/2}^{z=h/2} z\sigma_x dz \cdot dy = \underbrace{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}_{B} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \cdot dy$$

Op deze wijze vinden we:

$$M_{1x} = B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{1y} = B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{1xy} = B(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

De evenwichtsvergelijkingen voor het blokje leveren ons nog drie relaties.

Krachtenevenwicht in x-richting.

$$0 = q\,dx\,dy + D_{1x}\,dy - \left(D_{1x} + \frac{\partial D_{1x}}{\partial x}dx\right)dy + D_{1y}\,dx - \left(D_{1y} + \frac{\partial D_{1y}}{\partial y}dy\right)dx$$

$$\rightarrow \quad q = \frac{\partial D_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial D_{1y}}{\partial y} \qquad ①$$

Momentenevenwicht om x-as

$$0 = D_{1y}\,dx\,dy + \frac{\partial M_{1xy}}{\partial x}dx\,dy + \frac{\partial M_{1y}}{\partial y}dy\,dx$$

$$\rightarrow \quad D_{1y} = -\frac{\partial M_{1xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{1y}}{\partial y} =$$

$$= -B\frac{\partial}{\partial y}(\Delta W) \qquad ②$$

Momentenevenwicht om y-as

$$0 = D_{1x}\,dx\,dy + \frac{\partial M_{1xy}}{\partial y}dy\,dx + \frac{\partial M_{1x}}{\partial x}dx\,dy$$

$$\rightarrow \quad D_{1x} = -\frac{\partial M_{1xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_{1x}}{\partial x} =$$

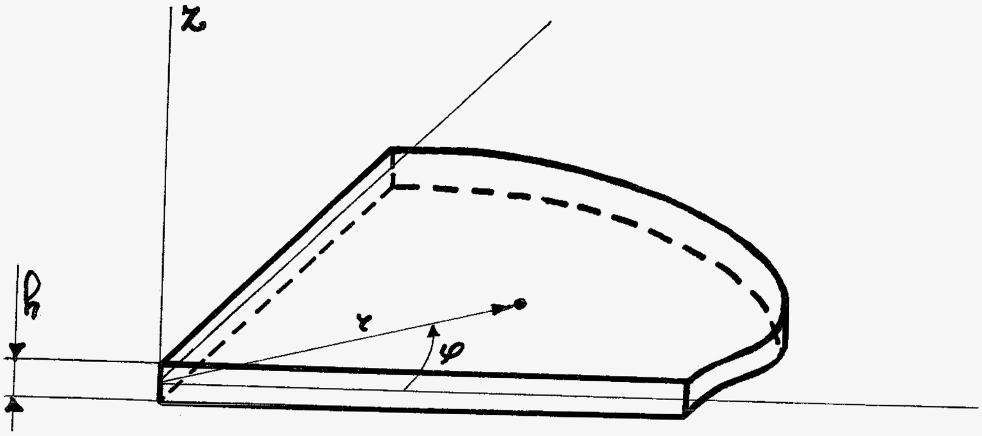
$$= -B\frac{\partial}{\partial x}(\Delta W) \qquad ③$$

Tenslotte geeft substitutie van ② en ③ in ① ons een differentiaalvergelijking waarin alleen nog w in voorkomt: de bipotentiaalvergelijking:

$$\Delta\Delta w = -\frac{q}{B} \qquad \text{ofwel}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w = -\frac{q}{B}$$

2b) afleiding van de algemene plaattheorie in poolcoördinaten



middenvlak van de plaat: $z=0$

w: doorbuiging van het middenvlak in positieve z-richting. $w = w(r,\varphi)$.

We nemen een punt P in gedachte op een afstand z van het middenvlak.
In belaste toestand geldt:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{radiale verplaatsing van } P, \quad u = -z\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\\ \text{tangentiale verplaatsing van } P, \quad v = -\frac{z}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \varphi}\end{array}\right.$$

Voor de rekken geldt:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{z}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{z}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

$$\gamma_{rt} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = -2\,\frac{z}{r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \varphi} + 2\,\frac{z}{r^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

Met behulp van de Wet van Hooke berekenen we nu de spanningen.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right)\right\}$$

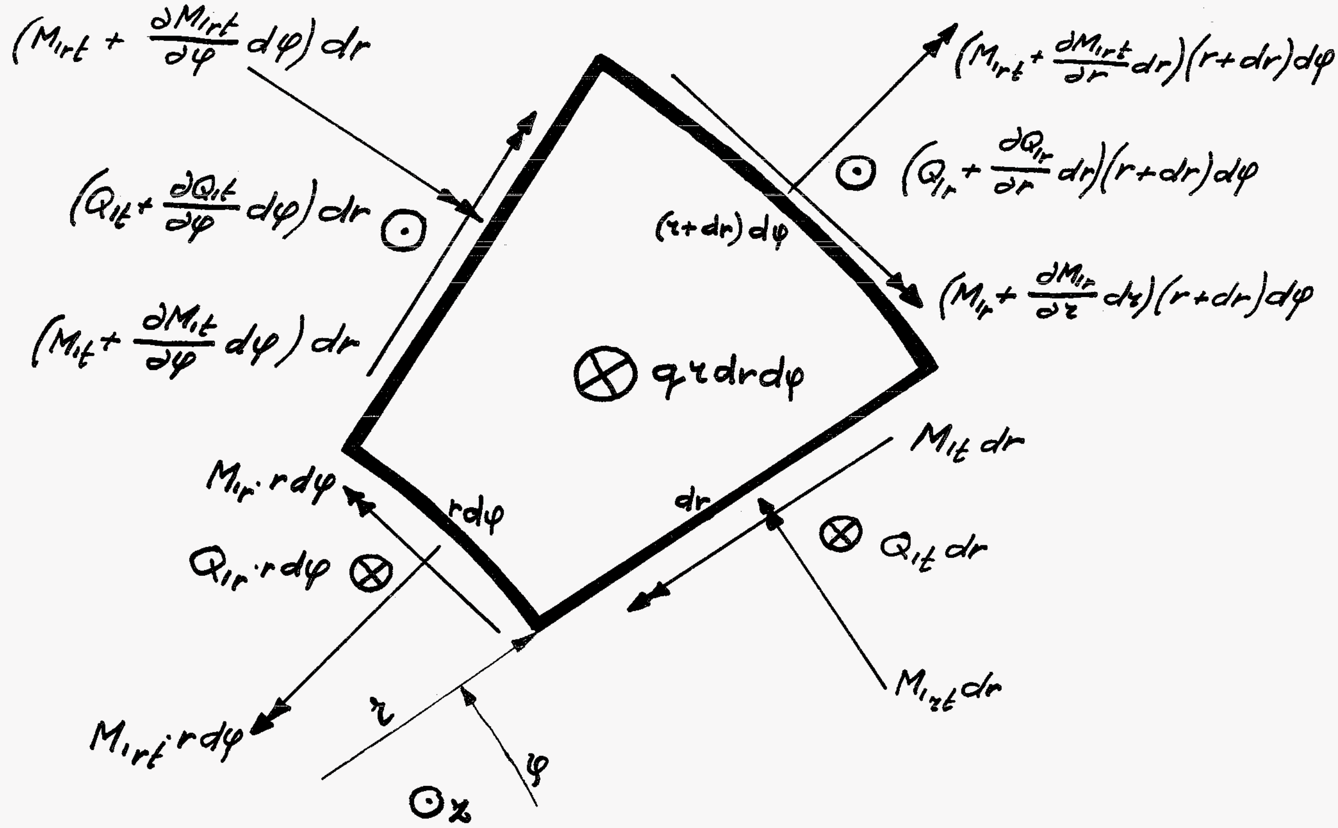
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left\{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\}$$

$$\tau_{rt} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{rt} = -\frac{Ez}{1+\nu}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right\}$$

We beschouwen nu een infinitesimaal blokje begrensd door de coördinaten:

radiaal : r en $r+dr$
tangentiaal : φ en $\varphi+d\varphi$
in z-richting : $-h/2$ en $h/2$

Onderstaande figuur geeft alle krachten en momenten aan, die op dit blokje werken.



M_{1r}, M_{1t}, M_{1rt} : koppels per lengteeenheid van het snijvlak
Q_{1r}, Q_{1t} : krachten per lengteeenheid van het snijvlak
q : uitwendige belasting per oppervlakte eenheid

$$M_{1r}\cdot r d\varphi = -\int_{z=-h/2}^{z=h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz \cdot r d\varphi =$$

$$= \underbrace{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}_{B}\cdot \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right\} r d\varphi$$

Op deze wijze vinden we :

$$M_{1r} = B\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right\}$$

$$M_{1t} = B\left\{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\}$$

$$M_{1rt} = B(1-\nu)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right\}$$

De evenwichtsvergelijkingen leveren ons na een limietovergang nog drie relaties.

Krachtenevenwicht in z-richting

$$0 = q r dr d\varphi + Q_{1r} r d\varphi - \left(Q_{1r} + \frac{\partial Q_{1r}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\varphi + Q_{1t}d\varphi - \left(Q_{1t} + \frac{\partial Q_{1t}}{\partial \varphi}d\varphi\right)dr$$

$$\longrightarrow q = \frac{1}{r}Q_{1r} + \frac{\partial Q_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_{1t}}{\partial \varphi} \qquad ①$$

Radiaal momentenevenwicht

$$0 = \left(M_{1rt} + \frac{\partial M_{1rt}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\varphi - M_{1rt}\cdot r d\varphi + M_{1rt}\, dr\, d\varphi +$$

$$+ \left(M_{1t} + \frac{\partial M_{1t}}{\partial \varphi}d\varphi\right)dr - M_{1t}\, dr + Q_{1t}\, dr \cdot r d\varphi$$

$$\longrightarrow Q_{1t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial M_{1t}}{\partial \varphi} - 2\frac{1}{r}M_{1rt} - \frac{\partial M_{1rt}}{\partial r} =$$

$$= -B\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial \varphi} \qquad ②$$

Tangentiaal momentenevenwicht

$$0 = M_{1rt}\, dr - \left(M_{1rt} + \frac{\partial M_{1rt}}{\partial \varphi} d\varphi\right) dr + M_{1t}\, dr\, d\varphi +$$

$$+ M_{1r} \cdot r\, d\varphi - \left(M_{1r} + \frac{\partial M_{1r}}{\partial r} dr\right)(r + dr)\, d\varphi - Q_{1r}\, r\, d\varphi\, dr$$

$$\longrightarrow Q_{1r} = -\frac{1}{r} M_{1r} - \frac{\partial M_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{1t} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{1rt}}{\partial \varphi}$$

$$= -B \frac{\partial (\Delta W)}{\partial r} \qquad ③$$

Substitutie van ② en ③ in ① geeft ons weer een differentiaalvergelijking in W: de bipotentiaalvergelijking:

$$q = -\frac{1}{r} \cdot B \frac{\partial(\Delta W)}{\partial r} - B \frac{\partial^2 (\Delta W)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} B \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (\Delta W)}{\partial \varphi^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\Delta W = -q/B$$

$$\Delta\Delta W = -q/B \qquad \text{ofwel}$$

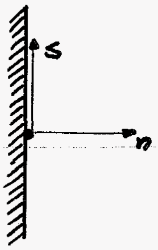
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) W = -q/B$$

Dit resultaat was natuurlijk te verwachten omdat de Laplace-operator Δ in cartesische of pool-coördinaten dezelfde betekenis heeft.

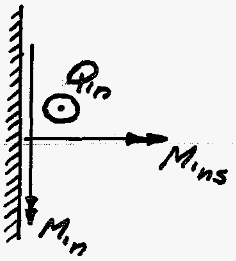
2c) De randvoorwaarden

Een bepaald probleem, waarop de gevonden partiele differentiaalvergelijking (de bipotentiaalvergelijking) van toepassing is, is volledig te beschrijven door deze differentiaalvergelijking, in combinatie met de erbij behorende randvoorwaarden.
In de differentiaalvergelijking is w de enige afhankelijk variabele. Daarom willen we de randvoorwaarden formuleren als uitdrukkingen in W. Het is noodzakelijk onderscheid te maken tussen randvoorwaarden langs a) rechte rand.
b) gekromde rand.

a) Rechte rand



coördinatenstelsel



snede grootheden

1 <u>oplegging</u>

I $w=0$

II $M_n=0$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0 \end{array}\right\} \Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0$$

2 <u>inklemming</u>

I $w=0$

II $\frac{\partial w}{\partial n}=0$

3 <u>vrije rand</u>

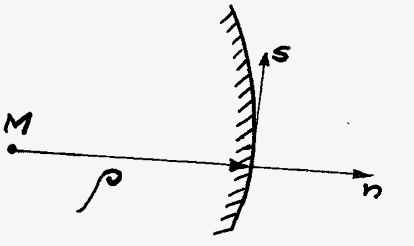
I $M_n=0$

$$\longrightarrow \Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0$$

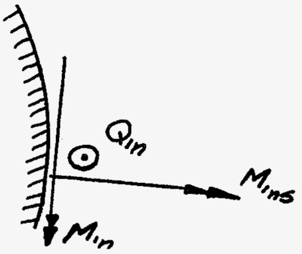
II $Q_n-\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}=0$ (r.v.w. van Kirchhof)

$$\longrightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial n^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial n\,\partial s^2}=0$$

b Gekromde rand



coördinatenstelsel



snedegrootheden

1 oplegging

I $w = 0$

II $M_{in} = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) = 0$$

ofwel: $$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

2 inklemming

I $w = 0$

II $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$

3 vrije rand

I $M_{in} = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

II $Q_{in} - \frac{\partial M_{ins}}{\partial s} = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s} - (1-\nu)\frac{1}{\rho}\frac{d^2 w}{d s^2} = 0$$

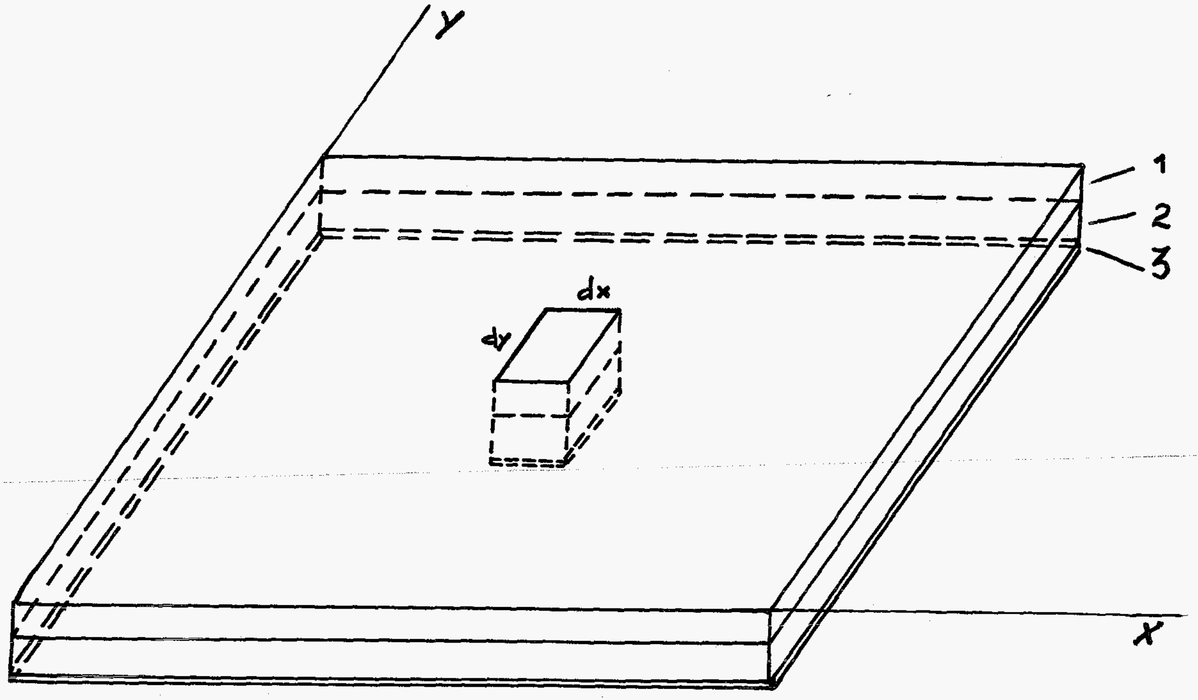
ofwel: $$\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s} = 0$$

Door de combinatie differentiaalvergelijking en randvoorwaarden is het probleem volkomen vastgelegd. Om echter tot expliciete resultaten te komen voor $w = w(x,y)$ of $w(r,\varphi)$ is vaak een onbegonnen werk, waarbij slechts numerieke methoden een oplossing kunnen leveren.

3. Het electrisch analogon

3a) Eigenschappen van de combinatie „Δ"

1 bovenlaag van weerstandspapier met een relatief lage spanning.
2 isolerende tussenlaag.
3 onderlaag met relatief hoge spanning.

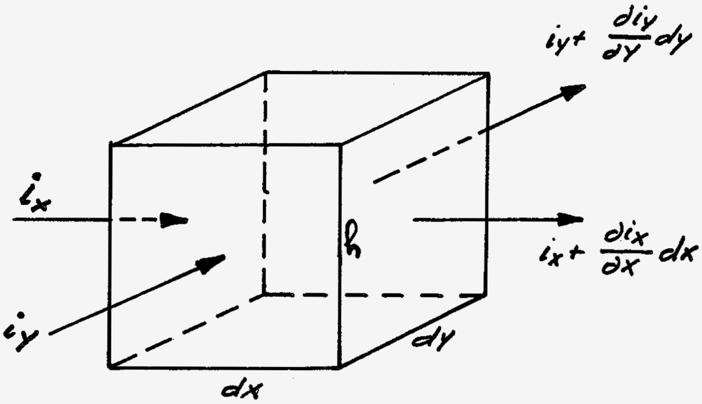


spanning van het weerstandspapier : $\delta = \delta(x,y,t)$

spanning van de onderlaag : $\alpha = \alpha_m(x,y) \cdot \sin\omega t$

We gaan trachten iets meer te weten te komen over de spanning δ, als functie van de coördinaten en de tijd.
Bij de afleiding van de bestaande relatie zullen aannamen worden gedaan, die aan de praktijk zijn getoetst.

Uit de laag weerstandspapier beschouwen we een stukje dx dy, met de in en uit het blokje gaande stromen.



h: hoogte van het blokje weerstandspapier (= dikte van het weerstandspapier).
δ: spanning van het blokje ten opzichte van aarde.
ρ: soortelijke weerstand.

De hoeveelheid lading, die per tijdseenheid het blokje binnenstroomt bedraagt:

$$-\frac{\partial i_x}{\partial x}dx - \frac{\partial i_y}{\partial y}dy$$

De Wet van Ohm leert ons:

$$i_x = \frac{-\frac{\partial \delta}{\partial x}dx}{\rho\,\frac{dx}{h\,dy}} = \frac{-\frac{\partial \delta}{\partial x}\cdot h\,dy}{\rho}$$

en: $$i_y = \frac{-\frac{\partial \delta}{\partial y}h\,dx}{\rho}$$

De per tijdseenheid binnenstromende hoeveelheid lading bedraagt dus:

$$-\frac{\partial i_x}{\partial x}dx - \frac{\partial i_y}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{h\,dx\,dy}{\rho} = \frac{h\,dx\,dy}{\rho}\,\Delta\delta$$

Het stukje dxdy van het weerstandspapier vormt samen met zo'n stukje van de onderplaat een condensator, waarbij de isolerende laag als diëlectricum fungeert, met een capaciteit : $C\,dx\,dy$

De eigenschappen van een condensator leren ons :

$$\frac{h\,dx\,dy}{\rho}\,\Delta\delta = C\,dx\,dy\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta - \alpha_m \sin\omega t\right)$$

Aanname : δ is te verwaarlozen ten opzichte van $\alpha_m \sin\omega t$

$$\Delta\delta = -\frac{C\rho}{h}\cdot\omega\alpha_m\cos\omega t$$

$$\Delta\delta = -\frac{C\rho\omega}{h}\cdot\alpha_m(x,y)\cdot\cos\omega t$$

$$\delta = \delta_m(x,y)\,\cos\omega t$$

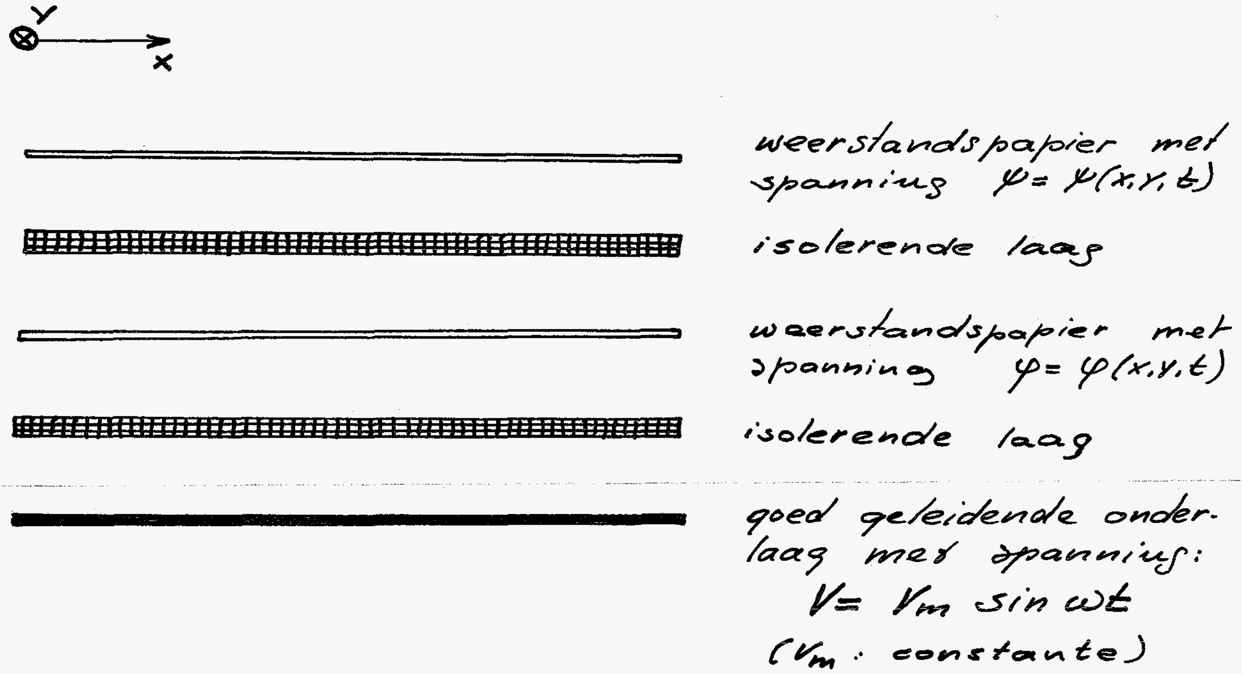
δ_m is dus een functie van x en y die voldoet aan de volgende potentiaalvergelijking :

$$\boxed{\Delta\delta_m = -\frac{C\rho\omega}{h}\,\alpha_m}$$

De juistheid van de aanname zal steeds experimenteel moeten worden nagegaan. De randcondities spelen hierin namelijk een belangrijke rol.

3b) De realisatie van de bipotentiaalvergelijking

Door middel van twee „Δ" combinaties samen te voegen bereiken we het gewenste doel. De opstelling wordt zoals onderstaande figuur aangeeft.



Alle lagen moeten op elkaar gedrukt gedacht worden.

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_m \cdot \cos\omega t = -\frac{c_1\rho_1\omega}{h_1} V_m \cdot \cos\omega t$$

$$\varphi = \varphi_m \cos\omega t \quad , \quad \underline{\varphi_m \ll V_m}$$

$$\Delta\psi = \Delta\psi_m \cdot \sin\omega t = \frac{c_2\rho_2\omega}{h_2} \varphi_m \cdot \sin\omega t$$

$$\psi = \psi_m \sin\omega t \quad , \quad \underline{\psi_m \ll \varphi_m}$$

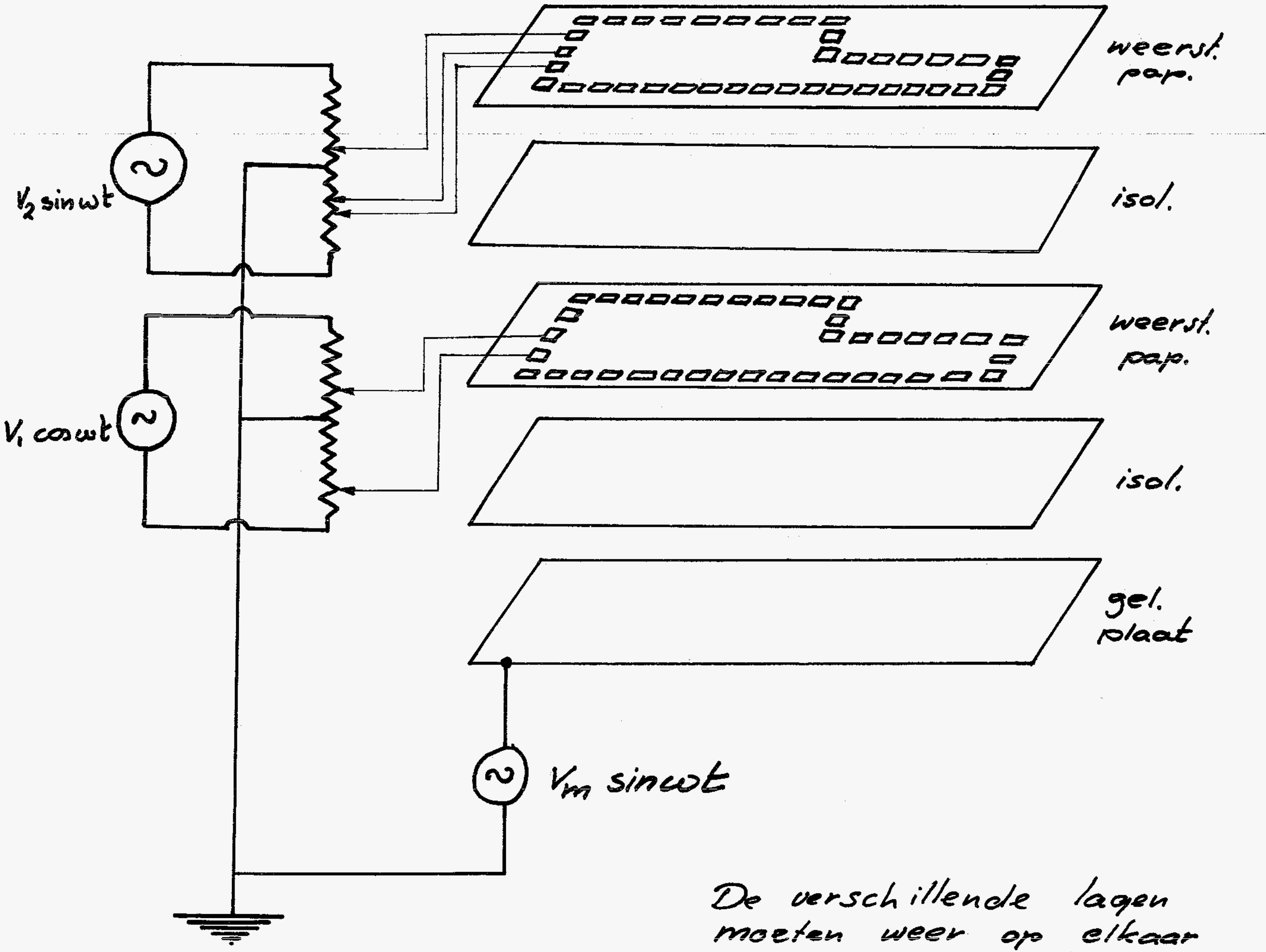
$$\Delta\Delta\psi_m = \frac{c_2\rho_2\omega}{h_2} \cdot \Delta\varphi_m = \frac{c_2\rho_2\omega}{h_2} \cdot \left(-\frac{c_1\rho_1\omega}{h_1}\right) V_m$$

$$\boxed{\Delta\Delta\psi_m = -\frac{c_1c_2\rho_1\rho_2}{h_1h_2} \cdot \omega^2 \cdot V_m}$$

3c) De randvoorwaarden

Op de beide lagen weerstandspapier worden recht boven elkaar contouren van een model met zilververf geschilderd.
Op deze randen zijn de waarden van Ψ_{rand} en $\varphi_{rand} = \Delta\Psi_{rand}$ als gewenst aan te brengen.
Wanneer deze gewenste waarden een functie zijn van x en y, is het duidelijk dat de contouren onderbroken geschilderd moeten zijn.
Bij het aanbrengen van deze randspanningen moet rekening worden gehouden met de fase van de spanning in het bijbehorende veld.

Onderstaand schema geeft voor een bepaalde contour een opstelling weer, die in alle mogelijkheden voorziet.



De verschillende lagen moeten weer op elkaar gedrukt gedacht worden.

Er van uitgaande dat voor elk punt (x,y) binnen de contour de aanname : $\psi_m \ll \varphi_m \ll V_m$ geldt kunnen we aangeven welke spanningstoestand in elke laag heerst.

1) Geleidende onderlaag

$V = V_m \sin \omega t$ voor elk punt (x,y).

2 Middelste weerstandspapierlaag

$\varphi = \varphi_m(x,y) \cos \omega t$

φ_m voldoet aan : $\Delta \varphi_m = -\frac{c_1 \rho_1 \omega}{h_1} V_m$

randvoorwaarde : $\varphi_m = \mu_\varphi \cdot V_1$

μ_φ : instelbare factor, die zorg draagt voor de gewenste waarde van φ_m langs de rand, afhankelijk van de plaats.

φ_m kan op alle plaatsen worden vervangen door $\Delta\psi_m * \underset{h_2/c_2\rho_2\omega}{\underset{\parallel}{\text{constante}}}$.

3 Bovenste weerstandspapierlaag

$\psi = \psi_m(x,y) \sin \omega t$

ψ_m voldoet aan : $\Delta\Delta\psi_m = -\frac{c_1 c_2 \rho_1 \rho_2}{h_1 h_2} \omega^2 V_m$

randvoorwaarde : $\psi_m = \mu_\psi \cdot V_2$

Resulterend geldt voor ψ_m :

$$\Delta\Delta\psi_m = -\frac{c_1 c_2 \rho_1 \rho_2}{h_1 h_2} \omega^2 V_m$$

randvoorwaarden : (beide instelbaar voor elk willekeurig randpunt)

$$\psi_m = \mu_\psi \cdot V_2$$

$$\Delta\psi_m = \frac{c_2 \rho_2 \omega}{h_2} \cdot \mu_\varphi \cdot V_1$$

3d) Koppeling van de plaattheorie en de analoge methode

Plaattheorie

diff. verg.: $\Delta\Delta w = -\frac{q}{B}$ ofwel $\Delta\Delta w^* = -1$

met $w^* = \frac{w}{q/B}$

randvoorwaarden:

1) $$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \alpha_{ij} \frac{\partial^{i+j} w^*}{\partial n^i \partial s^j} = \gamma_1 = 0$$

2) $$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \beta_{ij} \frac{\partial^{i+j} w^*}{\partial n^i \partial s^j} = \gamma_2 = 0$$

Analoge methode

diff. verg.: $\Delta\Delta\psi_m = -\frac{c_1c_2\beta_1\beta_2}{h_1h_2}\omega^2 V_m$ ofwel $\Delta\Delta\psi_m^* = -1$

met $\psi_m^* = \frac{\psi_m}{c_1c_2\beta_1\beta_2\omega^2V_m/h_1h_2}$

randvoorwaarden:

1) ψ_m^* in te stellen.
2) $\Delta\psi_m^*$ in te stellen.

De differentiaalvergelijkingen voor w^* en ψ_m^* zijn identiek. Wanneer nu de randvoorwaarden in w^* en ψ_m^* eensluidend zijn geldt: $w^*(x,y) = \psi_m^*(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l}\psi_m : \text{te meten met Voltmeter.}\\ c_1c_2\beta_1\beta_2\omega^2V_m/h_1h_2 : \text{door ijking te bepalen}\end{array}\right\}\ \psi_m^* = w^* : \text{bekend} \rightarrow w \text{ bekend}$$

Hoe worden de randvoorwaarden hetzelfde :

a) rechtstreeks in te stellen als $\gamma_1 = w^*$ en $\gamma_2 = \Delta w^*$

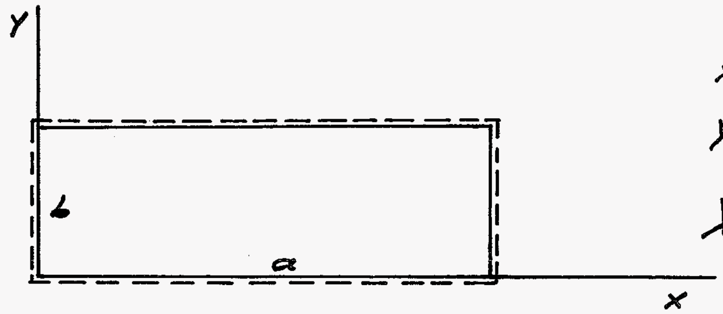
b) iteratief in te stellen: instellen van ψ_m^* en $\Delta\psi_m^*$, meten van γ_1 en γ_2 en herhalen.

c) combinatie van a en b

4 Het afgewerkte programma

Object 1: Rechthoekige platen, langs de rand opgelegd, met gelijkmatig verdeelde belasting q.

Reden 1) De analytische oplossing is bekend en eenvoudig uit te werken.



$x^* = \frac{x}{a}$

$y^* = \frac{y}{b}$

$\lambda = \frac{a}{b}$

$$w = \overline{W} \cdot \frac{q a^4}{B} \cdot \frac{16}{\pi^6}$$

$$\overline{W} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x^*) \sin(n\pi y^*)}{m \cdot n \cdot [m^2 + n^2\lambda^2]^2}$$

2) Bij het electrisch analogon zijn de randvoorwaarden gemakkelijk te realiseren: $\Psi_{rand} = 0$
$\Delta\Psi_{rand} = 0$

Doel 1) Nagaan in hoeverre $W(x,y)$ is te verkrijgen uit $\Psi_m(x,y)$ door vermenigvuldiging met een bepaalde factor ζ.
Dit werd uitgevoerd voor $\lambda = 1$ en $\lambda = 1.5$.

$$\zeta = \frac{W(x=\frac{1}{2}a,\ y=\frac{1}{2}b)}{\Psi_m(x=\frac{1}{2}a,\ y=\frac{1}{2}b)} \quad \text{of} \quad \zeta = \frac{\overline{W}(x^*=\frac{1}{2},y^*=\frac{1}{2})}{\Psi_m(x^*=\frac{1}{2},y^*=\frac{1}{2})}$$

Grafieken werden getekend met daarin $\overline{W}(x^*,y^*)$ en $\zeta \cdot \Psi_m(x^*,y^*)$, als functie van de plaats.
De overeenstemming bleek uitstekend genoemd te mogen worden.

$\overline{W}$: theoretisch berekend, Ψ_m : gemeten.

2 Het vaststellen van een ijkingsprocedure

Wanneer bij èèn bepaalde opstelling op de beide vellen weerstandspapier twee verschillende contouren, naast elkaar zijn opgetekend dan geldt voor beide contouren :

$$\Delta\Delta\Psi_m = -\frac{c_1 c_2\,\rho_1\rho_2}{k_1\;h_2}\,\omega^2 V_m$$

De contouren nummeren we met I en II

$$\Delta\Delta\Psi_{m_I} = \Delta\Delta\Psi_{m_{II}}$$

$$\Delta\Delta\Psi^*_{m_I} = \Delta\Delta\Psi^*_{m_{II}}$$

$$\Delta\Delta\left(\frac{W}{q/B}\right)_I = \Delta\Delta\left(\frac{W}{q/B}\right)_{II}$$

$$\left(\frac{W}{q/B}\right)_I = \Lambda\cdot\Psi_{m_I} \qquad \left(\frac{W}{q/B}\right)_{II} = \Lambda\;\Psi_{m_{II}}$$

$$\left(\frac{W}{q/B}\right)_{II} = \left(\frac{W}{q/B}\right)_I\cdot\frac{\Psi_{m_{II}}}{\Psi_{m_I}}$$

<u>controle voorbeeld</u> :

I : vierkant 500 * 500 (mm)
II : rechthoek 750 * 500 (mm)

$$\left\{\left(\frac{W}{q/B}\right)_I\right\}_{(x^*=1/2,\,y^*=1/2)} = 0{,}2441\cdot 500^4\cdot\frac{16}{\pi^6}$$

$$\left\{\left(\frac{W}{q/B}\right)_{II}\right\}_{(x^*=1/2,\,Y^*=1/2)} = 0{,}0917\cdot 750^4\cdot\frac{16}{\pi^6}$$

$$\frac{\Psi_{m_I}\,(1/2.\,1/2)}{\Psi_{m_{II}}\,(1/2.\,1/2)} = \frac{500^4\cdot 0{,}2441}{750^4\cdot 0{,}0917} = 0{,}5256$$

Bij de metingen bleek dit weer uitstekend te kloppen.

Hoe moeten we nu te werk gaan, wanneer we uitspraken willen doen over de doorzakkingen van een willekeurig gevormde plaat, die loodrecht op zijn vlak gelijkmatig is belast en met nog te kiezen randvoorwaarden?

Naast de contour van deze plaat tekenen we een vierkant met bijvoorbeeld afmetingen van 500 * 500 mm.
We zorgen dat op de aangegeven manier aan de geëiste randvoorwaarden van de plaat is voldaan.
De contour van het vierkant op de twee lagen weerstandspapier wordt op aarde aangesloten.
Binnen de contour van de willekeurige plaat wordt de spanning $\varphi_m(x.y)$ gemeten.

Nu geldt: $$\frac{w(x,y)}{q/B} = 0{,}2441 \cdot 500^4 \cdot \frac{16}{\pi^6} \cdot \frac{\varphi_m(x.y)}{\varphi_m(\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{vierkant}}$$

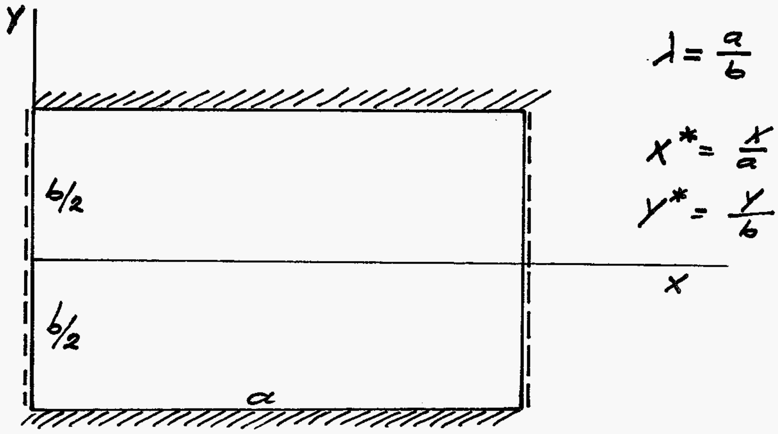
Opmerkingen: 1) Wanneer we een contour aan aarde aansluiten en we meten de spanning ervan blijkt deze toch nog ongelijk aan nul te zijn (ca 0,5 mV).
De spanningen die we meten binnen de contour moeten we daarom corrigeren. De gecorrigeerde spanning binnen de contour noemen φ_m, zodat blijft gelden: $\varphi_{m\,rand} = 0$ V

2) Het scheen belangrijk te zijn, dat rechte randen ook zo recht mogelijk geschilderd werden (geen kartels). Mechanisch gezien lag dit voor de hand omdat een oplegging langs een gekartelde rand andere eigenschappen heeft, dan langs een rechte rand. Hierop komen we terug.

3) Het moet mogelijk zijn de plaat gedeeltelijk gelijkmatig te belasten (limiet: puntkracht), door de geleidende onderplaat gedeeltelijk als isolator uit te voeren. De gevolgde afleiding zal dan iets veranderen. Hierop wordt niet verder ingegaan.

Object 2: Rechthoekige platen, langs twee randen opgelegd, langs twee randen ingeklemd met gelijkmatig verdeelde belasting q.

Reden 1) De analytische oplossing is bekend en met behulp van de rekenmachine eenvoudig uit te werken.



$\lambda = \frac{a}{b}$

$X^* = \frac{X}{a}$

$Y^* = \frac{Y}{b}$

$$w = \overline{W} \cdot \frac{qa^4}{B} \cdot \frac{16}{\pi^6}$$

$$\overline{W} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin m\pi x^* \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{(\alpha_m \tanh \alpha_m + 2)}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y^*}{\lambda} + \frac{1}{2\cosh \alpha_m} \cdot \frac{m\pi y^*}{\lambda} \sinh \frac{m\pi y^*}{\lambda}\right) +$$

$$- \frac{\pi}{8} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin m\pi x^*}{m^5 \cosh \alpha_m} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\alpha_m - (\tanh \alpha_m)(1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - (\tanh \alpha_m)(\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \right) \cdot$$

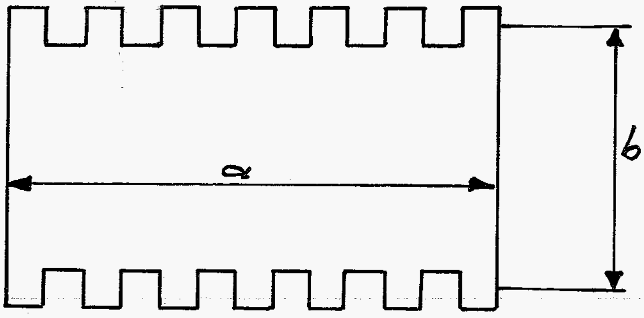
$$\cdot \left(\frac{m\pi y^*}{\lambda} \sinh \frac{m\pi y^*}{\lambda} - \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y^*}{\lambda} \right)$$

$$\text{met} \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{2\lambda}$$

2) Een van de randvoorwaarden is eenvoudig in te stellen bij het electrisch analogon namelijk $\Psi_{rand} = 0$

Doel Het realiseren van de randvoorwaarden bij een inklemming.
Hiertoe zijn twee verschillende pogingen ondernomen.

1) Vanuit mechanisch oogpunt betekent een oplegging langs een niet te grove kartelrand, min of meer hetzelfde als een inklemming. Daarom werd getracht bij de analogon methode een inklemming te realiseren door een gekartelde contour te schilderen.



Bovenstaande werd vergeleken met dezelfde contour (a*b) zonder kartels, m.a.w. volledig opgelegde plaat. Het verschil tussen beide experimenten bleek nihil te zijn.

Het kartelen van de rand bleek in het geheel geen invloed te hebben. De reden daarvan ligt vermoedelijk in het feit, dat juist langs de rand de differentiaalvergelijking $\Delta\Delta\Psi_m = \text{const.}$ niet meer geldt omdat de aanname $\Psi_m \ll \varphi_m \ll V_m$ aldaar niet meer juist is. Totale verandering door locale beïnvloeding langs de rand door de contour te kartelen is principieel onmogelijk.

N.B. Alle moeite, die werd gedaan om de randen recht te schilderen is volkomen overbodig geweest.

2) Om de analogon-methode geschikt te maken voor platen, die geheel of gedeeltelijk zijn ingeklemd, is het noodzakelijk, dat er een weg bestaat om langs de betreffende randen $\partial\Psi_m/\partial n$ nul te maken.
In principe moet het mogelijk zijn om dit te doen door $\Delta\Psi_m$ als functie van s langs de rand op geschikte wijze in te stellen.
Het is duidelijk dat dit op een iteratieve manier plaats zal moeten vinden: afwisselend meten van $\partial\Psi_m/\partial n$, instellen van $\Delta\Psi_m(s)$.

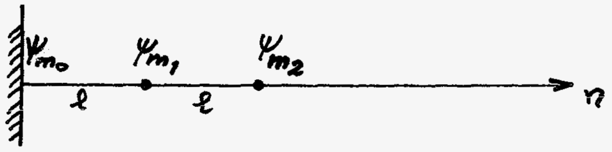
Of $\frac{\partial\Psi_m}{\partial n}$ de juiste waarde (nul) heeft bereikt gaan we als volgt na.

Op de getrokken normaal meten we in een discreet aantal punten in de buurt van de rand, de spanning Ψ_m.
Door deze meetpunten leggen we een polynoom in n, waarvan de coëfficient van n^1 maatgevend is voor de waarde van $\partial\Psi_m/\partial n$.
Als deze nul is weten we dat aan de gestelde eis is voldaan.

In eerste benadering gaat deze procedure als volgt:

$$\Psi_m = \Psi_{m_0} + a_1 n + a_2 n^2$$

a_1 moet nul zijn

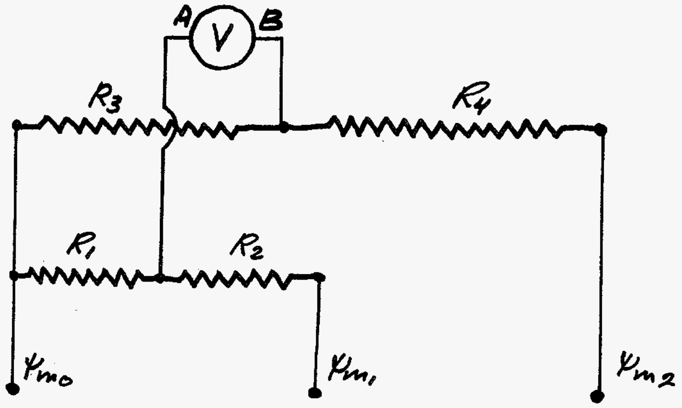


l: kleine afstand.

$$\left.\begin{array}{l}\psi_{m_1} = \psi_{m_0} + a_2 l^2 \\ \psi_{m_2} = \psi_{m_0} + 4a_2 l^2\end{array}\right\} \quad \psi_{m_2} - \psi_{m_0} = 4\psi_{m_1} - 4\psi_{m_0}$$

$$1/5\,\psi_{m_2} + 4/5\,\psi_{m_0} = 4/5\,\psi_{m_1} + 1/5\,\psi_{m_0}$$

We zetten de volgende schakeling in elkaar :



$$\left\{\begin{array}{l} V_A = \psi_{m_1} - R_2 \cdot \dfrac{\psi_{m_1} - \psi_{m_0}}{R_1 + R_2} = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\,\psi_{m_1} + \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\,\psi_{m_0} \\ V_B = \psi_{m_2} - R_4\,\dfrac{\psi_{m_2} - \psi_{m_0}}{R_3 + R_4} = \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}\,\psi_{m_2} + \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}\,\psi_{m_0} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 = R_4 = 4 * R \ \Omega \\ R_2 = R_3 = R \ \Omega \end{array}\right. \qquad R\text{: hoge weerstand}$$

Als de voltmeter geen uitslag geeft ($V_A = V_B$) is in eerste benadering aan de gestelde eis voldaan.

Dezelfde typen schakelingen zijn te verzinnen voor betere benaderingen, gebaseerd om meer dan drie meetpunten.

In principe kan op deze wijze het ideale geval goed worden benaderd.

De beschreven methode werd niet ten uitvoer gebracht.
Uit nauw hiermee samenhangende metingen bleek, dat het onmogelijk is om dit proces uit te voeren.

In het voor ons interessante gebied, waar $\partial\Psi_m/dn$ nul moet worden bij wijziging van $\Delta\Psi_m$, worden de meetwaarden voor Ψ_m, in de buurt van de rand, zo klein, dat ze volledig werden overstemd door de aanwezige ruis.

<u>Eventuele mogelijkheden:</u>

1) Beperking van de ruis.

2) Verhoging van de spanning van de onderplaat of verdere verhoging van de frequentie.

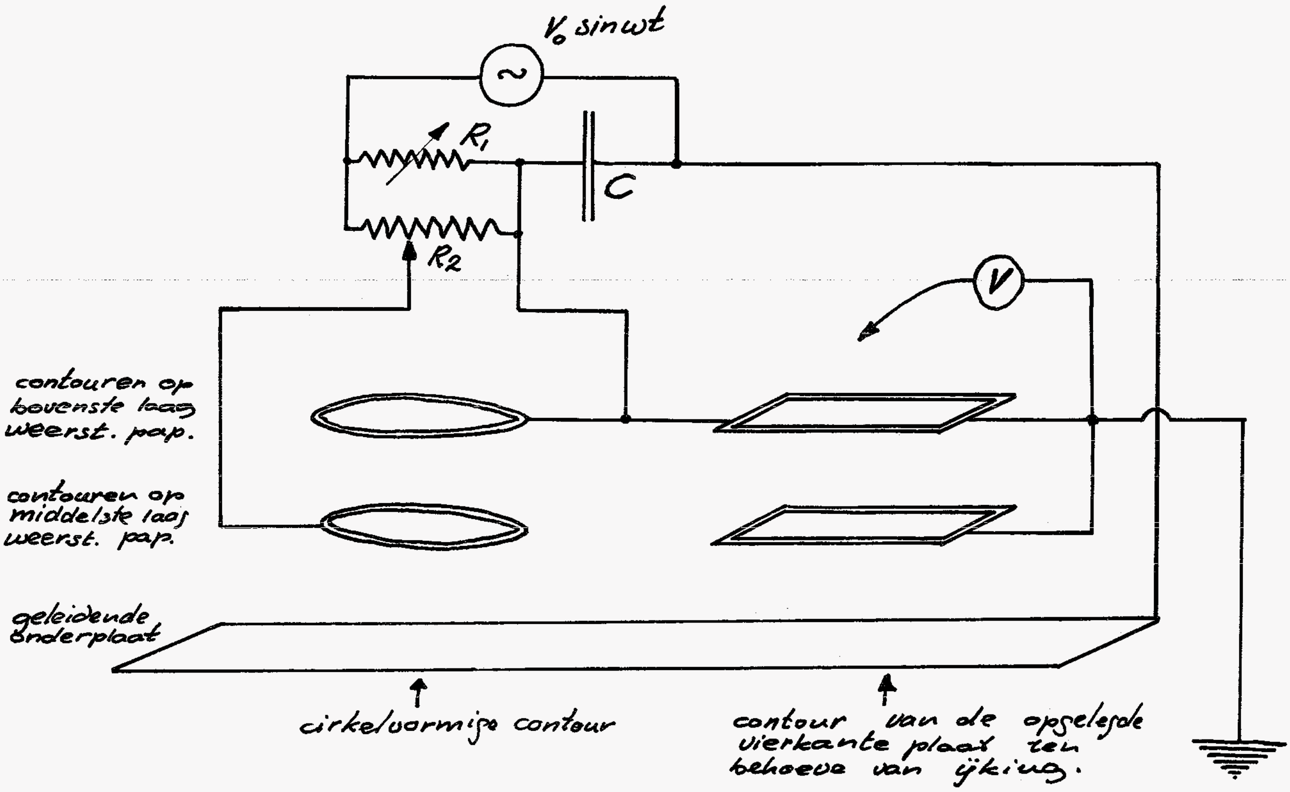
Verhoging van de spanning van de onderplaat zou betekenen, dat deze ver boven de gestelde veiligheidseisen zou uitgaan.
Verhoging van de frequentie betekent afbreuk aan de eis: $\Psi_m \ll \varphi_m \ll V_m$.

De optredende moeilijkheden bij de realisatie van de inklemming zijn niet zonder meer op te lossen. Het onderzoek werd hiermede dan ook beeindigd. Misschien dat eventuele nieuwe ideeen de mogelijkheid openen het onderzoek weer te hervatten.

Bij een mogelijke voortzetting van dit onderzoek is het mijns inziens het beste om uit te gaan van de hierna aangegeven opstelling, waarbij getracht zal moeten worden om de inklemming bij een cirkelvormige plaat te realiseren.

Voordelen: 1) De theoretische oplossing is bekend en zeer eenvoudig.

2) De juiste waarde van $\Delta\Psi_m$ is langs de gehele contour constant wegens de cirkelsymmetrie. Hierdoor blijft slechts een gering aantal vrijheidsgraden over.



R_2 : schuifweerstand voor instelling van juiste waarde van $\Delta\Psi_m$, zodat $(\partial\Psi_m/\partial n)_{rand} = 0$

R_1 : variabele weerstand om de geëiste fase-verschillen te handhaven.

Eventueel moet R_1 met C worden verwisseld.

Iteratieproces: R_2 instellen ←

↓

R_1 instellen

↓

$\left(\frac{\partial\Psi_m}{\partial n}\right)_{rand}$ meten

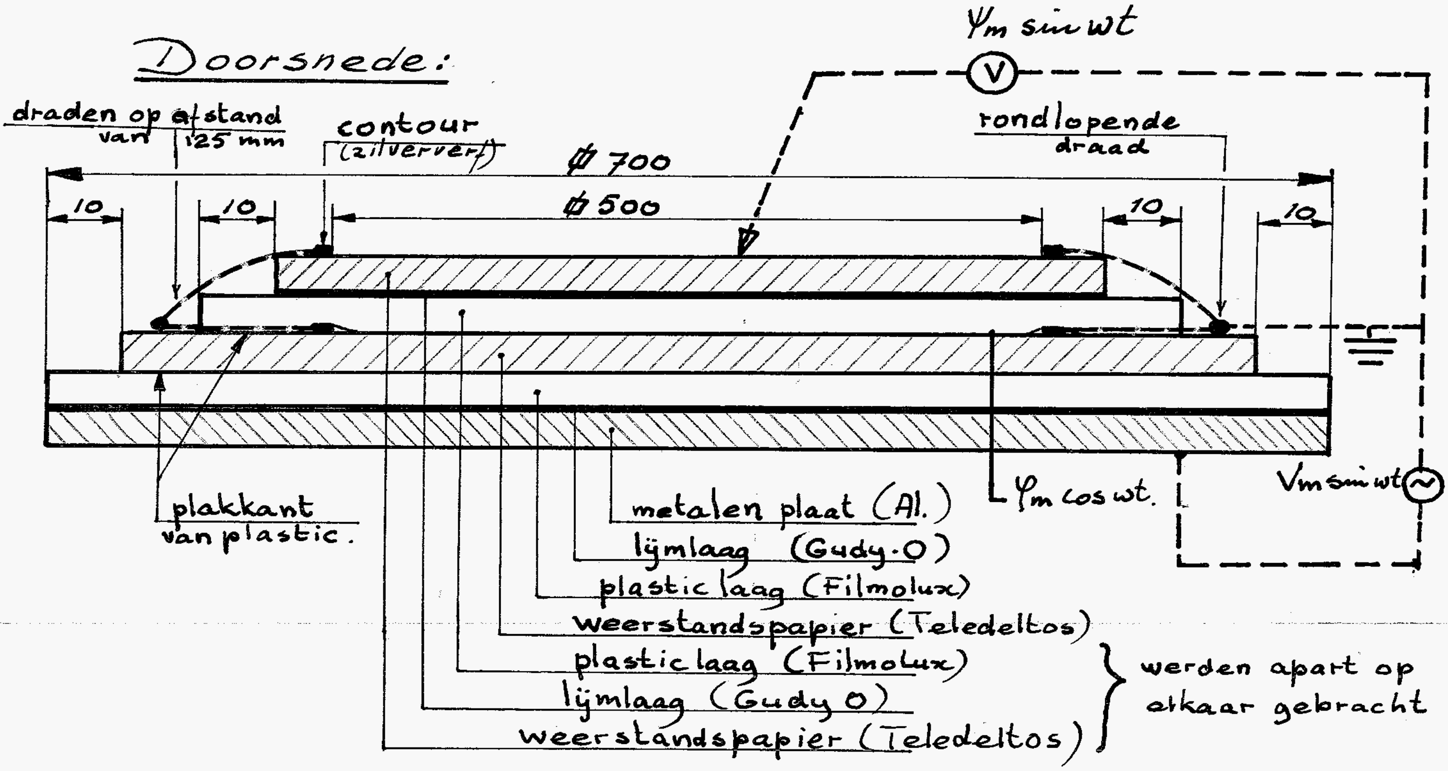
5. Uitvoering experimenten

I. Vierkant: (opgelegde plaat)

afmetingen binnen contour 500 × 500 mm.
" geleidende onderplaat 700 × 700 mm

De verschillende lagen waren als volgt aangebracht:

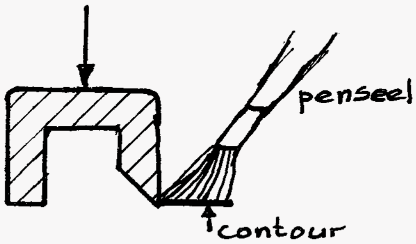
Doorsnede:



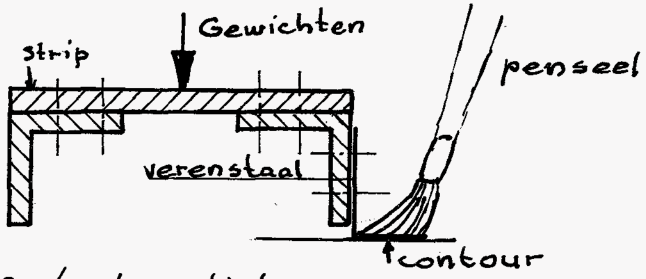
Gebruikte apparatuur:
Toongenerator Philips Rc 06069 (WE 164)
Digitale voltmeter LM 1420.2
Later: Toongenerator Peekel type 22B (WE 252)

De contouren van zilver-verf werden aanvankelijk met behulp van een penseel op het weerstandspapier aangebrachte zonder verder hulpgereedschap.
Bij verder onderzoek bestond de vrees dat dit uit de hand schilderen, waardoor de lijnen niet recht werden maar kartels vertoonden, niet ten goede kwam aan de meetnauwkeurigheid.
Om deze reden is er lang gezocht naar een methode de randen zo recht mogelijk aan te brengen.
Hulpgereedschap was onder meer een stuk U-profiel wat aan een been schuin was afgefreesd. Ondanks sterk aandrukken van dit profiel op het weerstandspapier drong de zilververf toch onder het schuin afgefreesde been door.
Een ander hulpgereedschap bestond uit twee aan elkaar bevestigde hoek-profielen met aan één ervan een dunne

strip verenstaal. Ook dit voldeed niet.



U-profiel



2 hoek-profielen

De methode met behulp van plakband mislukte omdat dit zeer moeilijk later weer te verwijderen is. Het weerstandspapier wordt er door beschadigd.

De beste resultaten werden uiteindelijk verkregen met een grote trekpen.

Later zou blijken dat een gekartelde rand geen invloed had op de potentiaal binnen de contour.

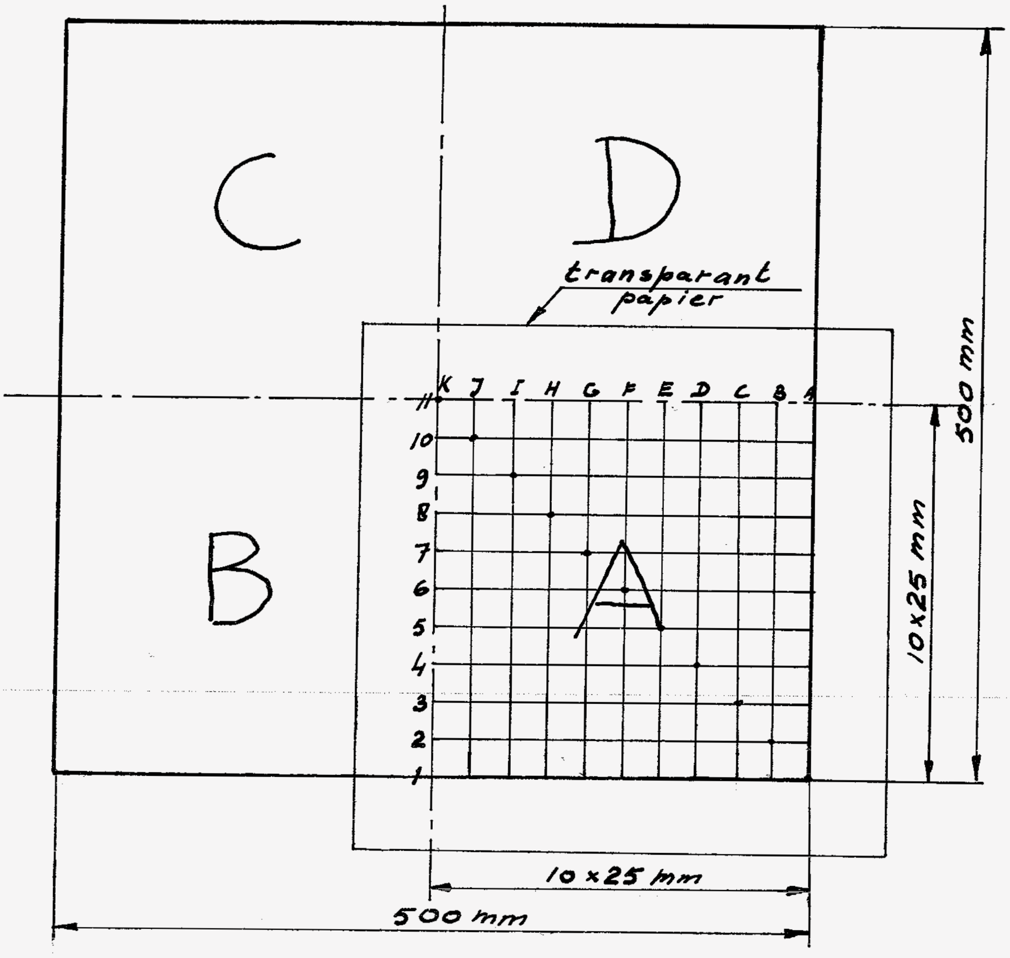
Metingen:

De metingen werden verricht met behulp van een meetstift en een stuk geperforeerd transparant papier ter grootte van een kwart van het te meten gebied.
Bij latere metingen kreeg het transparant papier de afmeting van het gehele te meten gebied.
Gebleken was n.l. dat de potentiaal binnen de contour op een willekeurig punt niet constant bleef maar varieerde ten gevolge van temperatuur en vochtigheidsgraad.
Door nu het gehele te meten gebied tijdens de metingen met het transparant papier bedekt te houden bleef dit bezwaar tot een minimum beperkt.
Verder had dit grote stuk papier het voordeel dat overeenkomstige meetpunten van de verschillende kwadranten nagenoeg tegelijkerheid gemeten konden worden waardoor de meetwaarden voor vergelijking betrouwbaarder werden.

Om te controleren of het aanbrengen van de bovenste laag weerstandspapier invloed zou hebben op de potentiaal van de onderste laag weerstandspapier, werden bij een proefstuk in de bovenste laag (+plastic laag) ronde uitsparingen aangebracht van 3 mm diameter.
De potentiaal van de onderste laag bleek niet beinvloed te worden.

Plaats van de meetpunten:

Verdeling in kwadranten.



Zodra de onderste laag weerstandspapier was aangebracht werd, bij verschillende waarden van spanning en frequentie op de onderplaat, nagegaan of de potentiaal karakteristieken binnen de contour in enkele kwadranten met elkaar overeenstemden. (symmetrie). Dit bleek vrij goed te kloppen.

In de hier volgende tabel staan deze meetresultaten vermeld. (Alleen belangrijkste meetpunten.)

20 V
50 Hz

onderste laag weerstandspapier

Kwadrant A — Kwadrant C

[mV]

meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.
1	0,3	A	0,3	1 A	0,3	1	0,3	A	0,3	1 A	0,3
2	12,2	B	12,6	2 B	3,7	2	12,9	B	12,5	2 B	3,9
3	22,2	C	22,6	3 C	10,3	3	23,8	C	23,2	3 C	11,0
4	31,3	D	31,6	4 D	18,5	4	32,5	D	31,7	4 D	19,3
5	38,7	E	38,7	5 E	27,1	5	39,3	E	39,0	5 E	27,9
6	45,0	F	44,8	6 F	35,6	6	45,0	F	45,0	6 F	36,1
7	49,9	G	49,4	7 G	43,3	7	49,8	G	49,7	7 G	43,3
8	53,6	H	53,2	8 H	49,6	8	53,3	H	53,5	8 H	49,5
9	56,0	I	55,8	9 I	54,1	9	55,8	I	55,9	9 I	54,2
10	57,0	J	57,3	10 J	56,9	10	57,4	J	57,4	10 J	57,0
11	57.8	K	57,8	11 K	57,8	11	57,8	K	57,7	11 K	57,8

20 V
100 Hz

onderste laag weerstandspapier.

Kwadrant A — Kwadrant C

[mV]

	φ_m ongecorr.		φ_m ongecorr.		φ_m ongecorr		φ_m ongecorr.		φ_m ongecorr.		φ_m ongecorr.
1	0,4	A	0,4	1 A	0,4	1	0,4	A	0,4	1 A	0,4
2	23,3	B	23,9	2 B	7,0	2	25,0	B	25,0	2 B	7,7
3	42,7	C	43,8	3 C	19,7	3	46,2	C	46,2	3 C	21,4
4	60,5	D	61,1	4 D	35,8	4	63,1	D	62,8	4 D	37,5
5	74,9	E	75,1	5 E	52,3	5	76,4	E	76,4	5 E	54,4
6	87,2	F	86,9	6 F	68,9	6	87,5	F	87,5	6 F	70,5
7	96,8	G	96,0	7 G	83,6	7	96,7	G	96,8	7 G	84,4
8	104,0	H	103,2	8 H	96,2	8	103,8	H	103,9	8 H	96,5
9	108,6	I	108,3	9 I	105,2	9	108,6	I	108,9	9 I	105,5
10	111,4	J	111,2	10 J	110,4	10	111,6	J	111,8	10 J	111,0
11	112,2	K	112,4	11 K	112,4	11	112,4	K	112,4	11 K	112,4

Opm.: Nauwkeurigheid digitale voltmeter ± 0,05 mV

Op de volgende bladzijde staan tabellen met daarin vermeld de meetresultaten nadat ook de bovenste laag weerstandspapier is aangebracht.

De Philips toongenerator Rc 06069 werd i.v.m. het te geringe vermogen verwisseld met de Peekel generator type 22 B (WE 252)

122 V
220 Hz

twee lagen weerstandspapier.

Kwadrant C : $\Psi_{m\,ongecorr.}$

Zie grafieken:
G1 en G2

[mV]

meet-plaats	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
2	0,6	0,8	1,1	1,3	1,6	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4
3	0,6	1,0	1,6	2,3	2,8	3,3	3,7	4,0	4,2	4,4	4,3
4	0,6	1,3	2,2	3,0	3,9	4,6	5,2	5,6	6,0	6,2	6,2
5	0,6	1,6	2,7	3,8	4,8	5,7	6,5	7,1	7,5	7,8	7,9
6	0,6	1,8	3,2	4,5	5,7	6,8	7,7	8,4	8,9	9,2	9,3
7	0,6	2,0	3,5	5,1	6,5	7,7	8,7	9,5	10,1	10,4	10,5
8	0,6	2,1	3,8	5,5	7,0	8,4	9,5	10,4	11,0	11,4	11,5
9	0,6	2,2	4,1	5,8	7,4	8,9	10,1	11,0	11,7	12,1	12,2
10	0,6	2,3	4,2	6,0	7,7	9,2	10,4	11,4	12,1	12,5	12,6
11	0,6	2,3	4,2	6,0	7,7	9,3	10,5	11,5	12,2	12,6	12,8

122 V
220 Hz

twee lagen weerstandspapier.

Kwadrant D : $\Psi_{m\,ongecorr.}$

Zie grafieken:
G3, G4, G5 en G6

[mV]

meet-plaats	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J.	K
1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
2	0,6	0,7	1,0	1,3	1,6	1,8	2,1	2,2	2,3	2,3	2,3
3	0,6	1,0	1,7	2,2	2,8	3,3	3,7	3,9	4,1	4,3	4,3
4	0,6	1,3	2,3	3,1	3,9	4,6	5,2	5,6	5,9	6,2	6,2
5	0,6	1,6	2,8	3,9	4,8	5,7	6,5	7,1	7,5	7,7	7,8
6	0,6	1,8	3,2	4,5	5,7	6,8	7,7	8,4	8,8	9,2	9,2
7	0,6	2,0	3,6	5,1	6,5	7,7	8,7	9,5	10,0	10,3	10,5
8	0,6	2,2	4,0	5,6	7,1	8,4	9,5	10,4	11,0	11,4	11,5
9	0,6	2,3	4,2	5,9	7,5	8,9	10,1	11,0	11,7	12,1	12,2
10	0,6	2,4	4,4	6,2	7,8	9,3	10,5	11,4	12,1	12,5	12,6
11	0,6	2,4	4,4	6,2	7,9	9,4	10,6	11,5	12,2	12,6	12,8

Uit bovenstaande tabellen blijkt dat de op aarde aangesloten contour ongelijk nul is, correctie was nodig. De potentiaal werd zodanig ingesteld dat $\xi \cdot \Psi_{m\,max} = \bar{W}_{max}$, met $\xi = 0,02$

Detail van:
Kwadrant D

[mV]

meet-plaats	Ψ_m ongecorr.	meet-plaats	Ψ_m ongecorr.	meet-plaats	Ψ_m ongecorr.
1	0,5	A	0,5	1/A	0,5
-	0,7	-	0,7	-	0,5
-	1,1	-	1,1	-	0,5
-	1,5	-	1,5	-	0,5
-	1,9	-	1,9	-	0,6
2	2,3	B	2,3	2/B	0,7
-	2,8	-	2,3	-	0,8
-	3,2	-	3,2	-	0,9
-	3,6	-	3,6	-	1,1
-	4,0	-	4,0	-	1,4
3	4,4	C	4,4	3/C	1,6

Zie grafieken: G5 en G6.

Opm. De gemeten waarden in de richting 1-3 waren precies gelijk aan die in de richting A-C.

In de hier volgende tabel zijn de berekende waarden $\bar{W}$ opgenomen.

plaats	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,0068	0,0133	0,0194	0,0247	0,0294	0,0332	0,0363	0,0385	0,0398	0,0402
3	0	0,0133	0,0261	0,0379	0,0485	0,0576	0,0652	0,0712	0,0756	0,0782	0,0790
4	0	0,0194	0,0379	0,0551	0,0705	0,0839	0,0950	0,1038	0,1102	0,1140	0,1153
5	0	0,0247	0,0485	0,0705	0,0903	0,1075	0,1219	0,1332	0,1414	0,1463	0,1480
6	0	0,0294	0,0576	0,0839	0,1075	0,1281	0,1453	0,1589	0,1687	0,1746	0,1766
7	0	0,0332	0,0652	0,0950	0,1219	0,1453	0,1649	0,1803	0,1915	0,1982	0,2005
8	0	0,0363	0,0712	0,1038	0,1332	0,1589	0,1803	0,1973	0,2095	0,2169	0,2194
9	0	0,0385	0,0756	0,1102	0,1414	0,1687	0,1915	0,2095	0,2226	0,2304	0,2331
10	0	0,0398	0,0782	0,1140	0,1463	0,1746	0,1982	0,2169	0,2304	0,2386	0,2413
11	0	0,0402	0,0790	0,1153	0,1480	0,1766	0,2005	0,2194	0,2331	0,2413	0,2441

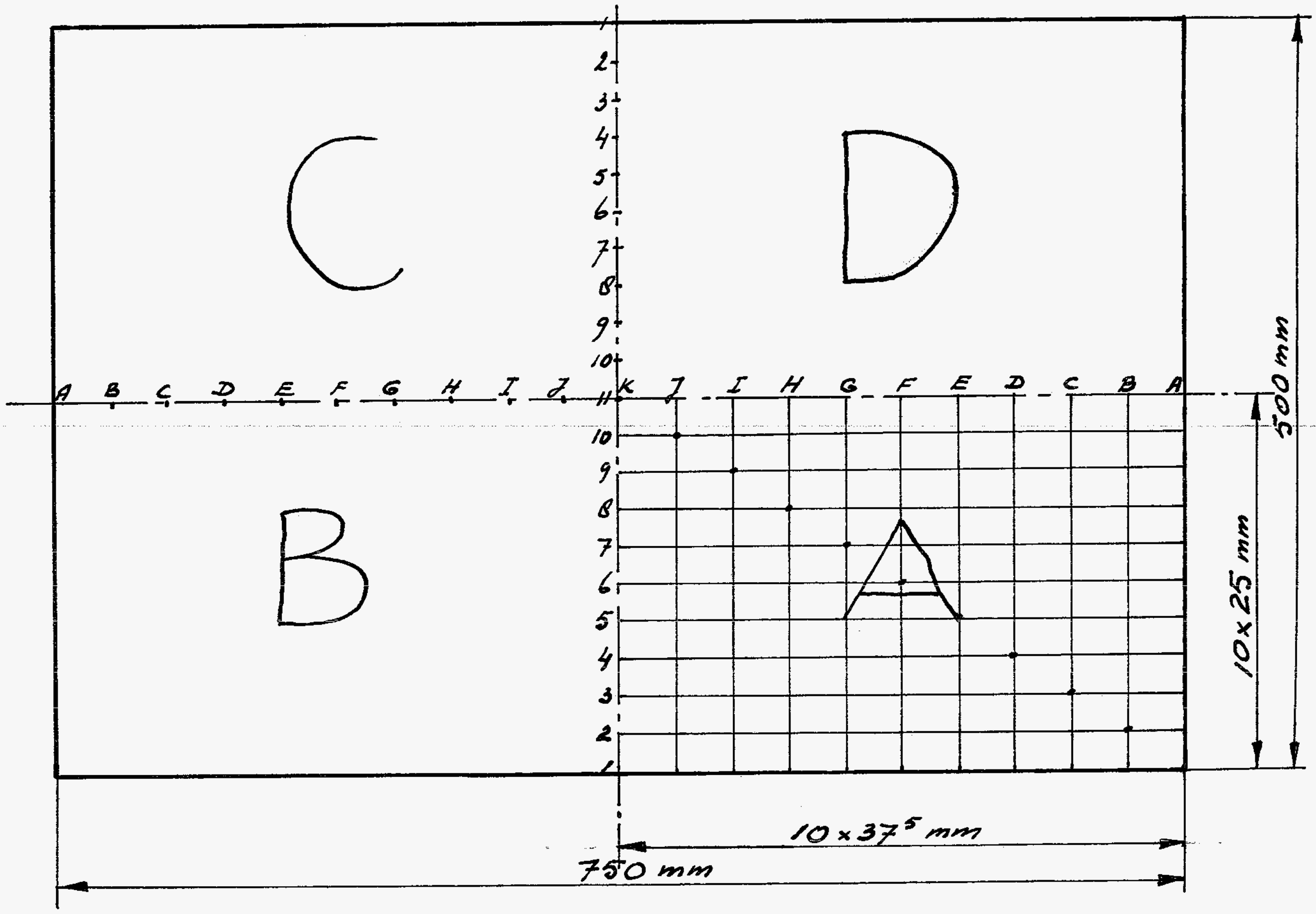
II. Rechthoek: (opgelegde plaat)

Afmetingen binnen contour 500 × 750 mm
" geleidende onderplaat 700 × 950 mm

Zie voor doorsnede en opmerkingen bij experiment I. Vierkant.

Plaats van de meetpunten:

Verdeling in kwadranten.



In de volgende tabel staan de resultaten vermeld van metingen in de kwadranten A t/m D op de onderste laag weerstandspapier. Dit weer ter controle.

20 V
100 Hz
onderste laag weerstandspapier

Kwadrant A

meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.
1	0,6	A	0,3	1 A	0,3
2	27,5	B	33,9	2 B	8,9
3	51,3	C	60,1	3 C	25,5
4	72,5	D	82,3	4 D	45,5
5	90,4	E	99,8	5 E	66,1
6	106,2	F	113,8	6 F	86,8
7	119,3	G	124,2	7 G	105,7
8	128,8	H	132,2	8 H	120,9
9	135,6	I	137,2	9 I	131,9
10	139,7	J	140,4	10 J	138,9
11	141,2	K	141,2	11 K	141,2

Kwadrant B

[mV]

meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.
1	0,6	A	0,5	1 A	0,4
2	27,7	B	33,7	2 B	8,5
3	51,9	C	60,3	3 C	25,0
4	72,8	D	82,1	4 D	44,5
5	90,8	E	99,1	5 E	66,1
6	106,6	F	112,3	6 F	86,5
7	119,6	G	123,1	7 G	105,2
8	129,1	H	131,3	8 H	120,2
9	135,9	I	136,9	9 I	131,5
10	140,0	J	140,3	10 J	138,9
11	141,6	K	141,6	11 K.	141,6

20 V
100 Hz
onderste laag weerstandspapier

Kwadrant C

meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.
1	0,5	A	0,5	1 A	0,5
2	30,4	B	33,8	2 B	9,8
3	55,8	C	60,7	3 C	27,3
4	77,3	D	82,7	4 D	47,7
5	94,9	E	100,0	5 E	68,8
6	110,4	F	113,5	6 F	88,4
7	122,2	G	124,2	7 G	106,9
8	131,7	H	132,6	8 H	122,4
9	138,1	I	138,1	9 I	133,8
10	141,8	J	141,5	10 J	140,5
11	142,8	K	142,8	11 K	142,8

Kwadrant D

[mV]

meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.	meet-plaats	φ_m ongecorr.
1	0,5	A	0,4	1 A	0,4
2	30,0	B	34,0	2 B	9,6
3	55,3	C	60,7	3 C	27,5
4	77,7	D	83,3	4 D	47,9
5	95,3	E	101,0	5 E	69,4
6	110,6	F	115,2	6 F	89,8
7	122,4	G	125,6	7 G	108,0
8	132,0	H	133,6	8 H	123,4
9	138,4	I	139,0	9 I	134,8
10	142,1	J	142,2	10 J	141,3
11	143,1	K	143,1	11 K	143,2

Opm. In bovenstaande tabellen is duidelijk een verhoging van de potentiaal in de overeenkomstige meetpunten der kwadranten waar te nemen. Dit is waarschijnlijk het gevolg van het feit dat alle vier kwadranten ná elkaar, met behulp van een stuk transparantpapier ter grootte van een kwadrant, gemeten zijn.

19,97 V
100 Hz
onderste laag weerstandspapier

Kwadrant A

Kwadrant B

[mV]

meet-pl.	φ_m ongecorr.	meet-pl.	φ_m ongecorr.	meet.pl.	φ_m ongecorr.	meet-pl.	φ_m ongecorr.	meet-pl.	φ_m ongecorr.	meet-pl.	φ_m ongecorr.
1	0,3	A	0,2	1A	0,2	1	zie kwadr. A: 1···11	A	zie kwadr. C: A···k	1A	0,2
2	30,2	B	36,5	2B	9,8	2		B		2B	8,9
3	55,2	C	65,3	3C	20,0	3		C		3C	26,7
4	70,6	D	89,0	4D	50,0	4		D		4D	40,3
5	97,8	E	108,2	5E	72,5	5		E		5E	71,3
6	115,2	F	123,4	6F	95,4	6		F		6F	93,5
7	129,4	G	134,8	7G	115,6	7		G		7G	113,7
8	140,0	H	143,5	8H	132,1	8		H		8H	130,3
9	147,2	I	149,4	9I	144,1	9		I		9I	142,8
10	151,8	J	152,7	10J	151,6	10		J		10J	150,9
11	153,4	k	153,6	11k	154,0	11		k		11k	154,0

19,97 V
100 Hz
onderste laag weerstandspapier

Kwadrant C

Kwadrant D

[mV]

meet.pl	φ_m ongecorr.	meet.pl.	φ_m ongecorr.	meet pl.	φ_m ongecorr.	meet-pl.	φ_m ongecorr.	meet pl.	φ_m ongecorr.	meet-pl	φ_m ongecorr.
1	0,3	A	0,2	1A	0,2	1	zie kwadr. C: 1···11	A	ziekwadr. A: A···k	1A	0,2
2	32,2	B	35,6	2B	9,8	2		B		2B	10,0
3	59,0	C	64,5	3C	28,3	3		C		3C	29,1
4	82,1	D	88,0	4D	50,7	4		D		4D	50,7
5	101,5	E	107,1	5E	73,0	5		E		5E	73,5
6	117,9	F	121,6	6F	94,4	6		F		6F	95,6
7	130,7	G	133,4	7G	114,2	7		G		7G	115,1
8	140,8	H	142,2	8H	131,2	8		H		8H	132,1
9	148,0	I	148,4	9I	143,7	9		I		9I	144,3
10	152,2	J	152,1	10J	151,2	10		J		10J	151,8
11	153,4	k	153,6	11k	154,0	11		k		11k	154,0

Opm. Bovenstaande vier kwadranten zijn gemeten met behulp van een stuk transparantpapier dat alle vier kwadranten bedekte.
Gelijkgenummerde meetpunten in de kwadranten werden direkt na elkaar gemeten zodat de potentiaal geen gelegenheid kreeg te veranderen.

90,7 V
220 Hz
twee lagen weerstandspapier

Kwadrant A

Kwadrant B

[mV]

meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.
1	0,5	A	0,5	1 A	0,5	1	zie kwadr. A: 1....11	A	zie kwadr. C: A....K	1 A	0,5
2	3,3	B	3,4	2 B	0,9	2		B		2 B	0,9
3	6,2	C	6,4	3 C	2,3	3		C		3 C	2,3
4	8,9	D	9,3	4 D	4,5	4		D		4 D	4,5
5	11,3	E	11,8	5 E	7,3	5		E		5 E	7,2
6	13,5	F	14,0	6 F	10,2	6		F		6 F	10,0
7	15,3	G	15,7	7 G	13,0	7		G		7 G	12,8
8	16,9	H	17,2	8 H	15,4	8		H		8 H	15,2
9	17,9	I	18,1	9 I	17,4	9		I		9 I	17,1
10	18,6	J	18,7	10 J	18,5	10		J		10 J	18,3
11	18,8	K	18,8	11 K	18,8	11		K		11 K	18,8

90,7 V
220 Hz
twee lagen weerstandspapier

Kwadrant C

Kwadrant D

[mV]

meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.	meet-pl.	Ψm ongecorr.
1	0,5	A	0,5	1 A	0,5	1	zie kwadr. C: 1....11	A	Zie kwadr. A: A...K	1	0,5
2	3,1	B	3,5	2 B	0,9	2		B		2	0,9
3	5,9	C	6,4	3 C	2,2	3		C		3	2,3
4	8,5	D	9,2	4 D	4,3	4		D		4	4,4
5	11,1	E	11,6	5 E	7,0	5		E		5	7,0
6	13,2	F	13,7	6 F	9,9	6		F		6	9,9
7	15,1	G	15,5	7 G	12,6	7		G		7	12,7
8	16,7	H	16,9	8 H	15,1	8		H		8	15,3
9	17,9	I	17,9	9 I	17,1	9		I		9	17,3
10	18,6	J	18,6	10 J	18,4	10		J		10	18,5
11	18,8	K	18,8	11 K	18,8	11		K		11	18,8

Opm. Bovenstaande vier kwadranten zijn ook gemeten met behulp van een groot stuk transparantpapier.
Er zijn twee lagen weerstandspapier, de spanning op de plaat is verhoogd van 19,97 V (bij één laag weerstandspapier) tot 90,7 V en de frequentie is opgevoerd van 100 Hz naar 220 Hz.
Gelijkgenummerde meetpunten werden direkt na elkaar gemeten.

90 V
220 Hz

twee lagen weerstandspapier

Kwadrant B

zie grafiek G7

[mV]

meet-plaats	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,5	0,9	1,4	1,8	2,3	2,6	2,9	3,1	3,2	3,2	3,3
3	0,5	1,4	2,3	3,2	4,0	4,7	5,2	5,6	5,8	6,1	6,2
4	0,5	1,8	3,2	4,4	5,6	6,6	7,3	8,0	8,5	8,8	8,9
5	0,5	2,2	4,0	5,6	7,1	8,5	9,5	10,2	10,8	11,2	11,4
6	0,5	2,5	4,7	6,6	8,5	10,0	11,2	12,2	12,9	13,3	13,6
7	0,5	2,9	5,3	7,5	9,6	11,3	12,7	13,8	14,6	15,1	15,4
8	0,5	3,1	5,8	8,3	10,4	12,4	14,0	15,2	16,0	16,6	16,9
9	0,5	3,2	6,1	8,8	11,1	13,2	14,8	16,2	17,1	17,7	18,0
10	0,5	3,3	6,2	9,1	11,4	13,6	15,3	16,7	17,7	18,3	18,6
11	0,5	3,4	6,3	9,1	11,6	13,8	15,5	16,9	17,9	18,5	18,8

144,4 V
150 Hz

twee lagen weerstandspapier

145,5 V
150 Hz

Kwadrant A

Kwadrant B

[mV]

meet pl.	Ψ_m ongecorr.	meet-pl.	Ψ_m ongecorr.	meet-pl.	Ψ_m ongecorr.	meet-pl.	Ψ_m ongecorr.	meet-pl.	Ψ_m ongecorr.	meet-pl.	Ψ_m ongecorr.
1	0,5	A	0,5	1 A	0,5	1	0,5	A	0,5	1 A	0,5
2	3,3	B	3,4	2 B	0,8	2	3,2	B	3,4	2 B	0,8
3	6,2	C	6,4	3 C	2,3	3	6,1	C	6,3	3 C	2,3
4	8,8	D	9,3	4 D	4,5	4	8,8	D	9,1	4 D	4,4
5	11,3	E	11,8	5 E	7,3	5	11,3	E	11,6	5 E	7,1
6	13,5	F	14,0	6 F	10,2	6	13,5	F	13,7	6 F	9,9
7	15,3	G	15,8	7 G	13,0	7	15,3	G	15,5	7 G	12,7
8	16,9	H	17,2	8 H	15,5	8	16,9	H	16,8	8 H	15,1
9	18,0	I	18,2	9 I	17,4	9	17,9	I	17,8	9 I	17,1
10	18,6	J	18,7	10 J	18,5	10	18,6	J	18,5	10 J	18,3
11	18,8	K	18,8	11 K	18,8	11	18,8	K	18,8	11 K	18,8

Zie grafiek G8

Het kwadrant B is in z'n geheel doorgemeten omdat we daar i.v.m. de goede gesteldheid van het weerstandspapier de beste meetresultaten verwachtten.
Later bleek echter dat in dit kwadrant de contour niet zuiver recht was en vreesden we (een vrees die naderhand ongegrond zou zijn) dat hierdoor afwijkingen in de potentiaal het gevolg konden zijn.

We hebben toen nogmaals de belangrijkste meetplaatsen van kwadrant B gemeten en tevens van kwadrant A. Nu echter op de onderplaat een spanning van ± 145 V met een frequentie van 150 Hz. Dat bij kwadrant A de spanning 144,4 V is en bij kwadrant B 145,5 V komt doordat de potentiaal binnen de contour veranderde z.g.v. een verandering der eigenschappen van het weerstandspapier door waarschijnlijk temperatuur en vochtigheidsgraad. Om nu de max. potentiaal in het midden op 10,8 mV te handhaven, dit i.v.m. een gemakkelijker vergelijking met de theoretisch berekende waarden, werd de afwijking gecorrigeerd door de spanning op de onderplaat bij te regelen.

Hieronder volgt weer een tabel met de berekende waarden $\overline{w}$ van de rechthoek.

plaats	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,0027	0,0052	0,0074	0,0094	0,0110	0,0124	0,0134	0,0142	0,0146	0,0148
3	0	0,0052	0,0101	0,0146	0,0185	0,0217	0,0244	0,0265	0,0279	0,0288	0,0291
4	0	0,0076	0,0148	0,0213	0,0269	0,0318	0,0357	0,0387	0,0408	0,0421	0,0425
5	0	0,0098	0,0190	0,0273	0,0347	0,0409	0,0459	0,0498	0,0526	0,0543	0,0548
6	0	0,0116	0,0226	0,0327	0,0414	0,0489	0,0550	0,0597	0,0630	0,0650	0,0657
7	0	0,0132	0,0257	0,0371	0,0471	0,0556	0,0626	0,0679	0,0718	0,0740	0,0748
8	0	0,0145	0,0282	0,0407	0,0517	0,0610	0,0686	0,0745	0,0787	0,0813	0,0821
9	0	0,0154	0,0299	0,0432	0,0549	0,0649	0,0730	0,0793	0,0838	0,0865	0,0874
10	0	0,0159	0,0310	0,0448	0,0569	0,0673	0,0757	0,0822	0,0869	0,0897	0,0906
11	0	0,0161	0,0314	0,0453	0,0576	0,0680	0,0766	0,0832	0,0879	0,0907	0,0917

III IJkingsprocedure vierkant/rechthoek

(opgelegde platen).

Afm. binnen contour van vierkant 500 x 500 mm
" " " " rechthoek 500 x 750 mm

Beide contouren waren aangebracht op èèn aluminiumplaat met afmetingen van 700 x 1600 mm. De diverse lagen werden op dezelfde wijze aangebracht als bij I
Voor het schilderen met zilververf van de contour werden eerst, met behulp van een brede trekpen, rechte lijnen getrokken waartussen de verf met een penseel werd aangebracht.

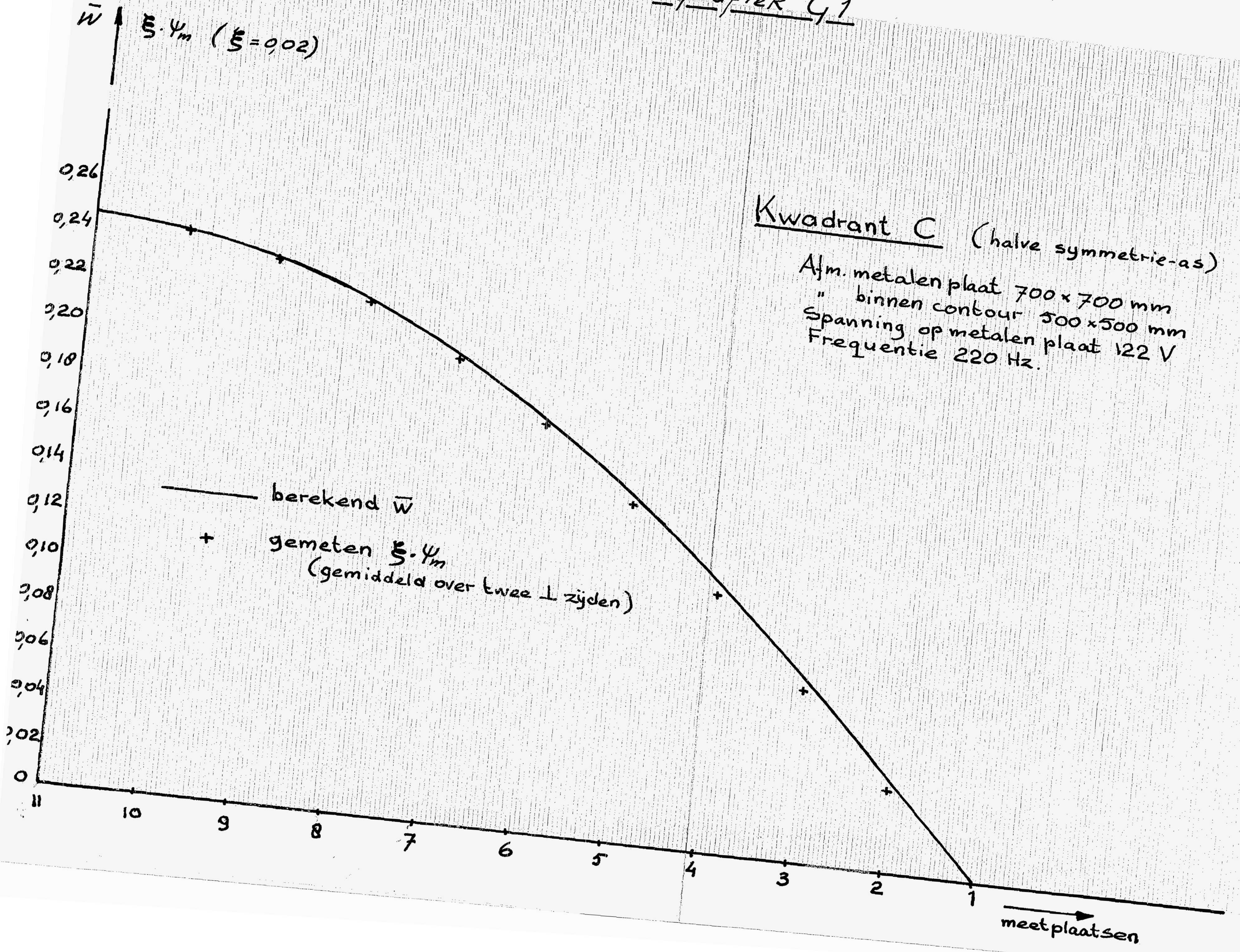
Apparatuur:
Toongenerator: Peekel, type 22B (WE 252)
Voltmeter: Digitale voltmeter LM 1420.2

Het doel van dit experiment was na te gaan in hoeverre de max. potentiaal van het vierkant gelijk zou zijn (volgens berekening) aan 0,5256 maal de max. potentiaal van de rechthoek. Dit bleek vrij nauwkeurig te kloppen. Zie onderstaande tabel waarin de resultaten van verschaidene metingen zijn vermeld.

metalen plaat		Ψ_m ongecorr.			$\Psi_{m\,vk} / \Psi_{m\,rh}$
V	Hz	vierkant	rechthoek	rand	
120	100	3,5	6,3	0,6	0,510
140	100	4,4	8,0	0,6	0,514
70	200	7,3	13,3	0,6	0,528
100	200	10,3	19,0	0,8	0,522
120	200	13,4	24,7	0,9	0,525
50	500	20,6	52,9	1,0	0,534
30	1000	63,3	117,4	1,1	0,535

Opm.: Uit deze tabel blijkt dat de middelste drie metingen met op de metalen plaat resp. 70V/200 Hz, 100V/200 Hz en 120 V/200 Hz de beste resultaten gaven.

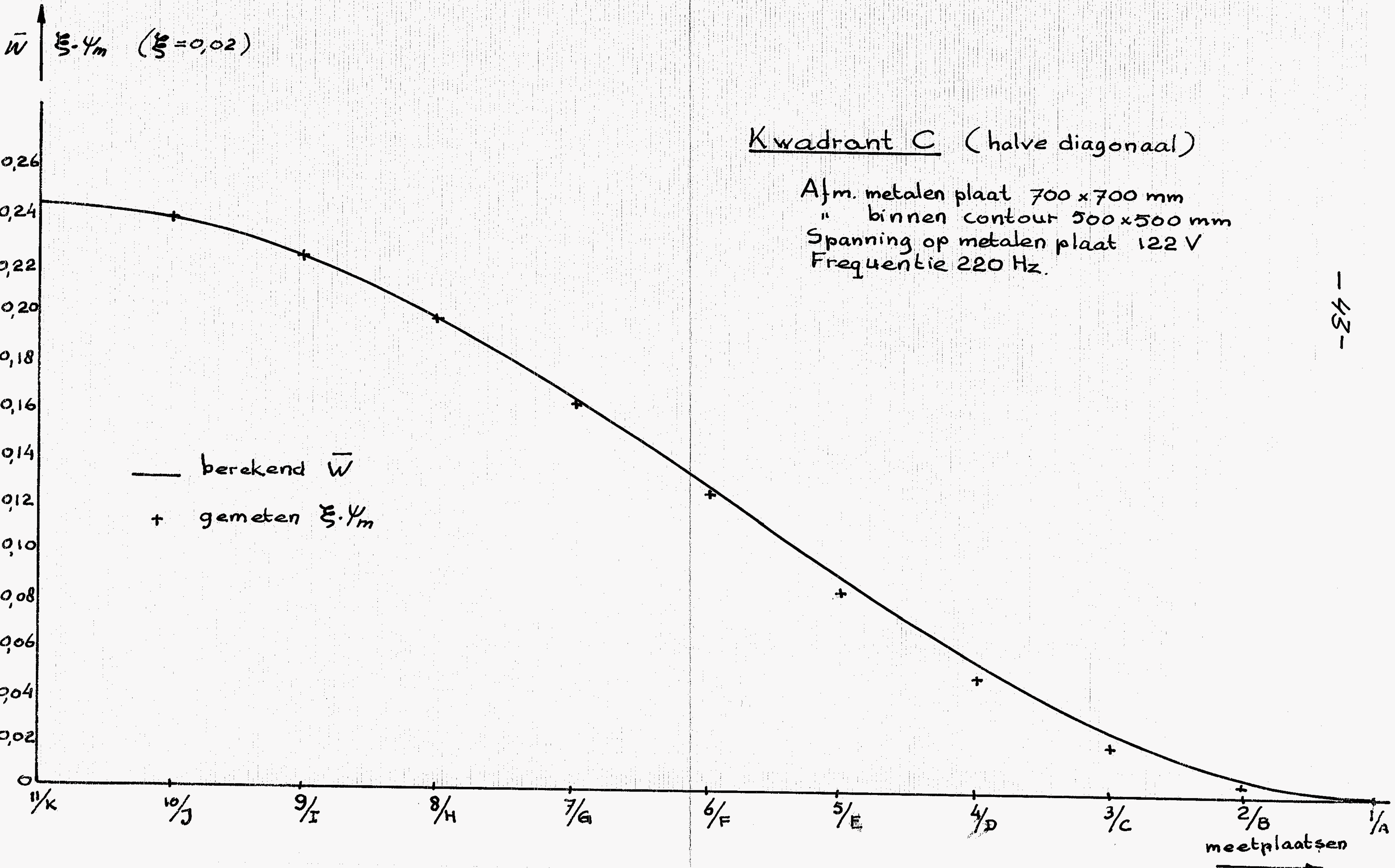
Grafiek G1



Kwadrant C (halve symmetrie-as)

Afm. metalen plaat 700 × 700 mm
" binnen contour 500 × 500 mm
Spanning op metalen plaat 122 V
Frequentie 220 Hz.

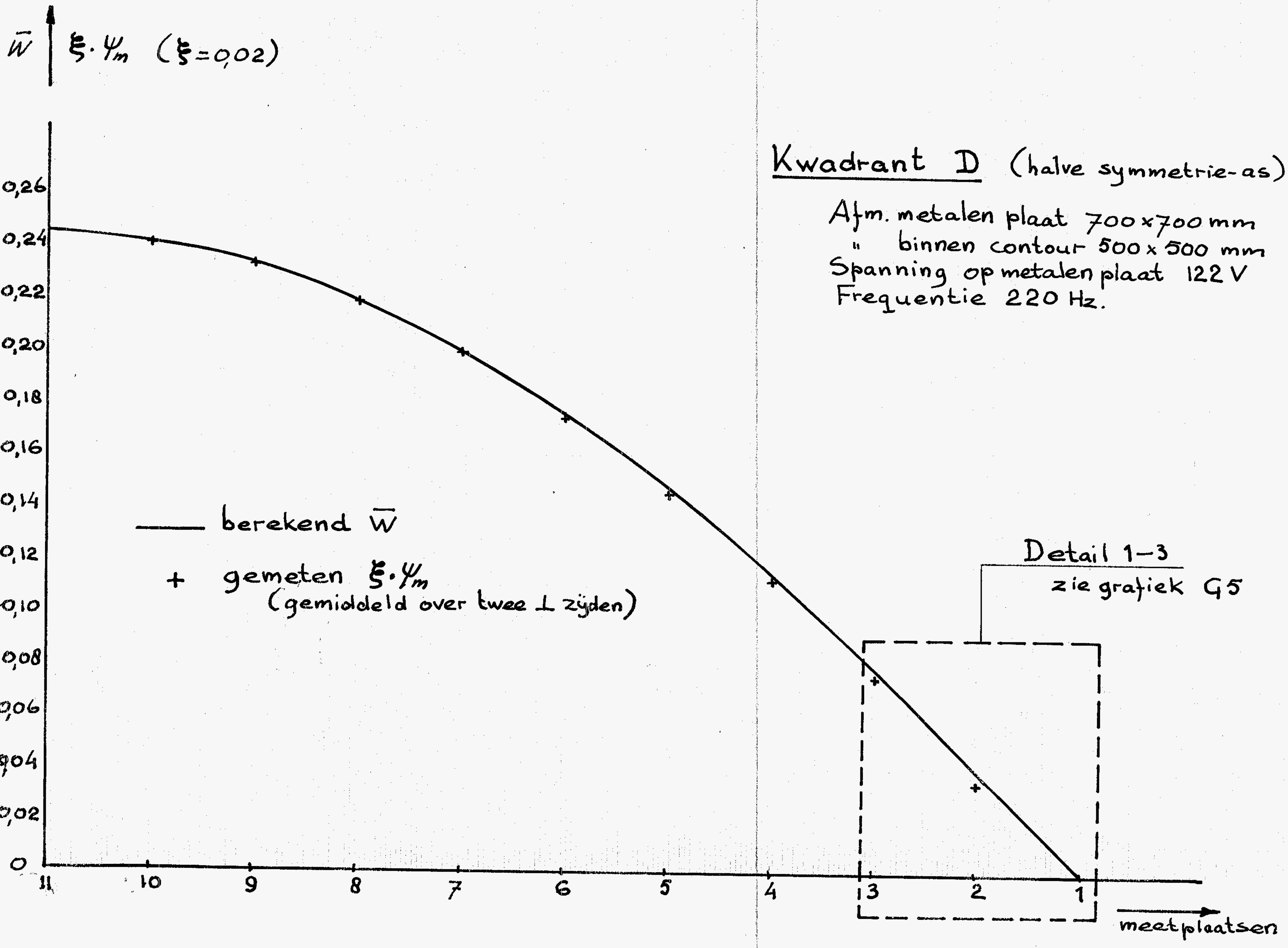
Grafiek G2



Kwadrant C (halve diagonaal)

Afm. metalen plaat 700 × 700 mm
" binnen contour 500 × 500 mm
Spanning op metalen plaat 122 V
Frequentie 220 Hz.

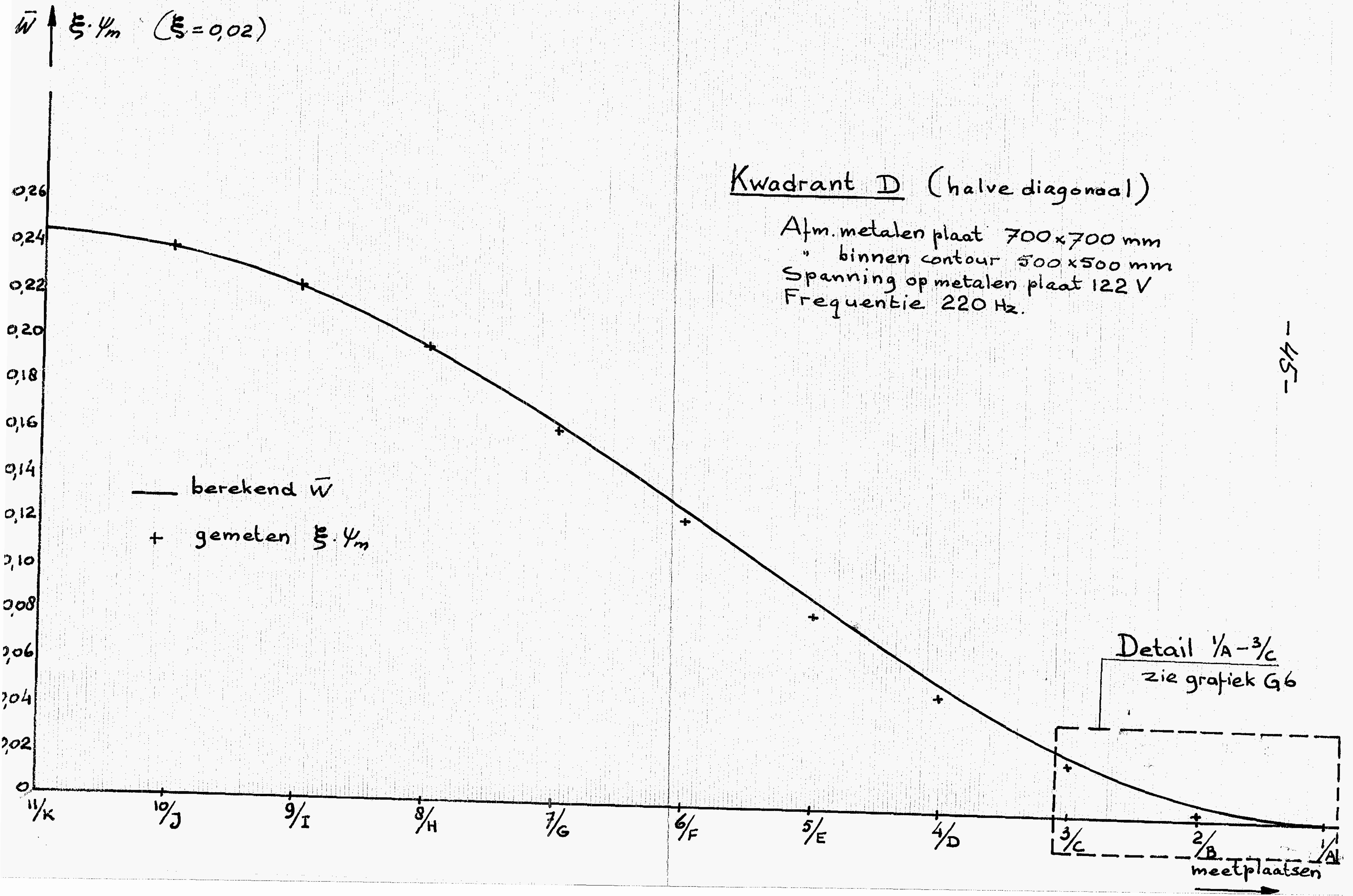
Grafiek G3



Kwadrant D (halve symmetrie-as)

Afm. metalen plaat 700 x 700 mm
" binnen contour 500 x 500 mm
Spanning op metalen plaat 122 V
Frequentie 220 Hz.

Grafiek G4



Kwadrant D (halve diagonaal)

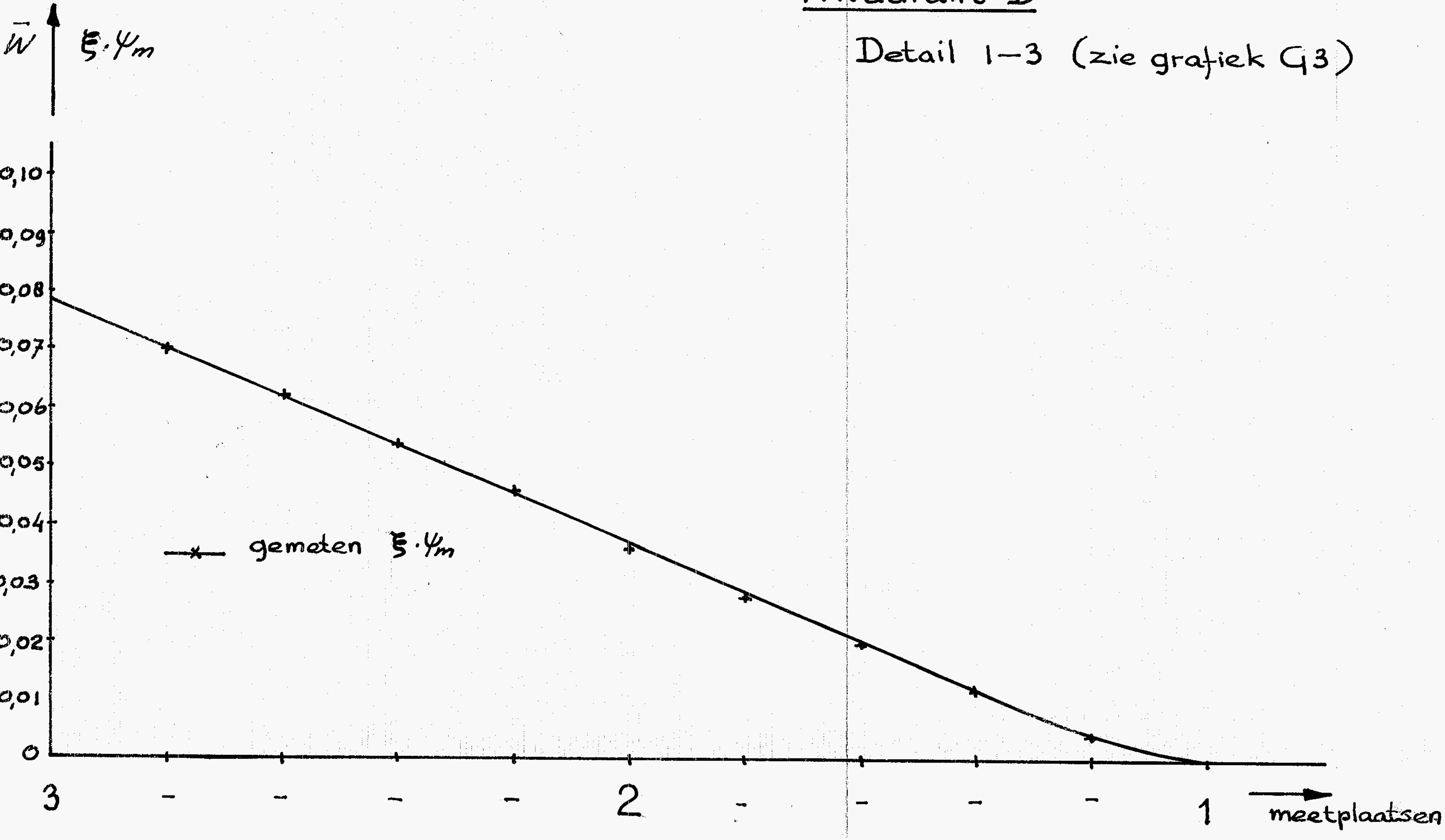
Afm. metalen plaat 700×700 mm
" binnen contour 500×500 mm
Spanning op metalen plaat 122 V
Frequentie 220 Hz.

Detail 1/A – 3/C
zie grafiek G6

Grafiek G5

Kwadrant D

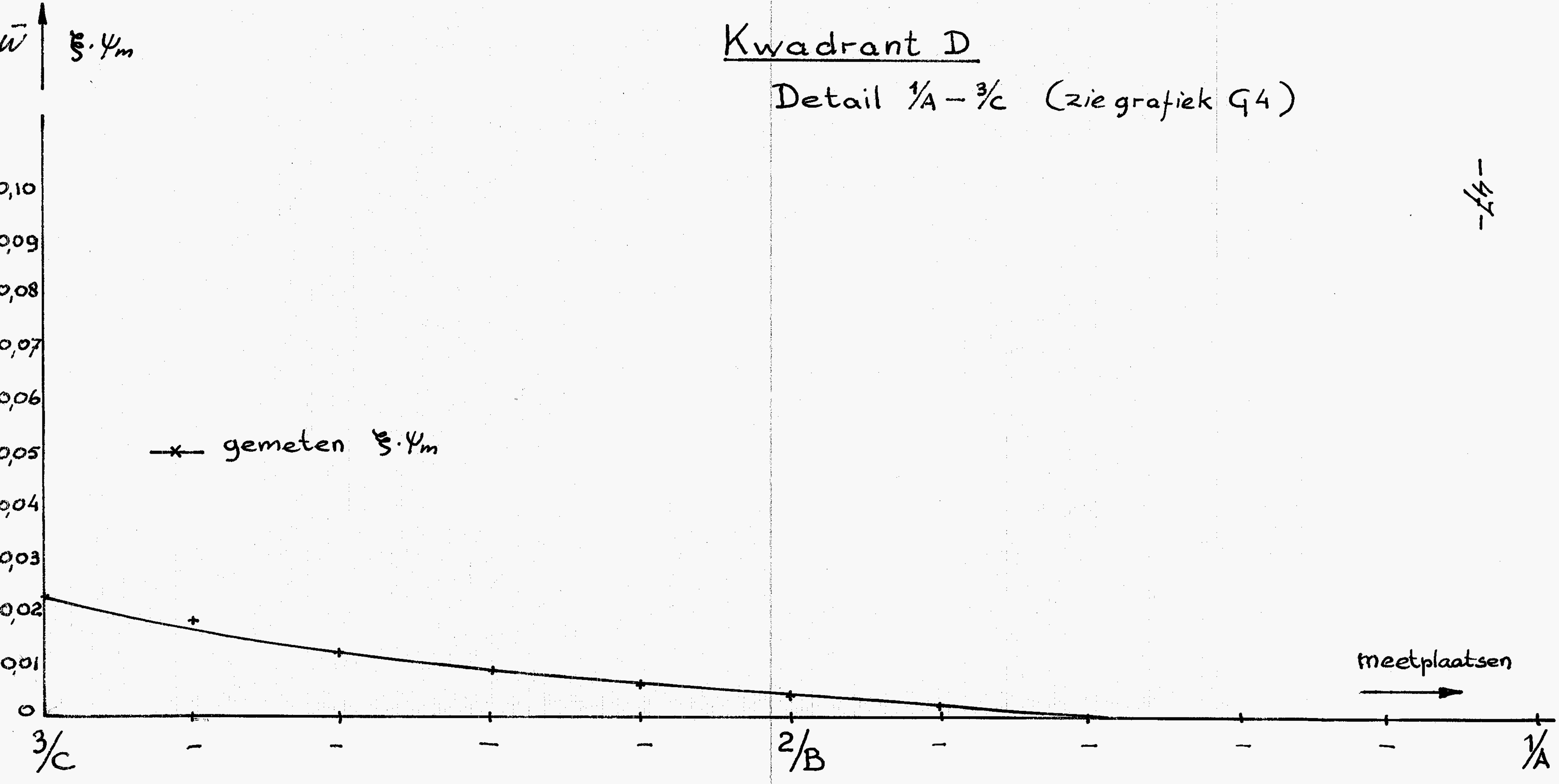
Detail 1–3 (zie grafiek G3)



Grafiek G6

Kwadrant D

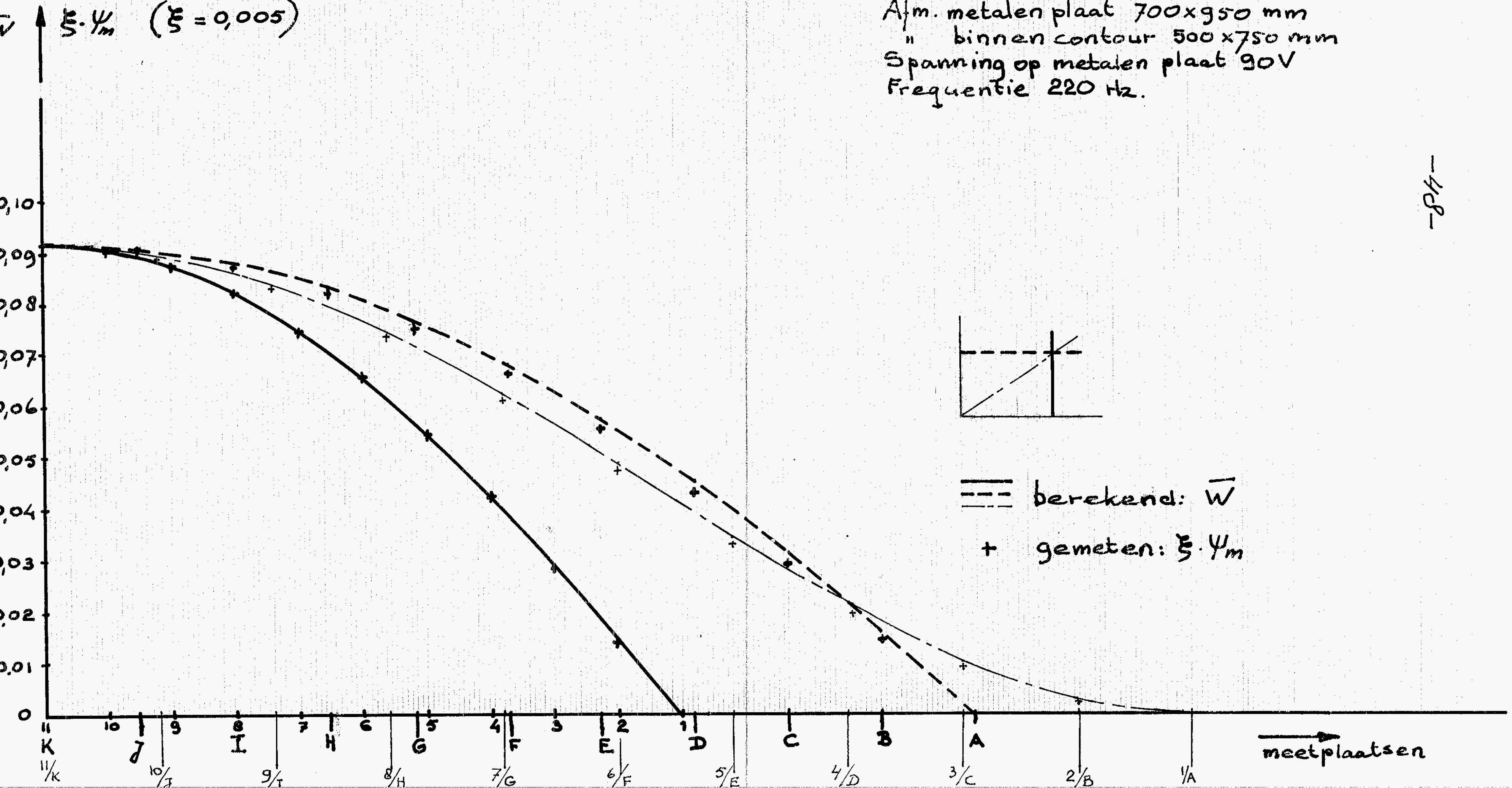
Detail 1/A – 3/C (zie grafiek G4)



Grafiek G7

Kwadrant B (drie hoofdrichtingen)

A/m. metalen plaat 700x950 mm
" binnen contour 500x750 mm
Spanning op metalen plaat 90V
Frequentie 220 Hz.



Grafiek G8

Kwadrant A (drie hoofdrichtingen)

Afm. metalen plaat 700 x 950 mm
" binnen contour 500 x 750 mm
Spanning op metalen plaat 144,4 V
Frequentie 150 Hz.