

Constitutieve modellen

Citation for published version (APA):

Schreurs, P. J. G. (1989). *Constitutieve modellen*. (DCT rapporten; Vol. 1989.057). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1989

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Constitutieve Modellen

Inhoud:

- * Keuze van een materiaalmodel
- * Elastisch materiaalgedrag
- * Visco-elastisch materiaalgedrag
- * Vloeistoffen
- * Anisotroop elastisch gedrag
- * Composieten
- * Laminaaten

WFW.- 89.057

Voorwoord

Dit WFW-rapport bevat een gedeelte van de stof, die in 1989 (trimester 4.1) behandeld is in het keuzecollege Constitutieve Modellen (4K060).

In dit college zijn ook nog de volgende onderwerpen aan de orde geweest :

1. Algemene inleiding ; Herhaling continuümmechanica
[Cees Oomens]
2. Plasticiteit
[Marcel Brekelmans ; dictaat "Niet-lineaire mechanica : basis" nr: 4642]
3. Experimentele karakterisering van materiaaleigenschappen.
[Cees Oomens ; "Het Schatten van constitutieve parameter bij materialen die tijdsafhankelijk gedrag vertonen"
WFW-rapport WFW-89.063]
4. Breukmechanica
[Piet Schreurs ; "Breukmechanica" WFW-rapport WFW-89.056]
5. Continuum Damage Mechanics (CDM)
[Arnold van der Heijden ; "Continuum Damage Mechanics"
WFW-rapport WFW-89.058]

December 1989

Piet Schreurs

KEUZE VAN EEN MATERIAALMODEL

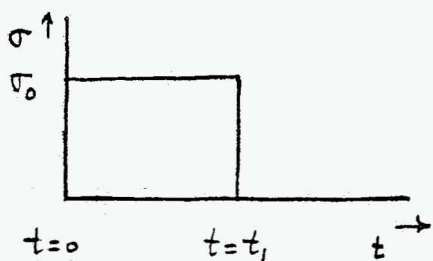
Keuze van een materiaalmodel

De formulering van een materiaalmodel voor de beschrijving van (thermo-)mechanisch gedrag, vindt plaats op grond van

1. ervaring
2. experimentele waarnemingen.

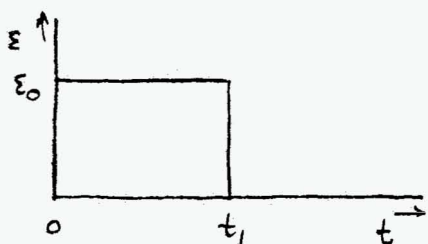
Als eerste, eenvoudig uit te voeren experiment wordt meestal een 1D-trekproef uitgevoerd, waarbij het verband tussen spanning en rek gemeten wordt.

Stel de spanning wordt voorgeschreven, zoals hieronder geschilderd

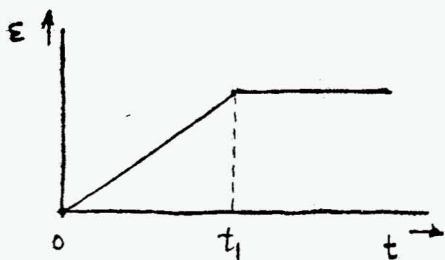


Stap in de spanning op tijdstippen $t=0$ ($0 \rightarrow \sigma_0$) en $t=t_1$ ($\sigma_0 \rightarrow 0$)

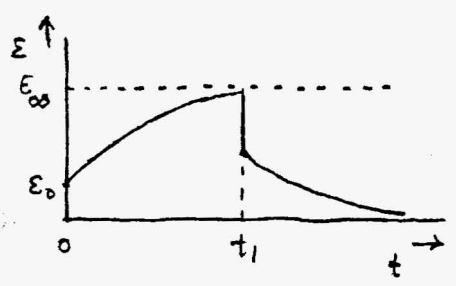
De rek als functie van de tijd wordt gemeten. Mogelijke resultaten zijn:



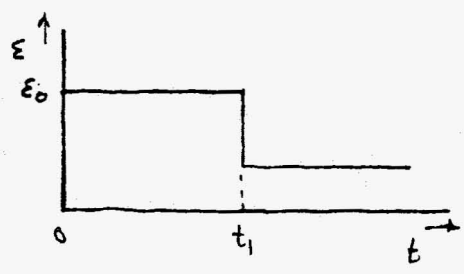
elastisch :
momentane respons
geen blijvende vervorming



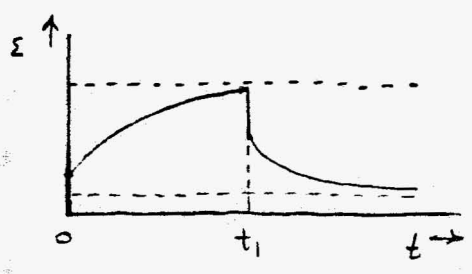
visceus :
tijdsafhankelijke respons (geen limiet)
blijvende vervorming



visco-elastisch
 tijdsafhankelijke respons (limiet)
 geen blijvende vervorming



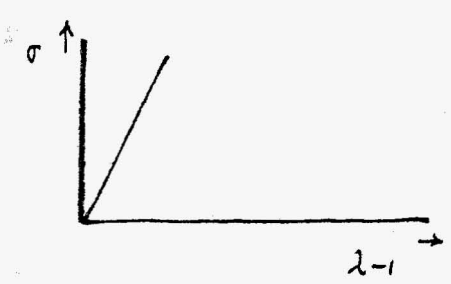
elasto-plastisch
 momentane respons
 blijvende vervorming



visco-plastisch
 tijdsafhankelijke respons (limiet)
 blijvende vervorming

Stel dat geconstateerd wordt dat het materiaalgedrag elastisch is. Dan kan het verband tussen de axiale spanning σ en de axiale lineaire rek $\epsilon = \lambda - 1$ gemeten worden.

Mogelijke resultaten:



lineair verband \rightarrow
 $\sigma = \alpha (\lambda - 1) = \alpha \epsilon$

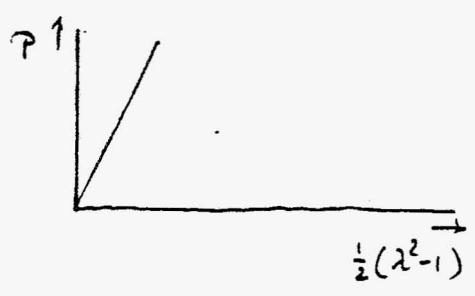


niet-lineair verband \rightarrow
 $\sigma = f(\lambda - 1) = f(\epsilon)$

In het laatste geval is het mogelijk om $f(\epsilon)$ door curve-fitting te bepalen.

Het is echter verstandig om de meetresultaten eerst in een andere vorm te bekijken, bv. door een andere spanningsgrootte en/of een andere rek-grootte te kiezen.

In het geval dat de 2^e Piola-Kirchhoff spanning uitgezet wordt tegen de Green-Lagrange rek, verkrijgen we wellicht onderstaand lineair verband.



$P = \alpha \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \alpha E$

Na constatering van een lineaire relatie tussen P en E , is de verleiding groot, dit resultaat te generaliseren naar 3D:

$$1D: P = \alpha E \quad \rightarrow \quad 3D: \mathbb{P} = \alpha \mathbb{E}$$

Dat een dergelijke generalisatie gevaarlijk is, blijkt in dit geval als we, uitgaande van $\mathbb{P} = \alpha \mathbb{E}$, de dwarscomponent beschouwen:

$$P_d = \alpha E_d = \frac{1}{2} \alpha (\mu^2 - 1) \quad \text{met} \quad \mu^2 = \frac{A}{A_0}, \quad A = \text{dwarsdoorsnedeopp.}$$

Aangezien moet gelden $P_d = 0$, volgt $\mu = 1 \rightarrow A = A_0$, m.a.w. het model $\mathbb{P} = \alpha \mathbb{E}$ beschrijft geen dwarscontractie en is daardoor niet realistisch.

Bij het formuleren van materiaalmodellen kunnen we beter de omgekeerde weg bewandelen: van algemeen naar eenvoudig.

Vereenvoudiging van een algemeen constitutief model

Zoals in het voorafgaande beschreven is, leidt generalisatie van 1D-modellen tot 3D-relaties, zelden tot een goede 3D constitutive vergelijking.

Beter is het om uit te gaan van een zo algemeen mogelijk model en dit, op grond van theoretisch inzicht en experimentele ervaring, zo ver mogelijk te vereenvoudigen.

Deze werkwijze leidt tot constitutieve vergelijkingen, waarvan de beperkingen bekend zijn. Hoe verder de vereenvoudiging is doorgevoerd, des te meer beperkingen zijn er geïntroduceerd en des te kleiner is de klasse van materialen, waarvan het gedrag door het model beschreven wordt.

Een voorbeeld van deze werkwijze is hieronder schetsmatig weergegeven.

$$\mathcal{T}(t) = \mathcal{N} \{ \mathbf{g}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \mid \tau \leq t \}$$

Beperkende relaties uit de fysica; Constitutieve principes;

Massabeloos ($\rho \dot{\mathbf{J}} = \rho_0$); Andere, altijd objectieve formulering \Rightarrow

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{G} \{ \mathbf{E}(\tau) \mid \tau \leq t \}$$

Experimenten \rightarrow geen tijdsafhankelijkheid \rightarrow elastisch gedrag \Rightarrow

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{G} \{ \mathbf{E}(t) \}$$

Experimentele resultaten en/of microstructurele beschouwing \rightarrow
het materiaal is isotroop \Rightarrow

$$\mathcal{P} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{E} + \alpha_2 \mathbf{E}^2 \quad \text{met} \quad \alpha_i = \alpha_i(\mathcal{J}_1(\mathbf{E}), \mathcal{J}_2(\mathbf{E}), \mathcal{J}_3(\mathbf{E})).$$

Experimentele resultaten \rightarrow het verband tussen \mathcal{P} en \mathbf{E} is lineair \rightarrow

$$\mathcal{P} = c_0 \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + c_1 \mathbf{E} \quad \text{met} \quad c_0, c_1 = \text{constanten}.$$

Fenomenologische en structurele materiaalmodellen.

Materiaalmodellen kunnen onderverdeeld worden in fenomenologische modellen en structurele modellen.

Beide zijn relaties tussen de spanningen in het materiaal en de vervorming hiervan. De wijze waarop ze worden afgeleid en het daarmee samenhangend karakter van de materiaalparameters, is echter verschillend.

Fenomenologische materiaalmodellen

- zijn geformuleerd op basis van de thermodynamica;
- zijn "vereenvoudigd" op basis van functionaalanalyse en fysische wetmatigheden (constitutieve principes);
- bevatten veelal een groot aantal materiaalfuncties, die niet of erg moeizaam experimenteel te bepalen zijn;
- bevatten geen informatie over de microscopische structuur van het materiaal

Structurele materiaalmodellen

- vinden hun oorsprong in de gedetailleerde analyse van het gedrag van een representatief deel van het materiaal. De keuze van dit representatief deel is van groot belang. Door toepassing van statistische technieken (middeling e.d.) worden de resultaten vertaald in een relatie tussen spanningstensor en vervormings (inelheids) tensor.
- bevatten zgn. effectieve materiaalparameters, die op een behende manier afhangen van microstructurele data. Deze data zijn veelal eenvoudig experimenteel te bepalen. NB: in een materiaalmodel voor een vezelversterkte composit zullen de effectieve materiaalparameters op een behende manier afhangen van de interne microgeometrie en van de vezel- en matrixeigenschappen.
- bevatten informatie over de microscopische structuur.
- zijn nog volop in ontwikkeling m.m. voor compositmaterialen.

Classificering constitutieve vergelijkingen.

In het voorafgaande zijn de algemene constitutieve principes besproken :

- * het equipresentiethoreema
- * het bepaaldheidsprincipe
- * het principe van de lokale werking
- * het objectiviteitsprincipe

Resultaat :

$$\mathbb{T}(\underline{x}, t) = \mathbb{N} \{ \mathbb{F}(\underline{x}, \tau), \mathbb{D}(\underline{x}, \tau), \vec{g}(\underline{x}, \tau) \mid \tau \leq t \}$$

$$\vec{h}(\underline{x}, t) = \vec{H} \{ \mathbb{F}(\underline{x}, \tau), \mathbb{D}(\underline{x}, \tau), \vec{g}(\underline{x}, \tau) \mid \tau \leq t \}$$

$$\Phi(\underline{x}, t) = \Phi \{ \mathbb{F}(\underline{x}, \tau), \mathbb{D}(\underline{x}, \tau), \vec{g}(\underline{x}, \tau) \mid \tau \leq t \}$$

In hetgeen volgt beperken we ons tot constitutieve vergelijkingen waarin temperatureffecten geen rol spelen \rightarrow

De constitutieve vergelijking voor \vec{h} is niet langer relevant.

Relevante constitutieve vergelijkingen :

$$\mathbb{T}(\underline{x}, t) = \mathbb{N} \{ \mathbb{F}(\underline{x}, \tau) \mid \tau \leq t \}$$

$$\Phi(\underline{x}, t) = \Phi \{ \mathbb{F}(\underline{x}, \tau) \mid \tau \leq t \}$$

We richten de aandacht in eerste instantie op de vergelijking voor \mathbb{T} .

Algemene constitutieve vergelijking voor σ .

De algemene constitutieve vergelijking voor σ luidt :

$$\sigma(t) = N\{F(\tau) \mid \tau \leq t\}$$

$$\text{met } N\{Q \cdot F\} = Q^c \cdot N\{F\} \cdot Q \quad \forall \text{ rotatietensor } Q$$

In het algemeen is het moeilijk om via modelvorming op basis van experimentele resultaten, een expliciet verband tussen σ en $F(\tau)$ te formuleren, dat aan de objectiviteitseis voldoet. De moeilijkheid wordt niet alleen door de objectiviteitseis veroorzaakt maar ook door het feit dat $N\{\cdot\}$ een functionaal is van de totale deformatiegeschiedenis, inclusief stane rotaties.

Het biedt voordelen de constitutieve vergelijking anders te formuleren en wel zodanig dat :

1. altijd aan de objectiviteitseis is voldaan ,
2. de rotatiegeschiedenis "afgesplitst" wordt van de vervormingsgeschiedenis.

Andere formulering van de constitutieve vergelijking voor σ

Als algemene constitutieve vergelijking voor σ (voor temperatuur-
onafhankelijke materiaalgedrag) kunnen we onderstaande relatie:

$$\sigma(t) = \mathbb{A}(t) \cdot \mathbb{H} \{ \mathcal{U}(\tau) \mid \tau \leq t \} \cdot \mathbb{A}^c(t)$$

met $\mathbb{A}^* = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{A} \quad \forall \text{ rotatietensor } \mathbb{Q}$.

Bovenstaande uitdrukking voldoet aan de objectiviteits eis.

De functionaal $\mathbb{H} \{ \}$ is een functie van de vervormingsgeschiedenis.

De tensor \mathbb{A} is nog willekeurig te kiezen, zij het dat moet gelden $\mathbb{A}^* = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{A}$
 $\forall \mathbb{Q}$ opdat de constitutieve relatie objectief is.

Uit bovenstaande relatie volgt:

$$\mathbb{A}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{A}^{-c} = \mathbb{H} \{ \mathcal{U}(\tau) \mid \tau \leq t \}$$

We definiëren de alternatieve spanningstensor $\hat{\sigma}$ als

$$\hat{\sigma} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{A}^{-c}$$

Deze tensor is invariant voor stane rotaties: $\hat{\sigma}^* = \hat{\sigma}$

De constitutieve vergelijking, geformuleerd in de alternatieve
spanningstensor luidt:

$$\hat{\sigma}(t) = \mathbb{H} \{ \mathcal{U}(\tau) \mid \tau \leq t \}$$

Tijdsafgeleide van de alternatieve spanningstensor

De alternatieve spanningstensor $\hat{\sigma}$ is gedefinieerd als

$$\hat{\sigma} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{A}^{-c}$$

De tijdsafgeleide van $\hat{\sigma}$ blijft in bepaalde constitutieve modellen een rol te spelen:

$$\dot{\hat{\sigma}} = \dot{\mathbb{A}}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{A}^{-c} + \mathbb{A}^{-1} \cdot \dot{\sigma} \cdot \mathbb{A}^{-c} + \mathbb{A}^{-1} \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbb{A}}^{-c}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} &\rightarrow \dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1} + \mathbb{A} \cdot \dot{\mathbb{A}}^{-1} = \mathbb{0} \rightarrow \dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1} = -\mathbb{A} \cdot \dot{\mathbb{A}}^{-1} \rightarrow \\ \dot{\mathbb{A}}^{-1} &= -\mathbb{A}^{-1} \cdot \dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\sigma}} &= -\mathbb{A}^{-1} \cdot \dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{A}^{-c} + \mathbb{A}^{-1} \cdot \dot{\sigma} \cdot \mathbb{A}^{-c} - \mathbb{A}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{A}^{-c} \cdot \dot{\mathbb{A}}^c \cdot \mathbb{A}^{-c} \\ &= \mathbb{A}^{-1} \cdot [-(\dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1}) \cdot \sigma + \dot{\sigma} - \sigma \cdot (\mathbb{A}^{-c} \cdot \dot{\mathbb{A}}^c)] \cdot \mathbb{A}^{-c} \\ &= \mathbb{A}^{-1} \cdot [\dot{\hat{\sigma}} - (\dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1}) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1})^c] \cdot \mathbb{A}^{-c} \end{aligned}$$

We definiëren nu de rgn. alternatieve tijdsafgeleide van de Cauchy spanningstensor als volgt

$$\check{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}} - (\dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1}) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\dot{\mathbb{A}} \cdot \mathbb{A}^{-1})^c$$

Waarvoor voor $\check{\sigma}$ volgt:

$$\dot{\check{\sigma}} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \dot{\sigma} \cdot \mathbb{A}^{-c}$$

Te bewijzen is dat $\check{\sigma}$ invariant is voor stane rotaties.

Keuze van de tensor \mathbb{A}

Door specificeren van \mathbb{A} - z.d.d. geldt $\mathbb{A}^* = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{A}$! - verkrijgen we een aantal, in de literatuur veel gehanteerde alternatieve tensoren $\hat{\sigma}$ en alternatieve afgeleiden $\overset{\nabla}{\sigma}$.

Aan de interpretatie van de verschillende tensoren, wordt op deze plaats geen aandacht besteed.

I. $\mathbb{A} = \mathbb{R} \rightarrow \hat{\sigma} = \mathbb{R}^c \cdot \sigma \cdot \mathbb{R} = \hat{\sigma}_D$ (rotatiegeometrische σ)

$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - (\dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{R}^c) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{R}^c)^c$
 $= \overset{\nabla}{\sigma}_D$ (Dienes afgeleide van σ)

II. $\mathbb{A} = \mathbb{Q}$ met \mathbb{Q} een willekeurige rotatietensor \rightarrow

$\hat{\sigma} = \mathbb{Q}^c \cdot \sigma \cdot \mathbb{Q} = \hat{\sigma}_J$

$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - (\dot{\mathbb{Q}} \cdot \mathbb{Q}^c) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\dot{\mathbb{Q}} \cdot \mathbb{Q}^c)^c$

$$\left. \begin{aligned} d\vec{x} &= \mathbb{F} \cdot d\vec{x}_0 \rightarrow \dot{d}\vec{x} = \dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1} \cdot d\vec{x} = (\mathbb{D} + \mathbb{Q}) \cdot d\vec{x} = \mathbb{Q} \cdot d\vec{x} \\ d\vec{x} &= \mathbb{Q} \cdot d\vec{x}_0 \rightarrow \dot{d}\vec{x} = \dot{\mathbb{Q}} \cdot \mathbb{Q}^c \cdot d\vec{x} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

 $\dot{\mathbb{Q}} \cdot \mathbb{Q}^c = \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - \mathbb{Q} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbb{Q}^c = \overset{\nabla}{\sigma}_J$ (Jaumann afgeleide van σ)

III. $\mathbb{A} = \mathbb{F} \rightarrow \hat{\sigma} = \mathbb{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{F}^{-c} = \mathbb{J} \mathbb{P} = \hat{\sigma}_T$

$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - (\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1}) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1})^c$
 $= \dot{\sigma} - (\mathbb{D} + \mathbb{Q}) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\mathbb{D} + \mathbb{Q})^c$
 $= \overset{\nabla}{\sigma}_T$ (Truesdell afgeleide van σ)

$$\text{IV. } \mathbb{A} = \mathbb{F}^{-c} \rightarrow \hat{\sigma} = \mathbb{F}^c \cdot \sigma \cdot \mathbb{F} = \hat{\sigma}_c$$

$$\hat{\sigma}^{\vee} = \hat{\sigma}^{\circ} - (\dot{\mathbb{F}}^{-c} \cdot \mathbb{F}^c) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\dot{\mathbb{F}}^{-c} \cdot \mathbb{F}^c)^c$$

$$\mathbb{F} \cdot \dot{\mathbb{F}}^{-1} = \mathbb{I} \rightarrow \dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1} + \mathbb{F} \cdot \dot{\mathbb{F}}^{-1} = \mathbb{D} \rightarrow$$

$$\mathbb{F} \cdot \dot{\mathbb{F}}^{-1} = -\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1} = -(\mathbb{D} + \mathbb{Q}) \Rightarrow$$

$$\hat{\sigma}^{\vee} = \hat{\sigma}^{\circ} + (\mathbb{D} + \mathbb{Q})^c \cdot \sigma + \sigma \cdot (\mathbb{D} + \mathbb{Q})$$

$$= \hat{\sigma}^{\circ} - (\mathbb{Q} - \mathbb{D}) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\mathbb{Q} - \mathbb{D})^c$$

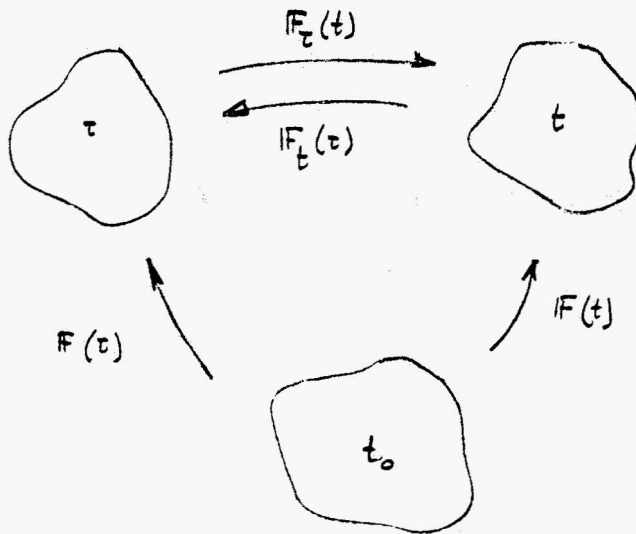
$$= \hat{\sigma}_c^{\vee} \quad (\text{Cotter-Rivlin afgeleide van } \sigma)$$

Modelvorming van het materiaalgedrag.

De constitutieve vergelijkingen die in de literatuur beschreven zijn voor de verschillende klassen van materiaalgedrag, kunnen alle worden afgeleid uit de algemene constitutieve vergelijking

$$\hat{\sigma}(t) = H \{ \mathcal{C}(\tau) \mid \tau \leq t \}$$

We onderscheiden : de referentieconfiguratie t_0 , de momentane configuratie t , een willekeurige configuratie τ tussen t_0 en t .



- Er geldt :
- * $F_t(\tau) = F_\tau^{-1}(t)$
 - * $\mathcal{C}(t) = F^c(t) \cdot F(t)$; $\mathcal{C}_t(\tau) = F_t^c(\tau) \cdot F_t(\tau) = F_\tau^{-c}(t) \cdot F_\tau^{-1}(t)$
 - * $F(t) = F_\tau(t) \cdot F(\tau) \rightarrow F(\tau) = F_\tau^{-1}(t) \cdot F(t) = F_t(\tau) \cdot F(t) \rightarrow$
 $\mathcal{C}(\tau) = F^c(\tau) \cdot F(\tau) = F^c(t) \cdot F_t^c(\tau) \cdot F_t(\tau) \cdot F(t) = F^c(t) \cdot \mathcal{C}_t(\tau) \cdot F(t)$

Elastisch materiaalgedrag

- geen geschiedensafhankelijkheid

$$\hat{\sigma}(t) = H\{\mathcal{C}(t)\}$$

Visceus materiaalgedrag

- de referentietoestand t_0 is niet eenduidig te definiëren →
- de momentane configuratie wordt als referentietoestand gekozen →
- de geschiedenis wordt beschreven m.b.v. $\mathcal{C}_t(\tau)$
- de dichtheid $\rho(t)$ kan niet m.b.v. de massabehoudswet worden gerelateerd aan ρ_0 en moet als onafhankelijke variabele worden beschouwd

$$\hat{\sigma}(t) = H\{\mathcal{C}_t(\tau); \rho(t) \mid \tau \leq t\}$$

Visco-elastisch materiaalgedrag

- $\mathcal{C}(\tau) = F^c(t) \cdot \mathcal{C}_t(\tau) \cdot F(t) = F^c(t) \cdot \{I + W(\tau, t)\} \cdot F(t) = \mathcal{C}(t) + V(\tau, t)$
 ($V(\tau, t)$ is een verschuutensor, waarmee de geschiedenis wordt beschreven)

$$\hat{\sigma}(t) = H\{\mathcal{C}(t) + V(\tau, t) \mid \tau \leq t\}$$

Elasto-plastisch materiaalgedrag

- het is gebruikelijk om elasto-plastisch materiaalgedrag te beschrijven m.b.v. een relatie tussen de momentane verandering van $\hat{\sigma}(t)$ en de momentane verandering van de deformatie (= deformatie-snelheid)
- de tijdsparameter t is geen echte tijd maar een toestandsparameter

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\sigma}}(t) &= \frac{D}{Dt} [{}^4H \{ C(\tau) | \tau \leq t \}] \rightarrow \\ \hat{\sigma}(t) &= \mathbb{A}(t) \cdot \frac{D}{Dt} [{}^4H \{ C(\tau) | \tau \leq t \}] \cdot \mathbb{A}^c(t)\end{aligned}$$

- we poseren het bestaan van een 4^e-orde tensor ${}^4K \{ C(\tau) | \tau \leq t \}$ z.d.d. geldt:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(t) &= \mathbb{A}(t) \cdot [{}^4K \{ C(\tau) | \tau \leq t \} : \dot{C}(t)] \cdot \mathbb{A}^c(t) \\ &= {}^4L \{ C(\tau) | \tau \leq t \} : \mathbb{D}(t)\end{aligned}$$

- de geschiedenis wordt geparameteriseerd, d.w.z. in rekening gebracht m.b.v. geschiedenisparameters \underline{m} .
- de verandering van \underline{m} t.g.v. plastische deformatie, wordt apart bepaald

$$\hat{\sigma}(t) = {}^4M \{ C(t), \underline{m} \} : \mathbb{D}(t)$$

Algemene constitutieve vergelijking in \mathbb{P} en \mathbb{E}

$$\sigma = \mathbb{1}A \cdot \mathbb{H} \{ \mathbb{U}(\tau) \mid \tau \leq t \} \cdot \mathbb{1}A^c$$

Kenze: $\mathbb{1}A = \det^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{F}) \mathbb{1}\mathbb{F}$

} →

$$\sigma = \det^{-1}(\mathbb{F}) \mathbb{1}\mathbb{F} \cdot \mathbb{H} \{ \mathbb{U}(\tau) \mid \tau \leq t \} \cdot \mathbb{1}\mathbb{F}^c \rightarrow$$

$$\det(\mathbb{1}\mathbb{F}) \mathbb{1}\mathbb{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{1}\mathbb{F}^{-c} = \mathbb{H} \{ \mathbb{U}(\tau) \mid \tau \leq t \}$$

Er geldt: $\mathbb{P} = \det(\mathbb{1}\mathbb{F}) \mathbb{1}\mathbb{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbb{1}\mathbb{F}^{-c}$

$$\mathbb{1}\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{1}\mathbb{F}^c \cdot \mathbb{1}\mathbb{F} - \mathbb{1}\mathbb{I}) = \frac{1}{2} (\mathbb{U}^2 - \mathbb{1}\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{U} = (2\mathbb{1}\mathbb{E} + \mathbb{1}\mathbb{I})^{\frac{1}{2}}$$

} →

$$\mathbb{P} = \mathbb{H} \{ 2\mathbb{1}\mathbb{E}(\tau) + \mathbb{1}\mathbb{I} \mid \tau \leq t \} \rightarrow$$

$$\mathbb{P}(t) = \mathbb{G} \{ \mathbb{1}\mathbb{E}(\tau) \mid \tau \leq t \}$$

ELASTISCH MATERIALGEDRAG

Elastisch materiaalgedrag

Als uitgangspunt kiezen we :

$$P(t) = G \{ \epsilon(t) \mid \tau \leq t \}$$

Bij elastisch materiaalgedrag speelt de rekgeschiedenis geen rol : de momentane spanning wordt uitsluitend bepaald door de momentane rek . \rightarrow

$$P(t) = G \{ \epsilon(t) \} \quad \text{ofwel} \quad P = G(\epsilon)$$

Uit thermodynamische beschouwingen volgt dat er een zgn. elastische potentiaal $\phi(\epsilon)$ bestaat z.d.d. geldt :

$$P = \int_0 \frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon}$$

Materialen waarvoor $\phi(\epsilon)$ expliciet bekend is, worden Green-elastisch genoemd. Materialen waarvoor geen expliciete uitdrukking voor $\phi(\epsilon)$ bekend is, worden Cauchy-elastisch genoemd.

Verband tussen \mathbb{P} en $\dot{\varphi}_i$

Als temperatureffecten geen rol spelen, luidt de 1^e hoofdwet:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{1}{S} \sigma : \mathbb{D}$$

$$\text{massabehoud : } \rho J = \rho_0 \rightarrow \rho^{-1} = \rho_0^{-1} \det(F)$$

$$= \rho_0^{-1} \det(F) \sigma : \mathbb{D}$$

$$\sigma = \det^{-1}(F) F \cdot \mathbb{P} \cdot F^c$$

$$= \rho_0^{-1} \{ F \cdot \mathbb{P} \cdot F^c \} : \mathbb{D}$$

$$= \rho_0^{-1} \{ F \cdot \mathbb{P} \cdot F^c \} : \{ F^{-c} \cdot \dot{\mathbb{E}} \cdot F^{-1} \}$$

$$= \rho_0^{-1} \mathbb{P} : \dot{\mathbb{E}}$$

Dat de laatste overgang correct is, valt formeel te bewijzen.

Als temperatureffecten geen rol spelen, is φ_i uitsluitend een functie van \mathbb{E} : specifieke inwendig opgenomen elastische energie \rightarrow

$$\varphi_i = \varphi(\mathbb{E}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}(\mathbb{E}) = \frac{d\varphi(\mathbb{E})}{d\mathbb{E}} : \dot{\mathbb{E}}$$

Uit de twee uitdrukkingen voor $\dot{\varphi}_i$ volgt:

$$\mathbb{P} = \rho_0 \frac{d\varphi(\mathbb{E})}{d\mathbb{E}}$$

22

Stelling: $(IA \cdot B \cdot IA^c) : (IA^{-c} \cdot C \cdot IA^{-1}) = B : C$.

Bewijs:

$$(IA \cdot B \cdot IA^c) : (IA^{-c} \cdot C \cdot IA^{-1}) =$$

$$= \text{tr} (IA \cdot B \cdot IA^c \cdot IA^{-c} \cdot C \cdot IA^{-1})$$

$$= \text{tr} (IA \cdot B \cdot C \cdot IA^{-1})$$

$$\text{tr} (IM \cdot IN) = \text{tr} (M^c \cdot IN^c)$$

$$= \text{tr} (IB^c \cdot IA^c \cdot IA^{-c} \cdot C^c)$$

$$= \text{tr} (IB^c \cdot C^c)$$

$$= \text{tr} (B \cdot C)$$

$$= B : C \quad \square$$

Isotroop, elastisch materiaal

We gaan uit van de constitutieve vergelijking voor elastisch materiaal, geformuleerd in termen van \mathbb{P} en \mathbb{E} :

$$\mathbb{P} = \mathbb{G}(\mathbb{E})$$

Voor isotroop materiaal geldt dat de materiaaleigenschappen niet afhangen van de richtingen in het materiaal.

In dat geval is $\mathbb{G}(\cdot)$ een zgn. isotrope tensorfunctie.

Te bewijzen valt dat dan geldt:

$$\mathbb{P} = \mathbb{G}(\mathbb{E}) = \alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_1 \mathbb{E} + \alpha_2 \mathbb{E}^2$$

met: $\alpha_i = \alpha_i \{ J_1(\mathbb{E}), J_2(\mathbb{E}), J_3(\mathbb{E}) \}$ $i = 0, 1, 2$

$$J_1(\mathbb{E}) = \text{tr}(\mathbb{E})$$

$$J_2(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \{ \text{tr}^2(\mathbb{E}) - \text{tr}(\mathbb{E}^2) \}$$

$$J_3(\mathbb{E}) = \det(\mathbb{E})$$

De specifieke inwendige energie $\varphi(\mathbb{E})$ is eveneens een functie van de invarianten van \mathbb{E} :

$$\varphi(\mathbb{E}) = \varphi \{ J_1(\mathbb{E}), J_2(\mathbb{E}), J_3(\mathbb{E}) \}$$

Constitutieve vergelijking voor σ :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{1}{\det(F)} F \cdot F \cdot F^c \\
 &= F \cdot \{\det(F)\}^{-1} (\alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_1 E + \alpha_2 E^2) \cdot F^c \\
 &= F \cdot (\bar{\alpha}_0 \mathbb{I} + \bar{\alpha}_1 E + \bar{\alpha}_2 E^2) \cdot F^c \\
 &= \bar{\alpha}_0 F \cdot F^c + \bar{\alpha}_1 F \cdot E \cdot F^c + \bar{\alpha}_2 F \cdot E \cdot E \cdot F^c \\
 &= \bar{\alpha}_0 F \cdot F^c + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 F \cdot (F^c \cdot F - \mathbb{I}) \cdot F^c + \frac{1}{4} \bar{\alpha}_2 F \cdot (F^c \cdot F - \mathbb{I}) \cdot (F^c \cdot F - \mathbb{I}) \cdot F^c \\
 &= \bar{\alpha}_0 F \cdot F^c + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 (F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c - F \cdot F^c) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \bar{\alpha}_2 (F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c - 2 F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c + F \cdot F^c) \\
 &= \left\{ \bar{\alpha}_0 - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 + \frac{1}{4} \bar{\alpha}_2 \right\} F \cdot F^c + \left\{ \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_2 \right\} F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{4} \bar{\alpha}_2 \right\} F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c
 \end{aligned}$$

$$\bar{\beta}_1 = \bar{\alpha}_0 - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 + \frac{1}{4} \bar{\alpha}_2$$

$$\bar{\beta}_2 = \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)$$

$$\bar{\beta}_3 = \frac{1}{4} \bar{\alpha}_2$$

$$\mathbb{B} = F \cdot F^c$$

= linker Cauchy-Green richtensor

$$\sigma = \bar{\beta}_1 \mathbb{B} + \bar{\beta}_2 \mathbb{B}^2 + \bar{\beta}_3 \mathbb{B}^3$$

De tensor \mathbb{B}^3 kunnen we elimineren m.b.v. de stelling van Cayley-Hamilton :

$$\mathbb{B}^3 = J_1(\mathbb{B}) \mathbb{B}^2 - J_2(\mathbb{B}) \mathbb{B} + J_3(\mathbb{B}) \mathbb{I}$$

Substitutie levert:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \bar{\beta}_1 B + \bar{\beta}_2 B^2 + \bar{\beta}_3 J_1(B) B^2 - \bar{\beta}_3 J_2(B) B + \bar{\beta}_3 J_3(B) I \\
 &= \bar{\beta}_3 J_3(B) I + \{ \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_3 J_2(B) \} B + \{ \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_3 J_1(B) \} B^2 \\
 &= \beta_0 I + \beta_1 B + \beta_2 B^2
 \end{aligned}$$

met $\beta_i = \beta_i \{ J_1(B), J_2(B), J_3(B) \}$

Isotroop, Green-elastic materiaal

Voor Green-elastic materiaal is een expliciete uitdrukking voor de elastische potentiaal (= de specifieke inwendige energie) $\varphi(\mathbb{E})$ bekend. Er geldt

$$\mathbb{P} = \rho_0 \frac{d\varphi(\mathbb{E})}{d\mathbb{E}}$$

Voor isotroop materiaal is $\varphi(\mathbb{E})$ een functie van de invarianten van \mathbb{E} :

$$\varphi(\mathbb{E}) = \varphi \{ J_1(\mathbb{E}), J_2(\mathbb{E}), J_3(\mathbb{E}) \}$$

Voor de 2^e-Piola-Kirchhoff spanningstensor kan dan geschreven worden:

$$\mathbb{P} = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial J_1} \frac{dJ_1}{d\mathbb{E}} + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial J_2} \frac{dJ_2}{d\mathbb{E}} + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial J_3} \frac{dJ_3}{d\mathbb{E}}$$

$$J_1(\mathbb{E}) = \text{tr}(\mathbb{E}) = \mathbb{I} : \mathbb{E} \quad \rightarrow \quad \frac{dJ_1}{d\mathbb{E}} = \mathbb{I}$$

$$J_2(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \{ \text{tr}^2(\mathbb{E}) - \text{tr}(\mathbb{E}^2) \} \quad \rightarrow \quad \frac{dJ_2}{d\mathbb{E}} = J_1(\mathbb{E}) \mathbb{I} - \mathbb{E}$$

$$J_3(\mathbb{E}) = \det(\mathbb{E}) = \frac{1}{3} \{ \text{tr}(\mathbb{E}^3) - \text{tr}(\mathbb{E}) \text{tr}(\mathbb{E}^2) + J_2(\mathbb{E}) \text{tr}(\mathbb{E}) \} \quad \rightarrow$$

$$\frac{dJ_3}{d\mathbb{E}} = J_2(\mathbb{E}) \mathbb{I} - J_1(\mathbb{E}) \mathbb{E} + \mathbb{E}^2$$

$$\mathbb{P} = \rho_0 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial J_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial J_2} J_1(\mathbb{E}) + \frac{\partial \varphi}{\partial J_3} J_2(\mathbb{E}) \right\} \mathbb{I} + \rho_0 \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial J_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial J_3} J_1(\mathbb{E}) \right\} \mathbb{E} + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial J_3} \mathbb{E}^2$$

$$= \alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_1 \mathbb{E} + \alpha_2 \mathbb{E}^2 \quad \text{met} \quad \alpha_i = \alpha_i \{ J_1(\mathbb{E}), J_2(\mathbb{E}), J_3(\mathbb{E}) \}$$

Vaak wordt de elastische potentiaal gegeven in termen van de invarianten van C :

$$W(C) = W \{ J_1(C), J_2(C), J_3(C) \}$$

Voor de 2^e-Piola-Kirchhoff spanningstensor kan dan geschreven worden :

$$P = \rho_0 \frac{d\phi(E)}{dE} = \rho_0 \frac{dW(C)}{dC} : \frac{dC}{dE} = 2\rho_0 \frac{dW(C)}{dC}$$

De Cauchy spanningstensor wordt dan :

$$\begin{aligned} \sigma &= \{ \det(F) \}^{-1} F \cdot P \cdot F^c = 2\rho_0 \{ \det(F) \}^{-1} F \cdot \frac{dW(C)}{dC} \cdot F^c \\ &= 2\rho_0 F \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial J_1} \frac{dJ_1}{dC} + \frac{\partial W}{\partial J_2} \frac{dJ_2}{dC} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \frac{dJ_3}{dC} \right] \cdot F^c \end{aligned}$$

$$\frac{dJ_1}{dC} = I \quad ; \quad \frac{dJ_2}{dC} = J_1(C)I - C \quad ; \quad \frac{dJ_3}{dC} = J_2(C)I - J_1(C)C + C^2$$

$$= 2\rho_0 F \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial J_1} I + \frac{\partial W}{\partial J_2} \{ J_1(C)I - C \} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \{ J_2(C)I - J_1(C)C + C^2 \} \right] \cdot F^c$$

$$C = F^c \cdot F \rightarrow F \cdot C \cdot F^c = F \cdot F^c \cdot F \cdot F^c = B^2$$

$$F \cdot C^2 \cdot F^c = B^3$$

$$J_1(C) = J_1(B) \quad , \quad J_2(C) = J_2(B) \quad , \quad J_3(C) = J_3(B)$$

$$= 2\rho_0 \left[\frac{\partial W}{\partial J_1} B + \frac{\partial W}{\partial J_2} \{ J_1(B)B - B^2 \} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \{ J_2(B)B - J_1(B)B^2 + B^3 \} \right]$$

$$= 2\rho_0 \left\{ \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{\partial W}{\partial J_2} J_1(B) + \frac{\partial W}{\partial J_3} J_2(B) \right\} B + 2\rho_0 \left\{ -\frac{\partial W}{\partial J_2} - \frac{\partial W}{\partial J_3} J_1(B) \right\} B^2 + 2\rho_0 \frac{\partial W}{\partial J_3} B^3$$

$$= \bar{\beta}_1 B + \bar{\beta}_2 B^2 + \bar{\beta}_3 B^3 \quad \text{met} \quad \bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i \{ J_1(B), J_2(B), J_3(B) \}$$

Fysisch lineair elastisch materiaal

Fysisch lineair materiaalgedrag is niet eenduidig gedefinieerd

Fysisch lineair materiaalgedrag wordt gekenmerkt door een lineair verband tussen een bepaalde spanningstensor en een bepaalde rektensor. Hebben we het over fysisch lineair gedrag, dan moeten we daarbij altijd vermelden over welke spanningstensor en welke rektensor we spreken.

Door verschillende spannings- en rektensoren te kiezen kunnen we diverse lineaire modellen formuleren. Deze zijn echter lang niet altijd correct, omdat:

1. ze niet voldoen aan het objectiviteitsprincipe
2. ze het materiaalgedrag niet correct beschrijven, zoals m.b.v. experimenten geconstateerd kan worden.

We kiezen hier een lineair verband tussen \mathbb{T} en \mathbb{E} .

Constitutieve vergelijking voor isotroop elastisch materiaal:

$$P = \alpha_0 I + \alpha_1 E + \alpha_2 E^2$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ zijn scalaire functies van

$$J_1(E) = \text{tr}(E)$$

$$J_2(E) = \frac{1}{2} \{ \text{tr}^2(E) - \text{tr}(E^2) \}$$

$$J_3(E) = \det(E)$$

Als het verband tussen P en E lineair is, moet gelden:

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = \text{constant} = c_1$$

$$\alpha_0 = \text{alleen een functie van } \text{tr}(E) \text{ en wel lineair} \\ = c_0 \text{tr}(E)$$

$$P = c_0 \text{tr}(E) I + c_1 E$$

Gebruikmakend van de zgn. Lamé-constanten λ en μ

$$P = \lambda \text{tr}(E) I + 2\mu E$$

$$\lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu} G = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = K - \frac{2}{3}G$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Het lineaire verband tussen P en E kunnen we ook formuleren m.b.v. een constante 4^e-orde tensor:

$$\begin{aligned}
 P &= c_0 \text{tr}(E) \mathbb{I} + c_1 E \\
 &= c_0 \mathbb{I} \mathbb{I} : E + c_1 {}^4 \mathbb{I} : E \\
 &= (c_0 \mathbb{I} \mathbb{I} + c_1 {}^4 \mathbb{I}) : E \\
 &= {}^4 \mathbb{C} : E
 \end{aligned}$$

Constitutieve vergelijking voor σ

$$\left. \begin{aligned} P &= c_0 \text{tr}(\mathbb{E}) \mathbb{I} + c_1 \mathbb{E} \\ \sigma &= \{ \det(\mathbb{F}) \}^{-1} \mathbb{F} \cdot P \cdot \mathbb{F}^c \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \{ \det(\mathbb{F}) \}^{-1} \mathbb{F} \cdot \{ c_0 \text{tr}(\mathbb{E}) \mathbb{I} + c_1 \mathbb{E} \} \cdot \mathbb{F}^c \\ &= \{ 2 \det(\mathbb{E}) + 1 \}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{F} \cdot \{ c_0 \text{tr}(\mathbb{E}) \mathbb{I} + c_1 \mathbb{E} \} \cdot \mathbb{F}^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \{ 2 \det(\mathbb{E}) + 1 \}^{-\frac{1}{2}} c_0 \\ \gamma_1 &= \{ 2 \det(\mathbb{E}) + 1 \}^{-\frac{1}{2}} c_1 \end{aligned}$$

$$= \mathbb{F} \cdot \{ \gamma_0 \text{tr}(\mathbb{E}) \mathbb{I} + \gamma_1 \mathbb{E} \} \cdot \mathbb{F}^c$$

$$= \gamma_0 \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c \text{tr}(\mathbb{E}) + \gamma_1 \mathbb{F} \cdot \mathbb{E} \cdot \mathbb{F}^c$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbb{E}) &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbb{F}^c \mathbb{F}) - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbb{I}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbb{B}) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \cdot \mathbb{E} \cdot \mathbb{F}^c &= \frac{1}{2} \mathbb{F} \cdot (\mathbb{F}^c \mathbb{F} - \mathbb{I}) \cdot \mathbb{F}^c \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c \cdot \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c - \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c - \mathbb{I}) \cdot \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{B} - \mathbb{I}) \cdot \mathbb{B} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} [\gamma_0 \{ \text{tr}(\mathbb{B}) - 3 \} \mathbb{B} + \gamma_1 (\mathbb{B} - \mathbb{I}) \cdot \mathbb{B}]$$

Algemeen geldt: Bij een verondersteld lineair verband tussen een spanningstensor en een rektensor zal het verband tussen een andere spanningstensor en een andere rektensor niet-lineair zijn.

Het verband tussen σ en B voldoet uiteraard aan het objectiviteitsprincipe.

$$\sigma^* = \frac{1}{2} [\gamma_0^* \{ \text{tr}(B^*) - 3 \} B^* + \gamma_1^* (B^* - I) \cdot B^*]$$

$$\gamma_0^* = \gamma_0 \quad ; \quad \gamma_1^* = \gamma_1 \quad \text{want beide zijn slechts een functie van } \det(E).$$

$$B^* = F^* \cdot F^{*c} = Q \cdot F \cdot F^c \cdot Q^c = Q \cdot B \cdot Q^c$$

$$\text{tr}(B^*) = \text{tr}(B)$$

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \frac{1}{2} [\gamma_0 \{ \text{tr}(B) - 3 \} Q \cdot B \cdot Q^c + \gamma_1 (Q \cdot B \cdot Q^c - I) \cdot Q \cdot B \cdot Q^c] \\ &= \frac{1}{2} Q \cdot [\gamma_0 \{ \text{tr}(B) - 3 \} B + \gamma_1 (B - I) \cdot B] \cdot Q^c \\ &= Q \cdot \sigma \cdot Q^c \end{aligned}$$

Opm. : Vereenvoudigde versies van de relatie tussen σ en B worden vaak als constitutief verband geponeerd. Als voldaan is aan het objectiviteitsprincipe is dit geoorloofd.

Het verband tussen σ en B voor het geval dat rekken en afschuivingen klein zijn, maar de rotaties groot.

$$\sigma = \frac{1}{2} [\gamma_0 \{ \text{tr}(B) - 3 \} B + \gamma_1 (B - I) \cdot B]$$

Kleine rekken en afschuivingen, grote rotaties:

$$F = R \cdot (I + E) = R + R \cdot E \rightarrow$$

$$\begin{aligned} B &= F \cdot F^c = (R + R \cdot E) \cdot (R + R \cdot E)^c \\ &= (R + R \cdot E) \cdot (R^c + E \cdot R^c) \\ &= R \cdot R^c + 2 R \cdot E \cdot R^c + R \cdot E^2 \cdot R^c \\ &\cong I + 2 R \cdot E \cdot R^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(B) &= \text{tr}(I) + 2 \text{tr}(R \cdot E \cdot R^c) \\ &= 3 + 2 \text{tr}(R^c \cdot R \cdot E) \\ &= 3 + 2 \text{tr}(E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \{ 2 \det(E) + 1 \}^{-\frac{1}{2}} c_0 \cong c_0 = \text{constant} \\ \gamma_1 &= \{ 2 \det(E) + 1 \}^{-\frac{1}{2}} c_1 \cong c_1 = \text{constant} \end{aligned}$$

Substitutie:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} [2 c_0 \text{tr}(E) \{ I + 2 R \cdot E \cdot R^c \} + 2 c_1 R \cdot E \cdot R^c \cdot \{ I + 2 R \cdot E \cdot R^c \}] \\ &= c_0 \text{tr}(E) I + c_0 \text{tr}(E) R \cdot E \cdot R^c + c_1 R \cdot E \cdot R^c + 2 c_1 R \cdot E^2 \cdot R^c \end{aligned}$$

lineariseren m.b.t. $E \rightarrow$

$$\begin{aligned} \sigma &= c_0 \text{tr}(E) I + c_1 R \cdot E \cdot R^c \\ &= R \cdot \{ c_0 \text{tr}(E) I + c_1 E \} \cdot R^c \end{aligned}$$

Het verband tussen σ en \mathcal{B} voor lineaire deformaties.

$$\sigma = \mathbb{R} \cdot \{c_0 \text{tr}(\mathcal{E}) \mathbb{I} + c_1 \mathcal{E}\} \cdot \mathbb{R}^c$$

kleine rotaties $\rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{I} + \mathbb{W} \rightarrow$

$$\begin{aligned}\sigma &= (\mathbb{I} + \mathbb{W}) \cdot \{c_0 \text{tr}(\mathcal{E}) \mathbb{I} + c_1 \mathcal{E}\} \cdot (\mathbb{I} - \mathbb{W}) \\ &\cong c_0 \text{tr}(\mathcal{E}) \mathbb{I} + c_1 \mathcal{E} \\ &= \lambda \text{tr}(\mathcal{E}) \mathbb{I} + 2\mu \mathcal{E}\end{aligned}$$

Isootroop, incompressibel Cauchy-elastisch materiaal

Voor de Cauchy-spanningstensor geldt:

$$\sigma = \beta_0 \mathbb{I} + \beta_1 \mathbb{B} + \beta_2 \mathbb{B}^2 \quad \text{met} \quad \beta_i = \beta_i \{ J_1(\mathbb{B}), J_2(\mathbb{B}), J_3(\mathbb{B}) \}$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^c$$

Bij incompressibel materiaalgedrag is alleen het deviatorisch deel van σ eenduidig gerelateerd aan de vervorming.

De totale spanningstensor σ is de som van $\sigma^d(\mathbb{B})$ en een willekeurige, vooralsnog onbekende, hydrostatische spanningstensor $-\rho \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\rho \mathbb{I} + \sigma^d(\mathbb{B}) \\ &= -\rho \mathbb{I} - \frac{1}{3} \{ \beta_1 \text{tr}(\mathbb{B}) + \beta_2 \text{tr}(\mathbb{B}^2) \} \mathbb{I} + \beta_1 \mathbb{B} + \beta_2 \mathbb{B}^2 \end{aligned}$$

Bij incompressibel materiaalgedrag geldt:

$$\det(\mathbb{F}) = 1 \quad \rightarrow \quad \det(\mathbb{B}) = J_3(\mathbb{B}) = 1$$

De constitutieve relatie luidt dan:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\rho \mathbb{I} - \frac{1}{3} \{ \gamma_1 \text{tr}(\mathbb{B}) + \gamma_2 \text{tr}(\mathbb{B}^2) \} \mathbb{I} + \gamma_1 \mathbb{B} + \gamma_2 \mathbb{B}^2 \\ &= -\rho \mathbb{I} + \gamma_1 \{ \mathbb{B} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{B}) \mathbb{I} \} + \gamma_2 \{ \mathbb{B}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{B}^2) \mathbb{I} \} \quad \text{met} \quad \gamma_i = \gamma_i \{ J_1(\mathbb{B}), J_2(\mathbb{B}) \} \end{aligned}$$

Als we ons beperken tot constitutieve relaties die hoogstens kwadratisch zijn in \mathbb{B} , moeten we voor γ_1 en γ_2 kiezen: $\gamma_1 = c_1 + c_2 \text{tr}(\mathbb{B})$ en $\gamma_2 = c_3$ met c_1, c_2, c_3 constant \rightarrow

$$\sigma = -\rho \mathbb{I} + \{ c_1 + c_2 \text{tr}(\mathbb{B}) \} \{ \mathbb{B} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{B}) \mathbb{I} \} + c_3 \{ \mathbb{B}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{B}^2) \mathbb{I} \}$$

Bijzondere gevallen: Mooney-Rivlin ($c_3 = -c_2$) en Neo-Hookean ($c_2 = c_3 = 0$)

Isotroop, incompressibel Green-elastisch materiaal

Voor de Cauchy spanningstensor geldt:

$$\sigma = \bar{\beta}_1 B + \bar{\beta}_2 B^2 + \bar{\beta}_3 B^3 \quad \text{met } B = F \cdot F^c \quad \text{en}$$

$$\text{met } \bar{\beta}_1 = 2g \left\{ \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{\partial W}{\partial J_2} J_1(B) + \frac{\partial W}{\partial J_3} J_2(B) \right\}$$

$$\bar{\beta}_2 = 2g \left\{ -\frac{\partial W}{\partial J_2} - \frac{\partial W}{\partial J_3} J_1(B) \right\}$$

$$\bar{\beta}_3 = 2g \frac{\partial W}{\partial J_3}$$

Bij incompressibel materiaalgedrag is alleen het deviatorische deel van σ eenduidig gerelateerd aan de vervorming.

De totale spanningstensor σ is de som van $\sigma^d(B)$ en een willekeurige, vóóral snog onbekende, hydrostatische spanningstensor $-p \mathbb{I}$:

$$\sigma = -p \mathbb{I} - \frac{1}{3} \left\{ \bar{\beta}_1 \text{tr}(B) + \bar{\beta}_2 \text{tr}(B^2) + \bar{\beta}_3 \text{tr}(B^3) \right\} \mathbb{I} + \bar{\beta}_1 B + \bar{\beta}_2 B^2 + \bar{\beta}_3 B^3$$

Bovendien geldt: $\det^2(F) = \det(B) = J_3(B) = 1 \rightarrow W = W \{ J_1(C), J_2(C) \}$

De constitutieve relatie luidt dan:

$$\begin{aligned} \sigma &= -p \mathbb{I} - \frac{1}{3} \left\{ \gamma_1 \text{tr}(B) + \gamma_2 \text{tr}(B^2) \right\} \mathbb{I} + \gamma_1 B + \gamma_2 B^2 \\ &= -p \mathbb{I} + \gamma_1 \left\{ B - \frac{1}{3} \text{tr}(B) \mathbb{I} \right\} + \gamma_2 \left\{ B^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(B^2) \mathbb{I} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{met } \gamma_1 = 2g_0 \left\{ \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{\partial W}{\partial J_2} J_1(B) \right\} \quad \text{en} \quad \gamma_2 = -2g_0 \frac{\partial W}{\partial J_2}$$

In de literatuur wordt voor $W(\mathcal{C})$ veelal de volgende relatie
geponoerd:

$$W = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} \{J_1(\mathcal{C}) - 3\}^i \{J_2(\mathcal{C}) - 3\}^j \quad ; \quad c_{00} = 0$$

Als er geen deformatie plaatsvindt, dus als $\mathcal{C} = \bar{\mathbb{I}}$, geldt:

$$J_1(\mathcal{C}) = 3 \quad ; \quad J_2(\mathcal{C}) = 3 \quad \rightarrow \quad W = 0$$

Bijzondere gevallen:

1. Mooney-Rivlin $W = c_{10} (J_1(\mathcal{C}) - 3) + c_{01} (J_2(\mathcal{C}) - 3) \rightarrow$

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \{c_1 + c_2 \operatorname{tr}(\mathbf{B})\} \left\{ \mathbf{B} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \mathbf{I} \right\} - c_2 \left\{ \mathbf{B}^2 - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B}^2) \mathbf{I} \right\}$$

$$\text{met } c_1 = 2g_0 c_{10} \quad \text{en} \quad c_2 = 2g_0 c_{01}$$

2. Neo-Hookean $W = c_{10} (J_1(\mathcal{C}) - 3) \rightarrow$

$$\sigma = -p\mathbf{I} + c_1 \left\{ \mathbf{B} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \mathbf{I} \right\}$$

$$\text{met } c_1 = 2g_0 c_{10}$$

Lineair elastisch materiaal

Uit de thermodynamica volgt:

er bestaat een "elastische potentiaal" $\phi(\mathbb{E})$
zodanig dat:

$$\mathbb{P} = \rho_0 \frac{d\phi(\mathbb{E})}{d\mathbb{E}} = \mathbb{G}(\mathbb{E})$$

Opm.: "elastische potentiaal" = elastische
energie per volume-eenheid in de
referentie toestand

Opm.: $\phi(\mathbb{E})$ gespecificeerd : Green-elastisch materiaal
 $\phi(\mathbb{E})$ niet gespec. : Cauchy-elastisch materiaal

Lineair verband tussen \mathbb{P} en $\mathbb{E} \Rightarrow$

$$\mathbb{P} = \rho_0 \frac{d\phi}{d\mathbb{E}} = {}^4\mathbb{L} : \mathbb{E}$$

met ${}^4\mathbb{L}$ een niet van \mathbb{E}
afhankende 4^e-orde tensor

Eigenschappen van ${}^4\mathbb{L}$

Om de eigenschappen van ${}^4\mathbb{L}$ eenvoudig te kunnen bespreken, schrijven we de tensor in componentvorm t.o.v. een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\mathbb{P} = \vec{e}_i P_{ij} \vec{e}_j$$

$${}^4\mathbb{L} = \vec{e}_p \vec{e}_q L_{pqrs} \vec{e}_r \vec{e}_s$$

$$\mathbb{E} = \vec{e}_k E_{kl} \vec{e}_l$$

$$\mathbb{P} = {}^4\mathbb{L} : \mathbb{E} \quad \rightarrow \quad P_{ij} = L_{ijkl} E_{kl}$$

1) ${}^4\mathbb{L}$ is links symmetrisch:

$$\mathbb{P} \text{ is symmetrisch} \rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}^c \rightarrow P_{ij} = P_{ji} \Rightarrow$$

$$L_{ijkl} = L_{jilk} \rightarrow {}^4\mathbb{L} = {}^4\mathbb{L}^{lc}$$

$$\text{Er geldt: } \mathbb{1A} : {}^4\mathbb{L} = \mathbb{1A}^c : {}^4\mathbb{L} \quad \forall \mathbb{1A}$$

2) 4L wordt rechtsymmetrisch gekozen:

Oms, ondanks de symmetrie van \mathbb{E} toch te komen tot een eenduidige 4L , wordt 4L rechtsymmetrisch gekozen.

$$L_{ijlk} = L_{ijkl} \rightarrow {}^4L = {}^4L^{rc}$$

$$\text{Er geldt: } {}^4L : \mathbb{A} = {}^4L : \mathbb{A}^c \quad \forall \mathbb{A}$$

3) 4L is totaal-symmetrisch:

$$\mathbb{P} = \frac{d\phi}{d\mathbb{E}} = {}^4L : \mathbb{E} \Rightarrow$$

$$(a) \quad P_{ij} = \frac{d\phi}{dE_{ij}} = L_{ijkl} E_{kl} \rightarrow \frac{dP_{ij}}{dE_{kl}} = \frac{d^2\phi}{dE_{kl} dE_{ij}} = L_{ijlk}$$

$$(b) \quad P_{kl} = \frac{d\phi}{dE_{kl}} = L_{kclj} E_{ij} \rightarrow \frac{dP_{kl}}{dE_{ij}} = \frac{d^2\phi}{dE_{ij} dE_{kl}} = L_{klji}$$

$$\text{er geldt: (c) : } \frac{d^2\phi}{dE_{kl} dE_{ij}} = \frac{d^2\phi}{dE_{ij} dE_{kl}}$$

Uit (a), (b), (c) volgt:

$$L_{ijlk} = L_{klji} \rightarrow {}^4L = {}^4L^c$$

$$\text{Er geldt: } \mathbb{A} : {}^4L : \mathbb{B} = \mathbb{B}^c : {}^4L : \mathbb{A}^c \quad \forall \mathbb{A}, \mathbb{B}$$

4

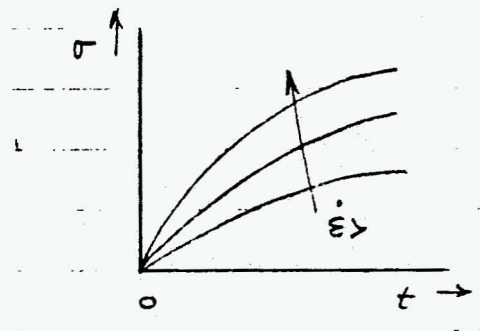
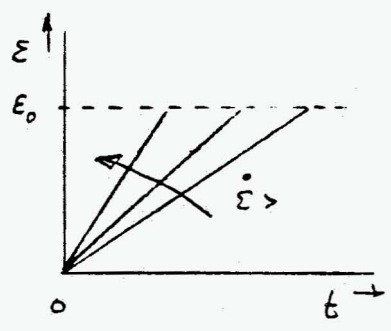
VISCO-ELASTISCH MATERIAALGEDRAG

Visco-elastisch materiaalgedrag

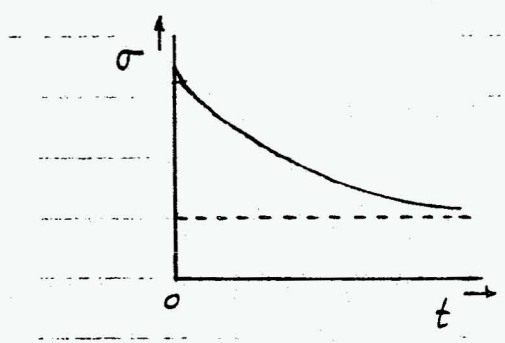
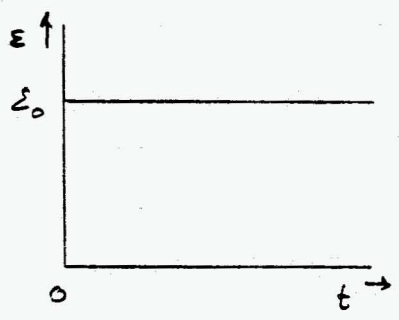
Bij visco-elastisch materiaalgedrag is de momentane spanning een functie van de reagesnelheid.

Kenmerkende aspecten van dit gedrag zijn (1-Dimensionaal weergegeven):

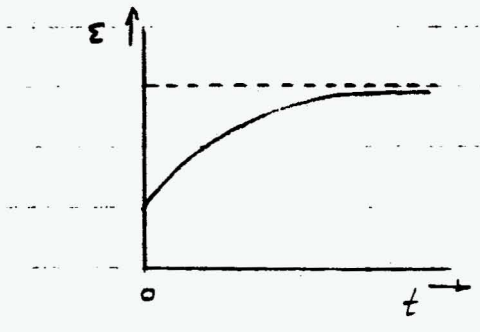
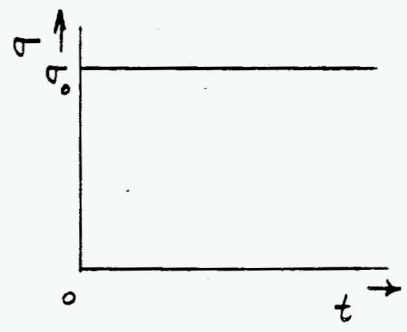
1. Reknelheidsafhankelijkheid



2. Relaxatie

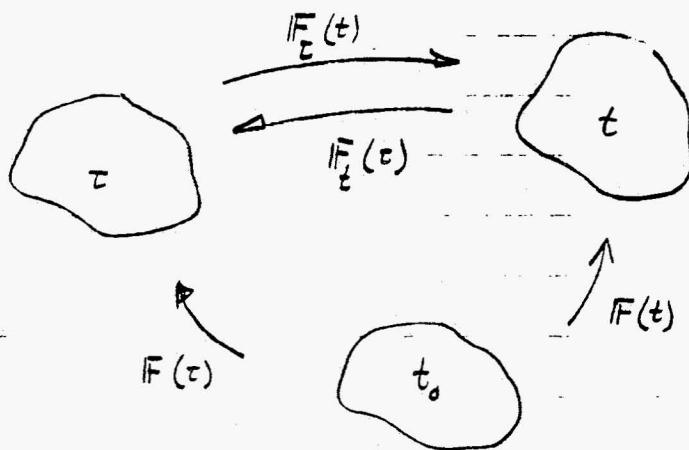


3. Kruip



Relevante kinematische grootheden

We beschouwen onderstaande figuur met de configuraties t_0 (referentie configuratie), t (momentane configuratie) en τ (configuratie in de geschiedenis, $t_0 < \tau < t$)



Er geldt:

$$F(t) = F_\tau(t) \cdot F(\tau) \quad \rightarrow \quad F(\tau) = F_\tau^{-1}(t) \cdot F(t) = F_t(\tau) \cdot F(t) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \frac{1}{2} \{ F(\tau) \cdot F(\tau) - \mathbb{I} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ F^c(t) \cdot F_t^c(\tau) \cdot F_t(\tau) \cdot F(t) - \mathbb{I} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ F^c(t) \cdot F_t^c(\tau) \cdot F_t(\tau) \cdot F(t) - F^c(t) \cdot F(t) + 2E(t) \} \\ &= E(t) + \frac{1}{2} F^c(t) \cdot \{ F_t^c(\tau) \cdot F_t(\tau) - \mathbb{I} \} \cdot F(t) \\ &= E(t) + F^c(t) \cdot E_t(\tau) \cdot F(t) \\ &= E(t) + Z(\tau, t) \end{aligned}$$

Algemene constitutieve vergelijking

Als uitgangspunt kiezen we:

$$P(t) = G \{ E(\tau) \mid -\infty < \tau \leq t \}$$

Substitutie van $E(\tau) = E(t) + Z(\tau, t) \rightarrow$

$$P(t) = G \{ E(t) + Z(\tau, t) \mid -\infty < \tau \leq t \}$$

De functionaal $G \{ \}$ wordt verondersteld continu en differentieerbaar te zijn, m.b.t. $E(\tau)$. Verondersteld wordt dat de religeschiedenis "glad" verloopt, zodat de volgende Taylorreeks ontwikkeling rond $E(t)$ $G \{ E(\tau) \mid -\infty < \tau \leq t \}$ willekeurig goed benadert:

$$P(t) = G \{ E(t) \mid -\infty < \tau \leq t \} + G^{(1)} \{ E(t), Z(\tau, t) \mid -\infty < \tau \leq t \} + \sum_{k=2}^{\infty} G^{(k)} \{ E(t), Z^k(\tau, t) \mid -\infty < \tau \leq t \}$$

* Hierin is $G^{(1)} \{ \}$ de 1^e-orde term, die lineair is in de verschuiving Z .

Materiaal met beperkt geheugen

Wanneer de momentane spanning $P(t)$ uitsluitend beïnvloed wordt door veranderingen in de rek, die in het meest recente verleden hebben plaatsgevonden, spreken we van een materiaal met beperkt geheugen.

In de reeksontwikkeling van $G\{E(\tau) | -\infty < \tau \leq t\}$ rond $E(t)$ is dan alleen de 1^e-orde term relevant:

$$P(t) = G\{E(t) | -\infty < \tau \leq t\} + G^{(1)}\{E(t), Z(\tau, t) | -\infty < \tau \leq t\}$$

Green en Rivlin (1957) hebben aangetoond dat de 1^e-orde term geschreven kan worden als een integraal over de totale rekgeschiedenis:

$$P(t) = G\{E(t) | -\infty < \tau \leq t\} - \int_{\tau=-\infty}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\}] : Z(\tau, t) d\tau$$

De 4^e-orde tensor 4C is een tensor van relaxatiefuncties. Deze functies hebben de volgende eigenschappen:

1. Ze zijn monotoon dalend als functie van de tijd.

2. De momentane spanning als functie van een rekstap $E = E_0 \mathbb{I}$ op tijdstip $\tau = -\infty$ is: ${}^4C\{E_0 \mathbb{I}, \infty\} : \mathbb{I} E_0$

De term $G\{E(t) | -\infty < \tau \leq t\}$ in de relatie voor $P(t)$ is te interpreteren als de volledig uitgelaxeerde spanning op het momentane tijdstip t , als de momentane rek $E(t)$ vanaf $\tau = -\infty$ onveranderd aanwezig zou zijn geweest. Dit is eenvoudig in te zien doordat in dat geval $Z = 0$ is, waarmee de geheugen integraal verdwijnt.

Met de 2^e eigenschap, waaraan relaxatiefuncties moeten voldoen, geldt dan:

$$G\{E(t) | -\infty < \tau \leq t\} = {}^4C\{E(t), \infty\} = E(t)$$

In hetgeen volgt veronderstellen we dat de rek nul is voor $\tau \leq 0$.

Dan geldt als algemene constitutieve vergelijking voor materialen met beperkt geheugen:

$$P(t) = G\{E(t) | 0 \leq \tau \leq t\} = \int_{\tau=0}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\}] : Z(\tau, t) d\tau$$

Deze relatie wordt verder uitgewerkt.

$$P(t) = G\{E(t) | 0 \leq \tau \leq t\} - \int_{\tau=0}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\} : Z(\tau, t)] d\tau$$

Partieel integreren \rightarrow

$$P(t) = G\{E(t) | 0 \leq \tau \leq t\} - \int_{\tau=0}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\} : Z(\tau, t)] d\tau \\ + \int_{\tau=0^-}^t {}^4C\{E(t), t-\tau\} : \dot{Z}(\tau, t) d\tau$$

met $(\dot{}) = \frac{d}{d\tau}()$,
 0^- i.p.v. 0 omdat Z op $\tau=0$ stapvormig
moet kunnen veranderen

$$= G\{E(t) | 0 \leq \tau \leq t\} - {}^4C\{E(t), 0\} : Z(t, t) + {}^4C\{E(t), t\} : Z(0, t) \\ + \int_{\tau=0^-}^t {}^4C\{E(t), t-\tau\} : \dot{Z}(\tau, t) d\tau$$

er geldt:

$$\begin{aligned} Z(t, t) &= 0 \\ Z(0, t) &= -E(0) - E(t) = -E(t) \\ \dot{Z}(\tau, t) &= \dot{E}(\tau) - \dot{E}(t) = \dot{E}(\tau) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Z(t, t) &= 0 \\ Z(0, t) &= -E(0) - E(t) = -E(t) \\ \dot{Z}(\tau, t) &= \dot{E}(\tau) - \dot{E}(t) = \dot{E}(\tau) \end{aligned}} \right\} \rightarrow$$

$$P(t) = G\{E(t) | 0 \leq \tau \leq t\} - {}^4C\{E(t), t\} : E(t) + \int_{\tau=0^-}^t {}^4C\{E(t), t-\tau\} : \dot{E}(\tau) d\tau$$

er geldt: $G\{E(t) | 0 \leq \tau \leq t\} = {}^4C\{E(t), t\} : E(t) \rightarrow$

$$P(t) = \int_{\tau=0^-}^t {}^4C\{E(t), t-\tau\} : \dot{E}(\tau) d\tau$$

Lineair visco-elastisch materiaal

De algemene constitutieve relatie voor visco-elastische materialen met beperkt geheugen luidt:

$$\mathbb{P}(t) = \int_{\tau=0^-}^t {}^4\mathbb{C}(t, t-\tau) : \dot{\mathbb{E}}(\tau) d\tau$$

Het verband tussen $\mathbb{P}(t)$ en $\mathbb{E}(t)$ is niet-lineair, omdat ${}^4\mathbb{C}$ van de momentane rek $\mathbb{E}(t)$ afhangt.

Is ${}^4\mathbb{C}$ niet afhankelijk van $\mathbb{E}(t)$ dan is er sprake van lineair, visco-elastisch materiaalgedrag.

De constitutieve relatie is dan:

$$\mathbb{P}(t) = \int_{\tau=0^-}^t {}^4\mathbb{C}(t-\tau) : \dot{\mathbb{E}}(\tau) d\tau$$

De tensor ${}^4\mathbb{C}(t-\tau)$ is links- en totaal-symmetrisch en wordt, om eenduidige bepaling mogelijk te maken, rechts-symmetrisch gekozen.

Partiële integratie van de integraal levert een equivalente relatie voor $P(t)$:

$$\begin{aligned}
P(t) &= \int_{\tau=0^-}^t {}^4C\{E(t), t-\tau\} : \dot{E}(\tau) d\tau \\
&= \int_{\tau=0^-}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\} : E(\tau)] d\tau - \int_{\tau=0}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\}] : E(\tau) d\tau \\
&= {}^4C\{E(t), 0\} : E(t) - {}^4C\{E(t), t\} : E(0) - \int_{\tau=0}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\}] : E(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$E(0) = 0 \rightarrow$$

$$= {}^4C\{E(t), 0\} : E(t) - \int_{\tau=0}^t \frac{d}{d\tau} [{}^4C\{E(t), t-\tau\}] : E(\tau) d\tau$$

De term ${}^4C\{E(t), 0\} : E(t)$ wordt de elastische respons genoemd.

Lineair, isotroop visco-elastisch materiaal

Als het materiaal isotroop is, kunnen we, in navolging van de beschouwingen over elastisch materiaal, voor de 4^e-orde tensor ${}^4C(t-\tau)$ schrijven:

$${}^4C(t-\tau) = c_0(t-\tau) \mathbb{I}\mathbb{I} + \frac{1}{2} c_1(t-\tau) ({}^4\mathbb{I} + {}^4\mathbb{I}^{Rc})$$

De relaxatiefuncties $c_0(t-\tau)$ en $c_1(t-\tau)$ moeten experimenteel bepaald worden.

Constitutieve vergelijking:

$$\mathbb{P}(t) = \int_{\tau=0}^t \{ c_0(t-\tau) \mathbb{I}\mathbb{I} + c_1(t-\tau) {}^4\mathbb{I} \} : \dot{\mathbb{E}}(\tau) d\tau$$

Als de vervormingen én de verplaatsingen klein zijn, geldt de volgende relatie tussen de Cauchy spanningstensor $\mathbb{T}(t)$ en de lineaire rektensor $\mathbb{E}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(t) &= \int_{\tau=0}^t \{ c_0(t-\tau) \mathbb{I}\mathbb{I} + c_1(t-\tau) {}^4\mathbb{I} \} : \dot{\mathbb{E}}(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t \{ \lambda(t-\tau) \mathbb{I}\mathbb{I} + 2\mu(t-\tau) {}^4\mathbb{I} \} : \dot{\mathbb{E}}(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t [\{ \kappa(t-\tau) - \frac{2}{3} G(t-\tau) \} \mathbb{I}\mathbb{I} + 2G(t-\tau) {}^4\mathbb{I}] : \dot{\mathbb{E}}(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t [\kappa(t-\tau) \text{tr} \{ \dot{\mathbb{E}}(\tau) \} \mathbb{I} + 2G(t-\tau) \{ \dot{\mathbb{E}}(\tau) - \frac{1}{3} \text{tr} \{ \dot{\mathbb{E}}(\tau) \} \mathbb{I} \}] d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t \kappa(t-\tau) \text{tr} \{ \dot{\mathbb{E}}(\tau) \} \mathbb{I} d\tau + 2 \int_{\tau=0}^t G(t-\tau) \dot{\mathbb{E}}^d(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{3} \text{tr} \{ \mathbb{T}(t) \} \mathbb{I} + \mathbb{T}^d(t) \end{aligned}$$

5h

Lineaire visco-elastiteit bij isotroop materiaal voor
 één-dimensionale spanningstoestand.

Uitgangspunt:

$$\sigma(t) = \int_{\tau=0^-}^t [K(t-\tau) \text{II tr} \{ \dot{\mathbf{E}}(\tau) \} + 2G(t-\tau) \dot{\mathbf{E}}^d(\tau)] d\tau$$

We kiezen een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ en schrijven σ en \mathbf{E} in componentvorm t.o.v. deze basis. We beschouwen daarbij spanningen en rekken zoals die bij een één-dimensionale trekproef optreden:

$$\sigma = \sigma_{11} \vec{e}_1 \vec{e}_1$$

$$\text{tr} \{ \dot{\mathbf{E}} \} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{11} + 2\dot{\epsilon}_{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^d &= \frac{1}{3} (+2\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{33}) \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \frac{1}{3} (-\dot{\epsilon}_{11} + 2\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{33}) \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \\ &\quad \frac{1}{3} (-\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22} + 2\dot{\epsilon}_{33}) \vec{e}_3 \vec{e}_3 \\ &= \frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \frac{1}{3} (-\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \frac{1}{3} (-\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) \vec{e}_3 \vec{e}_3 \\ &= \frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \frac{1}{3} (-\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) (\vec{e}_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_3) \end{aligned}$$

Substitutie \rightarrow

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \vec{e}_1 \vec{e}_1 &= \int_{\tau=0^-}^t [K(t-\tau) (\dot{\epsilon}_{11} + 2\dot{\epsilon}_{22}) (\vec{e}_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_3) + \\ &\quad 2G(t-\tau) \{ \frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \frac{1}{3} (-\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) (\vec{e}_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_3) \}] d\tau \end{aligned}$$

Dit levert 2 vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \int_{\tau=0^-}^t \left[k(t-\tau) (\dot{\epsilon}_{11} + 2\dot{\epsilon}_{22}) + \frac{4}{3} G(t-\tau) (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) \right] d\tau \\
&= \int_{\tau=0^-}^t \left\{ k(t-\tau) + \frac{4}{3} G(t-\tau) \right\} \dot{\epsilon}_{11} d\tau + \int_{\tau=0^-}^t \left\{ k(t-\tau) - \frac{4}{3} G(t-\tau) \right\} \dot{\epsilon}_{22} d\tau \\
&= \int_{\tau=0^-}^t M(t-\tau) \dot{\epsilon}_{11} d\tau + \int_{\tau=0^-}^t N(t-\tau) \dot{\epsilon}_{22} d\tau \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\tau=0^-}^t \left[k(t-\tau) (\dot{\epsilon}_{11} + 2\dot{\epsilon}_{22}) - \frac{2}{3} G(t-\tau) (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) \right] d\tau \\
&= \int_{\tau=0^-}^t \left\{ k(t-\tau) - \frac{2}{3} G(t-\tau) \right\} \dot{\epsilon}_{11} d\tau + \int_{\tau=0^-}^t \left\{ k(t-\tau) + \frac{2}{3} G(t-\tau) \right\} \dot{\epsilon}_{22} d\tau \\
&= \int_{\tau=0^-}^t P(t-\tau) \dot{\epsilon}_{11} d\tau + \int_{\tau=0^-}^t Q(t-\tau) \dot{\epsilon}_{22} d\tau \quad (2)
\end{aligned}$$

In tegenstelling tot de elastische situatie, is $\dot{\epsilon}_{22}$ niet direct uit vgl. (2) te elimineren.

Dit kan gebeuren via een omweg nl. via Laplace-transformatie en \sim terugtransformatie.

Laplace transformatie van functie $f(t)$:

$$L[f(t)] = f(s) = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace transformatie van convolutie-integraal:

$$L\left[\int_{\tau=0^-}^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau\right] = f(s) g(s)$$

Laplace transformatie van 2 vergelijkingen:

$$\sigma_{11}(s) = M(s) \dot{\epsilon}_{11}(s) + N(s) \dot{\epsilon}_{22}(s) \tag{1}$$

$$0 = P(s) \dot{\epsilon}_{11}(s) + Q(s) \dot{\epsilon}_{22}(s) \tag{2}$$

Elimineer van $\dot{\epsilon}_{22}(s) \rightarrow$

$$\sigma_{11}(s) = [M(s)Q(s) - P(s)N(s)] / Q(s) * \dot{\epsilon}_{11}(s)$$

$$= [gK(s)G(s)] / [3K(s) + G(s)] * \dot{\epsilon}_{11}(s)$$

Terugtransformeren \rightarrow

$$\sigma_{11}(t) = \int_{\tau=0^-}^t \varphi(t-\tau) \dot{\epsilon}_{11}(\tau) d\tau \rightarrow$$

$$\sigma(t) = \int_{\tau=0^-}^t \varphi(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau$$

Veer-demper modellen

Het mechanisch gedrag - spanning-tek verband als functie van de tijd - van visco-elastische materialen, kan beschreven worden met behulp van een samenstel van veren en dempers.

De beperkingen die hierbij in acht genomen worden, zijn :

1. De veren en dempers zijn lineair : het verband tussen kracht en verlenging (-snelheid) is constant.
2. Het systeem van veren en dempers is één-dimensionaal : het is zodanig opgebouwd dat vervormingen slechts in één richting optreden.

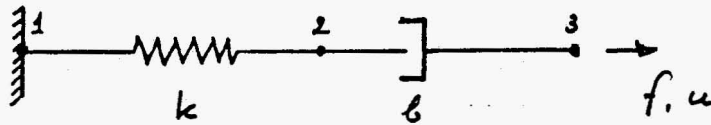
De door ons beschouwde veer-demper modellen beschrijven dus één-dimensionaal, isotroop, lineair visco-elastisch materiaalgedrag.

We beschouwen achtereenvolgens :

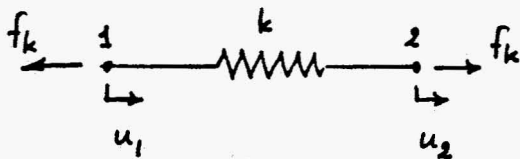
1. Het Maxwell model,
2. Het Kelvin-Voigt model,
3. Het standaard-lineair model.

Het Maxwell model.

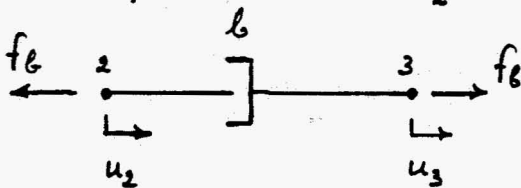
Het Maxwell model bestaat uit een veer (veerconstante k) en een demper (dempingsconstante b) die in serie geschakeld zijn.



Voor veer en demper geldt onderstaand verband tussen de kracht f en de verplaatsing c.g. snelheid van de begin- en eindpunt.:



$$f_k = k(u_2 - u_1)$$



$$f_b = b(\dot{u}_3 - \dot{u}_2)$$

Uitwerking, met $f = f_b = f_k$, $u_3 = u$ en $u_1 = 0$:

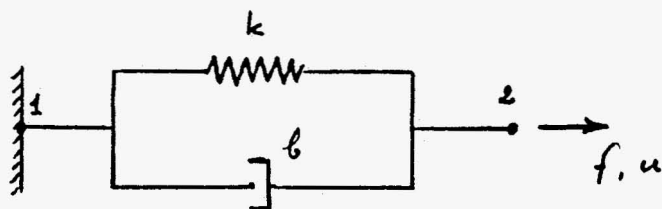
$$f = f_b = b(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) = b(\dot{u} - \dot{u}_2)$$

$$f = f_k = k(u_2 - u_1) = k u_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{k} f \quad \rightarrow \quad \dot{u}_2 = \frac{1}{k} \dot{f} \quad \left. \vphantom{f = f_k} \right\} \rightarrow$$

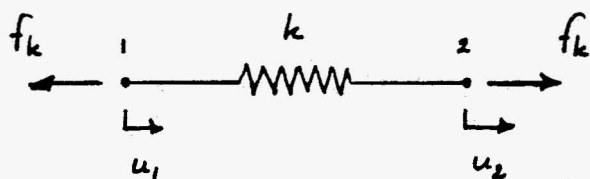
$$f + \frac{b}{k} \dot{f} = b \dot{u}$$

Het Kelvin - Voigt model.

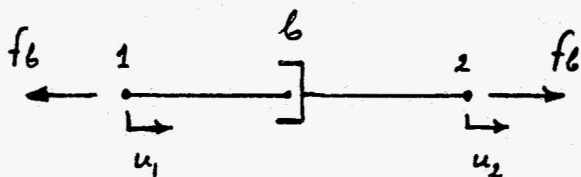
Het Kelvin - Voigt model bestaat uit een veer (veerconstante k) en een demper (dempingsconstante b) die parallel geschakeld zijn.



Voor veer en demper geldt :



$$f_k = k(u_2 - u_1)$$



$$f_b = b(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

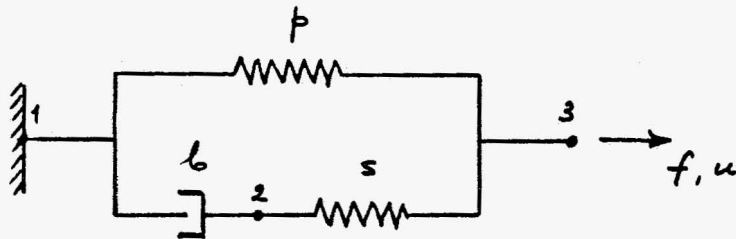
Uitwerking, met $f = f_k + f_b$, $u_2 = u$ en $u_1 = 0$:

$$f = k(u_2 - u_1) + b(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \rightarrow$$

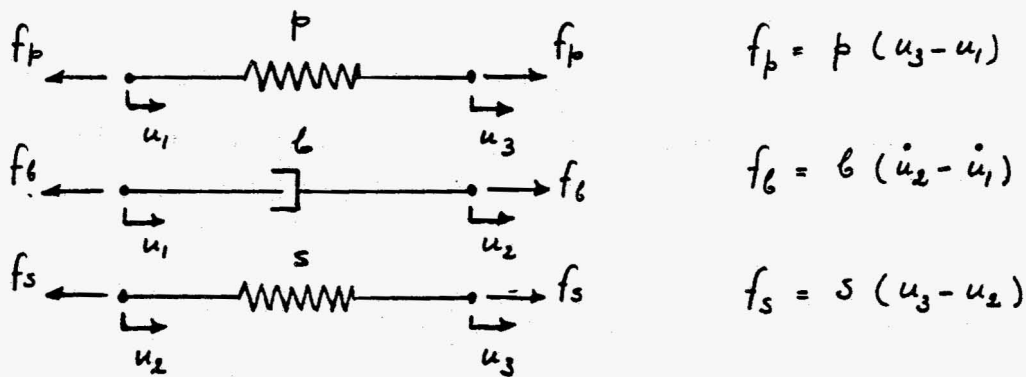
$$f = ku + b\dot{u}$$

Het standaard-lineair model.

Het standaard-lineair model bestaat uit een demper (dempingsconstante b), die in serie geschakeld is met een veer (veerconstante s), terwijl een tweede veer (veerconstante p) hiermee parallel geschakeld is.



Voor veren en demper geldt:



Uitwerking, met $f = f_p + f_s$, $f_b = f_s$, $u_3 = u$ en $u_1 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} f &= p(u_3 - u_1) + s(u_3 - u_2) = pu + su - su_2 \rightarrow u_2 = \frac{1}{s}(pu + su - f) \\ b(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) &= s(u_3 - u_2) \rightarrow b\dot{u}_2 = su - su_2 \end{aligned} \right\}$$

$$su - pu - su + f = \frac{b}{s}(p\dot{u} + s\dot{u} - \dot{f}) \rightarrow$$

$$f + \frac{b}{s}\dot{f} = pu + \frac{b}{s}(p+s)\dot{u}$$

Differentiaalvergelijkingen en oplossingen.

Omdat de besproken veer-demper modellen gebruikt worden om materiaalgedrag te beschrijven, wordt de kracht f vervangen door de spanning σ en de verplaatsing u door de rek ϵ . Onderstaande oplossingen gelden respectievelijk voor het geval van voorgeschreven rek (snelheid) en voorgeschreven spanning.

Maxwell.
$$\sigma + \frac{b}{k} \dot{\sigma} = b \dot{\epsilon}$$

$$\sigma(t) = \int_{\tau=0^-}^t k e^{-\frac{k}{b}(t-\tau)} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau$$

$$\epsilon(t) = \int_{\tau=0^-}^t \frac{1}{b} \left\{ (t-\tau) + \frac{b}{k} \right\} \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

Kelvin-Voigt.
$$\sigma = k \epsilon + b \dot{\epsilon}$$

$$\sigma(t) = k \epsilon(t) + b \dot{\epsilon}(t)$$

$$\epsilon(t) = \int_{\tau=0^-}^t \frac{1}{k} \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{b}(t-\tau)} \right\} \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

Standaard-lineair.
$$\sigma + \frac{b}{s} \dot{\sigma} = p \epsilon + \frac{b}{s} (p+s) \dot{\epsilon}$$

$$\sigma(t) = \int_{\tau=0^-}^t \left\{ p + s e^{-\frac{s}{b}(t-\tau)} \right\} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau$$

$$\epsilon(t) = \int_{\tau=0^-}^t \left\{ \frac{1}{p} - \frac{s}{p(p+s)} e^{-\frac{ps}{b(p+s)}(t-\tau)} \right\} \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

Bovenstaande relaties kunnen veelal als volgt gequoteerd worden :

$$\sigma(t) = \int_{\tau=0^-}^t \varphi(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad ; \quad \epsilon(t) = \int_{\tau=0^-}^t \psi(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

Opm.:

- * De relaxatiefunctie $\varphi(t)$ is voor $t > 0$ een monotone, niet-stijgende functie van de tijd.
- * Voor het Kelvin-Voigt model is $\varphi(t=0)$ niet gedefinieerd.
- * Voor een elastisch materiaal geldt : $\varphi(t) = E = \text{constant}$ (= de elasticiteitsmodulus).
- * Voor een visceus materiaal (vloeistof) geldt : $\varphi(t \rightarrow \infty) = 0$; er treedt volledige relaxatie op.

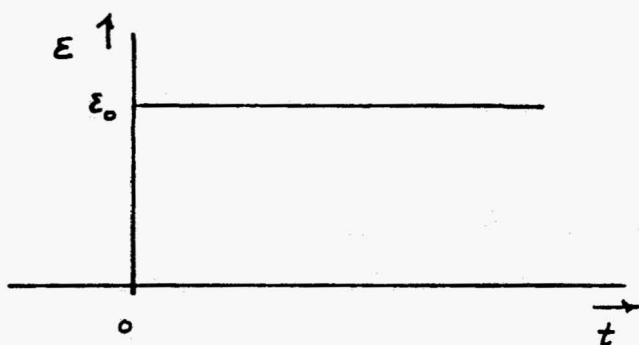
- * De kruipfunctie $\psi(t)$ is voor $t > 0$ een monotone, niet-dalende functie van de tijd.
- * Voor een elastisch materiaal geldt : $\psi(t) = \frac{1}{E} = \text{constant}$.
- * Voor een visceus materiaal geldt : $\psi(t) = \alpha t$ met $\alpha = \text{constant}$.

- * De constitutieve relaties zijn invariant voor transformatie langs de tijdschaal. Dit betekent dat bijv. materiaalveroudering niet beschreven wordt.

Respons bij stapvormige excitatie.

We beschouwen nu de respons van de besproken veer-deemper modellen t.g.v. een stapvormige verandering van de rek resp. de spanning op tijdstip $t=0$.

Stap in de rek :

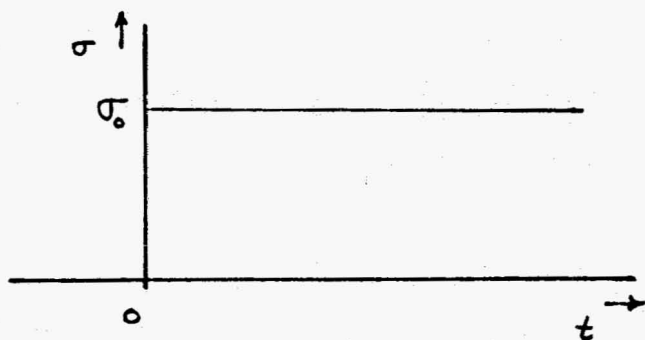


$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t, 0) \rightarrow$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \epsilon_0 \delta(t, 0) \Rightarrow$$

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \varphi(t)$$

Stap in de spanning :



$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t, 0) \rightarrow$$

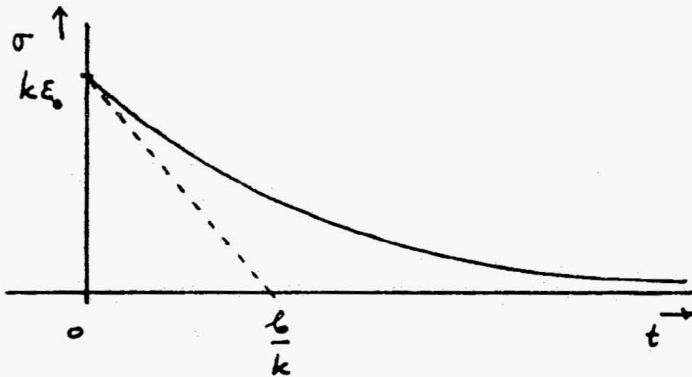
$$\dot{\sigma}(t) = \sigma_0 \delta(t, 0) \Rightarrow$$

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \psi(t)$$

Opm. : Met behulp van stapvormige excitatie zijn de relaxatie- en kruipfuncties te bepalen.

Maxwell model : stap in de rek.

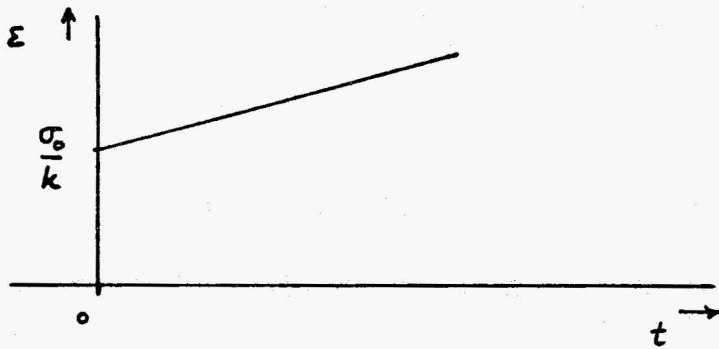
$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{\tau=0^-}^t k e^{-\frac{k}{\epsilon}(t-\tau)} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau = \int_{\tau=0^-}^t k e^{-\frac{k}{\epsilon}(t-\tau)} \epsilon_0 \delta(\tau,0) d\tau \\ &= k \epsilon_0 e^{-\frac{k}{\epsilon} t}\end{aligned}$$



- Opm. :
- * De raaklijn aan de kromme $\sigma(t)$ in het punt $t=0$ snijdt de t -as in $t = \frac{\epsilon}{k}$. Deze waarde van t wordt de tijdconstante τ_m van het Maxwell model genoemd. Deze tijdconstante is een maat voor de relaxatiesnelheid.
 - * De instantane sprong in $\sigma(t) = k\epsilon_0$ wordt de elastische respons genoemd. De veerconstante k heet : de initiële modulus of impact modulus.
 - * Voor $t \rightarrow \infty$ treedt volledige spanningsrelaxatie op.

Maxwell model : stap in de spanning.

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int_{\tau=0^-}^t \frac{1}{b} \left\{ (t-\tau) + \frac{b}{k} \right\} \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \int_{\tau=0^-}^t \frac{1}{b} \left\{ (t-\tau) + \frac{b}{k} \right\} \sigma_0 \delta(\tau, 0) d\tau \\ &= \sigma_0 \left(\frac{1}{b} t + \frac{1}{k} \right)\end{aligned}$$



- Opm. : *
- De rek neemt met constante snelheid toe : het Maxwell model vertoont constante kruip en beschrijft dus vloeistofgedrag.
 - k wordt de initiële modulus of impact-modulus genoemd.

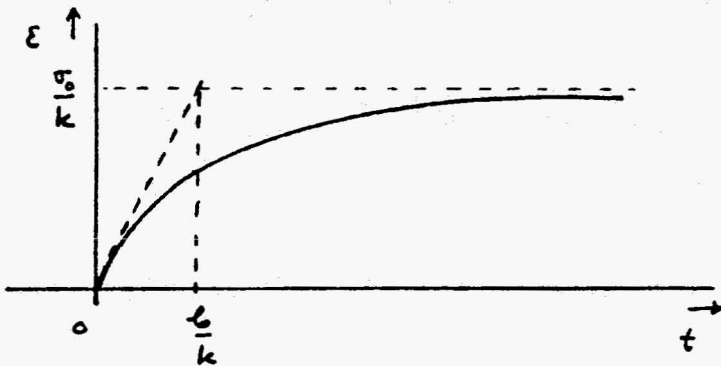
Kelvin-Voigt model : stap in de rek.

$$\sigma(t) = k \varepsilon(t) + b \dot{\varepsilon}(t) = k \varepsilon_0 H(t,0) + b \varepsilon_0 \delta(t,0)$$

Bij het optreden van een stapvormige verandering in de rek wordt de spanning oneindig groot. Het Kelvin-Voigt model kan een dergelijke excitatie dus niet realistisch beschrijven.

Kelvin-Voigt model : stap in de spanning.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_{\tau=0^-}^t \frac{1}{k} \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{b}(t-\tau)} \right\} \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \int_{\tau=0^-}^t \frac{1}{k} \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{b}(t-\tau)} \right\} \sigma_0 \delta(\tau,0) d\tau \\ &= \frac{\sigma_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{b}t} \right) \end{aligned}$$

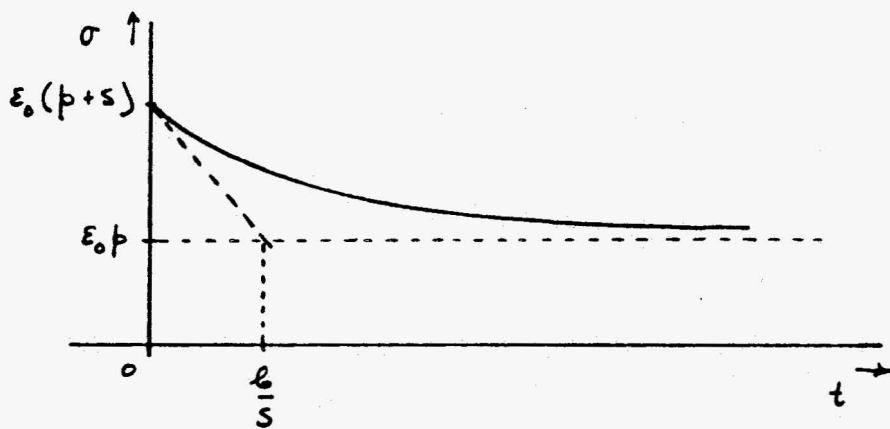


Opm.: * $\tau_k = \frac{b}{k} =$ tijdconstante van het Kelvin-Voigt model

* Door $t \rightarrow \infty$ bereikt de rek de eindwaarde $\frac{\sigma_0}{k}$. Men spreekt van vertraagde elasticiteit of van asymptotisch elastisch gedrag.

Standaard lineair model : stap in de rek.

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{\tau=0^-}^t \left\{ p + s e^{-\frac{s}{\epsilon_0}(t-\tau)} \right\} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0^-}^t \left\{ p + s e^{-\frac{s}{\epsilon_0}(t-\tau)} \right\} \epsilon_0 \delta(\tau, 0) d\tau \\ &= \epsilon_0 \left\{ p + s e^{-\frac{s}{\epsilon_0}t} \right\}\end{aligned}$$

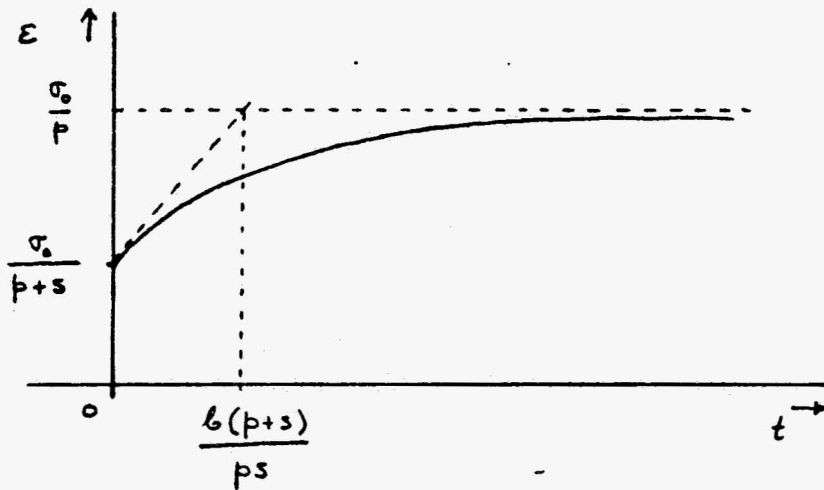


Opm. : $\tau_{\text{so}} = \frac{\epsilon_0}{s} =$ tijdconstante van het standaard lineair model voor relaxatie.

Dit is de waarde van t waarvoor de raaklijn in $t=0$ aan de $\sigma(t)$ -kromme, de horizontale asymptoot snijdt.

Standaard lineair model : stap in de spanning

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) &= \int_{\tau=0^-}^t \left\{ \frac{1}{p} - \frac{s}{p(p+s)} e^{-\frac{ps}{b(p+s)}(t-\tau)} \right\} \dot{\sigma}(\tau) d\tau \\
 &= \int_{\tau=0^-}^t \left\{ \frac{1}{p} - \frac{s}{p(p+s)} e^{-\frac{ps}{b(p+s)}(t-\tau)} \right\} \sigma_0 \delta(\tau, 0) d\tau \\
 &= \frac{\sigma_0}{p} \left\{ 1 - \frac{s}{p+s} e^{-\frac{ps}{b(p+s)}(t-\tau)} \right\}
 \end{aligned}$$



Opm. : $\tau_{\varepsilon} = \frac{b(p+s)}{ps} =$ tijdconstante van het standaard lineair model voor krimp.
 Dit is de waarde van t waarvoor de raaklijn in $t=0$ aan de $\varepsilon(t)$ -kromme, de horizontale asymptoot snijdt.

Maxwell model : sinusvormig rekverloop

Excitatie : $\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t) = \epsilon_0 \operatorname{Im} [e^{j\omega t}] \rightarrow$
 $\dot{\epsilon}(t) = \epsilon_0 \omega \cos(\omega t) = \epsilon_0 \omega \operatorname{Im} [j e^{j\omega t}]$

Respons :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{\tau=-\infty}^t k e^{-\frac{k}{\epsilon}(t-\tau)} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \\ &= \operatorname{Im} \left[\int_{\tau=-\infty}^t k \epsilon_0 \omega j e^{-\frac{k}{\epsilon}(t-\tau)} e^{j\omega\tau} d\tau \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\int_{\tau=-\infty}^t k \epsilon_0 \omega j e^{-\frac{k}{\epsilon}t} e^{(\frac{k}{\epsilon} + j\omega)\tau} d\tau \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[k \epsilon_0 \omega \frac{j}{\frac{k}{\epsilon} + j\omega} e^{-\frac{k}{\epsilon}t} e^{(\frac{k}{\epsilon} + j\omega)t} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[k \epsilon_0 \omega \frac{j(\frac{k}{\epsilon} - j\omega)}{(\frac{k}{\epsilon})^2 + \omega^2} e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[k \epsilon_0 \omega \frac{\omega + j(\frac{k}{\epsilon})}{(\frac{k}{\epsilon})^2 + \omega^2} e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\{ \alpha + j\beta \} e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\sigma_0 e^{j\delta} e^{j\omega t} \right] \\ &= \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

met : $\sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \text{amplitude v. d. spanning}$

$\delta = \arctan \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \text{faseverschuiving van de spanningrespons t.o.v. de voorgeschreven rek.}$

Enkele visco-elastische materiaalparameters

Sinusvormige rek-excitatie van een Maxwell model leidt tot een spanningsrespons die op een aantal manieren kan worden genoteerd, gebruikmakend van verschillende, met elkaar samenhangende, parameters.

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \operatorname{Im} [(\alpha + j\beta) e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Im} [\sigma_0 e^{j\delta} e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Im} [(\sigma_0 \cos \delta + j \sigma_0 \sin \delta) e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Im} [\epsilon_0 (G' + jG'') e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Im} [\epsilon_0 \hat{E}(\omega) e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Im} [\hat{\sigma}(\omega) e^{j\omega t}]
 \end{aligned}$$

met :

$$\begin{aligned}
 \hat{E}(\omega) &= \text{Complexe (dynamische / overdrachts-) modulus} \\
 G' &= \text{opslagmodulus} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \delta \\
 G'' &= \text{verliesmodulus} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \delta \\
 \delta &= \arctan \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = -\arctan \left| \frac{G''}{G'} \right| = \text{verlieshoek}
 \end{aligned}$$

Hoewel bovenstaande parameters geïntroduceerd zijn a.d.h. van de respons van het Maxwell-model, gelden ze algemeen.

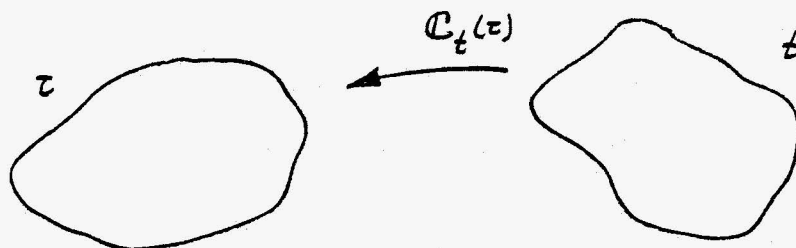
VLOEISTOFFEN

Vloeistoffen

De algemene constitutieve relatie, waar we van uitgaan luidt:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(t) &= \mathbb{R}(t) \cdot \mathbb{H} \{ \mathbb{W}(\tau) \mid \tau \leq t \} \cdot \mathbb{R}^c(t) \\ &= \mathbb{R}(t) \cdot \mathbb{M} \{ \mathbb{C}(\tau) \mid \tau \leq t \} \cdot \mathbb{R}^c(t)\end{aligned}$$

Bij het beschrijven van vloeistofgedrag doet zich het probleem voor dat een referentietoestand, ten opzichte waarvan \mathbb{R} en \mathbb{C} gedefinieerd zijn, niet e nduidig bestaat. Het is dan ook gebruikelijk om de momentane toestand t als referentietoestand te kiezen. Dan geldt $\mathbb{R}(t) = \mathbb{I}$, terwijl de deformatiegeschiedenis beschreven wordt d.m.v. de relatieve rechtse Cauchy-Green rektensor $\mathbb{C}_t(\tau)$:



De momentane dichtheid $\rho(t)$, die bij vaste stoffen m.b.v. de massabehoudswet bepaald kan worden uit de bekende dichtheid ρ_0 in de vaste referentietoestand t_0 , moet nu als onafhankelijke variabele in de constitutieve vergelijking worden opgenomen. De algemene constitutieve vergelijking wordt dan:

$$\mathbb{T}(t) = \mathbb{N} \{ \mathbb{C}_t(\tau); \rho(t) \mid \tau \leq t \}$$

Rivlin-Ericksen vloeistoffen

Uitgangspunt :

$$\mathbb{T}(t) = N \{ \mathbb{C}_t(\tau) ; g(t) \mid \tau \leq t \}$$

De relatieve Cauchy-Green rektensor kan in een Taylor-reeks rond $\mathbb{C}_t(t)$ worden ontwikkeld :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_t(\tau) &= \mathbb{C}_t(t) - (t-\tau) \left. \frac{\partial \mathbb{C}_t(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} + \frac{1}{2} (t-\tau)^2 \left. \frac{\partial^2 \mathbb{C}_t(\tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=t} - \dots \\ &= \mathbb{I} - (t-\tau) \overset{(1)}{\mathbb{A}}(t) + \frac{1}{2} (t-\tau)^2 \overset{(2)}{\mathbb{A}}(t) - \dots \end{aligned}$$

$\overset{(i)}{\mathbb{A}}(t)$: Rivlin-Ericksen tensor

Vloeistoffen met beperkt geheugen \rightarrow

Taylorreeks afbreken na $(n+1)$ e term \rightarrow

Rivlin-Ericksen vloeistoffen van complexiteit n :

$$\mathbb{C}_t(\tau) = \mathbb{I} - (t-\tau) \overset{(1)}{\mathbb{A}} + \frac{1}{2} (t-\tau)^2 \overset{(2)}{\mathbb{A}} - \dots - \frac{1}{n!} (t-\tau)^n \overset{(n)}{\mathbb{A}}$$

Opm.: Er geldt :

$$\overset{(1)}{\mathbb{A}} = 2 \mathbb{D}(t)$$

$$\overset{(n+1)}{\mathbb{A}} = \frac{D \overset{(n)}{\mathbb{A}}}{Dt} + \overset{(n)}{\mathbb{F}}^{-c}(t) \cdot \overset{(n)}{\mathbb{F}}^c(t) \cdot \overset{(n)}{\mathbb{A}} + \overset{(n)}{\mathbb{A}} \cdot \overset{(n)}{\mathbb{F}}(t) \cdot \overset{(n)}{\mathbb{F}}^{-1}(t)$$

Stokes vloeistoffen

Stokes vloeistoffen zijn Rivlin-Ericksen vloeistoffen van complexiteit 1. Ze hebben dus een zeer beperkt geheugen: alleen de meest recente deformatiegeschiedenis is van belang voor de momentane spanningstoestand. De constitutieve vergelijking luidt:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= N \{ \mathbb{I} - 2(t-\tau) \mathbb{D}(t) ; g(t) \mid \tau \leq t \} \\ &= N \{ \mathbb{D}(t), g(t), \tau \mid \tau \leq t \} \end{aligned}$$

Isotrope Stokes vloeistoffen

Constitutieve vergelijking Stokes vloeistoffen :

$$\sigma(t) = N \{ \mathbb{D}(t), g(t), \tau \mid \tau st \}$$

Voor isotrope vloeistoffen zullen de hoofdspaanningsrichtingen samen vallen met de eigenvectoren van $\mathbb{D}(t)$. Dit betekent dat $\sigma(t)$ geschreven kan worden als een polynoom in $\mathbb{D}(t)$. Op grond van de stelling van Cayley-Hamilton kunnen we volstaan met een 2^e graads polynoom :

$$\sigma(t) = \alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_1 \mathbb{D}(t) + \alpha_2 \mathbb{D}^2(t)$$

met : $\alpha_i = \alpha_i \{ J_1(\mathbb{D}), J_2(\mathbb{D}), J_3(\mathbb{D}), g(t), \tau \mid \tau st \}$

De invarianten van $\mathbb{D}(t)$ zijn als volgt gedefinieerd :

- $J_1(\mathbb{D}) = \text{tr}(\mathbb{D})$
- $J_2(\mathbb{D}) = \frac{1}{2} \{ \text{tr}^2(\mathbb{D}) - \text{tr}(\mathbb{D}^2) \}$
- $J_3(\mathbb{D}) = \det(\mathbb{D})$

Lineaire, isotrope Stokes vloeistoffen

Uitgangspunt:

$$\sigma(t) = \alpha_0 I + \alpha_1 D(t) + \alpha_2 D^2(t)$$

met : $\alpha_i = \alpha_i \{ J_1(D), J_2(D), J_3(D), g(t), \tau \mid \tau \leq t \}$

Bovenstaande relatie tussen $\sigma(t)$ en $D(t)$ kan alleen maar lineair zijn als geldt:

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1 \{ g(t), \tau \mid \tau \leq t \}$$

$$\alpha_0 = -\beta_{00} \{ g(t), \tau \mid \tau \leq t \} + \beta_0 \{ g(t), \tau \mid \tau \leq t \} \text{tr} \{ D(t) \}$$

De functionaalanalyse leert dat de geheugenfunctionalen β_0 en β_1 kunnen worden geschreven als integraal over de deformatiegeschiedenis :

$$\sigma(t) = - \int_{\tau=-\infty}^t \kappa \{ g(t), t-\tau \} d\tau I + \int_{\tau=-\infty}^t \lambda \{ g(t), t-\tau \} d\tau \text{tr} \{ D(t) \} I + \int_{\tau=-\infty}^t 2\mu \{ g(t), t-\tau \} d\tau D(t)$$

Hierin zijn κ , λ en μ relaxatiefuncties.

Newtonse vloeistoffen

Newtonse vloeistoffen zijn lineaire, isotrope Stokes vloeistoffen zonder geheugenwerking.

De constitutieve vergelijking luidt:

$$\sigma(t) = -\kappa \{\rho(t)\} \mathbb{I} + \lambda \{\rho(t)\} \text{tr}\{D(t)\} \mathbb{I} + 2\mu \{\rho(t)\} D(t)$$

Voor een ideale vloeistof geldt:

$$\sigma(t) = -\kappa \{\rho(t)\} \mathbb{I}$$

In zo'n vloeistof kunnen dus geen schuifspanningen voorkomen.

Incompressibele vloeistoffen

Voor incompressibele vloeistoffen geldt:

1. De dichtheid $\rho(t)$ is constant.
2. Alleen het deviatorische deel van de spanningstensor is eenduidig gerelateerd aan de deformatiegeschiedenis. De Cauchy spanningstensor is de som van deze deviatorische tensor en een onbepaalde hydrostatische spanningstoestand.
3. Als nevenvoorwaarde geldt: $\text{tr}(\mathbb{D}) = \text{tr}(\mathbb{D}) = 0$

De algemene constitutieve vergelijking luidt:

$$\sigma(t) = -p\mathbb{I} + \mathbb{N}^d \{ \mathbb{C}_\tau(t) \mid \tau \leq t \}$$

waarbij \mathbb{N}^d het deviatorische deel van $\mathbb{N} \{ \}$ is.

Voor incompressibele, isotrope Stokes vloeistoffen geldt:

$$\sigma(t) = -p\mathbb{I} + \gamma_0\mathbb{I} + \gamma_1\mathbb{D}(t) + \gamma_2\mathbb{D}^2(t) - \frac{1}{3}\text{tr}[\gamma_0\mathbb{I} + \gamma_1\mathbb{D}(t) + \gamma_2\mathbb{D}^2(t)]\mathbb{I}$$

met $\gamma_i = \gamma_i \{ \mathbb{J}_2(\mathbb{D}), \mathbb{J}_3(\mathbb{D}), \tau \mid \tau \leq t \}$

Voor incompressibele, lineaire, isotrope Stokes vloeistoffen geldt:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= -p\mathbb{I} + c \{ \tau | \tau \leq t \} \mathbb{D}(t) \\ &= -p\mathbb{I} + \int_{\tau=-\infty}^t 2\mu(t-\tau) d\tau \mathbb{D}(t)\end{aligned}$$

en, voor incompressibele, Newtonse vloeistoffen:

$$\sigma(t) = -p\mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}(t)$$

ANISOTROOP ELASTISCH GEDRAG

Lineair elastisch, anisotroop materiaalgedrag.

We veronderstellen geometrisch lineaire vervorming en beschrijven het elastisch materiaalgedrag met een lineair verband tussen σ en ε .

We noteren deze relatie door zowel σ als ε in componentvorm te schrijven t.o.v. een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Uitschrijven:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & L_{ij11} \varepsilon_{11} + L_{ij12} \varepsilon_{21} + L_{ij13} \varepsilon_{31} + \\ & L_{ij21} \varepsilon_{12} + L_{ij22} \varepsilon_{22} + L_{ij23} \varepsilon_{32} + \\ & L_{ij31} \varepsilon_{13} + L_{ij32} \varepsilon_{23} + L_{ij33} \varepsilon_{33} \end{aligned}$$

$$= L_{ij11} \varepsilon_{11} + L_{ij22} \varepsilon_{22} + L_{ij33} \varepsilon_{33} + \\ 2L_{ij21} \varepsilon_{12} + 2L_{ij32} \varepsilon_{23} + 2L_{ij13} \varepsilon_{31}$$

Omdat σ symmetrisch is, zijn er 6 onafhankelijke componenten σ_{ij} : $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$

We slaan de componenten van σ en die van ε op in de kolommen $\underline{\sigma}$ en $\underline{\varepsilon}$. Het verband tussen beide kolommen wordt beschreven m.b.v. een 6×6 matrix.

Constitutieve vergelijkingen in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & 2L_{1121} & 2L_{1132} & 2L_{1113} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2233} & 2L_{2221} & 2L_{2232} & 2L_{2213} \\ L_{3311} & L_{3322} & L_{3333} & 2L_{3321} & 2L_{3332} & 2L_{3313} \\ L_{1211} & L_{1222} & L_{1233} & 2L_{1221} & 2L_{1232} & 2L_{1213} \\ L_{2311} & L_{2322} & L_{2333} & 2L_{2321} & 2L_{2332} & 2L_{2313} \\ L_{3111} & L_{3122} & L_{3133} & 2L_{3121} & 2L_{3132} & 2L_{3113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

We vervangen in $\underline{\varepsilon}$ de componenten ε_{12} , ε_{23} , ε_{31} door

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \quad ; \quad \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \quad ; \quad \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & L_{1121} & L_{1132} & L_{1113} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2233} & L_{2221} & L_{2232} & L_{2213} \\ L_{3311} & L_{3322} & L_{3333} & L_{3321} & L_{3332} & L_{3313} \\ L_{1211} & L_{1222} & L_{1233} & L_{1221} & L_{1232} & L_{1213} \\ L_{2311} & L_{2322} & L_{2333} & L_{2321} & L_{2332} & L_{2313} \\ L_{3111} & L_{3122} & L_{3133} & L_{3121} & L_{3132} & L_{3113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

Verkort genoteerd : $\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{\varepsilon}$
 In geïnverteerde vorm : $\underline{\varepsilon} = \underline{C} \underline{\sigma}$

* \underline{L} is totaal-symmetrisch $\rightarrow L_{ijkl} = L_{klij} \Rightarrow$
 De matrices \underline{S} en \underline{C} zijn symmetrisch

Opm.: In de literatuur wordt \underline{S} de stijfheidsmatrix en \underline{C} de compliantiematrix genoemd.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1121} & S_{1132} & S_{1113} \\ & S_{2222} & S_{2233} & S_{2221} & S_{2232} & S_{2213} \\ & & S_{3333} & S_{3321} & S_{3332} & S_{3313} \\ & & & S_{1221} & S_{1232} & S_{1213} \\ \text{Symm.} & & & & S_{2332} & S_{2313} \\ & & & & & S_{3113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1121} & C_{1132} & C_{1113} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2221} & C_{2232} & C_{2213} \\ & & C_{3333} & C_{3321} & C_{3332} & C_{3313} \\ & & & C_{1221} & C_{1232} & C_{1213} \\ \text{Symm.} & & & & C_{2332} & C_{2313} \\ & & & & & C_{3113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

\underline{S} en \underline{C} bevatten 21 onafhankelijke componenten.
 Dit zijn materiaalparameters die experimenteel moeten
 worden bepaald.
 Dat is onmogelijk!

Gelukkig vertonen de meeste materialen materiaal-
 symmetrie, waardoor het aantal onafhankelijke
 materiaalparameters drastisch vermindert.

We richten de aandacht op \underline{C} en gaan na wat de
 gevolgen zijn van steeds meer materiaal symmetrie.

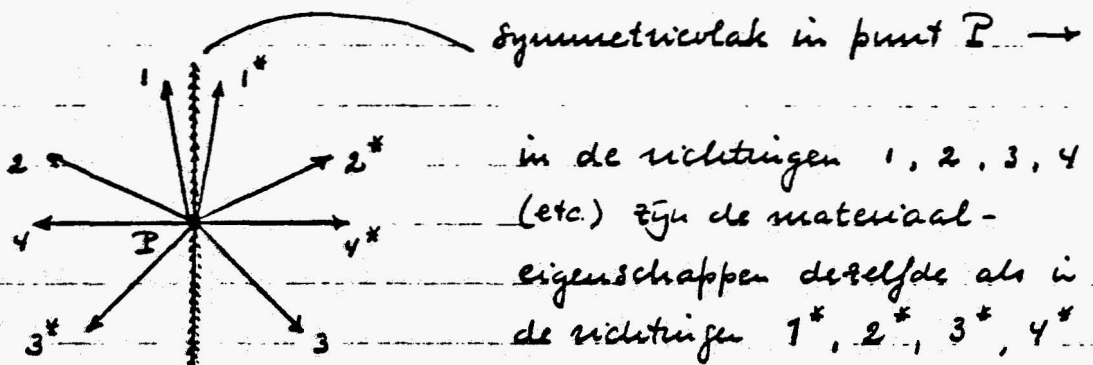
Opm.: De symmetriebeschouwingen hebben betrekking op
 de momentane toestand.

Materiaal symmetrie

Symmetrie in materiaaleigenschappen →

er bestaat (t) (een of meer) vlak(ken) in een punt van het materiaal ten opzichte waarvan de materiaaleigenschappen symmetrisch zijn →

in twee richtingen die t.o.v. een symmetrievlak gespiegeld zijn, zijn de materiaaleigenschappen gelijk.



Een materiaal zonder enige symmetrie heet volledig anisotroop

Een materiaal met enige symmetrie heet: anisotroop

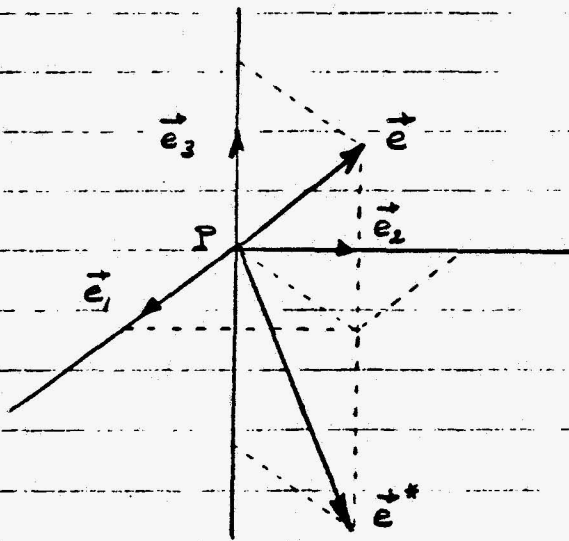
Toenemende symmetrie → minder onafhankelijke materiaalparameters.

We bespreken : monoklien ,
orthotroop ,
transversaal isotroop ,
volledig isotroop materiaal .

Monoklijn materiaal

- : In een materieel punt is er één vlak ten opzichte waarvan de materiaaleigenschappen symmetrisch zijn.

We introduceren in een materieel punt P een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ en beschouwen het (\vec{e}_1, \vec{e}_2) -vlak als vlak van symmetrie.



materiaaleigenschappen in richting \vec{e}^+ =
materiaaleigenschappen in richting \vec{e}^* →

materiaaleigenschappen in richting \vec{e}_3^+ =
materiaaleigenschappen in richting $-\vec{e}_3^+$

Constitutieve vergelijking in matrixvorm t.o.v. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$$

Constitutieve vergelijking in matrixvorm t.o.v. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3\}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}^*$$

De compliantiematrix $\underline{\underline{C}}$ is in beide gevallen gelijk, vanwege materiaalsymmetrie t.o.v. het (\vec{e}_1, \vec{e}_2) -vlak.

Relatie tussen $\underline{\underline{\epsilon}}^*$ en $\underline{\underline{\epsilon}}$ en tussen $\underline{\underline{\sigma}}^*$ en $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \epsilon_{33}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{23}^* \\ \gamma_{31}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{e}_2 \\ (-\vec{e}_3) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot (-\vec{e}_3) \\ 2 \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{e}_2 \\ 2 \vec{e}_2 \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot (-\vec{e}_3) \\ 2 (-\vec{e}_3) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ -\gamma_{23} \\ -\gamma_{31} \end{bmatrix}$$

Hetzelfde verband bestaat ook tussen $\underline{\underline{\sigma}}^*$ en $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{*T} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad -\sigma_{23} \quad -\sigma_{31}]$$

Constitutieve relaties

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}^* \rightarrow$$

$$\gamma_{23}^* = C_{2311} \sigma_{11}^* + C_{2322} \sigma_{22}^* + C_{2333} \sigma_{33}^* + C_{2321} \sigma_{12}^* + C_{2332} \sigma_{23}^* + C_{2313} \sigma_{31}^* \rightarrow$$

$$\gamma_{23} = -C_{2311} \sigma_{11} - C_{2322} \sigma_{22} - C_{2333} \sigma_{33} - C_{2321} \sigma_{12} + C_{2332} \sigma_{23} + C_{2313} \sigma_{31} \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}} \rightarrow$$

$$\gamma_{23} = C_{2311} \sigma_{11} + C_{2322} \sigma_{22} + C_{2333} \sigma_{33} + C_{2321} \sigma_{12} + C_{2332} \sigma_{23} + C_{2313} \sigma_{31} \quad (2)$$

Aan (1) en (2) moet voldaan zijn voor alle $\sigma_{ij} \rightarrow$

$$C_{2311} = C_{2322} = C_{2333} = C_{2321} = 0$$

Analoge beschouwing voor $\gamma_{31} \rightarrow$

$$C_{3111} = C_{3122} = C_{3133} = C_{3121} = 0$$

Compliantie matrix :

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1121} & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2221} & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & C_{3321} & 0 & 0 \\ & & & C_{2211} & 0 & 0 \\ \text{symm} & & & & C_{2332} & C_{2313} \\ & & & & & C_{3113} \end{bmatrix}$$

Er zijn nog 13 onafhankelijke materiaalparameters

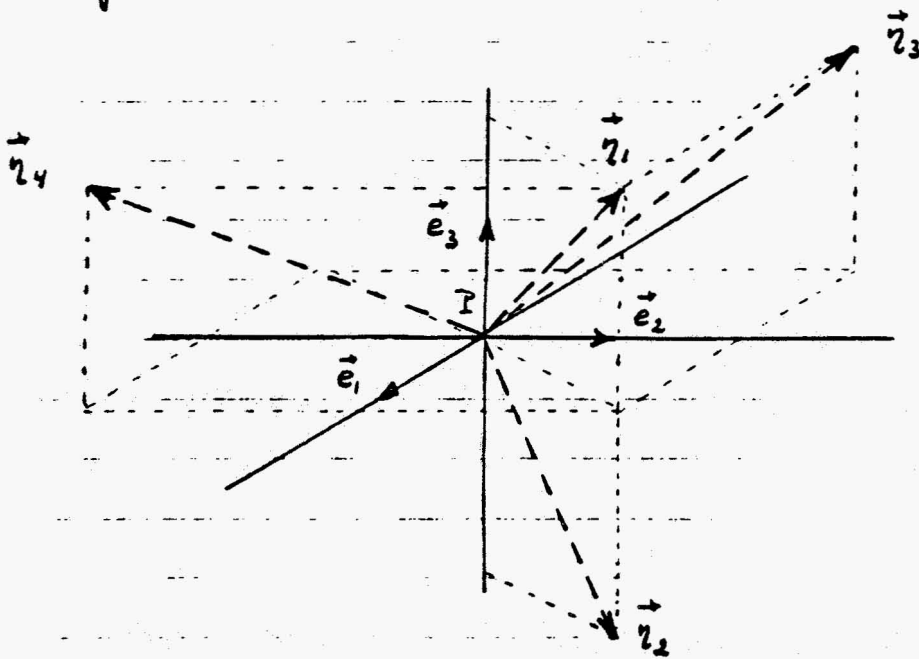
Opm. : Als de basisvectoren willekeurig georiënteerd worden t.o.v. het symmetrievlak, is \underline{C} een volle matrix.

Toch zijn er ook dan maar 13 onafh. componenten.

Orthotrop materiaal

: In een materieel punt zijn er 3 onderling loodrechte vlakken ten opzichte waarvan de materiaaleigenschappen symmetrisch zijn.

We introduceren in een materieel punt I een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ en beschouwen de coördinaatvlakken als symmetrievlakken.



materiaaleigenschappen in richtingen $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3$ en $\vec{\eta}_4$ zijn gelijk. \rightarrow

materiaaleigenschappen in richtingen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ zijn gelijk aan die in de richtingen $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2, -\vec{e}_3$ resp.

Voorbeeld: materiaal met vezels in 3 loodrechte richtingen; materiaal met weefsel.

Analoge beschouwing voor γ_{21} als bij monoklien
materiaal voor $\gamma_{23} \rightarrow$

$$C_{2111} = C_{2122} = C_{2133} = C_{2313} = 0$$

Compliantiematrix :

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1221} & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & C_{2332} & 0 \\ & & & & & C_{3113} \end{bmatrix}$$

Er zijn nog 9 onafhankelijke materiaalparameters

Opm. : Indien een materiaal (in een punt) twee
onduidelijk loodrechte symmetrievlakken heeft,
bestaat er een derde symmetrievlak loodrecht
op de eerste twee.

Opm. : De snijlijnen van de 3 symmetrievlakken worden
de materiaalhoofdrichtingen genoemd.

Compliantie en stijfheidsmatrix in termen van E , G en ν .

Compliantiematrix :

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1221} & 0 & 0 \\ & \text{Symm.} & & & C_{2332} & 0 \\ & & & & & C_{3113} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12} E_2^{-1} & -\nu_{13} E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21} E_1^{-1} & E_2^{-1} & -\nu_{23} E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31} E_1^{-1} & -\nu_{32} E_2^{-1} & E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^{-1} \end{bmatrix}$$

Hierbij geldt :

$$\underline{C} = \underline{C}^T \rightarrow \begin{array}{l} \nu_{12} E_2^{-1} = \nu_{21} E_1^{-1} \rightarrow \nu_{21} = \nu_{12} E_1 E_2^{-1} \\ \nu_{13} E_3^{-1} = \nu_{31} E_1^{-1} \rightarrow \nu_{31} = \nu_{13} E_1 E_3^{-1} \\ \nu_{23} E_3^{-1} = \nu_{32} E_2^{-1} \rightarrow \nu_{32} = \nu_{23} E_2 E_3^{-1} \end{array}$$

Compliantie- en stijfheidsmatrix voor vlakspanningstoestand.

Vlakspanningstoestand : $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12} E_2^{-1} & 0 \\ -\nu_{21} E_1^{-1} & E_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^{-1} \end{bmatrix}$$

Daarvoor levert de stijfheidsmatrix \underline{S} :

$$\underline{S} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_2^{-1} G_{12}^{-1} & \nu_{21} E_1^{-1} G_{12}^{-1} & 0 \\ \nu_{12} E_2^{-1} G_{12}^{-1} & E_1^{-1} G_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & E_1^{-1} E_2^{-1} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \end{bmatrix}$$

$$\text{met } \Delta = \det(\underline{C}) = E_1^{-1} E_2^{-1} G_{12}^{-1} (1 - \nu_{12} \nu_{21})$$

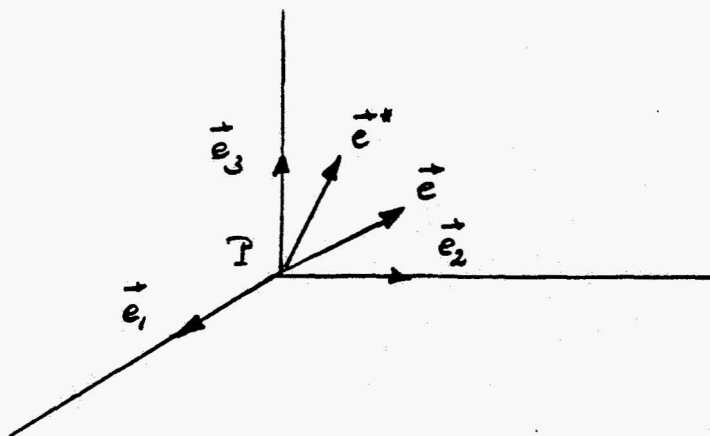
$$= \frac{1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21} E_2 & 0 \\ \nu_{12} E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \end{bmatrix}$$

$$\text{Hierbij geldt : } \nu_{21} E_2 = \nu_{12} E_1 \quad \rightarrow \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_1}{E_2}$$

Transversaal isotroop materiaal

- : Orthotroop materiaal waarbij één van de symmetrievlakken vlak van isotropie is, d.w.z. dat in dit vlak de materiaaleigenschappen in alle richtingen gelijk zijn.

We introduceren in een materieel punt P een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ en beschouwen de coördinaatvlakken als symmetrievlakken. Het (\vec{e}_2, \vec{e}_3) -vlak is het vlak van isotropie.

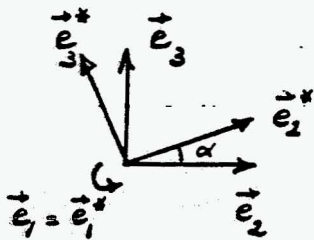


materiaaleigenschappen in richtingen $\vec{e}_2, \vec{e}, \vec{e}^*, \vec{e}_3$
(alle in \vec{e}_2, \vec{e}_3 -vlak) gelijk \rightarrow

De \vec{e}_1 -richting is een as van rotatiesymmetrie m.b.t. de materiaaleigenschappen: bij rotatie van \vec{e} rond de \vec{e}_1 -as veranderen de materiaaleigenschappen in \vec{e} -richting niet.

Voorbeeld: materiaal met vezels in \vec{e}_1 -richting.

We beschouwen de orthonormale basis $\{\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*\}$ die verkregen is door $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ over een hoek α te roteren om \vec{e}_1 :



$$\begin{aligned}\vec{e}_1^* &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2^* &= \cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3^* &= -\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3\end{aligned}$$

Verband tussen $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ en $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{23}^* \\ \gamma_{31}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_1^* \\ \vec{e}_2^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_2^* \\ \vec{e}_3^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_3^* \\ 2 \vec{e}_1^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_2^* \\ 2 \vec{e}_2^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_3^* \\ 2 \vec{e}_3^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_1^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_1 \\ (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3) \\ (-\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot (-\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3) \\ 2 \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3) \\ 2 (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot (-\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3) \\ 2 (-\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{e}_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \cos^2 \alpha \varepsilon_{22} + \sin^2 \alpha \varepsilon_{33} + \sin \alpha \cos \alpha \gamma_{23} \\ \sin^2 \alpha \varepsilon_{22} + \cos^2 \alpha \varepsilon_{33} - \sin \alpha \cos \alpha \gamma_{23} \\ \cos \alpha \gamma_{12} + \sin \alpha \gamma_{31} \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{22} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{33} + \cos^2 \alpha \gamma_{23} - \sin^2 \alpha \gamma_{23} \\ -\sin \alpha \gamma_{12} + \cos \alpha \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

Op dezelfde manier volgt het verband tussen $\underline{\underline{\sigma}}^*$ en $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{22}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \sigma_{12}^* \\ \sigma_{23}^* \\ \sigma_{31}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \cos^2 \alpha \sigma_{22} + \sin^2 \alpha \sigma_{33} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{23} \\ \sin^2 \alpha \sigma_{22} + \cos^2 \alpha \sigma_{33} - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{23} \\ \cos \alpha \sigma_{12} + \sin \alpha \sigma_{31} \\ -\sin \alpha \cos \alpha \sigma_{22} + \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{33} + \cos^2 \alpha \sigma_{23} - \sin^2 \alpha \sigma_{23} \\ -\sin \alpha \sigma_{12} + \cos \alpha \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

Vanwege de materiaal symmetrie bij rotatie om \vec{e}_1 -richting, is het verband tussen $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ en $\underline{\underline{\sigma}}^*$ identiek aan het verband tussen $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en $\underline{\underline{\sigma}}$ \rightarrow

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}^*$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$$

Dit moet gelden voor alle rotatie hoeken α .

We kiezen $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en werken e.e.a. uit.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (\alpha = \frac{r}{2}) \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{31} \\ -\gamma_{23} \\ -\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1221} & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & & & & C_{2332} & 0 \\ & & & & & C_{3113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{31} \\ -\sigma_{23} \\ -\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\epsilon_{11} = C_{1111} \sigma_{11} + C_{1122} \sigma_{33} + C_{1133} \sigma_{22} \quad (1)$$

$$\epsilon_{33} = C_{1122} \sigma_{11} + C_{2222} \sigma_{33} + C_{2233} \sigma_{22} \quad (2)$$

$$\epsilon_{22} = C_{1133} \sigma_{11} + C_{2233} \sigma_{33} + C_{3333} \sigma_{22} \quad (3)$$

$$\gamma_{31} = C_{1221} \sigma_{31} \quad (4)$$

$$\gamma_{23} = C_{2332} \sigma_{23} \quad (5)$$

$$\gamma_{12} = C_{3113} \sigma_{12} \quad (6)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}} \quad \rightarrow$$

$$\epsilon_{11} = C_{1111} \sigma_{11} + C_{1122} \sigma_{22} + C_{1133} \sigma_{33} \quad (7)$$

$$\epsilon_{22} = C_{1122} \sigma_{11} + C_{2222} \sigma_{22} + C_{2233} \sigma_{33} \quad (8)$$

$$\epsilon_{33} = C_{1133} \sigma_{11} + C_{2233} \sigma_{22} + C_{3333} \sigma_{33} \quad (9)$$

$$\gamma_{12} = C_{1221} \sigma_{12} \quad (10)$$

$$\gamma_{23} = C_{2332} \sigma_{23} \quad (11)$$

$$\gamma_{31} = C_{3113} \sigma_{31} \quad (12)$$

Uit (6) en (10) of uit (4) en (12) volgt : $C_{221} = C_{3113}$

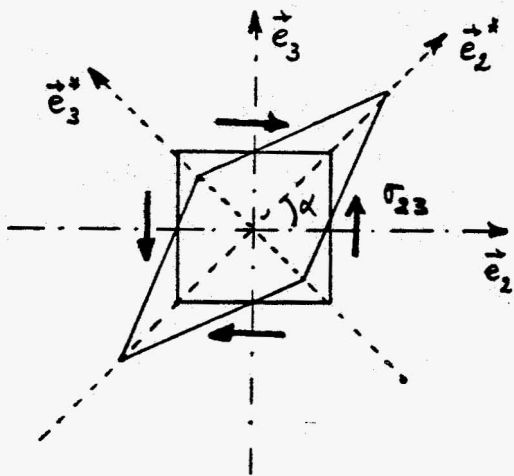
Uit (1) en (7) volgt : $C_{1122} = C_{1133}$

Uit (3) en (8) volgt : $C_{2222} = C_{3333}$ en $C_{1122} = C_{1133}$

De compliantiematrix wordt:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & C & D & 0 & 0 & 0 \\ B & D & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

Stel nu dat in het (\vec{e}_2, \vec{e}_3) -vlak zuivere afschuiving plaatsvindt.



Voor de richtingen met $\alpha = \frac{\pi}{4}$ volgt, met $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, uit $\underline{\underline{\epsilon}}^* = \underline{C} \underline{\underline{\sigma}}^*$:

$$\epsilon_{22}^* - \epsilon_{33}^* = \gamma_{23} = 2(C - D) \sigma_{23}$$

Uit $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{C} \underline{\underline{\sigma}}$ volgt:

$$\gamma_{23} = F \sigma_{23}$$

De materiaalparameters F , C en D zijn dus niet onafhankelijk.

Er geldt:

$$F = 2(C - D)$$

Compliantiematrix voor transversaal isotroop materiaal met \vec{e}_1 -richting = as van materiaalrotatiesymmetrie:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & C & D & 0 & 0 & 0 \\ B & D & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(C-D) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

Stijfheidsmatrix:

$$\underline{S} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} C^2 - D^2 & BD - BC & BD - BC & 0 & 0 & 0 \\ BD - BC & AC - B^2 & B^2 - AD & 0 & 0 & 0 \\ BD - BC & B^2 - AD & AC - B^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det/E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \det/2(C-D) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \det/E \end{bmatrix}$$

met: $\det = A(C^2 - D^2) + 2B^2(D - C)$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & \delta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \delta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\gamma - \delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi \end{bmatrix}$$

Er zijn nog 5 onafhankelijke materiaalparameters die experimenteel kunnen worden bepaald.

Compliance- en stijfheidsmatrix, geformuleerd m.b.v. fysisch te interpreteren grootheden.

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} E_L^{-1} & -\nu_L E_L^{-1} & -\nu_L E_L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_L E_L^{-1} & E_T^{-1} & -\nu_T E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_L E_L^{-1} & -\nu_T E_T^{-1} & E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_L^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_L^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} E_L + 4K_T \nu_L^2 & 2K_T \nu_L & 2K_T \nu_L & 0 & 0 & 0 \\ 2K_T \nu_L & K_T + G_T & K_T - G_T & 0 & 0 & 0 \\ 2K_T \nu_L & K_T - G_T & K_T + G_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_L \end{bmatrix}$$

Naamgeving:

- E_L = longitudinale elasticiteitsmodulus
- ν_L = longitudinale dwanscontractie coëfficiënt
- G_L = longitudinale glijdingsmodulus
- E_T = transversale elasticiteitsmodulus
- ν_T = transversale dwanscontractie coëfficiënt
- G_T = transversale glijdingsmodulus

$$K_T = \frac{E_L E_T}{2E_L(1-\nu_T) - 4\nu_L^2 E_T}$$

= transversale vlakke-rek compressiemodulus

Isotroop materiaal

: De materiaaleigenschappen zijn in alle richtingen gelijk.

We introduceren in een materieel punt P een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. De coördinaatvlakken zijn op te vatten als symmetrievlakken m.b.t. de materiaaleigenschappen. De \vec{e}_1 -, \vec{e}_2 - en \vec{e}_3 -richtingen zijn op te vatten als assen van rotatiesymmetrie m.b.t. de materiaaleigenschappen. \rightarrow

Isotroop materiaal = transversaal isotroop materiaal, met:

$$\begin{aligned}
 E_L = E_T = E &= \text{elasticiteitsmodulus} \\
 \nu_L = \nu_T = \nu &= \text{dwanscontractiecoëfficiënt} \\
 G_L = G_T = G &= \text{glijdingsmodulus} \quad (= E/2(1+\nu))
 \end{aligned}$$

Complianciematrix :

$$\underline{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Stijfheidsmatrix :

$$\underline{S} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

Er zijn nog 2 onafhankelijke materiaalparameters die eenvoudig experimenteel kunnen worden bepaald.

Bovenstaand constitutief verband staat bekend als de Wet van Hooke.

De wet van Hooke voor een vlakspanningsituatie

Uitgangspunt : 3-D wet van Hooke $\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Vlakspanning : $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \rightarrow$

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ \nu \varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} + (1-\nu) \varepsilon_{33} \} = 0 \rightarrow \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

Spanningen :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - \frac{\nu^2}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right\} \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} \varepsilon_{11} + \frac{\nu(1-2\nu)}{(1-\nu)} \varepsilon_{22} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \quad ; \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12} = \frac{E}{1-\nu^2} (1-\nu) \varepsilon_{12}$$

Wet van Hooke :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

De wet van Hooke voor een vlakke-tek-situatie

Uitgangspunt : 3-D wet van Hooke - $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

Vlakke-tek : $\epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \rightarrow$

$$\frac{1}{E} (-\nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \rightarrow \sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

Rekenen :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E} \{ \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \} = \frac{1}{E} \{ (1-\nu^2) \sigma_{11} - \nu(1+\nu) \sigma_{22} \} \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} \{ \sigma_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{22} \} = \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu) \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} \} \\ \epsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu) \sigma_{22} - \nu \sigma_{11} \} \quad ; \quad \epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{aligned}$$

Wet van Hooke :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

De wet van Hooke in tensornotatie

Uitgangspunt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{11} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33}) \\ &= \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ &= 2\mu \epsilon_{11} + \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{12} = 2\mu \epsilon_{12} \end{aligned}$$

Naam: λ, μ : Lamé-constanten

Wet van Hooke in tensornotatie:

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\epsilon) \mathbb{I} + 2\mu \epsilon$$

Andere formulering van de Wet van Hooke

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad \sigma &= \sigma^h + \sigma^d = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \mathbb{I} + \sigma^d = \sigma_m \bar{\mathbb{I}} + \sigma^d \\
 \epsilon &= \epsilon^h + \epsilon^d = \frac{1}{3} \text{tr}(\epsilon) \mathbb{I} + \epsilon^d = \epsilon_m \bar{\mathbb{I}} + \epsilon^d
 \end{aligned}$$

Wet van Hooke : $\sigma_m = \frac{E}{1-2\nu} \epsilon_m ; \sigma^d = \frac{E}{1+\nu} \epsilon^d$

Inverse wet van Hooke : $\epsilon_m = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m ; \epsilon^d = \frac{1+\nu}{E} \sigma^d$

II. 4^e-orde eenheidstensor : ${}^4\mathbb{I} = \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_j \vec{e}_i \rightarrow {}^4\mathbb{I} : \mathbb{A} = \mathbb{A}$

Wet van Hooke :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \lambda \text{tr}(\epsilon) \mathbb{I} + 2\mu \epsilon \\
 &= \lambda \mathbb{I} \mathbb{I} : \epsilon + 2\mu {}^4\mathbb{I} : \epsilon \\
 &= {}^4\mathbb{C} : \epsilon
 \end{aligned}$$

NB.: De 4^e-orde eenheidstensor is niet rechts-symmetrisch
 We kiezen de 4^e-orde materiaaltensor ${}^4\mathbb{C}$
 rechts-symmetrisch :

$${}^4\mathbb{C} = \lambda \mathbb{I} \mathbb{I} + \mu ({}^4\mathbb{I} + {}^4\mathbb{I}^{RC})$$

Relaties tussen elasticiteitsparameters

	E, ν	G, ν	λ, μ	K, G
E		$2(1+\nu)G$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{9KG}{3K+G}$
ν			$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$
G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$		μ	
K	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	
λ	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2\nu G}{1-2\nu}$		$K - \frac{2}{3}G$
μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G		G

COMPOSITIETEN

Composieten

Een composiet is een samenstelling van twee of meer afzonderlijke materialen. De eigenschappen zijn vaak zeer verschillend i.v.m. die van de samenstellende componenten. In tegenstelling tot continua zijn composieten op een macroscopisch niveau niet continu. Dit betekent dat ook spannings- en vervormingen een discontinu karakter vertonen.

In hetgeen volgt beperken we ons tot composieten, die bestaan uit twee componenten. Een van die componenten is meestal op te vatten als bulkmateriaal, waarin de andere component is opgenomen (gedispergeerd). Het bulkmateriaal wordt de matrix genoemd. De hierin opgenomen component kan verschillende vormen hebben: het kunnen deeltjes zijn, waarvan de afmetingen in alle richtingen nagenoeg gelijk zijn (\rightarrow deeltjescomposiet) of het kunnen vezels zijn (\rightarrow vezelcomposiet), die dan weer kort of lang (continu) kunnen zijn.

De mechanische eigenschappen van het composietmateriaal wordt in hoge mate bepaald door de vorm van de gedispergeerde component. Niet alleen deze vorm is echter van belang, maar ook de hechting tussen beide componenten, en, bij vezelcomposieten, de oriëntatie van de vezels (random of in een of meer richtingen). Verder is uiteraard de volumeverhouding van beide componenten van groot belang, benevens de eigenschappen van de componenten afzonderlijk.

Bij de fabricage van composietmaterialen is het voornaamste doel het realiseren van eigenschappen, die de afzonderlijke componenten niet of in onvoldoende mate bezitten. T.g.v. tekortkomingen van het productieproces zijn de materiaaleigenschappen van composieten vaak niet goed reproduceerbaar. Zo ontstaan er bij de fabricage vaak microfouten, die de uiteindelijke mechanische eigenschappen nadelig beïnvloeden.

Hoewel als matrixmateriaal metaal (leggingen) en keramiek worden toegepast, zullen we verder alleen aandacht besteden aan matrices van polymere materialen, aangezien die het meest worden toegepast. We zullen eerst verschillende matrix- en vezelmaterialen de revue laten passeren en aandacht besteden aan de hechting tussen beide componenten.

Matrismaterialen.

De als matricemateriaal toegepaste polymeren zijn onder te verdelen in thermoharders, thermoplasten en elastomeeren.

Thermoharders worden tot op heden het meest toegepast. Ze bestaan uit een drie-dimensionaal netwerk, waarbij het niet mogelijk is om afzonderlijke moleculen te onderscheiden. Dit netwerk ontstaat door reactie van monomeer moleculen die meer dan tweevoudig functioneel zijn, d.w.z. op meer dan twee plaatsen met andere moleculen verbindingen kunnen aangaan. Voordat de reactie (het uitharden of "curen") heeft plaatsgevonden, is de monomeer-oplossing laag-visceus. Ook kan, na samenvoegen met de gedispergeerde component, gedeeltelijke uitharding plaatsvinden, waarbij het materiaal goed verwerkbaar blijft. Na de vormgeving van het product, vindt de volledige uitharding plaats, waarbij het drie-dimensionale netwerk wordt gevormd. Dit alles maakt thermoharders eenvoudig verwerkbaar, zeker als de uitharding kan plaatsvinden bij kamertemperatuur al dan niet bij atmosferische druk. Sommige thermoharders moeten worden uitgehard bij hoge druk en hoge temperatuur. Zeker voor grote producten is dit kostbaar vanwege het noodzakelijke gebruik van een dure oven, een zgn. autoclaaf.

Veel toegepaste thermoharders zijn: fenoplasten, aminoplasten en polyester-, epoxy- en polyimideharzen. De elasticiteitsmodulus van de meeste thermoharders is 3-5 GPa, de dwarscontractiecoëfficiënt 0.35 - 0.4 en de dichtheid 1100 - 1300 kg/m³.

Het drie-dimensionale netwerk van een thermoharder vormt een zeer hechte structuur. Thermoharders zijn dan ook veelal glasachtige, brosse

materialen. Ze zijn niet te smelten: bij verhitting boven een bepaalde temperatuur degenerceert het materiaal.

Thermoplasten bestaan uit lange macromoleculen met een zeer hoog mol-gewicht. Tussen de verschillende moleculen werken zwakke Van der Waals krachten, die voor de structurele samenhang van het materiaal zorgen. Omdat deze krachten zwak zijn, is de beweeglijkheid van de moleculen t.o.v. elkaar vrij groot. Thermoplasten hebben daardoor veelal een lage elasticiteitsmodulus en een hoge breukrek. Bij temperatuurverhoging wordt de beweeglijkheid van de moleculen steeds groter: het materiaal wordt week, daarna visceus en ten slotte vloeibaar. De mogelijkheid om het materiaal te smelten is van groot belang voor de verwerking tot een eindproduct (spuitgieten). De hechting van vezels aan een thermoplastische matrix is in de meeste gevallen slecht, hetgeen toepassing van deze materialen in composieten in de weg staat.

Elastomeren (rubbers) bestaan uit zeer lange macromoleculen waartussen samenhang bestaat, niet alleen t.g.v. Van der Waalskrachten maar ook doordat er op enkele plaatsen chemische bindingen tussen de moleculen aanwezig zijn. Deze bindingen worden "cross-links" genoemd. Als een elastomeer wordt belast, oriënteren de macromoleculen zich in de richting van de belasting en worden daarbij ver uitgerekt. Na het wegnemen van de belasting heremen ze hun oorspronkelijke configuratie, t.g.v. het feit dat de aanwezige cross-links niet verbroken zijn. Blijvende verplaatsing t.o.v. elkaar is daardoor uitgesloten. Elastomeren kunnen hierdoor elastische rekken tot wel 500% vertonen. De elasticiteitsmodulus is zeer laag: $< 1 \text{ GPa}$.

Vezelmaterialen.

Vezels worden gemaakt van materialen met een hoge specifieke modulus $[E (\text{kg/m}^2) / \rho (\text{kg/m}^3) = E_s (\text{m})]$ en een hoge specifieke sterkte $[\sigma_b (\text{kg/m}^2) / \rho (\text{kg/m}^3) = \sigma_{bs} (\text{m})]$. Deze eigenschappen worden aangetroffen bij materialen, waarbij de bindingskrachten tussen de atomen groot zijn, terwijl de soortelijke massa gering is. Veel van dergelijke materialen (glas, koolstof, bron) zijn bros en daardoor zeer gevoelig voor microdefecten in het materiaal. In bulkvorm is de kans op dergelijke fouten groot, waardoor structurele toepassingsmogelijkheden beperkt zijn. In vezelvorm is het volume of de dwarsdoorsnede van de vezel zodanig klein dat ook de kans op het aanwezig zijn van microdefecten erg klein is. De brosheid van het materiaal is dan geen groot bezwaar meer. Hoewel de treksterkte van de vezels meestal groot is, is de afschuif- en/of de compressiesterkte vaak erg laag, hetgeen de toepasbaarheid ernstig kan belemmeren.

Veel toegepast worden glasvezels, aangezien ze goedkoop zijn en redelijk goede eigenschappen bezitten. Glas bestaat uit SiO_2 moleculen, die een drie-dimensionaal netwerk vormen. Vaak worden aan het SiO_2 netwerkvormende of netwerkmodificerende oxiden toegevoegd. Omdat aan het glasoppervlak OH-groepen voorkomen, trekt glas water aan, hetgeen vóór samenvoegen met matrixmateriaal verwijderd moet worden.

Koolstofvezels zijn veel dunner dan glasvezels maar wat betreft de meeste mechanische eigenschappen superieur. Koolstofvezels hebben een gelamineerde opbouw en zijn daardoor anisotroop. Vanwege de zwakke Van der Waals krachten, die de samenhang loodrecht op de vezel-as verzorgen, zijn koolstofvezels slecht bestand tegen afschuiving en compressie.

Voor bepaalde toepassingen maakt deze nadelige eigenschap koolstof minder geschikt. Door toepassing van verschillende productieprocessen ontstaat koolstofvezel met een hoge breukrek (A-koolstof), een hoge breuksterkte (HT-koolstof) of een hoge elasticiteitsmodulus (HM-koolstof).

Voor speciale toepassingen worden boronvezels gebruikt. Deze worden gefabriceerd door het opdampen van boron op een wolfram draad. De vezels zijn relatief dik ($\approx 100 \mu\text{m}$) en hebben zeer goede en gelijkmatige eigenschappen.

Whiskers zijn zeer korte en dunne (0.12 à $25 \mu\text{m}$) eënkristallen van anorganisch materiaal. T.g.v. het ontbreken van microdefecten zijn hun mechanische eigenschappen zeer goed.

Vezels bestaande uit organische macromoleculen vinden steeds meer toepassing. Bekend zijn de aramide vezels. Deze bestaan uit aromatische polyamiden die geöriënteerd zijn in de lengte richting van de vezel. De moleculen zijn erg star, waardoor de elasticiteitsmodulus van de vezel zeer hoog is. T.g.v. de zwakke Van der Waals krachten tussen de moleculen is de afschuifsterkte laag.

De PE-vezel bestaat uit polyetheen-moleculen, geöriënteerd in de lengte-richting van de vezel. Ook hier is de modulus hoog en de afschuifsterkte laag. Bovendien vertoont de PE-vezel in hoge mate visco-elastisch gedrag (krimp, relaxatie), hetgeen zijn structurele toepassingsmogelijkheden beperkt. T.g.v. het vermogen om veel energie te absorberen, wordt deze vezel veel toegepast in composieten die onderhevig zijn aan impactbelasting.

Enkele vezelmaterialen met bijbehorende eigenschappen zijn hieronder vermeld.

E = elasticiteitsmodulus (GPa) in lengterichting

ν = dwarscontractiecoëfficiënt in dwarsrichting

ρ = soortelijke massa (kg/m^3)

E_s = specifieke modulus (m) in lengterichting

σ_{bs} = specifieke sterkte (m) in lengterichting

	<u>E</u>	<u>ν</u>	<u>ρ</u>	<u>$E_s (*10^3)$</u>	<u>$\sigma_{bs} (*10^3)$</u>
hout				2700	20
katoen					45
zijde					50
linnen					65
Al-legering					10
HT-staal					30
E-glas	70-80	0.18-0.25	2500-2600	2700-3200	100
HT-koolstof	130-220	0.2	1500-1750	7400-14600	
HM-koolstof	230-400	0.2	1600-2000	11500-25000	
aramide	120	0.2	1440	8300	

Hechting

Van groot belang voor de uiteindelijke mechanische eigenschappen van een vezelversterkte composiet is de hechting tussen vezels en matrix. Voor een goede overdracht van de belasting is een goede hechting vereist. Echter, een minder goede hechting kan voor bepaalde toepassingen wenselijk zijn. Door het glijden van de vezels in de matrix wordt namelijk energie geabsorbeerd, hetgeen de impactbestendigheid van het composietmateriaal ten goede komt. Een minder goede hechting kan er ook toe leiden dat een scheur in het materiaal zich niet dwars door de vezel voortplant, maar langs de vezel-matrix interface loopt en dan niet verder uitgroeit (crack arrest). De hechting is een eigenschap die nog slecht begrepen is en niet kwantitatief gekarakteriseerd kan worden.

Verschillende vormen van hechting, die overigens gecombineerd kunnen optreden zijn:

- Chemische hechting. De hechting tussen vezel en matrix wordt verzorgd door een chemische binding. Het soort binding (ion, covalent, Van der Waals) is bepalend voor de sterkte van de hechting. Ook van belang is het aantal reactieve groepen per eenheid van contactoppervlak en de grootte van dat contactoppervlak (\leftarrow oppervlakte v.h. vezeloppervlak).
- Mechanische hechting. De mate van hechting wordt bepaald door de vorm en de grootte van het contactoppervlak. Ook van belang is de wrijving tussen vezel en matrix. Deze kan hoog zijn t.g.v. krimpspanningen in het matrixmateriaal.
- Hechting via een tussenstof. Een tussenstof op het vezeloppervlak wordt vaak gevormd tijdens contact met de atmosfeer (water) of tijdens het uitharden van een thermohardende matrix (reactieproducten). Een tussenstof wordt ook veelvuldig bewust aangebracht (coating). De tussenstof kan de hechting bevorderen of verminderen.

Materiaalmodellen voor anisotroop elastisch gedrag

Als we ons beperken tot elastisch materiaalgedrag, dat beschreven wordt door een lineair verband tussen de Cauchy spanningstensor σ en de lineaire rektensor ϵ , kunnen we de constitutieve vergelijking als volgt noteren:

$$\sigma = {}^4L : \epsilon$$

ofwel, in componentvorm t.o.v. een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

De tensor 4L is linksymmetrisch vanwege de symmetrie van σ en totaalsymmetrisch op grond van thermodynamische overwegingen. Om een eenduidige bepaling van de componenten van 4L mogelijk te maken, wordt 4L rechtsymmetrisch gekozen.

Het aantal onafhankelijke spannings- en rekcomponenten is 6. Deze componenten worden opgeslagen in de kolommen $\underline{\sigma}$ en $\underline{\epsilon}$:

$$\underline{\sigma}^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]$$
$$\underline{\epsilon}^T = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31}] \quad ; \quad \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} \quad i \neq j$$

Hiervan kunnen we de constitutieve vergelijking als volgt noteren:

$$\underline{\sigma} = \underline{\Sigma} \underline{\epsilon} \quad \text{ofwel} \quad \underline{\epsilon} = \underline{C} \underline{\sigma} \quad \text{met} \quad \underline{C} = \underline{\Sigma}^{-1}$$

De 6×6 -matrix $\underline{\Sigma}$ is de stijfheidsmatrix van het materiaal, de matrix \underline{C} de compliantiematrix. Deze matrices bevatten elk 21

- Whiskeisation. Een bijzondere maatregel ter bevordering van de hechting is de "whiskeisation" van het vezeloppervlak, waarbij whiskers (één kristallen) uit het vezeloppervlak groeien. De grootte en de ruwheid van het contactoppervlak nemen hierdoor sterk toe. De compressie- en afschuifsterkte van de vezel nemen ook toe. De treksterkte van de afzonderlijke vezels neemt echter enigszins af (15 à 20%) t.g.v. vezelbreuk veroorzaakt door het ruwe oppervlak.

onafhankelijke materiaalparameters. Uitgeschreven vinden we voor de compliantiematrix:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1121} & C_{1132} & C_{1113} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2221} & C_{2232} & C_{2213} \\ & & C_{3333} & C_{3321} & C_{3332} & C_{3313} \\ & & & C_{1221} & C_{1232} & C_{1213} \\ \text{Symm.} & & & & C_{2332} & C_{2313} \\ & & & & & C_{3113} \end{bmatrix}$$

Composieten, waarin als gedispergeerde component continue vezels worden toegepast in drie loodrecht t.o.v. elkaar geörienteerde richtingen zijn orthotroop. De stijfheids- en compliantiematrix bevatten in dat geval nog maar 9 onafhankelijke materiaalparameters. Worden vezels in één richting toegepast, terwijl in het vlak loodrecht op deze richting sprake is van isotrope eigenschappen, dan spreken we van unidirectioneel vezelversterkt materiaal. Dergelijk materiaal is transversaal isotroop en wordt gekarakteriseerd door 5 onafhankelijke materiaalparameters. De compliantiematrix wordt meestal als volgt genoteerd:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} E_L^{-1} & -\nu_{LT} E_T^{-1} & -\nu_{LT} E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TL} E_L^{-1} & E_T^{-1} & -\nu_{TT} E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TL} E_L^{-1} & -\nu_{TT} E_T^{-1} & E_T^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_L^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_L^{-1} \end{bmatrix}$$

Hierbij is de \vec{e}_1 -richting de verelrichting (longitudinaal). Het vlak loodrecht op deze richting (\vec{e}_2, \vec{e}_3 -vlak) wordt het transversale vlak genoemd. De in de couplantiematrix voorkomende parameters zijn niet alle onafhankelijk. Vanwege de symmetrie van \underline{C} geldt:

$$\nu_{TL} E_L^{-1} = \nu_{LT} E_T^{-1} \quad \rightarrow \quad \nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_L}{E_T}$$

Aangetoond kan ook worden dat geldt

$$G_T^{-1} = 2(1 + \nu_{TT}) E_T^{-1} \quad \rightarrow \quad G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT})}$$

Met bovenstaande relaties blijken dus inderdaad slechts 5 onafhankelijke materiaalparameters een rol te spelen. Enkele veelgebruikte namen voor bovengenoemde componenten zijn:

- E_L : de longitudinale elasticiteitsmodulus
- E_T : de transversale elasticiteitsmodulus
- G_L : de longitudinale glijdingsmodulus
- G_T : de transversale glijdingsmodulus
- ν_{TL} : de transversaal-longitudinale dwarscontractiecoëfficiënt
(trek in longitudinale richting \rightarrow dwarscontractie in transversale vlak.)
- ν_{LT} : de longitudinaal-transversale dwarscontractiecoëfficiënt
(trek in transversale vlak \rightarrow dwarscontractie in longitudinale richting)
- ν_{TT} : de transversaal-transversale dwarscontractiecoëfficiënt
(trek in transversale vlak \rightarrow dwarscontractie in transversale vlak)

Bij composieten waarvan de gedispergeerde fase bestaat uit deeltjes of random georiënteerde korte vezels, is er sprake van isotroop materiaalgedrag. In dat geval wordt het materiaalgedrag gekarakteriseerd door twee onafhankelijke materiaalparameters. De compliantiematrix is dan:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -\nu E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu E^{-1} & E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu E^{-1} & -\nu E^{-1} & E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^{-1} \end{bmatrix}$$

met E de elasticiteitsmodulus, ν de dwarscontractiecoëfficiënt en G de glijdingsmodulus waarvoor geldt: $G = E/2(1+\nu)$.

Effectieve materiaalparameters van een composiet

Op microscopisch niveau is geen enkel materiaal volledig homogeen. Zo komen er in hoofdstofstaal en legeringen, gebieden voor waar een bepaalde fase geconcentreerd aanwezig is. De afstand waarover de materiaaleigenschappen veranderen noemen we d_m . Het niveau waarop deze afstand relevant is, is het microniveau.

Een gebied binnen het materiaal met afmetingen, die enkele malen d_m bedragen, kan worden gebruikt om de lokale eigenschappen van het materiaal te karakteriseren. Dit gebied noemen we een lokaal representatief volume element (LRVE). We veronderstellen dat dit gebied een kubus is met ribben in de coördinaatrichtingen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (orthonormale basis). Voor een continuum dat lokaal homogeen is, geldt voor het volume van het LRVE: $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, waarbij $dx_1 = dx_2 = dx_3$ infinitesimaal kleine afstanden zijn. Het infinitesimaal kleine, kubusvormige LRVE, wordt gebruikt om spannings- en rekcomponenten te definiëren. Het karakteriseren van de materiaaleigenschappen gebeurt door de spanningen op de rand van het LRVE, dus de spanningcomponenten σ_{ij} , te relateren aan de vervorming van het LRVE, dus aan de rekcomponenten ϵ_{kl} :

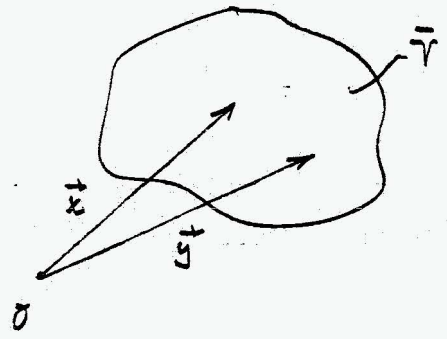
$$\sigma_{ij} = \sum_{jkl} C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{of} \quad \epsilon_{ij} = \sum_{jkl} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$$

Een gevolg van het bovenstaande is dat in een lokaal homogeen continuum, de gradiënten van de materiaaleigenschappen veel kleiner zijn dan de gradiënten van spanningen en rekken. Als de materiaaleigenschappen overal hetzelfde zijn, is het materiaal (globaal) homogeen. In plaats van LRVE spreken we dan van een representatief volumeelement, een RVE.

Een composietmateriaal is macroscopisch heterogeen. Dit betekent dat de afstand d_m , waarbinnen de materiaaleigenschappen veranderen, groot is. Het LRVE wordt zo klein mogelijk gekozen, maar moet wel representatief zijn voor de lokale samenstelling van het composietmateriaal. Het LRVE heeft daardoor eindige afmetingen en is veel groter dan het infinitesimaal kleine materiële blokje dat gebruikt wordt om spannings- en rekcomponenten te definiëren.

De materiaaleigenschappen van het composietmateriaal kunnen worden gekarakteriseerd door het verband tussen gemiddelde spanningen en gemiddelde rekken, waarbij middeling plaatsvindt over het LRVE met volume \bar{V} . De aldus verkregen materiaalparameters worden effectieve parameters genoemd.

De gemiddelde spanningscomponenten $\bar{\sigma}_{ij}$ en de gemiddelde rekcomponenten $\bar{\epsilon}_{kl}$ zijn als volgt gedefinieerd:



$$\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{\bar{V}} \int_{\bar{V}} \sigma_{ij}(\underline{y}) d\underline{y}$$

$$\bar{\epsilon}_{kl}(\underline{x}) = \frac{1}{\bar{V}} \int_{\bar{V}} \epsilon_{kl}(\underline{y}) d\underline{y}$$

Het punt met positievector \underline{x} is een vast referentiepoint binnen het LRVE. De spanningen $\sigma_{ij}(\underline{y})$ en de rekken $\epsilon_{kl}(\underline{y})$ worden microvariabelen genoemd, de gemiddelden $\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x})$ en $\bar{\epsilon}_{kl}(\underline{x})$, meso-variabelen. Bovenstaande gemiddelden worden in de Engelstalige literatuur "moving averages" genoemd, omdat ze van plaats tot

plaats (\underline{x}) kunnen verschillen.

In punt \underline{y} van het LRVE bevindt zich een component, waarvan de materiaaleigenschappen bekend zijn. Er geldt:

$$\sigma_{ij}(\underline{y}) = S_{ijkl}(\underline{y}) \varepsilon_{kl}(\underline{y})$$

waarbij S_{ijkl} de materiaalparameters representeert van de betreffende component. Voor de gemiddelde spanning $\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x})$ geldt dan:

$$\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V S_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) \varepsilon_{kl}(\underline{y}) d\underline{y}$$

In de Eqn. "non-local theory" worden niet-lokale effecten in rekening gebracht in die zin dat de gemiddelde spanningen $\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x})$ worden gerelateerd aan de gemiddelde rekken $\bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{y})$, bepaald door middeling over een LRVE met \underline{y} als referentiepoint. In dat geval geldt:

$$\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V S_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{y}) d\underline{y}$$

Het gemiddelde $\bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{y})$ kan worden ontwikkeld in een reeks rond $\bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{x})$:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{y}) = & \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{x}) + \frac{\partial}{\partial x_m} \{ \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{x}) \} (y_m - x_m) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \{ \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{x}) \} (y_m - x_m)(y_n - x_n) + \dots \end{aligned}$$

Substitutie levert:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x}) &= \left[\frac{1}{V} \int_V S_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right] \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{x}) \\
&+ \left[\frac{1}{V} \int_V S_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) (y_m - x_m) d\underline{y} \right] \bar{\varepsilon}_{kl,m}(\underline{x}) \\
&+ \left[\frac{1}{2V} \int_V S_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) (y_m - x_m)(y_n - x_n) d\underline{y} \right] \bar{\varepsilon}_{kl,mn}(\underline{x}) + \dots \\
&= \bar{S}_{ijkl}(\underline{x}) \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{x}) + \bar{S}_{ijklm}(\underline{x}) \bar{\varepsilon}_{kl,m}(\underline{x}) + \\
&\quad + \bar{S}_{ijklmn}(\underline{x}) \bar{\varepsilon}_{kl,mn}(\underline{x}) + \dots
\end{aligned}$$

Als de verandering van de gemiddelde rekcomponenten niet groot is, is het geoorloofd in bovenstaande reeks de termen met de afgeleiden te verwaarlozen en te schrijven:

$$\bar{\sigma}_{ij}(\underline{x}) = \bar{S}_{ijkl}(\underline{x}) \bar{\varepsilon}_{kl}(\underline{x})$$

Op analoge wijze kan worden afgeleid:

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\underline{x}) = \bar{C}_{ijkl}(\underline{x}) \bar{\sigma}_{kl}(\underline{x})$$

wanneer ook de verandering van de gemiddelde spanningcomponenten klein is. Er geldt $\bar{C} = \bar{S}^{-1}$. \bar{S} is de effectieve stijfheidsmatrix en \bar{C} de effectieve compliantiematrix van het materiaal.

Voor (statistisch) homogeen composietmaterialen is het LRVE voor alle \underline{x} hetzelfde, zodat we kortweg van een representatief volumelement, RVE, kunnen spreken. De effectieve stijfheids- en compliantiematrices zijn constant.

Bepaling van effectieve materiaalparameters.

Ter bepaling van de effectieve materiaalparameters van een composietmateriaal, kunnen twee werkwijzen worden gevolgd.

De eerste bestaat eruit dat de parameters volledig experimenteel worden bepaald door het doen van metingen aan een representatief deel van de composiet (een RVE). Deze aanpak is dus zuiver fenomenologisch. Het meten van de materiaalparameters is echter geen eenvoudige zaak als er sprake is van anisotroop materiaalgedrag (9 materiaalparameters bij orthotroop materiaal, 5 bij transversaal isotroop materiaal). Als daarbij ook nog sprake is van visco-elastisch materiaalgedrag, biedt deze methode weinig kans op succes.

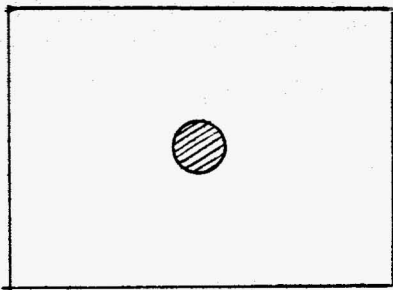
Bij de tweede werkwijze worden de effectieve parameters niet gemeten maar berekend op grond van het mechanische gedrag van, de geometrie van en de interactie tussen de componenten. De materiaalparameters van de componenten zijn meestal bekend, dan wel eenvoudig te meten. Betreffende de interactie worden veronderstellingen gedaan, op grond van experimentele waarnemingen. Vanwege het feit dat uitgegaan wordt van de microstructuur van het composietmateriaal, wordt deze aanpak als structureel betiteld.

Bij het bepalen van de effectieve materiaalparameters volgens de hierboven genoemde structurele methode, zijn verschillende werkwijzen mogelijk. We onderscheiden: analytische methoden, numerieke methoden, de methoden, gebaseerd op systeemidentificatie en regressietechniek en tenslotte de methoden waarbij wordt uitgegaan van parameterwijze modellering.

Analytische methoden

Bij de analytische werkwijze, wordt het RVE meestal in hoge mate gemodelleerd, waarbij t.a.v. de geometrie sterke vereenvoudiging plaatsvindt. Dit gemodelleerde RVE wordt vervolgens onderworpen aan een randbelasting. Deze wordt zodanig gekozen dat het verband tussen de belasting en de vervorming beschreven wordt door één effectieve materiaalparameter. Na berekening van de vervorming is deze parameter bekend als expliciete functie van de eigenschappen van de componenten en de geometrie/parameters (bv. volumefractie van een component). Om de analytische berekeningen te kunnen uitvoeren, is het meestal noodzakelijk dat het materiaalgedrag van de componenten lineair elastisch is. Ten gevolge hiervan alomede ten gevolge van de ver doorgevoerde geometrische modellering, zijn de verkregen effectieve materiaalparameters en de materiaalmodellen waar ze in voorkomen, slechts beperkt toepasbaar. Enkele modelleringen en de ermee behorende effectieve parameters worden hieronder besproken.

Eshelby (1957) heeft effectieve parameters bepaald voor een deeltjescomposiet, bestaande uit een matrix met daarin bolvormige deeltjes. Het RVE wordt gemodelleerd als een groot gebied, bestaande uit matrixmateriaal met daarin één deeltje.



Spanningen en rekken in en rondom het deeltje worden berekend, uitgaande van een bepaalde randbelasting. Door deze randbelasting geschikt te kiezen, kunnen een

effectieve glijdingsmodulus G , en een effectieve compressie-modulus worden bepaald:

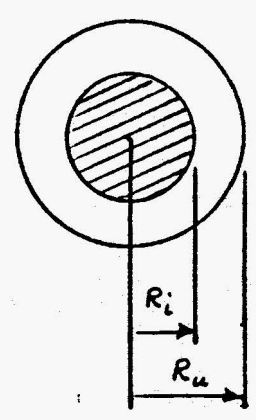
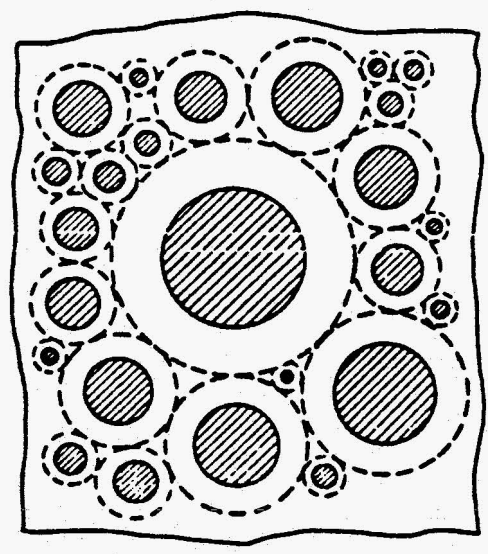
$$G = G_m + (G_p - G_m) \frac{5(3K_m + 4G_m)}{9K_m + 8G_m + 6(K_m + 2G_m)G_p G_m^{-1}} V$$

$$K = K_m + (K_p - K_m) \frac{3K_m + 4G_m}{3K_p + 4G_m} V$$

- met : index p : deeltje (particle)
- index m : matrix
- V : volumefractie deeltjes

Omdat bij het bepalen van deze parameters is uitgegaan van één deeltje in een groot matrixgebied, zijn de parameters slechts geldig voor erg kleine volumefracties V van de deeltjes. Weng (1984) heeft in het RVE een aantal bolvormige deeltjes opgenomen en analytisch de spanningen en reliken berekend. De door Weng afgeleide effectieve parameters zijn hierdoor geldig voor grotere volumefracties V van de deeltjes.

Hashin (1962) volgt een geheel andere werkwijze. Het RVE van een deeltjescomposiet wordt daarbij gemodelleerd als een verzameling bollen van verschillende afmetingen. De kern van elke bol bestaat uit deeltjesmateriaal. De hieromheen zittende mantel bestaat uit matrixmateriaal (zie figuur). De verhouding R_i/R_u is zodanig gekozen dat $V_i/V_{tot} = V$, de volumefractie van het deeltjesmateriaal in de composiet.



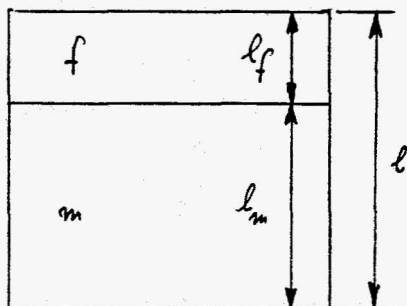
Bij een voorgeschreven radiale rek $\epsilon_{11}(r=R_u) = \epsilon$, kan de radiale spanning $\sigma_{11}(r=R_u) = \sigma$ worden berekend. Het verband tussen σ en ϵ wordt beschreven door de effectieve bulkmodulus k : $\sigma = 3k\epsilon$.
 Voor k is afgeleid :

$$k = k_m + (k_p - k_m) \frac{3k_m + 4G_m}{3k_p + 4G_m - 3(k_p - k_m)V} V$$

Bovenstaand model wordt het "composite spheres assemblage model" genoemd. Uitdrukkingen voor E en G kunnen hiernaar niet worden afgeleid.

Voor transversaal isotrope composieten wordt de zgn. "rule of mixtures" vaak gebruikt ter bepaling van E_L en E_T . Het RVE wordt daarbij gemodelleerd zoals weergegeven in de onderstaande figuur. Het

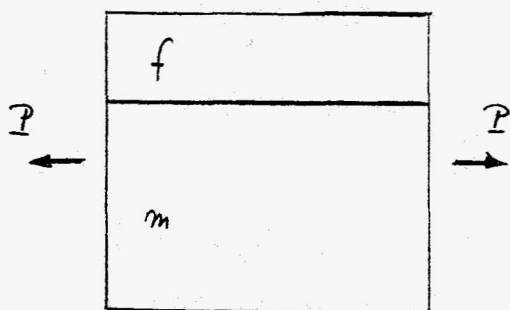
vezelmateriaal wordt geconcentreerd in één gedeelte van het RVE. De afstanden l_f en l_m zijn met de vezelvolume fractie V gerelateerd aan l :



$$l_f = V l \quad ; \quad l_m = (1 - V) l$$

Ter bepaling van de effectieve longitudinale modulus E_L , wordt

het RVE zodanig belast dat de beide componenten parallel georiënteerd zijn t.o.v. de belasting. De vervormingen zijn klein, het materiaalgedrag van beide componenten lineair elastisch. Verondersteld wordt dat de rek in beide componenten gelijk is.



Voor de kracht P geldt:

$$P = P_f + P_m = \sigma A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m = E_f \epsilon A_f + E_m \epsilon A_m = \epsilon \{ E_f A_f + E_m A_m \}$$

De dwarsdoorsnedeoppervlakken A_f en A_m zijn m.b.v. V gerelateerd aan A , $A_f = V A$ en $A_m = (1 - V) A$, waarmee voor de spanning σ volgt:

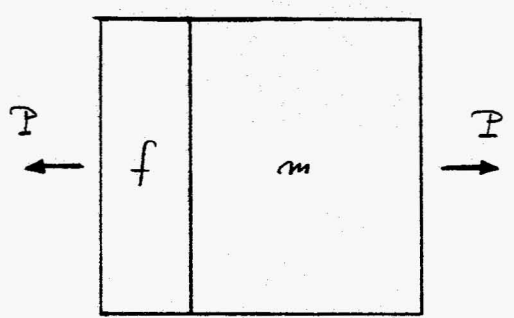
$$\sigma = \{ V E_f + (1 - V) E_m \} \epsilon = E_L \epsilon$$

De effectieve longitudinale elasticiteitsmodulus is dus:

$$E_L = \nu E_f + (1-\nu) E_m$$

Voor de berekening van de effectieve transversale elasticiteitsmodulus E_T ,

worden de beide componenten loodrecht op de krachtrichting georiënteerd. Voor de verlenging Δl van het RTE in de richting van de kracht geldt:



$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_f + \Delta l_m = l \epsilon \\ &= l_f \epsilon + l_m \epsilon = l_f \frac{\sigma_f}{E_f} + l_m \frac{\sigma_m}{E_m} \end{aligned}$$

Verondersteld wordt dat de spanningen in beide componenten gelijk zijn.

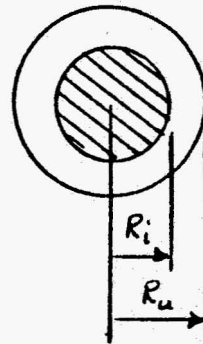
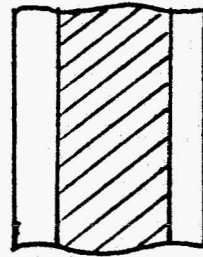
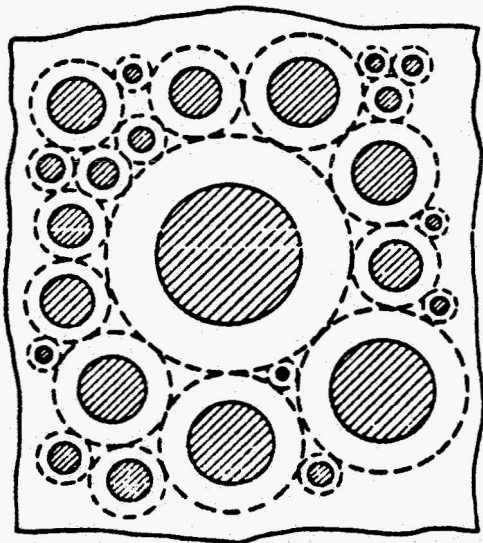
Dit leidt tot:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \left(l_f \frac{1}{E_f} + l_m \frac{1}{E_m} \right) \sigma \\ &= \left\{ \frac{\nu}{E_f} + \frac{(1-\nu)}{E_m} \right\} l \sigma \rightarrow \epsilon = \left\{ \frac{\nu}{E_f} + \frac{(1-\nu)}{E_m} \right\} \sigma = \frac{1}{E_T} \sigma \end{aligned}$$

De effectieve transversale elasticiteitsmodulus is, wordt dus gegeven door:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\nu}{E_f} + \frac{(1-\nu)}{E_m}$$

Hashin en Rosen (1964) volgen, ter bepaling van de effectieve parameters van transversaal isotrope materialen, de werkwijze die door Hashin werd toegepast ter bepaling van K van een deeltjescomposiet. Het RVE wordt in dit geval gemodelleerd als



een verzameling cilinders met verschillende dwarsdiameter. In bovenstaande figuur is een doorsnede door het transversale vlak getekend. Een cilinder bestaat, zoals in bovenstaande figuur is weergegeven, uit een kern van vezelmateriaal en een mantel van matrixmateriaal. De verhouding R_i/R_u is zodanig gekozen dat $V_i/V_{tot} = V$, de volumefractie van het vezelmateriaal in de composiet. Door de cilinder op geschikt gekozen wijzen te belasten en de hierdoor veroorzaakte vervormingen te berekenen, kunnen effectieve materiaalparameters worden bepaald. Dergelijke berekeningen kunnen slechts worden uitgevoerd voor:

- uniforme rek in longitudinale richting $\rightarrow E_L, \nu_{TL}$
- radiale rek in het transversale vlak $\rightarrow K_T$

- uniforme afschuiving in longitudinale richting $\rightarrow G_L$
 Spanningen bij voorgeschreven transversale afschuiving en/of transversale rek kunnen niet worden berekend, waardoor het niet mogelijk is om uitdrukkingen voor G_T , E_T en ν_{TT} af te leiden. De relaties voor E_L , ν_{TL} , K_T en G_L zijn:

$$E_L = E_m (1-\nu) + E_f \nu + 4 (\nu_f - \nu_m) \nu (1-\nu) / [(1-\nu) K_f^{-1} + \nu K_m^{-1} + G_m^{-1}]$$

$$\nu_{TL} = \nu_m (1-\nu) + \nu_f \nu + (\nu_f - \nu_m) (K_m^{-1} - K_f^{-1}) \nu (1-\nu) / [(1-\nu) K_f^{-1} + \nu K_m^{-1} + G_m^{-1}]$$

$$K_T = K_m + \nu / [(K_f - K_m)^{-1} + (1-\nu) (K_m + G_m)^{-1}]$$

$$G_L = G_m + \nu / [(G_f - G_m)^{-1} + (1-\nu) (2G_m)^{-1}]$$

Bovenstaand model wordt het "composite cylinder assemblage model" genoemd.

De geometrische modellering hoeft niet zo drastisch te zijn zoals hierboven beschreven is, als gebruik gemaakt wordt van variatieprincipes. Voor de effectieve parameters worden dan geen vaste waarden gevonden, maar begrenzingen. Afhankelijk van het gehanteerde principe, wordt een onder- of een bovengrens gevonden. Door ook bij deze werkwijze de microgeometrie te modelleren, kunnen betere begrenzingen worden verkregen.

Paul (1960) heeft begrenzingen voor de effectieve elasticiteitsparameters van een deeltjescomposiet bepaald, waarvan de microgeometrie willekeurig is. Voor de elasticiteitsmodulus geldt:

$$E_{(+)} = \sum_n E_n V_n \quad ; \quad E_{(-)} = \left[\sum_n \frac{V_n}{E_n} \right]^{-1}$$

De ondergrens (index (-)) is bepaald m.b.v. het principe van minimale potentiële energie. De bovengrens (index (+)) is bepaald m.b.v. het principe van minimale complementaire energie. Behalve de grenzen voor E , zijn ook grenzen voor de glijdingsmodulus G en de compressiemodulus K afgeleid.

Eveneens voor een deeltjescomposiet leidden Hashin en Shtrikman (1963) m.b.v. een gemodificeerd variatieprincipe onderstaande begrenzingen af voor G en K :

$$G_{(-)} = G_m + V / \left[(G_p - G_m)^{-1} + 6(1-V)(k_m + 2G_m) \{ 5G_m(3k_m + 4G_m) \}^{-1} \right]$$

$$K_{(-)} = k_m + V / \left[(k_p - k_m)^{-1} + 3(1-V)(3k_m + 4G_m)^{-1} \right]$$

bovengrenzen : indices f en m omwisselen

De geldigheid van bovenstaande uitdrukkingen is beperkt tot

componenten waarvoor geldt $1 < k_f/k_m < 10$ en $1 < G_f/G_m < 10$.

Hashin (1965) gebruikte een gemodificeerd variatieprincipe om onderstaande bevestigingen af te leiden voor een transversaal isotrope composiet met willekeurige microgeometrie:

$$\begin{aligned}
K_{T(-)} &= k_m + V / [(k_f - k_m)^{-1} + (1-V)(k_m + G_m)^{-1}] \\
G_{L(-)} &= G_m + V / [(G_f - G_m)^{-1} + (1-V)(2G_m)^{-1}] \\
G_{T(-)} &= G_m + V / [(G_f - G_m)^{-1} + V(k_m + 2G_m) \{ 2G_m(k_m + G_m) \}^{-1}]
\end{aligned}$$

bovenstaande : indices f en m verwisselen

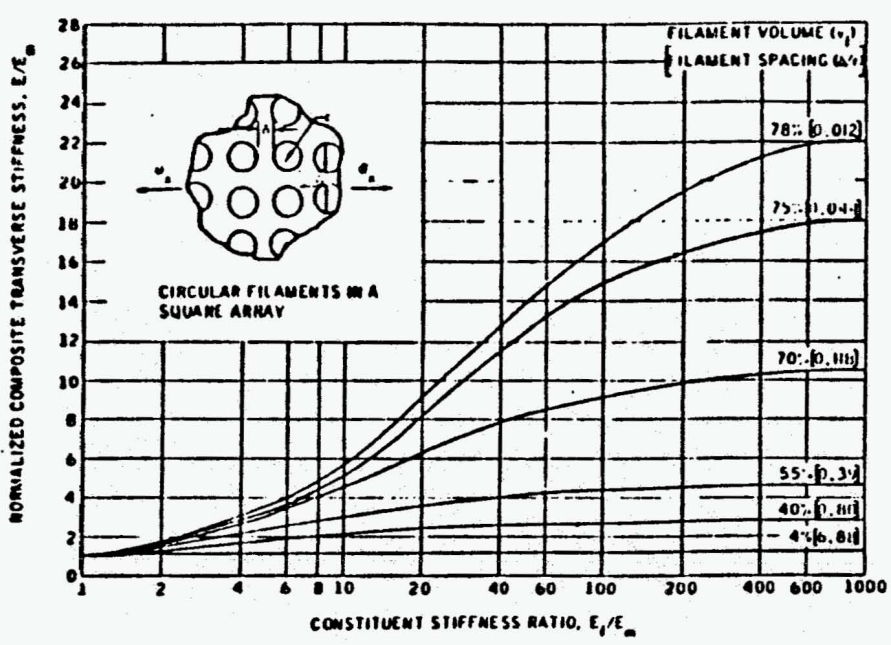
Bovenstaande relaties zijn geldig als $k_f > k_m$ en $G_f > G_m$.

Numerische methoden

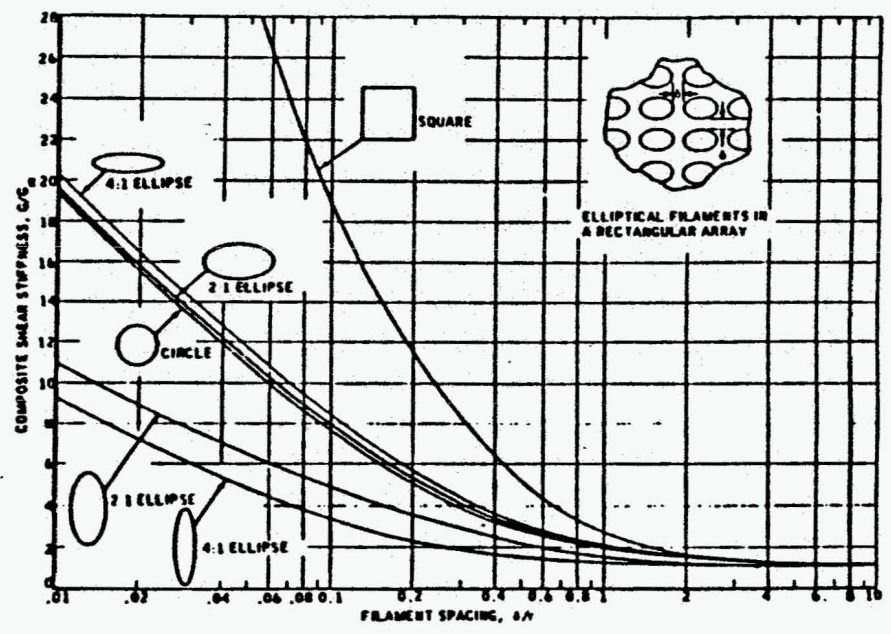
Steek vereenvoudigde modellering van het RVE kan adterwege blijven als de analyse van het verband tussen randbelasting en vervorming numeriek wordt uitgevoerd. Het RVE wordt gedetailleerd gemodelleerd bijvoorbeeld m.b.v. de eindige elementen methode. In de analyse kan aldus een complexe microgeometrie en complex (niet-lineair, niet-elastisch) materiaalgedrag van de componenten worden verdisconteerd.

Met behulp van deze werkwijze kunnen weliswaar effectieve parameters worden bepaald, maar niet als expliciete functie van de componenteigenschappen en geometrieparameters. De resultaten worden veelal weergegeven in grafische vorm. Voor elke verandering in een van de componentparameters, moet de hele analyse worden herhaald.

Adams en Doner (1967) hebben de numerieke werkwijze toegepast voor het bepalen van de effectieve parameters van unidirectionele veelcomposieten. De composiet wordt gemodelleerd als een pakket rechthoekig gestapelde vezels met daartussen matrixmateriaal. Een deel van de aldus gemodelleerde composiet wordt in het transversale vlak belast. De vervorming in dit vlak wordt berekend m.b.v. de eindige differentiemethode. Met het verband tussen spanningen en rekken is dan de effectieve transversale elasticiteitsmodulus bekend. De berekening wordt herhaald voor verschillende verhoudingen E_f/E_m en verschillende volumefracties V . Het resultaat E_T/E_m wordt grafisch weergegeven:



Bovenstaande berekeningen kunnen worden uitgevoerd voor andere belastinggevallen, bv. transversale afschuiving. Dit levert de effectieve transversale glijdingsmodulus G_T op. De berekening is uitgevoerd voor verschillende verelpstanden en verschillende vereldoorfieden. Het resultaat G_T / G_m is hieronder grafisch weergegeven.



Aboudi (1982) heeft het RVE gemodelleerd als een rechthoekige stapeling van rechthoekige vezels. Het RVE wordt vervolgens opgedeeld in subcellen. Het verplaatsingsveld binnen het RVE wordt beschreven met een Legendre-polynoom. Het materiaalgedrag van de componenten kan elastisch of visco-plastisch zijn.

Adams en Crauz (1984) modelleren het RVE m.b.v. de eindige elementen methode. De vezels zijn anisotroop en lineair elastisch. De matrix kan elasto-plastisch materiaalgedrag vertonen, waarbij de afhankelijkheid van temperatuur en vochtigheid op de materiaaleigenschappen in rekening kan worden gebracht.

Systemidentificatie en regressietechniek.

Met behulp van de hiervoor beschreven numerieke methoden, kunnen effectieve materiaalparameters weliswaar worden bepaald, ze komen echter niet beschikbaar als expliciete functie van de composietparameters. Een tweede nadeel is dat effectieve parameters niet eenvoudig kunnen worden bepaald uit het verband tussen randbelasting op en vervorming van het RVE, indien het materiaalgedrag van de composiet niet-lineair is. Bovenstaande nadelen kunnen worden overwongen door een methode toe te passen, die uit twee stappen bestaat, de eerste, gebaseerd op systemidentificatietechniek en de tweede op regressieanalyse.

Als eerste stap van de gehanteerde methode wordt het RVE gedetailleerd gemodelleerd m.b.v. de eindige elementen methode, waarna het wordt onderworpen aan een geschikt gekozen randbelasting of voorgeschreven randverplaatsing. De respons op de voorgeschreven randvoorwaarde wordt berekend. Bij lineair elastisch gedrag van het composietmateriaal, levert het verband tussen randspanning en vervorming direct een waarde op voor een effectieve materiaalparameter. Als het materiaalgedrag van de composiet niet-lineair is, worden de materiaalparameters bepaald m.b.v. een methode uit de systemidentificatietechniek.

In principe komt de werkwijze hierop neer dat een fictief, homogeen materiaal wordt beschouwd, waarvan het mechanisch gedrag wordt beschreven door de niet-lineaire constitutieve vergelijking, die voor het composietmateriaal van toepassing wordt

geacht. Dit materiaal noemen we : gehomogeniseerd composietmateriaal. Het representatief volumeelement van het materiaal, duiden we aan met HRVE en kiezen we van dezelfde afmetingen als het gedetailleerd gemodelleerde RVE van de composiet. Het HRVE wordt vervolgens eveneens gemodelleerd m.b.v. de eindige elementen methode en op dezelfde manier belast als het RVE. Met een efficiënte, iteratieve fitprocedure worden de materiaalparameters van het gehomogeniseerd composietmateriaal, zodanig bepaald dat het mechanisch gedrag van het HRVE overeenkomt met dat van het RVE. De materiaalparameters van het gehomogeniseerd composietmateriaal zijn dan gelijk aan de effectieve materiaalparameters van de composiet.

De tweede stap in de gevolgdde werkwijze, is het genereren van expliciete functionele verbanden tussen de effectieve parameters en de composietparameters. Eerst wordt daartoe zo'n functioneel verband geponeerd, met daarin nog onbekende parameters, op grond van ervaring met bestaande modellen, dimensiebeschouwingen en oriënterende berekeningen. Indien we de effectieve parameter y noemen en de composietparameters x_1, x_2, \dots, x_k , kan dit model als volgt worden gemodelleerd :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(\underline{x})$$

We onderscheiden lineaire modellen, die lineair zijn in onbekende modelparameters $\underline{\alpha}$ en niet-lineaire modellen, die niet-lineair zijn in de modelparameters, resp.:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 f_1(\underline{x}) + \alpha_2 f_2(\underline{x}) + \dots + \alpha_m f_m(\underline{x}) = \underline{F}^T(\underline{x}) \underline{\alpha}$$

$$y = f(\underline{x}, \underline{\alpha}) .$$

Het bepalen van de modelparameters $\underline{\alpha}$ kan gebeuren door te eisen dat een bepaalde set parameters, $\underline{\alpha}_t$, een groot aantal waarden y , die met verschillende \underline{x} gegenereerd zijn - $y = F \underline{\alpha}$ -, zo goed mogelijk voorspelt. De methoden die ter bepaling van $\underline{\alpha}_t$ worden gehanteerd, worden regressiemethoden genoemd: lineaire en niet-lineaire regressiemethoden.

Bij het aldus bepalen van expliciete relaties tussen effectieve parameters en compositieparameters moeten een aantal vragen worden beantwoord:

- Welke vorm moet voor het model worden gekozen?
- Welke regressiemethode moet worden gekozen om de modelparameters te bepalen?
- Hoe nauwkeurig worden de modelparameters bepaald?
- Op welke manier wordt deze nauwkeurigheid beïnvloed door de keuze van \underline{x} en het aantal verschillende \underline{x} ?
- Hoe goed is het model?

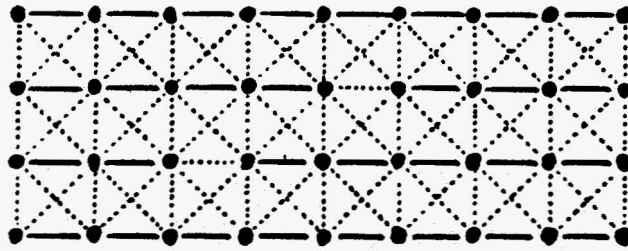
Onder sommige omstandigheden kan op een aantal van deze vragen antwoord worden gegeven.

Parameterrijke modellering,

Bij alle in het voorafgaande beschreven methoden wordt ten bepaling van de effectieve parameters, uitgegaan van een al dan niet gedetailleerd model van een representatief deel van de composiet. Materiaaleigenschappen van en hechtingseigenschappen tussen de componenten worden bekend verondersteld.

Het is mogelijk om mechanische eigenschappen zoals elasticiteitsmodulus, dwarscontractiecoëfficiënt en breukspanning te berekenen. In dat geval wordt het materiaal op moleculair niveau gemodelleerd en geanalyseerd. Omdat in dergelijke modellen geen macroscopische, empirische materiaalparameters voorkomen noemt men ze parameterrijke. Deze werkwijze wordt niet alleen gebruikt om eigenschappen van homogeen materialen te berekenen. Ook eigenschappen van composietmaterialen, waarbij de hechting tussen de componenten een bepalende factor vormt, kunnen op deze manier worden voorspeld.

Bij het berekenen van de materiaaleigenschappen van organische vezels - aramide, PE -, wordt het vezelmateriaal gemodelleerd op moleculair niveau. Dit model is een sterke vereenvoudiging van de werkelijke structuur. Zo wordt verondersteld dat de moleculen perfect geordend zijn, dat ze volledig gestrekt zijn in de vezelrichting en dat er geen intrinsieke defecten in het materiaal aanwezig zijn. In onderstaande figuur is een model weergegeven van een gedeelte van zo'n vezel. Tussen de koolstofatomen van één macromolecuul werken sterke covalente bindingskrachten (primaire binding). De interactie tussen atomen van verschillende aangrenzende moleculen komt tot stand door zwakke Van der Waals krachten (secundaire bindingen).



- ATOMEN
- COULOMB BINDINGEN
- VAN DER WAALS BINDINGEN

De sterkte en stijfheid van primaire en secundaire bindingen zijn nauwkeurig bekend als functie van de afstand tussen de atomen.

Om de elasticiteitsmodulus van een PE-vezel te berekenen is door Termonia (1985) een model van bovenstaande vorm gemaakt. Na voorschrijven van de axiale rek worden vervorming en interatomaire krachten berekend m.b.v. een numerieke methode. Het verband tussen axiale rek en axiale spanning wordt beschreven door de elasticiteitsmodulus. De voorspelde waarde kwam goed overeen met de gemeten waarde.

Door Termonia (1985) is ook de breuksterkte van de PE-vezel voorspeld. Bij een bepaalde rek van de vezel, worden alle bindingen in het model nagelopen en op grond van een statistisch beslissingscriterium al dan niet verbroken. Volgens dit criterium is de kans P dat een binding verbroken wordt :

$$P = v/v_{\max} \quad \text{met} \quad v = \tau \exp[(-U + \beta K E) / kT]$$

waarbij :

- τ = thermische trillingsfrequentie
- T = absolute temperatuur
- β = activeringsvolume
- U = activeringsenergie van de binding
- K = stijfheid van de binding
- ϵ = rek van de binding
- k = Boltzmann-constante

waarden voor PE : $T = 296^\circ K$; $\tau = 10^{11} s^{-1}$
 primair : $\beta = (1.54 \text{ \AA})^3$; $U = 25 \text{ kcal/mol}$; $K = 300 \text{ GPa}$
 secundair : $\beta = (2.5 \text{ \AA})^3$; $U = 0.65 \text{ kcal/mol}$; $K = 3 \text{ GPa}$
 waarden voor PPTA : $T = 296^\circ K$; $\tau = 10^{12} s^{-1}$
 primair : $\beta = (2.37 \text{ \AA})^3$; $U = 45 \text{ kcal/mol}$; $K = 200 \text{ GPa}$
 secundair : $\beta = (2.5 \text{ \AA})^3$; $U = 5 \text{ kcal/mol}$; $K = 4.08 \text{ GPa}$

De kans dat een verbinding wordt verbroken is evenredig met de spanning ($K\epsilon$) in de binding. Als alle bindingen zijn nagelopen wordt de cyclus herhaald. Dit gebeurt totdat er (vrijwel) geen bindingen meer verbroken worden. De voorgescreven axiale rek wordt vervolgens verhoogd, secundaire bindingen worden zonnodig opnieuw gevormend en de cycli van het verbreken der bindingen worden weer doorlopen.

Bij bovenbeschreven werkwijze is de kans dat eenmaal gevounde beschadigingen uitgroeien, groter dan de kans dat er nieuwe bijkomen, vanwege de spanningconcentraties bij een defect. Nadat enkele cycli van optrekken en breken van bindingen doorlopen zijn, zijn in het model van de vezel op verschillende plaatsen beschadigingen aanwezig, waarvan enkele zijn uitgegroeid. In onderstaande figuur is het model weergegeven bij 150% en 300% axiale rek.

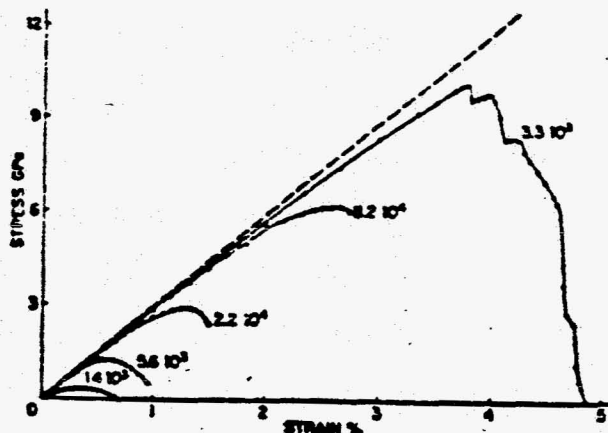


150% rek

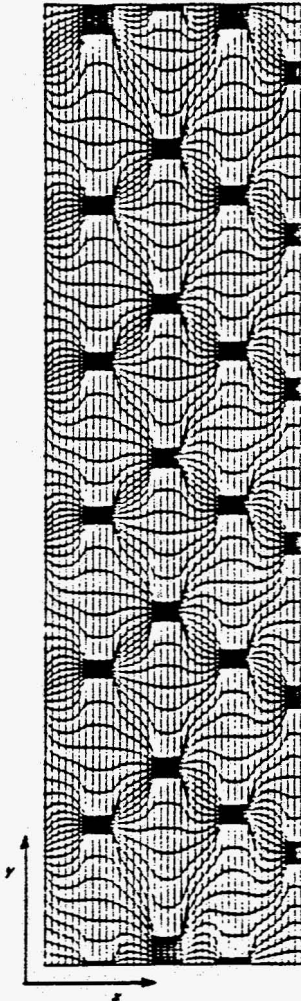


300% rek

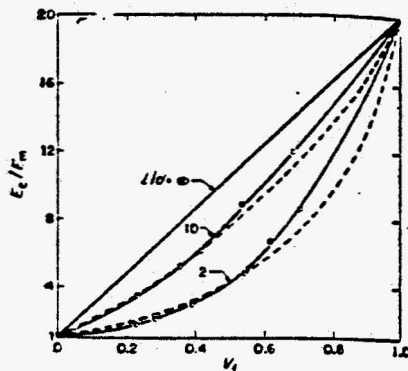
Op een bepaald moment zal de vezel breken. De dan heersende axiale spanning is de breukspanning, de axiale rek de breukrek. Voor verschillende mol-fewichten vindt Termonia (1985) een verband tussen spanning en rek, zoals in onderstaande figuur is weergegeven.



De boven beschreven werkwijze is door Tsai (1987) ook toegepast ter bepaling van de elastische eigenschappen van composietmaterialen. In onderstaande figuur is het model



weergegeven van een versterkte composit ($l/d = 2$, $V = 0.3$, $E_f/E_m = 20$), die in de y -richting wordt opgerekt. Het oorspronkelijke orthogonale rooster van koolstofatomen is vervormd zoals in de figuur op overdreven manier is weergegeven. Het verband tussen de spanning (y -richting) en de rek wordt beschreven door de elasticiteitsmodulus E_c . Door de analyse te herhalen voor verschillende vezel-volumefracties V en lengte/diameter verhouding (l/d) van de vezels, wordt nevenstaande figuur verkregen, waarin het quotiënt van de effectieve modulus E_c en de matrix modulus E_m is uitgezet tegen V met l/d als parameter. De verkregen resultaten zijn vergeleken met resultaten volgens de egn Halpin-Tsai relatie, die deels empirisch van aard zijn. [Halpin, Kardos (1976)]



Hocwel de resultaten van bovenstaande berekeningen goed overeenstemmen met experimentele data, is dit lang niet altijd het geval. De modellering van de structuur van het materiaal is namelijk zo sterk vereenvoudigd dat de m.b.v. de modellen berekende waarden i.h.a. sterk afwijken van de gemeten waarden. Het verkregen kwalitatief inzicht is echter zeer waardevol en kan leiden tot gerichte modificatie van materiaal- en bedrukkingseigenschappen.

LAMINATEN

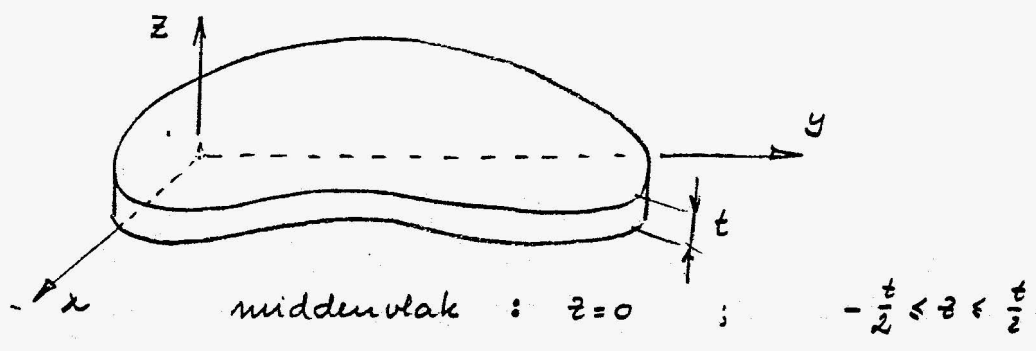
Laminaten

Laminaten zijn dunne platen, die opgebouwd zijn uit een (groot) aantal lagen (= lamina's, ply's, lamellen). Elke laag bestaat meestal uit composietmateriaal, waarin lange, unidirectionele vezels, ofwel een 2D weefsel worden toegepast. De eigenschappen van het laminaat hangen af van de eigenschappen van de afzonderlijke lagen en van de manier waarop ze gestapeld zijn, d.w.z. de oriëntatie van de vezels in de verschillende lagen. Om de stijfheid van het laminaat te verhogen wordt vaak een kern toegepast (stijfheid \sim dikte³). Deze kern bestaat uit licht materiaal bv. schuim, aluminium, hout.

De mechanische eigenschappen van een laminaat worden volledig beschreven door de stijfheidsmatrix. Deze kan worden bepaald als de opbouw van het laminaat bekend is. In hetgeen volgt wordt het mechanisch gedrag van een laminaat nader beschouwd. Omdat e.e.a. gebaseerd is op lineaire plaatbuigtheorie wordt hier allereerst enige aandacht aan besteed. De gegeven beschrijving is zeer summier. Voor uitwerkingen uiteenzettingen wordt verwezen naar boeken en dictaten op dit gebied.

T.b.v. het samenstellen van een laminaat, het bepalen van de stijfheidsmatrix en het berekenen van de vervorming bij gegeven randbelasting, zijn enkele .m-files in PC-Matlab geschreven. Ook is het mogelijk om in PC-Matlab een laminaatopbouw te optimaliseren z.d.d. spanningen en/of rekken in bepaalde lagen zo gering mogelijk zijn. Nadere informatie kan worden verkregen bij Piet Schuuris.

Lineaire plaatbuigtheorie



Verplaatsingen:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

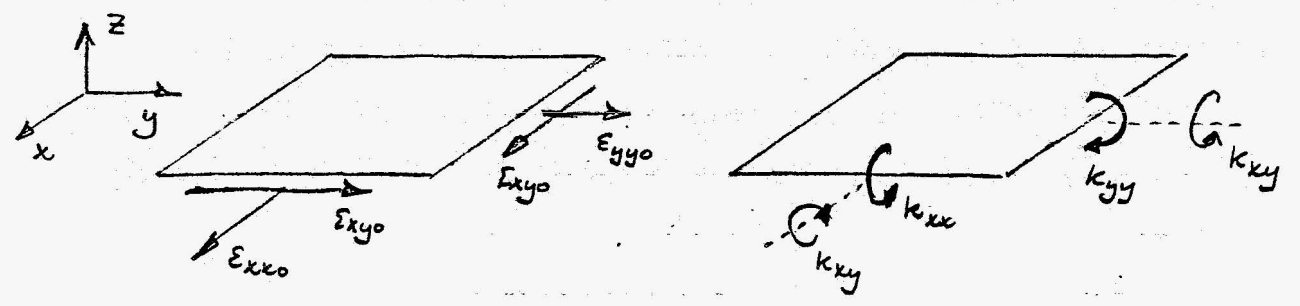
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Rekken

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \epsilon_{xx0} + z \kappa_{xx}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \epsilon_{yy0} + z \kappa_{yy}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \epsilon_{xy0} + \frac{1}{2} z \kappa_{xy}$$



Materialgedrag → spanning-rek relatie

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\epsilon_{xx0} + \nu \epsilon_{yy0}) + z (\kappa_{xx} + \nu \kappa_{yy}) \}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\epsilon_{yy0} + \nu \epsilon_{xx0}) + z (\kappa_{yy} + \nu \kappa_{xx}) \}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{xy} = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_{xy0} + \frac{1}{2} z \kappa_{xy})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_{xx0} \\ \epsilon_{yy0} \\ \epsilon_{xy0} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$$

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{\epsilon} = \underline{S} (\underline{\epsilon}_0 + z \underline{\kappa})$$

Snedegrootheden

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{z=-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \rightarrow \underline{N} = \int_{z=-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \underline{\sigma} dz$$

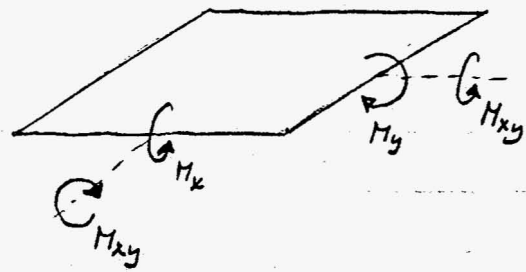
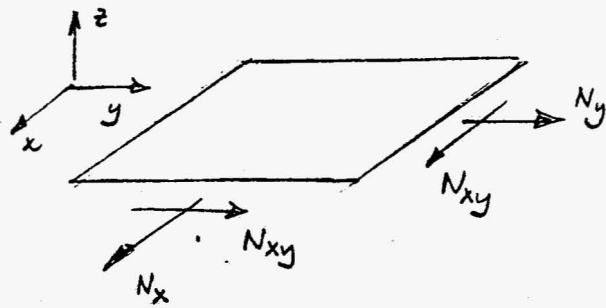
$$= \int_{z=-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\underline{S} (\underline{\epsilon}_0 + z \underline{\kappa}) \right] dz$$

$$= t \underline{S} \underline{\epsilon}_0$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{z=-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \rightarrow \underline{M} = \int_{z=-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \underline{\sigma} z dz$$

$$= \int_{z=-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\underline{S} (\underline{\epsilon}_0 + z \underline{\kappa}) \right] z dz$$

$$= \frac{1}{12} t^3 \underline{S} \underline{\kappa}$$



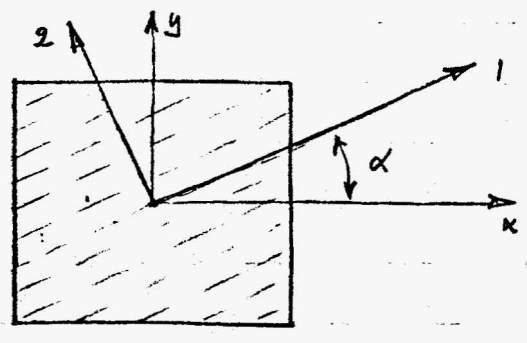
Stijfheidsmatrix van de plaat

$$\begin{bmatrix} N \\ N \\ M \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \underline{S} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{1}{12} t^3 \underline{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_0 \\ \underline{k} \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

Complimentiematrix van de plaat

$$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_0 \\ \underline{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{-1} \underline{C} & \underline{0} \\ \underline{0} & 12 t^{-3} \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ N \\ M \\ M \end{bmatrix}$$

De orthotrope plaat



$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{\epsilon} \rightarrow \underline{\epsilon} = \underline{C} \underline{\sigma}$$

Transformeren naar (xy)-componenten

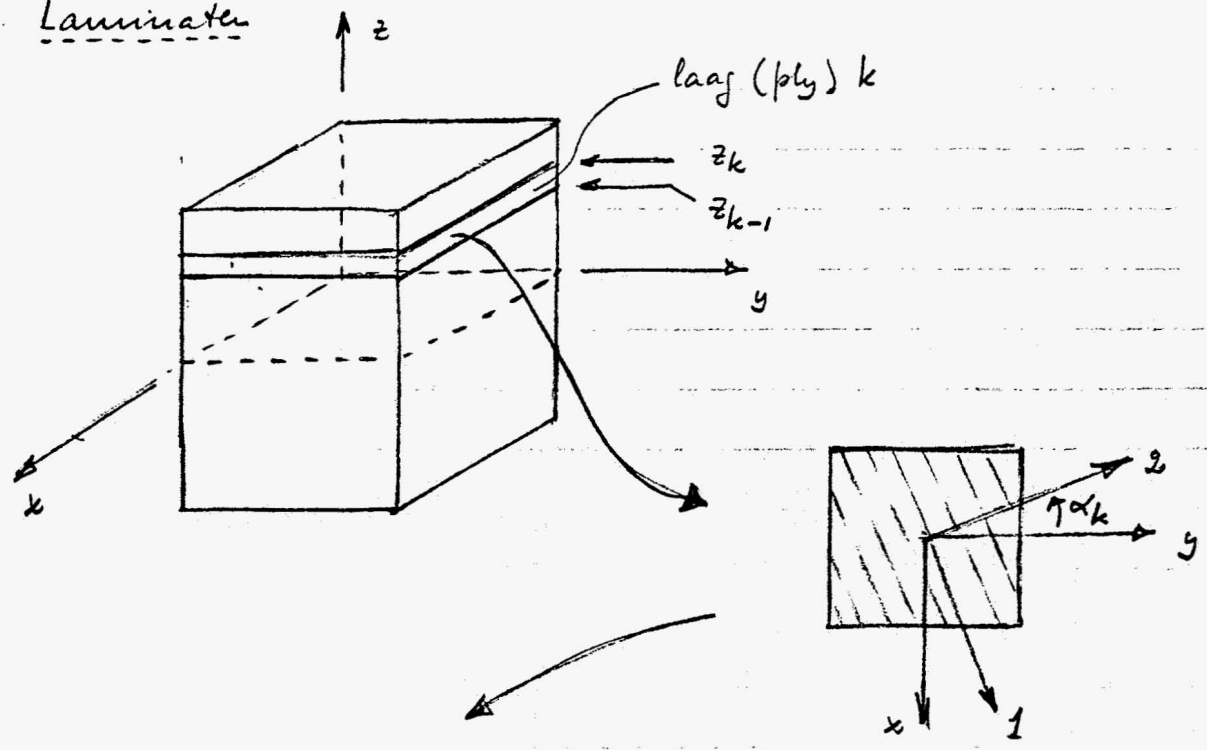
$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\underline{\epsilon}^* = \underline{T} \underline{\epsilon} \quad ; \quad \text{idem} \rightarrow \underline{\sigma}^* = \underline{T}^{-T} \underline{\sigma} \rightarrow$$

$$\underline{\epsilon}^* = \underline{T} \underline{\epsilon} = \underline{T} \underline{C} \underline{\sigma} = \underline{T} \underline{C} \underline{T}^T \underline{\sigma}^* = \underline{C}^* \underline{\sigma}^* \rightarrow \underline{C}^* = \underline{T} \underline{C} \underline{T}^T$$

$$\underline{\sigma}^* = \underline{T}^{-T} \underline{\sigma} = \underline{T}^{-T} \underline{S} \underline{\epsilon} = \underline{T}^{-T} \underline{S} \underline{T}^{-1} \underline{\epsilon}^* = \underline{S}^* \underline{\epsilon}^* \rightarrow \underline{S}^* = \underline{T}^{-T} \underline{S} \underline{T}^{-1}$$

Laminaten



orthotrope plaat →

$$\underline{\sigma}_k = \underline{S}_k \underline{\varepsilon}_k \quad \rightarrow \quad \underline{\sigma}_k^* = \underline{T}_k^{-T} \underline{S}_k \underline{T}_k^{-1} \underline{\varepsilon}_k^* = \underline{S}_k^* \underline{\varepsilon}_k^* \quad \rightarrow$$

$$\underline{\sigma}_k^* = \underline{S}_k^* (\underline{\varepsilon}_0 + z \underline{\kappa})$$

Snedegrootheden : bijdrage van ply k

$$N_k = \int_{z=z_{k-1}}^{z_k} \underline{\sigma}_k^* dz = (z_k - z_{k-1}) \underline{S}_k^* \underline{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \underline{S}_k^* \underline{\kappa}$$

$$= \underline{A}_k \underline{\varepsilon}_0 + \underline{B}_k \underline{\kappa}$$

$$M_k = \int_{z=z_{k-1}}^{z_k} \underline{\sigma}_k^* z dz = \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \underline{S}_k^* \underline{\varepsilon}_0 + \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \underline{S}_k^* \underline{\kappa}$$

$$= \underline{B}_k \underline{\varepsilon}_0 + \underline{D}_k \underline{\kappa}$$

Stijfheidsmatrix :

Sommatie van de bijdrage van alle plies :

$$\underline{N} = \sum_{k=1}^m \underline{N}_{nk} = \underline{A} \underline{\varepsilon}_0 + \underline{B} \underline{k}$$

$$\underline{M} = \sum_{k=1}^n \underline{M}_{nk} = \underline{B} \underline{\varepsilon}_0 + \underline{D} \underline{k}$$

} →

$$\begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_0 \\ \underline{k} \end{bmatrix}$$

\underline{A} : rekstijfheidsmatrix

\underline{D} : buigstijfheidsmatrix

\underline{B} : koppelstijfheidsmatrix

dimensies :

$$\begin{bmatrix} [FL^{-1}] \\ [F] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [FL^{-1}] [F] \\ [F] [FL] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [-] \\ [L^{-1}] \end{bmatrix}$$

Compliantiematrix

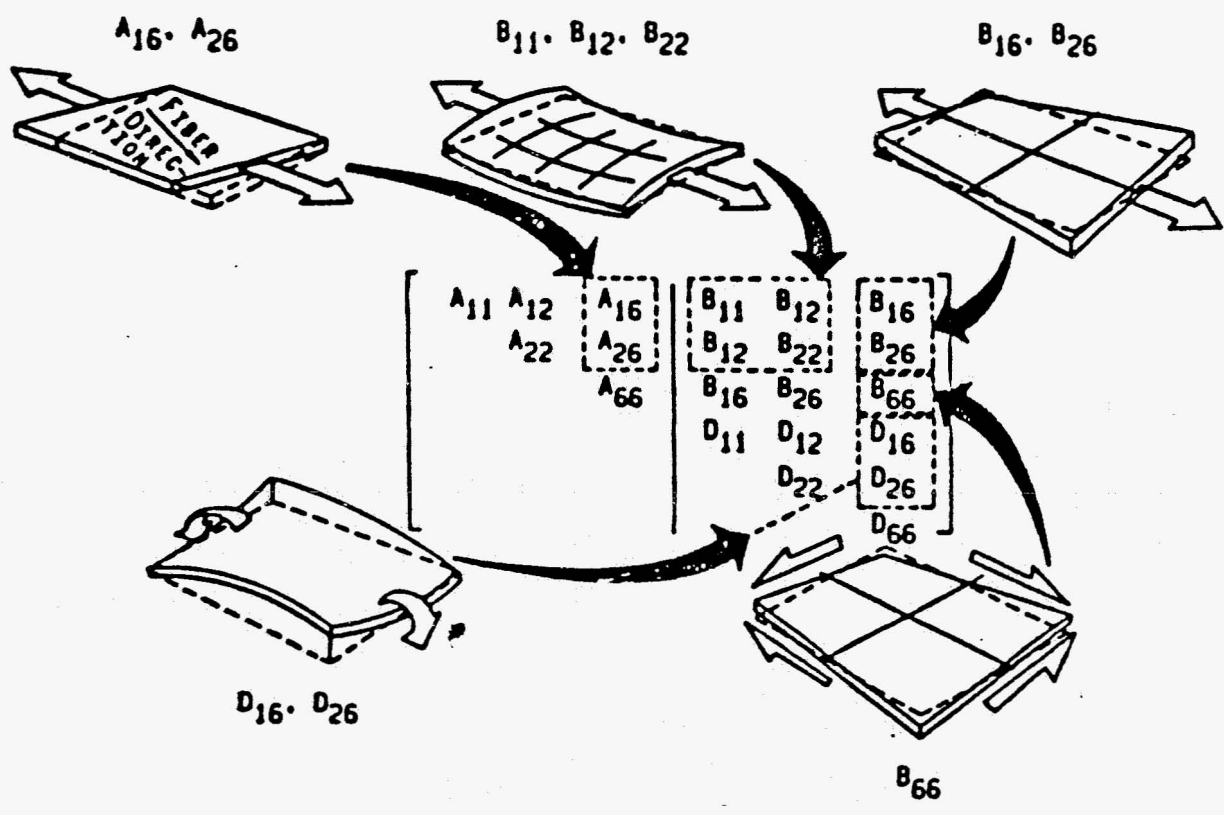
$$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_0 \\ \underline{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{b} & \underline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{bmatrix}$$

\underline{N} en \underline{M} voorshijven → $\underline{\varepsilon}_0$ en \underline{k} berekenen

Rekken en spanningen in een ply

$$\underline{\varepsilon}_{nk}^*(z) = \underline{\varepsilon}_0 + z \underline{k} \quad \rightarrow \quad \underline{\varepsilon}_k(z) = \underline{T}_k^{-1} \underline{\varepsilon}_{nk}^*(z)$$

$$\underline{\sigma}_{nk}^*(z) = \sum_k^* \underline{\varepsilon}_{nk}^*(z) \quad \rightarrow \quad \underline{\sigma}_k(z) = \underline{T}_k^T \underline{\sigma}_{nk}^*(z)$$



Naamgeving

M.b.t. de orientatie van de vezels in de verschillende lamina's worden de volgende bijzondere gevallen onderscheiden. Voor de bijzondere eigenschappen wordt verwezen naar de figuur op de vorige pagina, waarin de relatie is aangegeven tussen bepaalde belasting/vervormingssituaties en termen in de stijfheidsmatrix.

1. Cross-ply

De orthotrope lamina's zijn zodanig geïoriënteerd dat de materiaalhoofd-richtingen (1 en 2) samenvallen met de globale richtingen (x en y).

$$\Rightarrow A_{16} = A_{26} = 0$$

2. Angle-ply

De orthotrope lamina's zijn zodanig geïoriënteerd dat de hoofdrichtingen alle een hoek van $\pm \alpha^\circ$ maken met de x-as of de y-as.

3. Regular-Angle-ply

Een Angle-ply met de hoofdrichtingen van de lamina's om en om geïoriënteerd in $+\alpha^\circ$ en $-\alpha^\circ$ t.o.v. de x-as. Bij een even aantal lamina's geldt dan: $A_{16} = A_{26} = 0$

M.b.t. de stapeling van de lamina's worden de volgende gevallen onderscheiden: