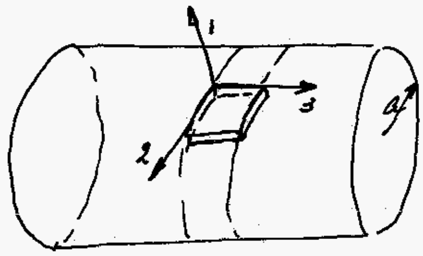
Torsie van dunwandige cilinders m.b.v. schalentheorie (buigingsstijve schalen) . Membraantheorie voor cilinders met willekeurige -dunwandige- dwarsdoorsnede

Torsie van dunwandige cilinders m.b.v. Schalentheorie
(buigingsstijve schalen).

We beperken ons hier tot cirkelvormige cilinders, waarbij de wanddikte steeds klein is t.o.v. de kromtestraal.

Gebruik wordt gemaakt van de notaties uit het boek "Technische Dynamik" van Biezeno/Grammel. pag. 518.
De door Biezeno/Grammel gevonden formules zullen we hier niet weer afleiden. We nemen de resultaten over en geven hier slechts de essentiële punten van de theorie.



dikte : h

Verplaatsingen van een punt van het middenvlak noemen we (u_0, v_0, w_0)
x: coordinaat in 1 richting t.o.v. het middenvlak
<u>Aanname</u>: punten die op een normaal op het middenvlak gelegen zijn, blijven ook na deformatie op één lijn liggen, die loodrecht staat op het -vervormde- middenvlak.
Hiermee zijn de verplaatsingen van een willekeurig punt uit te drukken in die van het middenvlak.

$$u = u_0$$

$$v = \frac{a+x}{a} v_0 - \frac{x}{a}\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \qquad a: \text{straal der cilinder.}$$

$$w = w_0 - x\frac{\partial u_0}{\partial z}$$

Hieruit zijn de rekken te bepalen als fie. van (u_0, v_0, w_0)

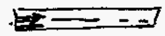
In plaats van met de spanningen wordt vaak met de snedegrootheden per lengte-eenheid gerekend
Krachten: $k_{\varphi\varphi}$, $k_{\varphi z}$, $k_{z\varphi}$, k_{zz}

moment: $m_{\varphi\varphi}$, $m_{\varphi z}$, $m_{z\varphi}$, m_{zz}

Merk op dat in het algemeen $k_{z\varphi} \neq k_{\varphi z}$
en $m_{z\varphi} \neq m_{\varphi z}$

vb. $$k_{z\varphi} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tau_{z\varphi}\left(1+\frac{x}{a}\right)dx$$

$$k_{\varphi z} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tau_{\varphi z}\, dx$$



De evenwichtsvgl. zijn dan in deze grootheden op te schrijven. Deze grootheden zijn verder uit te drukken in de spanningen, dus in de verplaatsingen u_0, v_0, w_0. Gesubstitueerd in de evenwichtsvergelijkingen vinden we drie partiële d.v. in de verplaatsingsgrootheden.

Opm: Als $k_{\varphi\varphi}$ enz. uitgedrukt moeten worden, komen integralen voor van de vorm $\int \frac{dx}{a+x}$. Slechts de twee eerste termen van de reeksontwikkeling van de integrand worden meegenomen, de rest is voor dunne cilinders te verwaarlozen.

Gevonden worden de vergelijkingen (7) en (9) resp (10).
Voor kleine l geldt $A^* \ll B$.
Onder de aanname $A^*=0$ worden de vergelijkingen (10):

(1) $$\frac{u_0}{a} + \frac{1}{a}\frac{\partial v_0}{\partial\varphi} + \frac{1}{m}\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$

(2) $$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_0}{\partial\varphi} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2} + \frac{m-1}{2m}\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \frac{m+1}{2ma}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi\,\partial z} = 0$$

(3) $$\frac{1}{ma}\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{m+1}{2ma}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi\,\partial z} + \frac{m-1}{2ma^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0$$

Uit (1) volgt

$$u_0 = -\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{a}{m}\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

In (3) gesubstitueerd:

$$-\frac{\partial^2 v_0}{\partial z\,\partial\varphi} - \frac{a}{m}\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{m+1}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi\,\partial z} + \frac{m-1}{2a}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} + ma\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0$$

In (2) gesubstitueerd:

$$-\cancel{\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2}} - \frac{1}{ma}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi\,\partial z} + \cancel{\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2}} + \frac{m-1}{2m}\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \frac{m+1}{2ma}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi\,\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi\,\partial z} = 0$$

$$(4) \longrightarrow \left\{ \frac{\partial v_0}{\partial z} = -\frac{1}{a}\frac{\partial w_0}{\partial\varphi} + f_1(\varphi) \right.$$

Uit (3) volgt:

$$\frac{m-1}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial z\,\partial\varphi} + \frac{m-1}{2a}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2} + \frac{m^2-1}{m}a\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial z\,\partial\varphi} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2} + \frac{2(m+1)}{m}a\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0$$

M.b.v. (4)

$$-\cancel{\frac{1}{a}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}} + \frac{df_1}{d\varphi} + \cancel{\frac{1}{a}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\varphi^2}} + \frac{2(m+1)}{m}a\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{df_1}{d\varphi} + \frac{2(m+1)}{m}a\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0$$

dus

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = -\frac{m}{2a(m+1)}\frac{df_1}{d\varphi}$$

$$w_0 = -\frac{m}{4a(m+1)}\frac{df_1}{d\varphi}z^2 + f_2(\varphi)\,z + f_3(\varphi)$$

$$v_0 = +\frac{m}{12a^2(m+1)}\frac{d^2 f_1}{d\varphi^2}z^3 - \frac{1}{2a}\frac{df_2}{d\varphi}z^2 - \frac{1}{a}\frac{df_3}{d\varphi}z + f_1(\varphi)\,z$$
$$+ f_4(\varphi).$$

$$u_0 = -\frac{m}{12a^2(m+1)}\frac{d^3f_1}{d\varphi^3}z^3 + \frac{1}{2a}\frac{d^2f_2}{d\varphi^2}z^2 + \frac{1}{a}\frac{d^2f_3}{d\varphi^2}z - \frac{df_1}{d\varphi}z +$$

$$- \frac{df_4}{d\varphi} + \frac{1}{2(m+1)}\frac{df_1}{d\varphi}z - \frac{a}{m}f_2(\varphi).$$

Randvoorwaarden: (Mag dit zonder meer geëist worden?)

$w_0 = 0$ voor $z = 0$ $\rightarrow f_3(\varphi) \equiv 0$

$v_0 = 0$ voor $z = 0$ $\rightarrow f_4(\varphi) \equiv 0$

$u_0 = 0$ voor $z = 0$ $\rightarrow f_2(\varphi) \equiv 0.$

$w_0 = 0$ voor $z = l$ $\rightarrow \frac{df_1}{d\varphi} = 0 \rightarrow f_1 l = \alpha a$

Hiermee geldt:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = \alpha z a \\ w_0 = 0 \end{cases}$$

(Aanname van de Saint-Venant.)

Opm: Merkwaardig is dat bovenstaande randvoorwaarden de oplossing van het torsievraagstuk geven zonder dat iets geëist is over de verdraaiing van de doorsnede $z = l$ t.o.v. $z = 0$, dus van v_0. Het is natuurlijk zo, dat w_0 voor $z = l$ alleen bij torsie nul kan zijn.
Eisen we hier dat $v_0 = \alpha l a$ voor $z = l$, dan geldt:

$$\alpha l a = \frac{m}{12a^2(m+1)}\frac{d^2f_1}{d\varphi^2}l^3 + f_1(\varphi)l$$

of $$\frac{m\,l^2}{12a^2(m+1)}\frac{d^2f_1}{d\varphi^2} + f_1 = \alpha a$$

dan geldt:

$$f_1 = C_1 \cos \frac{a}{l}\sqrt{\frac{12(m+1)}{m}}\,\varphi + C_2 \sin \frac{a}{l}\sqrt{\frac{12(m+1)}{m}}\,\varphi + \alpha a$$

Kijkend naar de uitdrukkingen u_0, v_0 en w_0 zien we dat c_1 en c_2 nul te nemen moeten zijn willen we de torsieoplossing vinden.

Opm: Er moet nagegaan worden, hoeveel randvoorwaarden in dit geval eigenlijk geëist moeten worden.

Nemen we voor het verplaatsingsveld:

$$u_0 = w_0 = 0$$

$$v_0 = \alpha z a$$

dan geldt voor de snedegrootheden (zie B-S. formule (9))

$$k_{\varphi\varphi} = k_{zz} = 0$$

$$k_{\varphi z} = \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{m^2 E h}{m^2-1}\,\alpha a = \frac{m E h}{2(m+1)}\,\alpha a = \underbrace{G h \alpha a}$$

(elementaire formule).

en $k_{z\varphi} = k_{\varphi z}$

Hierbij is A^* weer nul genomen.
Verwaarlozen we A^* alleen t.o.v. B dan treden ook nog momenten op:

$$m_{\varphi\varphi} = -\frac{(m-1)}{2ma}\;\frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)}\,\alpha a = -\frac{m E h^3 \alpha}{24(m+1)} = -\frac{1}{12} G \alpha h^3$$

$$m_{zz} = \qquad\qquad = \frac{1}{12} G \alpha h^3$$

$$m_{\varphi z} = m_{z\varphi} = 0.$$

Stemmen deze resultaten overeen met de exacte torsieoplossing? Ja, immers:
De schuifspanningen zijn:

$$\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = G\alpha(a+x)$$

Dus: $$m_{\varphi\varphi} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\varphi z}\, x\, dx = -G\alpha \int x(a+x)\,dx = -\frac{1}{12}\, G\alpha h^3$$

$$m_{zz} = \rho\alpha\int x\,(a+x)\,\frac{(a+x)}{a}\,x\,dx =$$

$$\rho\frac{\alpha}{a}\left[\, a^3 h + \frac{1}{6}\,\frac{h^3 a}{4}\right] = \frac{1}{6}\,\rho\,\alpha\, h^3$$

<u>Los dit probleem op, als niet de vervormingen maar de belasting gegeven is.</u>

De evenwichtsvergelijkingen voor het geval we de membraanspanningsoplossing zoeken worden:

$$\left.\begin{aligned} & k_{\varphi\varphi} = 0 \\ & \frac{1}{a}\frac{\partial k_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial k_{z\varphi}}{\partial z} = 0 \\ & \frac{1}{a}\frac{\partial k_{\varphi z}}{\partial\varphi} + \frac{\partial k_{zz}}{\partial z} = 0 \\ & \ell_{\varphi z} = 0 \\ & k_{zz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & k_{z\varphi} = f_1(\varphi) \\ & k_{zz} = \frac{1}{a}\frac{df_1}{d\varphi}\, z + f_2(\varphi) \end{aligned}$$

Geen welvingsverhindering: $\left.\begin{aligned} & z = 0 \rightarrow k_{zz} = 0 \\ & z = l \rightarrow k_{zz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{df_1}{d\varphi} = 0\,,\ f_2(\varphi) = 0$

Dus $k_{z\varphi} = k_{\varphi z} = \text{constant}$; de rest nul.

Uit de torsietheorie is ons echter bekend dat er nog kleine momenten $m_{\varphi\varphi}$ en $m_{\varphi z}$ optreden.
Immers stel:

$$k_{z\varphi} = k_{\varphi z} = \alpha\, h\, a$$

dan is $m_{zz} = \frac{1}{6}\alpha h^3$, $m_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{12}\alpha h^3$; rest nul.

Deze uitdrukkingen voldoen aan de evenwichtsvoorwaarden.

Het verband tussen de snedegrootheden en de vervormingen wordt in dit geval gegeven door onderstaande vergelijkingen. Hierbij is h weer zó klein gekozen, dat A^* t.o.v. B is te verwaarlozen:

* (1) $$0 = \frac{u_0}{a} + \frac{1}{a}\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{m}\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

* (2) $$\alpha h a = \frac{(m-1)B}{2m}\left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{1}{a}\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}\right)$$

(3) $$-\frac{1}{12}\alpha h^3 = \frac{(m-1)}{2ma}A^*\left(2\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{1}{a}\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}\right)$$

(4) $$0 = -A^*\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{u_0}{a^2}\right)$$

* (5) Hetzelfde als (2)

* (6) $$0 = B\left(\frac{u_0}{ma} + \frac{1}{ma}\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)$$

(7) $$0 = A^*\left(\frac{1}{ma^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{ma^2}\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{1}{a}\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)$$

(8) $$\frac{1}{6}\alpha h^3 = \frac{(m-1)}{ma}A^*\left(-\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial z}\right)$$

Uit (1) en (6) volgt $\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \longrightarrow \boxed{w_0 = w_0(\varphi)}$

Uit (2):

$$\boxed{v_0 = \frac{2m}{(m-1)B}\alpha h a z - \frac{1}{a}\frac{dw_0}{d\varphi}z + f_1(\varphi)}$$

Uit (6) ~~en (8)~~ volgt:

$$\boxed{u_0 = +\frac{1}{a}\frac{d^2 w_0}{d\varphi^2}z - \frac{df_1}{d\varphi}} \cancel{-ma\frac{dw_0}{dz}}$$

Als we A^* overal meegenomen hadden, zouden dit de enige vergelijkingen zijn, die ons ter beschikking staan. Van de hier voorkomende willekeurige functies

$w_0(\varphi)$ en $f_1(\varphi)$ kan uiteraard niet aangetoond worden, dat zij een beweging als star lichaam beschrijven.

Gebruiken we nu verder dat er geen normaalspanningen optreden in de langsvlakken, dus dat $m_{\varphi z} = 0$, dan zijn deze onbekende functies te bepalen.

$m_{\varphi z} = 0 \rightarrow$ vergelijking (4)

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{u_0}{a^2} = 0$$

of

$$\frac{1}{a^3}\frac{d^4 w_0}{d\varphi^2} z - \frac{1}{a^2}\frac{d^3 f_1}{d\varphi^3} + 0 + \frac{1}{a^3}\frac{d^2 w_0}{d\varphi^2} z - \frac{1}{a^2}\frac{df_1}{d\varphi} = 0$$

dus $\dfrac{d^4 w_0}{d\varphi^4} + \dfrac{d^2 w_0}{d\varphi^2} = 0$ en $\dfrac{d^3 f_1}{d\varphi^3} + \dfrac{df_1}{d\varphi} = 0$

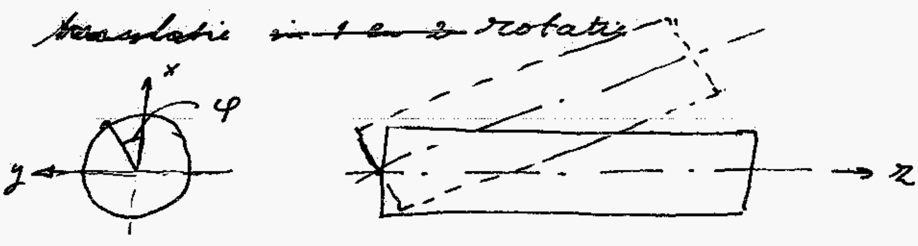
Oplossing:

$$w_0 = C_1 + C_2\varphi + C_3\cos\varphi + C_4\sin\varphi$$

$$f_1 = C_5 + C_6\cos\varphi + C_7\sin\varphi$$

Discussie van de hierin voorkomende termen:

C_1 : beweging als star lichaam in z richting (axiaal)
C_2 : moet nul zijn, omdat $w_0(\varphi) = w_0(\varphi + 2\pi)$
C_3 en C_4 ~~translatie in 1 en 2~~ rotatie



Bij de getekende kanteling is de verplaatsing in z-richting evenredig met x, dus met $\cos\varphi$.

Kanteling om de x-as geeft een verplaatsing in z-richting evenredig met y, dus met $\sin\varphi$.

Met andere woorden: c_1 t/m c_4 zijn zonder enige beperking nul te kiezen.

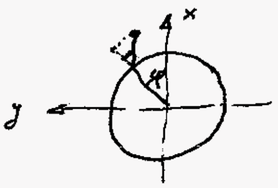
Op dezelfde manier kan $f_1(\varphi) \equiv 0$ gekozen worden. Immers

$$v_0 = \ldots\ldots + f_1(\varphi) =$$

$$= \ldots\ldots + c_5 + c_6 \cos\varphi + c_7 \sin\varphi$$

c_5: rotatie om de z-as

c_6 en c_7: translaties.



translatie in x-richting ter grootte $-c_7$ geeft tangentiele verplaatsingen $c_7 \sin\varphi$.

translatie in y-richting ter grootte c_6 geeft tangentiele verplaatsingen $c_6 \cos\varphi$.

Door in onze beschouwing te betrekken dat $m_{\varphi z} = 0$ (geen tangentiele normaalspanningen) kunnen we het verplaatsingsveld eenduidig bepalen. Er geldt dan

$$w_0 = 0$$

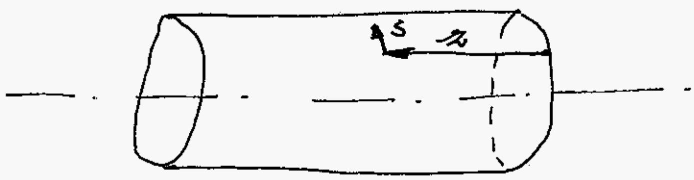
$$v_0 = \frac{2m}{(m-1)B} \alpha \, h \, a \, z \qquad \text{(elementair)}$$

$$u_0 = 0$$

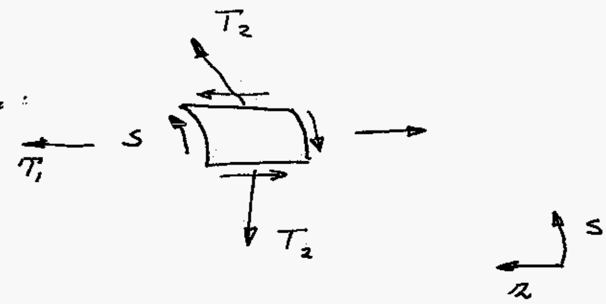
Nog helemaal niet gebruikt zijn de vgl. (3), (7) en (8)

Door bovenstaande uitdrukkingen is hier aan voldaan.

Membraantheorie voor cilinders met willekeurige -dunwandige- dwarsdoorsnede.



Element uit de cilinder:



' dikte van de doorsnede : $\delta(s)$.

T_1, T_2 en S zijn krachten / lengteeenheid

q_1, q_2 en q_n zijn de componenten der oppervlaktekracht (per eenh. van oppervlak) in respectievelijk axiale, tangentiele en radiale richting.

<u>evenwicht</u>:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1}{\partial z} + \dfrac{\partial S}{\partial s} + q_1 = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial S}{\partial z} + \dfrac{\partial T_2}{\partial s} + q_2 = 0 & (2) \\ T_2 = q_n r & (3) \end{cases}$$

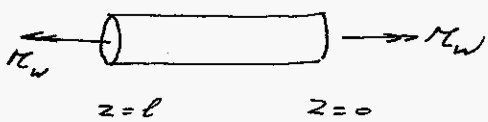
met r de kromtestraal ter plaatse s.

<u>Hooke</u>: Noem de verpl.: $\begin{cases} u \text{ in normale} \\ v \text{ in tangentiale} \\ w \text{ in axiale richting.} \end{cases}$

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E\delta} \left(T_1 - \nu T_2 \right) \right. \qquad (4)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{u}{R} = \dfrac{1}{E\delta}\left(T_2 - \nu T_1\right) & (5) \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{2(1+\nu)}{E} S & (6) \end{array}\right.$$

We wensen dit toe te passen op de torsie van een dunwandige gesloten cilinder.



Er geldt hier: $q_1 = q_2 = q_n = 0$

dus $\mid T_2 = 0$ (uit (3))

Uit (2) volgt dan: $\longrightarrow \quad \dfrac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \mid S = S(s)$

Uit (1) $\longrightarrow \quad \dfrac{\partial T_1}{\partial z} + \dfrac{dS}{ds} = 0$

$$\mid T_1 = -\frac{dS}{ds} z + f_1(s)$$

Voor $z = 0$ en $z = l$ verhinderen we de welving der doorsnede niet. We laten daar dus geen axiale krachten werken. Hieruit volgt:

$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ z = l \end{array}\right\} T_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} f_1(s) \equiv 0 \\[1ex] \dfrac{dS}{ds} \equiv 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} T_1 \equiv 0 \\[1ex] S = \text{Constant.} \end{array}$$

We hebben gevonden: $T_1 = 0$
$T_2 = 0$
$S = \text{const.}$

Alle schuifkrachten samen moeten het wringend moment leveren: Hieruit volgt:

$$S = \frac{M_w}{2A}$$

A: door de contour omsloten oppervlak van de dwarsdoorsnede.

|| Kan uit de gevonden spanningsverdeling eenduidig het verplaatsingsveld worden afgeleid?

In de torsietheorie wordt de spanningsverdeling bepaald uit de aanname dat een dwarsdoorsnede in zijn geheel draait om een vast punt en dat de verdraaiingshoek evenredig is met de z-coordinaat.
Volgt dit ook uit de membraanspanningstheorie?

De vergelijkingen (4), (5) en (6) gaan in dit geval over in:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\mu}{z} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{S}{G} \quad (\text{constant}). \qquad (9)$$

Hieruit volgt

$$(7) \longrightarrow \quad w = w(s)$$

$$(9) \longrightarrow \quad v = \left(-\frac{dw}{ds} + \frac{S}{G}\right) z + v_1(s)$$

$$(8) \longrightarrow \quad -\frac{d^2w}{ds^2} z + \frac{dv_1}{ds} + \frac{\mu}{z} = 0$$

dus

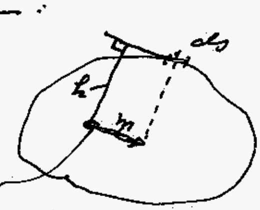
$$u = 2z \frac{d^2 w}{ds^2} - z \frac{dv_1}{ds}$$

Nog bepaald moeten worden $w(s)$ en $v_1(s)$

Van de verplaatsingen zijn geen randvoorwaarden te kiezen. We kunnen alleen de verplaatsing van de cilinder als star geheel uitsluiten. Willekeurige functies van $w(s)$ en $v_1(s)$ zijn echter beslist niet op te vatten als verplaatsingen als star lichaam. Voor een willekeurige doorsnede levert $v_1(s) =$ const b.v. geen verplaatsing als star lichaam.

We kunnen wel aantonen dat de aanname uit de torsietheorie voldoet.
Immers daar wordt aangenomen:

$$v = \alpha z\, h(s)$$
$$u = \alpha z\, m(s)$$



Dan volgt uit (9)

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \alpha h(s) = \frac{S}{g}$$

Integreren levert $\alpha . 2A = \frac{S}{g} \oint ds \rightarrow \alpha = \frac{S \oint ds}{2 A g}.$

Uit (9) volgt dan ook:

$$w = -\alpha \int_{s=0}^{s} h(s)\, ds + \frac{S}{g} \int_{0}^{s} ds$$

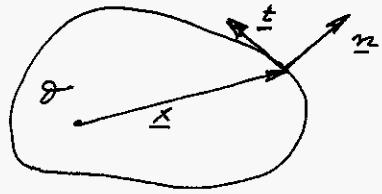
Aan (7) is dan automatisch voldaan

Uit (8) volgt dan:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{z} = 0$$

$$\frac{d\, h(s)}{ds} + \frac{m(s)}{z} = 0$$

We moeten nog bewijzen, dat aan deze gelijkheid voldaan is.



De contour wordt gegeven door:

$\underline{x} = \underline{x}(s)$ $\qquad$ s: booglengte

Voor de raakvector $\underline{t}$ geldt:

$$\underline{t} = \frac{d\underline{x}}{ds} = \mathring{\underline{x}}$$

Voor de normaal geldt:

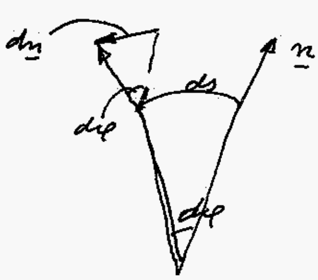
$$\underline{n} = -\frac{1}{r}\,\mathring{\mathring{\underline{x}}}$$

In deze notatie geldt:

$$h(s) = (\underline{x} \circ \underline{n})$$
$$m(s) = -(\underline{x} \cdot \underline{t})$$

en we moeten bewijzen: $\frac{dh}{ds} + \frac{m}{2} = 0$

$\frac{dh}{ds} = (\underline{x} \cdot \mathring{\underline{n}}) + (\underline{t} \cdot \underline{n}) = (\underline{x} \cdot \mathring{\underline{n}})$ $\quad$ want $\underline{t} \perp \underline{n}$



$$d\underline{n} = 1 . d\varphi . \underline{t} = \frac{ds}{2}\,\underline{t}$$

$$\frac{d\underline{n}}{ds} = \mathring{\underline{n}} = \frac{\underline{t}}{2}$$

dus $\frac{dh}{ds} = \frac{1}{2}(\underline{x} \cdot \underline{t})$ $\qquad$ Q.E.D

Hiermee is dus bewezen dat de Saint-Venant aanname voldoet aan de membraanvgl. Als de spanningen voorgeschreven zijn is het verplaatsingsveld niet eenduidig te bepalen. Dit is het gevolg van de aanname dat de schaal geen buigingsstijfheid heeft.

Substitueren we de aanname uit de Saint-Venant theorie, dan ~~kan~~ is voldaan aan de membraanvgl. In dit geval is voor de onbekende functies $w(s)$ en $v_1(s)$ te nemen:

$$v_1(s) \equiv 0$$

$$w(s) = -\alpha \int_{s=0}^{s} \mathcal{L}(s)\,ds + \frac{S}{G} \int_0^s ds$$

Wat gebeurt als we inplaats van de spanningen aan de eindvlakken de vervormingen voorschrijven?

Dan geldt:
$$T_2 = 0$$
$$S = f_1(s)$$
$$T_1 = -\frac{df_1}{ds} z + f_2(s)$$

Uit Hooke volgt:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E\delta}\left[-\frac{df_1}{ds} z + f_2(s)\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{z} = -\frac{\nu}{E\delta}\left[-\frac{df_1}{ds} z + f_2(s)\right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{f_1(s)}{G}$$

Randvwdn: $z = 0$ $\quad v \equiv 0$, $\quad u = 0$

$\qquad z = l$ $\quad v = \alpha l \mathcal{L}(s)$ $\quad u = \alpha l m(s)$

Voor v geldt:

$$v = \frac{f_1(s)}{G} z - \int_{z=0}^{z} \frac{\partial w}{\partial s} dz + f_3(s)$$

$$w = \frac{1}{E\delta}\left[-\frac{1}{2}\frac{df_1}{ds} z^2 + f_2(s) z + f_4(s)\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{z}{G}\frac{df_1}{ds} - \int_{z=0}^{z} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} dz + \frac{df_3}{ds}$$

$$= \frac{z}{G}\frac{df_1}{ds} - \frac{1}{E\delta}\int_{z=0}^{z}\left(-\frac{1}{2}\frac{d^3 f_1}{ds^3} z^2 + \frac{d^2 f_2}{ds^2} z + \frac{d^2 f_4}{ds^2}\right) dz + \frac{df_3}{ds}$$

$$= \frac{z}{G}\frac{df_1}{ds} + \frac{df_3}{ds} - \frac{1}{E\delta}\left[-\frac{1}{6}\frac{d^3 f_1}{ds^3} z^3 + \frac{1}{2}\frac{d^2 f_2}{ds^2} z^2 + \frac{d^2 f_4}{ds^2} z\right] =$$

Nu is u ook uit te drukken in f_1 t/m f_4.

De uitdrukking voor v luidt:

$$v = \frac{f_1(s)}{G} z + f_3(s) - \frac{1}{E\delta}\left\{\int_{0}^{z}\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2 f_1}{ds^2} z^2 + \frac{df_2}{ds}(s) z + \frac{df_4}{ds}(s)\right] dz\right\} \cancel{+f}$$

$$= \frac{f_1(s)}{G} z + f_3(s) - \frac{1}{E\delta}\left\{-\frac{1}{6}\frac{d^2 f_1}{ds^2} z^3 + \frac{1}{2}\frac{df_2}{ds} z^2 + \frac{df_4}{ds} z\right\}$$

$z = 0$, $v = 0$ $\longrightarrow$ $f_3(s) \equiv 0$
$z = l$ $\quad v = \alpha l h(s)$

$z = 0$, $u = 0$ $\longrightarrow$ $\nu f_2(s) + \frac{df_3}{ds} \equiv 0$ $\longrightarrow$ $f_2(s) \equiv 0$
$z = l$ $\quad u = \alpha l m(s)$

Uit de twee andere randvoorwaarden moeten $f_1(s)$ en $f_4(s)$ nog bepaald worden. We werken dit nu niet verder uit maar we verwachten dat aangetoond kan worden dat $f_1(s)$ constant is en dat $f_4(s)$ niet geheel te bepalen is.