

## Toepassingen van de elektrolytische trog

**Citation for published version (APA):**

Vermij, L. (1965). Toepassingen van de elektrolytische trog. *Elektrotechniek*, (11), 3-12.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1965

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

# Toepassingen van de elektrolytische trog

door L. VERMIJ<sup>1</sup>

## Summary

By means of electrolytic-tank-analogues a large variety of vector and scalar fields can be determined by direct measurement. This paper presents methods by which these fields may be surveyed, possible sources of error are indicated and methods are pointed out how to avoid them. An improved equivalent circuit is derived. Further two methods are discussed in detail by means of which the pattern vector fields may be found in the electrolytic tank. Some examples are presented. Finally results of a few potential problems are given, which were solved with an electrolytic-tank-analogue.

## 1. Inleiding

Het komt in de techniek regelmatig voor dat men geïnteresseerd is in het ruimtelijke verloop van vectorvelden of scalaire velden. Deze velden kunnen bv. zijn: elektrostatische velden, magnetische velden, stromingsvelden voor warmte-energie enz.

Het is dikwijls moeilijk een indruk van het verloop van het veld te krijgen door in de werkelijke configuratie metingen uit te voeren. Dit vindt zijn oorzaak eensdeels omdat de meting door lokale omstandigheden moeilijk kan worden uitgevoerd, andersdeels omdat de meting het veldverloop kan beïnvloeden.

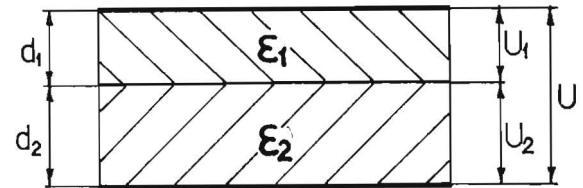
Een elektrolytische trog is een inrichting waarin een vector- of scalairveld analoog aan het te onderzoeken veld kan worden gecreëerd, zodanig dat het verloop van het veld door meting kan worden bepaald. Wij zullen ons in het navolgende beperken tot een beschrijving van het bepalen van elektrostatische velden met behulp van de elektrolytische trog, waarbij enkele punten die van belang zijn voor het onderzoek van het verloop van andere velden tevens aan de orde komen.

## 2. Het bepalen van elektrostatische velden met behulp van de elektrolytische trog

De elektrolytische trog bestaat in het algemeen uit een bak die hetzij van elektrisch isolerend materiaal is gemaakt, hetzij uit geleidend materiaal bestaat. Deze bak wordt gedeeltelijk gevuld met een geleidende vloeistof (meestal gewoon water). In deze vloeistof kunnen elektroden van uiteenlopende vormen en afmetingen worden geplaatst. Wordt tussen twee in de trog geplaatste elektroden een spanning aangelegd, dan zal er door de vloeistof een stroom gaan vloeien van de ene elektrode naar de andere. Er ontstaat in de vloeistof een stationair stromingsveld. De potentiaaloppervlakken in dit veld kunnen gemakkelijk worden afgetast met behulp van een sonde.

De bron van een elektrostatisch veld wordt steeds gevormd door een ladingsdichtheid  $\rho$ , die de oorzaak is van de kenmerkende vectoriële grootheden, nl. de elektrische veldsterkte  $E$  en de diëlektrische verplaatsing  $D$ . De beide laatste grootheden hangen samen volgens  $D = \epsilon E$ , waarin  $\epsilon$  de diëlektrische constante is.<sup>2</sup>

De bron van een stationair stromingsveld is steeds een ladingsverandering  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ , die de oorzaak is van de kenmerkende vectoriële grootheden, nl. de elektrische veldsterkte  $E$  en de stroomdicht-



Afb. 1 Condensator met twee diëlektrica

heid  $J$ . De beide laatste grootheden hangen samen volgens  $J = \sigma E$ , waarin  $\sigma$  de specifieke geleidbaarheid is.

Men kan bewijzen dat bij gelijke elektrodenconfiguraties het stationaire stromingsveld analoog is aan het elektrostatische veld [1] t/m [4].

Een analoog veldbeeld ontstaat in de trog als wij de diëlektrische constante  $\epsilon$  vervangen door een geleidbaarheidsconstante  $\sigma$  en als wij de statische lading  $\rho$  vervangen door een ladingsverandering  $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

Hoe een analoog veldbeeld in de trog kan worden verwezenlijkt zal aan de hand van de volgende eenvoudige voorbeelden worden toegelicht.

### 2.1. Tweedimensionale velden

Beschouw een vlakke condensator met twee diëlektrica met diëlektrische constanten  $\epsilon_1$  en  $\epsilon_2$  en dikte  $d_1$  en  $d_2$  (afb. 1). Wij laten de randeffecten buiten beschouwing en wij denken ons het veld alleen veranderlijk in de  $x$ -richting.

Er geldt:  $D_{1n} = D_{2n}$ , dus  $\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$ . Hierin zijn  $D_{1n}$  en  $D_{2n}$  de normaalcomponenten van de diëlektrische verplaatsing  $D$  in de media met  $\epsilon_1$ , resp.  $\epsilon_2$ .  $E_{1n}$  en  $E_{2n}$  zijn de normaalcomponenten van de elektrische veldsterkte  $E$  in deze media.

Verder geldt:  $U_1 = E_{1n}d_1$  en  $U_2 = E_{2n}d_2$ .  $U_1$  en  $U_2$  zijn de potentiaalverschillen over de media met resp.  $\epsilon_1$  en  $\epsilon_2$ .

Dus

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{E_{1n}d_1}{E_{2n}d_2} = \frac{E_{1n}d_1}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n}d_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} \quad (2.1)$$

De grootste veldsterkte heerst in het gebied met de kleinste  $\epsilon$ .

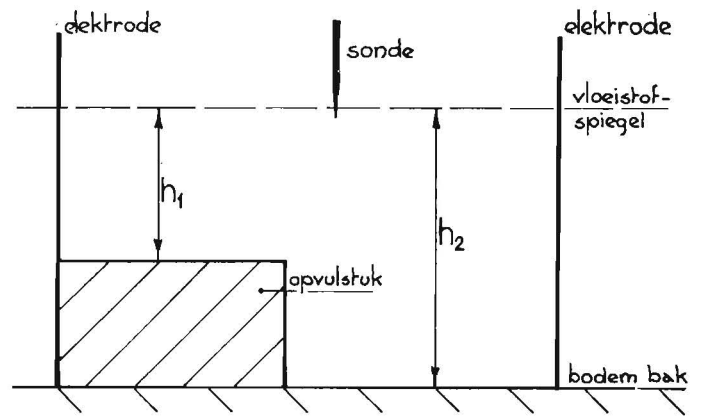
Denken wij ons nu in afb. 1 de diëlektrica vervangen door geleidende media. Dan geldt:

$$U_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 A_1} \cdot I \text{ en } U_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 A_2} \cdot I$$

waarin  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  de specifieke geleidbaarheden van de geleidende media 1 en 2 zijn en  $A_1$  en  $A_2$  de oppervlakken van de media loodrecht op de stroomrichting voorstellen. De stroom  $I$  is in beide gedeelten dezelfde, dus geldt:

<sup>1</sup> Groep Hoge Spanning & Hoge Stroom (groepsleider prof. dr. D. Th. J. ter Horst) van de Afdeling der Elektrotechniek, Technische Hogeschool Eindhoven.

<sup>2</sup>  $\epsilon$  kan worden voorgesteld door  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  waarin  $\epsilon_r$  de relatieve diëlektrische constante en  $\epsilon_0 = \frac{100}{637} \cdot 10^{-11}$  F/m in het MKS-stelsel.



Afb. 2 Trogmodel van een condensator met twee diëlektrica

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\sigma_2 A_2}{\sigma_1 A_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} \quad (2.2)$$

Indien wij de formules (2.1) en (2.2) met elkaar vergelijken, dan is duidelijk dat voor equivalentie moet gelden:

$$\frac{\sigma_2 A_2}{\sigma_1 A_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (2.3)$$

Dit kunnen wij op twee verschillende manieren bereiken nl.:

1. wij kunnen de geleidbaarheid van de twee gebieden verschillend kiezen en de oppervlakken constant. Dan is dus  $A_1 = A_2$  en er geldt:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (2.3.1)$$

2. wij kunnen de oppervlakken van de twee gebieden verschillend kiezen en de geleidbaarheid constant. Dan is dus  $\sigma_1 = \sigma_2$  en er geldt:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (2.3.2)$$

Media met verschillende geleidbaarheden  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  in de trog aanbrengen kan complicaties meebrengen. Hiervoor worden in de literatuur mogelijkheden aangegeven [3].

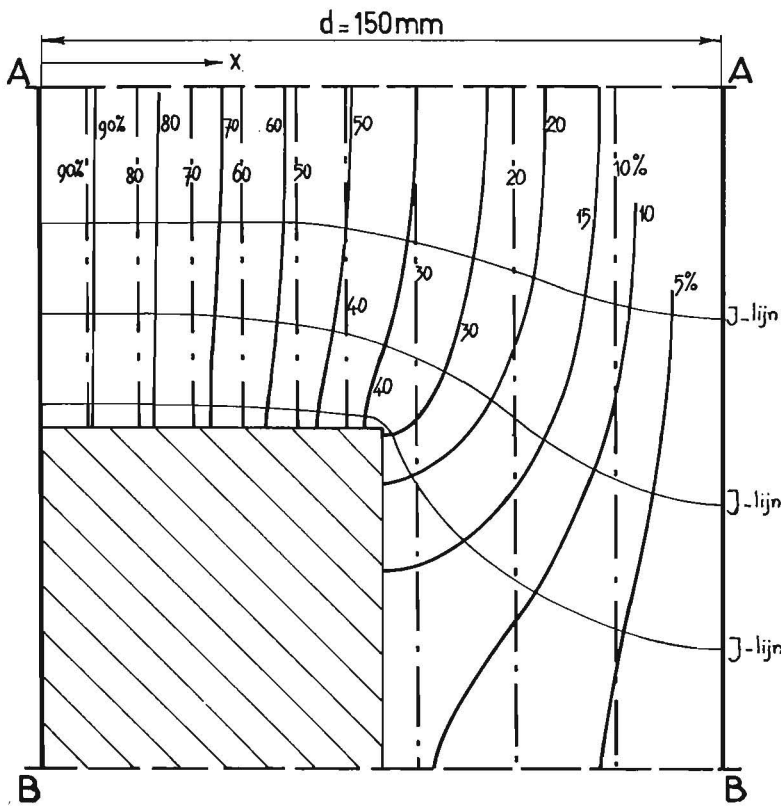
De meest eenvoudige en de meest gebruikte methode is het veranderen van de oppervlakte  $A$  [1] [3] [4]. Wij dienen het oppervlak  $A$  evenredig met  $\epsilon$  te veranderen, zoals de betrekking (2.3.2) aangeeft. Wij kunnen dit bewerkstelligen zoals aangegeven in afb. 2.

Er geldt bij constante breedte van het geleidende medium:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

De veldsterkte  $E$  verandert op het grensvlak van 2 diëlektrica discontinu volgens  $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$ . In de trog verandert echter  $J$  op het grensvlak niet discontinu, maar wij verkrijgen een verloop van de equipotentiaaloppervlakken als in afb. 3 door de getrokken lijnen is aangegeven.

Hoe het veldverloop als gevolg van de plotselinge stap in de bodem is, kunnen wij in de trog gemakkelijk bepalen. Daartoe plaatsen wij twee evenwijdige metalen platen AB in de bak (afb. 3). Aansluitend op één van deze platen leggen wij een vierkant blok perspex dat boven het wateroppervlak uitsteekt (in afb. 3 gearceerd). Langs de lijnen AA en BB zetten wij twee perspexplaten die eveneens boven het wateroppervlak uitsteken. De lijn BB representeert dan de bodem van de bak de lijn AA de vloeistofspiegel. De getrokken lijnen zijn in deze situatie de doorsnede van de equipotentiaalvlakken met het vlak van tekening (equipotentiaallijnen). Bij elke lijn is het percentage van de tussen de platen aangelegde spanning  $U$  vermeld. De streep-stiplijnen in afb. 3 geven de equipotentiaallijnen weer indien  $J$  wel discontinu op het grensvlak verandert. Wij meten de potentiaalverdeling aan de vloeistofspiegel. Langs de lijn AA gaande, wordt direct uit afb. 3 zichtbaar dat in

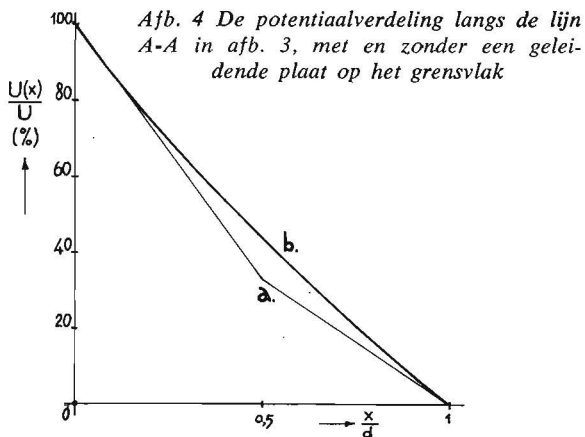


Afb. 3 Metingen in een model met opvulstuk volgens afb. 2

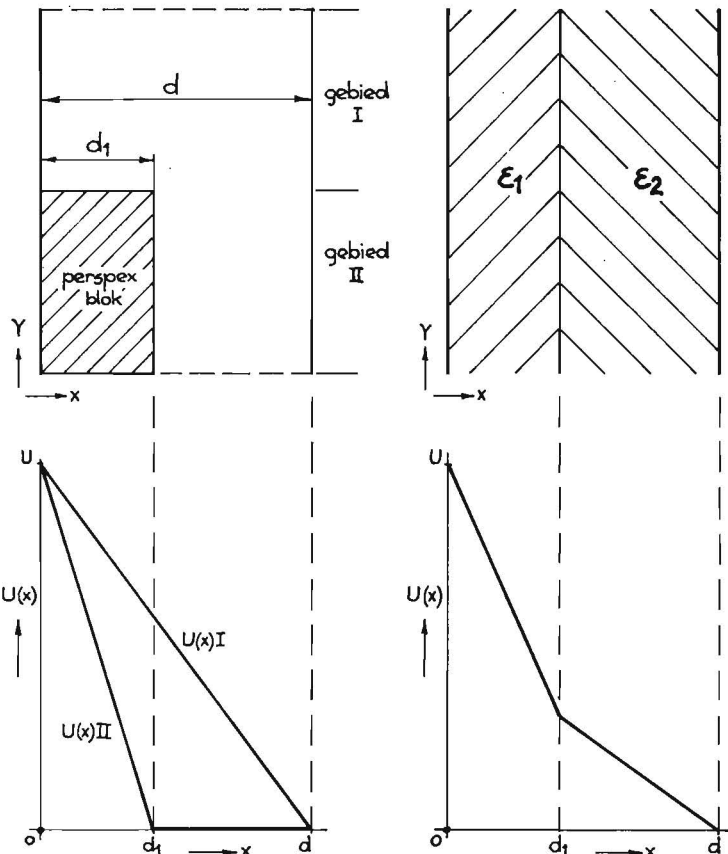
de potentiaalverdeling bij wel en niet discontinu veranderen van  $J$  aanmerkelijke verschillen optreden.

Wanneer wij dus met de opstelling van afb. 2 een condensator met twee diëlektrica willen representeren, dan maken wij bij de bepaling van de potentiaalverdeling belangrijke fouten. Dit wordt duidelijk geïllustreerd in afb. 4, waar de potentiaalverdeling langs de lijn AA bij wel en niet discontinu veranderen van  $J$  is uitgezet.

Teneinde deze fouten te ondervangen kunnen wij als volgt tewerk gaan. Het potentiaalverloop  $U(x)$  in gebied I en in gebied II is in afb. 5 weergegeven door  $U(x) I$  en  $U(x) II$ . In gebied II van afb. 5 staat vrijwel het gehele spanningsverschil over het perspexblok dat wil zeggen over de afstand  $O-d_1$ . In gebied I daarentegen neemt de spanning lineair af over de afstand  $O-d$ . De twee gebieden I en II brengen wij in de trog bij elkaar en zo ontstaat de configuratie van afb. 3. Uit afb. 5 wordt duidelijk dat er in deze configuratie overal in de  $y$ -richting een spanningsgradiënt zal bestaan. Beschouwen wij echter de potentiaalverdeling in een condensator met twee diëlektrica (afb. 6) dan zien wij dat in de  $y$ -richting nergens een spanningsgradiënt bestaat. Indien wij in de trog door een „stap” in de bodem een goede representatie willen maken van een condensator met twee diëlektrica, dan moet de spanningsgradiënt in de  $y$ -richting verdwijnen. Dit betekent dat in de  $y$ -richting equipotenti-



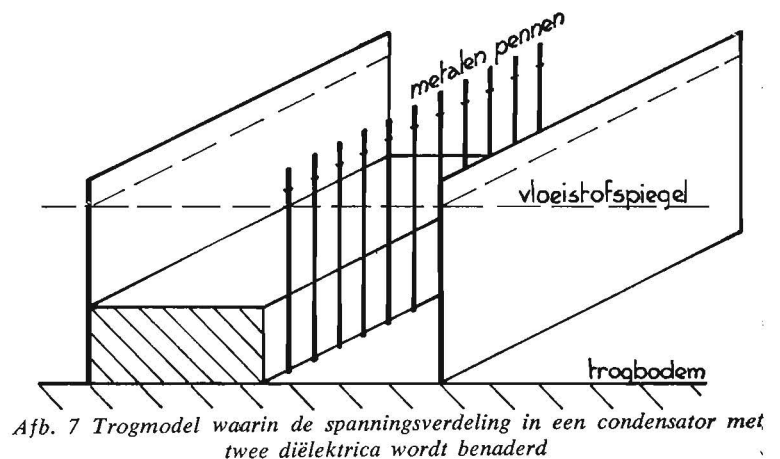
Afb. 4 De potentiaalverdeling langs de lijn A-A in afb. 3, met en zonder een geleidende plaat op het grensvlak



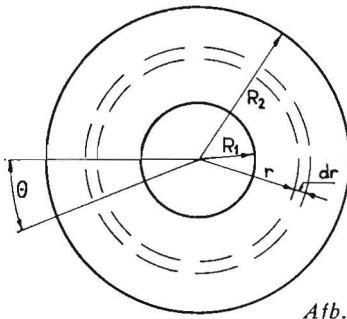
Afb. 5 Spanningsverdeling in een trogmodel waarmee een condensator met twee diëlektrica wordt weergegeven

Afb. 6 Spanningsverdeling in een condensator met twee diëlektrica

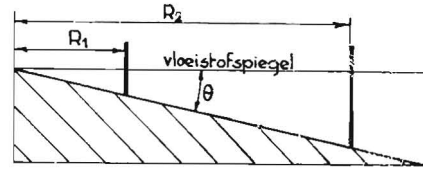
aalvlakken (dus geleidende platen) moeten worden aangebracht. Brengen wij in afb. 5 een metalen plaat aan in de  $y$ -richting op die plaats waar de spanningsgradiënt in de  $y$ -richting het grootst is, dus op het grensvlak (ter plaatse  $d_1$ ) dan bestaat nergens meer een spanningsgradiënt in de  $y$ -richting, en de stroomdichtheid  $J$  verandert op het grensvlak dan discontinu in overeenstemming met het geval van een condensator met twee diëlektrica. Dit wordt geïllustreerd in afb. 3. De streep-stippotentiaallijnen zijn nl. opgenomen terwijl er een metalen plaat tegen het perspexblok was geplaatst evenwijdig aan de AB-lijnen. Gaande langs de lijn AA (het vloeistofoppervlak) is nu de potentiaalverdeling in overeenstemming met de verwachte verdeling. Door het aanbrengen van een metalen plaat op het grensvlak ontstaat ook in de  $z$ -richting een equipotentiaalvlak. Dit is bij de configuratie volgens afb. 3 geen bezwaar; in bijna alle andere gevallen is dit echter ongewenst. Wij brengen dan dunne metalen pennen in de  $y$ -richting aan op het grensvlak (zie afb. 7). Deze pennen moeten zo dicht mogelijk bij elkaar worden geplaatst, maar ze mogen elkaar niet raken. Uiteraard moeten deze pennen zo dun mogelijk zijn.



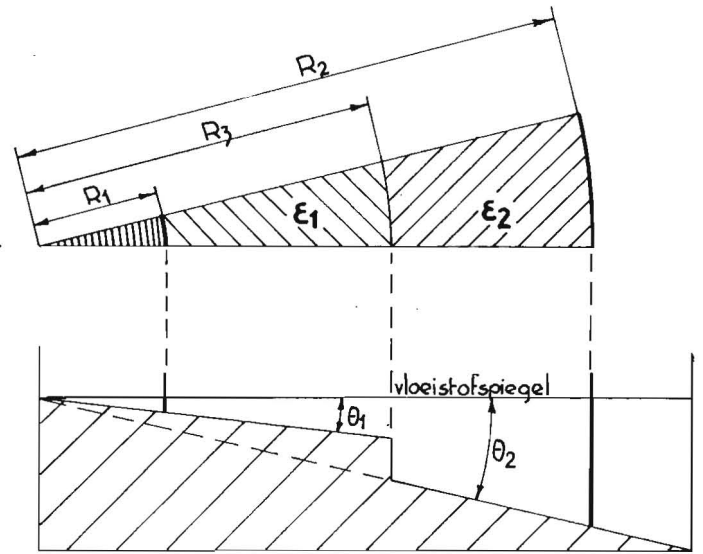
Afb. 7 Trogmodel waarin de spanningsverdeling in een condensator met twee diëlektrica wordt benaderd



Afb. 8 Cilindercondensator



Afb. 9 Trogmodel van een cilindercondensator



Afb. 10 Segment van een cilindercondensator met twee diëlektrica en het trogmodel hiervan

## 2.2. Driedimensionale velden

In het algemeen eist de meting van de potentiaalverdeling in driedimensionale velden in de trog een bijzonder gecompliceerde opstelling. Er zijn enkele gevallen waarbij de meting van deze velden op eenvoudige wijze kan geschieden, namelijk van velden waarin cilindersymmetrie of bolsymmetrie heerst. Dit zijn veelal de gevallen die in de praktijk voorkomen.

Beschouw het elektrische stromingsveld tussen twee concentrische cilinders. Tussen deze twee cilinders denken wij ons een cilinder-element met stralen  $r$  en  $r + dr$  (zie afb. 8). De specifieke geleidingscoëfficiënt zij  $\sigma$ .

Wanneer  $dU$  het spanningsverschil over het beschouwde cilinder-element in radiale richting is en  $dR$  de weerstand per eenheid van lengte in radiale richting van dit cilinder-element,  $I$  de totale door dit cilinder-element gaande stroom, dan is  $dU = IdR$ . De stroom  $I$  is geen functie van  $r$ .

Voorts is:

$$dR = \frac{dr}{2\pi r \sigma}$$

of:

$$dU = \frac{I}{2\pi \sigma} \cdot \frac{dr}{r}$$

of:

$$U(r) = \frac{I}{2\pi \sigma} \int_{R_1}^r \frac{dt}{t} = \frac{I}{2\pi \sigma} \lg \left( \frac{r}{R_1} \right) \quad (2.4)$$

In plaats van de hoek  $2\pi$  rad. beschouwen wij nu de kleine hoek  $\theta$  en wij noemen de stroom door het door deze hoek ingesloten oppervlak  $I_\theta$ . De grootte van dit oppervlak van de cilinder is per lengte-eenheid  $r\theta$ . Dan geldt voor  $U(r)$ :

$$U(r) = \frac{I_\theta}{\theta \cdot \sigma} \cdot \lg \left( \frac{r}{R_1} \right) \quad (2.5)$$

Het elektrostatiche veld tussen twee concentrische cilinders wordt gegeven door:

$$U(r) = -\frac{Q}{2\pi \epsilon} \lg \left( \frac{r}{R_1} \right) \quad (2.6)$$

Beschouwen wij echter de diëlektrische verplaatsing door een oppervlak, ingesloten door een omtrekshoek  $\theta$ , dan volgt, in analogie met het stromingsveld:

$$U(r) = -\frac{Q_\theta}{\theta \cdot \epsilon} \lg \left( \frac{r}{R_1} \right) \quad (2.7)$$

Ook hier vinden wij uiteraard analoge uitdrukkingen voor het stromingsveld en het elektrostatiche veld.

Het veldbeeld van zo'n „segment” is eenvoudig in de trog te bepalen met behulp van een hellende bodem (zie afb. 9).

Indien in een condensator twee diëlektrica worden aangebracht met verschillende diëlektrische constanten  $\epsilon_1$  en  $\epsilon_2$  (zie afb. 10), dan kan deze situatie in de trog worden weergegeven door op het grensvlak de hoek te wijzigen overeenkomstig de verandering in  $\epsilon$

(zie afb. 10). Voor het stromingsveld in de trog geldt voor dit geval: indien  $R_1 < r < R_3$ :

$$U(r) = \frac{I}{(\sigma\theta)_1} \lg \left( \frac{r}{R_1} \right)$$

indien  $R_3 < r < R_2$ :

$$U(r) = I \left[ \frac{1}{(\sigma\theta)_1} \lg \left( \frac{R_3}{R_1} \right) + \frac{1}{(\sigma\theta)_2} \lg \left( \frac{r}{R_3} \right) \right]$$

Voor het elektrostatiche veld gelden gelijke formules,  $I$  wordt dan echter vervangen door  $-Q$ ,  $(\sigma\theta)_1$  door  $(\epsilon\theta)_1$  en  $(\sigma\theta)_2$  door  $(\epsilon\theta)_2$ .

Als wij veronderstellen dat in de trog  $\sigma$  constant blijft, dan kan een analoog veldbeeld in de trog dus worden verkregen mits is voldaan aan:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (2.8)$$

Op het grensvlak ontstaat dus weer een sprong in de bodem (afb. 10), evenals bij het tweedimensionale geval (afb. 3). Ook hier moeten metalen pennen ter plaatse van de sprong in de bodem worden aangebracht.

Uit afb. 10 blijkt dat het trogmodel niet geheel nauwkeurig het cilindersegment representeert. (De kromming van het cilinderoppervlak verdwijnt in de trog).

Draaien wij echter over een hoek (bv.  $\theta_1$  in afb. 10) dan veranderen wel de afstanden  $R_1$ ,  $R_2$  en  $R_3$ , maar de verhoudingen tussen deze afstanden blijven ongewijzigd. In de potentiaalverdeling kan dus niets veranderen en er ontstaat geen meetfout door het verdwijnen van de kromming van het cilinderoppervlak.<sup>3</sup>

Op dezelfde wijze als voor cilindersymmetrische velden kunnen wij voor het elektrische stromingsveld tussen twee concentrische bollen afleiden:

$$U(r) = \int_{R_1}^r IdR = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_{R_1}^r \frac{dt}{t^2} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.9)$$

Hierin is:

$R_1$  de straal van de binnenbol;

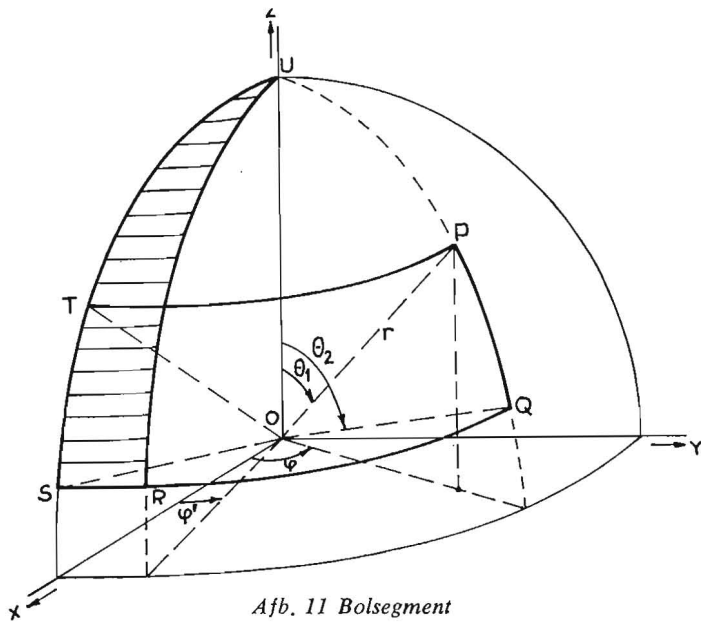
$I$  de totale van de binnenbol naar de buitenbol vloeiende stroom;

$\sigma$  de specifieke geleidingscoëfficiënt;

$r$  de straal op een willekeurige plaats tussen binnen- en buitenbol.

Beschouw het bolsegment PQST (zie afb. 11). Een element  $dA$  van het oppervlak van de bol met straal  $r$  is:

<sup>3</sup> Enkele auteurs [3] [4] menen dat dit wel het geval is.



Afb. 11 Bolsegment

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$$

Wij kunnen nu integreren van  $0 \rightarrow \varphi$  en van  $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ , en wij verkrijgen de oppervlakte van het segment PQST. Wij noemen dit  $A_\theta$ .

$$A_\theta = r^2 \int_0^\varphi d\Phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \vartheta \, d\vartheta = -r^2 \varphi \cos \vartheta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$A_\theta = r^2 \varphi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

De stroom door dit segment, komend uit de bron O en isotroop stromende door het boloppervlak is  $I_{\varphi, \theta}$ . Deze stroom is bepaald door het spanningsverschil tussen O en het boloppervlak  $U_r$ , en de weerstand  $R_o$ .

$$R_o = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{A}$$

dus: 
$$R_o = \frac{1}{\sigma} \int_0^r \frac{dt}{t^2 \varphi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}$$

Wij moeten de integratiegrens van  $0 \rightarrow r$  verschuiven teneinde geen divergente integralen te krijgen.

$$\begin{aligned} R_o &= \frac{1}{\sigma \varphi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} \int_{R_1}^r \frac{dt}{t^2} = \\ &= \frac{1}{\sigma \varphi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} \cdot -\frac{1}{t} \Big|_{R_1}^r = \\ &= \frac{1}{\sigma \varphi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right] \end{aligned}$$

Dus:

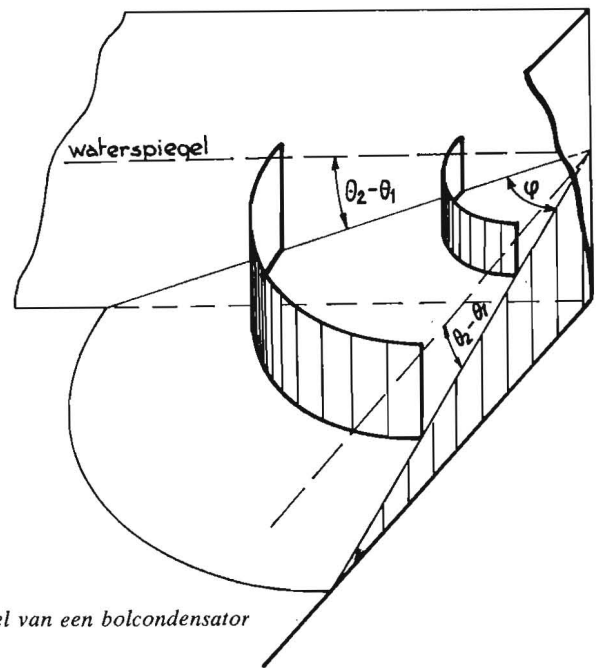
$$U(r) = I_{\varphi, \theta} \cdot R_o = \frac{I_{\varphi, \theta}}{\sigma \varphi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.10)$$

Voor een condensator bestaande uit twee concentrische bollen geldt een analoge beschouwing. Hiervoor is:

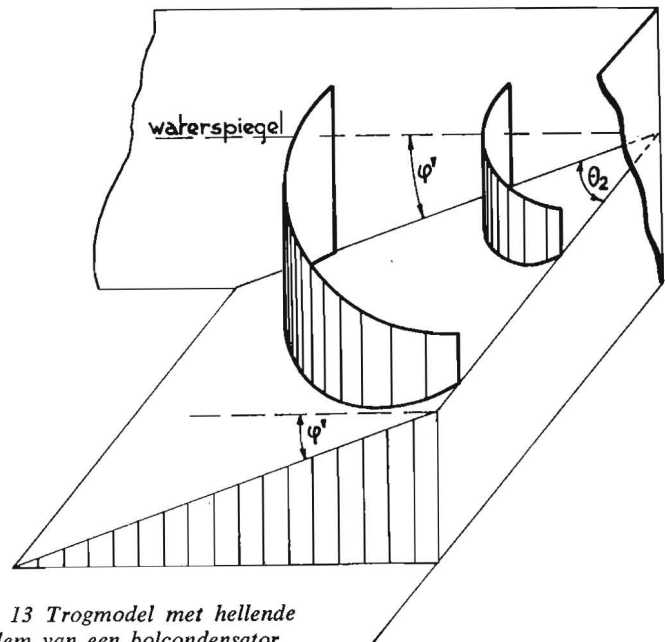
$$U(r) = -\frac{Q_{\varphi, \theta}}{\epsilon \varphi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.11)$$

Ook hier vinden wij uiteraard analoge uitdrukkingen voor het stromingsveld en het elektrostatische veld.

De potentiaalverdeling  $U(r)$  binnen een bolsegment is in de trog



Afb. 12 Trogmodel van een bolcondensator



Afb. 13 Trogmodel met hellende bodem van een bolcondensator

gemakkelijk te bepalen. Hierbij is het niet van belang hoe groot de hoeken  $\varphi$ ,  $\theta_1$  en  $\theta_2$  worden gekozen.

Afb. 12 geeft een afbeelding van een trogmodel voor een condensator opgebouwd uit twee concentrische bollen.

Het is echter ook mogelijk een bolcondensator in de trog af te beelden met behulp van een hellende bodem. Denken wij ons  $\varphi$  in afb. 11 nl. veel kleiner en wel  $\varphi'$ , dan kunnen wij beschouwen het segment USR met hoek  $\varphi'$ . Dit segment is in afb. 11 gearceerd aangegeven.

Wij integreren nu van  $0 \rightarrow \varphi'$  en van  $0 \rightarrow \theta_2$ . De oppervlakte van dit segment is dus:

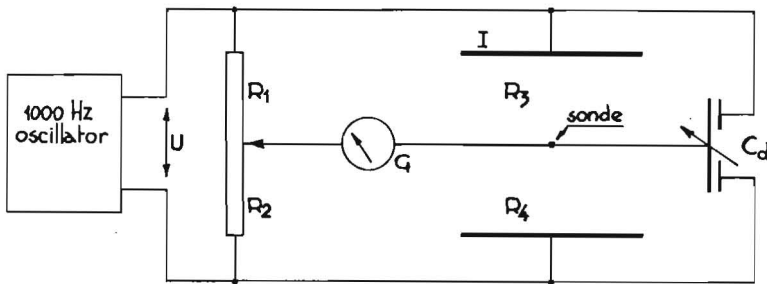
$$A = r^2 \varphi' (1 - \cos \theta_2)$$

en ook in dit geval vinden wij uiteraard analoge uitdrukkingen voor het stromingsveld en het elektrostatische veld.

In de richting van  $\theta$  gaande is de hoek  $\varphi'$  in dit bolsegment constant. Leggen wij een dergelijk bolsegment met het vlak OUR (zie afb. 11) op de bodem van de trog, dan verkrijgen wij dus een trogmodel van een bolcondensator met een hellende bodem. In afb. 13 is een trogmodel met hellende bodem van een condensator opgebouwd uit twee concentrische bollen weergegeven.

Om trogmodellen van bolsymmetrische velden te maken staan ons dus twee varianten ter beschikking, zoals weergegeven in de





Afb. 14 Schakelschema van de meetopstelling voor de bepaling van equipotentiaallijnen in de trog, I en II: elektroden, R3 en R4: vloeistofweerstand, G: galvanometer, Cd: compensatiecapaciteit

afbeeldingen 12 en 13. Het hangt van de aard van het te onderzoeken object af welke variant het beste kan worden toegepast.

### 3. Detectie

#### 3.1. De meetopstelling

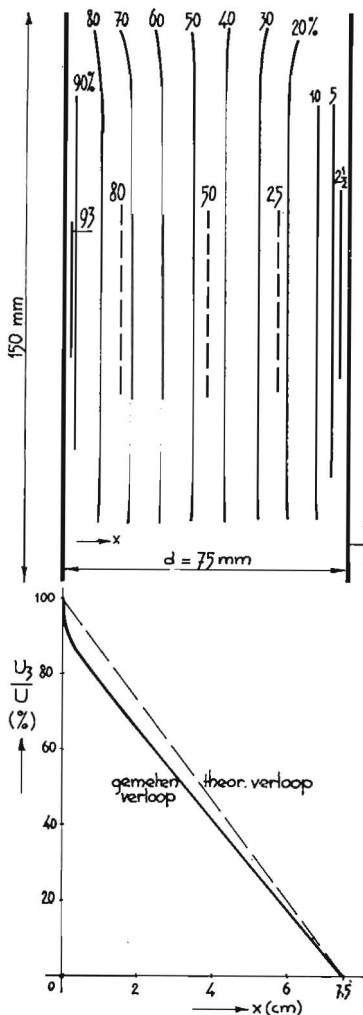
De bepaling van de equipotentiaallijnen in de trog gebeurt in principe in de schakeling volgens afb. 14. Tussen elektrode I en de sonde wordt een spanning \$U\_1\$ over een vloeistofimpedantie \$R\_3\$ gelegd, tussen elektrode II en de sonde een spanning \$U\_2\$ over een vloeistofimpedantie \$R\_4\$.

Wanneer de vloeistofimpedanties weerstanden zijn zal, in het geval dat de galvanometer \$G\$ stroomloos is, gelden:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U$$

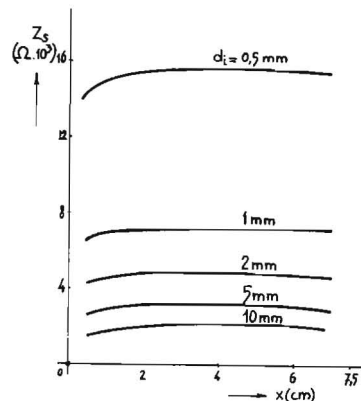
$$\frac{U_1}{U} = 100 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (3.1)$$

In (3.1) is \$U\_1\$ in procenten van \$U\$ uitgedrukt. Op deze wijze zijn dus „procentlijnen” te bepalen.

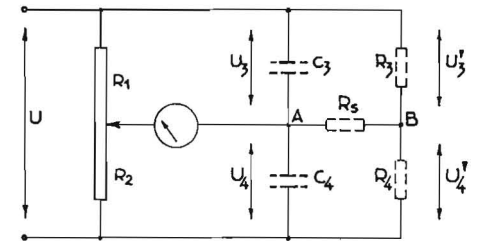


Links boven:  
Afb. 15 Gemeten equipotentiaallijnen in een vlakke condensator bij verschillende insteekdiepten van de sonde; waterhoogte: ca. 40 mm, elektroden: messing 1 mm dik, sonde: verzilverde pen

Links onder:  
Afb. 16 Potentiaalverdelingen in een vlakke condensator, bij verschillende insteekdiepten van de sonde



Afb. 17 De impedantie \$Z\_s\$, gemeten tussen sonde en één elektrode in de configuratie volgens afb. 15. De insteekdiepte \$d\_i\$ is parameter; \$Z\_s\$ is gemeten bij een frequentie van 1000 Hz



Afb. 18 Vervangingschema van de meetopstelling volgens afb. 14, zonder de compensatiecapaciteit \$C\_d\$

#### 3.2. Oorzaken van fouten bij de detectie

Indien wij in de meetopstelling van afb. 14 de compensatiecapaciteit \$C\_d\$ verwijderen en wij bepalen dan de potentiaalverdeling tussen twee vlakke platen (afb. 15) dan kunnen afwijkingen ten opzichte van de theoretisch bekende potentiaalverdeling worden verkregen. De grootte van deze afwijkingen wordt sterk beïnvloed door de insteekdiepte van de sonde in het water. De getrokken lijnen in afb. 15 zijn bepaald, terwijl de sonde ca. 0,5 mm in het water was gestoken; de gestippelde equipotentiaallijnen zijn daarentegen opgenomen bij een insteekdiepte van de sonde van ca. 2 mm.

In afb. 16 is het spanningsverloop weergegeven dat werd gemeten bij een insteekdiepte van de sonde van ca. 0,5 mm (deze grafiek is afgeleid uit afb. 15). In afb. 16 is (gestippeld) het theoretisch te verwachten verloop getekend. Wij zien uit deze afbeeldingen dat de afwijking ten opzichte van het theoretisch verloop groot is bij kleine insteekdiepte. Voor deze afwijkingen zullen wij trachten een mogelijke oorzaak aan te geven.

De sonde heeft een bepaalde capaciteit ten opzichte van de elektroden. Deze capaciteit is voor de configuratie volgens afb. 15 van de orde van 100–500 pF (voor water geldt \$\epsilon\_r = 80\$). Voorts is de overgangswaerstand sonde-water in het geval de insteekdiepte klein is, niet te verwaarlozen. Afb. 17 geeft hiervan een bevestiging. Hierin is uitgezet de impedantie \$Z\_s\$, die met behulp van de stroomspanningsmethode bij een frequentie van 1000 Hz is gemeten tussen de sonde en één elektrode, als functie van de afstand \$x\$ tot die elektrode, met de insteekdiepte \$d\_i\$ als parameter. Deze impedantie bevat ook de capaciteit van de sonde ten opzichte van de elektrode; deze capaciteit vertegenwoordigt echter bij 1000 Hz een impedantie van ca. 1 M\$\Omega\$, hetgeen belangrijk groter is dan de gemeten impedantie \$Z\_s\$.

Opvallend is dat bij een bepaalde insteekdiepte de impedantie \$Z\_s\$ vrijwel onafhankelijk is van de afstand \$x\$. Dit feit en het feit dat de impedantie \$Z\_s\$ aanvankelijk snel afneemt bij vergroting van de insteekdiepte (zie afb. 17) rechtvaardigen de veronderstelling dat de overgangswaerstand sonde-water bij kleine insteekdiepten niet te verwaarlozen is.

Indien wij rekening houden met de capaciteiten tussen sonde en elektroden en met de overgangswaerstand sonde-water, verkrijgen wij voor de meetopstelling het schema van afb. 18. Wij stellen de brug in op de spanningsverdeling \$U\_3/U\$. Wij zijn echter geïnteresseerd in de spanningsverdeling \$U'\_3/U\$ en deze spanningsverhouding zal in het algemeen anders zijn dan de spanningsverhouding \$U\_3/U\$. De verhouding van de capaciteiten \$C\_3\$ en \$C\_4\$ (zie afb. 18) zal, op een willekeurige plaats van de sonde tussen de elektroden, immers in het algemeen anders zijn dan de verhouding van de weerstanden \$R\_3\$ en \$R\_4\$. Dit betekent dat over de weerstand \$R\_s\$ een spanningsverschil aanwezig is. Hierdoor zal er een vereffeningsstroom door \$R\_s\$ gaan vloeien. De grootte van deze stroom wordt echter voornamelijk bepaald door de grootte van de capaciteit \$C\_3\$ of \$C\_4\$, aangezien deze capaciteiten in het stroomcircuit veruit de grootste impedantie vertegenwoordigen. (De vloeistofweerstand \$R\_3\$ en \$R\_4\$ zijn van de orde van 1 k\$\Omega\$). Deze vereffeningsstroom zal zeer klein zijn (ca. 10–30 \$\mu\$A). Indien \$R\_s\$ echter groot is, wat het geval is bij kleine

insteekdiepte van de sonde, zal over  $R_s$  een niet zeer klein spanningsverschil komen te staan. Het gevolg is, dat  $U_3/U$  ongelijk is aan  $U'_3/u$ .

Wordt de sonde dieper in de vloeistof gestoken, dan wordt  $R_s$  kleiner. De spanningsval over  $R_s$  wordt dus kleiner en de punten A en B (zie afb. 18) worden ongeveer equipotentiaalpunten. Dan geldt dus wel met goede benadering  $U_3/U = U'_3/U$ .

De meetfouten als gevolg van trogcapaciteiten en overgangswaerstand sonde-water kunnen worden geëlimineerd door een compensatiecapaciteit  $C_d$  aan de schakeling toe te voegen, zoals in afb. 14 is aangegeven. Deze  $C_d$  wordt gevormd door twee variabele condensatoren die met behulp van tandwielen gezamenlijk door één knop worden aangedreven. Wordt de ene condensator vergroot, dan wordt de andere verkleind. Met deze compensatiecapaciteit kan de verhouding van de capaciteiten  $C_3$  en  $C_4$  (afb. 18) gelijk worden gemaakt aan de verhouding van de weerstanden  $R_3$  en  $R_4$ .

Met de opstelling van afb. 14 had de insteekdiepte van de sonde geen meetbare invloed meer op de ligging van de potentiaallijnen. Ook was de potentiaalverdeling in de opstelling van afb. 15 nauwkeurig gelijk aan de theoretisch verwachte.

Enkele auteurs geven compensatiecapaciteiten aan, die parallel aan de potentiometerweerstand  $R_1$  en  $R_2$  zijn geschakeld (zie bv. [4] blz. 149). Hiermee wordt de fout die ontstaat door de invloed van de trogcapaciteiten in samenwerking met de overgangswaerstand sonde-water echter niet gecompenseerd.

In de literatuur vindt men dat het elektrodemateriaal en het materiaal van de sonde van invloed is op de meetnauwkeurigheid (zie [2] blz. 922, [3] blz. 172, [4] blz. 150).

In het door ons uitgevoerde onderzoek werd met sonden gewerkt die waren gemaakt van hetzij messing, zilver, platina, grafiet en met elektroden van hetzij messing, gewalst plaatstaal, aluminium en verzilverd messing. De gebruikte materialen messing, plaatstaal en aluminium waren van normale handelskwaliteit. De oppervlakken werden steeds geschuurd en gereinigd. Als elektrolyt werd steeds gewoon water gebruikt zonder enige toevoeging. Enige invloed van de gebruikte materialen op de nauwkeurigheid van de resultaten kon niet worden geconstateerd.

### 3.3. Andere fouten

De trogwanden geven aanleiding tot een verstoring van het veldbeeld van een in de trog geplaatst model. Wij kunnen deze verstoring bestuderen door het model gespiegeld te denken op de trogwand. Dat wil zeggen, een stroombron tegenover een isolerende wand (trogwand), op een afstand  $d$  hiervan geplaatst, geeft hetzelfde veldbeeld als twee stroombronnen van hetzelfde teken, die op een afstand  $2d$  van elkaar zijn geplaatst. In de literatuur (zie [2] blz. 918) wordt een methode aangegeven om de invloed van de trogwanden te elimineren.

Indien echter de dimensionering van het model en de plaats van het model in de trog goed worden gekozen, dan is de invloed van de trogwanden op de verlangde meetresultaten sterk te reduceren. In die gevallen waarin wij zijn geïnteresseerd in het veldverloop tussen elektroden is de invloed van de bakwand niet van praktisch belang. Bij modellen met een stap in de bodem en bij modellen met een hellende bodem is de waterhoogte relevant. De nauwkeurige bepaling van de diepte van het water is niet eenvoudig, doordat een meniscus optreedt. Staat de trogbodem niet horizontaal, dan introduceert men een min of meer hellende bodem die aanleiding kan geven tot meetfouten.

## 4. De meting van de veldlijnen

Bij zeer veel problemen is vooral het verloop van de equipotentiaallijnen belangrijk, dus het verloop van een scalaire grootte. In enkele gevallen is echter het verloop van de veldlijnen (E-lijnen,

H-lijnen), dus van een vectoriële grootte, belangrijk. Een vectoriële grootte is bepaald door twee grootheden, de scalaire grootte en de richting. Het verloop van de veldlijnen levert alleen de richting van de vectoriële grootte. De scalaire grootte zal moeten volgen uit de ligging van de equipotentiaallijnen.

Indien wij het verloop van een vectorgrootte wensen te weten, dan zullen wij dus zowel de veldlijnen als de equipotentiaallijnen moeten bepalen.

Om in de trog het verloop van een vectoriële grootte te leren kennen, staan ons twee varianten ten dienste en wel de methode met twee modellen of de methode met twee sondes.

### 4.1. De methode met twee modellen

De equipotentiaallijnen en veldlijnen staan loodrecht op elkaar. Het is echter moeilijk om in een afbeelding, waarin een aantal equipotentiaallijnen staan getekend, op nauwkeurige wijze de veldlijnen te construeren.

Wij kunnen van het model, waarin de equipotentiaallijnen zijn opgenomen een invers model maken, waarin wij de veldlijnen kunnen meten. Dit komt neer op een inversie van de randvoorwaarden van het te onderzoeken probleem. Wij vervangen geleidende platen door isolerende platen, en isolerende wanden of symmetrievlakken door geleidende platen.

De eis van het inverteren van de randvoorwaarden geeft tevens aan welke beperkingen deze methode heeft: nl. het moet mogelijk zijn het werkelijke model te vervangen door een geïnverteerd model. Wanneer het model geheel is omsloten door metalen wanden en isolerende wanden kunnen wij altijd een geïnverteerd model maken door de geleidende en de isolerende wanden te verwisselen. In het geval er alleen metalen wanden (elektroden) aanwezig zijn en geen isolerende wanden, kunnen wij alleen een geïnverteerd model maken indien er symmetrie-assen bestaan.

In de onderstaande voorbeelden is een nadere toelichting gegeven.

#### 4.1.1. HET VELD OM TWEE PARALLELE STROOMDRADEN

Hiervan geven de afb. 19 en 20 een illustratie. Het werkelijke model, afb. 19, is doorgesneden gedacht over de lijn AA. Dit is een lijn van symmetrie. In het inverse model, afb. 20, zijn op deze lijn metalen platen geplaatst (1, 2 en 3). Wij moeten in het inverse model een potentiaalverschil opbouwen tussen punten die in het werkelijke model equipotentiaalpunten waren. Voorts moeten in het inverse model equipotentiaalvlakken worden aangebracht, daar waar in het werkelijke model de grootste spanningsgradiënt bestaat. Wij kunnen dit bereiken door metalen platen langs de lijn AA aan te brengen en tussen deze platen openingen te laten op die plaatsen waar zich in het werkelijke model de pennen bevinden. Dit wordt weergegeven in afb. 20.

Bij de gegeven polariteit van de pennen in afb. 19 wordt nu tussen de platen 1 en 3 van afb. 20 een spanningsverschil aangelegd. Plaat 2 moet zwevend zijn; deze dient slechts om een equipotentiaalvlak op de gewenste plaats aan te brengen.

Indien in afb. 19 tussen de pennen een spanningsverschil zou staan, dan zouden de platen 1, 2, 3 in afb. 20 resp. +, —, + moeten zijn.

#### 4.1.2. HET VELD AAN DE RAND VAN TWEE DIËLEKTRICA

Op een grensvlak tussen twee diëlektrica met diëlektrische constanten  $\epsilon_{r_1}$  en  $\epsilon_{r_2}$  geldt (zie afb. 21):

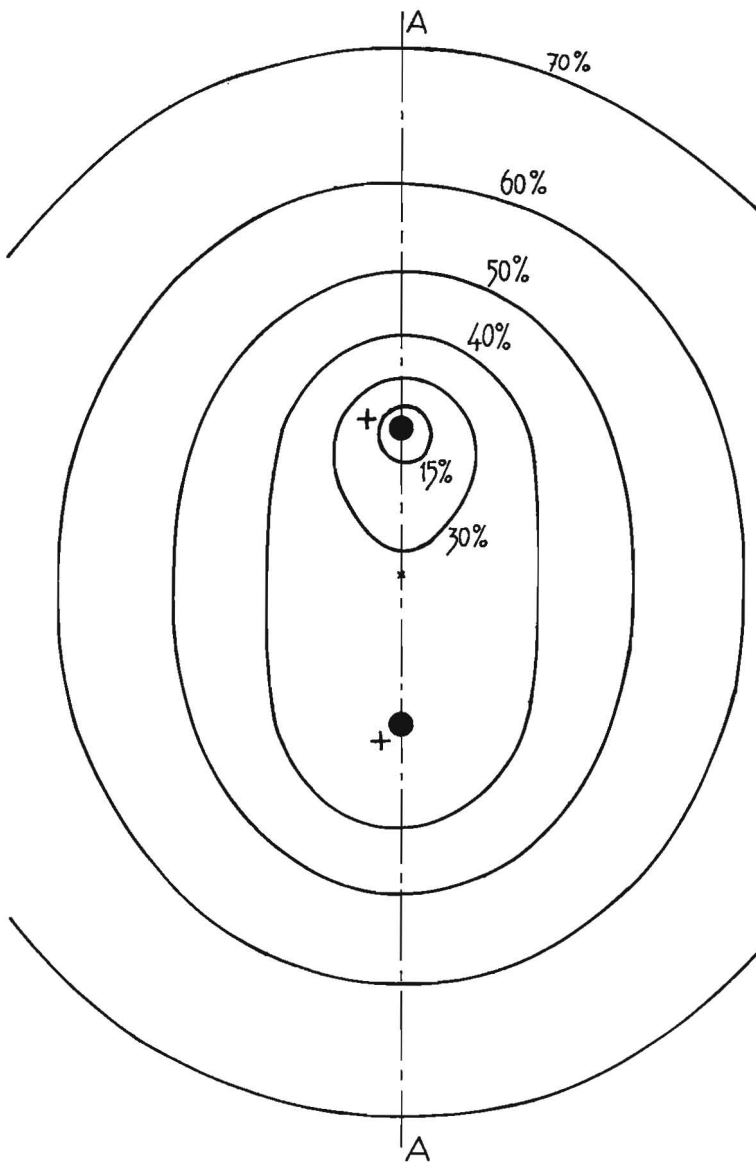
$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_2}}$$

In afb. 21 wordt  $D_1$  naar de normaal toegebogen:

$$\alpha_1 > \alpha_2, \text{ dus ook } \epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}.$$

Indien in een invers model een veldbeeld zal ontstaan dat lood-





Afb. 19 Gemeten equipotentiaallijnen rond twee geleiders van gelijke polariteit; diameter verzilverde pennen: 5 mm, diameter buitenring: 600 mm, afstand hart op hart van de pennen: 65 mm

recht staat op het oorspronkelijke veldbeeld dan moeten wij op het grensvlak ervoor zorgen dat  $D_1' \perp D_1$  en  $D_2' \perp D_2$  staat, waarin  $D_1'$  en  $D_2'$  voor het inverse model gelden.

Nu wordt vector  $D_2'$  van de normaal afgebogen:

$$\alpha_2' > \alpha_1', \text{ dus } \epsilon_{r_2}' > \epsilon_{r_1}'$$

$$\alpha_1' = 90^\circ - \alpha_1 \text{ en } \alpha_2' = 90^\circ - \alpha_2$$

Dus:

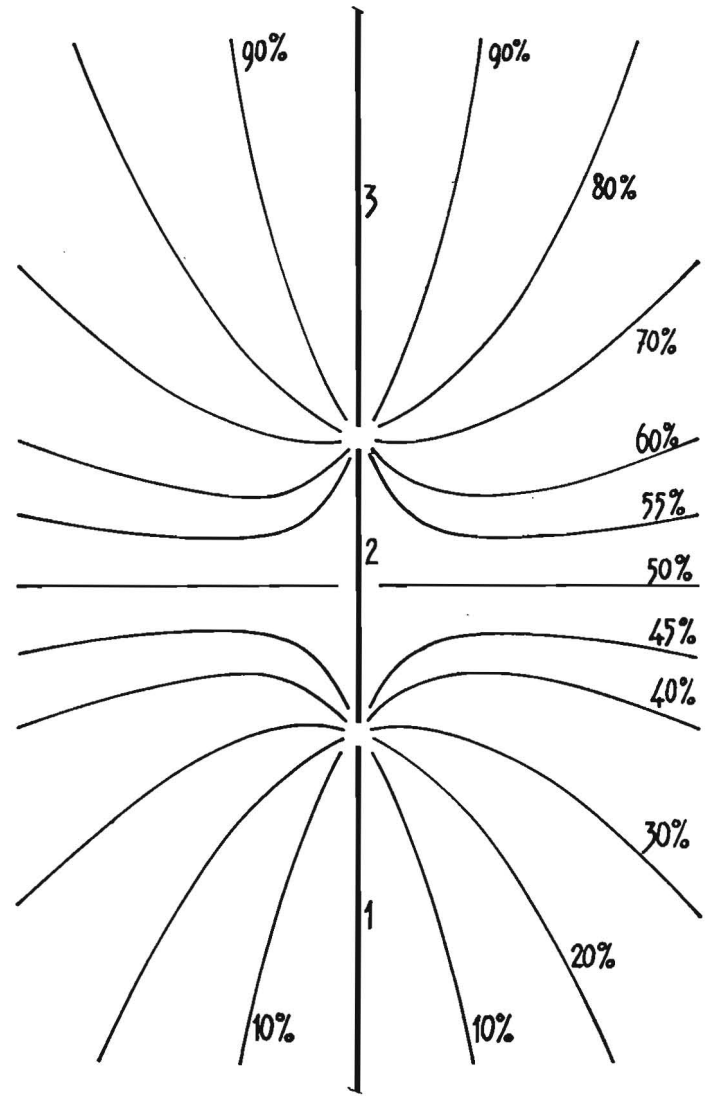
$$\frac{\epsilon_{r_2}'}{\epsilon_{r_1}'} = \frac{\tan(90^\circ - \alpha_2)}{\tan(90^\circ - \alpha_1)} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_2}}$$

In de trog moet nu een diep gedeelte, behorende bij een kleine  $\epsilon_r$ , worden vervangen door een ondiep gedeelte, behorende bij de grootste  $\epsilon_r$ , om het inverse beeld te verkrijgen. De verhouding van de waterdiepten blijft echter dezelfde.

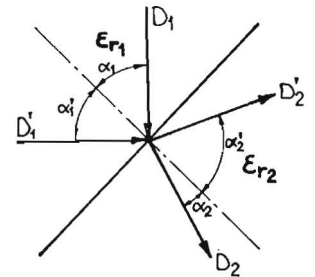
Rekening houdend met het bovenstaande is de veldverdeling van afb. 22 gemeten. In tabel 1 zijn de omstandigheden van het

TABEL 1

	Werkelijk model	Invers model
Metalen platen	lijn AA en lijn BB	lijnen AB
Scheidingsvlak	lijn CD	lijn CD
Waterhoogte	$\epsilon_1 : 30 \text{ mm}$ $\epsilon_2 : 5 \text{ mm}$	$\epsilon_1 : 5 \text{ mm}$ $\epsilon_2 : 30 \text{ mm}$
Equipotentiaallijnen	getrokken	gestippeld



Afb. 20 Gemeten equipotentiaallijnen in het geïnverteerde model van afb. 19



Afb. 21 Breking van D-lijnen op het grensvlak tussen twee diëlektrica

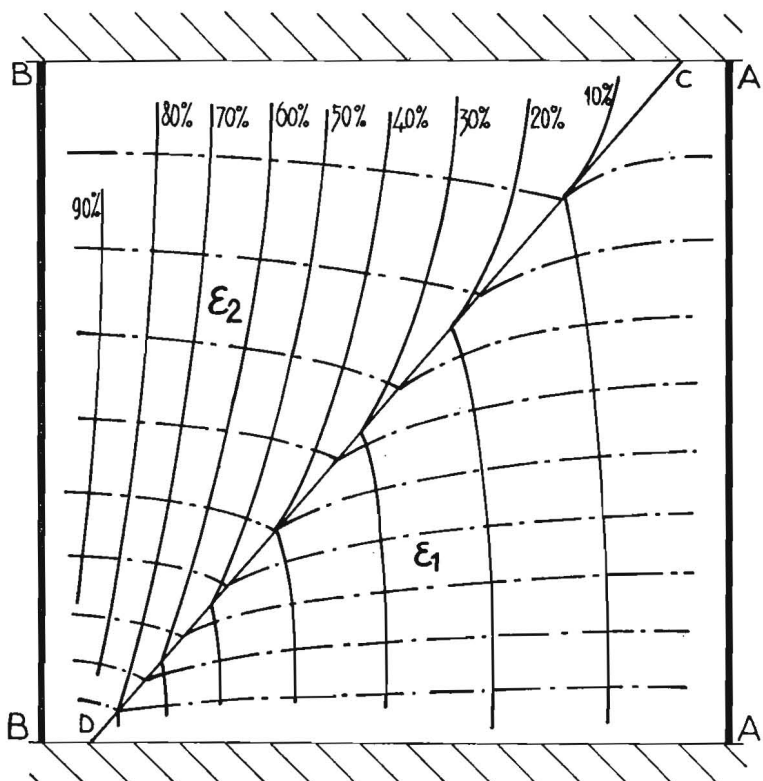
inverse en het werkelijke model vermeld. De streep-stipequipotentiaallijnen zijn in het werkelijke model dus de veldlijnen.

#### 4.2. De methode met twee sondes

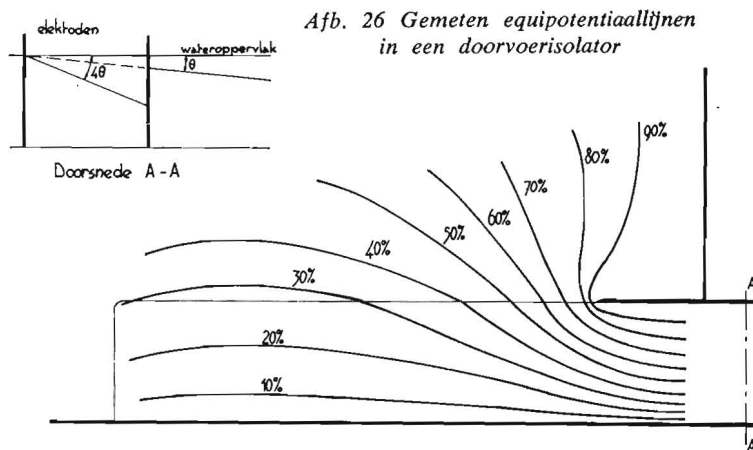
Stel dat in een bepaald model de potentiaalverdeling is, zoals aangegeven in afb. 23. Uitgaande van een punt A is altijd een punt B te vinden, zodanig dat het potentiaalverschil tussen A en B maximaal is voor bepaalde constante afstand tussen A en B.

De door deze beide punten getrokken vector  $n$  geeft met redelijke benadering de richting van de veldsterkte aan ( $E$ -vector) in het punt A. De benadering is beter naarmate de afstand tussen de punten A en B kleiner is.

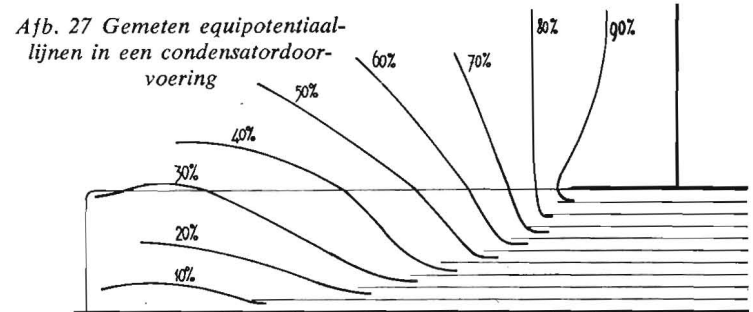
Wij nemen nu twee sondes A en B zodanig dat sonde B draaibaar is om sonde A als middelpunt. Sonde A kan nu (mechanisch) worden vastgezet in een zeker punt. Wij meten het potentiaalverschil tussen de sondes A en B en bepalen de stand van sonde B t.o.v. sonde A zodanig dat het potentiaalverschil tussen beide sondes maximaal is. De richting van de vector  $n$  ter plaatse A is dan gevonden.



Afb. 22 Gemeten equipotentiaallijnen en veldlijnen in een condensator met twee diëlektrica

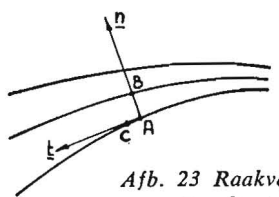
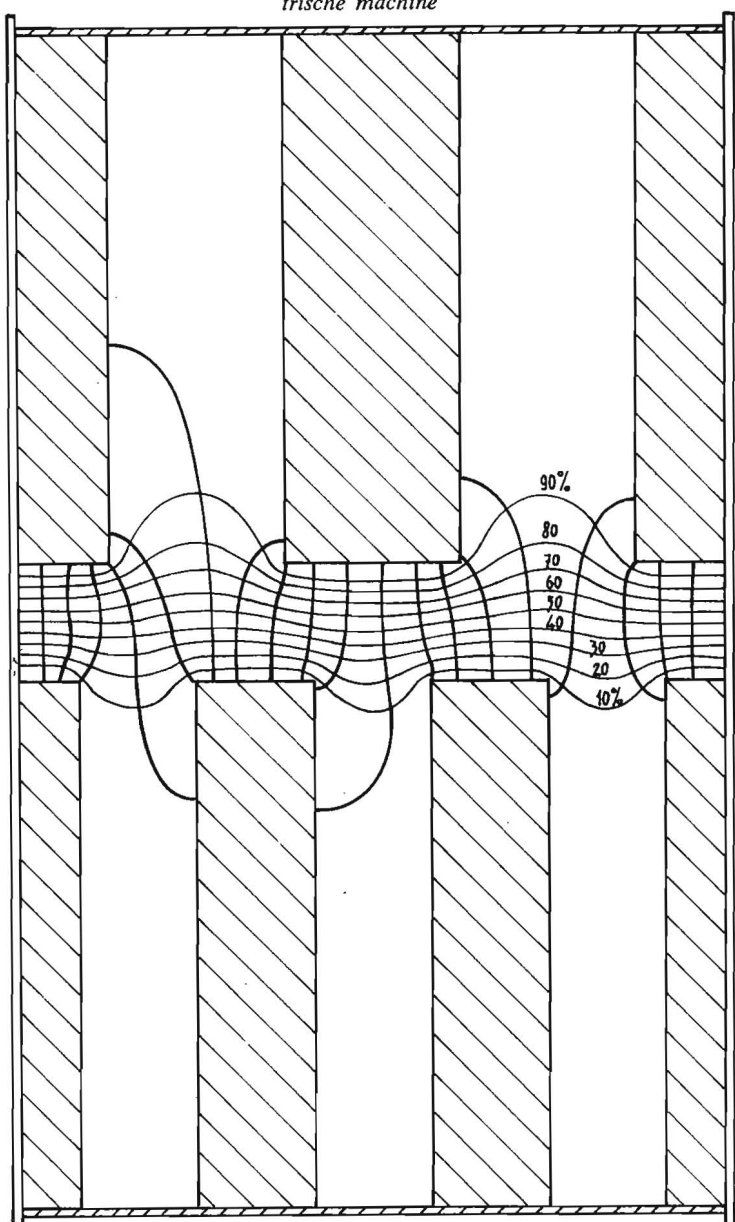


Afb. 26 Gemeten equipotentiaallijnen in een doorvoerisolator

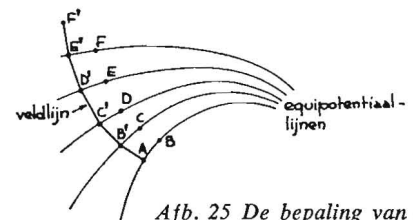


Afb. 27 Gemeten equipotentiaallijnen in een condensatordoorvoering

Afb. 28 Door meting bepaald veldbeeld in de lichtspleet van een elektrische machine

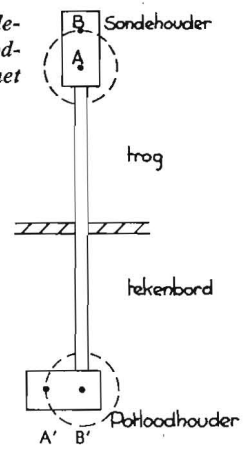


Afb. 23 Raakvector  $t$  aan en normaalvector  $n$  op een equipotentiaallijn, in een willekeurig punt



Afb. 25 De bepaling van een veldlijn

Afb. 24 Sondehouder en potloodhouder voor het bepalen van veldlijnen



Het bepalen van een maximum met behulp van een voltmeter is dikwijls minder nauwkeurig dan het zoeken van een minimum. Het potentiaalverschil is minimaal wanneer wij twee punten van dezelfde equipotentiaallijn beschouwen, dus bv. de punten A en C (afb. 23).

De punten A en C bepalen de richting van de vector  $t$ . Indien A en C voldoende dicht bij elkaar liggen dan geldt met redelijke benadering dat  $n$  loodrecht op  $t$  staat.

Wij gaan nu uit van de volgende opstelling (afb. 24). Een sondehouder met sondes A en B, en een potloodhouder met potloden A' en B' zijn zodanig opgesteld dat sonde B draaibaar is om A en potlood B' over dezelfde hoek draaibaar is om A'. Indien sonde B over een zekere hoek wordt gedraaid dan wordt potlood B' over dezelfde hoek gedraaid. De lijn AB staat loodrecht op de lijn A'B'. Tussen de sondes A en B wordt het potentiaalverschil gemeten. Wij fixeren de stand van sonde A (en dus ook de stand van potlood A') en wij draaien sonde B t.o.v. sonde A totdat het potentiaalverschil minimaal is. In deze stand geven wij met beide potloden A' en B' een punt op het papier. De verbindingslijn tussen deze punten geeft de richting van de veldlijn ter plaatse A. Dit zij AB' van afb. 25.

Vervolgens plaatsen wij potlood A' op punt B' en wij herhalen de boven beschreven procedure. Wij vinden dat punt C' enz. Op

deze wijze kan een veldlijn worden bepaald. De punten B, C, D enz. geven steeds de plaatsen aan waar sonde B zich bij elke meting bevindt.

Opm. In de literatuur [6] vinden wij nog een andere methode beschreven voor het bepalen van de veldsterkte.

### 5. Enkele toepassingen van de elektrolytische trog

Een grote verscheidenheid van potentiaalproblemen kan met behulp van de elektrolytische trog worden opgelost. In het voorafgaande zijn reeds enkele voorbeelden getoond. In de aangehaalde literatuur [2] [4] [5] wordt eveneens een aantal voorbeelden gegeven.

In de volgende gevallen is door ons van de elektrolytische trog gebruik gemaakt.

Afb. 26 laat het veldverloop zien in een cilinder-symmetrische doorvoerisolator. Voor het isolatiemateriaal geldt  $\epsilon_r = 4$ , zodat het gedeelte dat het isolatiemateriaal representeert in de trog een hoek met de bodem maakt die  $4 \times$  zo groot is als die van het gedeelte dat de omgeving (lucht  $\epsilon_r = 1$ ) representeert. In afb. 27 is te zien hoe dit veldverloop wordt beïnvloed door cilinders uit geleidend materiaal in de isolator aan te brengen (condensator-doorvoering).

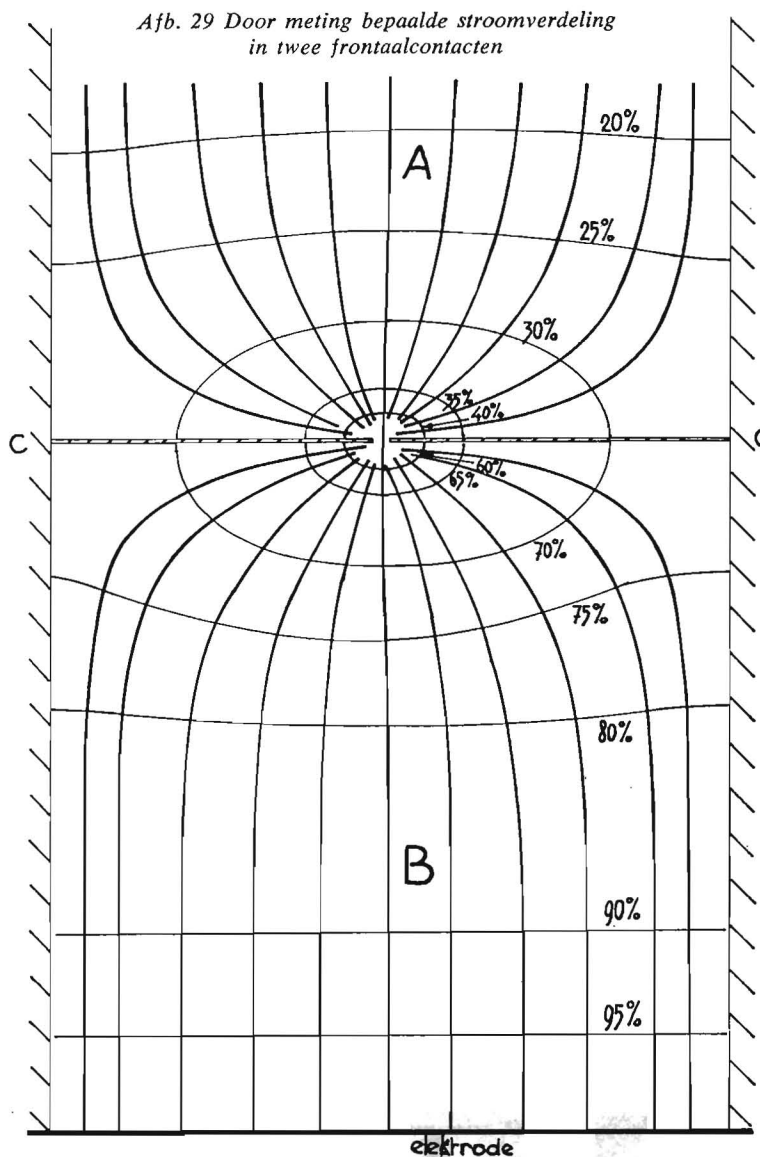
Een ander soort probleem toont afb. 28, die het veldbeeld weergeeft in de luchtspleet van bv. een elektrische machine bij verschillende vertandingen van stator en rotor (gestyleerd beeld). Hier is bij de meting van de veldlijnen en de equipotentiaalijnen gebruik gemaakt van twee modellen.

Hierbij zij opgemerkt dat het getekende stuk stator en rotor zijn opgevat als een noordpool en een zuidpool, waartussen zich een magnetisch veld bevindt. Hoe deze noord- en zuidpool tot stand zijn gekomen is in het midden gelaten. Eventuele lekfluxen om stroomvoerende geleiders in de gleuven zijn buiten beschouwing gelaten.

Afb. 29 geeft een indruk van de stroomverdeling in twee frontaalcontacten A en B die elkaar slechts op één punt raken. Het scheidingsvlak tussen de contacten is de lijn CC. Op deze lijn is een isolerende wand van 1 mm dikte geplaatst, waarin een kleine opening (4 mm) is gelaten. Ook hier werd een tweede model gemaakt om het verloop van de stroomlijnen te kunnen bepalen.

Men kan dus op deze wijze in principe het verloop van de stroomdichtheid in twee frontaalcontacten bestuderen.

Alle in dit artikel beschreven metingen zijn uitgevoerd in een elektrolytische trog, die werd ontworpen door ir. M. H. J. Sanders.



#### Literatuur

1. R. Strigel — *Bücher der Messtechnik*, dl VJ 7. Verlag Braun (1949).
2. P. A. Kennedy en G. Kent — *Rev. Sci. Instr.* **27** (1956) 916.
3. A. Schrötter — *ATM — V312-6* (1962).
4. McDonald — *Proc. I.E.E.* **100/II**(1953) 145.
5. S. Tirtoprodjo en J. W. Ero — *Electrotechniek* **41** (1963) (18) 403.
6. F. H. Kreuger — *Electrotechniek* **42** (1964) (12) 267.