

# Een algoritme voor berekeningen van afmetingen van potten en flessen

**Citation for published version (APA):**

Oltmans, H., & Grob, M. J. H. B. (1994). *Een algoritme voor berekeningen van afmetingen van potten en flessen*. (Opleiding wiskunde voor de industrie Eindhoven : student report; Vol. 9506). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1994

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Opleiding  
Wiskunde voor de Industrie  
Eindhoven

**STUDENT REPORT 95 - 06**

**EEN ALGORITME VOOR BEREKENINGEN VAN  
AFMETINGEN VAN POTTEN EN FLESSEN**

**Hans Oltmans  
Marcel Grob**

**september 1994**

# Een algoritme voor berekeningen van afmetingen van potten en flessen

Hans Oltmans  
Marcel Grob

5 september 1994

# Inhoud

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Beschrijving van de toegestane vormen</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Eisen aan het computerprogramma</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Indeling van voorwerp in segmenten</b>	<b>7</b>
4.1	Opbouw uit segmenten . . . . .	7
4.2	Aansluitvoorwaarden . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Maatberekeningen</b>	<b>13</b>
5.1	Vrijheidsgraden . . . . .	13
5.2	Basisvariabelen . . . . .	14
5.3	Recursieve betrekkingen . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Gebruik van het programma</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Aanbevelingen voor uitbreiding</b>	<b>19</b>
7.1	Een interactief programma . . . . .	19
7.2	Een zoekalgoritme . . . . .	19
<b>A</b>	<b>Volume en oppervlakte van een segment</b>	<b>22</b>
<b>B</b>	<b>Afleiding van aansluitvoorwaarde</b>	<b>26</b>

# 1 Inleiding

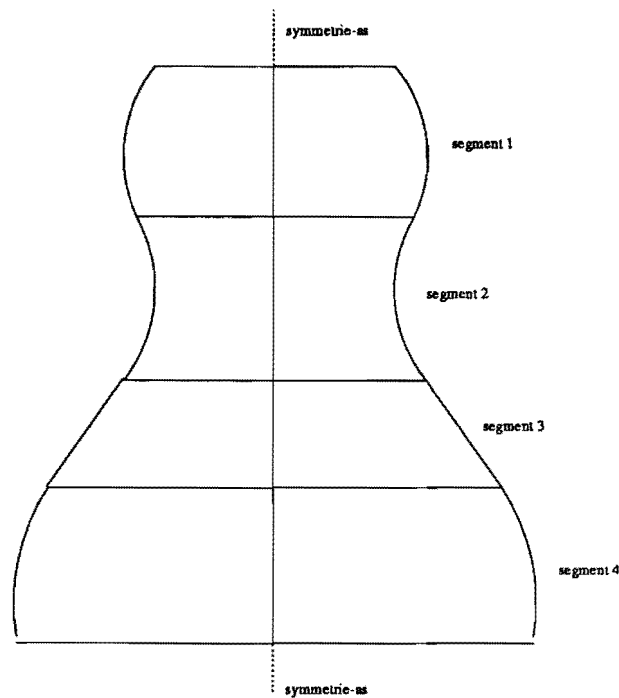
In dit verslag beschouwen wij een grote klasse van glazen produkten, zoals deze gefabriceerd worden door de Vereenigde Glasfabrieken n.v. Een element van deze klasse kan worden beschreven door middel van een aantal variabelen, zoals bijvoorbeeld de hoogte, bepaalde diameters of kromtestralen van het oppervlak. Als voldoende variabelen van een element gegeven zijn, is het in principe mogelijk om de resterende afmetingen te berekenen. Ook kunnen het volume van het element en de oppervlakte van de buitenkant van het element worden berekend. Het volume van een glazen produkt is voor de ontwerper erg belangrijk, omdat de kopers ervan een produkt met exact de juiste inhoud willen hebben. De oppervlakte van een produkt geeft informatie over de warmteoverdracht van het produkt tijdens de fabricage en over de benodigde hoeveelheid glas.

We zullen allereerst een beschrijving geven van de klasse van voorwerpen die we beschouwen. Daarna leggen we vast welke eisen we stellen aan het computerprogramma dat het volume en de oppervlakte van een glazen voorwerp berekent. Vervolgens zullen we beschrijven hoe een glazen voorwerp opgebouwd wordt uit verschillende delen (zogenaamde *segmenten*), die elk weer een aantal variabelen hebben. Sommige variabelen zijn aan elkaar gerelateerd. Als we bovendien eisen, dat de verschillende segmenten netjes moeten aansluiten, levert dat ons nieuwe relaties tussen de variabelen. We zullen laten zien hoeveel vrijheidsgraden een willekeurig voorwerp heeft. Daarna definiëren we een verzameling van zogenaamde *basisvariabelen*, die een voorwerp precies vastlegt. We leiden verder de vergelijkingen af voor de overige variabelen, uitgedrukt in de basisvariabelen. Vervolgens wordt beschreven hoe het computerprogramma kan worden gebruikt om, uitgaande van een aantal gegevens, een voorwerp te ontwerpen dat het vereiste volume heeft. Hierbij zijn er natuurlijk restricties aan de invoer van het programma. In hoofdstuk 7 zullen we een aantal aanbevelingen geven ter verbetering of uitbreiding van het programma. In appendix A wordt beschreven hoe uit de variabelen het volume en de oppervlakte kunnen worden berekend. Tenslotte zullen we in appendix B een afleiding geven van de recursieve formules voor de niet-basisvariabelen.

## 2 Beschrijving van de toegestane vormen

Er worden door de Vereenigde Glasfabrieken n.v. produkten van zeer veel verschillende vormen gefabriceerd. De voorwerpen die in dit rapport beschouwd zullen worden zijn hiervan een belangrijke subklasse. Ze voldoen aan de volgende twee beperkingen:

- Ze zijn rotatiesymmetrisch, m.a.w. de horizontale doorsnede op iedere hoogte is een cirkel met straal  $r$ . Dit houdt in dat we de vorm van het voorwerp kunnen beschrijven door door de straal  $r$  als functie van de hoogte  $z$  op te geven. Deze functie  $r(z)$  zal in de praktijk natuurlijk voldoende glad moeten zijn. Hoewel ook ingewikkelder vormen (met elliptische, afgerond driehoekige horizontale doorsnede etc.) gemaakt kunnen worden, zijn de rotatiesymmetrische producten in de meerderheid. Bovendien kan hier gemakkelijker aan gerekend worden.
- De axiale (verticale) doorsnede bestaat uit cirkeldelen en rechte stukken. Verreweg de meeste eerder gedane berekeningen gaan hier ook van uit. Eventueel ingewikkelder doorsneden kunnen benaderd worden door kleine opeenvolgende cirkelboogjes.



Figuur 1: Doorsnede van toegestane vorm

Vanwege de aard van het fabricageproces kunnen we er verder van uitgaan dat het voorwerp "geen holtes bevat", m.a.w. dat  $r(z)$  echt een functie is. Een uitzondering hierop is de bodemvorm, die hier buiten beschouwing gelaten is. Doordat de bodemvorm, gezien van buiten het voorwerp, in de praktijk hol is, is het werkelijke volume kleiner en de werkelijke oppervlakte groter dan bij een "platte" bodem, waar we hier van uitgaan. De correctie hiervoor zal apart in rekening gebracht moeten worden.

In de berekeningen is geen rekening gehouden met de glasdikte. Het voorwerp wordt oneindig dun verondersteld. Of anders gesteld: alleen het buitenoppervlak (manteloppervlak) en het volume inclusief de glasinhoud worden berekend.

De huidige stand van zaken is zodanig dat er voor vele mogelijke configuraties aparte programma's zijn geschreven om bepaalde variabelen (hoogten, diameters, kromtestralen) te berekenen als andere variabelen (of combinaties van variabelen, zoals de totale hoogte van het voorwerp) bekend zijn. Omdat het voor iedere nieuwe configuratie en iedere nieuwe combinatie van variabelen nodig is een nieuw programma te schrijven, zou het wenselijk zijn hier meer structuur en flexibiliteit in aan te brengen. Het liefst zou men een programma hebben dat alle denkbare configuraties en alle toegelaten combinaties van gegeven en onbekende variabelen kan verwerken. In dit rapport wordt geprobeerd daartoe een aanzet te geven. Het zal echter blijken dat deze algemene doelstelling nog lang niet bereikt is.

### 3 Eisen aan het computerprogramma

We willen een computerprogramma schrijven, dat achtereenvolgens de volgende handelingen verricht:

- het vraagt de gebruiker om een aantal gegevens over het glazen voorwerp;
- het berekent met behulp van deze gegevens de ontbrekende relevante afmetingen van het voorwerp;
- het berekent vervolgens het volume van het voorwerp;
- het bepaalt de oppervlakte van de buitenmantel;
- het produceert een 2-dimensionale afbeelding van de verticale doorsnede door de symmetrie-as van het voorwerp op het beeldscherm.

Het meest uitgebreide programma zou dus voor elke configuratie en elke voldoende grote verzameling van gegeven variabelen de ontbrekende variabelen kunnen uitrekenen. Het is ondoenlijk om voor elk geval een nieuw programma of een nieuwe procedure te schrijven, dus het programma zou voor elke voldoende grote verzameling van gegeven variabelen de formules voor de onbekenden als functie van de gegevens moeten kunnen genereren. De relaties tussen de verschillende variabelen kunnen echter kwadraten, wortels en goniometrische functies als sinus en tangens bevatten. Dit maakt het bijna onmogelijk om **voor elk geval** de onbekenden analytisch (d.w.z. exact) te bepalen.

In sectie 5.2 zullen we een verzameling van zogeheten basisvariabelen introduceren. Wij zullen er van uit gaan, dat de gebruiker van het programma de waarden van deze basisvariabelen kent. De ontbrekende variabelen zijn dan redelijk eenvoudig te berekenen. Ons programma zal deze berekeningen uitvoeren.

In hoofdstuk 7 zullen we schetsen hoe het programma uitgebreid zou kunnen worden tot een programma dat niet uitgaat van gegeven basisvariabelen, maar voor elke voldoende grote combinatie van gegevens en onbekenden de onbekenden (numeriek) bepaalt. Zo een programma zal gebruik maken van de procedures uit ons programma die de niet-basisvariabelen berekenen.



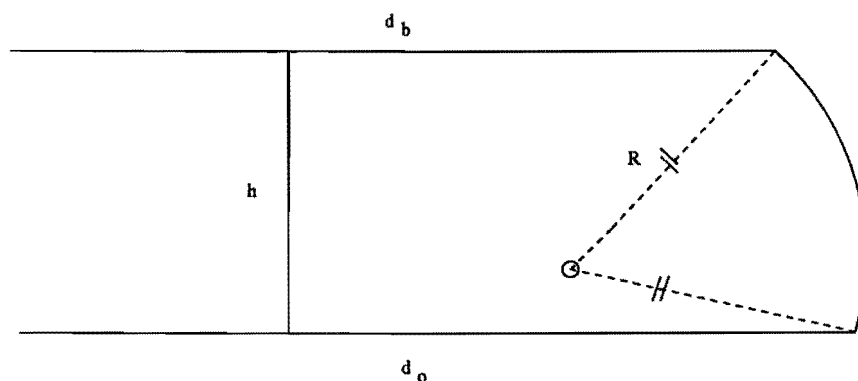
## 4 Indeling van voorwerp in segmenten

### 4.1 Opbouw uit segmenten

Zoals in hoofdstuk 2 opgemerkt, beperken we ons tot rotatiesymmetrische voorwerpen waarvan (de linker- of rechterhelft van) de axiale doorsnede met de mantel uit cirkelbogen en rechte stukken is opgebouwd. Dit betekent dat we ieder voorwerp opgebouwd kunnen denken uit opeengestapelde rotatiesymmetrische stukken waarvan de axiale doorsnede ofwel een cirkelboog ofwel een lijnstuk is. We zullen zo'n stuk in het vervolg een *segment* noemen. Er zijn dus 2 soorten segmenten:

- gekromde segmenten, die bol (convex) of hol (concaaf) kunnen zijn,
- rechte (conische) segmenten.

De doorsnede van deze segmenten is schematisch weergegeven in de figuren 2,3 en 4.



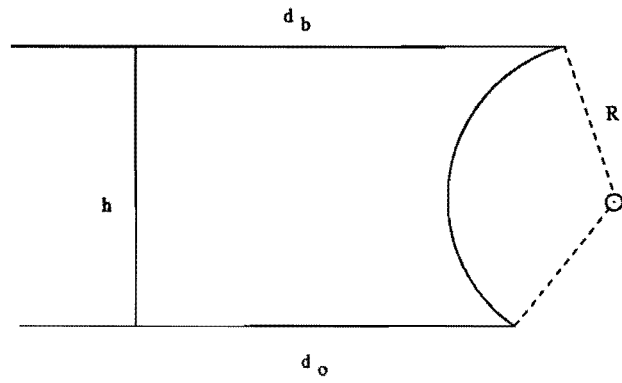
Figuur 2: Doorsnede van bol segment

Hoewel met een segment dus eigenlijk het omwentelingslichaam bedoeld wordt, dat ontstaat door de doorsneden in de figuren 2 t/m 4 om de symmetrie-as te roteren, is voor de berekeningen alleen de doorsnede zelf van belang. De axiale doorsnede met het manteloppervlak (de gekromde lijn in figuur 2 en 3) zullen we de rand noemen.

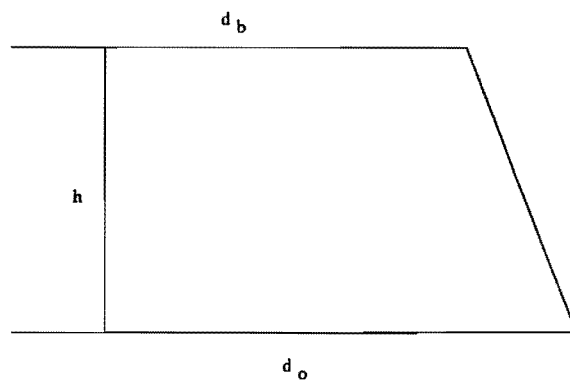
Een recht segment kan gezien worden als een bijzonder geval van een krom segment. Dit zullen we later ook doen in de maatkalkeringen. Voor de volume- en oppervlakteberekeningen is het echter handig het onderscheid te maken.

Het is duidelijk dat een segment geheel beschreven wordt door de volgende maten:

- de hoogte  $h$ ,



Figuur 3: Doorsnede van hol segment



Figuur 4: Doorsnede van conisch segment

- de boven- en onderdiameter  $d_b$  en  $d_o$ ,
- de kromtestraal  $R$  van de rand. Deze wordt positief genomen voor een bol stuk en negatief voor een hol stuk. Voor een recht stuk zou de kromtestraal oneindig groot worden; daarom is het in de berekeningen handiger om in plaats van  $R$  de variabele  $\rho = 1/R$  (de kromming) te nemen. De kromming van een recht stuk is dan gelijk aan 0.

Als van alle segmenten deze variabelen bekend zijn is het eenvoudig om het volume en de oppervlakte van het voorwerp te berekenen. Deze zijn gelijk aan de som van de volumes resp. de oppervlakten van de afzonderlijke segmenten. Formules voor deze grootheden voor zowel een recht als een gekromd segment worden afgeleid in Appendix A.

We noemen hier nog twee gevallen waarin we een segment niet toe zullen laten.

- Het kan voorkomen, dat bij een hol segment de minimale diameter nul of minder wordt. Dit is het geval als

$$m_x > 0 \text{ en } R < 0 \text{ en } m_x < -R,$$

waarbij  $m_x$  de kleinste afstand is van het middelpunt van de segmentkromme tot de symmetrie-as (zie figuur 5).

- Een andere mogelijkheid is, dat het verschil in boven- en onderdiameter zo groot is, dat er een holte ontstaat. Dit is te herkennen aan de tangent  $v$  aan de kromme in het boven- of ondereindpunt, die omhoog (resp. omlaag) gericht is (zie figuur 6).

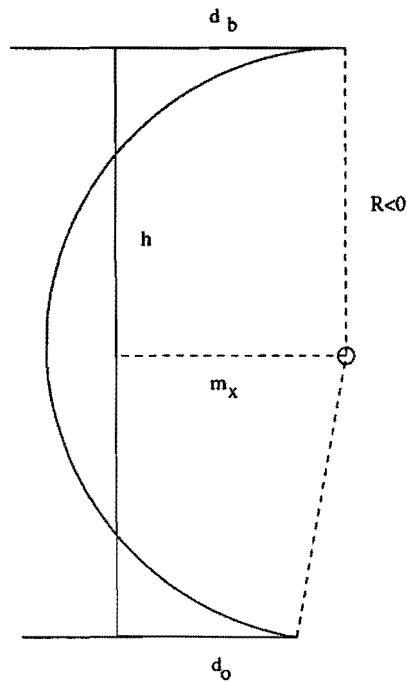
## 4.2 Aansluitvoorwaarden

Wanneer een voorwerp uit de segmenten van de figuren 2 t/m 4 wordt samengesteld, dan moeten deze natuurlijk op elkaar aansluiten. Als de  $n$  segmenten van boven naar onder genummerd worden, betekent dit dat er aan de volgende voorwaarden moet worden voldaan:

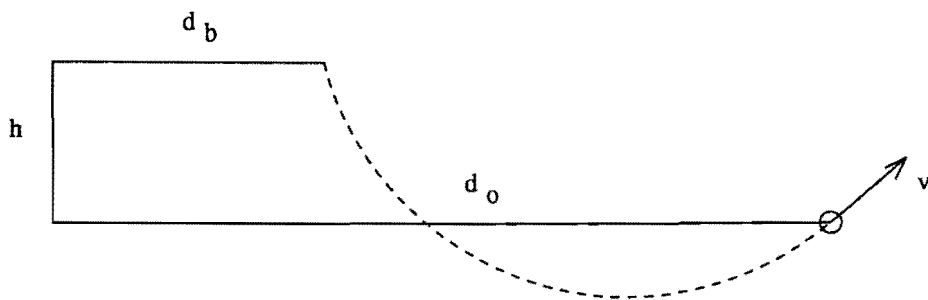
- Er mogen geen sprongen in de rand zitten, d.w.z. de onderdiameter van segment  $i$  moet gelijk zijn aan de bovendiameter van segment  $i + 1$ :

$$d_{o,i} = d_{b,i+1} \quad (i = 1, \dots, n - 1). \quad (1)$$

- De rand mag geen knikken vertonen. Dit betekent dat de hoek die de rand maakt met de verticaal (ofwel de hoek die de naar buiten gerichte normaal op het glas maakt met de horizontaal) bij een overgang naar een volgend segment



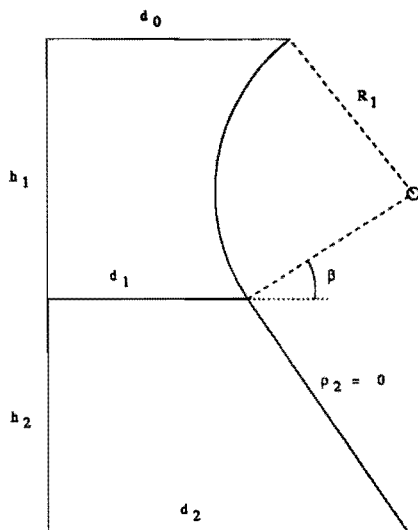
Figuur 5: Segment met negatieve minimale diameter



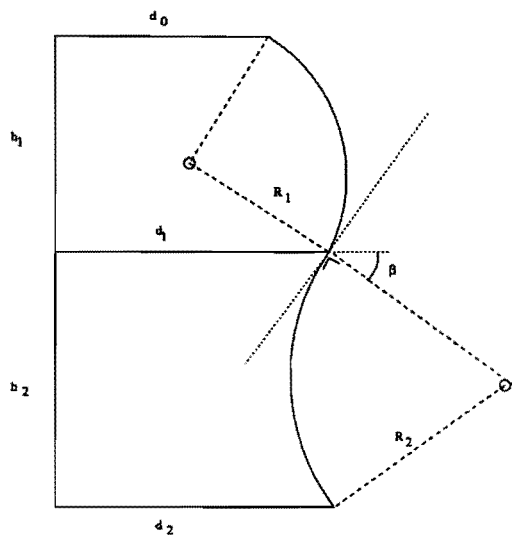
Figuur 6: Segment met holte

constant moet zijn. Als we deze hoek  $\beta$  noemen, zie figuur 7 en 8, dan moet gelden:

$$\beta_{o,i} = \beta_{b,i+1} \quad (i = 1, \dots, n - 1). \quad (2)$$



Figuur 7: Aansluiting van gekromd en recht segment



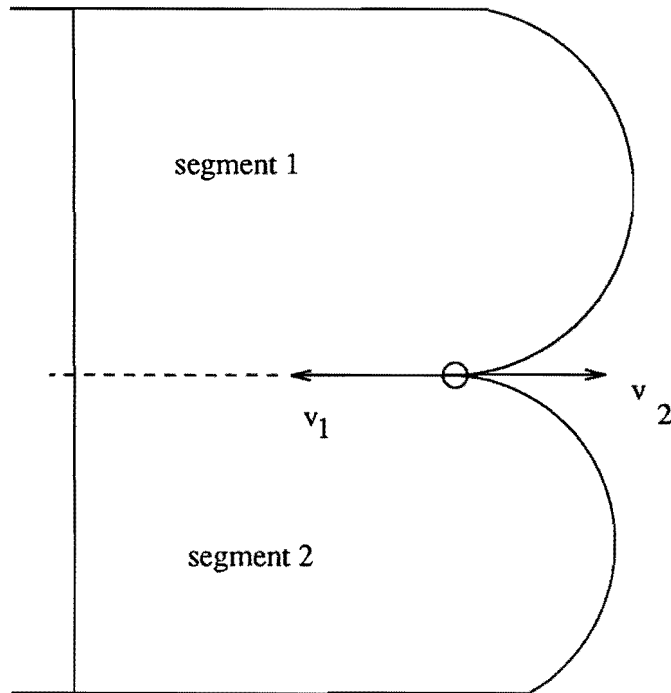
Figuur 8: Aansluiting van twee gekromde segmenten

De hoek  $\beta$  kan berekend worden uit de overige variabelen. Voor een recht stuk geldt natuurlijk:

$$\beta_{o,i} = \beta_{b,i} = \beta_i = \arctan\left(\frac{d_{o,i} - d_{b,i}}{2h_i}\right) \quad (\rho_i = 0). \quad (3)$$

Voor een gekromd stuk kunnen  $\beta_o$  en  $\beta_b$  uitgedrukt worden in  $h$ ,  $d_o$ ,  $d_b$  en  $\rho$ . De beide voorwaarden komen neer op continuïteit en differentieerbaarheid van de functie  $r(z)$  bij iedere overgang tussen twee segmenten.

Als twee gekromde stukken op elkaar aan moeten sluiten, betekent dit ten eerste dat de raaklijnen aan de beide krommen in het aansluitpunt samen moeten vallen. Dit houdt in, dat de twee middelpunten van de cirkelbogen en het aansluitpunt op één lijn moeten liggen, zie figuur 8. Dit is echter niet voldoende. Het zou nog kunnen voorkomen dat bij overgang van de ene kromme naar de andere de tangent aan de kromme (de looprichting) zich omkeert. De extra eis wordt dus, dat de tangenten aan de krommen gelijkgericht moeten zijn in het overgangspunt, en niet tegengesteld zoals in figuur 9.



Figuur 9: Tegengestelde tangenten in overgangspunt

## 5 Maatberekeningen

### 5.1 Vrijheidsgraden

We introduceren het begrip vrijheidsgraden om aan te geven hoeveel variabelen (min of meer) vrij te kiezen zijn bij het ontwerp van een voorwerp. M.a.w.: het aantal vrijheidsgraden behorende bij een voorwerp bestaande uit  $n$  segmenten is het maximaal aantal variabelen dat voorgeschreven kan worden zodanig dat het ontwerp nog realiseerbaar is. Als er minder vastgelegd worden betekent dit dat er nog meerdere configuraties mogelijk zijn (men heeft de "vrijheid nog niet geheel gebruikt"); als er daarentegen meer vastgelegd zouden worden is het ontwerp in het algemeen onmogelijk.

De vastgelegde variabelen moeten wel aan bepaalde voorwaarden voldoen. Sommige combinaties zijn bij voorbaat onmogelijk. Als men bij voorbeeld van een bepaald gekromd segment alle variabelen wil vastleggen, dan moet de kromtestraal groot genoeg zijn om de eindpunten van de rand, die volgen uit de hoogte en de diameters, met elkaar te kunnen verbinden: de cirkel met straal  $1/\rho$  mag niet "tussen de eindpunten passen". Er moet gelden:

$$\left(\frac{2}{\rho}\right)^2 \geq h^2 + \left(\frac{d_b - d_o}{2}\right)^2. \quad (4)$$

Zoals in sectie 4.1 geïllustreerd is, is het aantal variabelen waardoor een enkel segment beschreven wordt gelijk aan 4 voor een gekromd segment en 3 voor een recht segment. In het algemeen kunnen we stellen dat het aantal variabelen 4 is, omdat een recht segment een bijzonder geval is van een krom segment, met kromming nul. Het aantal vrijheidsgraden van een geïsoleerd segment is dus gelijk aan 4.

Als twee segmenten op elkaar moeten aansluiten, dan moet voldaan worden aan de aansluitvoorwaarden van sectie 4.2. Omdat voor iedere aansluiting tussen twee segmenten de condities (1) en (2) moeten gelden, gaan er bij iedere aansluiting 2 vrijheidsgraden verloren. Het totaal aantal vrijheidsgraden  $p$ , dat men heeft bij een voorwerp van  $n$  segmenten, is dus gelijk aan

$$p = 4n - 2(n - 1) = 2n + 2. \quad (5)$$

Meer algemeen geldt:

$$m = p + c, \quad (6)$$

waarin  $m$  het aantal variabelen en  $c$  het bijbehorende aantal condities is. Als we het voorwerp geheel zouden kunnen beschrijven met  $m < 4n$  variabelen, zoals we in de

volgende sectie zullen doen, dan wordt het aantal nodige voorwaarden dus gegeven door  $c = m - (2n + 2)$ .

## 5.2 Basisvariabelen

Er wordt gezocht naar een zo klein mogelijke verzameling van variabelen (en dus een zo klein mogelijk stelsel vergelijkingen) die het voorwerp geheel beschrijven; dat wil zeggen zodanig dat, als  $p = 2n + 2$  (relaties tussen) variabelen vastgelegd worden, de overige  $c = m - p$  variabelen berekend kunnen worden, zie Vgln.(5) en (6).

Het probleem hierbij is dat het in het algemeen onzeker is welke variabelen (of relaties tussen variabelen) de gebruiker van het programma wil vastleggen en welke variabelen te berekenen zijn. Met relaties tussen variabelen wordt bij voorbeeld bedoeld:

- de totale hoogte van het voorwerp  $H = \sum_{i=1}^n h_i$  wordt vastgelegd;
- de rand van een gekromd segment moet (om aan te sluiten aan een recht segment) bij het aansluitpunt aankomen onder een gegeven hoek  $\beta$ ;
- de grootste diameter van het voorwerp  $D = 2 \max_z r(z)$  (een belangrijke maat van het produkt) wordt vastgelegd.

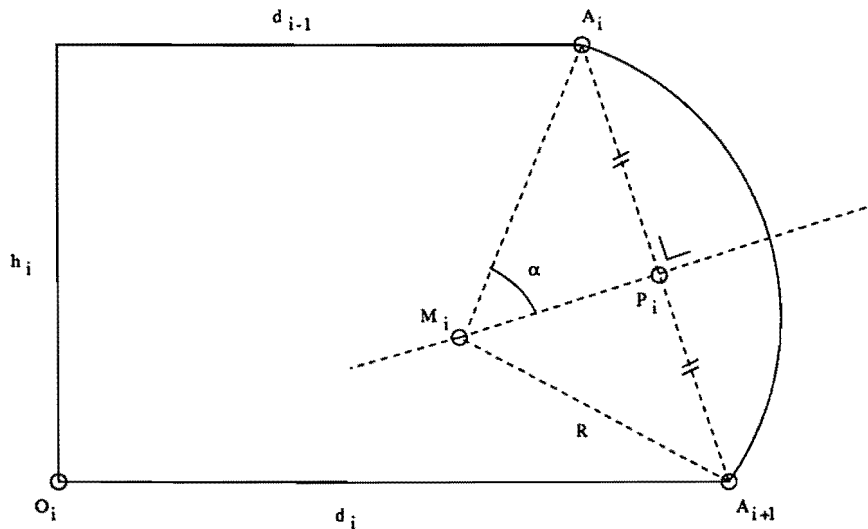
Het laatste geval levert een extra probleem omdat deze diameter  $D$  ergens middenin een (bol) segment kan voorkomen. Dit zou ondervangen kunnen worden door dit segment in twee nieuwe segmenten te verdelen. Zo zijn er nog veel meer mogelijke eisen te noemen.

We zullen nu een bepaalde set van  $2n+2$  variabelen invoeren, die het voorwerp geheel vastleggen. Toepassing van de aansluitvoorwaarden geeft een, hierbij behorende, eenvoudige recursieve formule voor het berekenen van de overige variabelen. Dit is het onderwerp van de volgende sectie. De  $2n + 2$  vastgelegde variabelen zullen we *basisvariabelen* noemen. Het zijn:

- de hoogten van de segmenten  $h_1, \dots, h_n$ ;
- de bovendiameter van het voorwerp  $d_0 = d_{b,1}$ ;
- de "verschilstralen"  $q_i = \frac{d_{i-1} - d_i}{2}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), waarin  $d_{i-1}$  per definitie de bovendiameter van segment  $i$  is en  $d_n$  de onderdiameter van het voorwerp; de  $q_i$ 's kunnen dus positief of negatief zijn al naar gelang het voorwerp van boven af gezien netto smaller of breder wordt in dit segment.
- één van de krommingen, zeg  $\rho_j$ .



Door met de verschilstralen te werken in plaats van de boven- en onderdiameters, zijn de aansluitvoorwaarden van Vgl.(1) al in de variabelen verwerkt. Daardoor is het aantal vergelijkingen, en dus ook het aantal onbekenden, met  $n - 1$  afgenomen. De  $n - 1$  onbekenden die nu nog te berekenen zijn, zijn de krommingen  $\rho_1, \dots, \rho_{j-1}, \rho_{j+1}, \dots, \rho_n$ . Deze volgen uit de  $n - 1$  aansluitvoorwaarden van Vgl.(2). Om een eenvoudige vergelijking af te leiden voor de  $\rho$ 's, voeren we de hoek  $\alpha$  in. Dit is de halve booghoek van de rand van het segment, zie figuur 10. Hierbij heeft  $\alpha$  hetzelfde teken als  $R$  en  $\rho$ .



Figuur 10: Segment met halve segmenthoek  $\alpha_i$

Omdat er, zoals in hoofdstuk 2 opgemerkt, geen "overbolle" of "overholle" stukken kunnen voorkomen, geldt  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Uit figuur 10 kan men eenvoudig zien dat geldt:

$$\rho_i = \frac{2 \sin \alpha_i}{\sqrt{h_i^2 + q_i^2}}. \quad (7)$$

### 5.3 Recursieve betrekkingen

Als we aannemen dat bij voorbeeld  $\rho_1$  bekend is, dus  $j = 1$ , dan kunnen we eenvoudig een formule afleiden om de overige krommingen te berekenen. De aansluitconditie van Vgl.(2) komt er op neer dat de vectoren  $A_{i+1}\vec{M}_i$  en  $A_{i+1}\vec{M}_{i+1}$  lineair afhankelijk moeten zijn (voor  $i = 1, \dots, n - 1$ ). Hierin is  $A_i$  het  $i$ -de aansluitpunt en  $M_i$  het middelpunt van de cirkelvormige rand van het  $i$ -de segment, zie figuur 10. In appendix B wordt aangetoond dat dan moet gelden:

$$(t_i + t_{i+1})(q_i q_{i+1} + h_i h_{i+1}) = (t_i t_{i+1} - 1)(q_i h_{i+1} - q_{i+1} h_i), \quad (8)$$

waarin de hulpgrootheid

$$t_i = \tan \alpha_i \quad (9)$$

gebruikt is. Deze heeft hetzelfde teken als  $\alpha_i$  en  $\rho_i$ . Vgl.(8) stelt ons in staat het hele voorwerp door te rekenen. Uit Vgl.(7) volgt:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\rho_1 \sqrt{h_1^2 + q_1^2}}{2}, \quad (10)$$

waaruit m.b.v. Vgl.(9) volgt:

$$t_1 = \tan \alpha_1 = \rho_1 \sqrt{\frac{h_1^2 + q_1^2}{4 - \rho_1^2(h_1^2 + q_1^2)}} \quad (11)$$

Opdat de wortel in het rechterlid bestaat moet  $\rho_1$  klein genoeg genomen worden; hij moet voldoen aan Vgl.(4). Nu kunnen, uitgaande van  $t_1$ , de overige  $t_i$ 's ( $i = 2, \dots, n$ ) berekend worden m.b.v. Vgl.(8), die ook geschreven kan worden als:

$$t_{i+1} = \frac{q_{i+1}(t_i q_i - h_i) + h_{i+1}(t_i h_i + q_i)}{h_{i+1}(t_i q_i - h_i) - q_{i+1}(t_i h_i + q_i)}. \quad (12)$$

De bijbehorende krommingen volgen uit Vgln.(7) en (9):

$$\rho_i = \frac{2 \sin \alpha_i}{\sqrt{h_i^2 + q_i^2}} = \frac{2t_i}{\sqrt{(h_i^2 + q_i^2)(1 + t_i^2)}}. \quad (13)$$

Een probleem bij deze berekeningen kan zich voordoen als één van de  $\alpha$ 's gelijk is aan  $\frac{\pi}{2}$  of  $-\frac{\pi}{2}$ . Dit kan alleen voorkomen als het voorwerp een segment bevat, waarvan de rand precies een halve cirkel is. Dit leidt tot onrealistische vormen. We kunnen daarom aannemen dat in de praktijk  $|\alpha_i|$  strict kleiner is dan  $\pi/2$  voor alle  $i$ .

M.b.v. de vgln.(11), (12) en (13) kunnen nu alle kromtestralen berekend worden uit de basisvariabelen. We hebben voor het gemak  $j = 1$  genomen, maar we kunnen de berekening doen startende vanuit ieder segment met bekende kromming.

## 6 Gebruik van het programma

Met het programma kan de gebruiker inzicht verkrijgen in de vorm en de precieze afmetingen (inclusief volume en oppervlakte) van een glazen voorwerp. Een ernstige beperking is wel, dat de gebruiker al informatie moet hebben over de waarden van de basisvariabelen. Als hij daarvan een goede schatting kan geven, zal de bijbehorende vorm in het algemeen goed overeenkomen met de gewenste vorm. Als de schatting echter niet goed is, kan de bijbehorende vorm ook totaal verschillend zijn van de gewenste vorm. Segmenten die hol zouden moeten zijn, kunnen dan bol worden, en omgekeerd.

Tot nu toe is het dus zo, dat de gebruiker zelf de waarden van de basisvariabelen moet veranderen om de vorm van het voorwerp te verbeteren. In veel gevallen is het eenvoudig in te zien, waar de afmetingen bijgesteld moeten worden om een betere vorm te verkrijgen. Dit proces van schatten en aanpassen kan echter veel tijd kosten.

Wanneer men het programma opstart (in Turbo Pascal met behulp van CTRL-F9), verschijnt de eerste vraag: "Wat is het aantal segmenten (maximaal 10)?" De gebruiker dient hier een natuurlijk getal  $n$  tussen 1 en 10 in te geven.

Vervolgens vraagt het programma om de boven- en onderdiameters van alle segmenten, en de hoogten van de segmenten, in de volgende volgorde:

$$d_0, h_1, d_1, h_2, \dots, d_{n-1}, h_n, d_n. \quad (14)$$

Deze afmetingen dienen strict positief te zijn.

Nu heeft het programma nog één gegeven nodig, namelijk de kromming van een door de gebruiker te kiezen segment. Omdat de gebruiker waarschijnlijk uitgaat van de kromtestraal in plaats van de kromming, dient hij, na het nummer van het segment waarvan de kromtestraal bekend is, de kromtestraal van dit segment in te geven, waarbij de kromtestraal van een conisch segment even aangegeven moet worden met 0. De reden hiervoor is, dat het onmogelijk is om de werkelijke kromtestraal (oneindig) in te voeren. Verder wordt een bol segment aangegeven met een positieve kromtestraal en een hol segment met een negatieve.

Het is mogelijk, dat de ingevoerde kromtestraal in absolute waarde niet groot genoeg is, zie vgl. (4). In dat geval wordt om een nieuwe kromtestraal gevraagd.

Als alle basisvariabelen ingevoerd zijn, berekent het programma recursief de ontbrekende variabelen  $q_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\alpha_i$  en  $t_i$ , voor alle  $i$ . Deze worden afgedrukt op het beeldscherm.

Het is mogelijk, dat de recursieve berekeningen leiden tot een ontoelaatbaar flesje. Dit wordt zo vroeg mogelijk gecontroleerd. Is dit het geval, dan wordt de berekening

afgebroken en verschijnt een melding op het beeldscherm.

We nemen even aan, dat het flesje toelaatbaar is. Nadat de gebruiker op een willekeurige toets heeft gedrukt, berekent het programma het volume en de oppervlakte van het voorwerp en drukt deze af op het beeldscherm.

Als de gebruiker nu weer op een willekeurige toets drukt, verschijnt op het beeldscherm een afbeelding van het flesje.

Voor een aantal variabelen heeft het programma een ingebouwde controle op de invoer. Dit geldt echter niet voor de diameters en de hoogten, die positief moeten zijn. Hier dient de gebruiker dus zelf zijn invoer te controleren.

## 7 Aanbevelingen voor uitbreiding

In dit hoofdstuk zullen we in het kort twee uitbreidingen van ons programma bespreken. De eerste mogelijkheid is het interactief maken van het programma. De tweede optie is het inbouwen van een zoekalgoritme, dat bij een willekeurige verzameling van gegevens de ontbrekende gegevens bepaalt met behulp van de vergelijkingen waaraan moet worden voldaan.

### 7.1 Een interactief programma

De eerste mogelijkheid betekent slechts een kleine uitbreiding van het bestaande programma, die het mogelijk maakt om slechts één basisvariabele te veranderen, in plaats van opnieuw het programma op te starten en alle variabelen in te voeren.

Om dit te verkrijgen moet er een menu ingebouwd worden dat de gebruiker na het tonen van de figuur op het beeldscherm laat kiezen tussen

- veranderen van een segmenthoogte,
- veranderen van een tussendiameter,
- veranderen van de waarde van de gegeven kromtestraal,
- invoeren van een nieuw segmentnummer met bijbehorende kromtestraal, of
- beëindigen van het programma.

In het bestaande programma wordt het inlezen van de basisvariabelen gedaan binnen de procedure die de ontbrekende variabelen uitrekent. Als we het programma willen uitbreiden, moeten we dus eerst deze procedure splitsen in een inlees- en een rekenprocedure, om het rekengedeelte meerdere malen te kunnen gebruiken. De procedures, die het volume en de oppervlakte berekenen, zijn al zelfstandige onderdelen die gemakkelijk vaker aangeroepen kunnen worden. Hetzelfde geldt voor de tekenprocedure.

Het spreekt verder voor zich, hoe bovenstaand menu geprogrammeerd moet worden.

### 7.2 Een zoekalgoritme

We zullen nu een beschrijving geven van een uitbreiding van het programma, zodanig, dat voor elke willekeurige set van vastgelegde gegevens de ontbrekende gegevens in een algoritme benaderd worden. We hebben in de voorgaande hoofdstukken een

beschrijving gegeven van een glazen voorwerp met behulp van verschillende variabelen en vergelijkingen. We geven de variabelen even algemeen aan met

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \quad (15)$$

waarbij  $m = 3n + 1$  voor een voorwerp met  $n$  segmenten. We kiezen de variabelen zo, dat de eerste  $2n+2$  variabelen de basisvariabelen zijn. Voor het gemak definiëren we hierbij

$$\begin{aligned} J_1 &:= \{1, 2, \dots, 2n + 2\}, \\ J_2 &:= \{2n + 3, 2n + 4, \dots, 3n + 1\}. \end{aligned}$$

We willen nu eerst een willekeurige verzameling variabelen vastleggen, zeg

$$x_i = z_i \text{ voor } i \in I, \quad (16)$$

waarbij  $I$  een willekeurige deelverzameling is van  $\{1, \dots, m\}$  met  $p = 2n + 2$  elementen. Daarna zoeken we een vector  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{3n+1}$  waarvan de corresponderende elementen gelijk zijn aan de gegeven waarden, dus

$$x_i^{(0)} = z_i, \quad i \in I. \quad (17)$$

Bovendien moeten de elementen van de vector voldoen aan de  $n - 1$  aansluitingscondities, die in sectie 5.3 beschreven zijn.

Is dit het geval, dan beschrijft deze vector precies één flesje, dat de voorgeschreven afmetingen  $z_i$  ( $i \in I$ ) heeft.

De vector  $\mathbf{x}^{(0)}$  is in het algemeen niet exact te bepalen. We willen daarom met behulp van een zoekalgoritme een rij vectoren

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}, \dots \in \mathbb{R}^{3n+1}$$

berekenen die naar de onbekende vector  $\mathbf{x}^{(0)}$  convergeert. We doen dit door voor elke vector de basisvariabelen te kiezen, en vervolgens de overige variabelen te berekenen met behulp van het bestaande programma. Het is logisch om de vectoren  $\mathbf{y}^{(j)}$  in ieder geval zo te construeren, dat de corresponderende flesjes voor wat betreft de basisvariabelen de voorgeschreven afmetingen  $z_i$  hebben, dus

$$y_i^{(j)} = z_i \text{ voor } (i \in I \cap J_1). \quad (18)$$

We kunnen alleen beoordelen of een vector  $\mathbf{y}^{(j)}$  het gewenste flesje goed benadert, door te bekijken in welke mate de overige voorgeschreven waarden  $z_i$  ( $i \in I \cap J_2$ ) overeenkomen met de zojuist berekende niet-basisvariabelen. We kunnen deze condities schrijven als

$$(\mathbf{y}^{(j)})_i = z_i \text{ (} i \in I \cap J_2 \text{)} \quad (19)$$

We definiëren nu een functie  $F$  die aangeeft in welke mate deze condities vervuld zijn, als volgt:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I \cap J_2} (x_i - z_i)^2. \quad (20)$$

De functie  $F$  kan beschouwd worden als een boetefunctie, die groter is naarmate de afmetingen van het flesje meer van de vereiste waarden afwijken. We zien, dat  $F(\mathbf{x}) = 0$  dan en slechts dan als de vector  $\mathbf{x}$  precies de gezochte vector  $\mathbf{x}^{(0)}$  is. We moeten dus een minimum zoeken voor  $F$ , met (17) als nevenvoorwaarden.

Er zijn veel verschillende algoritmen om het minimum van een functie iteratief te bepalen. De structuur van deze algoritmen is de volgende. Eerst wordt een startvector  $\mathbf{y}^{(1)}$  gekozen. Dan wordt bekeken of deze vector een kleine functiewaarde oplevert, dus of

$$F(\mathbf{y}^{(1)}) < \varepsilon, \quad (21)$$

waarbij  $\varepsilon > 0$  een vooraf gekozen tolerantie is. Als aan (21) voldaan is, wordt het algoritme afgebroken en is  $\mathbf{y}^{(1)}$  de uiteindelijke benadering van  $\mathbf{x}^{(0)}$ . In het andere geval wordt een nieuwe benadering gezocht. Daarvoor wordt eerst een zoekrichting  $\mathbf{p}^{(1)}$  gekozen, waarin de vector  $\mathbf{y}^{(1)}$  dient te veranderen. De nieuwe benadering  $\mathbf{y}^{(2)}$  is dan van de vorm

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{y}^{(1)} + \alpha_1 \cdot \mathbf{p}^{(1)}, \quad (22)$$

voor een  $\alpha_1 > 0$ . Deze  $\alpha_1$  wordt zodanig bepaald, dat  $F$  zo veel mogelijk afneemt.

Vervolgens wordt bepaald of  $\mathbf{y}^{(2)}$  goed genoeg is, analoog aan (21). Dit proces herhaalt zich totdat een benadering gevonden wordt die wel voldoet. We kunnen verwachten, dat deze benadering weinig afwijkt van de gezochte waarde  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

De bestaande algoritmen verschillen vooral in de wijze waarop de zoekrichting gekozen wordt, en in de methode om de zoekstappen  $\alpha_i$  te bepalen.

Het is goed mogelijk om extra variabelen aan de beschrijving van het flesje toe te voegen, zoals de totale hoogte, het totale volume of hoeken tussen segmentranden en de horizontaal. Bij een variabele hoort steeds een vergelijking die aangeeft hoe de nieuwe variabele samenhangt met de andere variabelen, zoals bijvoorbeeld

$$H = \sum_{i=1}^n h_i.$$

Deze nieuwe variabelen behoren dan ook tot de niet-basisvariabelen.

## A Volume en oppervlakte van een segment

In sectie 4.1 is opgemerkt dat het volume en de oppervlakte van een voorwerp berekend kunnen worden door het volume en de oppervlakte van de afzonderlijke segmenten op te tellen. Hier zullen de formules voor deze grootheden worden afgeleid.

Het volume van het omwentelingslichaam, dat ontstaat door de niet-negatieve functie  $r(z)$  ( $0 \leq z \leq h$ ) om de  $z$ -as (symmetrie-as) te roteren, wordt gegeven door:

$$V = \pi \int_0^h r^2(z) dz. \quad (23)$$

Voor een segment waarvan de maten, die in sectie 4.1 genoemd zijn, gegeven zijn, kan het volume berekend worden. Om de notatie eenvoudig te houden, gebruiken we hier als maten de onderstraal  $a = d_o/2$ , de bovenstraal  $b = d_b/2$  en de kromtestraal  $R = 1/\rho$  in plaats van de diameters en de kromming. We nemen de oorsprong  $(r, z) = (0, 0)$  van het coördinatenstelsel aan de "onderzijde" van het segment.

Voor een recht segment is  $r$  lineair:  $r(z) = a + z(b-a)/h$ . Invullen in Vgl.(23) levert het volume van een afgeknotte kegel:

$$V = \frac{1}{3} \pi (a^2 + ab + b^2) h. \quad (24)$$

Voor een gekromd segment geldt:

$$(r - m_1)^2 + (z - m_2)^2 = R^2, \quad (25)$$

waarin  $(m_1, m_2)$  het middelpunt van de cirkel(boog) is. Deze coördinaten worden gegeven door (zie Vgl.(46) in Appendix B):

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \left( a + b - \sigma h \sqrt{\frac{4R^2 - k^2}{k^2}} \right), \\ m_2 &= \frac{1}{2} \left( h + \sigma(b-a) \sqrt{\frac{4R^2 - k^2}{k^2}} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

waarin:

$$k^2 = h^2 + (b-a)^2 \quad (27)$$



en

$$\sigma = \operatorname{sgn}(\rho), \quad (28)$$

dus  $\sigma$  is +1 voor een bol en -1 voor een hol segment.

Uit Vgl. (25) volgt voor een bol of hol segment:

$$r(z) = m_1 + \sigma \cdot \sqrt{R^2 - (z - m_2)^2}, \quad (29)$$

waarmee Vgl. (23) wordt:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^h \left( m_1 + \sigma \cdot \sqrt{R^2 - (z - m_2)^2} \right)^2 dz \\ &= \pi \cdot \int_0^h \left[ m_1^2 + 2 m_1 \sigma \cdot \sqrt{R^2 - (z - m_2)^2} + R^2 - (z - m_2)^2 \right] dz \\ &= \pi \cdot \int_0^h (m_1^2 + R^2) dz + \pi \cdot m_1 \sigma \cdot \int_0^h 2\sqrt{R^2 - (z - m_2)^2} dz + \\ &\quad + \pi \cdot \int_0^h (-1) \cdot (z - m_2)^2 dz. \end{aligned}$$

De eerste term van het rechterlid is gelijk aan

$$\pi h(m_1^2 + R^2) \quad (30)$$

en de derde term kan geschreven worden als

$$\pi \cdot [f(h) - f(0)], \quad (31)$$

met

$$f(z) := -\frac{1}{3}(z - m_2)^3. \quad (32)$$

De tweede term is iets ingewikkelder. De functie

$$z \mapsto 2\sqrt{R^2 - (z - m_2)^2} \quad (33)$$

heeft als primitieve

$$g(z) := (z - m_2) \cdot \sqrt{R^2 - (z - m_2)^2} + R^2 \cdot \arcsin\left(\frac{z - m_2}{|R|}\right). \quad (34)$$

De tweede term kan dus geschreven worden als

$$\pi m_1 \sigma \cdot [g(h) - g(0)]. \quad (35)$$

Het totale volume van een gekromd segment is dus

$$V = \pi h(m_1^2 + R^2) + \pi m_1 \sigma \cdot [g(h) - g(0)] + \pi \cdot [f(h) - f(0)]. \quad (36)$$

Nu zullen we de formules voor de manteloppervlakte van een segment afleiden. De manteloppervlakte van een omwentelingslichaam, zoals beschreven voorafgaande aan Vgl.(23) is gelijk aan

$$S = 2\pi \int_0^h r(z) \sqrt{1 + [r'(z)]^2} dz. \quad (37)$$

Voor een recht segment is de functie  $r$  gegeven door  $r(z) = a + z(b - a)/h$ , dus geldt voor de oppervlakte  $S$  de eenvoudige formule

$$S = (a + b)\pi \sqrt{h^2 + (b - a)^2}. \quad (38)$$

Voor een gekromd segment gebruiken we weer

$$r(z) = m_1 + \sigma \cdot \sqrt{R^2 - (z - m_2)^2}, \quad (39)$$

met  $m_1$  en  $m_2$  als in Vgl. (26). Differentiatie levert

$$r'(z) = \frac{-\sigma \cdot (z - m_2)}{\sqrt{R^2 - (z - m_2)^2}}, \quad (40)$$

dus

$$\begin{aligned} r(z) \cdot \sqrt{1 + (r'(z))^2} &= \left( m_1 + \sigma \cdot \sqrt{R^2 - (z - m_2)^2} \right) \cdot \frac{|R|}{\sqrt{R^2 - (z - m_2)^2}} \\ &= \frac{m_1 |R|}{\sqrt{R^2 - (z - m_2)^2}} + R, \end{aligned}$$

zodat

$$S = 2\pi \cdot m_1 |R| \cdot \left[ \arcsin \left( \frac{z - m_2}{|R|} \right) \right]_{z=0}^{z=h} + 2\pi R h. \quad (41)$$

## B Afleiding van aansluitvoorwaarde

In sectie 5.3 is de aansluitvoorwaarde, uitgedrukt in de basisvariabelen, gegeven. Deze vergelijking zal hier afgeleid worden, gebruik makend van de maten in figuur 10.

De lengte van de koorde  $k_i$ , die  $A_i$  met  $A_{i+1}$  verbindt, is

$$k_i = \sqrt{h_i^2 + q_i^2}. \quad (42)$$

Het snijpunt van deze koorde met de middelloodlijn van  $A_i A_{i+1}$  is  $P_i$ . De vector  $O_i \vec{P}_i$  wordt gegeven door:

$$O_i \vec{P}_i = \left( \frac{d_{i-1} + d_i}{4}, \frac{h_i}{2} \right). \quad (43)$$

Als we  $P_i M_i$  aangeven met  $l_i$ , dan geldt

$$t_i = \tan \alpha_i = \frac{k_i}{2l_i}. \quad (44)$$

Het teken van  $l_i$  is gelijk aan dat van  $\rho_i$  en  $t_i$ . De vector  $P_i \vec{M}_i$  heeft lengte  $|l_i|$ , staat loodrecht op  $A_i A_{i+1}$  en wijst naar buiten voor een hol segment en naar binnen voor een bol segment. We kunnen deze vector schrijven als:

$$P_i \vec{M}_i = \frac{l_i}{k_i} (-h_i, q_i) = \frac{1}{2t_i} (-h_i, q_i), \quad (45)$$

waarin Vgl.(44) gebruikt is. M.b.v. Vgln.(43) en (45) vinden we de plaats van het middelpunt:

$$O_i \vec{M}_i = O_i \vec{P}_i + P_i \vec{M}_i = \left( \frac{d_{i-1} + d_i}{4} - \frac{h_i}{2t_i}, \frac{h_i}{2} + \frac{q_i}{2t_i} \right). \quad (46)$$

De plaatsvectoren van de aansluitpunten zijn  $O_i \vec{A}_i = (\frac{d_{i-1}}{2}, h_i)$  en  $O_i \vec{A}_{i+1} = (\frac{d_i}{2}, 0)$ . Hiermee en met Vgl.(46) vinden we uitdrukkingen voor de normaalvectoren op het glas  $\vec{b}_i$  en  $\vec{c}_i$  in het bovenste resp. onderste aansluitpunt:

$$\begin{aligned} \vec{b}_i &= A_i \vec{M}_i = O_i \vec{M}_i - O_i \vec{A}_i = \left( -\frac{q_i}{2} - \frac{h_i}{2t_i}, -\frac{h_i}{2} + \frac{q_i}{2t_i} \right), \\ \vec{c}_i &= A_{i+1} \vec{M}_i = O_i \vec{M}_i - O_i \vec{A}_{i+1} = \left( \frac{q_i}{2} - \frac{h_i}{2t_i}, \frac{h_i}{2} + \frac{q_i}{2t_i} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Hierin is de definitie van  $q_i$  uit sectie 5.2 gebruikt. De aansluitvoorwaarde houdt in dat de vectoren  $\vec{c}_i$  en  $\vec{b}_{i+1}$  afhankelijk moeten zijn. Dit betekent dat voor  $i = 1, \dots, n-1$  moet gelden:

$$c_{i,1}b_{i+1,2} = c_{i,2}b_{i+1,1}, \quad (48)$$

waarin  $c_{i,j}$  ( $j = 1, 2$ ) de  $j$ de component van de vector  $\vec{c}_i$  is. Als we beide leden met  $4t_i t_{i+1}$  vermenigvuldigen geeft dit:

$$(q_i t_i - h_i)(-h_{i+1} t_{i+1} + q_{i+1}) = (h_i t_i + q_i)(-q_{i+1} t_{i+1} - h_{i+1}). \quad (49)$$

Na enig hergroeperen van termen volgt hieruit de vergelijking aan het begin van sectie 5.3.