Aantekeningen van het college "voortgezette dynamica"

Aantekeningen van het college

"Voortgezette Dynamica"

WE 68-4

Prof. ir. W.L. Esmeyer

Opgetekend in het voorjaar 1967
door Ir. F.E. Veldpaus.
FEVeldpaus

Inhoud

Inleiding

In het college „Technische Dynamica" van Prof. ir. W.L. Esmeyer zijn de vrije en gedwongen trillingen van gedempte en ongedempte, lineaire massa-veersystemen met een of meer graden van vrijheid geanalyseerd. Daarbij werd gebruik gemaakt van de schematisering van fig. 1.

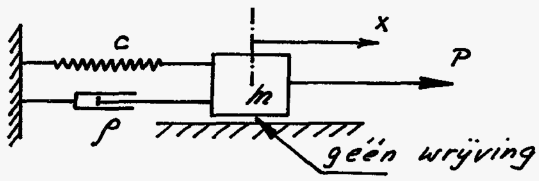


fig. 1.

De massa m is door een massaloze, lineaire veer (stijfheid c) en een eveneens massaloze en lineaire demper (dempingscoëfficiënt ρ) verbonden met de omgeving; op m werkt een uitwendige kracht $P = P(t)$. De massa kan zonder wrijving bewegen langs een geleiding, zodat alleen een beweging in x-richting mogelijk is. De oorsprong van het coordinatenstelsel (c.q. de x-as) ligt zodanig dat de veer ontspannen is als $x = 0$. De beweging wordt dan beschreven door de D.V (differentiaal-vergelyking):

$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + cx = P(t)$, waarin differentiëren naar t is aangegeven met een punt

Als m, ρ en c constant zijn is de exacte oplossing van deze D.V. op eenvoudige wijze te bepalen. Indiën echter een (of meer) van deze grootheden afhankelijk is (zijn) van x of t is het in vele gevallen onmogelijk de exacte oplossing $x = x(t)$ te verkrijgen. De bestudering van enkele van deze gevallen zal een der onderwerpen van dit college zijn

Het andere onderwerp van dit college is de analyse van vrije, ongedempte trillingen van lineaire massa-veersystemen met een willekeurig aantal graden van vrijheid.

Literatuur

Den Hartog : Mechanical Vibrations

Magnus : Schwingungen

Stoker : Non-linear Vibrations

Minorsky : Non-linear Oscillations

Hoofdstuk 1 Niet-lineaire trillingen

1.1. Inleiding.

In dit hoofdstuk worden al of niet gedempte massa-veersystemen met één graad van vrijheid bestudeerd. Steeds zal worden aangenomen dat de massa m onafhankelijk is van de tijd t; de krachten op de massa t.g.v. de demper en de veer kunnen niet-lineaire functies zijn van $\dot{x}$, x en t.

Fig 2 geeft een voorbeeld van een ongedempt systeem met een niet-lineaire veer.

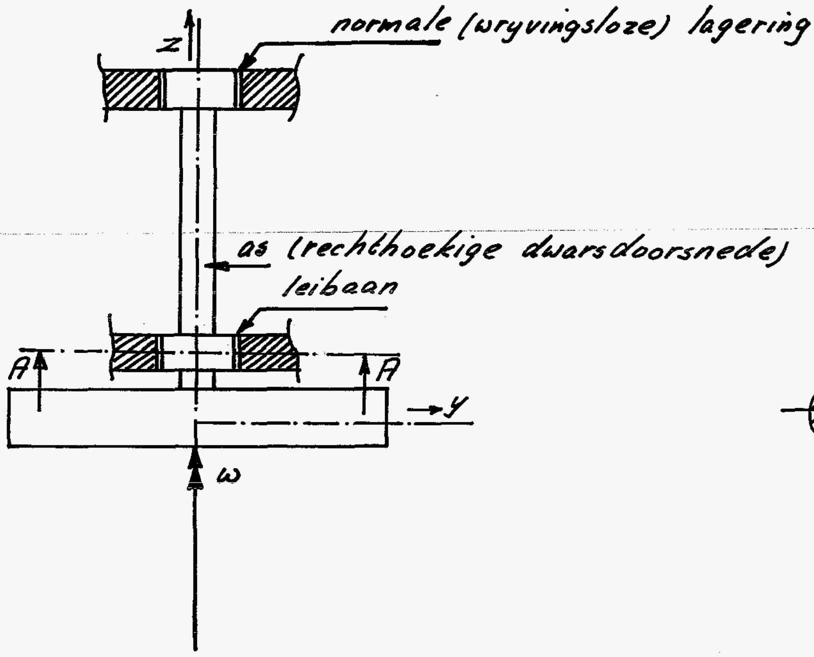
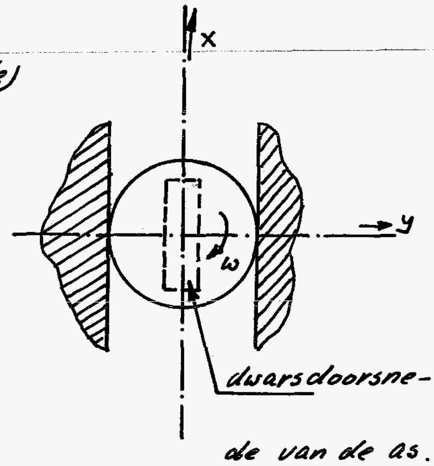


Fig. 2.



Doorsnede A-A

Het x-y-z assenstelsel is vast. De schijf en de as roteren met een constante hoeksnelheid ω om de z-as; doordat bij A een (wrijvingsloze) leibaan is aangebracht i.p.v. een normale lagering kan de schijf bewegen in x-richting. Hierbij wordt de elastische as gebogen. De stijfheid c tegen buiging om de y-as is afhankelijk van de tijd omdat het oppervlaktetraagheidsmoment van de dwarsdoorsnede van de as ten opzichte van de y-as variëert met de stand van de as. De beweging van de schijf in x-richting wordt gegeven door: $m\ddot{x}+cx=0$ waarin voor c geldt: $c=a+$ $+b\cos 2\omega t$ (fig. 3). De bewegingsvergelyking is dus: $m\ddot{x}+(a+b\cos 2\omega t)x=0$

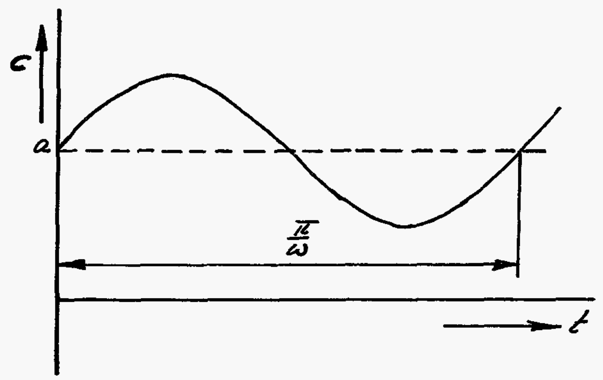


fig. 3.

Deze D.V., de vergelyking van Mathieu, is een speciaal geval van de veel algemenere D.V. van Hill: $m\ddot{x}+f(t).x=0$.

Beide D.V. zijn lineair in x; de coëfficiënten in de D.V. zijn echter niet constant. Dit soort vergelykingen zal verder niet geanalyseerd worden.

Het type D.V. dat zal worden bestudeerd wordt gegeven door de vergelijking: $m\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+f(x)=P(t)$ waarin $\varphi(\dot{x})$ en $f(x)$ niet lineaire functies zijn. De analytische behandeling van een niet-lineaire D.V. is veel ingewikkelder dan die van een lineaire omdat het superpositie-beginsel niet meer geldt. Beschouw de vergelijking $m\ddot{x}+cx^2=0$. Stel dat $x_1(t)$ en $x_2(t)$ verschillende, niet identiek gelijk aan nul zijnde oplossingen zijn. Met het superpositiebeginsel zou dan volgen dat ook $x_3=x_1+x_2$ oplossing is. Invullen leert dat dan $2c\,x_1.x_2$ gelijk moet zijn aan nul voor alle t. Dit is in tegenspraak met de aanname dat x_1 en x_2 niet voor alle t gelijk aan nul zijn.

In vele gevallen is het onmogelijk de exacte oplossing van een niet-lineaire D.V. te bepalen. Om tot bruikbare benaderingen te komen wordt gebruik gemaakt van een aantal hulpmiddelen waarvan er hier enige beschreven zullen worden. Het numeriek oplossen van de D.V. met behulp van rekenautomaten zal niet worden behandeld.

In fig. 4 is een voorbeeld gegeven van een systeem met verende aanslagen; de veerkarakteristiek (fig 5) hiervan is niet-lineair.

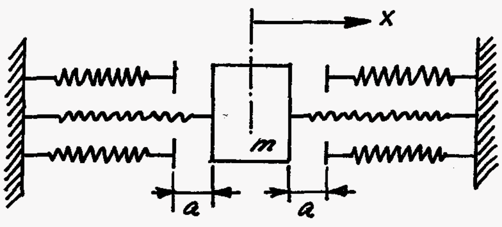


fig. 4

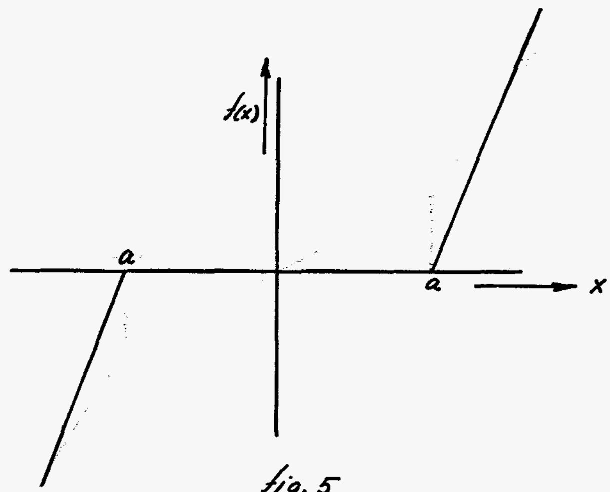


fig. 5

De niet-lineaire veersystemen kunnen verdeeld worden in harde en zachte systemen (fig 6).

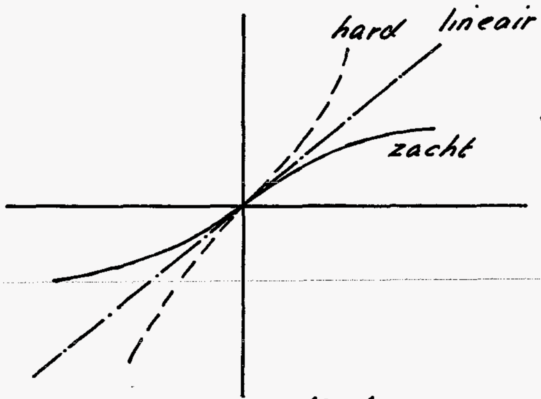


fig. 6

Een hard systeem is meer dan lineair, een zacht systeem is minder dan lineair.

Het systeem van fig 4 en fig 5 moet worden ingedeeld bij de harde veersystemen. Een interessant voorbeeld van een zacht systeem wordt geleverd door een fysische slinger in het zwaartekrachtsveld. Als I_0 het massatraagheidsmoment is van de slinger ten opzichte van het draaipunt dan is de bewegingsvergelijking : $I_0 \ddot{\varphi} + m.g.l.\sin\varphi = 0$, dus de veerkarakteristiek wordt gegeven door $f(\varphi) = m.g.l.\sin\varphi$ (fig. 8)

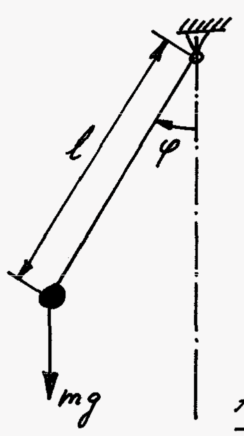


fig. 7

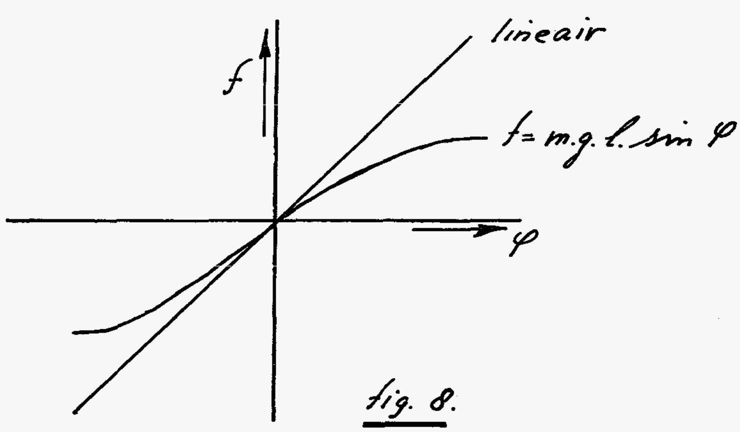


fig. 8.

Het bij $m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = P(t)$ behorende systeem kan schematisch voorgesteld worden zoals in fig. 9 is aangegeven.

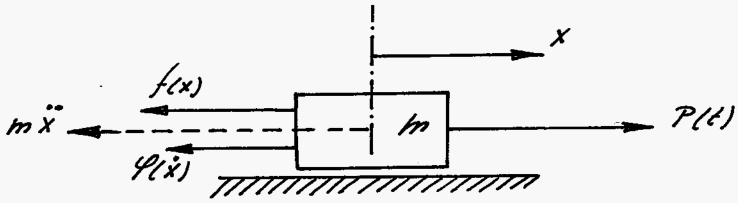


fig. 9.

De termen in de D.V. hebben allen een naam gekregen:

$m\ddot{x}$ is de traagheidskracht

$\varphi(\dot{x})$ is de dempende kracht

$f(x)$ is de veerkracht

$P(t)$ is de uitwendig opgedrukte kracht.

De door de dempende kracht per tydseenheid geleverde arbeid is gelijk aan $-\dot{x}\,\varphi(\dot{x})$. Als $\dot{x}\,\varphi(\dot{x})$ positief is wordt er door $\varphi(\dot{x})$ energie aan het systeem onttrokken; er is dan positieve demping. Indien $\dot{x}\,\varphi(\dot{x})$ echter negatief is wordt door $\varphi(\dot{x})$ energie toegevoerd aan het systeem, er is negatieve demping en het systeem wordt opgeslingerd. In een technisch interessant geval (dat van de zichzelf onderhoudende trillingen) geldt dat $\dot{x}\,\varphi(\dot{x})$ negatief is voor kleine $\dot{x}$ en positief voor grote $\dot{x}$. Dit zal hierna nog bestudeerd worden.

1.2 Fasevlak en integraalkrommen.

De algemene D.V. : $m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = P(t)$ heeft voor vrije ongedempte trillingen de vorm: $m\ddot{x} + f(x) = 0$. Met $\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,\frac{d\dot{x}}{dx} = v.\frac{dv}{dx}$ gaat deze vergelijking over in: $mv.\frac{dv}{dx} + f(x) = 0$, dus: $mv\,dv + f(x)\,dx = 0$

Na integreren van x_0 naar x volgt: $\frac{1}{2}mv_{(x)}^2 - \frac{1}{2}mv_{(x_0)}^2 + \int_{\xi=x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = 0$.

De in deze vergelijking optredende termen hebben een fysische betekenis, immers $\frac{1}{2}mv_{(x)}^2 - \frac{1}{2}mv_{(x_0)}^2$ is de toename van de kinetische energie terwijl $\int_{\xi=x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$ de toename is van de in de veer opgehoopte energie.

In een orthogonaal x-v assenstelsel kan deze vergelijking worden weergegeven door een kromme (fig.10).

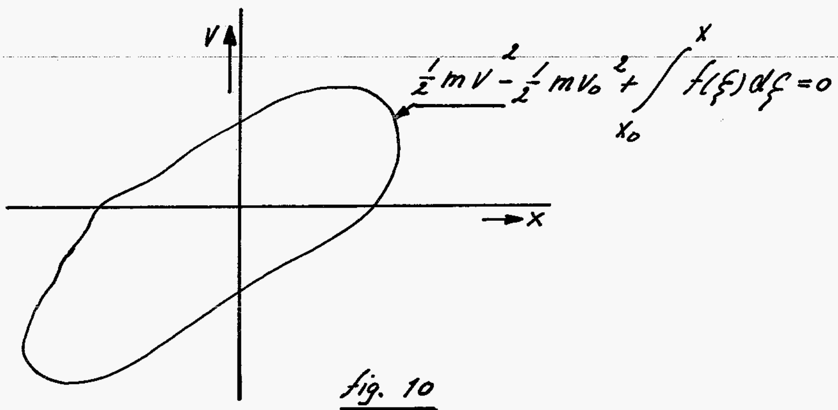


fig. 10

Het v-x vlak wordt fasevlak genoemd; de kromme met vergelijking $\frac{1}{2}mv_{(x)}^2 - \frac{1}{2}mv_{(x_0)}^2 + \int_{\xi=x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = 0$ is de integraal- of energiekromme.

Voor een vrij en ongedempt systeem met een lineaire veerkarakteristiek geldt $f(x) = cx$ en dus: $\frac{1}{2}mv_{(x)}^2 - \frac{1}{2}mv_{(x_0)}^2 + \frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{2}cx_0^2 = 0$. De vergelyking van de integraalkromme is dan: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}cx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}cx_0^2$; in het v-x vlak is dit een ellips. Als gesteld wordt: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ en $V = \frac{v}{\omega}$ volgt: $V^2 + x^2 = V_0^2 + x_0^2$. In het V-x vlak is de integraalkromme een cirkel (fig 11) met middelpunt in de oorsprong en een straal r die volgt uit: $r^2 = V_0^2 + x_0^2$

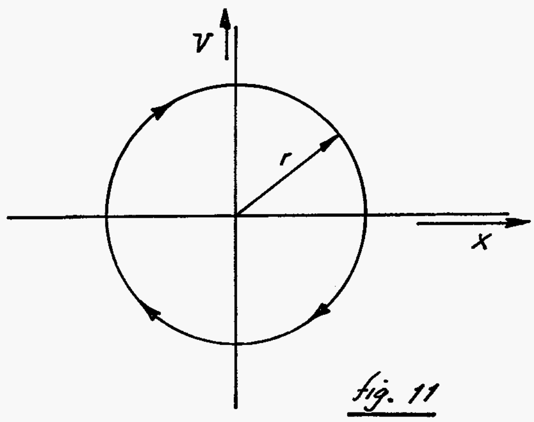


fig. 11

Omdat $V = \frac{v}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx}{dt}$ en zowel ω als dt positief zijn is het teken van V en dx voor alle t hetzelfde. Dit betekent dat de omloopzin in het V-x vlak is zoals die in fig 11 door pijlen is aangegeven. Deze redenering geldt niet alleen voor dit eenvoudige voorbeeld maar veel algemener: in het faseulak is de omloopzin steeds rechtsom.

Een ander voorbeeld waarbij de integraalkromme in het V-x vlak eenvoudig te bepalen is wordt geleverd door het systeem van fig. 12.

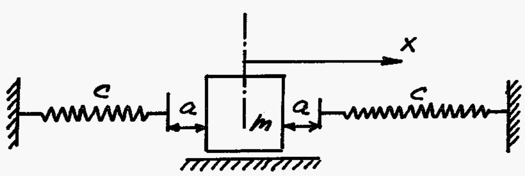


fig. 12.

Dit systeem bestaat uit een massa m en lineaire veren, waarbij tussen de massa en de veren speling optreedt. De coördinaat x is zodanig gekozen dat de massa zich juist midden tussen de veren bevindt als x gelijk is aan nul.

In het interval $|x| < a$ werkt er op m geen kracht zodat de snelheid v (en dus ook $V = \frac{v}{\omega}$) van m constant is. Voor $|x| \geq a$ ontstaat weer het eerder beschreven geval van een lineair massa-veersysteem. De integraalkromme in het V-x vlak bestaat dus uit een rechte lijn als $|x| < a$ en een cirkelboog als $|x| \geq a$ (fig 13).

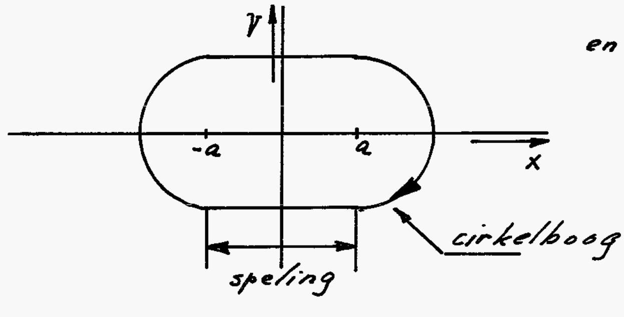


fig. 13.

Veronderstel nu dat de beweging van de massa m periodiek is, d.w.z. $x(t) = x(t+T)$ voor iedere willekeurige t. De grootheid T is de trillingstijd van de periodieke beweging. Dan geldt: $\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_{t=t_1} = \left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_{t=t_1+T}$ voor willekeurige n en t_1. Dit betekent dat na een tijd T in het v-x vlak weer precies dezelfde kromme wordt doorlopen: de integraalkromme is gesloten als de beweging periodiek is. Ook de omkering van de stelling is geldig: als de integraalkromme gesloten is dan is de beweging $x = x(t)$ periodiek. Het zal duidelijk zijn dat de tijd, die nodig is voor één omloop langs de gesloten kromme in het v-x vlak, gelijk is aan T sec. Dit levert de mogelijkheid om T te bepalen uit het v-x vlak, immers: $dt = \frac{dx}{v}$ en dus: $T = \oint \frac{dx}{v}$.

Voor een lineair massaveersysteem is T eenvoudig te bepalen. De vergelijking van de integraalkromme is: $V^2 + x^2 = V_0^2 + x_0^2 = r^2$ (fig 14).

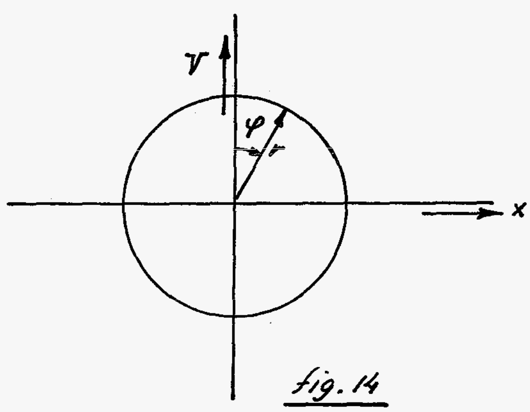


fig. 14

Stel $x = r \sin \varphi$

$V = r \cos \varphi = \frac{v}{\omega}$

Voor T volgt: $T = \oint \frac{dx}{v} = \frac{1}{\omega} \oint \frac{dx}{V} = \frac{2\pi}{\omega}$

Dit komt overeen met het reeds bekende resultaat (zie college Technische Dynamica).

Voor vrije gedempte systemen wordt de algemene D.V. van blz. 9 gereduceerd tot: $m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0$. Delen door m levert: $\ddot{x} + \frac{1}{m}.\varphi(\dot{x}) + \frac{1}{m}.f(x) = 0$. In het vervolg wordt deze vergelijking steeds geschreven als: $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0$; $\varphi(\dot{x})$ en $f(x)$ zijn dan niet meer de dempende kracht, resp. de veerkracht maar zij zijn gelijk aan die grootheden gedeeld door de massa m.

Met $\ddot{x} = v\frac{dv}{dx}$ volgt: $v\frac{dv}{dx} = -\{\varphi(\dot{x}) + f(x)\}$. In het v-x vlak is $\frac{dv}{dx}$ in een punt (x,v) gelijk aan de richtingscoëfficiënt (rc) van de raaklijn aan de integraalkromme in dat punt. Voor $v \neq 0$ geldt dus: $\frac{dv}{dx} = -\frac{\varphi(v)+f(x)}{v}$. De verzameling van punten in het v-x vlak waar de helling van de raaklijn aan integraalkromme gelijk is, wordt isocline genoemd. In elk punt van de γ-isocline geldt $\gamma = \frac{dv}{dx}$ = constant. De vergelijking van deze isocline volgt uit: $\frac{dv}{dx} = \gamma = -\frac{\varphi(v)+f(x)}{v}$ (fig. 15)

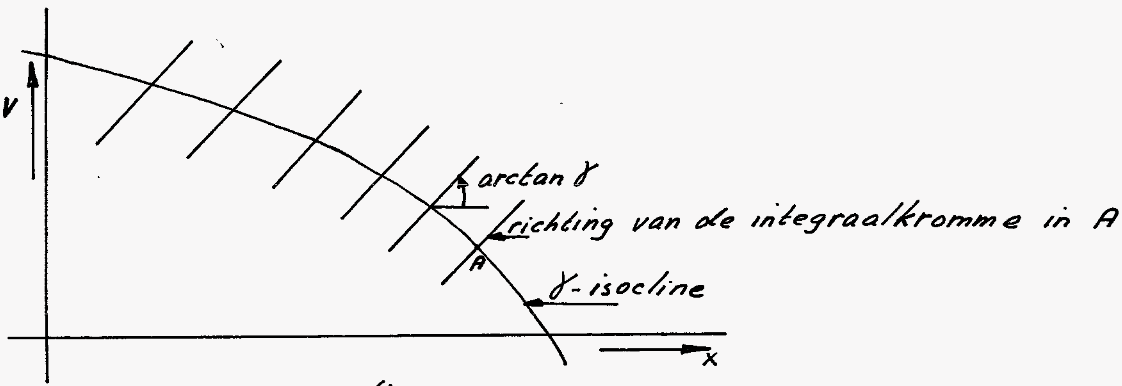


fig. 15

Uit de definitie volgt dat de nulisocline die verzameling van punten is waarin de integraalkromme een horizontale raaklijn heeft. De vergelijking van deze zeer belangrijke isocline is: $\varphi(v) = -f(x)$.

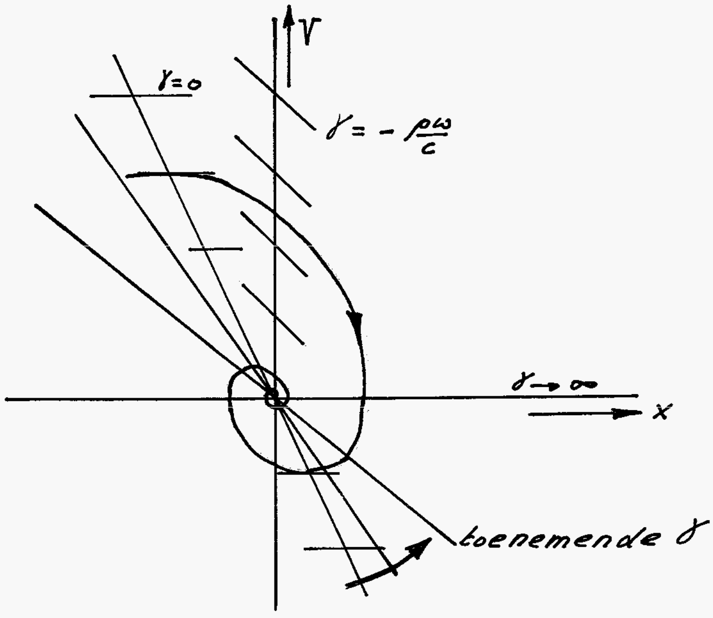
Op de x-as geldt $v = \dot{x} = 0$; als $\varphi(0) + f(x)$ ongelijk is aan nul volgt uit $v\frac{dv}{dx} = -\{\varphi(v) + f(x)\}$ dat $\frac{dv}{dx}$ oneindig groot is. De integraalkromme snijdt de x-as dus loodrecht in die punten waarin $\varphi(0) + f(x)$ ongelijk is aan nul. Als er op de x-as echter punten zijn waar $\varphi(0) + f(x)$ gelijk is aan nul (d.w.z. in snijpunten van de nulisocline met de x-as) kan geën uitspraak gedaan worden over de grootte van $\frac{dv}{dx}$. Deze punten heten singuliër.

Reeds eerder (blz. 11) is vermeld dat de integraalkromme gesloten is dan en slechts dan als de beweging periodiek is. Ook de volgende stelling bestaat: als $\dot{x}\varphi(\dot{x}) = v\varphi(v)$ voor alle $\dot{x} \neq 0$ hetzij positief, hetzij negatief is dan is er geen periodieke beweging mogelijk; de integraalkromme kan dan niet gesloten zijn. Deze stelling wordt bewezen uit het on-

gerijmde. Neem aan dat de integraalkromme gesloten is en dat $v\varphi(v)$ steeds hetzelfde teken heeft. Uit integratie van de D.V. langs deze gesloten kromme volgt: $\oint \ddot{x}dx + \oint \varphi(v)\,dx + \oint f(x)dx = 0$. Steeds geldt: $\oint \ddot{x}dx = \oint v.\frac{dv}{dx}.dx = \oint v.dv = 0$ en $\oint f(x)dx = 0$, dus $\oint \varphi(v).dx = 0$.
$\oint \varphi(v).dx = \int_{t=0}^{T} v.\varphi(v).dt$ waarin T de trillingstijd is van de periodiek veronderstelde beweging is. Omdat $v.\varphi(v)$ steeds hetzelfde teken heeft is zeker $\int_{0}^{T} v.\varphi(v).dt$ ongelijk aan nul. Uit de tegenspraak volgt dat de aanname – de beweging is periodiek – niet waar kan zijn: de integraalkromme is dus <u>niet</u> gesloten.

<u>Voorbeeld</u>: lineair massaveersysteem met demping.

De D.V. voor dit systeem is $m\ddot{x} + p\dot{x} + cx = 0$, met constante en positieve p en c. Met $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ en $V = \frac{v}{\omega}$ wordt deze vergelijking: $V.\frac{dV}{dx} + \frac{p\omega}{c}V + x = 0$, dus: $\frac{dV}{dx} = -\frac{\frac{p\omega}{c}.V + x}{V}$. De γ-isocline wordt gegeven door $\gamma = -\frac{1}{V}\left(x + \frac{p\omega}{c}.V\right)$ waaruit volgt: $x = -\left(\gamma + \frac{p\omega}{c}\right)V$. De nulisocline: $x = -\frac{p\omega}{c}.V$ is een rechte lijn in het $(V-x)$ vlak. Het punt $(x,V) = (0,0)$ is een singulier punt omdat dit het snijpunt is van de nulisocline met de x-as. Aangezien $v\varphi(v) = v.pv = pv^2$ steeds positief is kan de integraalkromme niet gesloten zijn. Dit blijkt ook uit fig.16: de integraalkromme is een spiraal naar binnen.



<u>fig.16.</u>

1.3. Methode van Lienard met als toepassing het slip-stick verschijnsel.

Bij willekeurige $\varphi(v)$ en $f(x)$ kan het bepalen van de integraalkromme m.b.v. isoclinen veel moeilijkheden leveren om een nauwkeurig resultaat te bereiken. Als $f(x)$ echter lineair is in x bestaat er een veel elegantere methode die in 1928 door Lienard is aangegeven. Bij lineaire $f(x)$ kan voor de D.V. geschreven worden: $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + x = 0$, dus: $v.\frac{dv}{dx} + \varphi(v) + x = 0$. Voor $v \neq 0$ volgt: $\frac{dv}{dx} = -\frac{x+\varphi(v)}{v} = \gamma$. De nul-isocline $x = -\varphi(v)$ wordt de Lienard-kromme L genoemd. Deze kromme blijkt een handig hulpmiddel te zijn bij de constructie van de integraalkromme. Voor een beschrijving van deze constructie wordt gebruik gemaakt van fig. 17

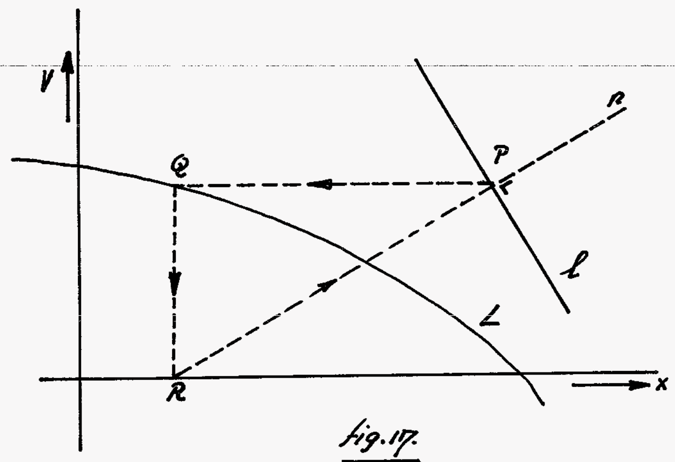


fig. 17.

In het v-x vlak is een punt P gegeven. De lijnen n en ℓ (loodrecht op n) worden op de aangegeven wijze geconstrueerd.

De richtingscoëfficiënt van n is rc_n; $rc_n = \frac{v_P}{x_P - x_Q}$. Punt Q ligt op de nul-isokline, dus geldt: $x_Q = -\varphi(v_Q) = -\varphi(v_P)$. Voor rc_n geldt:

$$rc_n = \frac{v_P}{x_P + \varphi(v_P)} = -\frac{1}{\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=x_P}}, \text{ dus: } rc_n.\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=x_P} = -1.$$

De raaklijn aan de integraalkromme in P staat daarom loodrecht op n, d.w.z. ℓ valt samen met die raaklijn.

Het systeem met D.V. $m\ddot{x} + p\dot{x} + cx = 0$ heeft een lineaire veerkarakteristiek en voldoet derhalve aan de gestelde eis. Met: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ en $V = \frac{v}{\omega}$ volgt: $V.\frac{dV}{dx} + \frac{p\omega_0}{c}V + x = 0$. De Lienard-kromme L is: $x = -\frac{p\omega}{c}V$

De integraalkromme (fig. 18) is weer de spiraal naar binnen waarvan hier voor reeds sprake was.

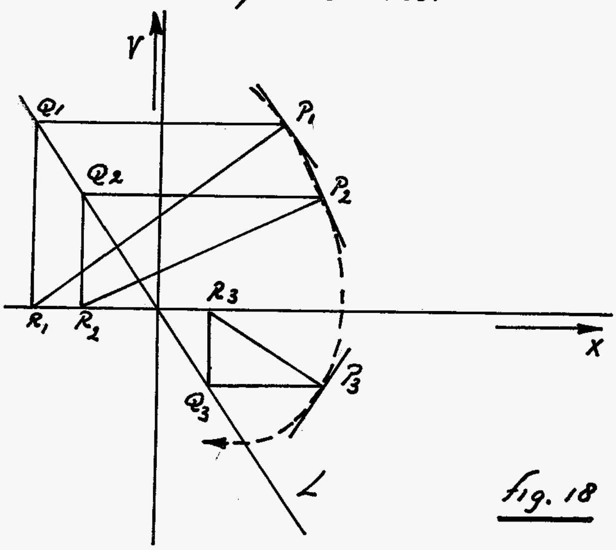


fig. 18

Voor een ongedempt massa-veersysteem met lineaire veer wordt de vergelijking van L gegeven door $x=0$. De integraalkromme is dan een cirkel met middelpunt in de oorsprong van het v-x assenkruis.

De enige eis die aan de dempende kracht $\varphi(v)$ gesteld is, is dat $\varphi(v)$ alleen een functie mag zijn van de snelheid v; het kan een slechts stuksgewijze continue en differentiëerbare functie van v zijn, zoals bij voorbeeld het geval is voor een systeem met wrijving (fig 19 en fig 20).

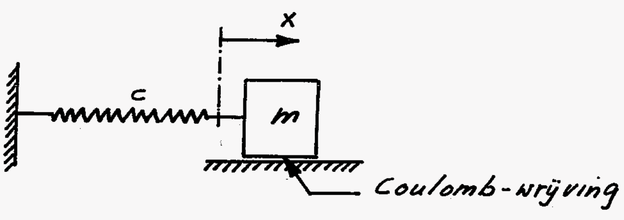


fig. 19

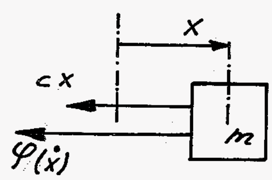


fig. 20

Voor $x=0$ is de veer ontspannen; $\varphi(v)$ is de kracht die door de ondergrond (de geleiding) op m wordt uitgeoefend, positief in de aangegeven richting. Fig. 21 geeft het verband tussen v en $\varphi(v)$. De bewegingsvergelijking is $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + x = 0$, zodat voor de Liénard-kromme L volgt: $x = -\varphi(v)$.

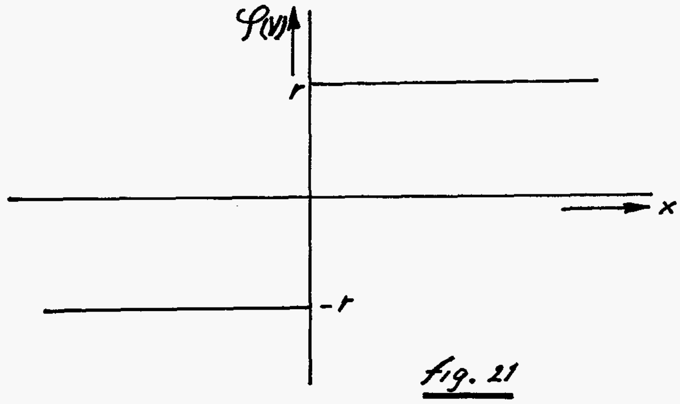


fig. 21

$P = (x_0, V_0)$ is een willekeurig beginpunt. Uit het voorgaande volgt dat de integraalkromme (fig 22) bestaat uit een cirkelboog om punt A als $V \geq 0$ en om punt B als V niet positief is. De massa komt tot stilstand in het punt C, zoals op eenvoudige wijze is aan te tonen door m een kleine snelheid δV te geven. Omdat c ligt tussen de punten A en B volgt uit de Liënardconstructie dat de snelheid weer tot nul afneemt. Punt C wordt daarom een stabiel rustpunt genoemd.

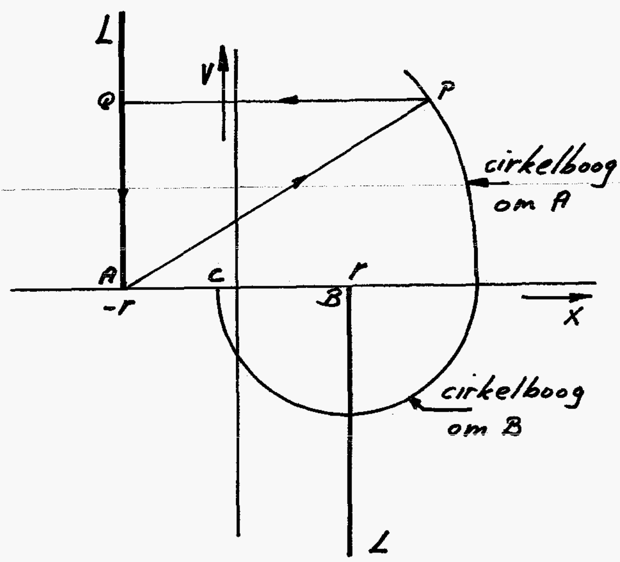


fig. 22

De ingevoerde grootheid δV moet beschouwd worden als een stoorsnelheid die gesuperponeerd wordt op de werkelijke snelheid V.

Het behandelde voorbeeld kan worden uitgebreid door te veronderstellen dat de ondergrond beweegt met een snelheid V_0 en dat tussen ondergrond en massa droge wrijving optreedt i.p.v. Coulombwrijving (fig. 23). Fig 24 geeft de geïdealiseerde karakteristiek van droge wrijving; V_{rel} is de relatieve snelheid van de massa m t.o.v. de ondergrond, dus $V_{rel} = V - V_0$.

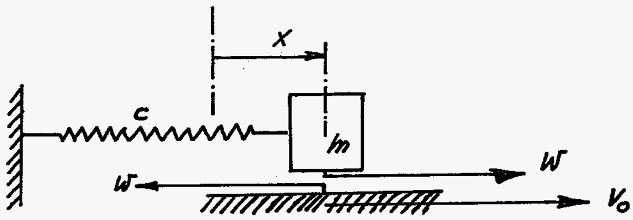


fig. 23

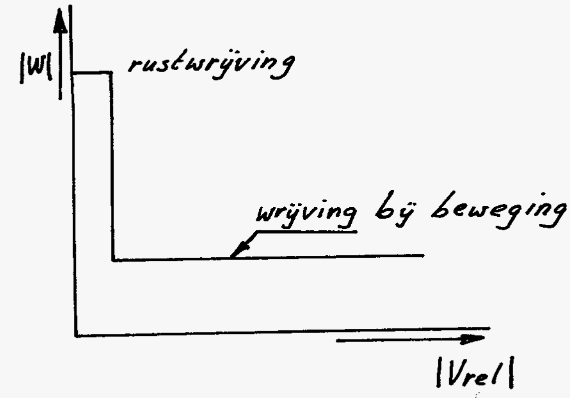


fig. 24

De veer is ontspannen voor $x=0$; de D.V. die de beweging beschrijft is dan: $V.\frac{dV}{dx} + \frac{1}{c}\varphi(v) + x = 0$ met $V = \frac{v}{\omega}$ en $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$. De Liénard-kromme L wordt gegeven door $x = -\frac{1}{c}.\varphi(v)$. Als gesteld wordt $V_0 = \frac{v_0}{\omega}$ dan volgt voor L: $x = \frac{W}{c}$ als $V - V_0 < 0$

$$x = -\frac{W}{c} \text{ als } V - V_0 > 0$$

In fig 25 op blz. 18 zijn de Liénard- en integraalkromme geschetst. Omdat L bestaat uit lijnstukken die evenwijdig zijn met de x- of de v-as bestaat de integraalkromme uit cirkelbogen en rechte lijnen. De gekozen beginvoorwaarde is $(x,V) = (x_0, 0)$ voor $t=0$. Na verloop van tijd wordt punt A op de lijn GE bereikt. Tot dat tijdstip bestaat de integraalkromme uit cirkelbogen met middelpunt op de x-as. Het gedeelte van de kromme tussen A en E is een rechte evenwijdig aan de x-as, zoals te bewijzen is door in een punt van dit lijnstuk een stoorsnelheid δV te introduceren. Daardoor wordt de snelheid V gelijk aan $V_0 + \delta V$. Bij positieve (negatieve) δV wordt V groter (kleiner) dan V_0; uit het fasevlak blijkt dat V dan afneemt (toeneemt) tot V weer gelijk aan V_0 is. Deze redenering geldt slechts voor punten op de rechte GE maar niet voor punten daarbuiten. Het gevolg hiervan is dat het gedeelte van de integraalkromme van E tot F weer uit cirkelbogen is opgebouwd, terwijl

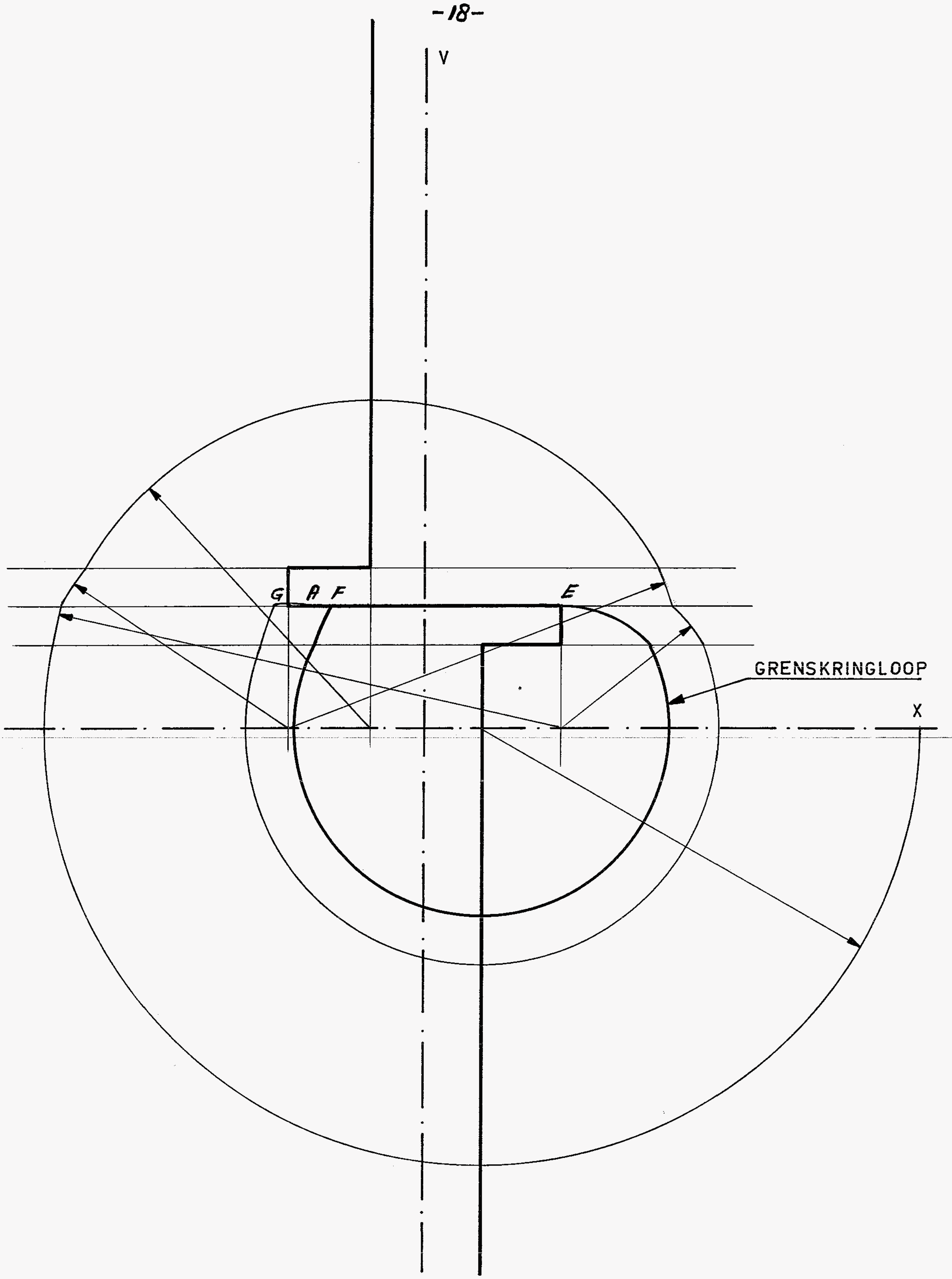


fig 25

FE recht is. By verder voortschryden van de tijd wordt in het fasevlak steeds dezelfde kromme doorlopen. Deze kromme wordt de grenskring loop (Engels: limit cycle) genoemd. De trillingstijd T van de bij deze gesloten kromme behorende periodieke beweging volgt weer uit:
$T = \oint \frac{dx}{v}$.

De hierboven beschreven beweging heeft de naam „slip-stick beweging" gekregen. Het kan voor het beschouwde systeem slechts optreden als de rustwrijving verschilt van de wrijving bij beweging.

Afgezien van de dempende kracht worden er van buitenaf op het systeem geen veranderende krachten uitgeoefend. De trillingen heten daarom zelfonderhoudende trillingen (Engels: self-sustained oscillations).

Op het gebied van de theorie van fasevlak en grenskrommen heeft Poincaré omstreeks de eeuwwisseling veel onderzoek verricht (zie hiervoor bijv. het boek van E.T. Bell: „Men of Mathematics). In die tijd zijn ook de zelf-exciterende trillingen, die het onderwerp van de volgende paragraaf vormen, uitvoerig bestudeerd, o.a. door Rayleigh.

1.4. Zelf-exciterende trillingen; van der Polvergelijking met een toepassing.

In de D.V.: $\ddot{x}+\varepsilon(-\dot{x}+\beta\dot{x}^3)+x=0$ met positieve ε en β is de dempingsterm $\varphi(\dot{x}) = -\varepsilon\dot{x}(1-\beta\dot{x}^2)$ negatief of nul als $0 \leq \dot{x} \leq \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta}$ en $\dot{x} \leq -\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta}$, en positief voor alle andere waarden van $\dot{x}$. De grootheid $\dot{x}\varphi(\dot{x})$ is negatief als $|\dot{x}| < \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta}$ en positief als $|\dot{x}| > \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta}$, dus $\dot{x}\varphi(\dot{x})$ wisselt van teken als $\dot{x}$ alle mogelijke waarden doorloopt. In het fasevlak zal (op den duur) een gesloten integraalkromme optreden. Dit kan ook op een iets andere wijze plausibel gemaakt worden:

als $|\dot{x}| < \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta}$ is $\dot{x}\varphi(\dot{x}) < 0$ en er wordt energie toegevoerd aan het systeem

als $|\dot{x}| > \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta}$ is $\dot{x}\varphi(\dot{x}) > 0$ en er wordt energie opgenomen door de demper.

Vanaf een zeker tijdstip zal er een "evenwicht" bestaan tussen de aangevoerde en de onttrokken energie. Dit is slechts mogelijk als de integraalkromme gesloten is.

Door de D.V. te vermenigvuldigen met $\beta^{\frac{1}{2}}$ en $\sqrt{\beta}x$ gelijk te stellen aan y volgt: $\ddot{y}+\varepsilon\dot{y}(-1+\dot{y}^2)+y=0$. Hieruit blijkt dat de waarde van β niet van essentieel belang is: zonder de algemeenheid te schaden mag voor β een of ander positief getal gekozen worden, bijv. $\beta=\frac{1}{3}$. Dan wordt de D.V.:

$\ddot{x}-\varepsilon\dot{x}(1-\frac{1}{3}\dot{x}^2)+x=0$: de zg. van der Polvergelijking.

Opmerking: uit de van der Polvergelijking is door differentiëren een andere belangrijke vergelijking af te leiden. Met $y=\dot{x}$ volgt:

$\ddot{y}+\varepsilon\dot{y}(-1+y^2)+y=0$: de D.V. van Rayleigh.

Met $\dot{x}=v$ wordt de v.d. Polvergelijking: $v\frac{dv}{dx}+\varepsilon v(-1+\frac{1}{3}v^2)+x=0$, of:
$\frac{dv}{dx}=\frac{-\varepsilon v(-1+\frac{1}{3}v^2)+x}{v}$. De Liénard-kromme wordt dus gegeven door:
$x=-\varepsilon v(1-\frac{1}{3}v^2)$, zie fig. 26. In deze figuur zijn tevens integraalkrommen geschetst, uitgaande van een tweetal verschillende beginvoorwaarden (x_0, v_0) voor $t=0$. Hieruit blijkt dat de integraalkromme een spi-

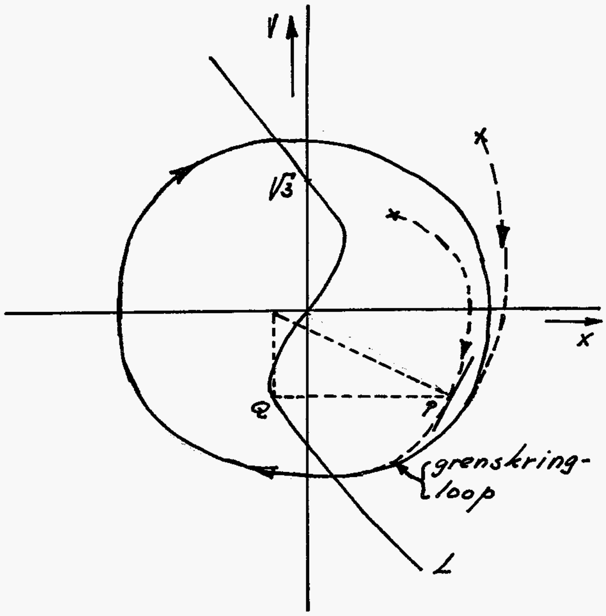


fig. 26

raal naar buiten is als (x_0, V_0) een punt is in het gebied omsloten door de grenskringloop en een spiraal naar binnen als (x_0, V_0) een punt buiten dat gebied is. Het bewijs dat voor alle mogelijke beginvoorwaarden de integraalkromme op den duur gesloten wordt zal niet gegeven worden.

Het is zeer moeilijk een beschrijving van de trilling te geven voor willekeurige waarden van ε. Daarom zullen alleen zeer grote en zeer kleine waarden van de positieve parameter ε (dus $\varepsilon \to \infty$, resp. $\varepsilon \to 0$) worden onderzocht.

A). Zeer grote ε : $\varepsilon \to \infty$.

Stel $x = \varepsilon\xi$, dan is : $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dV}{d\xi} = \frac{\varepsilon V(1-\frac{1}{3}V^2) - \varepsilon\xi}{V}$, dus : $\frac{dV}{d\xi} = \varepsilon^2 \cdot \frac{V - \frac{1}{3}V^3 - \xi}{V}$.

In het bijzonder geldt: $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)_{\varepsilon=1} = \frac{V-\frac{1}{3}V^3-\xi}{V}$.

In het (ξ, V) vlak is de constructie van Liénard slechts geldig als $\varepsilon = 1$. Uit de formule voor $\frac{dV}{d\xi}$ volgt : $\frac{dV}{d\xi} = \varepsilon^2 \left(\frac{dV}{d\xi}\right)_{\varepsilon=1}$ waarbij $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)_{\varepsilon=1}$ wel bepaald kan worden met de Lienard-constructie. Voor punten die niet op L liggen (fig. 27) is $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)_{\varepsilon=1}$ ongelijk aan nul en omdat ε tot oneindig nadert nadert ook $\frac{dV}{d\xi}$ in die punten tot oneindig. Dit betekent dat de integraalkromme in zo'n punt een verticale raaklijn heeft. Op de Lienardkromme is $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)_{\varepsilon=1}$ gelijk aan nul; $\varepsilon^2\left(\frac{dV}{d\xi}\right)_{\varepsilon=1} = \frac{dV}{d\xi}$ is dan onbepaald. In fig 27 is het faseulak geschetst met de Lienard-kromme en een integraalkromme, uitgaande van de beginvoorwaarden $(x, V) = (x_{A_0}, V_{A_0})$ voor $t = 0$. Het deel van de integraalkromme tussen A en A_0 is een rechte lijn, omdat in

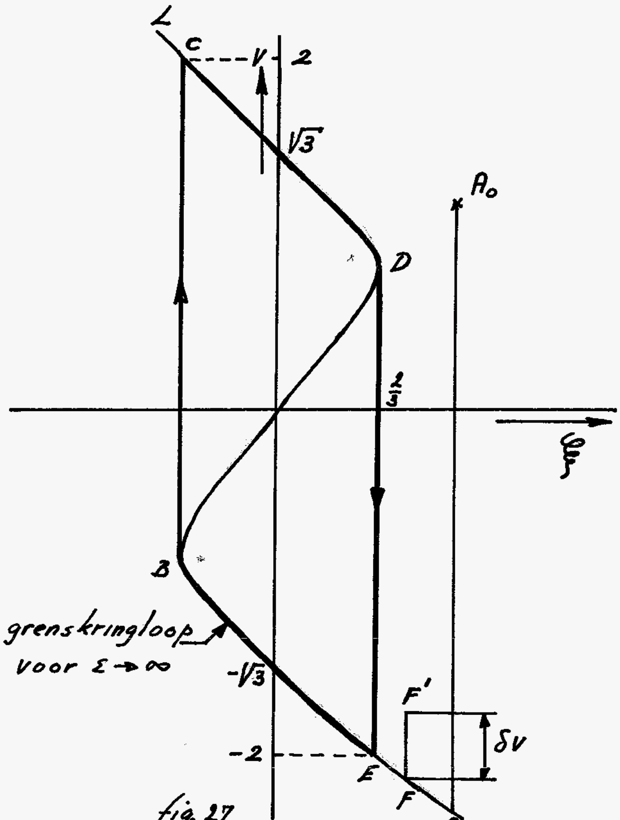


fig. 27

alle punten tussen A_0 en A de raaklijn aan de integraalkromme verticaal is. Het gedeelte van de integraalkromme tussen A en B valt samen met L, zoals hierna bewezen zal worden. Zij F een punt van de integraalkromme en van de Lienard kromme. Neem in F een stoorsnelheid δV aan (punt F'). F' ligt dan niet meer op L, dus $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)_{\varepsilon=1}$ in F' is ongelijk aan nul, $\frac{dV}{d\xi}$ in F' nadert tot oneindig (verticale raaklijn) en de snelheid V neemt af van $V_F+\delta V$ tot V_F. Deze redenering geldt voor alle punten tussen A en B maar niet meer voor punt B: na B is de integraalkromme weer recht tot in punt C. De integraalkromme wordt dus zoals in fig. 27 is aangegeven.

De grafiek van de snelheid als functie van de tijd is bij benadering uit het fasevlak af te leiden en zal er ongeveer uitzien zoals fig. 28 aangeeft.

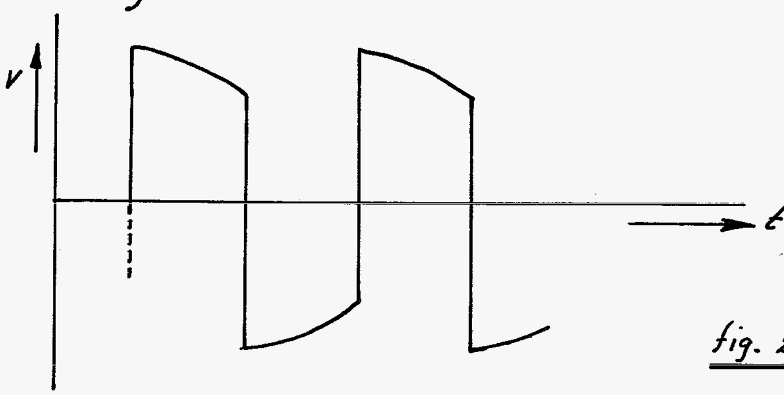


fig. 28

Deze trillingen dragen de naam relaxatietrillingen. Vanaf een zeker tijdstip is de integraalkromme gesloten: de grenskringloop is dan bereikt. Voor de trillingstijd van de daarbij behorende periodieke beweging volgt: $T = \oint \frac{dx}{v} = \varepsilon \oint \frac{d\xi}{v} = \varepsilon \int_{\xi=\xi_E}^{\xi_B} \frac{d\xi}{v} + \varepsilon \int_{\xi=\xi_C}^{\xi_D} \frac{d\xi}{v} = 2\varepsilon \int_{\xi=\xi_E}^{\xi_B} \frac{d\xi}{v}$

Voor $\xi_E \leq \xi \leq \xi_B$ valt de grenskringloop samen met de Liénard-kromme, dus $\xi = v - \frac{1}{3}v^3$, $d\xi = dv - v^2 dv$. Ingevuld in de formule voor T levert dit: $T = 2\varepsilon \int_{v=-2}^{-1} \frac{dv}{v} - 2\varepsilon \int_{v=-2}^{-1} v\,dv = 2\varepsilon\left(\frac{3}{2} - \log 2\right) = 1{,}614.\varepsilon$

Uit het fasevlak is de amplitudo van de trilling direct af te lezen.

B) <u>Zeer kleine ε : $\varepsilon \to 0$</u>

Als ε gelijk is aan nul wordt de D.V.: $\ddot{x} + x = 0$ met de oplossing $x = A\sin(t+\vartheta)$ waarin A en ϑ constant zijn. In het fasevlak valt de Liénard-kromme dan samen met de v-as en de integraalkrommen zijn cirkels om de oorsprong. De „trillingstijd" T is dan gelijk aan 2π.

Als ε niet nul, maar wel zeer klein is wijkt de Liénard-kromme voor niet te grote snelheden ($|v|$ niet veel groter dan $\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta}$) weinig af van de v-as. De oplossing $x = x(t)$ van de D.V. $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x}(-1 + \beta\dot{x}^2) + x = 0$ zal dan ongeveer harmonisch zijn. Als $t \to \infty$ is de integraalkromme gesloten en bij benadering een cirkel. De trillingstijd van de periodieke beweging zal dus ongeveer gelijk zijn aan die van de harmonische beweging.

De oplossing van de D.V. kan geschreven worden als $x = A\sin(t+\vartheta) = A\sin\alpha$ waarin A, ϑ en $\alpha = t + \vartheta$ functies zijn van t. Door de introductie van de twee onbekende functies $A = A(t)$ en $\vartheta = \vartheta(t)$ in plaats van de ene onbekende $x = x(t)$ is het geoorloofd aan A en ϑ nog één beperking op te leggen zonder de algemeenheid te schaden.

Uit $x = A\sin(t+\vartheta) = A\sin\alpha$ volgt: $\dot{x} = \dot{A}\sin\alpha + (1+\dot{\vartheta})A\cos\alpha$. Als A en ϑ beperkt worden tot die functies die voldoen aan: $\dot{A}\sin\alpha + \dot{\vartheta}A\cos\alpha = 0$ dan geldt: $\dot{x} = A\cos\alpha$ en dus: $\ddot{x} = \dot{A}\cos\alpha - (1+\dot{\vartheta})A\sin\alpha$.

Substitutie in de D.V. levert:

$\dot{A}\cos\alpha - A(1+\dot{\vartheta})\sin\alpha + A\sin\alpha = \varepsilon A\cos\alpha\,(1-\beta A^2\cos^2\alpha)$, dus:

$\dot{A}\cos\alpha - A\dot{\vartheta}\sin\alpha = \varepsilon A\cos\alpha\,(1-\beta A^2\cos^2\alpha)$; A en ϑ voldoen ook aan de vergelijking $\dot{A}\sin\alpha + A\dot{\vartheta}\cos\alpha = 0$.

Uit deze vergelykingen in $\dot{A}$ en $\dot{\vartheta}$ kunnen vergelykingen voor $\dot{A}$ en $\dot{\vartheta}$ worden afgeleid: $\dot{A} = \varepsilon A\cos^2\alpha\,(1-\beta A^2\cos^2\alpha)$

$$\dot{\vartheta} = -\varepsilon\cos\alpha.\sin\alpha\,(1-\beta A^2\cos^2\alpha).$$

By constante A zijn de termen $\cos^2\alpha\,(1-\beta A^2\cos^2\alpha)$ en $\cos\alpha.\sin\alpha\,(1-\beta A^2\cos^2\alpha)$ periodiek met periode π.

Als de grenskringloop nog niet bereikt is, is volgens het voorgaande de integraalkromme bijna gesloten en heeft deze kromme bij benadering de vorm van een cirkel. De tijd die nodig is voor een omloop in het fasevlak is ongeveer gelyk aan 2π. Gedurende zo'n omloop veranderen A en ϑ slechts weinig; de beweging is immers bijna harmonisch (fig 29). Hiervan uitgaande kan $\dot{A}$ tijdens zo'n omloop benadert worden door het gemiddelde van $\dot{A}$ over die omloop:

$$\dot{A} \approx \frac{A(t=t_1+2\pi) - A(t=t_1)}{2\pi} = \int_{t=t_1}^{t_1+2\pi} \frac{1}{2\pi}.\dot{A}\,dt = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{t=t_1}^{t_1+2\pi} A.\cos^2\alpha\,(1-\beta A^2.\cos^2\alpha)\,dt.$$

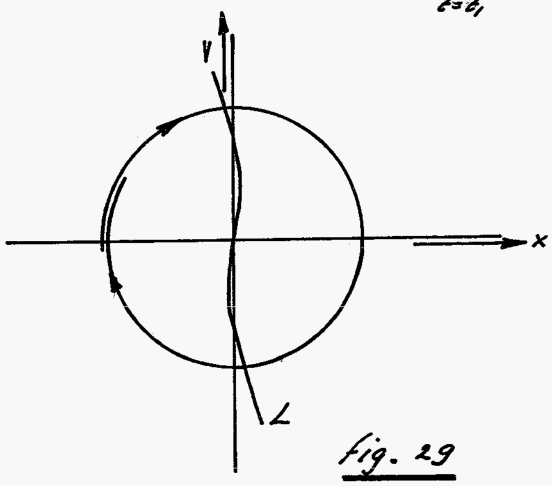


fig. 29

Als A en ϑ constant verondersteld worden gedurende de omloop dan volgt: $d\alpha = d(t+\vartheta) = dt$ en dus: $\dot{A} = \frac{\varepsilon A}{2\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi}(\cos^2\alpha - \beta A^2\cos^4\alpha)\,d\alpha = \frac{\varepsilon A}{2}(1-\frac{3}{4}\beta A^2)$.

Voor zeer grote t wordt de grenskringloop bereikt. Dan geldt:
$A(t=t_1+2\pi) - A(t=t_1) \approx 0$ omdat de periodetijd ongeveer gelijk is aan 2π.
Dan is echter ook $\dot{A}$ ongeveer gelijk aan nul, dus: $A = \frac{2}{3\beta}\sqrt{3\beta} = A_{grens}$.
Samenvattend kan gezegd worden dat bij grote ε de bepaling van A weinig, die van T echter veel moeilijkheden levert; bij kleine ε is dit juist omgekeerd.

<u>Voorbeeld</u>: <u>electro-mechanisch</u> <u>systeem</u>.

Het electro-mechanische systeem van fig 30 bestaat uit een seriegenerator, die met een constante hoeksnelheid ω_g wordt aangedreven door een turbine, en een motor. De motor drijft een schijf aan met massatraagheidsmoment I. De stroomsterkte in de electrische keten is i terwijl ω de hoeksnelheid is van de schijf.

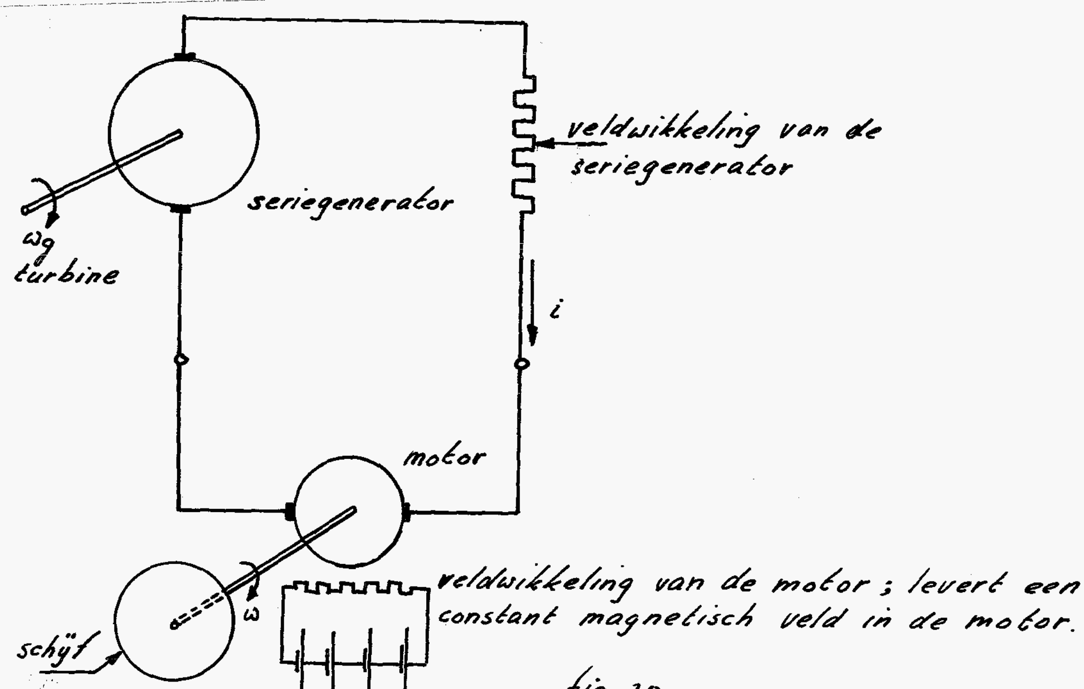


fig 30

De door de generator opgewekte spanning EMKg is evenredig met de sterkte van het magnetische veld in de generator. Deze veldsterkte is afhankelijk van de stroomsterkte i door de wikkeling. Bij kleine i is het verband lineair terwijl voor grote i magnetische verzadiging optreedt.

Voor het verband tussen EMK_g en i wordt daarom genomen:

$EMK_g = c_1.i - c_2.i^3$; waarin $c_2 i^3$ de invloed van de verzadiging representeert. Als EMK_m de spanningsval over de motor is levert de wet van Kirchhoff de volgende vergelijking: $EMK_g = Ri + L\frac{di}{dt} + EMK_m = Ri + Li' + EMK_m$ met $i' = \frac{di}{dt}$. De stroom i doorloopt de ankerwikkeling van de motor terwijl de magnetische veldsterkte in de motor constant is. T.g.v. de Lorentzkrachten werkt dan op het anker een moment M dat evenredig is met de ankerstroom, dus $M = c_3.i$. Uit de energiebalans van de motor volgt EMK_m, immers: $i * EMK_m = M.\omega$.

Het moment op de schijf is gelijk aan M. Toepassing van de stelling $M = \dot{D}$ t.o.v. de draaiingsas van de schijf geeft de vergelijking $M = I\omega'$. Uit de vergelijkingen kan ω worden geëlimineerd: $\omega' = \frac{M}{I} = \frac{c_3.i}{I}$.

Uit: $EMK_g = c_1.i - c_2.i^3 = Ri + Li' + c_3.\omega$ volgt door differentiëren naar t:

$c_1.i' - 3c_2.i^2.i' = Ri' + Li'' + c_3\omega' = Ri' + Li'' + \frac{c_3^2}{I}.i$. Dus: $Li'' - i'(c_1 - R - 3c_2.i^2) + \frac{c_3^2}{I}i = 0$.

Als $c_1 - R$ ongelijk is aan nul geldt:

$$i'' - i'.\frac{c_1 - R}{L}\left(1 - 3\frac{c_2}{c_1 - R}.i^2\right) + \frac{c_3^2}{L.I}.i = 0.$$

Volgens blz. 20 bestaat er een nauw verband tussen deze D.V. en de van der Pol-vergelijking.

Als de stroomsterkte i zo klein blijft dat de invloed van de magnetische verzadiging te verwaarlozen is, dus $c_2 = 0$, wordt de D.V.:

$$i'' - \frac{c_1 - R}{L}.i + \frac{c_3^2}{L.I}.i = 0.$$

Deze D.V. vertoont grote overeenkomst met die voor een lineair, gedempt massa-veersysteem („massa" L, „dempingscoëfficiënt" $-(c_1 - R)$ en „veerstijfheid" $\frac{c_3^2}{I}$). De door de generator geleverde spanning is een functie van de hoeksnelheid ω_g van de turbine. Als weer wordt aangenomen dat $c_2 = 0$ volgt: $EMK_g = c_1.i$, dus $c_1 = c_1(\omega_g)$. Bij constante R kan de dempingscoëfficiënt $-(c_1-R)$ gewijzigd worden door ω_g te variëren. Hierbij moeten drie gevallen worden onderscheiden:

1) $c_1-R>0$: er is negatieve demping, dus opslingering van het systeem boven iedere grens.

2) $c_1-R=0$: geen demping

3) $c_1-R<0$: positieve demping.

Als c_2 niet gelijk is aan nul en als (c_1-R) en c_2 positief zijn treedt voor kleine waarden van i opslingering op (stroom neemt toe) terwijl voor grote waarden van i echte demping optreedt. Er zal een grenskringloop ontstaan zoals door het verband tussen de D.V. en de v.d. Polvergelijking reeds duidelijk was.

De D.V. kan nog in „dimensieloze" vorm geschreven worden door de grootheid $\tau=\alpha t$ in te voeren; τ is de nieuwe variabele en α is een constante. Dan volgt: $i''=\frac{d^2i}{dt^2}=\alpha^2\frac{d^2i}{d\tau^2}$. Als $\alpha=\frac{c_3^2}{IL}$ gesteld wordt geldt:

$$\frac{d^2i}{d\tau^2}-\sqrt{\frac{LI}{c_3^2}}\cdot\frac{c_1-R}{L}\left(1-\frac{3c_2}{c_1-R}i^2\right)\frac{di}{d\tau}+i=0$$

$$\frac{d^2i}{d\tau^2}-\sqrt{\frac{I}{L}}\cdot\frac{c_1-R}{c_3}\left(1-\frac{3c_2}{c_1-R}i^2\right)\frac{di}{d\tau}+i=0$$

Met $\varepsilon=\frac{c_1-R}{c_3}\sqrt{\frac{I}{L}}$ en $\beta=\frac{3c_2}{c_1-R}$ volgt tenslotte:

$$\frac{d^2i}{d\tau^2}+\varepsilon(-1+\beta i^2)\frac{di}{d\tau}+i=0.$$

1.5 Niet lineaire veren.

De D.V. voor een ongedempt systeem met een niet lineaire veer is: $\ddot{x} + f(x) = 0$ waarin $f(x)$ een niet-lineaire functie van x is. Fig 31 geeft het schema voor zo'n systeem.

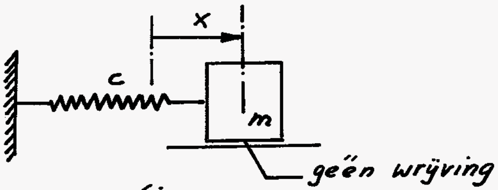


fig. 31

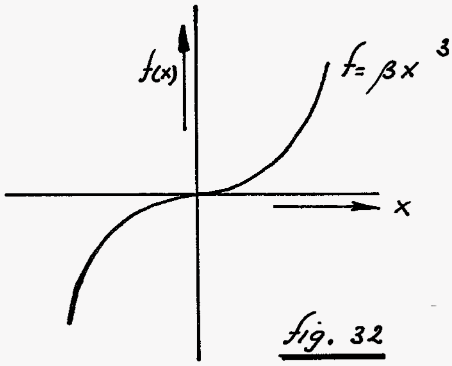


fig. 32

Hier wordt alleen een vrij eenvoudig geval behandeld, n.l. een systeem met de veerkarakteristiek $f(x) = \beta x^3$ met constante β (fig. 32). Dit systeem is technisch niet erg belangrijk maar de resultaten van de analyse zullen worden gebruikt als toetssteen voor de bruikbaarheid van nog te bespreken benaderingen. De D.V. wordt dus: $\ddot{x} + \beta x^3 = 0$ of:

$$v\frac{dv}{dx} + \beta x^3 = 0$$

Na integreren volgt: $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}\beta x^4 = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}\beta x_0^4$; x_0 en v_0 zijn de snelheid, resp. de plaats op een nog willekeurig tijdstip t_0. Door een zodanige keuze van t_0 dat $v_0 = 0$ en $x_0 = A$ volgt: $v^2 + \frac{1}{2}\beta x^4 = \frac{1}{2}\beta A^4$. Met behulp van deze vergelijking kunnen in het v-x vlak de integraalkrommen getekend worden; deze zijn symmetrisch t.o.v. de v-as en de x-as (fig. 33)

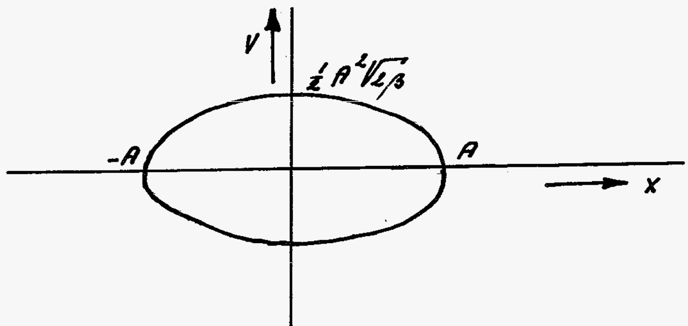


fig. 33

De trillingstijd wordt bepaald met de formule: $T = \oint \frac{dx}{v} = \frac{4}{\sqrt{\frac{\beta}{2}}}\int_{x=0}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}}$.

Het blijkt onmogelijk te zijn om deze integraal exact te bepalen. Het is wel mogelijk hem door een aantal transformaties over te voeren in een z.g. elliptische integraal; de waarde van deze integraal is te vinden in diverse tabellenboeken.

Stel $x = A\cos\psi$, dus $dx = -A\sin\psi . d\psi$; x ligt tussen de grenzen 0 en A zodat ψ loopt van $\frac{\pi}{2}$ tot 0. Daarom geldt: $\sqrt{\sin^2\psi} = \sin\psi$.

$$\int_{x=0}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^4-x^4}} = -\frac{1}{A}\int_{\psi=\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\psi . d\psi}{\sqrt{1-\cos^4\psi}} = \frac{1}{A}\int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi . d\psi}{\sqrt{1+\cos^2\psi}\sqrt{1-\cos^2\psi}} = \frac{1}{A}\int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1+\cos^2\psi}}$$

$$= \frac{1}{A}\int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{2-\sin^2\psi}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{A}\int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\psi)^2}} = \frac{1}{A\sqrt{2}}\cdot F(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Hierin is F de incomplete elliptische integraal van de tweede soort die algemeen gedefinieerd is als: $F(k,\varphi) = \int_{\psi=0}^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-(k\sin\psi)^2}}$. De hier interessante functie $F(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$ is bij benadering gelijk aan $1,8541$.

Voor T volgt dan: $T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}\cdot\frac{1}{A\sqrt{2}}\cdot 1,8541 \approx \frac{7,40}{A\sqrt{\beta}} \approx \frac{2\pi}{\omega}$, dus: $\omega = 0,847\, A\sqrt{\beta}$.

Hieruit blijkt dat de hoekfrequentie van de vrije trillingen afhankelijk is van de amplitudo van die trillingen.

Een ingewikkelder maar technisch veel interessanter geval wordt beschreven door de D.V.: $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F(t) = F_0\cos\omega t$. De veerkarakakteristiek $f(x) = \alpha x + \beta x^3$ is geschetst in fig. 34

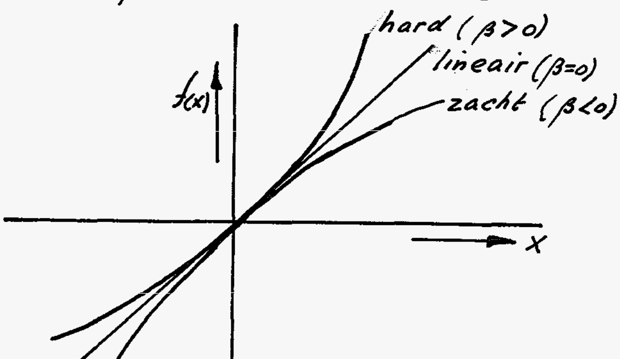


fig. 34

De exacte oplossing is niet bekend. Wel bestaan er een aantal benaderingsmethoden, o.a. die van Duffing. Deze zullen hier niet besproken worden. In dit college zal gebruik worden gemaakt van een veel algemener hulpmiddel om benaderingsoplossingen te construeren, nl. variatierekening.

1.6 Benaderingsmethode van Ritz; voorbeeld.

Zij $I = \int_{t=t_1}^{t_1+T} \{\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{4}\beta x^4 + x F(t)\} dt$ met vaste benedengrens t_1; aangenomen is dat $F(t)$ periodiek is met periodetijd T. Voor een bepaalde functie $x = X(t)$ neemt de integraal de waarde I aan. Dan geldt de volgende stelling:

de oplossing $x = x(t)$ van de D.V. $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F(t)$ maakt de integraal stationair.

Bewijs: zij x de oplossing van deze D.V. en $\bar{x}$ een functie die gegeven wordt door $\bar{x} = x + \varepsilon.\xi(t)$; hierin is ε een willekeurige constante terwijl $\xi(t)$ een willekeurige functie is van de tijd. $\xi(t)$ moet voldoende vaak differentieerbaar zijn. De term $\varepsilon.\xi(t)$ wordt de variatie δx van x genoemd. Als $\bar{I}$ de waarde is van de integraal behorende bij de functie $\bar{x}$ dan geldt:

$$\bar{I} = \int_{t=t_1}^{t_1+T} \{\tfrac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2 - \tfrac{1}{2}\bar{x}^2.\alpha - \tfrac{1}{4}\beta\bar{x}^4 + \bar{x}.F(t)\} dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \Big[\tfrac{1}{2}\{\dot{x} + \varepsilon\dot{\xi}\}^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\{x + \varepsilon\xi\}^2 +$$

$$- \tfrac{1}{4}\beta\{x + \varepsilon\xi\}^4 + (x + \varepsilon\xi)F(t)\Big].dt$$

Bij vaste integratiegrenzen en vaste functies x en ξ is $\bar{I}$ afhankelijk van de waarde van ε: $\bar{I} = \bar{I}(\varepsilon)$. Met de Taylorreeksontwikkeling volgt:

$$\bar{I}(\varepsilon) = \bar{I}(0) + \left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\bar{I}}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0}.\varepsilon^2 + \text{------}$$

$$= I + \left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\bar{I}}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0}.\varepsilon^2 + \text{---}$$

De term $\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.\varepsilon$ wordt de variatie δI van I genoemd: $\delta I = \varepsilon\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$.

Zoals uit de reeksontwikkeling volgt is $\bar{I}$ stationair voor $\bar{x} = x$ (dus voor $\varepsilon=0$) als $\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0$.

Uit de uitdrukking voor $\bar{I}$ volgt:

$$\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\int_{t_1}^{t_1+T}\{\dot{x}\dot{\xi}-\alpha x\xi-\beta x^3\xi+\xi.F(t)\}\,dt.$$ Door partiëel integreren wordt dit:

$$\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\left[\dot{x}\xi\right]_{t=t_1}^{t_1+T}-\int_{t_1}^{t_1+T}\{\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3-F(t)\}\,\xi.dt.$$

De functies $\bar{x}$ worden nu beperkt tot die „familie" van functies waarvoor geldt: $\left[\dot{x}\xi\right]_{t=t_1}^{t_1+T}=0$, dus: $\dot{x}(t_1+T).\xi(t_1+T)-\dot{x}(t_1).\xi(t_1)=0$. Aangezien alleen die oplossingen x van de D.V. interessant zijn die periodiek zijn met dezelfde periodetijd T als $F(t)$ moeten de variaties dus voldoen aan: $\dot{x}(t_1)\left[\xi(t_1+T)-\xi(t_1)\right]=0$; als $\dot{x}(t_1)$ ongelijk is aan nul betekent dit dat ξ moet voldoen aan $\xi(t_1+T)-\xi(t_1)=0$. Variaties $\delta x=\varepsilon.\xi(t)$ die aan deze eisen voldoen heten toegelaten variaties. Uit het voorgaande volgt dan: $\left(\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0$ voor alle toegelaten variaties δx als x voldoet aan de D.V.

Ook de omkering van de stelling is geldig: die functies $x=x(t)$ waarvoor $\delta I=0$ voor <u>alle</u> toegelaten variaties δx voldoen aan de D.V. Voor toegelaten variaties δx volgt voor de variatie δI van de integraal: $\delta I=-\varepsilon\int_{t=t_1}^{t_1+T}\{\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3-F(t)\}.\xi(t).dt$. Gegeven is dat δI gelijk is aan nul voor alle (toegelaten) functies ξ, waaruit bewezen dient te worden dat x voldoet aan: $\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3=F(t)$ voor alle t in het interval van t_1 tot t_1+T (en dus voor <u>alle</u> t). Zij de

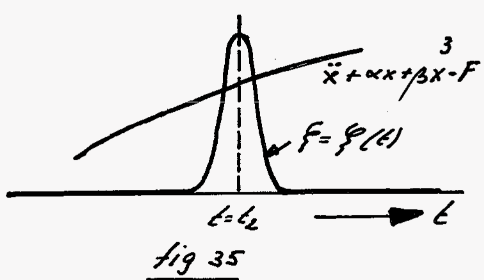


fig 35

integrand $\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3-F(t)$ ongelyk aan nul in een punt $t=t_2$ in dit interval (zie fig. 35). Op grond van de continuiteit van de integrand volgt dat deze dan ook in een omgeving van $t=t_2$ ongelijk aan nul moet zijn. Kies voor $\xi(t)$ dan een voldoende vaak differentieerbare functie die in deze omgeving ongelijk is aan nul. Dan is de integraal ongelijk aan nul wat in tegenspraak is met het gegeven. De integrand kan derhalve niet ongelijk zijn aan nul in $t=t_2$; in ieder punt van het interval moet dus gelden $\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3-F(t)=0$ waarmee het bewijs van de stelling geleverd is.

Dit alles is nog steeds exact. Als de exacte oplossing niet bekend is kan een benadering gevonden worden door $x=x(t)$ te beperken tot een bepaalde „familie" en uit die familie „het beste exemplaar" te kiezen. Het „beste exemplaar" is die functie welke δI gelijk aan nul maakt voor toegelaten variaties in die familie.

Als voor $F(t)$ geldt: $F(t)=F_0.\cos(\omega t+\varphi)$ dan kan gekozen worden de familie der harmonische functies: $x=A\cos\omega t$, waarin A en φ geen functies van t zijn. Invullen levert voor de integraal I:

$I=\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{\pi}{2}.A^2.\omega^2-\frac{\pi}{2}.A^2.\alpha-\frac{3\pi}{16}.\beta.A^4+\pi.F_0.A\cos\varphi\right]$. Stationair zijn van I eist dat $\delta I=0$ bij variaties van A en φ, dus $\frac{dI}{dA}=0$ en $\frac{dI}{d\varphi}=0$. Dit levert:

$$A\omega^2-A\alpha-\frac{3}{4}A^3\beta+F_0\cos\varphi=0$$

$$\sin\varphi=0\text{, en dus: }\varphi=0+k.\pi\text{ met }k=0,1,2,3,----$$

$\varphi=\pi$ komt in de uitdrukking voor x overeen met een tekenwisseling t.o.v. $\varphi=0$. Als A zowel positieve als negatieve waarden kan aannemen is het daarom voldoende alleen de waarde $\varphi=0$ te beschouwen. Dan volgt: $A\{\omega^2-\alpha-\frac{3}{4}\beta.A^2\}+F_0=0$.

Voor het geval dat $\alpha=0$, $F_0=0$ gaat dit over in $A(\omega^2-\frac{3}{4}\beta A^2)=0$, met de oplossingen $A=0$ en $\omega=\frac{1}{2}A\sqrt{3\beta}=0{,}865\,A\sqrt{\beta}$.

$A=0$ is geen interessante oplossing, immers dan blijft het systeem in rust. Het „exacte" resultaat dat in hoofdstuk 1.5 is afgeleid was $\omega=0{,}847\,A\sqrt{\beta}$. Voor dit geval kan dus gesteld worden dat de hier gevolgde methode een bevredigende oplossing levert.

Als $\alpha\neq 0$, $F_0\neq 0$ geldt: $A\omega^2-A\alpha-\frac{3}{4}A^3\beta+F_0=0$ en dus:

$$\omega^2=\alpha+\frac{3}{4}\beta.A^2-\frac{F_0}{A}\quad (A\neq 0).$$

Fig. 36 geeft de grafiek van ω^2 als functie van A. Het in de grafiek gearceerde deel is niet interessant omdat daar ω^2 negatief is

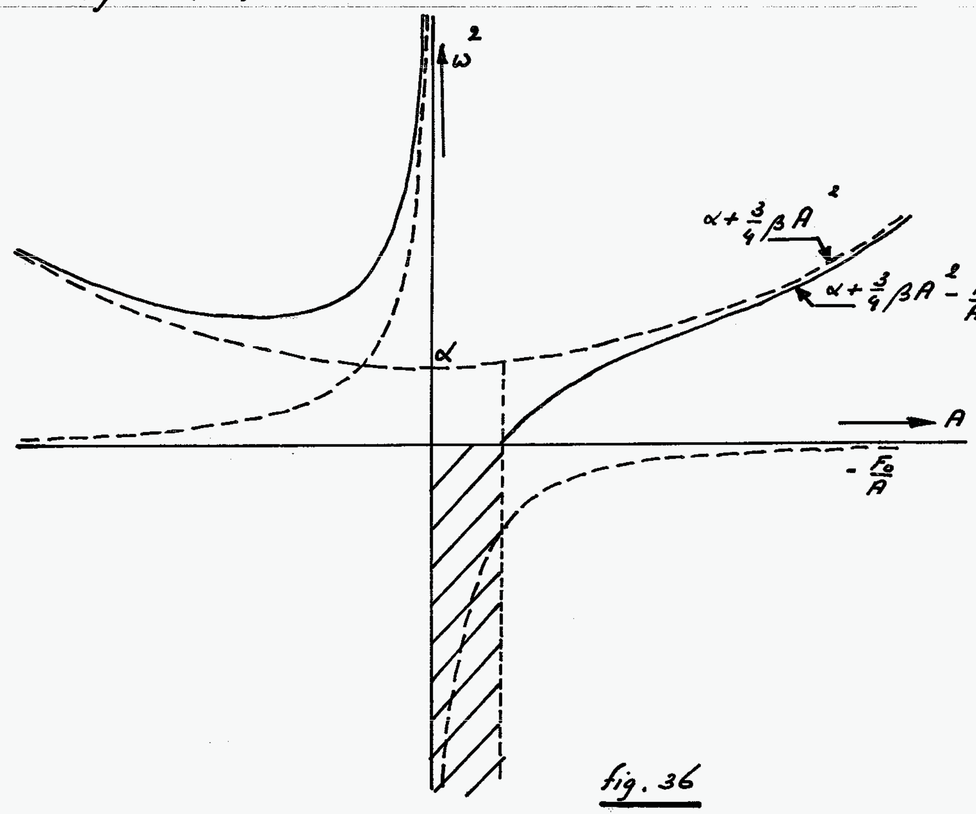


fig. 36

Uit deze grafiek is de resonantiekromme $|A|=|A(\omega)|$ direct af te leiden (zie fig 37). Als F_0 meerdere waarden aan kan nemen veranderen de resonantiekrommen zoals in fig. 37 is aangegeven. De stippellijn geeft de kromme voor het geval dat $F_0 = 0$. In de Engelse literatuur heet deze kromme de „back bone" (ruggegraat) van de resonantiegrafiek.

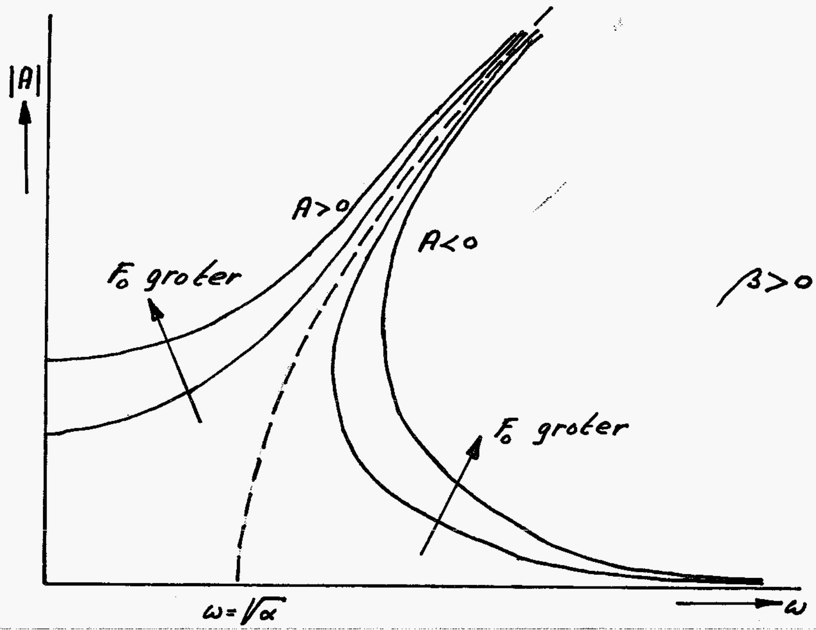


fig 37

$A > 0$ komt overeen met het geval dat x en de kracht F in fase zijn; als $A < 0$ dan is x in tegenfase met de kracht ($\varphi = \pi$).

De vorm van de resonantiekrommen in het geval van een lineair systeem met zwakke demping maakt het in fig. 38 geschetste verloop van de resonantiekromme plausibel als het niet lineaire systeem zwak gedempt wordt.

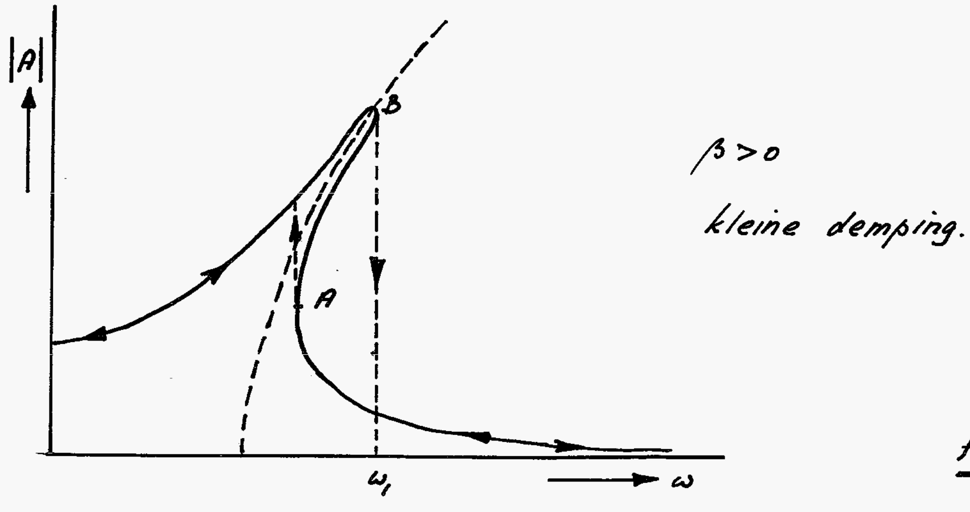


fig. 38

Veronderstel dat ω opgevoerd wordt van nul tot een bepaalde waarde die groter is dan ω_1. Bij passeren van $\omega = \omega_1$ treedt dan plotseling een sprong op in de grootte van $|A|$; dit is ook experimenteel bevestigd. Als daarna ω weer afneemt dan treedt by $\omega = \omega_2$ weer een, zij het veel minder spectaculaire, sprong op in $|A|$. Het gedeelte van de kromme tussen de punten A en B representeert instabiele trillingen (voor het bewijs wordt verwezen naar de literatuur, bijv. het boek van Stoker).

1.7. Benaderingsmethode van Galerkin; voorbeeld.

De methode van Ritz kan alleen worden toegepast als het systeem dempingsvrij is. Bij het gedempte systeem met bewegingsvergelyking $\ddot{x} + p\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t$ kan op soortgelijke wijze te werk worden gegaan door de methode Galerkin te volgen als tenminste een periodieke oplossing gezocht wordt. Zij $t = T$ de trillingstijd van deze oplossing. Definieer dan een grootheid G op de volgende wijze:

$G = \int_{t=t_1}^{t_1+T} \{\ddot{x} + p\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 - F_0 \cos \omega t\} \delta x \, dt$, waarbij δx een variatie is van de werkelijke oplossing $x = x(t)$. Dan gelden de volgende stellingen:

Stelling 1: als $x = x(t)$ een oplossing is van de D.V. dan is G gelyk aan nul voor iedere geoorloofde variatie δx.

De omkering van deze stelling levert:

Stelling 2: als voor een bepaalde functie $x = x(t)$ de integraal G gelijk is aan nul voor iedere geoorloofde variatie δx van die functie, dan is die functie een oplossing van de D.V.

Het bewijs van deze stellingen is analoog aan dat gegeven in de vorige paragraaf.

De representatie van de D.V. in deze vorm heeft het grote voordeel dat het nu mogelijk is benaderingsmethoden op te stellen. Als benaderde oplossing kan geprobeerd worden:

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$; A en φ zijn nog nader te bepalen constanten.

Met $x = A\cos(\omega t+\varphi)$ volgt: $\delta x = \delta A.\cos(\omega t+\varphi) - A.\delta\varphi.\sin(\omega t+\varphi)$ en:

$$G = \int_{t=t_1}^{t_1+\frac{2\pi}{\omega}} \left[-A\omega^2\{\cos(\omega t+\varphi)\} - A\rho\omega\sin(\omega t+\varphi) + \alpha A\cos(\omega t+\varphi) + \beta A^3\cos^3\overbrace{(\omega t+\varphi)}^{-F_0\cos\omega t}\right] * \left[\delta A.\cos(\omega t+\varphi) - A.\delta\varphi.\sin(\omega t+\varphi)\right] * dt$$

$$= \left[-A\omega^2 + A\alpha + \tfrac{3}{4}\beta A^3 - F_0\cos\varphi\right].\delta A + \left[A\rho\omega + F_0\sin\varphi\right].\delta\varphi$$

$G=0$ voor <u>alle</u> toegelaten variaties δA en $\delta\varphi$, dus:

1) $-A\omega^2 + A\alpha + \frac{3}{4}\beta A^3 - F_0\cos\varphi = 0$

2) $A\omega\rho + F_0\sin\varphi = 0$

Als $\varphi=0$ dan is de eerste vergelyking gelyk aan die welke gevonden wordt met de methode Ritz.

Omdat $|\sin\varphi| \leq 1$ moet gelden: $|A|.\omega \leq \frac{F_0}{\rho}$, dus: $|A| \leq \frac{F_0}{\rho\omega}$ (zie fig. 39).

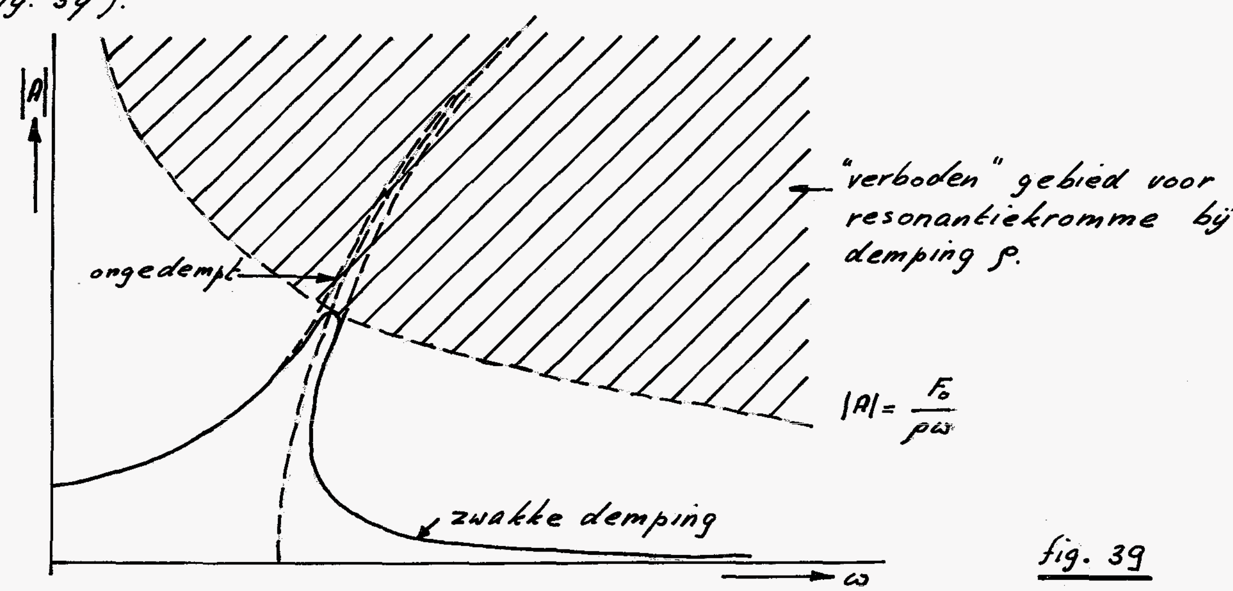


fig. 39

Blijkbaar valt de resonantiekromme van het zwak gedempte systeem in een groot gebied samen met die van het ongedempte systeem; deze situatie stemt overeen met die bij lineaire systemen.

De kracht F is gegeven door $F = F_0 \cos \omega t$ en de bybehorende verplaatsing door $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Voor de gedurende eën periode door F verrichte arbeid volgt:

$$A_F = \int_{per.} F.dx = -\int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} F_0 \cos \omega t . A.\omega \sin(\omega t + \varphi)\, dt = - F_0 A.\pi \sin \varphi.$$

De per periode in de demper gedissipeerde energie is:

$$A_d = \int_{per.} p\dot{x}\, dx = \int_{per.} p\dot{x}^2 dt = \pi . p\omega . A^2.$$

Gelykstellen van A_F en A_D levert:

$Ap\omega + F_0 \sin \varphi = 0$; deze vergelyking komt overeen met die volgens Galerkin. Dit is een erg prettig resultaat omdat nu zeker is dat bij de benaderingsoplossing in ieder geval de energiebalans in orde is.

Er is, behalve de methode Galerkin, nog een andere manier om deze niet-lineaire D.V. te lijf te gaan: de methode Schwesinger. De niet-lineaire D.V. is: $\ddot{x} + p\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t$. Weer aannemende dat alleen periodieke oplossingen met periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ interessant zijn wordt gesteld: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ met constante A en φ.

De te hanteren benaderingsmethode moet een verband geven tussen A, φ en F_0 zodanig dat de benadering zo goed mogelijk aansluit bij de exacte oplossing. Als onder afwijking het verschil van deze twee oplossingen op een willekeurig tydstip t wordt verstaan dan kan deze eis vertaald worden tot de voorwaarde dat het gemiddelde over eën periode van het kwadraat van de afwijking minimaal moet zijn; in formule:

$$I = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \ddot{x} + p\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 - F_0 \cos \omega t \right\}^2 dt$$ moet minimaal zijn als $x = x(t)$ de benaderingsoplossing is. Uitwerken van deze eis levert de me-

thode Schwesinger.

Er bestaat verband tussen deze methode en die van Galerkin. Galerkin beschouwde alleen variaties van x; het is echter ook mogelijk een verband tussen A, φ en F_0 af te leiden door niet x maar F te varieren. Hiertoe wordt de tydsoorsprong zoveel verschoven dat geldt: $x = A\cos\omega t$, $F = F_0\cos(\omega t-\varphi)$. Dan volgt:

$G_F = \int\limits_{t=t_1}^{t_1+T}\{\ddot{x}+p\dot{x}+\alpha x+\beta x^3 - F_0\cos(\omega t-\varphi)\}\,\delta F\,dt$ en voor G_F moeten de zelfde stellingen gelden als voor G (waarbij δF gelezen dient te worden voor δx)

Uitwerken levert:

$$G_F = \left[\int\limits_{t=t_1}^{t_1+T}\{\ddot{x}+p\dot{x}+\alpha x+\beta x^3 - F_0\cos(\omega t-\varphi)\}\cos(\omega t-\varphi)\,dt\right]\delta F_0 +$$

$$+\left[-\int\limits_{t=t_1}^{t_1+T}\{\ddot{x}+p\dot{x}+\alpha x+\beta x^3 - F_0\cos(\omega t-\varphi)\}F_0\cdot\sin(\omega t-\varphi)\,dt\right]\delta\varphi$$

$$= \frac{\partial}{\partial F_0}\cdot\frac{1}{2}\left[\int\limits_{t=t_1}^{t_1+T}\{\ddot{x}+p\dot{x}+\alpha x+\beta x^3 - F_0\cos(\omega t-\varphi)\}^2\,dt\right]\delta F_0 +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{2}\left[\int\limits_{t=t_1}^{t_1+T}\{\ddot{x}+p\dot{x}+\alpha x+\beta x^3 - F_0\cos(\omega t-\varphi)\}^2\,dt\right]\delta\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial I}{\partial F_0}\cdot\delta F_0 + \frac{\partial I}{\partial\varphi}\cdot\delta\varphi\right].$$

Dus: $G_F = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial I}{\partial F_0}\cdot\delta F_0 + \frac{\partial I}{\partial\varphi}\cdot\delta\varphi\right] = \frac{1}{2}\,\delta I.$

Hoofdstuk 2. Vrije ongedempte trillingen met veel graden van vrijheid

2.1. Inleiding.

Het onderwerp van dit hoofdstuk wordt gevormd door de theorie van kleine, vrije, ongedempte trillingen. Bij de beschrijving hiervan worden een aantal wiskundige gereedschappen gehanteerd die reeds bekend verondersteld worden en die hier daarom slechts zeer beknopt besproken worden

Ter verkorting van de notatie wordt gebruik gemaakt van de sommatie-conventie: als in één term dezelfde letterindex tweemaal op gelijke hoogte voorkomt dan moet die index achtereenvolgens alle in aanmerking komende waarden aannemen en moeten de termen die zo ontstaan gesommeerd worden. Op deze regel wordt één uitzondering gemaakt: als in een term dezelfde letterindex tweemaal voorkomt en als die index tussen haakjes geplaatst is mag <u>niet</u> gesommeerd worden. De verkorte schrijfwijze voor de "sommen" $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = 1,2,3, --- m)$ is dus: $y_i = a_{ij} x_j$ $(j = 1,2, --- n;$ $i = 1,2, -- m)$. Voorbeeld: a_{ii} met $i = 1,2, ---- n$ is gelijk aan:

$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ---- + a_{nn}$ <u>maar</u> $a_{(ii)} = a_{11}$ <u>of</u> a_{22} <u>of</u> a_{33} <u>of</u> --- a_{nn}.

In de formule $y_i = a_{ij} x_j$ is i de vrije (letter)index terwijl j dummy-index genoemd wordt. Het zal duidelijk zijn dat voor j iedere andere letter (behalve i), bijv. k, gebruikt mag worden als j en k tenminste dezelfde waarden kunnen aannemen; immers op grond van de sommatie-conventie geldt: $a_{ik} x_k = a_{ij} x_j$ <u>als</u> $j,k = 1,2,3, --- n$.

Een veel gebruikt begrip is de Kronecker-delta δ_{ij} die als volgt gedefinieerd is: $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ als } i = j.$$

Met dit symbool volgt bijv.: $x_i = \delta_{ij} . x_j$

$$a_{ii} = \delta_{ij} . a_{ij} = a_{jj}$$

Een matrix met elementen a_{ij} wordt genoteerd als (a_{ij}); de determinant van deze matrix wordt aangegeven met $|a_{ij}|$. Hierin is i de index die het rijnr. aanduidt, j geeft het nummer van de kolom. Zoals bekend kunnen determinanten alleen zinvol gedefinieerd worden voor vierkante matrices (a_{ij}), dus $i,j = 1,2,\ldots,n$. Zij $|a_{ij}| = a$. De bij het element a_{ij} behorende onderdeterminant is D_{ij}; A_{ij} is de bij a_{ij} behorende cofactor : $A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}$. Hiermee volgt:

$a_{ik} A_{jk} = a . \delta_{ij}$: ontwikkeling van de determinant naar de i^e-rij

$a_{ki} A_{kj} = a . \delta_{ij}$: „ „ „ „ „ „ i^e-kolom.

Het product van twee vierkante matrices (a_{ij}) en (b_{ij}) is (c_{ij}); dan is (c_{ij}) ook vierkant en bovendien geldt: $c_{ik} = a_{ij} . b_{jk}$ en $|c_{ij}| = c = |a_{ij}| . |b_{ij}| = a.b.$

Transponeren van een matrix is het verwisselen van rijen en kolommen. Als $(a_{ij})^t$ de getransponeerde van (a_{ij}) is geldt derhalve: $a_{ij}^t = a_{ji}$. Een matrix is symmetrisch als $(a_{ij})^t = (a_{ij})$ en keersymmetrisch als $(a_{ij})^t = -(a_{ij})$; een noodzakelijke voorwaarde is dat (a_{ij}) vierkant is.

De verkorte schrijfwijze voor een stelsel van n vergelijkingen in n onbekenden is $y_i = a_{ij} . x_j$; $i,j = 1,2,3,\ldots n$. De matrix (a_{ij}) is blijkbaar vierkant. De onbekenden $x_1, x_2, \ldots x_n$ zijn slechts oplosbaar uit dit stelsel als de determinant van de matrix (a_{ij}) ongelijk is aan nul (zie bijv. collegedictaat Wiskunde I).

"Vermenigvuldiging" van de i^e vergelyking met de cofactor geeft:

$$A_{ik}.a_{ij}.x_j = a.\delta_{kj}.x_j = A_{ik}.y_i = a.x_k.$$

Als $a \neq 0$ volgt: $x_k = \frac{A_{ik}}{a}.y_i$ en dus: $x_i = \frac{A_{ji}}{a}.y_j$: dit is de regel van Cramer. Hierna zal, als dat nodig blijkt te zijn, steeds verondersteld worden dat de determinant van ter sprake komende matrices ongelijk is aan nul.

Stel $\alpha_{ji} = \frac{A_{ij}}{a}$; uit Wiskunde I is dan bekend dat de termen α_{ij} de elementen zijn van de inverse $(a_{ij})^{-1}$ van (a_{ij}). Een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van deze inverse is de eis dat $|a_{ij}| = a$ ongelijk aan nul moet zijn.

Een kwadratische vorm U in x_i kan op de volgende wijze geschreven worden (althans in alle gevallen die in dit college ter sprake komen): $U = a_{ij}.x_i.x_j$. De elementen a_{ij} zullen reëel zijn. Zonder de algemeenheid te schaden mag verondersteld worden dat de matrix met elementen a_{ij} symmetrisch is. Immers als a_{ij} niet symmetrisch is geldt voor U bijv:

$$U = \text{-------} + p.x_r.x_s + \text{------} + q.x_s.x_r + \text{-----}.$$ Dit is echter altijd te schryven als:

$$U = \text{--------} + \underbrace{\frac{p+q}{2}}_{a_{rs}}.x_r.x_s + \text{-----} + \underbrace{\frac{p+q}{2}}_{a_{sr}}x_s.x_r + \text{----}, \text{ dus } a_{rs} = a_{sr}.$$

Zij $U_{,i}$ de aanduiding voor de afgeleide van U naar x_i; dan volgt:

$$U_{,i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{kj}.x_k.x_j) = a_{ij}x_j + a_{ki}x_k = a_{ij}.x_j + a_{ik}x_k$$ omdat $a_{ki} = a_{ik}$. Dus: $U_{,i} = 2a_{ij}x_j$.

Als gegeven is dat $U = a_{ij}.x_i.x_j$ positief is voor alle $x_1, x_2, \text{---} x_n$ waarbij niet alle elementen x_j nul zijn dan is $|a_{ij}| = a$ ongelijk aan nul en positief.

2.2. Vergelykingen van Lagrange

Beschouw een puntmassa m die onder invloed van een kracht $F = F(t)$ langs een rechte lijn beweegt (zie fig. 40).

fig 40

Dan is : $F = m\ddot{x}$; $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ waarbij T de kinetische energie is.

De impuls p in x-richting is gelijk aan : $p = m\dot{x} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$.

Dus: $\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} = F$, of: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = F$. Dit is de wet van Lagrange, toegepast op dit zeer eenvoudige geval. In het college Mechanica I van Prof. J.B. Alblas is deze wet algemeen bewezen; wij zullen hier de afleiding geven voor een bijzonder geval.

Gegeven zijn de massa's m_I, m_{II}, m_{III}, ---- De beweging van de massa's wordt beschreven in een orthogonaal x-y-z assenkruis.

Wy definieren de volgende grootheden:

$m_{ij} = 0$ als $i \neq j$

$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_I$

$m_{44} = m_{55} = m_{66} = m_{II}$

$m_{77} = m_{88} = m_{99} = m_{III}$

enz.

x_1, x_2, x_3 zijn de (x, y, z) coördinaten van m_I

x_4, x_5, x_6 " " (x, y, z) " " m_{II}

|

F_1, F_2, F_3 zijn de componenten van de totale kracht op m_I

F_4, F_5, F_6 " " " " " " " " m_{II}

|

De wet van Newton luidt dan : $F_i = m_{ij} . \ddot{x}_j$. De juistheid van deze uitdrukking is wel duidelyk, immers $m_{ij} = \delta_{ij} . m_{(ij)} \Rightarrow F_i = \delta_{ij} . m_{(ij)} . \ddot{x}_j = m_{(ii)} . \ddot{x}_i$.

Voor de kinetische energie T volgt: $T = \frac{1}{2} m_{ij} \cdot \dot{x}_i \cdot \dot{x}_j$ immers $T = \frac{1}{2} \delta_{ij} \cdot m_{(ij)} \cdot \dot{x}_i \dot{x}_j \Rightarrow$

$T = \frac{1}{2} m_{(ii)} \cdot \dot{x}_i \cdot \dot{x}_i$ (sommeren over i).

Voor de bepaling van de verrichte arbeid geven wij het systeem een virtuele verplaatsing : $dA = F_i \cdot dx_i$.

Wy kunnen nu met voordeel gebruik maken van gegeneraliseerde coordinaten $q_1, q_2, --- q_n$; n = aantal graden van vrijheid. De grootheden q_i zijn van elkaar onafhankelijke coördinaten die de hele beweging kunnen beschrijven $\Rightarrow$

$x_i = x_i(q_1, q_2, --- q_n)$; $q_1, q_2 --- q_n$ zullen functies zijn van de tijd.

Differentiëren van x_i naar q_j geven wij aan door $x_{i;j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$. Dan geldt:

$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} = x_{i;j} \cdot \dot{q}_j$; $\dot{q}_j$ is de gegeneraliseerde snelheid.

Verder volgt:

$dA = F_i \cdot dx_i = F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot dq_j = F_i \cdot x_{i;j} \cdot dq_j$.

Stel $dA = Q_i \cdot dq_i$; deze vorm is reeds bekend uit het eerder genoemde college Mechanica I. Dus: $Q_j = F_i \cdot x_{i;j}$ = gegeneraliseerde kracht.

Ook T kan uitgedrukt worden in $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ---- \dot{q}_n \Rightarrow$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = x_{i;k} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{m_{jr}}{2} \dot{x}_j \cdot \dot{x}_r \right) = m_{ij} \cdot \dot{x}_j \cdot x_{i;k} = p_k = \text{gegeneraliseerde impuls.}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left[m_{ij} \cdot \dot{x}_j \cdot x_{i;k} \right] = m_{ij} \cdot \ddot{x}_j \cdot x_{i;k} + m_{ij} \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{d}{dt}(x_{i;k}).$$

Omdat $x_{i;k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ volgt: $\frac{d}{dt}(x_{i;k}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \cdot \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \cdot \dot{q}_j$

$$= x_{i;kl} \cdot \dot{q}_l$$

Verder geldt : $F_i = m_{ij} \ddot{x}_j \Rightarrow$

$$Q_k = F_i \cdot x_{i;k} = m_{ij} \cdot x_{i;k} \cdot \ddot{x}_j \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(p_k) = Q_k + m_{ij} \cdot \dot{x}_j \cdot x_{i;kl} \cdot \dot{q}_l.$$

Beschouw nu $\frac{\partial T}{\partial q_k} = T_{;k}$

$$T_{,k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\tfrac{1}{2} m_{ij}\, \dot{x}_j\, \dot{x}_i\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_l}\left(\tfrac{1}{2} m_{ij} \cdot \dot{x}_i \cdot \dot{x}_j\right) \cdot \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_k} = m_{il} \cdot \dot{x}_i \cdot \dot{x}_{l,k}$$

$$= m_{il} \cdot \dot{x}_i \cdot x_{l,km} \cdot \dot{q}_m = m_{ij}\, \dot{x}_j \cdot x_{i,kl} \cdot \dot{q}_l$$

Dus: $\frac{\partial p_k}{\partial t} = Q_k + T_{,k}$ of:

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}}$$ Vergelykingen van Lagrange.

2.3. Vrije ongedempte trillingen, algemene theorie.

Wij beschouwen een aantal starre lichamen die zonder demping voldoende zijn ondersteund door volkomen elastische veren. Het systeem heeft n graden van vrijheid; $q_1, q_2, \cdots q_n$ zijn de gegeneraliseerde coördinaten.

De kinetische energie T, die positief definiet is, is een homogene kwadratische functie in de $\dot{q}_i$'s: $T = \frac{1}{2} m_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$; m_{ij} = gegeneraliseerde traagheidsparameter.

I.h.a. zullen de m_{ij}'s functies zijn van q_i. Bij kleine trillingen mogen wij m_{ij} echter constant veronderstellen: eerste term van een reeksontwikkeling.

De uitwendige krachten op de lichamen zijn nul; op de lichamen werken slechts de veerkrachten. De potentiële energie U is dan te schrijven als:

$U = \frac{1}{2} c_{ij} \cdot q_i \cdot q_j$; c_{ij} = gegeneraliseerde veerconstante.

Ook U is positief definiet

Het positief definiet zijn van T en U betekent o.a. dat $|m_{ij}|$ en $|c_{ij}|$ ongelijk aan nul en positief zijn. De inverse van (m_{ij}) en (c_{ij}) bestaat dus. Zij:

$(\alpha_{ij}) = (c_{ij})^{-1}$; α_{ij} = gegeneraliseerd invloedsgetal

Q_i = gegeneraliseerde kracht, dus geldt: $Q_i = \frac{\partial A}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = -c_{ij} \cdot q_j$.

Met de wet van Lagrange volgt:

$$m_{ij} \cdot \ddot{q}_j + c_{ij} \cdot q_j = 0$$ Dit zijn n vergelijkingen in de n onbekenden $q_1 \cdots q_n$

Iedere term in de bovenstaande vergelijking representeert de som van n termen. Als wij deze verg. helemaal uit zouden schrijven, bijv. voor n = 3, zouden wij het grote voordeel van de gebruikte notatie wel heel duidelijk geïllustreerd zien.

Wij weten reeds dat wij de matrix, optredend bij een homogeen kwadratische functie, symmetrisch kunnen maken; wij mogen dus veronderstellen dat $c_{ij} = c_{ji}$ en $m_{ij} = m_{ji}$. Met deze matrices zouden wij verder kunnen werken;

wij zullen ons echter beperken tot het zeer veel voorkomende geval dat $m_{ij} = m_{(ij)} \cdot \delta_{ij}$. In dit geval zijn de q_i's alleen met elkaar gekoppeld door de matrix (c_{ij}); dit wordt een statisch gekoppeld systeem genoemd.

m_{ij} is dan een matrix waarvan alleen de termen op de hoofddiagonaal van nul verschillen.

Wij vermenigvuldigen de verg. $m_{ij} \cdot \ddot{q}_j + c_{ij} \cdot q_j = 0$ met $(\alpha_{ki}) = (c_{ki})^{-1}$. Dan volgt:

$$\alpha_{ki} \cdot m_{ij} \cdot \ddot{q}_j + \alpha_{ki} \cdot c_{ij} \cdot q_j = 0 \Rightarrow \delta_{kj} \cdot q_j + \alpha_{ki} \cdot m_{ij} \cdot \ddot{q}_j = 0.$$

of: $q_i + \alpha_{ik}\, m_{kj} \cdot \ddot{q}_j = 0$.

Wij zullen gebruik maken van gegeneraliseerde coördinaten η_i die gedefiniëerd zijn als: $\eta_i = \sqrt{m_{(ii)}} \cdot q_i$. Dan geldt:

$$\sqrt{m_{(ii)}} \cdot q_i + \alpha_{ik} \cdot m_{(kj)} \cdot \delta_{kj} \cdot \sqrt{m_{(ii)}} \cdot \ddot{q}_j = 0$$

$$\alpha_{ij} \cdot m_{(jj)} \cdot \sqrt{m_{(ii)}} \cdot \ddot{q}_j + \sqrt{m_{(ii)}} \cdot q_i = 0$$

$$\alpha_{ij} \cdot \sqrt{m_{(ii)}} \cdot \sqrt{m_{(jj)}} \cdot \sqrt{m_{(jj)}} \cdot \ddot{q}_j + \sqrt{m_{(ii)}} \cdot q_i = 0.$$

Als: $a_{ij} = \sqrt{m_{(ii)} \cdot m_{(jj)}} \cdot \alpha_{ij}$ dan is $a_{ij} = a_{ji}$ en:

$$a_{ij} \cdot \ddot{\eta}_j + \eta_i = 0.$$

a_{ij} is de matrix waarin de invloed van de traagheidsgrootheden <u>en</u> van de veerstijfheden is „samengeperst".

Als oplossing van de D.V. proberen wij: $\eta_i = \xi_i \cdot \sin \omega t$.

ξ_i en ω onafhankelijk van t.

Dus: $\xi_i - a_{ij} \cdot \omega^2 \cdot \xi_j = 0$.

of: $\delta_{ij} \cdot \frac{1}{\omega^2} \cdot \xi_j - a_{ij} \cdot \xi_j = 0 \Rightarrow \left(a_{ij} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \delta_{ij}\right) \xi_j = 0$

Dit is een stelsel van n lineaire, homogene vergelijkingen in de onbekenden $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Een voor de hand liggende, maar niet interessante oplossing is $\xi_i = 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$. Het stelsel heeft slechts een andere oplossing als de determinant gelijk aan nul is $\Rightarrow \left| a_{ij} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \delta_{ij} \right| = 0$

Dit is een n^e graads vergelyking in ω^2. Omdat de matrix (a_{ij}) symmetrisch en positief definiet is zijn de wortels reëel en positief. Het is mogelijk dat niet alle wortels verschillend zijn. Ter vereenvoudiging zullen wij dat wel aannemen. Er bestaan dus n eigenhoekfrequentie die, in ons geval, allemaal verschillend zijn. Wij nummeren ze zodanig dat geldt:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 ---- < \omega_{n-1} < \omega_n .$$

By elke ω_k hoort een eigenvector (= oplossing van het stelsel $(a_{ij} - \frac{1}{\omega_k^2} . \delta_{ij}) \xi_j = 0$)
Zy ξ_i^m de bij ω_m behorende eigenvector. Deze vectoren zullen i.h.a. een lengte hebben die ongelijk aan één is. Wy weten echter dat, als ξ_i^m een oplossing is ook $\alpha . \xi_i^m$ (α reëel) een oplossing is. Dit betekent dat wij de lengte van de vector ξ_i^m willekeurig mogen nemen. Normeren is het op lengte één brengen van alle eigenvectoren. Dan geldt dus:
$\xi_i^{(m)} \cdot \xi_i^{(m)} = 1$. Met „eigenvector" zullen wij in het vervolg steeds de genormeerde eigenvector bedoelen. Omdat alle ω_m's ongelijk zijn kunnen wij gemakkelijk bewijzen dat alle eigenvectoren verschillend zijn en dat zij zelfs allen loodrecht op elkaar staan, immers er geldt:

$$\xi_i^m = \omega_{(m)}^2 . a_{ij} . \xi_j^{(m)}$$

Wy nemen nog een andere eigenvector ξ_i^l (dus $l \neq m$) en bepalen het inwendige product $\xi_i^m \cdot \xi_i^l$.

$$\xi_i^l \cdot \xi_i^m = \omega_{(m)}^2 . a_{ij} . \xi_j^{(m)} \cdot \xi_i^{(l)} \quad ; \text{met } a_{ij} = a_{ji} \text{ volgt:}$$

$$\xi_i^l \cdot \xi_i^{(m)} = \omega_{(m)}^2 . a_{ji} . \xi_i^l \cdot \xi_j^{(m)} = \omega_{(m)}^2 . a_{ij} . \xi_i^{(m)} \cdot \xi_j^{(l)}$$

Ook geldt: $\xi_i^{(m)} \cdot \xi_i^l = \xi_i^l \cdot \xi_i^m = \omega_{(l)}^2 . a_{ij} . \xi_j^{(l)} \cdot \xi_i^m = \omega_{(l)}^2 . a_{ij} . \xi_i^m \cdot \xi_j^{(l)}$

Aftrekken levert: $a_{ij} \, \xi_i^{(m)} \cdot \xi_j^{(l)} \cdot (\omega_{(m)}^2 - \omega_{(l)}^2) = 0 \Rightarrow a_{ij} . \xi_i^m \cdot \xi_j^l = 0 \Rightarrow$

$\xi_i^m \cdot \xi_i^l = 0 \Rightarrow \xi_i^l$ staat loodrecht op ξ_i^m als $l \neq m$.

Wij mogen dus schrijven: $\underline{\xi_i^l \cdot \xi_i^m = \delta_{lm}}$: het stelsel eenheidseigenvectoren is orthogonaal.

De n eigenvectoren zijn dus zeker onafhankelijk en zij vormen samen een stelsel dat kan dienst doen als basis voor de beschrijving van de beweging, dus: $\eta_i = \beta_j \cdot \xi_i^{\,j}$ (sommeren over j). In matrixnotatie zouden wij dit stelsel als volgt aangeven:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \xi_1^{\,1} \\ \xi_2^{\,1} \\ \xi_3^{\,1} \\ \vdots \\ \xi_n^{\,1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \xi_1^{\,2} \\ \xi_2^{\,2} \\ \xi_3^{\,2} \\ \vdots \\ \xi_n^{\,2} \end{pmatrix} + \text{-------} \beta_n \begin{pmatrix} \xi_1^{\,n} \\ \xi_2^{\,n} \\ \xi_3^{\,n} \\ \vdots \\ \xi_n^{\,n} \end{pmatrix} \quad \text{of } \underline{\eta} = \beta_i \underline{\xi}^{\,i}.$$

$$\underline{\eta} \qquad \underline{\xi}^{\,1} \qquad \underline{\xi}^{\,2} \qquad \underline{\xi}^{\,n}$$

De n onafhankelijke functies β_i $(i = 1, 2, 3, \text{---} n)$ zijn afhankelijk van de tijd; zij worden „de normaalcoordinaten van het systeem" genoemd.

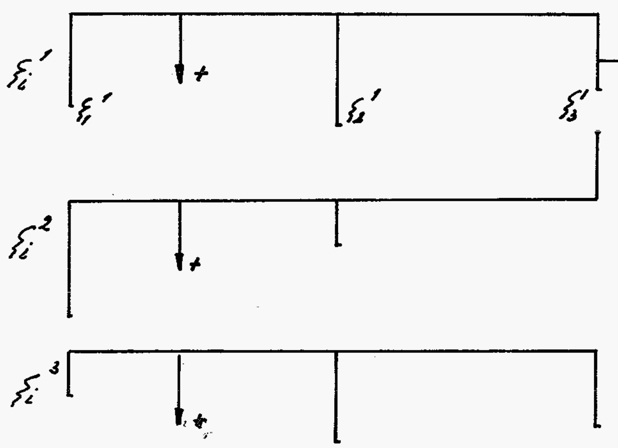
Dus: $\eta_i = \beta_j \cdot \xi_i^{\,j}$. Overschuiven met $\xi_i^{\,k}$ levert:

$$\xi_i^{\,k} \cdot \eta_i = \beta_j \cdot \xi_i^{\,j} \cdot \xi_i^{\,k} = \beta_j \cdot \delta_{jk} = \beta_k \Rightarrow$$

$$\beta_i = \eta_j \cdot \xi_j^{\,i}.$$

Ook deze vergelykingen drukken uit dat wy de $\xi_i^{\,j}$'s beschouwen als de nieuwe basis voor dit probleem.

Wy kunnen dit nog grafisch voorstellen:



de lengte geeft de lengte van de desbetreffende component van $\xi_i^{\,1}$.

dit systeem is onmogelijk, immers: $\xi_i^{\,1} \cdot \xi_i^{\,3} = 0$ terwijl $\xi_i^{\,1}$ en $\xi_i^{\,3}$ $(i = 1, 2, 3)$ groter dan nul zijn.

Wij zullen nog aantonen dat de bewegingsvergelykingen zeer eenvoudig worden als wij van de eigenvectoren gebruik maken.

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m(ij)\, \delta_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = \frac{1}{2} m(ii) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_i = \frac{1}{2} \sqrt{m(ii)}\, \dot{q}_i \cdot \sqrt{m(ii)} \cdot \dot{q}_i \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\eta}_i \cdot \dot{\eta}_i$$

$$U = \frac{1}{2} c_{ij} \cdot q_i \cdot q_j = \frac{1}{2} \frac{c_{ij}}{\sqrt{m(jj) \cdot m(ii)}} \cdot \sqrt{m(ii)} \cdot q_i \cdot \sqrt{m(jj)} \cdot q_j = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \cdot \eta_i \cdot \eta_j$$

met $\gamma_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{m(ii) \cdot m(jj)}}$. Met: $a_{ij} = \sqrt{m(ii) \cdot m(jj)} \cdot \alpha_{ij}$ en $\alpha_{ij} \cdot c_{jk} = \delta_{ik}$

volgt: $a_{ij} \cdot \gamma_{jk} = \delta_{ik}$.

Verder geldt: $\eta_i = \xi_i \cdot \sin \omega t$.

$\xi_i \; (i = 1, 2, \ldots n)$ zijn karakteristiek voor het systeem, niet voor de beweging $\Rightarrow \dot{\xi}_i = 0$.

$\eta_i \; (i = 1, 2, \ldots n)$ zijn karakteristiek voor de beweging van het systeem

Uitgedrukt in β_i en ξ_i volgt met $\eta_i = \beta_j \xi_i^{\,j}$:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\eta}_i \cdot \dot{\eta}_j = \frac{1}{2} \Big(\underset{0}{\underset{\|}{\dot{\xi}_i^{\,j}}} \cdot \beta_j + \dot{\beta}_j \xi_i^{\,j} \Big) \Big(\underset{0}{\underset{\|}{\dot{\xi}_i^{\,k}}} \cdot \beta_k + \dot{\beta}_k \xi_i^{\,k} \Big) = \frac{1}{2} \dot{\beta}_j \xi_i^{\,j} \cdot \dot{\beta}_k \xi_i^{\,k}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\beta}_j \cdot \dot{\beta}_k \cdot \delta_{jk} = \frac{1}{2} \dot{\beta}_i \cdot \dot{\beta}_i .$$

$$U = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \cdot \eta_i \, \eta_j = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{ij} \cdot \beta_k \cdot \xi_i^{\,k} \cdot \beta_m \cdot \xi_j^{\,m} = \frac{1}{2} \beta_k \cdot \beta_m \cdot \gamma_{ij} \cdot \xi_i^{\,k} \xi_j^{\,m} .$$

Ook geldt: $\xi_i^{\,k} = \omega^2_{(k)} \cdot a_{ij} \, \xi_j^{(k)} \Rightarrow$

$$U = \frac{1}{2} \beta_k \cdot \beta_m \cdot \omega^2(k) \cdot a_{ip} \, \xi_p^{\,k} \, \xi_j^{\,m} \cdot \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \beta_k \, \beta_m \cdot \underbrace{a_{ip} \cdot \gamma_{ij}}_{\delta_{pj}} \cdot \omega^2(k) \, \xi_p^{\,k} \cdot \xi_j^{\,m}$$

$$= \frac{1}{2} \beta_k \cdot \beta_m \cdot \omega(k) \cdot \delta_{pj} \cdot \xi_p^{\,k} \cdot \xi_j^{\,m} = \frac{1}{2} \beta_k \cdot \beta_m \cdot \omega(k) \cdot \underbrace{\xi_j^{\,k} \cdot \xi_j^{\,m}}_{\delta_{km}}$$

$$= \frac{1}{2} \beta_k \cdot \beta_m \cdot \omega(k) \cdot \delta_{km} = \frac{1}{2} \beta_k \cdot \beta_k \cdot \omega(k) \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2} \beta_i \cdot \beta_i \cdot \omega(i) .$$

Met de wet van Lagrange volgt nu:

$$\underline{\underline{\ddot{\beta}_i + \omega^2(i) \cdot \beta_i = 0 .}}$$

Dit is een stelsel van n lineaire, homogene, niet gekoppelde D.V.

De formule is zeer gemakkelijk om de theorie verder te ontwikkelen, maar is voor de berekening van eigenfrequenties waardeloos omdat β_i en ω_i bekend moeten zijn bij het opstellen van deze vergelijkingen.

Voor de bepaling van de meestal meest interessante eigenfrequentie en de bijbehorende eigenvector kunnen wij gebruik maken van benaderingsmethoden. Voordat wij hier op ingaan echter eerst een paar opmerkingen over de voorgaande theorie.

1). Zonder dat uitdrukkelijk te vermelden hebben wij aangenomen dat het systeem <u>conservatief</u> is en kleine trillingen uitvoert om een <u>stabiele</u> evenwichtsstand. Het conservatief zijn betekent dat er een potentiele energie U bestaat waarvoor geldt:

$dU = -dA$; hierin is dA de arbeid, verricht door de op het systeem werkende krachten.

Kies q_i zodanig dat de beschouwde evenwichtstoestand gekarakteriseerd wordt door $q_i = 0$; in deze stand mogen wij $U = 0$ kiezen. Wy kunnen U in de buurt van de evenwichtstoestand (d.w.z. q_i <u>klein</u>) dan benaderen door:

$$U(q_i) = \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_k=0} \cdot q_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q_k=0} \cdot q_i \cdot q_j$$ (eerste termen van een Taylor reeksontwikkeling).

Aangezien $q_i = 0$ de evenwichtsstand is geldt: $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_k=0} = 0$. Omdat deze stand ook nog stabiel is volgt dat U een positief definiete kwadratische vorm is, immers $U > 0$. Uit $U = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \cdot \partial q_j}\right)_{q_k=0} \cdot q_i \cdot q_j = \frac{1}{2} c_{ij} \cdot q_i \cdot q_j$ volgt dat moet gelden: $\frac{1}{2} c_{ij} \cdot q_i \cdot q_j > 0$ voor alle (kleine) $q_i \neq 0$. Dit betekent dat $c = |c_{ij}| > 0$. Hiervan is in het voorgaande reeds intensief gebruik gemaakt.

2 Op blz. 40 is vermeld dat, als $m_{ij} = m(ij) \cdot \delta_{ij}$, het systeem statisch gekoppeld is. Wij zijn daar niet verder op deze naamgeving ingegaan.

c_{ij} en m_{ij} heten, als $i \neq j$, de statische, resp. dynamische koppelingstermen van het systeem.

Een systeem waarvoor geldt $m_{ij} = m(ij) \cdot \delta_{ij}$ heet statisch gekoppeld, terwijl er in het geval dat $c_{ij} = c(ij) \cdot \delta_{ij}$ alleen dynamische koppeling is.

2.4 Benaderingsmethoden voor de bepaling van de laagste eigenfrequentie.

Benaderingsmethode van Rayleigh.

Neem een configuratie η_i aan; de bybehorende potentiële energie U is:

$U = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \cdot \eta_i \cdot \eta_j$. Voor U geldt verder: $U = \frac{1}{2} \omega^2(i) \cdot \beta_i \cdot \beta_i$.

Aangezien $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \; --- < \omega_n$ geldt zeker: $U \geq \frac{1}{2} \omega_1^2 \cdot \beta_i \cdot \beta_i$. Ook geldt:

$$\beta_i \cdot \beta_i = \beta_i \cdot \delta_{ik} \cdot \beta_k = \beta_i \cdot \xi_m^i \cdot \xi_m^k \cdot \beta_k = \beta_i \cdot \xi_m^i \cdot \beta_k \cdot \xi_m^k = \eta_m \cdot \eta_m = \eta_i \cdot \eta_i$$

Dus: $U \geq \frac{1}{2} \omega_1^2 \cdot \eta_i \cdot \eta_i \Rightarrow$

$$\omega_1^2 \cdot \eta_i \cdot \eta_i \leq \gamma_{ij} \cdot \eta_i \cdot \eta_j$$

Als wij voor η_i de by de laagste eigenfrequentie behorende eigenfunctie $\eta_i = \beta_1 \cdot \xi_i^1$ genomen hadden zou gelden: $\omega_1^2 \cdot \eta_i \cdot \eta_i = \gamma_{ij} \cdot \eta_i \cdot \eta_j$. Het is dikwijls mogelijk om een redelyke schatting te maken van deze eigenfunctie; de met $\omega^2 \cdot \eta_i \cdot \eta_i = \gamma_{ij} \cdot \eta_i \cdot \eta_j$ berekende ω is dan een benadering voor ω_1.

2.5 Iteratieve methoden.

Wy nemen een of andere configuratie ${}^0\eta_i$ aan die de werkelijke configuratie liefst zo goed mogelijk moet benaderen.

${}^0\eta_i$ kan uitgedrukt worden in (of: is een lineaire functie van) de eigenvectoren: ${}^0\eta_i = {}^0\beta_k \cdot \xi_i^k$; zowel ${}^0\beta_k$ als ξ_i^k zijn nog onbekend.

Wy berekenen ${}^1\eta_i = a_{ij} \cdot {}^0\eta_j$; ${}^1\eta_j$ is de eerste iteratie.

Zoals uit : $a_{ij}\cdot\ddot{\eta}_j + \eta_i = 0$ moge volgen is $\overset{1}{\eta}_j$ de configuratie t.g.v. de belasting van het systeem door de gegeneraliseerde traagheidskrachten behorende bij $\omega = 1$ en $\overset{0}{\eta}_j$.

Ook $\overset{1}{\eta}_i$ is een lineaire combinatie van de eigenvectoren :

$$\overset{1}{\eta}_i = a_{ij}\,\overset{0}{\eta}_j = a_{ij}\cdot\overset{0}{\beta}_k\cdot\xi_j^{\,k} = \overset{0}{\beta}_k\cdot a_{ij}\cdot\xi_j^{\,k}$$

$$\xi_j^{\,k} = \omega^2_{(k)}\cdot a_{ji}\cdot\xi_i^{\,k} \quad \text{of :} \quad \frac{1}{\omega^2_{(k)}}\cdot\xi_i^{\,k} = a_{ij}\cdot\xi_j^{\,k} \Rightarrow \overset{1}{\eta}_i = \overset{0}{\beta}_k\cdot\frac{1}{\omega^2_{(k)}}\cdot\xi_i^{\,k}$$

of: $$\overset{1}{\eta}_i = \frac{\overset{0}{\beta}_j}{\omega^2_{(j)}}\cdot\xi_i^{\,j}.$$

De overgang van $\overset{0}{\eta}_i$ op $\overset{1}{\eta}_i$ komt dus overeen met de overgang van

$$\begin{pmatrix}\overset{0}{\beta}_1\\ \overset{0}{\beta}_2\\ \vdots\\ \overset{0}{\beta}_n\end{pmatrix} \quad \text{op} \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\omega_1^2}\overset{0}{\beta}_1\\ \frac{1}{\omega_2^2}\overset{0}{\beta}_2\\ \vdots\\ \frac{1}{\omega_n^2}\cdot\overset{0}{\beta}_n\end{pmatrix}$$

Op precies dezelfde wijze volgt voor de p^e iteratie :

$$\overset{p}{\eta}_i = a_{ij}\cdot\overset{p-1}{\eta}_i\,.$$

$$\text{en: } \overset{p}{\eta}_i = \frac{1}{\omega^{2p}_{(j)}}\cdot\overset{0}{\beta}_j\cdot\xi_i^{\,j}.$$

Omdat $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$ en dus $\frac{1}{\omega_1} > \frac{1}{\omega_2} > \dots > \frac{1}{\omega_n}$ zal de term $j=1$ bij verdere iteratie steeds meer gaan overheersen. Voor grote p geldt dan : $\overset{p}{\eta}_i \approx \frac{1}{\omega_1^{2p}}\cdot\overset{0}{\beta}_1\cdot\xi_i^{\,1} \Rightarrow$ de eigenvector behorende bij ω_1 (dat is $\xi_i^{\,1}$) is gelijk aan de p^e iteratie (op een evenredigheidsconstante na).

De waarde van ω_1 volgt uit: $\omega_1^2 \approx \frac{\overset{p-1}{\eta}_i}{\overset{p}{\eta}_i}$, of: $\omega_1^2 = \lim\limits_{p\to\infty}\frac{\overset{p-1}{\eta}_i}{\overset{p}{\eta}_i}$.

$$\text{en: } \xi_i^{\,1} = \frac{1}{\overset{0}{\beta}_1}\lim_{p\to\infty}\left(\omega_1^{2p}\cdot\overset{p}{\eta}_i\right)$$

Dit is de benaderingsmethode van Stodola. Het blijkt dat de iteraties vaak kunnen worden uitgevoerd zonder de matrix (a_{ij}) expliciet te bepalen.

Opgemerkt moet nog worden dat de aangegeven methode in belangrijke mate verfijnd kan worden waardoor het rekenschema overzichtelijker wordt. Verder is het mogelijk deze methode zodanig te modificeren dat ook de eigenfrequentie die het dichtste bij een bepaalde waarde ligt bepaald kan worden. Literatuur hierover is te vinden in het collegedictaat van Numerieke Wiskunde.

Wij zullen nu tot slot nog enige andere benaderingsmethoden schetsen.

$$ {}^{0}\eta_i\cdot{}^{0}\eta_i = {}^{0}\beta_k\cdot\xi_i^{\,k}\cdot{}^{0}\beta_m\cdot\xi_i^{\,m} = {}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_m\cdot\delta_{km} = {}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_k $$

$$ {}^{0}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i = {}^{0}\beta_k\cdot\xi_i^{\,k}\cdot\frac{1}{\omega_{(m)}^2}\cdot{}^{0}\beta_m\cdot\xi_i^{\,m} = \frac{1}{\omega_{(m)}^2}\cdot{}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_m\cdot\delta_{km} = \frac{1}{\omega_{(k)}^2}\cdot{}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_k\,. $$

$$ {}^{1}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i = \frac{1}{\omega_{(k)}^2}\cdot{}^{0}\beta_k\cdot\xi_i^{\,k}\cdot\frac{1}{\omega_{(m)}^2}\cdot{}^{0}\beta_m\cdot\xi_i^{\,m} = \frac{1}{\omega_{(k)}^2}\cdot\frac{1}{\omega_{(m)}^2}\cdot{}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_m\cdot\delta_{km} = \frac{1}{\omega_{(k)}^4}\cdot{}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_k\,. $$

Er geldt: $\frac{1}{\omega_1^2} > \frac{1}{\omega_2^2} > \cdots > \frac{1}{\omega_n^2}$; verder is het meestal mogelijk de normaalcoordinaten ${}^{0}\beta_i$ zo te kiezen dat ${}^{0}\beta_1$ de grootste is. Dan kunnen wij ${}^{0}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i$ en ${}^{1}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i$ echter benaderen door:

$$ {}^{0}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i \approx \frac{1}{\omega_1^2}\cdot{}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_k $$

$$ {}^{1}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i \approx \frac{1}{\omega_1^4}\,{}^{0}\beta_k\cdot{}^{0}\beta_k $$

Met ${}^{0}\beta_i\cdot{}^{0}\beta_i = {}^{0}\eta_i\cdot{}^{0}\eta_i$ volgt dan:

$$ {}^{0}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i\cdot\omega_1^2 \approx {}^{0}\eta_i\cdot{}^{0}\eta_i \qquad : \text{Grammel} $$

$$ {}^{1}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i\cdot\omega_1^2 \approx {}^{0}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i \qquad : \text{Koch.} $$

$$ {}^{1}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i\cdot\omega_1^4 \approx {}^{0}\eta_i\cdot{}^{0}\eta_i $$

Het zal duidelijk zijn dat wij deze drie benaderingsmethoden ook mogen toepassen op de p^e iteratie ${}^{p}\eta_i$ i.p.v. op de aangenomen configuratie ${}^{0}\eta_i$; hierdoor kan het iteratie-proces volgens Stodola aanzienlijk versneld worden.

Wij weten dat: ${}^{1}\eta_i = a_{ij}\cdot{}^{0}\eta_j$ en dus: ${}^{0}\eta_i = \gamma_{ji}\cdot{}^{1}\eta_j \Rightarrow$

$$ {}^{0}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i = \gamma_{ji}\cdot{}^{1}\eta_j\cdot{}^{1}\eta_i = \gamma_{ij}\cdot{}^{1}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_j = 2U $$

$$ {}^{0}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i = {}^{0}\eta_i\cdot a_{ij}\cdot{}^{0}\eta_j = a_{ij}\cdot{}^{0}\eta_i\cdot{}^{0}\eta_j = 2U. $$

Omdat ${}^{1}\eta_i$ beschouwt kan worden als de configuratie die ontstaat o.i.v. gegeneraliseerde traagheidskrachten, behorende by $\overset{\circ}{\eta}_i$ en $\omega=1$ kan U vaak bepaald worden zonder $\overset{1}{\eta}_i$ uit te rekenen. De benaderingsmethode van Grammel wordt dan:

$$2U.\,\omega_1^2 \approx \overset{\circ}{\eta}_i\cdot\overset{\circ}{\eta}_i$$

Voor de benaderingsmethode volgens Koch volgt

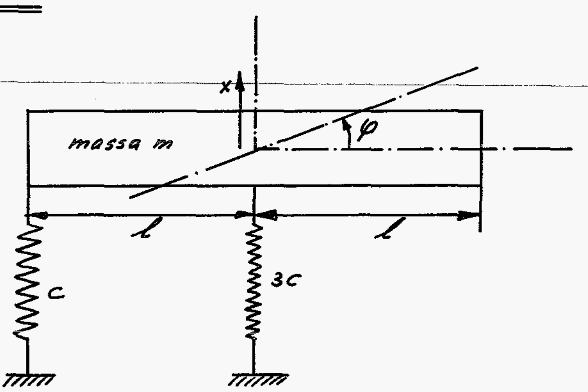
$$\overset{\circ}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_i = \gamma_{ij}\cdot\overset{1}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_j \approx \overset{1}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_i\cdot\omega_1^2.$$

$$\text{of:}\quad \omega^2\cdot\overset{1}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_i = \gamma_{ij}\cdot\overset{1}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_j$$

Hieruit zien wij dat de methode van Koch dezelfde is als die van Rayleigh, toegepast op de eerste iteratie.

Wij zullen de theorie toepassen op een paar eenvoudige voorbeelden.

2.6 Voorbeeld.



$$T=\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

$$U=\tfrac{1}{2}.3cx^2+\tfrac{1}{2}c(x-l\varphi)^2$$

$$I=\tfrac{1}{4}ml^2$$

Als gegeneraliseerde coordinaten nemen wij $(q_1, q_2) = (x, \varphi)$

De matrix (m_{ij}) volgt dan uit $T=\frac{1}{2}m_{ij}\,\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j \Rightarrow$

$$(m_{ij})=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}ml^2\end{pmatrix}$$

(c_{ij}) volgt uit $U=\frac{1}{2}c_{ij}\,q_i\,q_j = \frac{3}{2}cx^2+\frac{1}{2}cx^2-cxl\varphi+\frac{1}{2}cl^2\varphi^2$

$$=2cq_1^2+\tfrac{1}{2}cl^2q_2^2-cl\,q_1\cdot q_2 \Rightarrow$$

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix} 4c & -lc \\ -lc & l^2c\end{pmatrix}$$

$$\eta_i=\sqrt{m(ii)}\,q_i \Rightarrow (\eta_1,\eta_2)=(q_1\cdot\sqrt{m},\; q_2\cdot\tfrac{1}{2}l\sqrt{m}) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sqrt{m} \\ \frac{1}{2}l\varphi\sqrt{m} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{m(ii)\cdot m(jj)}} \Rightarrow (\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{4c}{m} & -2\frac{c}{m} \\ -2\frac{c}{m} & 4\frac{c}{m} \end{pmatrix}, \text{ dus } |\gamma_{ij}| = 12\frac{c^2}{m^2}$$

$$(a_{ij}) = (\gamma_{ij})^{-1} \Rightarrow \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{4c}{m}\cdot\frac{m^2}{12c^2} & \frac{2c}{m}\cdot\frac{m^2}{12c^2} \\ \frac{2c}{m}\cdot\frac{m^2}{12c^2} & \frac{4c}{m}\cdot\frac{m^2}{12c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\frac{m}{c} & \frac{1}{6}\frac{m}{c} \\ \frac{1}{6}\frac{m}{c} & \frac{1}{3}\frac{m}{c} \end{pmatrix}$$

Uit $|a_{ij} - \delta_{ij}\cdot\frac{1}{\omega^2}| = 0$ volgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\frac{m}{c} - \frac{1}{\omega^2} & \frac{1}{6}\frac{m}{c} \\ \frac{1}{6}\frac{m}{c} & \frac{1}{3}\frac{m}{c} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\frac{m}{c} - \frac{1}{\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{36}\frac{m^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\frac{m}{c} - \frac{1}{\omega^2} = \pm\frac{1}{6}\frac{m}{c} \quad \text{of: } \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{3}\frac{m}{c} \pm \frac{1}{6}\frac{m}{c}.$$

Dus: $\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{2}\frac{m}{c}$; $\omega_1^2 = 2\frac{c}{m}$

$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{6}\frac{m}{c}$; $\omega_2^2 = 6\frac{c}{m}$.

De eigenvectoren zijn dan oplossingen van $\left(a_{ij} - \frac{1}{\omega^2}\delta_{ij}\right)\xi_j = 0$.

Met $\omega = \omega_1$ volgt: $\xi_1' = 2\frac{c}{m}\left\{\frac{1}{3}\frac{m}{c}\cdot\xi_1' + \frac{1}{6}\frac{m}{c}\cdot\xi_2'\right\} = \frac{2}{3}\xi_1' + \frac{1}{3}\xi_2' \Rightarrow \xi_1' = \xi_2'$. Na normeren volgt: $(\xi_i') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Invullen van $\omega = \omega_2$ in de vergelijking: $\xi_i^{(k)} - a_{ij}\cdot\omega_{(k)}^2\cdot\xi_j^{(k)} = 0$ levert:

$$\xi_1^2 = 6\frac{c}{m}\left(\frac{1}{3}\frac{m}{c}\cdot\xi_1^2 + \frac{1}{6}\frac{m}{c}\cdot\xi_2^2\right) = 2\xi_1^2 + \xi_1^2 \Rightarrow \xi_1^2 = -\xi_2^2 \Rightarrow$$

$$\xi_i^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Wij zullen de laagste eigenfrequentie nog bepalen met enkele benaderingsmethoden.

Rayleigh.

Wij nemen de volgende configuratie aan: $(\eta_i) = (1,0)$

Dan levert de benadering volgens Rayleigh: $\eta_i\cdot\eta_i\cdot\omega_1^2 = \gamma_{ij}\cdot\eta_i\cdot\eta_j$

Dus:

$$\omega_1^2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1,0)\cdot\begin{pmatrix}4\frac{c}{m} & -2\frac{c}{m}\\ -2\frac{c}{m} & 4\frac{c}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$\omega_1^2 = (1,0)\left(4\frac{c}{m}, -2\frac{c}{m}\right) = 4\frac{c}{m}$: fout van 100 % vergeleken met het exacte resultaat $\omega_1^2 = 2\frac{c}{m}$.

We proberen $(\eta_i) = (1,1) \Rightarrow$

$$\omega_1^2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (1,1)\cdot\begin{pmatrix}4\frac{c}{m} & -2\frac{c}{m}\\ -2\frac{c}{m} & 4\frac{c}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2.\omega_1^2 = (1,1)\left(2\frac{c}{m}, 2\frac{c}{m}\right) = 4\frac{c}{m} \Rightarrow$$

$\omega_1^2 = 2\frac{c}{m}$: klopt met het exacte resultaat.

<u>Iteratieve methoden.</u>

Als eerste benadering nemen we weer de configuratie $\overset{0}{\eta}_i = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

De eerste iteratie $\overset{1}{\eta}_i$ volgt uit : $\overset{1}{\eta}_i = a_{ij}\overset{0}{\eta}_j \Rightarrow$

$$\overset{1}{\eta}_i = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c} & \frac{1}{6}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c} & \frac{1}{3}\frac{m}{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c}\end{pmatrix}$$

$$\overset{2}{\eta}_i = a_{ij}\cdot\overset{1}{\eta}_j \Rightarrow \quad (\overset{2}{\eta}_i) = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c} & \frac{1}{6}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c} & \frac{1}{3}\frac{m}{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{36}\frac{m^2}{c^2}\\ \frac{4}{36}\frac{m^2}{c^2}\end{pmatrix}$$

De iteratie-methode van <u>Koch</u> levert, toegepast op $\overset{0}{\eta}_i$ en $\overset{1}{\eta}_i$:

$$\overset{1}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_i\cdot\omega_1^2 = \overset{0}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_i \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c}\end{pmatrix}\cdot\omega_1^2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c}\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{36}\right)\frac{m^2}{c^2}\cdot\omega_1^2 = \frac{1}{3}\frac{m}{c} \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = \frac{36}{5}\cdot\frac{1}{3}\frac{c}{m} = \frac{12}{5}\cdot\frac{c}{m}.$$

Toegepast op $\overset{1}{\eta}_i$ en $\overset{2}{\eta}_i$ levert de methode Koch:

$$\overset{2}{\eta}_i\cdot\overset{2}{\eta}_i\cdot\omega_1^2 = \overset{1}{\eta}_i\cdot\overset{2}{\eta}_i \Rightarrow$$

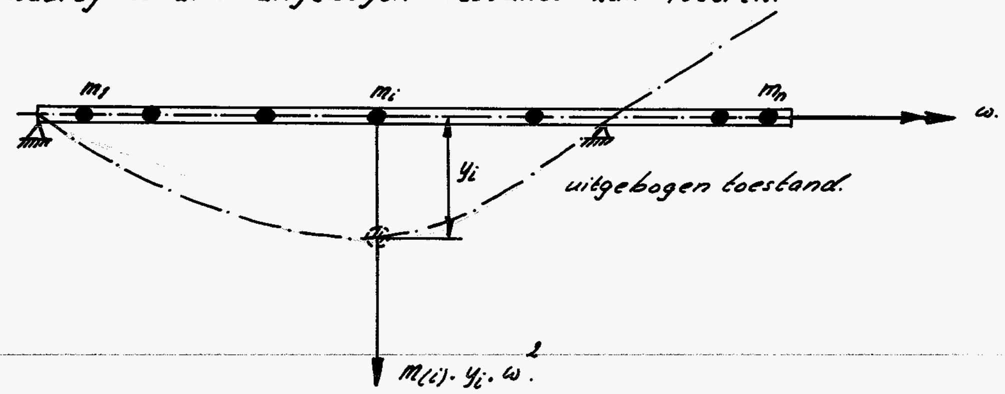
$$\begin{pmatrix}\frac{5}{36}\frac{m^2}{c^2}\\ \frac{4}{36}\frac{m^2}{c^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{36}\cdot\frac{m^2}{c^2}\\ \frac{4}{36}\cdot\frac{m^2}{c^2}\end{pmatrix}\cdot\omega_1^2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\frac{m}{c}\\ \frac{1}{6}\frac{m}{c}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{36}\frac{m^2}{c^2}\\ \frac{4}{36}\frac{m^2}{c^2}\end{pmatrix} \Rightarrow \omega_1^2\cdot\frac{25+16}{36.36}\cdot\frac{m^4}{c^4} = \frac{10+4}{6.36}\cdot\frac{m^3}{c^3} \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = \frac{14.36}{6.41}\frac{c}{m} = \frac{84}{41}\frac{c}{m};\ \text{exact}: \omega_1^2 = 2\frac{c}{m} = \frac{82}{41}\frac{c}{m}$$

Wij zien dus dat wij bij de iteratie-methode vrij snel tot een nauwkeurig resultaat komen, zelfs als wij uitgaan van een configuratie $\overset{0}{\eta}_i$ die met de methode volgens Rayleigh een zeer grote fout geeft.

__Voorbeeld:__ kritische toerentallen.

Op een massaloze elastische as zijn n geconcentreerde massa's aangebracht; de as draait eenparig met hoeksnelheid ω. Wij zijn geïnteresseerd in die hoeksnelheden waarbij de as in uitgebogen toestand kan roteren.



Wij voeren de verplaatsing y_i van m_i in als coordinaat; dit is dan tevens een gegeneraliseerde coordinaat: $q_i = y_i$. Op m_i werkt een traagheidskracht: $m_{(i)}\cdot\omega^2\cdot y_i$.

Volgens de lineaire elasticiteitstheorie is er een lineair verband tussen de verplaatsing y_i van m_i en de op de massa's werkende traagheidskrachten:

$y_i = \alpha_{ij}\cdot m_{(j)}\cdot\omega^2\cdot y_j$; α_{ij} zijn de invloedsgetallen van Maxwell.

of: $q_i = \omega^2\cdot m_{(j)}\cdot\alpha_{ij}\cdot q_j$. De grootheden η_j volgen uit: $\eta_i = \sqrt{m_{(i)}}\cdot q_i \Rightarrow$

$\eta_i = \omega^2\sqrt{m_{(i)}}\cdot\sqrt{m_{(j)}}\cdot\alpha_{ij}\cdot\eta_j$ of: $\eta_i = \omega^2 a_{ij}\cdot\eta_j$ met $a_{ij} = \sqrt{m_{(i)}\cdot m_{(j)}}\,\alpha_{ij}$.

Schrijven wij nog $m_{(i)}$ i.p.v. m_i dan komt de notatie geheel overeen met die in de voorgaande theorie.

Voor de bepaling van het laagste kritische toerental zullen wij gebruik maken van een der iteratie-methoden en wel die van Koch. We moeten dan eerst een configuratie $\overset{0}{\eta}_i$ aannemen. De eerste iteratie $\overset{1}{\eta}_i$ volgt uit:

$\overset{1}{\eta}_i = a_{ij}\cdot\overset{0}{\eta}_i$; de benadering ω_1 voor de laagste kritische hoeksnelheid is dan te berekenen met $\omega_1^2\cdot\overset{1}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_i = \overset{0}{\eta}_i\cdot\overset{1}{\eta}_i$ (Koch).

Het lijkt alsof wij bij de hier geschetste werkwijze eerst de matrices (a_{ij}) en (α_{ij}) moeten bepalen om uit ${}^{0}\eta_i$ de eerste iteratie ${}^{1}\eta_i$ te kunnen berekenen. Dit is echter niet nodig; om dit in te zien zullen wij de vergelijking van Koch uitdrukken in de verplaatsingen y_i.

$\eta_i = \omega^2 a_{ij}\cdot\eta_j$ komt overeen met $y_i = \alpha_{ij}\cdot\omega^2 m(j)\cdot y_j$.

$${}^{1}\eta_i = a_{ij}\cdot{}^{0}\eta_j \Rightarrow \sqrt{m(i)}\cdot{}^{1}y_i = a_{ij}\cdot\sqrt{m(j)}\cdot{}^{0}y_j = \alpha_{ij}\cdot\sqrt{m(i)\cdot m(j)}\cdot\sqrt{m(j)}\cdot{}^{0}y_j \Rightarrow$$

$${}^{1}y_i = \alpha_{ij}\cdot m(j)\cdot{}^{0}y_j$$

De vergelijking: $\omega_1^2\cdot{}^{1}\eta_i\cdot{}^{1}\eta_i = {}^{1}\eta_i\cdot{}^{0}\eta_i$ wordt dan:

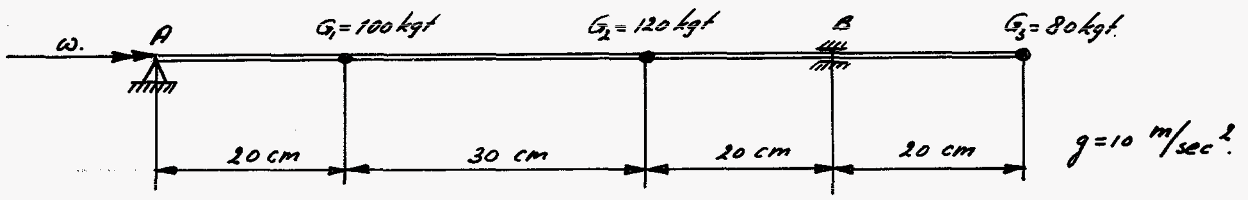
$$\omega_1^2\cdot\sqrt{m(i)}\cdot{}^{1}y_i\cdot\sqrt{m(i)}\cdot{}^{1}y_i = \sqrt{m(i)}\cdot{}^{1}y_i\cdot\sqrt{m(i)}\cdot{}^{0}y_i \Rightarrow$$

$$\underline{\omega_1^2\cdot m(i)\cdot{}^{1}y_i\cdot{}^{1}y_i = m(i)\cdot{}^{0}y_i\cdot{}^{1}y_i},\ \text{waarbij}\ {}^{1}y_i = \alpha_{ij}\cdot m(j)\cdot{}^{0}y_j.$$

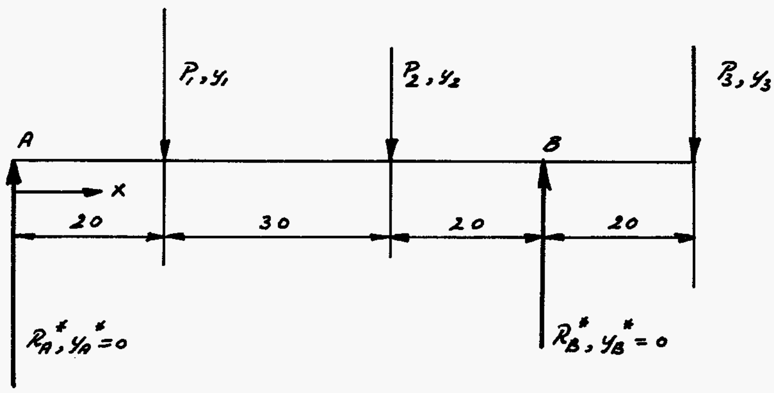
${}^{1}y_i = \alpha_{ij}\cdot m(j)\cdot{}^{0}y_j = \alpha_{ij}\cdot m(j)\cdot{}^{0}y_j\cdot\omega^2$ voor $\omega = 1$ rad/sec.

Wij kunnen ${}^{1}y_i$ dus beschouwen als de verplaatsingen die ontstaan als op de as de traagheidskrachten $m(i)\cdot{}^{0}y_i\cdot\omega^2$ (met $\omega = 1$ rad/sec) werken. Deze kunnen wij echter bepalen door bijv. gebruik te maken van de stelling van Castigliano of van de momentenlijn van de „balk." De eerste methode komt in wezen neer op de berekening van invloedsgetallen, of juister gezegd: de invloedsgetallen zijn uit de resultaten van deze werkwijze zeer eenvoudig te bepalen. Dit is een groot voordeel als niet alleen de eerste maar ook hogere iteraties ${}^{2}\eta_i$, ${}^{3}\eta_i$ etc. bepaald moeten worden om een nauwkeurig resultaat te verkrijgen.

Wij nemen een eenvoudig voorbeeld:



Voor de berekening met Castigliano moeten wij op de plaats der massa's onafhankelijk te variëren krachten P_1, P_2 en P_3 invoeren.



Evenwicht:

$$R_A^* + R_B^* = P_1 + P_2 + P_3$$

$$7R_B^* = 2P_1 + 5P_2 + 9P_3$$

$$7R_A^* = 5P_1 + 2P_2 - 2P_3$$

$$R_A^* = \frac{5}{7}P_1 + \frac{2}{7}P_2 - \frac{2}{7}P_3$$

$$R_B^* = \frac{2}{7}P_1 + \frac{5}{7}P_2 + \frac{9}{7}P_3.$$

De in de staat opgehoopte vormveranderingsenergie A is:

$$A = \int_0^{20} \frac{(R_A^* . x)^2}{2EI} dx + \int_{20}^{50} \frac{1}{2EI}\{R_A^* . x - P_1(x-20)\}^2 dx + \int_0^{20} \frac{1}{2EI}(P_3 . z)^2 dz + \int_{20}^{40} \frac{1}{2EI}\{P_3 . z - R_B^*(z-20)\}^2 dz.$$

$$= \frac{1}{2EI}\Big[R_A^{*2} . \tfrac{1}{3} . 20^3 + R_A^{*2} . \tfrac{1}{3}(50^3 - 20^3) - 2R_A^* . P_1\{\tfrac{1}{3}(50^3-20^3) - 10(50^2-20^2)\} + P_1^2 . \tfrac{1}{3} . 30^3 + P_3^2 . \tfrac{1}{3} . 20^3$$
$$+ P_3^2 . \tfrac{1}{3}(40^3 - 20^3) - 2R_B^* . P_3\{\tfrac{1}{3}(40^3 - 20^3) - 10(40^2 - 20^2)\} + R_B^{*2} . \tfrac{1}{3} . 20^3\Big]$$

$$= \frac{10^3}{6EI}\Big[125 R_A^{*2} - 2R_A^* P_1(125 - 8 - 3.25 + 3.4) + 27 P_1^2 + 64 P_3^2 - 2R_B^* P_3(64 - 8 - 3.16 + 3.4) +$$
$$+ 8R_B^{*2}\Big]$$

$$= \frac{10^3}{6EI}\Big[125 R_A^{*2} - 108 R_A^* . P_1 + 27 P_1^2 + 8 R_B^{*2} - 40 R_B^* . P_3 + 64 P_3^2\Big]$$

Uit: $\frac{\partial A}{\partial P_1} = y_1$; $\frac{\partial A}{\partial P_2} = y_2$ en $\frac{\partial A}{\partial P_3} = y_3$ volgt:

$$y_1 = \frac{10^3}{3EI}\Big[\tfrac{5}{7}(\tfrac{5}{7}P_1 + \tfrac{2}{7}P_2 - \tfrac{2}{7}P_3).125 - 54\{\tfrac{5}{7}P_1 + \tfrac{2}{7}P_2 - \tfrac{2}{7}P_3 + \tfrac{5}{7}P_1\} + 27 P_1 + 8.\tfrac{2}{7}(\tfrac{2}{7}P_1 + \tfrac{5}{7}P_2 +$$
$$+ \tfrac{9}{7}P_3) - 20.\tfrac{2}{7}.P_3\Big]$$

$$y_2 = \frac{10^3}{3EI}\Big[125.\tfrac{2}{7}(\tfrac{5}{7}P_1 + \tfrac{2}{7}P_2 - \tfrac{2}{7}P_3) - 54.\tfrac{2}{7}P_1 + 8.\tfrac{5}{7}(\tfrac{2}{7}P_1 + \tfrac{5}{7}P_2 + \tfrac{9}{7}P_3) - 20.\tfrac{5}{7}.P_3\Big]$$

$$y_3 = \frac{10^3}{3EI}\Big[-125.\tfrac{2}{7}(\tfrac{5}{7}P_1 + \tfrac{2}{7}P_2 - \tfrac{2}{7}P_3) + 54.\tfrac{2}{7}.P_1 + 8.\tfrac{9}{7}(\tfrac{2}{7}P_1 + \tfrac{5}{7}P_2 + \tfrac{9}{7}P_3) - 20(\tfrac{2}{7}P_1 + \tfrac{5}{7}P_2 + \tfrac{9}{7}P_3) +$$
$$- 20.\tfrac{9}{7}.P_3 + 64.P_3\Big]$$

$$y_1 = \frac{10^3}{147.EI}\Big[P_1(25.125 - 54.70 + 27.49 + 32) + P_2(10.125 - 14.54 + 80) - P_3(10.125 - 14.54 +$$
$$- 18.8 + 14.20)\Big] = \frac{10^3}{147.EI}(700 P_1 + 574 P_2 - 630 P_3)$$

$$y_2 = \frac{10^3}{147.EI}\Big[574 P_1 + 700 P_2 - 840 P_3\Big]$$

$$y_3 = \frac{10^3}{147.EI}\left[-630\,P_1 - 840\,P_2 + 1764\,P_3\right]$$

P_1, P_2 en P_3 zijn afhankelyk van de aangenomen configuratie:

$P_1 = m_1.\omega^2.\overset{\circ}{y}_1$ $\qquad$ $P_1 = 100.10^{-3}.\overset{\circ}{y}_1 = \frac{1}{10}\overset{\circ}{y}_1$

$P_2 = m_2.\omega^2.\overset{\circ}{y}_2$; met $\omega = 1$ rad/sec volgt: $P_2 = 120.10^{-3}.\overset{\circ}{y}_2 = \frac{12}{100}.\overset{\circ}{y}_2$

$P_3 = m_3.\omega^2.\overset{\circ}{y}_3$ $\qquad$ $P_3 = 80.10^{-3}.\overset{\circ}{y}_3 = \frac{8}{100}.\overset{\circ}{y}_3$.

Wy zien dus dat:

$${}^{1}y_1 = \frac{10^3}{147.EI}\left[70\,\overset{\circ}{y}_1 + 68{,}88.\overset{\circ}{y}_2 - 50{,}40\,\overset{\circ}{y}_3\right]$$

$${}^{1}y_2 = \frac{10^3}{147.EI}\left[57{,}4.\overset{\circ}{y}_1 + 84{,}0.\overset{\circ}{y}_2 - 67{,}2.\overset{\circ}{y}_3\right]$$

$${}^{1}y_3 = \frac{10^3}{147.EI}\left[-63{,}0.\overset{\circ}{y}_1 - 100{,}8.\overset{\circ}{y}_2 + 141{,}12.\overset{\circ}{y}_3\right]$$

Zij nog gegeven dat $EI = 133{,}5.10^6$ kgfcm^2; wy nemen $(\overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \overset{\circ}{y}_3) = (100, 100, -180)$ cm.

Dan volgt: $({}^{1}y_1, {}^{1}y_2, {}^{1}y_3) = (1{,}1700\ ,\ 1{,}3369\ ,\ -2.1291).10^{-3}$ cm

Door in de formules voor ${}^{1}y_i$ de $\overset{\circ}{y}_i$ te vervangen door ${}^{1}y_i$ en ${}^{1}y_i$ door ${}^{2}y_i$ vinden wij de tweede iteratie ${}^{2}y_i$:

$$({}^{2}y_1, {}^{2}y_2, {}^{2}y_3) = (1{,}4337\ ,\ 1{,}6435\ ,\ -2{,}5934\ ).10^{-8}\ \text{cm.}$$

Wij berekenen nu eerst de eigenfrequentie ω_1 uit de eerste iteratie:

$${}^{1}\omega_1^2.\ m(i).{}^{1}y(i).{}^{1}y(i) = m(i).{}^{1}y_i.\overset{\circ}{y}_i \Rightarrow {}^{1}\omega_1^2.726{,}18.10^{-6} = 58911.10^{-3} \Rightarrow$$

$${}^{1}\omega_1 = \sqrt{81{,}124.10^3} = 284{,}8\ \text{rad/sec}$$

Het kritische toerental ${}^{1}n_1$ is dan: ${}^{1}n_1 = \frac{60}{2\pi}\,{}^{1}\omega_1 = 2720$ omw/min.

Uit de tweede iteratie volgt:

$${}^{2}\omega_1^2.\ m(i).{}^{2}y_i.{}^{2}y_i = m(i).{}^{2}y_i.{}^{1}y_i \Rightarrow \quad {}^{2}\omega_1^2.1104{,}01.10^{-16} = 895{,}366.10^{-11}$$

$${}^{2}\omega_1 = \sqrt{811{,}01.10^2} = 284{,}8\ \text{rad/sec}$$

Het kritische toerental ${}^{2}n_1$ is dan: ${}^{2}n_1 = \frac{60}{2\pi}.{}^{2}\omega_1 = 2720$ omw/min

Het resultaat berekend met de 1^e en 2^e iteratie is dus precies hetzelfde!

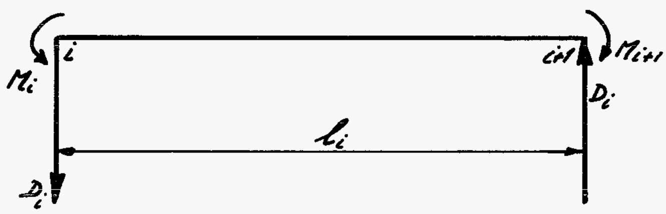
Uit de vergelijkingen voor y_1, y_2 en y_3, uitgedrukt in P_1, P_2 en P_3, volgt met $y_i = \alpha_{ij} P_j$ de matrix van de invloedsgetallen:

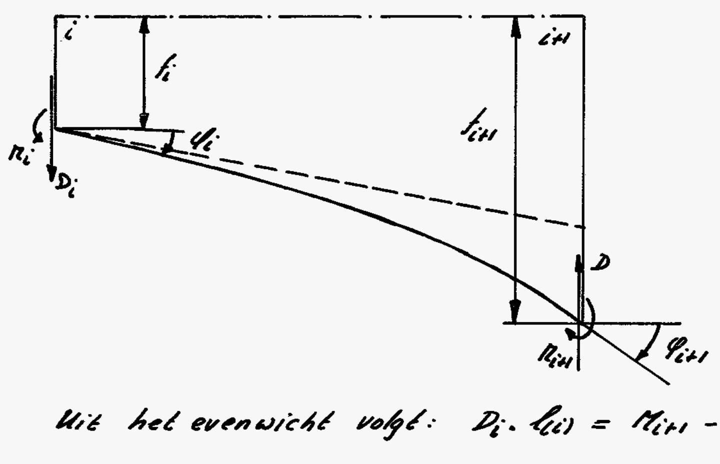
$$(\alpha_{ij}) = \frac{10^3}{147.EI} \begin{pmatrix} 800 & 574 & -630 \\ 574 & 700 & -840 \\ -630 & -840 & 1764 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40,765 & 29,249 & -32,103 \\ 29,249 & 35,670 & -42,804 \\ -32,103 & -42,804 & 89,888 \end{pmatrix} * 10^{-6}$$

α_{ij} in cm/kgf.

Wij zullen hetzelfde voorbeeld nogmaals doorrekenen maar nu met een methode waarby gebruik wordt gemaakt van „vergeet-mij-nietjes"

Om de opzet van de berekening te verduidelijken beschouwen wij een balk met lengte l_i die aan de beide uiteinden belast is door een dwarskracht en een buigend moment.





Als f_i en φ_i de verplaatsing, resp. de hoekverdraaiing van punt i zijn volgt voor f_{i+1} en φ_{i+1} van punt $i+1$:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{M_{i+1} \cdot l_{(i)}}{(EI)_i} - \frac{D_{(i)} \cdot l_{(i)}^2}{2(EI)_i}$$

$$f_{i+1} = f_i + \frac{M_{i+1} \cdot l_{(i)}^2}{(2EI)_i} - \frac{D_{(i)} \cdot l_{(i)}^3}{3(EI)_i}$$

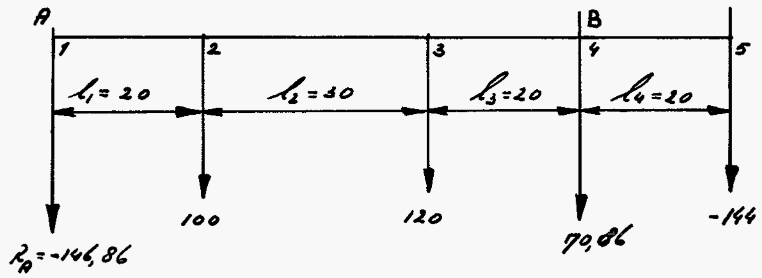
Uit het evenwicht volgt: $D_i \cdot l_{(i)} = M_{i+1} - M_i$ en dus:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{M_{i+1} + M_i}{(EI)_i} \cdot \frac{l_{(i)}}{2}$$

$$f_{i+1} = f_i + \varphi_{(i)} \cdot l_{(i)} + \frac{M_{i+1} + 2M_i}{(EI)_i} \cdot \frac{l_{(i)}^2}{6}$$

Wy keren nu weer terug naar ons oorspronkelyke probleem.

De belasting van de balk bestaat uit de „traagheidskrachten" $m_{(i)} \cdot \overset{o}{y}_i$ (is gelijk aan $m_{(i)} \cdot \overset{o}{y}_i \cdot \omega^2$ als $\omega = 1$ rad/sec) en de steunpuntsreacties. Als doorbuigingsvorm nemen wij weer $(\overset{o}{y}_1, \overset{o}{y}_2, \overset{o}{y}_3) = (1000, 1000, -1800)$ cm. Met $(G_1, G_2, G_3) = (100, 120, 80)$ kgf volgt dan dat de balk op de volgende wijze belast is:



maten in cm

$EI = 133,5 \cdot 10^6$ kgf.cm

De dimensie van de „krachten" in deze figuur is <u>niet</u> kgf, maar kgfsec².

Wij willen de formules van de vorige bladzijde toepassen; daarbij doet zich de moeilijkheid voor dat in punt A wel de verplaatsing $f_1 = 0$ maar niet de hoekverdraaiing φ_1 bekend is. Neem nu voorlopig aan dat $\varphi_1 = 0$ en bepaal dan f_2^*, f_3^* en $f_4^* = f_B^*$. Deze f_4^* zal nu ongelijk zijn aan nul; de werkelijke φ_1 volgt uit: $\varphi_1 (l_1 + l_2 + l_3) + f_B^* = 0$ omdat de verplaatsing van punt B nul moet zijn.

De verplaatsingen f_2, f_3 en f_4 volgen dan uit:

$$f_2 = f_2^* + \varphi_1 \cdot l_1 = \overset{1}{y}_1$$

$$f_3 = f_3^* + \varphi_1 (l_1 + l_2) = \overset{1}{y}_2$$

$$f_4 = 0.$$

f_5 volgt dan met de formules van de vorige bladzijde uit $f_4 = 0$ en φ_4.

De eerste iteratie $(\overset{1}{y}_1, \overset{1}{y}_2, \overset{1}{y}_3)$ is gelijk aan (f_2, f_3, f_5).

Het verloop van de berekening moge blijken uit het volgende schema.

i	Kracht P_i	Dwarskracht D_i	Lengte l_i	Stijfheid $(EI)_i \cdot 10^{-6}$	Moment M_i	$\frac{M_{i+1}+M_i}{(EI)_i} \cdot \frac{l}{2} \cdot 10^{+6}$	$\frac{M_{i+1}+2M_i}{(EI)_i} \cdot \frac{l^2}{6} \cdot 10^{+6}$	$\varphi_i^* \cdot 10^{6}$	$f_i^* \cdot 10^{+6}$	$\varphi_i \cdot 10^{+6}$	$f_i \cdot 10^{+6}$
	kgf.sec²	kgf.sec²	cm	kgf. cm²	kgfcm sec²	sec²	sec²	sec²	cm sec²	sec²	cm.sec²
1	-146,86				0			0	0	658,34	0
		-146,86	20	133,5		-220,015	-1466,77				
2	+100				-2937,2			-220,015	-1466,77	438,32	11700,0
		-46,86	30	133,5		-817,999	-11480,22				
3	+120				-4343,0			-1038,014	-19547,44	-379,68	133 69,4
		+73,14	20	133,5		-541,049	-5775,78				
4	+70,86				-2880,0			----	-46083,50	-920,73.	0
		+144,00	20	133,5		-215,730	-2876,40				
5	-144				0			----	----	-----	21291,0

$$\varphi_1 = -f_4^* \cdot \frac{1}{l_1+l_2+l_3} = +46083,50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{70} = 658,34 \cdot 10^{-6}$$

De zo gevonden 1e iteratie is natuurlyk gelijk aan die, berekend m.b.v. de wet van Castigliano.

Het zal duidelijk zijn dat de tweede methode aanmerkelijk sneller werkt dan de eerste; het verschil is groter naarmate de balk op meer plaatsen belast wordt (dus by meer massa's op de as : meer graden van vrijheid). Het nadeel is echter dat de matrix der invloedsgetallen niet zonder meer is op te schrijven, wat bij de eerste methode wel mogelijk is. Deze matrix is bijzonder gemakkelijk als ook de hogere eigenfrequenties $\omega_2, \omega_3 --- \omega_n$ bepaald moeten worden of als wij na willen gaan welke eigenfrequentie het dichtst in de buurt van een bepaalde gegeven frequentie ligt. Literatuur hierover is o.a. te vinden in het college-dictaat „Numerieke Wiskunde" (voorjaar 1961) van Prof. Veltkamp.