Storingstheorie voor gesloten Riesz-Schauder operatoren

696898

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Memorandum 81-13

juli 1981

Storingstheorie voor gesloten Riesz-Schauder operatoren

door

H. Heijmans

Technische Hogeschool

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

Nederland

STORINGSTHEORIE VOOR GESLOTEN RIESZ-SCHAUDER OPERATOREN

H. Heijmans

In onderstaande is X een willekeurige Banachruimte. De verzameling van gesloten, lineaire operatoren op X geven we aan met $C(X)$. De ruimte van begrensde, lineaire operatoren op X geven we aan met $B(X)$.

T. Kato heeft in [3] een afstandsfunctie $\hat{d}(S,T)$ op $C(X)$ gedefiniëerd. De topologie die deze afstandsfunctie binnen $C(X)$ induceert, valt in de deelverzameling $B(X)$ samen met de gewone norm-topologie. Door Kato wordt ook nog een z.g.n. "gap"-functie $\hat{\delta}$ gedefiniëerd, welke echter geen afstandsfunctie is.

Meer informatie over deze grootheden is te vinden in [3] , hoofdstuk IV.

Voor de functies $\hat{d}$ en $\hat{\delta}$ geldt de volgende betrekking:

$$(1) \qquad \hat{\delta}(T,S) \le \hat{d}(T,S) \le 2\hat{\delta}(T,S) \quad , T,S \in C(X) .$$

<u>Lemma 1</u> De verzameling van inverteerbare operatoren in $C(X)$, met als topologie de topologie geïnduceerd door de metriek $\hat{d}$, is open.

<u>Bewijs:</u> Dit volgt direct uit [3] , theorem IV.2.21 en betrekking (1).

□

<u>Lemma 2</u> Zy $\alpha\in\mathbb{C}$ en $\varepsilon>0$, dan is er een $\delta>0$ zodat voor alle $T,S \in C(X)$ met $\hat{d}(T,S)<\delta$ geldt dat $\hat{d}(T-\alpha,S-\alpha)< \varepsilon$.

<u>Bewijs:</u> $\hat{\delta}(T-\alpha,S-\alpha) \le 2(1+|\alpha|^2).\hat{\delta}(T,S)$. (Zie [3], theorem IV.2.17 .)

Uit betrekking (1) volgt nu dat:

$$\hat{d}(T-\alpha,S-\alpha) \le 4(1+|\alpha|^2).\hat{d}(T,S)$$, en hieruit volgt het gestelde direct.

□

Voor $T \in C(X)$ geven we met $n(T)$, $d(T)$, $ind(T)$, $\alpha(T)$, en $\delta(T)$ resp. de dimensie van de nulruimte, de codimensie van de beeldruimte, de index, de ascent, en de descent van T aan. Zie bijv. [2] voor definities en eigenschappen van deze grootheden. Met $D(T)$, $R(T)$ en $\rho(T)$ geven we resp. het domein, de range en de resolventverzameling van T aan.

Zij nu $T \in C(X)$ met $\rho(T)\neq\emptyset$. Kies $\alpha\in\rho(T)$ en definiëer: $A_T := (T-\alpha)^{-1}$.
Dan is dus $A_T \in B(X)$. Zij voor $\lambda\neq\alpha$ de waarde μ gedefiniëerd door: $\mu=(\lambda-\alpha)^{-1}$.
Gramsch en Lay hebben in [1] (zie pag. 30) laten zien dat voor A_T en T de volgende betrekkingen gelden:

$$
\begin{aligned}
R(A_T-\mu) &= R(T-\lambda)\\
n(A_T-\mu) &= n(T-\lambda)\\
d(A_T-\mu) &= d(T-\lambda) \qquad (2)\\
\alpha(A_T-\mu) &= \alpha(T-\lambda)\\
\delta(A_T-\mu) &= \delta(T-\lambda)
\end{aligned}
$$

Lemma 3 Zij $T,S \in C(X)$ met $\alpha\in\rho(T) \cap \rho(S)$. Definiëer $A_T = (T-\alpha)^{-1}$ en $A_S = (S-\alpha)^{-1}$. Er zijn nu twee getallen $\gamma_1,\gamma_2 >0$ die alleen van α afhangen (dus niet van T of S) zodat $\gamma_1.\hat{d}(T,S) \le \|A_T-A_S\| \le \gamma_2.\hat{d}(T,S)$.

Bewijs: Volgens [3], theorem IV.2.20 en IV.2.17 geldt:

$$\hat{\delta}(A_T,A_S) = \hat{\delta}(T-\alpha,S-\alpha) \le 2(1+|\alpha|^2).\hat{\delta}(T,S).$$

Bovendien is: $\hat{\delta}(T,S) = \hat{\delta}(T-\alpha+\alpha,S-\alpha+\alpha) \le 2(1+|\alpha|^2).\hat{\delta}(T-\alpha,S-\alpha)$.

Samen levert dit:

$$\tfrac{1}{2}(1+|\alpha|^2)^{-1}.\hat{\delta}(T,S) \le \hat{\delta}(A_T,A_S) \le 2(1+|\alpha|^2).\hat{\delta}(T,S).$$

Gebruik makend van betrekking (1) vinden we:

$$\tfrac{1}{8}(1+|\alpha|^2)^{-1}.\hat{d}(T,S) \le \hat{d}(A_T,A_S) \le 8(1+|\alpha|^2).\hat{d}(T,S)$$

Omdat $A_T,A_S \in B(X)$ en binnen $B(X)$ de afstandsfunctie een topologie induceert die equivalent is aan de normtopologie, volgt het gestelde direct.

□

Met behulp van dit gereedschap kunnen we onze belangrijkste stelling bewijzen. Deze stelling is een aanzienlijke uitbreiding van Satz 4, door Kroh en Volkmann bewezen in [4].

Stelling 4 Zij T een semi-Fredholmoperator met $\alpha(T)<\infty$ ($\delta(T)<\infty$) en $\rho(T)\neq\emptyset$, dan is er een $\varepsilon>0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(S,T)<\varepsilon$ geldt dat S een semi-Fredholmoperator is met $\alpha(S)<\infty$ ($\delta(S)<\infty$) , en zodat bovendien geldt:

$$
\begin{aligned}
n(S) &\le n(T)\\
d(S) &\le d(T)\\
\mathrm{ind}(S) &= \mathrm{ind}(T)
\end{aligned}
$$

Bewijs: Volgens [3], theorem IV.5.17 en betrekking (1) is er een $\varepsilon_1>0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T,S)<\varepsilon_1$ geldt dat S een semi-Fredholmoperator is, waarvoor geldt dat: $n(S) \leq n(T)$, $d(S) \leq d(T)$ en $ind(S)=ind(T)$

Zij $\alpha\epsilon\rho(T)$; o.g.v. lemma 1 en lemma 2 is er een $\varepsilon_2>0$ zodat uit $\hat{d}(S,T)<\varepsilon_2$ volgt dat $S-\alpha$ inverteerbaar is, en derhalve $\alpha\epsilon\rho(S)$.

We kiezen $\varepsilon_2\leq\varepsilon_1$, en beschouwen $A_T=(T-\alpha)^{-1}$. Volgens betrekking (2) is $\alpha(A_T+\frac{1}{\alpha})=\alpha(T)$. Volgens [4], Satz 4 is er nu een $\gamma>0$, zodat voor alle $B \in B(X)$ met $\|B\|\leq\gamma$ geldt dat $\alpha(A_T+\frac{1}{\alpha}+B)<\infty$.

Volgens lemma 3 is er een $\varepsilon_3\leq\varepsilon_2$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T,S)<\varepsilon_3$ geldt dat $\|A_T-A_S\|<\gamma$, waarin $A_S=(S-\alpha)^{-1}$. (Bedenk dat o.g.v. $\hat{d}(T,S)<\varepsilon_3\leq\varepsilon_2$ geldt dat $\alpha\epsilon\rho(S)$.)

Dus is $\alpha(A_T+\frac{1}{\alpha}+(A_S-A_T)) = \alpha(A_S+\frac{1}{\alpha})<\infty$. Maar volgens betrekking (2) is $\alpha(A_S+\frac{1}{\alpha}) = \alpha(S)$. Door $\varepsilon=\varepsilon_3$ te kiezen, wordt dus aan de bewering voldaan. □

De verzameling Riesz-Schauderoperatoren, G_2 is op de volgende wijze gedefiniëerd:

$$G_2 = \{ T \in C(X) \mid ind(T)=0 \wedge \alpha(T)=\delta(T) < \infty \} .$$

Voor een gesloten Riesz-Schauderoperator met dicht domein kunnen we nu de volgende storings-stelling bewijzen:

<u>Stelling 5</u> Zij $T \in G_2$ met $\overline{D(T)}=X$, dan is er een $\varepsilon>0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T,S)<\varepsilon$ geldt dat $S \in G_2$.

<u>Bewijs:</u> Veronderstel dat $T \in G_2$ en dat $\overline{D(T)}=X$; D.C. Lay heeft bewezen dat in dat geval 0 een geïsoleerd punt van het spectrum is of $0\epsilon\rho(T)$. (Zie [5], theorem 2.1) In beide gevallen is $\rho(T)\neq\emptyset$.

Stelling 4 geeft nu dat er een $\varepsilon>0$ is zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T,S)<\varepsilon$ geldt dat $ind(S)=0$ en $\alpha(S)<\infty$. Volgens [2], theorem 4.3 is dan: $\alpha(S)=\delta(S)<\infty$. Samen betekent dit dat $S \in G_2$. □

<u>**Open vraag**:</u> Zij $T \in G_2$ met $\overline{D(T)}=X$. Is er nu een $\varepsilon>0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T,S)<\varepsilon$ geldt dat $S \in G_2$, en bovendien $\overline{D(S)}=X$?

Om deze vraag te beantwoorden, kan men misschien gebruik maken van de volgende eigenschap: zij $\alpha\epsilon\rho(T)$ en $A_T = (T-\alpha)^{-1}$, dan is $D(T) = R(A_T)$. (Zie [1], pag. 30)

REFERENTIES

[1] B. Gramsch and D.C. Lay, Spectral mapping theorems for essential spectra. Math. Ann. 192 (1971), p.17-32.

[2] M.A. Kaashoek, Ascent, decent, nullity and defect, a note on a paper by A.E. Taylor. Math. Ann. 172 (1967), p.105-115.

[3] T. Kato, Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, New York, 1966.

[4] H. Kroh und P. Volkmann, Störungssätze für Semi-Fredholmoperatoren. Math. Z. 148 (1976), p.295-297.

[5] D.C. Lay, Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect. Math. Ann. 184 (1970), p.197-214.
