

Storingstheorie voor gesloten Riesz-Schauder operatoren

Citation for published version (APA):

Heijmans, H. (1981). *Storingstheorie voor gesloten Riesz-Schauder operatoren*. (Eindhoven University of Technology : Dept of Mathematics : memorandum; Vol. 8113). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1981

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

696898

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Memorandum 81-13

juli 1981

Storingstheorie voor gesloten Riesz-Schauder operatoren

door

H. Heijmans

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde en Informatica
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Nederland

STORINGSTHEORIE VOOR GESLOTEN RIESZ-SCHAUDER OPERATOREN

H. Heijmans

In onderstaande is X een willekeurige Banachruimte. De verzameling van gesloten, lineaire operatoren op X geven we aan met $C(X)$. De ruimte van begrensde, lineaire operatoren op X geven we aan met $B(X)$.

T. Kato heeft in [3] een afstandsfunctie $\hat{d}(S,T)$ op $C(X)$ gedefiniëerd. De topologie die deze afstandsfunctie binnen $C(X)$ induceert, valt in de deelverzameling $B(X)$ samen met de gewone norm-topologie. Door Kato wordt ook nog een z.g.n. "gap"-functie $\hat{\delta}$ gedefiniëerd, welke echter geen afstandsfunctie is.

Meer informatie over deze grootheden is te vinden in [3], hoofdstuk IV.

Voor de functies \hat{d} en $\hat{\delta}$ geldt de volgende betrekking:

$$(1) \quad \hat{\delta}(T,S) \leq \hat{d}(T,S) \leq 2\hat{\delta}(T,S) \quad , \quad T,S \in C(X) .$$

Lemma 1 De verzameling van inverteerbare operatoren in $C(X)$, met als topologie de topologie geïnduceerd door de metriek \hat{d} , is open.

Bewijs: Dit volgt direct uit [3], theorem IV.2.21 en betrekking (1). □

Lemma 2 Zy $\alpha \in \mathbb{C}$ en $\epsilon > 0$, dan is er een $\delta > 0$ zodat voor alle $T,S \in C(X)$ met $\hat{d}(T,S) < \delta$ geldt dat $\hat{d}(T-\alpha, S-\alpha) < \epsilon$.

Bewijs: $\hat{\delta}(T-\alpha, S-\alpha) \leq 2(1+|\alpha|^2) \cdot \hat{\delta}(T,S)$. (Zie [3], theorem IV.2.17 .)

Uit betrekking (1) volgt nu dat:

$$\hat{d}(T-\alpha, S-\alpha) \leq 4(1+|\alpha|^2) \cdot \hat{d}(T,S) \quad , \quad \text{en hieruit volgt het gestelde direct.}$$
□

Voor $T \in C(X)$ geven we met $n(T)$, $d(T)$, $\text{ind}(T)$, $\alpha(T)$, en $\delta(T)$ resp. de dimensie van de nulruimte, de codimensie van de beeldruimte, de index, de ascent, en de descent van T aan. Zie bijv. [2] voor definities en eigenschappen van deze grootheden. Met $D(T)$, $R(T)$ en $\rho(T)$ geven we resp. het domein, de range en de resolventverzameling van T aan.

Zij nu $T \in C(X)$ met $\rho(T) \neq \emptyset$. Kies $\alpha \in \rho(T)$ en definiëer: $A_T := (T-\alpha)^{-1}$.

Dan is dus $A_T \in B(X)$. Zij voor $\lambda \neq \alpha$ de waarde μ gedefiniëerd door: $\mu = (\lambda - \alpha)^{-1}$.

Gramsch en Lay hebben in [1] (zie pag. 30) laten zien dat voor A_T en T de volgende betrekkingen gelden:

$$\begin{aligned}
 R(A_T - \mu) &= R(T - \lambda) \\
 n(A_T - \mu) &= n(T - \lambda) \\
 (2) \quad d(A_T - \mu) &= d(T - \lambda) \\
 \alpha(A_T - \mu) &= \alpha(T - \lambda) \\
 \delta(A_T - \mu) &= \delta(T - \lambda)
 \end{aligned}$$

Lemma 3 Zij $T, S \in C(X)$ met $\alpha \in \rho(T) \cap \rho(S)$. Definiëer $A_T = (T - \alpha)^{-1}$ en $A_S = (S - \alpha)^{-1}$. Er zijn nu twee getallen $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ die alleen van α afhangen (dus niet van T of S) zodat $\gamma_1 \cdot \hat{d}(T, S) \leq \|A_T - A_S\| \leq \gamma_2 \cdot \hat{d}(T, S)$.

Bewijs: Volgens [3], theorem IV.2.20 en IV.2.17 geldt:

$$\hat{\delta}(A_T, A_S) = \hat{\delta}(T - \alpha, S - \alpha) \leq 2(1 + |\alpha|^2) \cdot \hat{\delta}(T, S).$$

$$\text{Bovendien is: } \hat{\delta}(T, S) = \hat{\delta}(T - \alpha + \alpha, S - \alpha + \alpha) \leq 2(1 + |\alpha|^2) \cdot \hat{\delta}(T - \alpha, S - \alpha).$$

Samen levert dit:

$$\frac{1}{2}(1 + |\alpha|^2)^{-1} \cdot \hat{\delta}(T, S) \leq \hat{\delta}(A_T, A_S) \leq 2(1 + |\alpha|^2) \cdot \hat{\delta}(T, S).$$

Gebruik makend van betrekking (1) vinden we:

$$\frac{1}{4}(1 + |\alpha|^2)^{-1} \cdot \hat{d}(T, S) \leq \hat{d}(A_T, A_S) \leq 8(1 + |\alpha|^2) \cdot \hat{d}(T, S)$$

Omdat $A_T, A_S \in B(X)$ en binnen $B(X)$ de afstandsfunctie een topologie induceert die equivalent is aan de normtopologie, volgt het gestelde direct. □

Met behulp van dit gereedschap kunnen we onze belangrijkste stelling bewijzen. Deze stelling is een aanzienlijke uitbreiding van Satz 4, door Kroh en Volkmann bewezen in [4].

Stelling 4 Zij T een semi-Fredholmoperator met $\alpha(T) < \infty$ ($\delta(T) < \infty$) en $\rho(T) \neq \emptyset$, dan is er een $\varepsilon > 0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(S, T) < \varepsilon$ geldt dat S een semi-Fredholmoperator is met $\alpha(S) < \infty$ ($\delta(S) < \infty$), en zodat bovendien geldt:

$$\begin{aligned}
 n(S) &\leq n(T) \\
 d(S) &\leq d(T) \\
 \text{ind}(S) &= \text{ind}(T)
 \end{aligned}$$

Bewijs: Volgens [3], theorem IV.5.17 en betrekking (1) is er een $\varepsilon_1 > 0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T, S) < \varepsilon_1$ geldt dat S een semi-Fredholmoperator is,

waarvoor geldt dat: $n(S) \leq n(T)$, $d(S) \leq d(T)$ en $\text{ind}(S) = \text{ind}(T)$

Zij $\alpha \in \rho(T)$; o.g.v. lemma 1 en lemma 2 is er een $\varepsilon_2 > 0$ zodat uit $\hat{d}(S, T) < \varepsilon_2$ volgt dat $S - \alpha$ inverteerbaar is, en derhalve $\alpha \in \rho(S)$.

We kiezen $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, en beschouwen $A_T = (T - \alpha)^{-1}$. Volgens betrekking (2) is $\alpha(A_T + \frac{1}{\alpha}) = \alpha(T)$. Volgens [4], Satz 4 is er nu een $\gamma > 0$, zodat voor alle $B \in B(X)$ met $\|B\| \leq \gamma$ geldt dat $\alpha(A_T + \frac{1}{\alpha} + B) < \infty$.

Volgens lemma 3 is er een $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T, S) < \varepsilon_3$ geldt dat $\|A_T - A_S\| < \gamma$, waarin $A_S = (S - \alpha)^{-1}$. (Bedenk dat o.g.v. $\hat{d}(T, S) < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ geldt dat $\alpha \in \rho(S)$.)

Dus is $\alpha(A_T + \frac{1}{\alpha} + (A_S - A_T)) = \alpha(A_S + \frac{1}{\alpha}) < \infty$. Maar volgens betrekking (2) is $\alpha(A_S + \frac{1}{\alpha}) = \alpha(S)$. Door $\varepsilon = \varepsilon_3$ te kiezen, wordt dus aan de bewering voldaan. \square

De verzameling Riesz-Schauderoperatoren, G_2 is op de volgende wijze gedefiniëerd:

$$G_2 = \{ T \in C(X) \mid \text{ind}(T) = 0 \wedge \alpha(T) = \delta(T) < \infty \}.$$

Voor een gesloten Riesz-Schauderoperator met dicht domein kunnen we nu de volgende storingsstelling bewijzen:

Stelling 5 Zij $T \in G_2$ met $\overline{D(T)} = X$, dan is er een $\varepsilon > 0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T, S) < \varepsilon$ geldt dat $S \in G_2$.

Bewijs: Veronderstel dat $T \in G_2$ en dat $\overline{D(T)} = X$; D.C. Lay heeft bewezen dat in dat geval 0 een geïsoleerd punt van het spectrum is of $0 \in \rho(T)$.

(Zie [5], theorem 2.1.) In beide gevallen is $\rho(T) \neq \emptyset$.

Stelling 4 geeft nu dat er een $\varepsilon > 0$ is zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T, S) < \varepsilon$ geldt dat $\text{ind}(S) = 0$ en $\alpha(S) < \infty$. Volgens [2], theorem 4.3

is dan: $\alpha(S) = \delta(S) < \infty$. Samen betekent dit dat $S \in G_2$. \square

Open vraag: Zij $T \in G_2$ met $\overline{D(T)} = X$. Is er nu een $\varepsilon > 0$ zodat voor alle $S \in C(X)$ met $\hat{d}(T, S) < \varepsilon$ geldt dat $S \in G_2$, en bovendien $\overline{D(S)} = X$?

Om deze vraag te beantwoorden, kan men misschien gebruik maken van de volgende eigenschap: zij $\alpha \in \rho(T)$ en $A_T = (T - \alpha)^{-1}$, dan is $D(T) = R(A_T)$. (Zie [1], pag. 30)

REFERENTIES

- [1] B. Gramsch and D.C. Lay, Spectral mapping theorems for essential spectra. Math. Ann. 192 (1971), p.17-32.

 - [2] M.A. Kaashoek, Ascent, decent, nullity and defect, a note on a paper by A.E. Taylor. Math. Ann. 172 (1967), p.105-115.

 - [3] T. Kato, Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, New York, 1966.

 - [4] H. Kroh und P. Volkmann, Störungssätze für Semi-Fredholmoperatoren. Math. Z. 148 (1976), p.295-297.

 - [5] D.C. Lay, Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect. Math. Ann. 184 (1970), p.197-214.
-