

# Literatuuronderzoek naar onzekerheidsmodellering in de H-infinity en $\mu$ regelstructuur

**Citation for published version (APA):**

Velde, van de, E. (1995). *Literatuuronderzoek naar onzekerheidsmodellering in de H-infinity en  $\mu$  regelstructuur*. (DCT rapporten; Vol. 1995.119). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1995

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Eindhoven, augustus 1995

**I. Titel**

Literatuuronderzoek naar  
onzekerheidsmodellering  
in de  $H-\infty$  en  $\mu$  regelstructuur

stageverslag van E. van de Velde  
WFW-rapport 95.119  
stagebegeleider: A.G. de Jager

## II. Samenvatting

Dit verslag geeft een overzicht van een aantal methoden van onzekerheidsmodellering binnen de  $H^\infty$  en  $\mu$  regelaar ontwerpmethoden. Er wordt begonnen met de basistheorie van de  $H^\infty$  regelproblematiek om van hieruit over te gaan op de verschillende onzekerheidsmodelleringmethoden die binnen deze structuur passen. Bij de  $\mu$ -analyse/synthese methode wordt ingegaan op een aantal oplossingsmethoden voor het berekenen van een regelaar, wat een lastig probleem blijkt in het geval er op robuustheid voor reële parameteronzekerheden ontworpen wordt.

Het tweede gedeelte van dit verslag bestaat uit de samenvatting van een tiental artikelen waarin praktische toepassing van  $H^\infty$  en  $\mu$  regelaars beschreven worden. Uit de resultaten van deze artikelen blijkt, dat wanneer het mogelijk is een  $\mu$  regelaar te ontwerpen, deze over het algemeen beter presteert in een vergelijking met een anders ontworpen regeling ( $H_2$ , PID). Dit verslag eindigt met een uitgebreide literatuurlijst, waar nog wat extra artikelen in opgenomen zijn waarnaar in een kort hoofdstuk verwezen wordt, als aanvulling op de in het verslag behandelde literatuur.

### III. Inhoudsopgave

<b>I.</b>	<b>Titel</b>	<b>i</b>
<b>II.</b>	<b>Samenvatting</b>	<b>ii</b>
<b>III.</b>	<b>Inhoudsopgave</b>	<b>iii</b>
<b>1.</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>Algemene theorie onzekerheidsmodellering in <math>H^\infty</math> en <math>\mu</math></b>	<b>2</b>
2.1.	Additieve onzekerheid	6
2.2.	Multiplicatieve onzekerheid	7
2.3.	Coprieme factorisatie	8
2.4.	Graph-Metric onzekerheid	10
2.5.	$\mu$ -analyse/synthese	11
2.5.1.	D-K iteratie	12
2.5.2.	Verwijzing naar andere optimalisatie methoden	13
2.5.3.	Parameteronzekerheid in polynomen	14
2.6.	Onzekerheidsmodellering in toestandsbeschrijving	15
2.7.	Modelleren van onzekere tijdvertragingen	17
<b>3.</b>	<b>Toepassingen <math>H^\infty</math> en <math>\mu</math></b>	<b>19</b>
3.1.	Robuuste regeling voor een straalmotor	19
3.2.	Experimentele robuuste regeling studies voor een instabiele magnetische ophanging	20
3.3.	Experimentele vergelijking tussen $H^\infty$ en $H_2$ regelingen voor een magnetische ophanging met een dubbele flexibele staaf	21
3.4.	$H^\infty$ regeling voor de actieve vering van een treinstel	22
3.5.	Toepassing van een $H^\infty$ regeling in een actief veersysteem	22
3.6.	Regelaarontwerp met $\mu$ en $l_1$ voor een slecht geconditioneerd systeem	23
3.7.	Suboptimaal $\mu$ -ontwerp van een robuuste regelaar voor een chemische reactor	23
3.8.	Robuuste regelaar ontwerp voor een niet-lineaire CSTR	24
3.9.	Digitale implementatie van een robuuste $\mu$ -regelaar voor een robot	25
3.10.	Regeling voor geïntegreerde stuur- en aandrijfsystemen in voertuigen m.b.v. $\mu$ -synthese	25

4.	Extra literatuurverwijzingen	27
5.	Conclusie	28
6.	Literatuurlijst	29

## 1. Inleiding

Dit stageverslag is bedoeld om een overzicht te geven van de verschillende in de literatuur beschreven onzekerheidsmodelleringen in de  $H-\infty$  en  $\mu$  regelontwerp methode. Dit als naslagwerk om sneller te kunnen zien wat voor modellering het meeste kans van slagen heeft wanneer er een nieuw regelprobleem zich voordoet. Dit is een eerste aanzet om zo tot een bibliotheek van regeloplossingen te komen, die moet voorkomen dat er twee keer het wiel wordt uitgevonden.

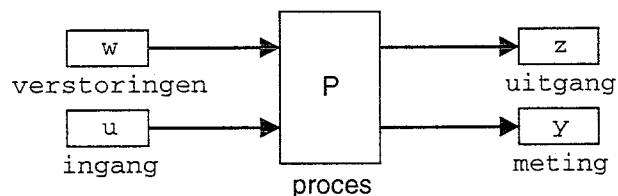
Dit verslag is grofweg in twee delen op te splitsen:

- een theoretisch deel, waarin de  $H-\infty$  en  $\mu$  methode wordt behandeld, en
- een praktisch deel, waarin praktijkvoorbeelden uit de literatuur samengevat zijn.

Het verslag eindigt met een uitgebreide literatuurlijst, die het makkelijk maakt gericht te zoeken naar een bepaald onderwerp binnen dit kader.

## 2. Algemene theorie van onzekerheidsmodellering in $H^\infty$ en $\mu$

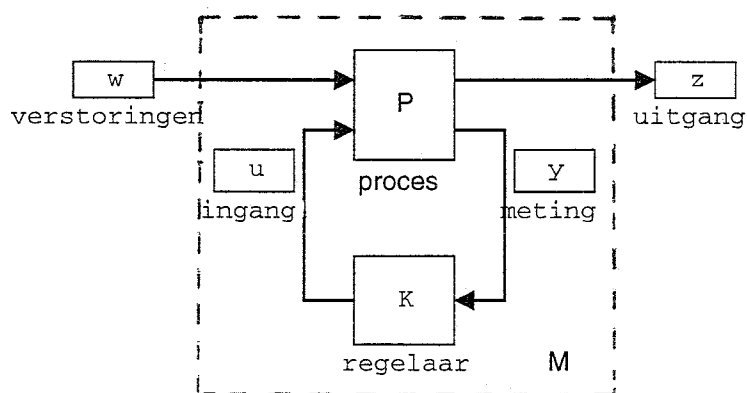
Bij het  $H^\infty$  regelprobleem wordt uitgegaan van het volgende te regelen systeem:



figuur 1.

Hierbij wordt aangenomen dat  $P$  een lineair tijdsinvariant systeem is in de continue danwel discrete tijd. De ingangen en uitgangen van het systeem worden als volgt gedefiniëerd:

- w: externe ingangen: referenties en eventuele verstoringen die op het systeem werken,
- z: algemene te regelen uitgang van het systeem,
- u: de geregelde ingang waarmee, door het ontwerpen van een regelaar, het effect van w op uitgang z geoptimaliseerd moet worden: goed referentievolgedrag en goede verstoringsonderdrukking,
- y: gemeten uitgang van het systeem, die gebruikt wordt als ingang van de regeling  $K$ , zie fig. 2:



figuur 2.

Hierbij moet ervoor gezorgd worden dat het systeem  $M$  met regelaar  $K$  stabiel is. Het doel is zo een systeem te verkrijgen dat stabiel blijft voor de ergst mogelijke verstoring. Als maat hiervoor wordt de  $H^\infty$  norm van de overdracht genomen. Deze is als volgt gedefiniëerd:

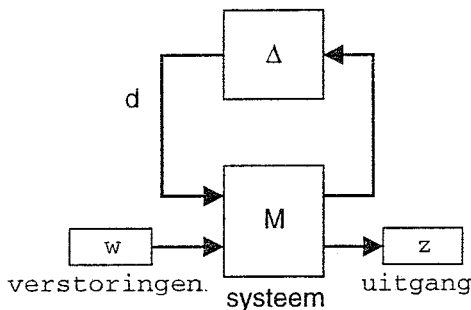
$$\|M\|_\infty = \sup_w \left\{ \frac{\|Mw\|_2}{\|w\|_2} \mid w \neq 0 \right\}$$

In woorden: de  $H^\infty$  norm is het supremum over alle verstoringen van het quotiënt tussen de energie die het systeem verlaat en die aan het systeem toegevoerd wordt. Anders gezegd: de  $H^\infty$  norm is de maximum amplitude van de totale overdracht in een Nyquist plot.

In het systeem  $M$  kunnen een aantal onzekerheden zitten. Een aantal van de mogelijke onzekerheden zijn:

- ongemodelleerde dynamica als gevolg van modelreductie of een onzekerheid na identificatie van een model
- een ongemodelleerde niet-lineariteit in het systeem, die na linearisatie overblijft
- parameteronzekerheden in het gebruikte model
- verstoringen van buitenaf.

Wanneer deze onzekerheden buiten het systeem  $M$  gehaald worden, krijgen we het volgende te zien:

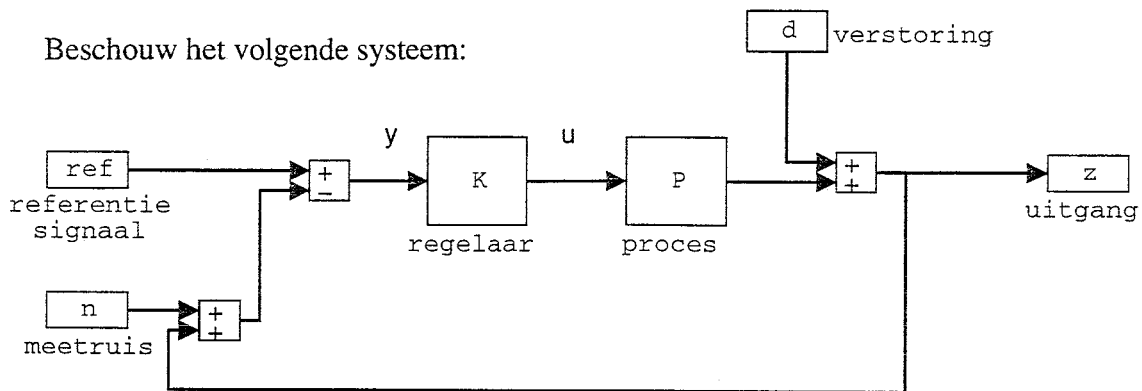


figuur 3.

Hierin stelt  $\Delta$  de onzekerheid voor in het systeem. In formulevorm ziet de stabiliteitseis voor het met  $\Delta$  verstoorde systeem  $M$  er dan zo uit:  $\|M\Delta\|_\infty \leq 1$ .

Het  $H^\infty$  ontwerpdoel is een regelaar  $K$  te vinden die voor een zo groot mogelijke klasse van onzekerheden  $\Delta$  het systeem  $M\Delta$  stabiliseert.

Beschouw het volgende systeem:



figuur 4.



Dan onderscheiden we de volgende overdrachten:

$$z = S \cdot d + T \cdot \text{ref} - T \cdot n, \quad \left( = S \cdot d + T \cdot w, \text{ met } w \text{ uit fig.3 bestaat dus uit: } w = \begin{bmatrix} \text{ref} \\ -n \end{bmatrix} \right)$$

$S = \frac{1}{1+KP}$ , de sensitivity, de gevoeligheid van  $z$  voor verstoringen  $d$

$T = \frac{KP}{1+KP}$ , de complementaire sensitivity, de gevoeligheid van  $z$  voor meetruis

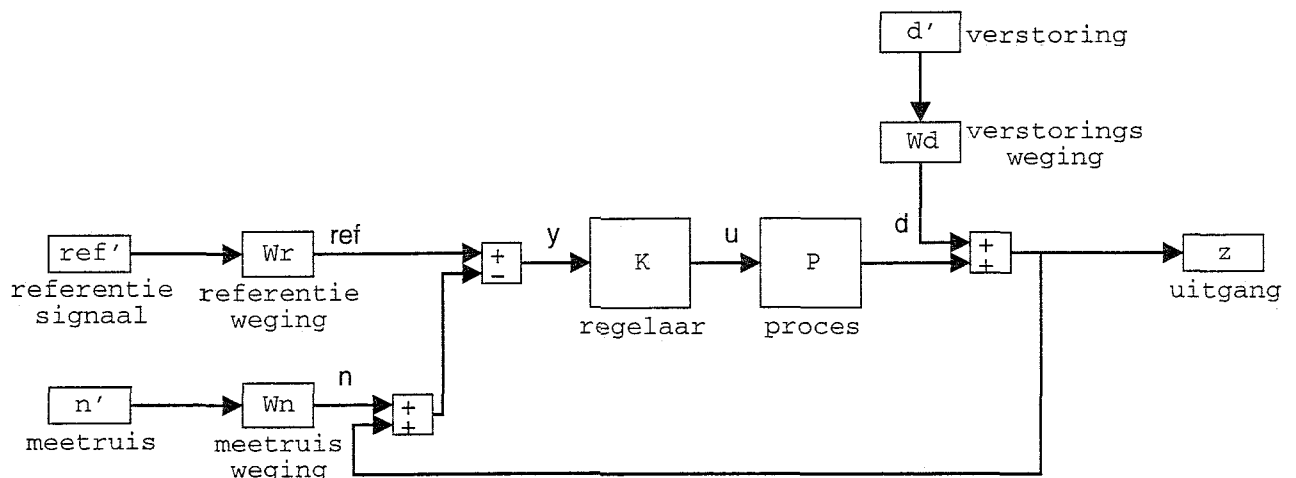
(merk op dat:  $S + T = 1$ )

Wanneer je naar de bandbreedte van de signalen gaat kijken dan valt daar het volgende over te zeggen:

Het referentiesignaal is over het algemeen van een beperkte bandbreedte, zodat je voor  $T$  in dit frequentiegebied het liefst de waarde 1 ziet om een goede volging te realiseren.

Tevens is hierbij gunstig dat door de relatie  $T+S=1$ ,  $S$  dan klein wordt wat een goede onderdrukking voor systeemverstoringen zal betekenen. Buiten dit frequentiegebied wil je  $T$  eigenlijk zo klein mogelijk houden om een goede ruisonderdrukking te bereiken.

Meetruis is meestal relatief hoogfrequent t.o.v. het referentiesignaal. Hierdoor ontstaat dus een tegenstrijdigheid in de gewenste waarde voor  $T$ . Hierdoor moet een afweging gemaakt worden in welk frequentiegebied je welke overdracht ( $S$  of  $T$ ) wil laten overheersen. Om rekening te houden met wat je weet over de frequentieinhoud van de verschillende signalen, worden hiervoor in het systeem frequentiewegingen opgenomen:



figuur 5.

Zodat de overdracht geschreven kan worden als:

$$z = SW_d \cdot d' + TW_r \cdot ref' - TW_n \cdot n'$$

$$\left( = SW_d \cdot d' + TW_w \cdot w' \text{ , w uit fig.3 bestaat nu uit: } w' = \begin{bmatrix} ref' \\ -n' \end{bmatrix} \right)$$

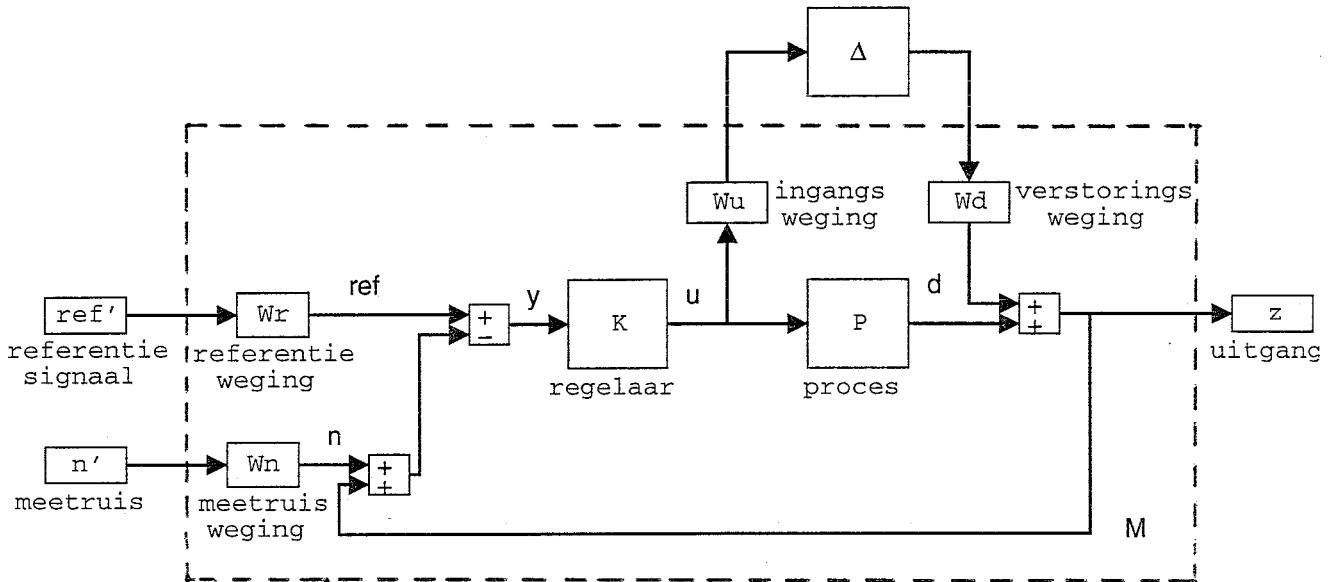
$$\text{ , } W_w = \begin{bmatrix} W_r & 0 \\ 0 & W_n \end{bmatrix}$$

Hierdoor krijgen we als voldoende stabiliteitseis voor  $M\Delta$  met het volgende gewogen gevoeligheidsprobleem te maken:

$$\left\| \begin{matrix} SW_d \\ TW_w \end{matrix} \right\|_{\infty} \leq 1$$

Kijken we naar de onzekerheidsmodellering in het proces die in de verstoring  $d$  beschreven zit, dan zie je dat wanneer je een regeling wilt ontwerpen die robuust is voor een grote onzekerheid in je proces, dit ten koste gaat van wat je kan eisen van de prestatie van het totale systeem. Het is dus zaak om deze onzekerheid zo 'krap' mogelijk te modelleren om een zo goed mogelijke prestatie van het geregelde systeem mogelijk te maken. In de komende paragrafen zullen enkele methoden van onzekerheidsmodellering beschreven worden.

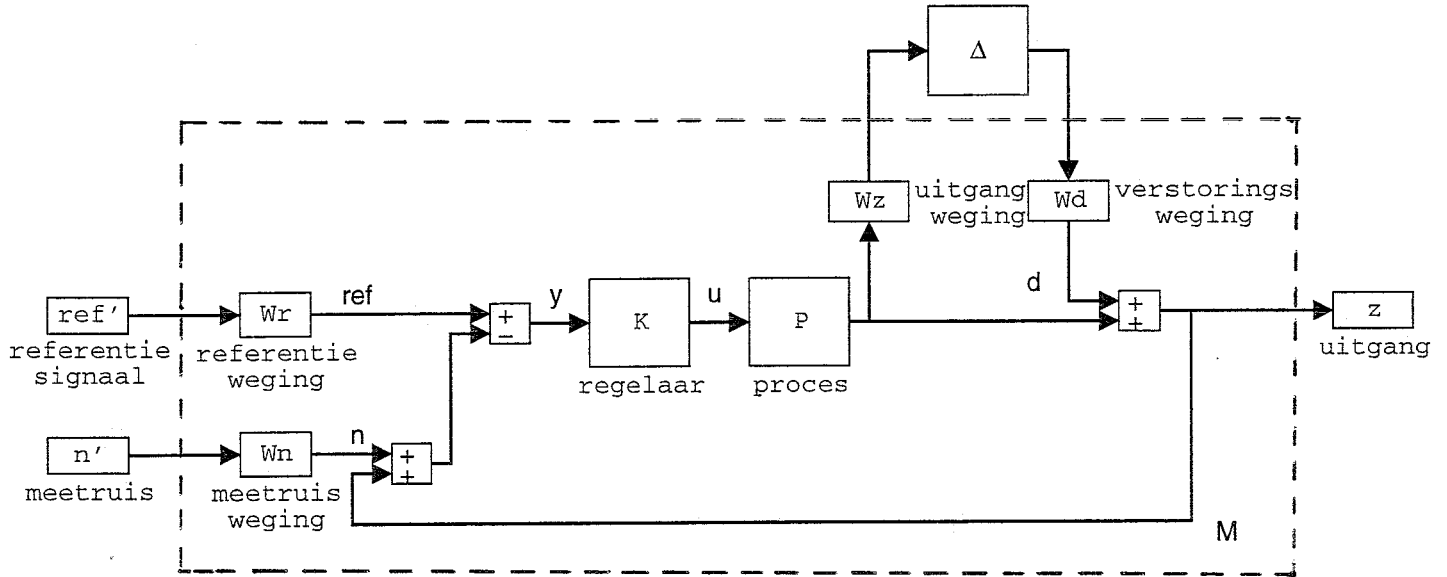
**2.1. Additieve onzekerheid**



figuur 6.

Met de additieve onzekerheid wordt een in frequentie gewogen ( $W_u$  en  $W_d$ ) absolute waarde bij het proces opgeteld, om zo eventuele ongemodelleerde dynamica in rekening te brengen. De te ontwerpen regelaar  $K$  moet de gesloten overdracht stabiliseren. Dit is een vrij grove methode, omdat er geen structuur is aan te brengen in de onzekerheidsmodellering, behalve de frequentieweging. De weging dient namelijk van lage orde gekozen te worden om de orde van de regelaar niet onnodig hoog op te laten lopen.

**2.2. Multiplicatieve onzekerheid**



figuur 7.

Dit is evenals de additieve onzekerheid een frequentiegewogen onzekerheidsmodellering-methode, met dit verschil, dat de fout nu in grootte relatief t.o.v. de procesuitgang (dit kan ook op de ingang) is, wat een realistischer beschrijving lijkt.

Of er een regeling gevonden kan worden die de in deze twee beschreven onzekere systemen kan stabiliseren hangt dus af van de wegingen. Voorwaarden voor het berekenen van de regelaar zijn, dat  $\Delta$  in beide gevallen zelf stabiel moet zijn en dat het aantal polen van het onverstoord model en het verstoord model gelijk moet zijn.

Dit kan dus een probleem worden wanneer er een pool dicht langs de imaginaire as ligt, die bij een lichte verstoring over deze as kan schuiven.

Wil je van deze restrictie af dan kan de volgende onzekerheidsmodellering methode toegepast worden:

### 2.3. Copriem factorisatie

Bij de copriem factorisatie wordt de overdracht van het proces  $P$  in twee co-prieme delen gesplitst (co-priem betekent geen gemeenschappelijke factoren), waarbij deze delen ieder stabiel zijn:

$$P = D^{-1}N$$

In Maciejowski [19] staat voor de berekening van deze co-prieme factoren een goede methode beschreven; beschouw daarvoor het volgende systeem:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Deze beschrijving is om te schrijven naar de volgende polynomenmatrix  $P(s)$ :

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{d(s)}G(s)$$

$d(s)$  = kleinste gemeenschappelijke noemer van al de noemers van de elementen  $p_{ij}$  van  $P(s)$

Deze polynomenmatrix is eenvoudig om te schrijven naar een equivalente diagonaalvorm, de zogenaamde Smith-McMillan vorm van  $P(s)$ :

$$P(s) = \frac{1}{d(s)}G(s) \sim \frac{1}{d(s)}S(s) = M(s) = \text{diag}\left(\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0, \dots, 0\right)$$

$r$  = rang van  $P(s)$

$S(s)$  = Smith vorm van  $G(s)$

$M(s)$  = Smith - McMillan vorm van  $P(s)$

De zogenaamde Matrix-Fraction Description (MFD) van matrix  $M(s)$  is:

$$M(s) = N(s)D^{-1}(s)$$

$$N(s) = \text{diag}(\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_r(s), 0, \dots, 0)$$

$$D(s) = \text{diag}(\psi_1(s), \dots, \psi_r(s), 1, \dots, 1)$$

En hiervoor is weer een transformatie te vinden, die een beschrijving voor  $P(s)$  oplevert:

$$P(s) = L(s)N(s)D(s)^{-1}R(s)$$

$$= N(s)D^{-1}(s) \text{ , de co-prieme factorisatie van } P(s)$$

$L(s)$  = linker transformatiematrix

$R(s)$  = rechter transformatiematrix

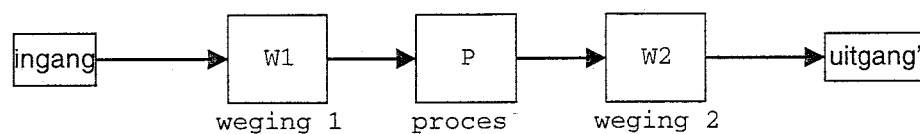
De onzekerheidsmodellering bestaat hiervoor uit een afzonderlijke onzekerheid op ieder van deze co-prieme factoren:

$$P_\Delta = (D + \Delta_D)^{-1}(N + \Delta_N)$$

In het artikel van Vidyasagar en Kimura [28] wordt een methode beschreven via welke bij deze onzekerheidsmodellering een stabiliserende regelaar te berekenen is.

In het artikel van McFarlane en Glover [21] wordt een methode beschreven die, voor dat er met de co-prieme factorisatie methode een regelaar ontworpen wordt, eerst een loop-shaping toepast op het te regelen systeem. Zo wordt in de volgende twee stappen een regelaar ontworpen:

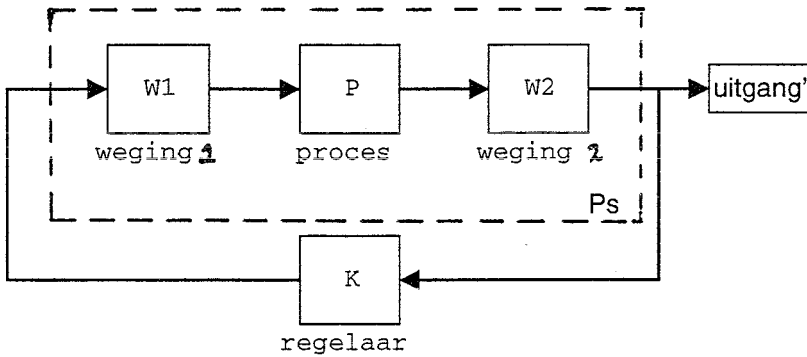
- Eerst wordt de open-lus overdracht van het te regelen systeem zodanig aangepast, dat de verhouding tussen de grootste en kleinste eigenwaarde ( $\approx$ conditiegetal) van de systeemoverdracht zo klein mogelijk wordt:



figuur 8.

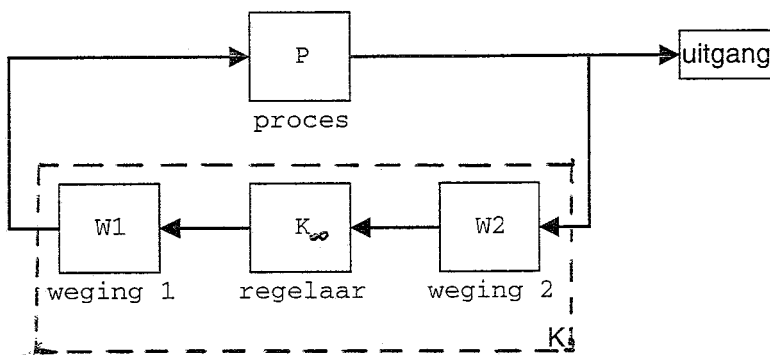
Hierdoor ontstaat een makkelijker te regelen systeem, omdat hierdoor de gevoeligheid van het systeem voor verstoringen gelijkmatiger over het frequentiedomein verdeeld is, zodat een eenvoudiger onzekerheidsmodellering kan volstaan.

Voor het zo gevormde systeem  $P_s = W_2 P W_1$  wordt via de co-priem factorisatie methode een regelaar  $K_\infty$  ontworpen.



figuur 9.

De uiteindelijke regelaar volgt dan uit:



figuur 10.

$$K = W_1 K_\infty W_2$$

Een nadeel van deze methode is, dat bij het ontwerp van de regelaar  $K_\infty$  (fig. 9) een ander criterium geoptimaliseerd wordt dan de eigenlijke regeldoelstelling (fig. 10): de weegfunctie  $W_2$  zit hiertussen, en deze hoeft niet identiek te zijn aan de weegfunctie die deze regeldoelstelling realiseert.

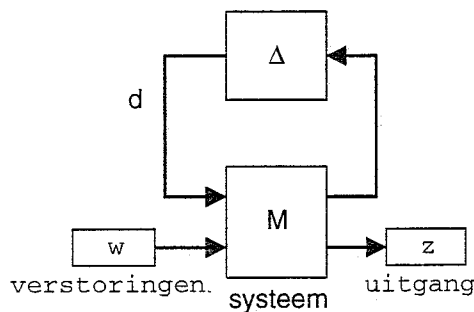
### 2.4. Graph-Metric onzekerheid

Wanneer zelfs de structuur van de co-priem factorisatiemethode te gestructureerd is voor het modelleren van de systeemonzekerheid, wordt in het artikel van Vidyasagar en Kimura [28] nog een methode beschreven: de Graph-Metric onzekerheid. Bij deze beschrijving kunnen zowel in het proces als in de regelaar via co-prieme factorisatie onzekerheden in rekening gebracht worden. Het bewijs wordt geleverd dat er in dit geval een stabiliserende regelaar te vinden is, maar er wordt niet ingegaan op welke gevallen van systeemonzekerheden deze methode het best toegepast kan worden.

### 2.5. $\mu$ -analyse/synthese

Het beschrijven van een systeemonzekerheid met een enkelvoudige onzekerheidsmatrix  $\Delta$  kan een te grove manier zijn. Bijvoorbeeld in het geval van MIMO overdrachtstructuren: de onzekerheid op de verschillende overdrachten hoeft niet steeds dezelfde vorm te hebben. Wanneer de onzekerheid dan toch met een enkelvoudige onzekerheid gemodelleerd wordt, leidt dit waarschijnlijk tot een regelaarontwerp dat minder goed presteert, dan wanneer je de onzekerheden op de verschillende overdrachten wel apart beschouwt. De  $\mu$ -analyse/synthese methode van Doyle [8] komt hierin tegemoet.

Er wordt weer uitgegaan van het volgende verstoorde (onzekere) systeem:



figuur 11.

Alleen ziet de systeemonzekerheidsmatrix er nu zo uit:

$$\Delta = \{diag(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p) \mid \bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1\}$$

Dit komt neer op een structurering in de onzekerheid naar de verschillende overdrachten in het systeem toe. Definieren we de spectrale radius  $\rho$  nu als de grootste mogelijke eigenwaarde van het verstoorde systeem:

$$\rho = \max_i |\lambda_i(M\Delta)|$$

Dan geldt in het geval van een enkelvoudige onzekerheid als voorwaarde voor robuuste stabiliteit:

$$\sup_{\Delta, \omega} \rho(M\Delta) = \|M\|_\infty < 1$$



Als voorwaarde voor robuuste stabiliteit in het geval van een meervoudige (structurele) onzekerheid introduceert Doyle de gestructureerde singuliere waarde (Structured Singular Value: SSV)  $\mu(M)$ :

$$\mu(M) = \left\{ \inf_{\Delta} (\overline{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0) \right\}^{-1}$$

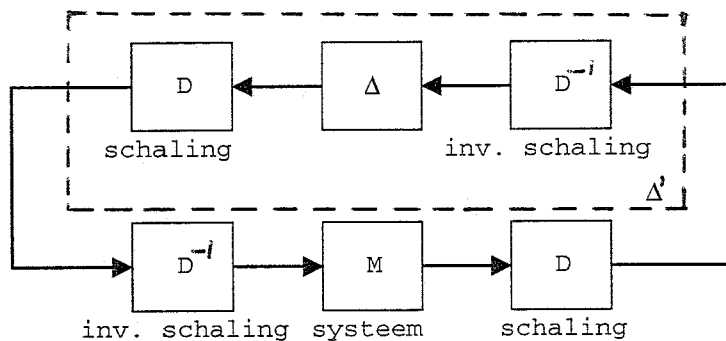
$\mu$  is een maat voor de robuuste stabiliteit van het verstoorde systeem.

### 2.5.1. D-K iteratie

Het is zaak om de optimale structuur te vinden in de onzekerheidsmodellering. Hiervoor wordt de schalingsmatrix  $D$  geïntroduceerd:

$$D = \left\{ \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_p) \mid \dim(D_i) = \dim(\Delta_i) \right\}, D(\omega) \text{ is inverteerbaar}$$

en voegen deze op de volgende manier aan het verstoorde systeem toe:



figuur 12.

Dan geldt er voor  $\mu$ :

$$\mu(M) = \inf_{D(\omega)} \|DMD^{-1}\|_\infty$$

$M(K)$  is nog altijd een functie van de te berekenen optimale regelaar, waarvoor het volgende minimum gevonden dient te worden teneinde een zo goed mogelijke robuuste stabiliteit te verwezelijken:

$$\inf_K \|DM(K)D^{-1}\|_\infty$$

Zo komen we dan op het D-K iteratieproces voor het vinden van de optimale onzekerheidsmodellingsstructuur en de daar bijbehorende optimale regelaar:

$$\inf_D \inf_K \|DM(K)D^{-1}\|_\infty$$

Een nadeel is bij dit optimalisatieproces is echter, dat de optimalisatie in een lokaal minimum kan blijven steken, zodat de optimale regelaar niet gevonden wordt: dit kan een slecht presterende regeling tot gevolg hebben. Wanneer nu de restrictie opgelegd wordt dat  $\Delta$  alleen complexe waarden bevat, wat er op neerkomt dat er alleen frequentieafhankelijke onzekerheden beschouwd worden, is de optimalisatie naar  $D$  wel eenduidig oplosbaar (convex), waardoor de optimalisatie beter naar een optimale regelaar kan convergeren, maar de gecombineerde D-K iteratie kan in een lokaal minimum blijven steken. Voor het geval dat er ook reële waarden in de onzekerheidsmatrix  $\Delta$  voorkomen (dit is het geval bij reële parameteronzekerheden), voldoet de D-K iteratieprocedure niet; voor dit specifieke probleem worden in de literatuur een aantal methoden beschreven die wel tot een oplossing hiervan komen.

### 2.5.2. Verwijzing naar andere optimalisatie methoden

In deze paragraaf zullen zeer beknopt een aantal alternatieve methoden beschreven worden voor het oplossen van het  $\mu$ -synthese probleem met reële onzekerheidsmodellering.

- In het artikel van Sánchez Peña en Sideris [25] wordt een van de D-K iteratie afgeleide methode beschouwd, echter met een andere maat dan  $\mu$  voor de robuustheid. Hierdoor zien zij kans om een eenvoudiger iteratieproces te ontwikkelen, wat meer kans geeft op een goed regelaarontwerp.
- In het artikel van Milich et. al. [22] wordt van een  $H^\infty$  regelontwerp uitgegaan. Door nu een extra parameter te introduceren wordt dit ontwerp fijner afgestemd naar een  $\mu$ -regelaar, waarbij in de optimalisatie de schalingsmatrix  $D$  constant (frequentieonafhankelijk) gehouden wordt, wat een convex optimalisatie probleem tot gevolg heeft. De vrijheid van de frequentieafhankelijke  $D$ -schaling wordt dus vervangen door een parameter. Het bewijs wordt geleverd dat de zo berekende regelaar op zijn minst even goed presteert als de  $H^\infty$  regelaar waar vanuit is gegaan.
- In het artikel van Haddad et. al. [11] wordt ook een constante (frequentieonafhankelijke)  $D$ -schalingsmatrix gebruikt om de optimalisatie beter te laten verlopen. Het voordeel van een constante  $D$ -matrix is dat de optimale regelaar nu m.b.v. een aangepaste Riccati vergelijking berekend kan worden. Wanneer dit nu geoptimaliseerd wordt naar  $D$ , is sneller een regelaar te vinden dan met D-K iteratie. Ook resulteert deze methode in een lagere orde regelaar.

- Tot slot van deze paragraaf verwijs ik nog naar het artikel van Chang et. al. [3] waarin drie iteratieprocedures met elkaar worden vergeleken: de door henzelf bedachte E-K iteratie, de D-K iteratie en de  $\mu$ -K iteratie van Lin et. al. [17]. Het voert te ver om deze extra twee procedures hier uit te werken, temeer omdat deze ook in het artikel van Chang et. al. beschreven staan. Uit een vergelijking blijkt dat de E-K iteratie naar de beste regelaar convergeert.

Al met al blijkt dat het berekenen van een optimale regelaar voor het  $\mu$ -probleem een niet eenvoudige opgave is, waar in de literatuur een heleboel theoretische beschouwingen en wiskundige afleidingen over te vinden zijn, maar die ik hierbij verder wil laten rusten.

### 2.5.3. Parameteronzekerheid in polynomen

Zoals in de voorgaande paragrafen duidelijk is geworden, is het een moeilijke opgave om een optimalisatie naar  $\mu$  te realiseren in het geval van reële (parameter) onzekerheden of een combinatie van complexe en reële onzekerheden.

Wanneer de structuur van een systeem nu wel bekend is, maar alleen de modelparameters onzeker zijn, kan er in het SISO geval gekeken worden naar de volgende polynoombeschrijving:

$$p(s, \tilde{q}) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n, \quad q_i^- \leq q_i \leq q_i^+$$

$p(s, \tilde{q})$  stelt hier dan de karakteristieke vergelijking van de closed-loop overdracht van een proces (P) met een feedbackregelaar (K) voor:

$$\text{Met } P(s, \tilde{q}) = \frac{N_P(s, \tilde{q})}{D_P(s, \tilde{q})} \text{ en } K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)} \text{ ziet deze er dan als volgt uit:}$$

$$p(s, \tilde{q}) = N_P(s, \tilde{q})N_K(s) + D_P(s, \tilde{q})D_K(s)$$

Voor dit polynoom met onzekere parameters  $q_i$  is een eenvoudig te berekenen stabiliteitscriterium beschikbaar: de stelling van Kharitonov. Deze stelling zegt dat het hierboven beschreven polynoom voor alle mogelijke parametervariaties stabiel is als de volgende vier zogeheten Kharitonov vergelijkingen stabiel zijn:

$$K_1(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots$$

$$K_2(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots$$

$$K_3(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots$$

$$K_4(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots$$

In het artikel van Chen et.al. [4,5] wordt nu de link gelegd tussen de methode van Kharitonov en het berekenen van de SSV  $\mu$ . Hierdoor wordt het voor een grote klasse van

systemen met structurele reële parameteronzekerheden eenvoudig om  $\mu$  te bepalen, waardoor de berekening van een regelaar een stuk eenvoudiger wordt.

Ook Young [34] heeft een methode gevonden om voor deze klasse van problemen tot een exacte berekening van de SSV  $\mu$  te komen. Deze berekening schijnt rekenkundig eenvoudiger te zijn dan de methode van Chen et. al., hoewel de uitwerking in het artikel een erg theoretisch karakter heeft. Praktische toepassingen van beide methoden worden niet genoemd.

Voor het geval waarin naast reële ook complexe onzekerheden in de parameters van een polynoom zitten, zijn er in het boek van Bhattacharyya en Keel [2] een aantal (theoretische) methoden te vinden die hiervoor een oplossing moeten bieden.

### 2.6. Onzekerheidsmodellering in toestandsbeschrijving

In deze paragraaf wordt naar drie artikelen verwezen die een methode beschrijven voor het berekenen van een  $H^\infty$  regelaar voor met een toestandsbeschrijving te modelleren (MIMO) systemen.

Het artikel van Park en Bien [24] gaat hiervoor van het volgende verstoorde systeem uit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (A_{nom} + \Delta A)x + B_1 u_1 + B_2 u_2 + G w_0 \\ y_1 = C_1 x + w_1 \\ y_2 = C_2 x + w_2 \\ z = \begin{pmatrix} Hx \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. ; \text{ hierin is/zijn } \left\{ \begin{array}{l} x: \text{toestand van het systeem} \\ u_1, u_2: \text{twee geregelde ingangen} \\ y_1, y_2: \text{twee gemeten uitgangen} \\ z: \text{te minimaliseren uitgang} \\ w_0, w_1, w_2: \text{verstoringen} \\ \Delta A: \text{systeem onzekerheid} \end{array} \right.$$

Voor dit verstoorde systeem worden twee Riccati-vergelijkingen afgeleid, waarmee een stabiliserende  $H^\infty$  regelaar berekend kan worden. Bij deze berekening kan via twee parameters de optimalisatieverhouding tussen robuustheid en prestatie beïnvloed worden. Bij deze methode hoeft de gemeten uitgang dus niet hetzelfde te zijn als de uitgang waarnaar geoptimaliseerd wordt.

Dit is wel het geval in de methode van Madiwale et. al. [20], maar daarbij kunnen weer wel ook onzekerheden in andere dan alleen de toestandsmatrix meegenomen worden. In de meest uitgebreide vorm ziet de onzekerheidsbeschrijving er dan zo uit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (A_{nom} + \Delta A)x + (B_{nom} + \Delta B)u + G_1 w_1 \\ y = (C_{nom} + \Delta C)x + (D_{nom} + \Delta D)u + G_2 w_2 \end{array} \right.$$

De onzekerheden  $\Delta$ . worden bij deze methode benaderd door een lineaire grens (bijv.:  $\Delta A = \alpha A$ ) of een kwadratische grens (bijv.:  $\Delta B = \beta B^T B$ ) in de systeemmatrices, of een combinatie daarvan (bijv. als  $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2$ , waarbij  $\Delta A_1$  met een lineaire grens benaderd wordt, en  $\Delta A_2$  met een kwadratische).

Ook deze methode bestaat uit het afleiden van Riccati-vergelijkingen waarmee een stabiliserende regelaar te berekenen is, waarbij ook weer een afweging tussen optimalisatie naar robuustheid of prestatie gemaakt kan worden.

In het artikel van Fu et. al. [9] wordt ook via het afleiden van Riccati-vergelijkingen een oplossing gevonden voor de synthese van een regelaar, maar nu wordt in de onzekerheden van het systeem ook nog tijdsafhankelijkheid toegelaten. Hierdoor wordt het verstoorde systeem zo beschreven:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_{nom} + \Delta A(t))x + (B_{nom} + \Delta B(t))u + G_1 w_1 \\ z = C_1 x + D_1 u \\ y = (C_{2,nom} + \Delta C(t))x + (D_{2,nom} + \Delta D(t))u + G_2 w_2 \end{cases}$$

Voor de tijdsafhankelijke parameteronzekerheden geldt dan de volgende relatie:

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B(t) \\ \Delta C(t) & \Delta D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix}$$

waarbij voor  $F(t)$  geldt:  $F^T(t)F(t) \leq \rho^2 I$ ,  $\rho > 0$

Dit komt erop neer dat de parametervariatië begrensde moeten zijn.

Tot slot van deze paragraaf verwijs ik nog naar een extra artikel, het artikel van Yeh et. al. [33]. Hierin wordt evenals in de voorgaande methoden voor reële parameteronzekerheden in de systeemmatrices een synthese oplossing voor een regelaar gepresenteerd, maar hier wordt deze reële parameteronzekerheid ook nog gekombineerd met een frequentieafhankelijke onzekerheidsbeschrijving, zoals bijvoorbeeld een multiplicatieve onzekerheid.

Al deze beschrijvingen zijn alleen analytisch uitgewerkt, zodat er geen overzicht ontstaat voor wat voor praktische regelproblemen deze methoden geschikt zijn. Ik heb deze toch in het verslag opgenomen, omdat deze methoden weer een andere kijk geven op hoe een robuuste regelaar ontworpen kan worden, buiten de standaard  $H^\infty$  en LQG methoden.

Voor meer (analytische) uitwerkingen van deze onzekerheidsbeschrijvingswijze kan ik nog twee boeken aanraden die dit onderwerp uitgebreid behandelen:

Ten eerste het boek van Stoorvogel [27]: hierin worden een aantal gegeneraliseerde  $H^\infty$  regelproblemen uitgewerkt, en ten tweede het boek van Weinmann [31]: in dit boek worden een zeer groot aantal (robuuste) stabiliteitseisen voor een groot aantal onzekerheidsmodelleringmethoden uitgewerkt.

### 2.7. Modelleren van onzekere tijdvertragingen

Het artikel van Wang et. al. [29] beschrijft een methode die het modelleren van onzekere tijdvertragingen in een lineair tijdinvariant systeem in de  $\mu$ -analyse/synthese methode mogelijk maakt. Hiervoor wordt het volgende systeem beschouwd:

$$g_p(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-(\theta + \delta_\theta \Delta)s} = g(s) e^{-\delta_\theta \Delta s}, \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

$$g(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

$g_p(s)$  = verstoorde systeem

$g(s)$  = nominale systeem

$\theta$  = nominale tijdvertraging

$\delta_\theta$  = onzekerheid in tijdvertraging

Voor de onzekere tijdvertraging worden vijf benaderingen onderzocht op bruikbaarheid. Het blijkt dat een benadering van de tijdvertraging als een complexe multiplicatieve onzekerheid de beste beschrijving is:

$$g_p(s) = g(s)(1 + l(\omega)\Delta(s)), \quad |\Delta| \leq 1$$

$$l(\omega) = \begin{cases} |e^{-j\delta_\theta \omega} - 1|, & \forall \omega < \pi / \delta_\theta \\ 2, & \forall \omega \geq \pi / \delta_\theta \end{cases}$$

Hierin is  $l(\omega)$  de meest nauwe band van onzekerheid die als weging van  $\Delta$  bedacht kan worden. Voor  $\mu$ -synthese is deze weging niet geschikt, omdat het een irrationele functie is. Hierdoor moet een andere weegfunctie bedacht worden die deze  $l(\omega)$  benadert. In het artikel worden een aantal van deze weegfuncties met elkaar vergeleken op bruikbaarheid.

Het blijkt dat de volgende weegfunctie de best bruikbare benadering oplevert:

$$w(s) = \frac{\delta_\theta s}{1 + \delta_\theta s / 3.465}$$

Wat nu nog overblijft is de bepaling van de meest geschikte nominale tijdvertraging  $\theta$ . Hiervoor worden twee verstoorde systemen onderzocht, uitgegaan van het volgende onzekere systeem:

$$g_p(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-\theta_p s}, \quad (0 \leq) \theta_{\min} \leq \theta_p \leq \theta_{\max}$$

De twee nominale systemen die beschouwd worden zijn nu:

$$\text{Aanpak 1: } g(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-((\theta_{\max} + \theta_{\min})/2)s},$$

met als onzekerheid in de tijdvertraging:  $e^{-((\theta_{\max} - \theta_{\min})/2)\Delta s}$ ,  $-1 \leq \Delta \leq 1$

$$\text{Aanpak 2: } g(s) = \frac{k}{\tau s + 1},$$

met als onzekerheid in de tijdvertraging:  $e^{-\theta_{\max} \Delta s}$ ,  $-1 \leq \Delta \leq 1$

Het voordeel van aanpak 1 is dat de onzekerheid in de tijdvertraging precies gemodelleerd wordt. Aanpak 2 wordt echter geprefereerd, omdat er in het nominale model geen tijdvertraging meer zit, wat de berekening van de regelaar eenvoudiger maakt. Het blijkt dat het verlies in exactheid van onzekerheidsmodellering bij deze methode gecompenseerd wordt door een betere optimalisatie in de berekening van de regelaar, waardoor toch een betere regelaar ontstaat dan wanneer aanpak 1 gevolgd wordt.

Deze aanpak van onzekere tijdvertragingsmodellering is alleen geschikt voor SISO systemen. Voor MIMO systemen is er nog geen oplossing voor dit probleem gevonden.

### 3. Toepassingen H-∞ en μ

In dit hoofdstuk zullen een tiental artikelen behandeld worden waarin een praktische toepassing van de H-∞ en μ regelmethode wordt beschreven. Elke paragraaf van dit hoofdstuk bestaat steeds uit een samenvatting met de belangrijkste conclusies van een artikel. Voor een uitgebreide uitwerking van de resultaten wordt naar de artikelen zelf verwezen.

#### 3.1. Robuuste regeling voor een straalmotor

Watanabe et. al. [30] hebben voor een straalmotor een H-∞ regeling ontworpen, welke voor zowel structurele parameteronzekerheden als niet-structurele onzekerheden robuust is. De werkwijze is als volgt:

Er wordt eerst uit gemiddelde meetdata een toestandsmodel geïdentificeerd, het zogenaamde nominale model. Daarna wordt deze identificatie herhaald, waarbij er steeds een parameter van de straalmotor gevarieerd wordt. Hierdoor ontstaan een heleboel op elkaar lijkende toestandsbeschrijvingen, allemaal afhankelijk van een bepaalde parametervariatie. Door nu voor al deze modellen te kijken in wat voor band de variaties in de systeemmatrices liggen, kunnen variatiematrices berekend worden, die de maximale onzekerheid t.g.v. parameterveranderingen rond het nominale model omvatten:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} = (A_{nom} + \Delta A)x + (B_{nom} + \Delta B)u \\ y = (C_{nom} + \Delta C)x + (D_{nom} + \Delta D)u \end{bmatrix}$$

$$A_{nom,ij} = \frac{1}{2} \left\{ \max_k A_{k,ij} + \min_k A_{k,ij} \right\}, B_{nom,ij} = \dots$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \max_k A_{k,ij} - \min_k A_{k,ij} \right\}, \Delta B_{ij} = \dots$$

$k =$  variatie over alle metingen

Hierbij wordt nog een additieve onzekerheid beschouwd, welke berekend wordt uit het verschil tussen de frequentie responsies van de modellen die met parametervariatiën geïdentificeerd zijn en die welke niet op die manier bepaald zijn. Het wordt niet helemaal duidelijk uit het artikel waarom dit gedaan wordt, maar waarschijnlijk is dit de manier om de niet-lineariteit van het systeem rond het nominale model in een wegging te vangen.

Als zo alle onzekerheden gemodelleerd zijn, wordt voor de gehele ontstane modelstructuur met een Riccati algoritme een H-∞ regelaar uitgerekend. Hierbij wordt met variatie van een schaling van de gehele zo ontstane modelstructuur een zo goed mogelijk resultaat bereikt.



De resultaten van de  $H_\infty$  regeling worden in simulatie vergeleken met een PI regeling voor het systeem. Hieruit blijkt dat de  $H_\infty$  regeling een veel snellere stapresponsie van het systeem kan realiseren dan de PI-regeling.

#### **3.2. Experimentele robuuste regeling studies voor een instabiele magnetische ophanging**

In het artikel van Lim en Cox [16] wordt voor een experimentele opstelling van een magnetische ophanging een zestal verschillende regelaars ontworpen die in simulatie en in experimenten met elkaar vergeleken worden.

Het te beschouwen experimentele systeem bestaat uit een vijftal electromagneten waarvan de sterkte te regelen is waarboven een permanente-magneet staafje zweeft. Dit staafje heeft hierdoor zes onafhankelijke graden van vrijheid. Voor dit systeem worden twee modellen afgeleid: een gelineariseerd analytisch model, en een goed op het echte systeem gelijkend identificatie model. Met deze twee modellen worden een zestal regelingen ontworpen. Vier met het analytische model en twee met het identificatiemodel. Voor de foutmodellering op het analytische model worden twee gevallen beschouwd: de fout wordt gemodelleerd als een additieve onzekerheid in het ene geval en als een multiplicatieve onzekerheid in het andere. Dit om het effect van een verkeerd gekozen onzekerheidsmodellering op het resultaat van de regeling te onderzoeken. (De multiplicatieve onzekerheidsmodellering is de goede). Voor de foutmodellering van het identificatiemodel wordt alleen een multiplicatieve fout beschouwd. Met deze drie verschillende modelstructuren worden voor elk geval twee regelaars ontworpen: één ontworpen om een zo goed mogelijke prestatie te leveren, zonder op de robuustheid te letten, en één waar de nadruk op robuustheid voor verstoringen komt te liggen. Met deze zes verschillende regelaars wordt nu een drietal experimenten gedaan:

- een simulatie
- een experiment op de opstelling zonder verstoring, het nominale experiment genoemd en
- een experiment op de opstelling met verstoringen, het verstoorde experiment genoemd.

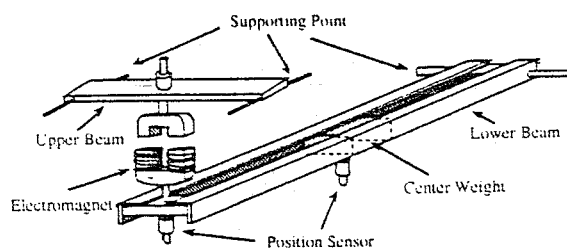
De resultaten van de regelingen worden beoordeeld door de stapresponsies van de geregelde systemen met elkaar te vergelijken.

De regelingen waarin het identificatiemodel zit presteren in alle drie de experimenten beter dan de regelingen met het analytische model. Dit is natuurlijk te verwachten: in een regeling is een goed model altijd te prefereren boven een minder model met wat voor onzekerheidsmodellering dan ook. Wanneer de resultaten van deze regeling nu als best haalbare gekwalificeerd worden, blijkt dat alleen in simulatie de regelaar met analytisch model en multiplicatieve onzekerheidsmodellering dezelfde prestatie haalt in zowel het prestatie geval als het robuuste geval. De regelaar met analytisch model en additieve onzekerheidsmodellering blijft hier achter in prestatie.

Voor het nominale en het verstoorde experiment blijkt dat in het geval er op robuustheid ontworpen wordt de multiplicatieve onzekerheidsmodellering een beter resultaat geeft dan de additieve onzekerheidsmodellering. Wanneer er echter alleen op prestatie ontworpen wordt blijkt dat de additieve onzekerheidsmodellering het beste resultaat oplevert.

### 3.3. Experimentele vergelijking tussen $H_\infty$ en $H_2$ regelingen voor een magnetische ophanging met een dubbele flexibele staaf

Het artikel van Hashimoto et. al. [12] wat hier besproken wordt handelt over de regeling van een magnetische ophanging van een as. In deze ophanging wordt een as door geregelde electromagneten i.p.v. lagers en veersysteem op zijn plaats gehouden en ondersteund. De experimentele opstelling voor dit systeem bestaat uit twee flexibele staven, 'verbonden' door een electromagneet. Zie fig. 13:



figuur 13.

Voor de berekening van de verschillende regelaars wordt voor het systeem eerst een wiskundig model afgeleid, wat daarna gelineariseerd wordt. Voor het zo ontstane model worden nu drie regelingen ontworpen om met elkaar te vergelijken:

- een voor prestatie optimale  $H_\infty$  regeling
- een sub-optimale  $H_\infty$  regeling (sub-optimaal: er wordt minder van de prestatie van de regeling verwacht om tot een robuuster ontwerp te komen) en
- een  $H_2$  optimale regelaar.

Uit experimenten op de opstelling met deze drie regelingen blijkt dat de beide  $H_\infty$  regelingen het  $\hat{e}$ n qua prestatie  $\hat{e}$ n qua robuustheid voor verstoringen winnen van de  $H_2$  regeling. Zoals te verwachten was, presteert de optimale  $H_\infty$  regeling in een onverstoord experiment beter dan de sub-optimale regeling, terwijl in een verstoord experiment de sub-optimale  $H_\infty$  regeling beter blijft presteren. De robuustheid van deze regeling is vooral in het hoogfrequente gebied hoger.

### **3.4. $H^\infty$ regeling voor de actieve vering van een treinstel**

Het artikel van Hirata en Takahashi [13] waar deze paragraaf aan gewijd is, geeft een duidelijke uitwerking van een  $H^\infty$  regelaarontwerp voor de actieve vering van een treinstel.

Voor de berekening van de regelaar wordt er van een gegeven wiskundig model van een treinstel uitgegaan. Dit model wordt omgeschreven naar een mathematische beschrijving die geschikt is voor toepassing in het ontwerp van een  $H^\infty$  regeling. In de berekening van de regelaar worden de weegmatrices zo gekozen dat er een zware weging op de frequentieband die als zeer onplezierig worden ervaren wanneer men over comfort praat (7 Hz  $\cong$  eigenfreq. menselijk lichaam), komt te liggen. Voor de geregelde input geldt een zware weging op lage frequenties, om drift tegen te gaan.

De zo ontworpen  $H^\infty$  regelaar wordt op een experimenteel treinstel getest. Uit de resultaten blijkt dat de regeling voor een sterke reductie in de overdracht zorgt in de frequentieband waar hij voor ontworpen is.

### **3.5. Toepassing van een $H^\infty$ regeling in een actief veersysteem**

Het artikel van Yamashita et. al. [32] behandelt het probleem van het aan de ene kant comfortabel zijn van een voertuig t.o.v. het rijgedrag onder moeilijke omstandigheden (uitwijkmanoeuvres). Hiervoor wordt een  $H^\infty$  regeling voorgesteld welke wordt toegepast op een volledig voertuigmodel.

De regeling moet eveneens robuust zijn voor veranderingen in de balading van het voertuig en voor veranderingen in het dynamisch gedrag van het voertuig als gevolg van slijtage in de ophanging en niet-lineariteiten in het veersysteem.

Voor het ontwerp van de regeling worden de volgende stappen gevolgt:

- Het volledig voertuigmodel wordt gelineariseerd. Dit resulteert in vier vergelijkingen in de bewegingen van het chassis, de wielen en de hydraulische actuatoren en in de stand van de servokleppen in het actuatorgedeelte.
- Vervolgens worden de waarden van de onbekende parameters in deze vergelijkingen geïdentificeerd d.m.v. metingen aan een experimenteel voertuig.
- Vervolgens wordt een  $H^\infty$  regeling ontworpen voor het voertuig.

Voor de onzekerheidsmodellering in deze regeling wordt een multiplicatieve onzekerheid geïntroduceerd. Deze multiplicatieve onzekerheid wordt gevonden door een nominale overdracht te definiëren waaromheen overdrachten liggen die gevormd worden door variatie van de onzekere parameters van het systeem binnen een bepaald gebied, wat een andere overdracht tot gevolg heeft. Het doel van de regeling is nu het verkrijgen van stabiliteit onder deze onzekerheid, en het minimaliseren van de verticale acceleraties voor het comfort en de duik- en kantel effecten voor de bestuurbaarheid van het voertuig.

De aldus ontworpen regeling wordt getest op het experimentele voertuig en de resultaten laten een verbetering zien in comfort en in bestuurbaarheid van het voertuig. Een laatste opmerking in het artikel is dat de keuze voor een multiplicatieve onzekerheid een vrij grove is geweest, en dat  $\mu$ -analyse/synthese onderzocht zal moeten worden om beter met de parameteronzekerheden om te kunnen gaan.

### **3.6. Regelaarontwerp met $\mu$ en $l_1$ voor een slecht geconditioneerd systeem**

Hufford en Dahleh [14] bouwen in hun artikel voort op een regeling voor een hogezuiverheids distillatiekolom, zoals beschreven staat in Skogestad et. al. [26]. Het betreft hier een 2 ingang, 2 uitgang systeem, waarbij er een onzekerheid aan de ingang van 20% wordt genoemd en een onzekere tijdvertraging tot 1 minuut. Voor de onzekerheidsmodellering in dat ontwerp werd gebruik gemaakt van een multiplicatieve onzekerheid voor het gehele systeem. Om nu de onzekerheden van het systeem gestructureerder aan te pakken wordt gekeken of een regelaarontwerp volgens de  $\mu$ -analyse/synthese techniek mogelijk is. Ook wordt een  $l_1$  regeling ontworpen voor het systeem. Ik ga niet verder in op het ontwerp van deze regeling. Hiervoor verwijs ik naar de literaturopgave van het hierbeschreven artikel [14]. Het verschil  $\mu$ -synthese en een ontwerp naar de  $l_1$ -norm zit hem in het te beschouwen criterium voor een overdrachtssignaal:

$$\|x\|_\infty = \sup_t |x(t)|, \text{ in het geval van } \mu\text{-synthese}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|, \text{ in het geval van ontwerp naar } l_1$$

Het blijkt verder dat het ontwerpen van een regeling voor allebei de methoden een lastig op te lossen iteratieproces tot gevolg heeft, waardoor er vrijwel geen uitspraak te doen is over welke aanpak nu het beste zou zijn voor het genoemde regelprobleem. Uit simulatie met beide methoden kan geconcludeerd worden dat de prestatiespecificaties door de berekende  $l_1$ -regeling beter worden gehaald.

### **3.7. Suboptimaal $\mu$ -ontwerp van een robuuste regelaar voor een chemische reactor**

In het artikel van Amann en Algöwer [1] wordt de mogelijkheid onderzocht van het gebruik van  $\mu$ -analyse/synthese voor het regelen van chemische reacties. Als voorbeeld hiervan wordt een Continuously Stirred-Tank Reactor (CSTR) genomen. Huidige methoden om een CSTR te regelen zijn gebaseerd op linearisaties rond een steeds wisselend bedrijfspunt van de reactor, met daar een PID-regeling overheen. Dit heeft als nadeel dat voor elk werkpunt een nieuwe regelaar berekend en ingesteld moet worden.  $\mu$ -Analyse en synthese technieken geven nu de mogelijkheid om vanuit het belangrijkste werkpunt van de reactor een groter gebied daaromheen ook te regelen, door de niet-

lineariteit van het proces als een structurele onzekerheid te beschouwen. Ook is het mogelijk met de  $\mu$ -analyse structurele parameteronzekerheden te beschouwen zodat zoveel mogelijk informatie meegenomen kan worden in het ontwerp van de regeling. Dit in tegenstelling tot een PID-regeling, die op een trail en error methode ingesteld wordt. In het artikel worden nu vergelijkingen afgeleid waar deze parameteronzekerheden mee in rekening gebracht kunnen worden. Hierdoor ontstaat echter zo'n complexe onzekerheidsstructuur, dat een  $\mu$ -regelaar niet meer via de D-K iteratiemethode gevonden kan worden. Daarom heeft men het probleem gereduceerd tot die onzekerheden die het meeste invloed hebben op het ingangs-uitgangsgedrag van het systeem. Dit gereduceerde probleem kan wel met D-K iteratie opgelost worden. Hierdoor ontstaat een sub-optimale  $\mu$ -regeling.

De resultaten met dit  $\mu$ -regelaarontwerp worden in simulatie vergeleken met een standaard  $H_\infty$  regelaarontwerp in het belangrijkste werkpunt van de reactor. Hieruit blijkt dat de robuustheid van de  $\mu$ -regeling aanzienlijk beter is dan die van de  $H_\infty$  regeling. Nadeel is wel de complexiteit van de regeling en de hiermee gepaard gaande rekentijd die nodig is voor de berekening ervan. Hoe sterker de niet-lineariteiten in het systeem, hoe complexer ook de regeling wordt, dus moet er een afweging gemaakt worden tussen de moeite om een  $\mu$ -regeling te vinden voor het probleem en de verbetering die een complexere regelaar voor het systeemgedrag tot gevolg heeft.

#### **3.8. Robuuste regelaar ontwerp voor een niet-lineaire CSTR**

Evenals in de vorige paragraaf wordt in het artikel van Doyle et. al. [6] een regelaarontwerp beschreven voor een CSTR. In tegenstelling tot de methode zoals beschreven in de vorige paragraaf, worden niet parameteronzekerheden beschouwd die een variatie van de dynamica van het proces rond een werkpunt tot gevolg hebben, maar wordt deze variatie zelf als onzekerheid meegenomen. Een werkpunt is hierin het volgende uitgangsgroothedenpaar: de dimensieloze temperatuur en de dimensieloze reactiesnelheid. De variatie rond het werkpunt wordt als een conische sector gemodelleerd. Voor deze conische sector in de uitgangsgrootheden wordt een uitwerking gegeven van een berekening voor een voldoende voorwaarde voor stabiliteit van dit probleem. Zolang de niet-lineariteiten van het proces nu binnen deze conische sector blijven, kan een stabiele regelaar gevonden worden die robuust is voor deze niet-lineaire variaties. Als voordeel van deze methode wordt opgemerkt dat door de speciale vorm van de onzekerheid een veel strakkere band van onzekerheden rond het werkpunt gemodelleerd kan worden, zodat de prestatie van de regelaar niet onnodig omlaag gehaald wordt omdat deze voor een te grote klasse van onzekerheden robuust zou moeten zijn.

De zo ontworpen  $H_\infty$ -regeling wordt in simulatie vergeleken met een  $H_2$ -regeling. Het blijkt dat wanneer vanuit het werkpunt gezien een variatie naar een instabiel werkpunt gevraagd wordt, dat de  $H_\infty$  regeling een veel betere prestatie haalt in dat nieuwe werkpunt dat de  $H_2$ -regeling.

In het voorgaande wordt een lineaire regelaar gevonden die robuust is voor een bepaalde klasse van niet-lineariteiten. Hiervoor wordt een link gelegd naar de Lyapunov rekenwijze om tot een stabiel systeem te komen (afgeleide van de Lyapunov-functie kleiner dan 0 houden, waarbij deze Lyapunov-functie een (meestal kwadratische) functie van de fout is). Het artikel van Liu en Lewis [18] pakt het hele regelprobleem van de CSTR aan met een adaptieve Lyapunov regeling. Ook zij leiden eerst een paar dimensieloze grootheden af die het proces en de variaties hierin beschrijven, waarna via Lyapunov een niet-lineaire terugkoppeling berekend wordt, waarin nog een parameter zit die adaptief gevarieerd wordt om de afgeleide van de Lyapunov-functie zo negatief mogelijk te houden.

### **3.9. Digitale implementatie van een robuuste $\mu$ -regelaar voor een robot**

In het artikel van Fujita et. al. [10] wordt gekeken naar de implementeerbaarheid van de  $\mu$ -regeling in een DSP. Aangezien via  $\mu$ -synthese over het algemeen vrij hoge-orde en complexe regelingen worden gevonden, maakt dit het implementeren ervan sterk afhankelijk van de gekozen sampletijd. Om dit te illustreren zijn er experimenten gedaan met een niet-lineaire robot, waar een gelineariseerd model voor wordt afgeleid en een  $\mu$ -regeling op ontworpen. Op dit ontwerp wordt verder niet ingegaan.

Dit ontwerp levert een 9<sup>de</sup> orde regelaar op. De overgang naar discrete tijd heeft tot gevolg dat er een tijdvertraging in de regelactie optreedt ter grootte van de sampletijd. Om dit in rekening te brengen wordt een Padé benadering van deze tijdvertraging aan de regelaar toegevoegd, wat in een 10<sup>de</sup> orde regelaar resulteert. Dit wordt voor drie verschillende sampletijden gedaan.

Deze drie regelingen worden met de Tustin transformatie gediscretiseerd en daarna geïmplementeerd in dSPACE. Uit een vergelijking tussen de drie regelingen blijkt dat een snelle DSP onontbeerlijk is voor de implementatie van de regeling, omdat een te grote sampletijd tot gevolg kan hebben, dat de robuuste performance die van de regeling geëist wordt, niet meer gehaald kan worden, omdat de bandbreedte van de regeling dit niet meer toelaat.

### **3.10. Regeling voor geïntegreerde stuur- en aandrijfsystemen in voertuigen m.b.v. $\mu$ -synthese**

Het laatste artikel dat in dit hoofdstuk behandeld wordt handelt over het kritisch bochtgedrag bij 4 wiel aangedreven (4wd) en 4 vier gestuurde (4ws) voertuigen. Ono et. al. [23]. Hierbij wordt gekeken naar het effect van niet-lineariteiten in het bandgedrag tijdens het maken van een bocht. Dit bandgedrag is sterk afhankelijk van de gesteldheid van de ondergrond waar de auto op rijdt (nat wegdek, sneeuw, droog wegdek). Er wordt een regelstrategie voorgesteld die de manoeuvreerbaarheid van het voertuig bij extreme uitwijkingen moet verbeteren. Hiervoor wordt een actieve achterwiel sturing in combinatie met een actieve aandrijfverhoudings regeling toegepast. De aandrijfverhouding is gedefiniëerd als de procentuele verhouding tussen het vermogen dat aan de achterwielen en aan de voorwielen wordt aangeboden.

De geïntegreerde regelstrategie wordt gevonden na de volgende stappen:

- er wordt een niet-lineair voertuigmodel voorgesteld waarin met het effect van de aandrijving op de bochtkrachten op elke band rekening gehouden wordt,
- dit niet-lineaire model wordt gelineariseerd d.m.v. een niet-lineaire transformatie welke de twee ingangen (de stuurhoek van de achterwielen en de aandrijfverhouding) transformeert in een pseudo-input, waardoor het mogelijk wordt de geïntegreerde regeling te ontwerpen.
- deze regeling wordt ontworpen m.b.v.  $\mu$ -synthese en wordt robuust gemaakt voor veranderingen in de rijcondities (wegdek) en de verschillende stuuracties (uitwijkmanoeuvres). Hiervoor wordt gebruik gemaakt van twee additieve onzekerheden op het gegeneraliseerde model.

Deze regeling is toegepast op een experimenteel 4wd en 4ws voertuig. Met de regeling wordt bereikt dat de stabiliteit van het voertuig onder kritieke belasting verbetert, waardoor een gewenste baan (parcours met obstakels) sneller afgelegd kan worden. Hierbij valt op dat de bestuurder hiervoor ook minder aan zijn stuur hoeft te draaien dan in het ongeregelde geval.

## 4. Extra literatuurverwijzingen

In dit hoofdstuk worden nog een paar extra literatuurverwijzingen gegeven. De in deze extra literatuur beschreven onderwerpen zijn op zich geen aanvulling op de onzekerheidsmodelleringsmethoden zoals in de voorgaande twee hoofdstukken beschreven, maar hierin worden wel een paar hulpmiddelen aangereikt die de analyse van onzekere systemen kunnen vereenvoudigen.

Het artikel van Doyle et. al. [7] geeft een overzicht van een aantal transformaties die het samenstellen van een systeem met meervoudige onzekerheden eenvoudiger maken. Deze zelfde transformaties zijn in het artikel van Lee en Tits [15] gebruikt om van een niet-convex optimaliseringsprobleem een convex te maken voor het geval dat er een structurele onzekerheid op de fase van een systeem wordt meegenomen in de regelaarsynthese.

Het boek van Maciejowski [19] is een boek waarin zeer duidelijk de gehele  $H-\infty$  en  $\mu$  regelproblematiek beschreven wordt. Voor een eerste kennismaking met deze problematiek een must.



## 5. Conclusie

- Uit de praktijkvoorbeelden beschreven in de hier beschouwde literatuur blijkt dat met een standaard  $H_\infty$  regeling goede resultaten zijn te behalen, die in vergelijking tot andere regelingen zoals  $H_2$  en PID regelingen zelfs beter presteert. In het artikel van Young en Åström wordt een directe confrontatie tussen een regelaarontwerp volgens de manier van Bode en een d.m.v.  $\mu$ -synthese berekende regelaar in het voordeel van de laatste beslist. Een te grove onzekerheidsmodelleringsmethode kan er echter voor zorgen dat de regelaar een slechte prestatie levert. Hier moet dus een weloverwogen keuze voor gemaakt worden.
- Wanneer de  $\mu$ -analyse/synthese methode gekozen wordt blijkt het bepalen van een regelaar nog een rekenintensief karwei, waar in sommige gevallen zelfs geen optimale oplossing mogelijk is. In de gevallen waarin wel een optimale  $\mu$ -regelaar berekend kan worden, levert deze in de meeste gevallen een betere prestatie dan een standaard  $H_\infty$  regelaar. Bij de keuze voor een onzekerheidsmodelleringsstructuur moet dus een afweging gemaakt worden tussen de prestatie die van de regeling geëist wordt en de inspanning om een regelaar te vinden die die eis haalt.
- Wat verder opvalt is dat er een heleboel theoretische methoden zijn ontwikkeld voor het modelleren van gestructureerde systeemonzekerheden en het hierbij berekenen van een stabiliserende regelaar, maar dat deze methoden in de praktijk nog niet toegepast zijn, zodat over de bruikbaarheid van deze methoden nog niets gezegd kan worden.
- Het verdient dan ook aanbeveling om in de literatuur te blijven speuren naar praktische toepassingen van  $H_\infty$  en  $\mu$ -regelingen om hier meer inzicht in te krijgen.

---

## 6. Literatuurlijst

- [1] N. Amann and F. Allgöwer: " $\mu$ -Suboptimal design of a robustly performing controller for a chemical reactor", *Int. J. of Control*, vol.59, n°3, pp.665-687, 1994
- [2] S.P. Bhattacharyya and L.H. Keel: "Control of uncertain dynamic systems", CRC Press, Inc., 1991, ISBN 0-8493-0195-5
- [3] C-Y. Chang, C-D. Yang and C.E. Lin: "A new iteration scheme for robust performance problem: E-K iteration", *proc. of Am. Control Conf.*, pp.2809-2813, June 1994
- [4] J. Chen, M.K.H. Fan and C.N. Nett: "Structured singular values and stability analysis of uncertain polynomials, Part 1: the generalized  $\mu$ ", *Systems and Control Letters*, vol. 23, pp. 53-65, 1994
- [5] J. Chen, M.K.H. Fan and C.N. Nett: "Structured singular values and stability analysis of uncertain polynomials, Part 2: a missing link", *Systems and Control Letters*, vol. 23, pp. 97-109, 1994
- [6] F.J. Doyle III, A.K. Packard and M. Morari: "Robust controller design for a nonlinear Continuous Stirred-Tank Reactor", *proc. of Am. Control Conf.*, pp.1087-1092, June 1989
- [7] J.C. Doyle, A.K. Packard and K. Zhou: "Review of LFT's, LMI's, and  $\mu$ ", *proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control*, pp.1227-1232, December 1991
- [8] J.C. Doyle: "Structured uncertainty in control system design", *proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control*, pp.260-265, December 1985
- [9] M. Fu L. Xie and C.E. de Souza: "H- $\infty$  control for linear systems with time-varying parameter uncertainty", [2], pp. 63-75
- [10] M. Fujita, T. Namerikawa and K. Uchida: "Digital implementation of robust  $\mu$ -control for a robot manipulator", *proc. of Am. Control Conf.*, pp.2450-2454, June 1994
- [11] W.M. Haddad, E.G. Collins Jr. and R. Moser: "Structured singular value controller synthesis using constant D-scales without D-K iteration", *proc. of Am. Control Conf.*, pp.2798-2802, June 1994
- [12] K. Hashimoto, F. Matsumura and M. Fujita: "Experimental comparison between H- $\infty$  and H<sub>2</sub> control for a magnetic suspension system with double flexible beam", *proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control*, pp. 2949-2954, December 1994
- [13] T. Hirata and R. Takahashi: "H- $\infty$  control of railroad vehicle active suspension", *proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control*, pp.2937-2942, December 1993
- [14] L.J. Hufford and M.A. Dahleh: "Controller design for an ill-conditioned plant using  $\mu$  and  $l_1$ ", *proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control*, pp.2943-2948, December 1993
- [15] L. Lee and A.L. Tits: "Linear Fractational Transformations for the approximation of various uncertainty sets", [2], pp.53-62
- [16] K.B. Lim and D.E. Cox: "Experimental robust control studies on an unstable magnetic suspension system", *proc. of Am. Control Conf.*, pp.3198-3203, June 1994
- [17] J.L. Lin, I. Postlethwaite and G.W. Gu: " $\mu$ -K iteration: a new algorithm for  $\mu$ -synthesis", *Automatica*, vol.29, n°1, pp.219-224, 1993

- 
- [18] K. Liu and F.L. Lewis: "Robust control of a Continuous Stirred-Tank Reactor", proc. of Am. Control Conf., pp.2350-2354, June 1994
- [19] J.M. Maciejowski: "Multivariable feedback design", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989, ISBN 0-201-18243-2
- [20] A.N. Madiwale, W.M. Haddad and D.S. Bernstein: "Robust  $H_\infty$  control design for systems with structured parameter uncertainty", proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control, vol.1, pp.965-972, December 1988
- [21] D. McFarlane and K. Glover: "An  $H_\infty$  design procedure using robust stabilization of normalized coprime factorizations", proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control, vol.2, pp.1343-1348, December 1988
- [22] D.A. Milich, M. Athans, L. Venavani and G. Stein: "A method for designing robust multivariable feedback systems", proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control, vol.3, pp.2150-2156, December 1988
- [23] E. Ono, K. Takanami, N. Iwana, Y. Hayashi, Y. Hirano and Y. Satoh: "Vehicle integrated control for steering and traction systems by  $\mu$ -synthesis", Automatica, vol.30, n°11, pp.1639-1647, 1994
- [24] S-H. Park and Z. Bien: " $H_\infty$  control with performance bound for a class of uncertain linear systems", Automatica, vol.30, n°12, pp.2009-2012, 1994
- [25] R.S. Sánchez Peña and A. Sideris: "Robustness with real parametric and structured complex uncertainty", proc. of IEEE Conf. on Dec. and Control, vol.1, pp.532-537, December 1988
- [26] S. Skogestad, M. Morari and J.C. Doyle: "Robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation", IEEE trans. on Aut. Control, vol.33, pp.1092-1105, December 1988
- [27] A.A. Stoorvogel: "The  $H_\infty$  control problem, a state-space approach", Prentice Hall International Ltd., 1992, ISBN 0-13-388067-2
- [28] M. Vidyasagar and H. Kimura: "Robust controllers for uncertain linear multivariable systems", Automatica, vol.22, n°1, pp.85-94, 1986
- [29] Z-Q. Wang, P. Lundström and S. Skogestad: "Representation of uncertain time delays in the  $H_\infty$  framework", Int. J. of Control, vol.59, n°3, pp.627-638, 1994
- [30] R. Watanabe, M. Kurosaki, K. Uchida, E. Shimemura and M. Fujita: "Robust control of reheat-fan engine", proc. of Am. Control Conf., pp. 787-790, June 1994
- [31] A. Weinmann: "Uncertain models and robust control", Springer Verlag Wien, 1991, ISBN 3-211-82299-2
- [32] M. Yamashita, K. Fujimori, K. Hayakawa and H. Kimura: "Application of  $H_\infty$  control to active suspension systems", Automatica, vol.30, n°11, pp.1717-1729, 1994
- [33] H-H. Yeh, S.S. Banda, S.A. Heise and A.C. Bartlett: "Robust design of multivariable feedback systems with real parameter uncertainty and unmodelled dynamics", proc. of Am. Control Conf., vol.1, pp.662-670, June 1989
- [34] P.M. Young: "The rank one mixed  $\mu$  problem and 'Kharitonov-type' analysis", Automatica, vol.30, n°12, pp.1899-1911, 1994
- [35] P.M. Young and K.J. Åström: " $\mu$  meets Bode", proc. of Am. Control Conf., pp.1223-1227, June 1994
-