

Het dwarskrachtenmiddelpunt bij dunwandige enkelvoudig samenhangende doorsneden

Citation for published version (APA):

Janssen, J. D. (1964). *Het dwarskrachtenmiddelpunt bij dunwandige enkelvoudig samenhangende doorsneden*. (DCT rapporten; Vol. 1964.036). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1964

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Maart-April 1964

Knobbel van een klein cirkelvormig gaatzje
op de spanningsverdeling in een getroonde
cirkelvormige dunwandige buis.

Samenvatting:

Een eenvoudige eerste benadering van het hier genoemde probleem wordt gegeven door de omgeving van het gaatzje als een vlakke plaat te beschouwen. Aangenomen wordt dat dit met de exacte spanningsverdeling kan zijn.

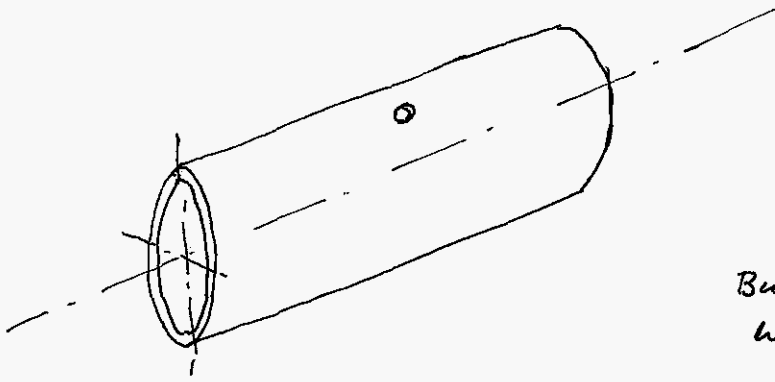
Een experiment met behulp van de H.A.N. wrijfbank werd uitgevoerd. In dit geval bestaat er een vrij goede overeenstemming tussen theorie en experiment.

Theoretische beschouwing

In onderstaande perspectivische figuur is een cirkelcylinder, waarin een gaatzje aangebracht is, getekend. De afmetingen der dwarsdoornede zijn aangegeven.

De staat van het cirkelvormig gaatzje wordt aangegeven.

De plaats van het gaatzje is niet belangrijk. Het hoeft alleen gezegd te worden dat deze discontinuïteit in het cilindrisch oppervlak niet te dicht bij de rand van de buis gelegen is.

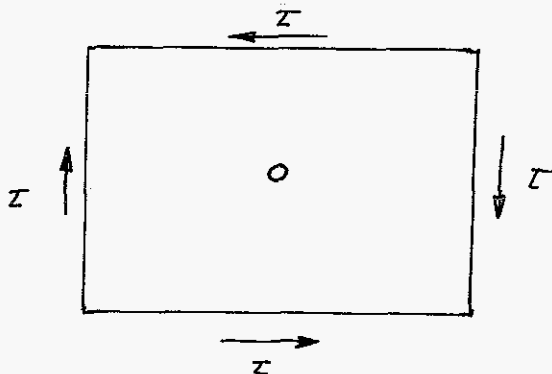


Buitendiameter : 170 mm
 Wanddikte : 7.2 mm.

Aangenomen wordt : $t \ll R$
 $a \ll R$

Verwacht mag worden dat het gaatje slechts een lokale invloed op het spannings- en deformatie- beeld heeft. Als $a \ll R$ mogen we verwachten dat de afmetingen van het gebied waarin dit gaatje invloed heeft eveneens veel kleiner dan R is. In dit gebied is het gekromde cilindrische oppervlak in goede benadering te vervangen door een vlakke plaat.

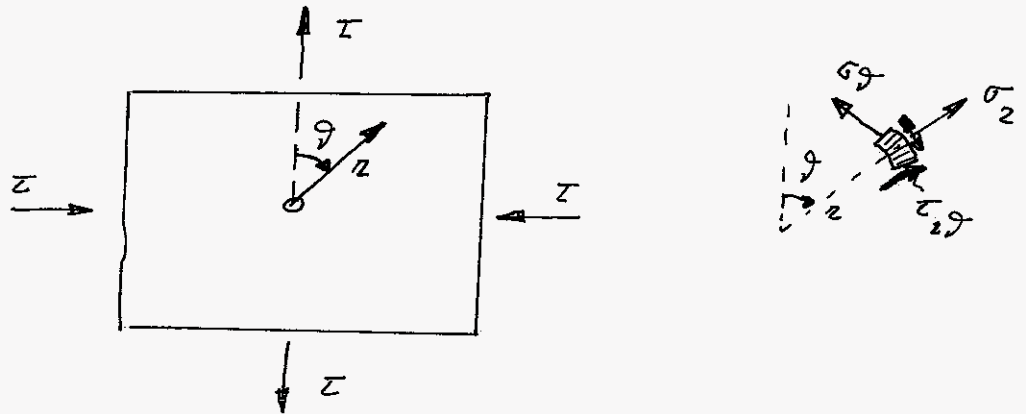
In eerste benadering zal de spanningsverdeling rond dit gaatje gegeven worden door de oplossing van het onderstaande probleem uit de tweedimensionale spanningsleer.



hierin is $\bar{\sigma} = \frac{M_w}{2\pi R^2 t}$

Het gaatje is veel kleiner dan de afmetingen der plaat in het vlak van trekking.

Dit hierboven geschilderde belastingtoestand is gelijk aan:



Dit is een standaardprobleem dat m.b.v. spanning-functie van Airy in poolcoördinaten opgelost kan worden. De oplossing hiervan wordt gegeven in o.a. "Theory of elasticity" p. 78 e.v. Timoshenko-foedie. De spanningen op een plaats (r, ϑ) worden gegeven door de formules:

$$\sigma_r = \tau \left(1 + \frac{3a^4}{2r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\vartheta$$

$$\sigma_\vartheta = -\tau \left(1 + \frac{3a^4}{2r^4} \right) \cos 2\vartheta$$

$$\tau_{r\vartheta} = -\tau \left(1 - \frac{3a^4}{2r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\vartheta$$

Controle:

$$r \rightarrow \infty$$

$$\sigma_r = \tau \cos 2\vartheta$$

$$\sigma_\vartheta = -\tau \cos 2\vartheta$$

$$\tau_{r\vartheta} = -\tau \sin 2\vartheta$$

dus voor $r=0$

$$\sigma_r = \tau, \sigma_\vartheta = -\tau, \tau_{r\vartheta} = 0$$

Voor $r=a$ geldt:

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_\vartheta = -4\tau \cos 2\vartheta$$

$$\tau_{r\vartheta} = 0$$

Opwvlak.

Het moment van alle schuifkrachten is:

$$\int_F \tau \delta \, d\omega = 0$$

Substitueer we de uitdrukking van \bar{t} , dan moet dus gelden:

$$\frac{Q_x}{J_y} \int_F S_y(s) \, d\omega + \frac{Q_y}{J_x} \int_F S_x(s) \, d\omega = 0$$

Hieraan moet voldaan zijn voor iedere waarde van Q_x en Q_y .

Er moet dus gelden:

$$\int_F S_y(s) \, d\omega = 0 \quad \text{en} \quad \int_F S_x(s) \, d\omega = 0$$

We kunnen deze voorwaarden m.b.v. partiële integratie nog anders schrijven.

$$\begin{aligned} \int_F S_y(s) \, d\omega &= S_y(s) \cdot \omega \Big|_{\substack{s=0 \\ F=0}}^F - \int_F \omega \, dS_y(s) = \\ &= - \int_F \omega \, x \, dF \stackrel{\text{def}}{=} - J_{wx} \end{aligned}$$

Omdat de stokterm nul is [beneden grens $\omega = 0$, boven grens $S_y = 0$, omdat de ontspring het zwaartepunt is,

Volgens geldt:

$$\int_F S_x(s) \, d\omega = - \int_F \omega \, y \, dF \stackrel{\text{def}}{=} - J_{wy}$$

De ligging van A volgt dus uit de condities $J_{wx} = 0$ en $J_{wy} = 0$.

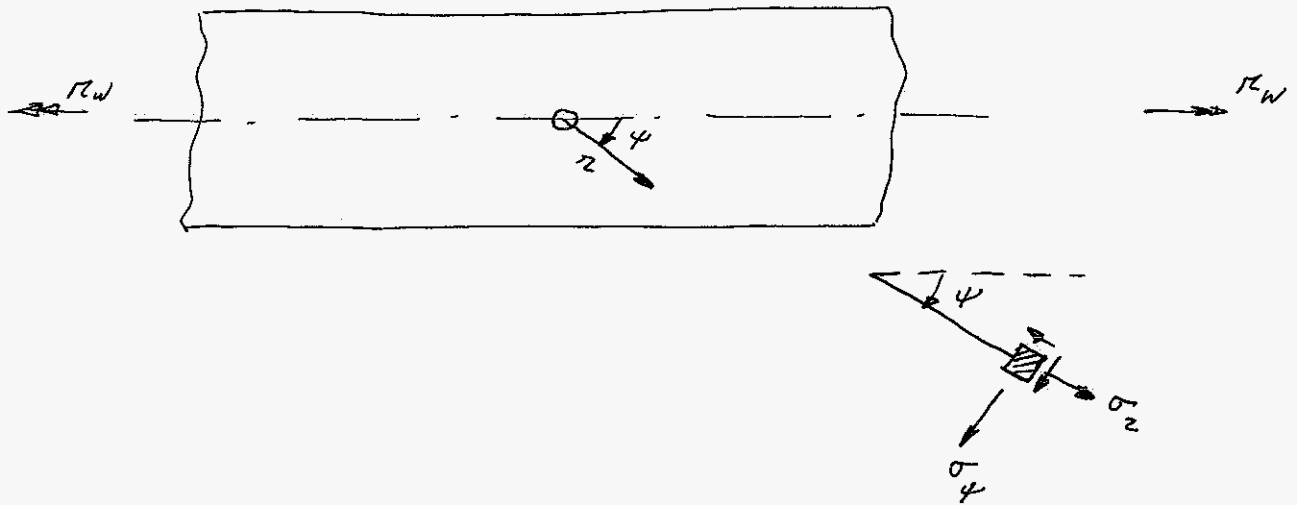
(In Blasov's theorie komt dit meer op samen-

De as van de cilinder wordt gegeven door $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$
 Breken we nu de hoek $\psi = \vartheta + \frac{\pi}{4}$ in, dan gaan de formules over in:

$$\sigma_2 = +\tau \left(1 + \frac{3a^4}{2r^4} - \frac{4a^2}{2r^2} \right) \sin 2\psi$$

$$\sigma_\psi = -\tau \left(1 + \frac{3a^4}{2r^4} \right) \sin 2\psi$$

$$\tau_{2\psi} = +\tau \left(1 - \frac{3a^4}{2r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \cos 2\psi$$



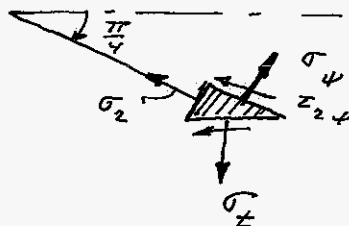
We zullen bewijzen dat deze spanningverdeling bij dit cilindrisch oppervlak niet aan de evenwichtsvergelijkingen voldoet.

We bekijken b.v. de plaats $\psi = \frac{\pi}{4}$. Daar geldt:

$$\sigma_2 = \tau \left(1 + \frac{3a^4}{2r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\psi = -\tau \left(1 + \frac{3a^4}{2r^4} \right)$$

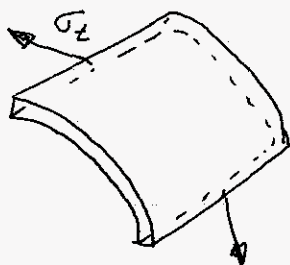
$$\tau_{2\psi} = 0$$



Het het evenwicht van het getekende blok kan de spanning in tangentiële richting σ_z bepaald worden. Er geldt:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_2 + \sigma_4}{2} + \tau_{2\psi} = -2 \frac{a^2}{z^2} \tau$$

Het evenwicht in radiale richting van een cilinder element leert echter meteen $\sigma_z = 0$



We zien echter dat voor grote waarden van z de hier gegeven oplossing in goede benadering $\sigma_z = 0$ levert, hetgeen we verwachten was.

Hiernaop volgend is het meetrapport volgtolgd van een meting aan een cilindrische buis met een gaatje. Deze meting is verricht door de heer Laan en van Hon. Het meetrapport is verspreid door de th. Laan.

Aangegeven is op welke plaats de verstandrekstrookjes zijn geplakt. Om zo goed mogelijk de spanningsconcentratie te meten zijn de rosetten zo dicht mogelijk bij het gaatje geplakt.

Dicht bij de rand der buis is een eenzijdig rekstrookje geplakt om na te gaan welke neveneffecten bij de afspanning worden opgeworpen.

Meetrapport.

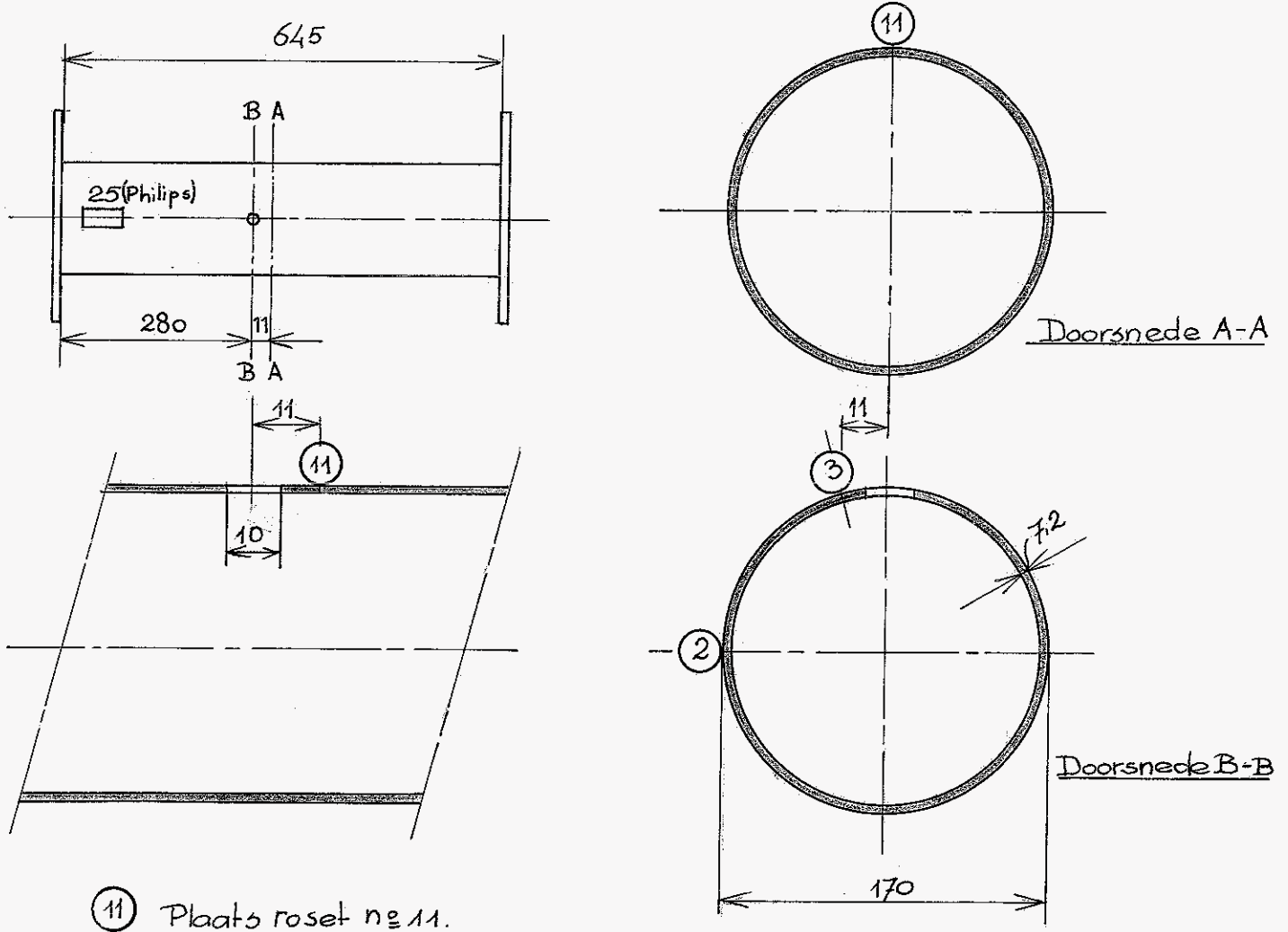
Gebruikte meetapparatuur:

M.A.N Wringbank 0-1000 kgfm
 Verdeelkast, 23 meetpunten; type 234.
 Rekstrookmeter 540DNH
 " " " 6 VN

Rekstrookjes : Type : HPR-5
 Lengte: 5mm.
 Weerstand: $120 \pm 0,3 \Omega$
 k factor 1 = 2,04 ; 2 = 2,06 ; 3 = 2,08.
 Fabr. Tokyo Sokki Kenkyujo Co, Ltd.

Voordat de rekstrookjes zijn geplakt, zijn ze gestaal-straald, om een ruwer oppervlak te krijgen. Hiermee wordt voorkomen, dat het rekstrookje, dat aanvankelijk een glad oppervlak heeft, gemakkelijk van het materiaal verwijderd kan worden.

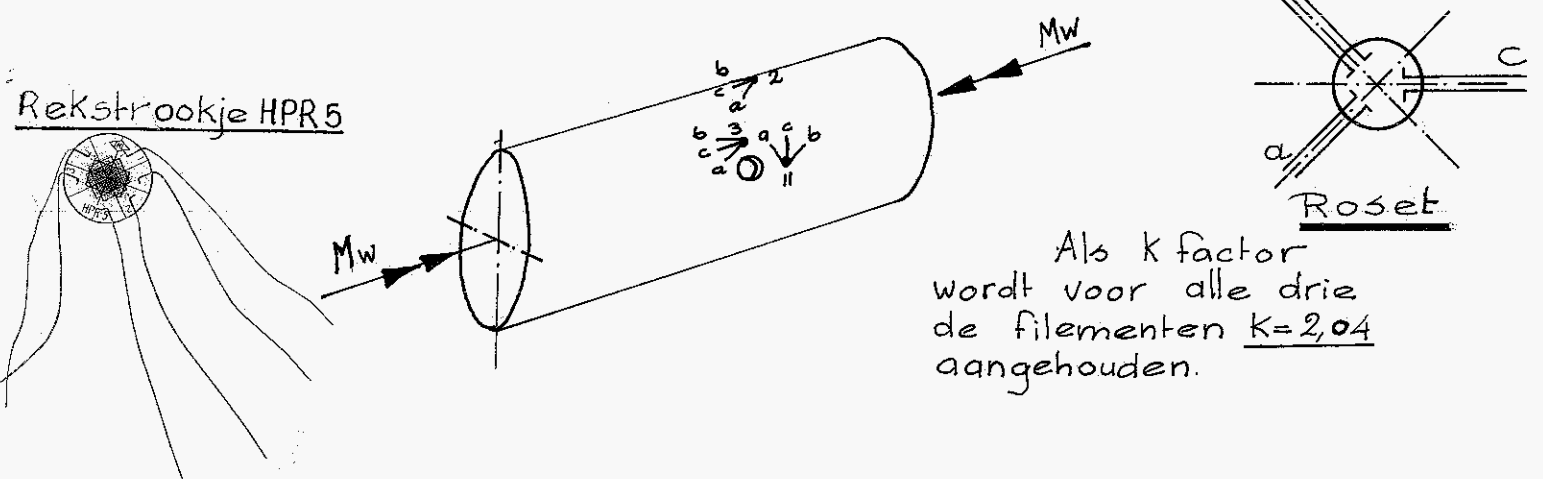
Tijdens de meting is gewerkt met een "dummy".



Rekstroommeting (Schaalwaarden)								
Wringmoment (Linksom)	2 en 2 2=b 1=a	11 1=a	11 2=b	11 3=c	3 1=a	3 2=b	3 3=c	
0 kgm	0 sd	0 sd	0 sd	0 sd	0 sd	0 sd	0 sd	0 sd
100	38	28	25	0	27	29	2	
200	77	54	52	4	55	56	3	
300	115	78	78	6	84	83	4	
400	155	102	101	9	109	109	4	
500	198	130	126	11	135	136	4	
600	239	156	152	15	162	164	5	
500	198	129	126	10	135	136	4	
400	158	104	102	8	109	109	4	
300	115	79	78	5	83	84	4	
200	78	54	53	2	58	57	-16	
100	38	26	25	0	30	29	-17	
0	1	1	0	-2	2	0	-18	
		positieve rek; $\frac{2}{1+a}$ negatieve rek	positieve rek	negatieve rek	positieve rek	negatieve rek	positieve rek	negatieve rek
0	0	0	0	0	0	0	0	
100	38	29	24	5	26	28	0	
200	77	54	50	7	54	54	2	
300	117	80	76	10	82	82	2	
400	157	105	100	14	105	106	3	
500	198	130	126	15	132	135	2	
600	238	159	151	18	160	163	2	
500	198	131	125	15	131	134	2	
400	157	105	98	12	103	106	0	
300	118	83	76	10	81	82	0	
200	78	56	51	6	54	55	0	
100	38	29	24	5	26	29	0	
0	0	3	-3	3	-3	0	-4	

Als aanduiding voor de filamenten is gebruikt; 1 = a
 2 = b
 Rosetten 2 en 3 geplakt in axiale richting.
 Rosette 11 " " tangentiële "

Rekstroommeting HPR5



Belasten

Ontlasten

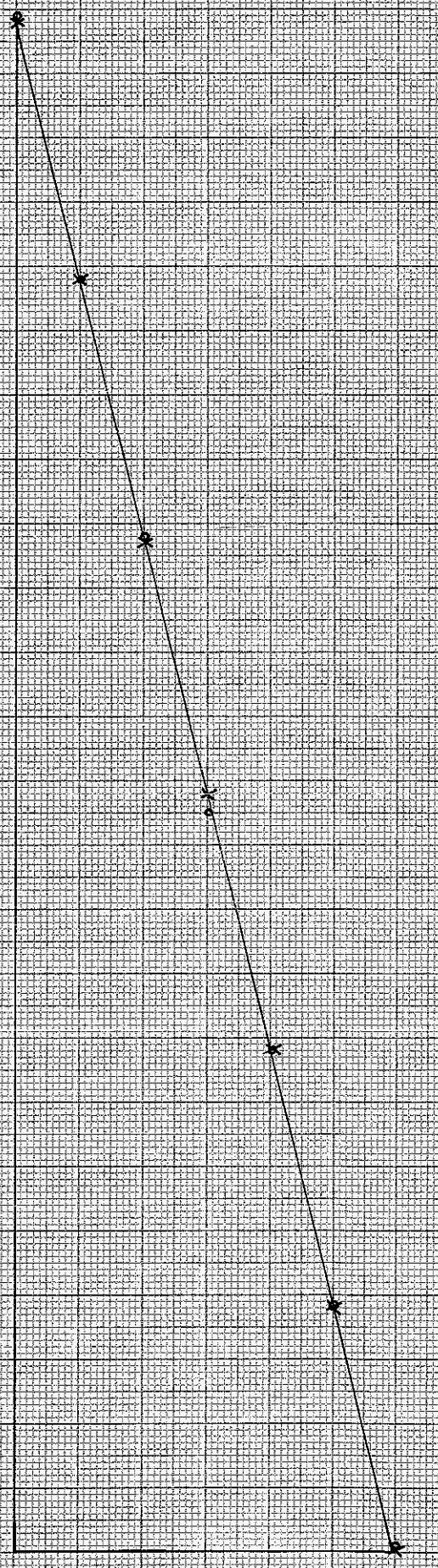
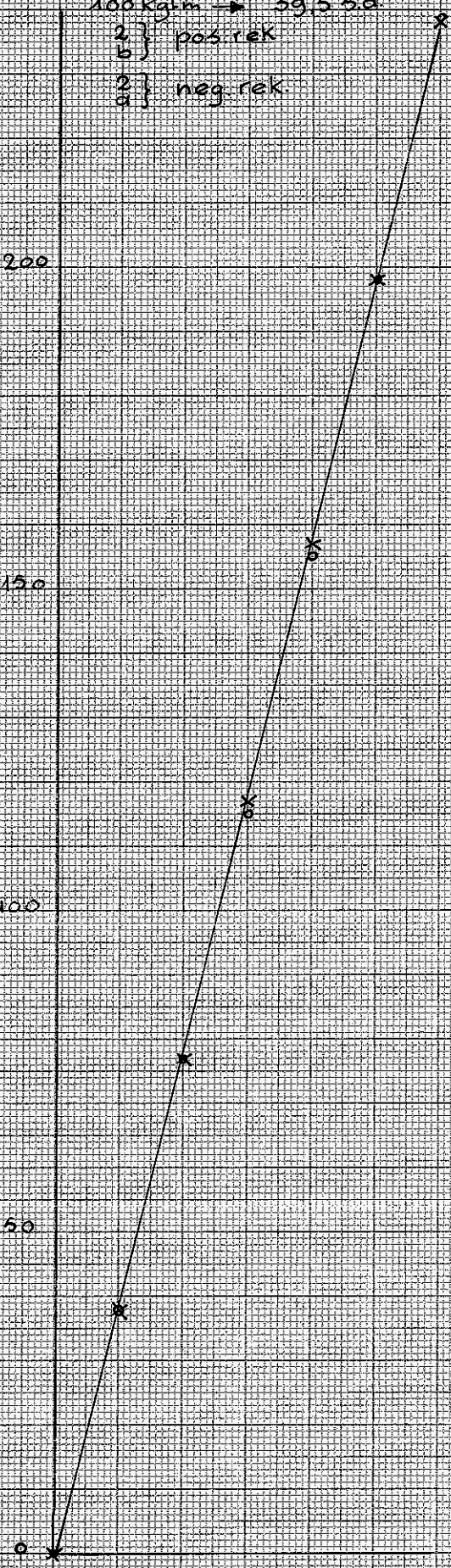
100 kgfm \rightarrow 39,5 bd
 $\frac{2}{b}$ } pos. rek
 $\frac{2}{a}$ } neg. rek

Schaaldelen

200
150
100
50

0 100 200 300 400 500 600
Mw (kgfm)

600 500 400 300 200 100 0
Mw (kgfm)



o 1^o Serie

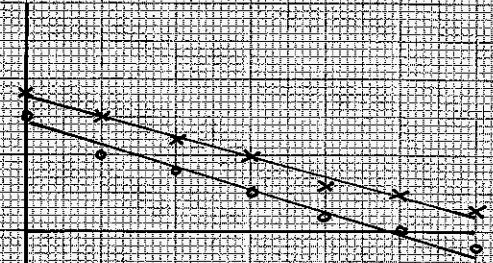
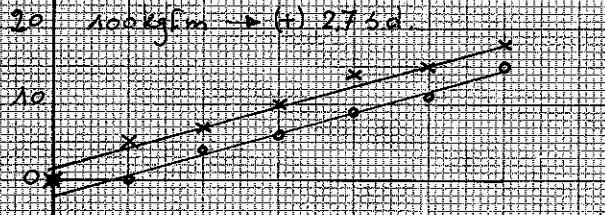
x 2^o Serie

Belasten

Ontlasten

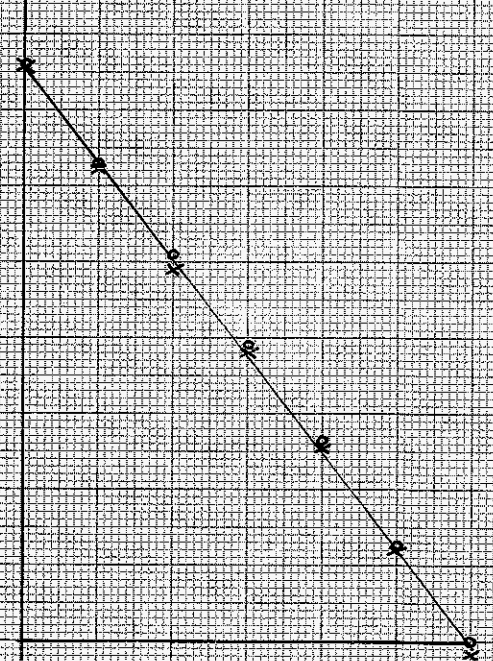
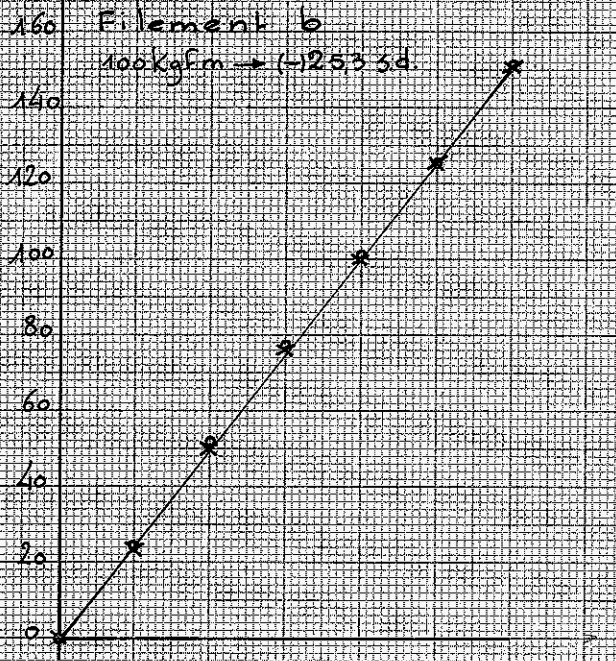
Filement c

100 kgfm → (+) 275 d.



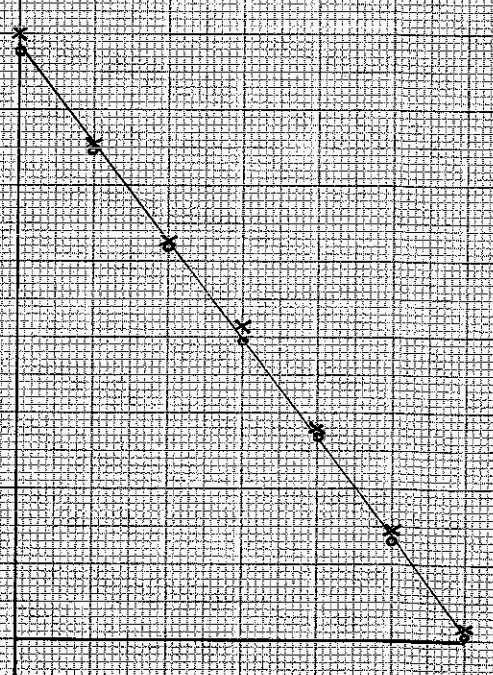
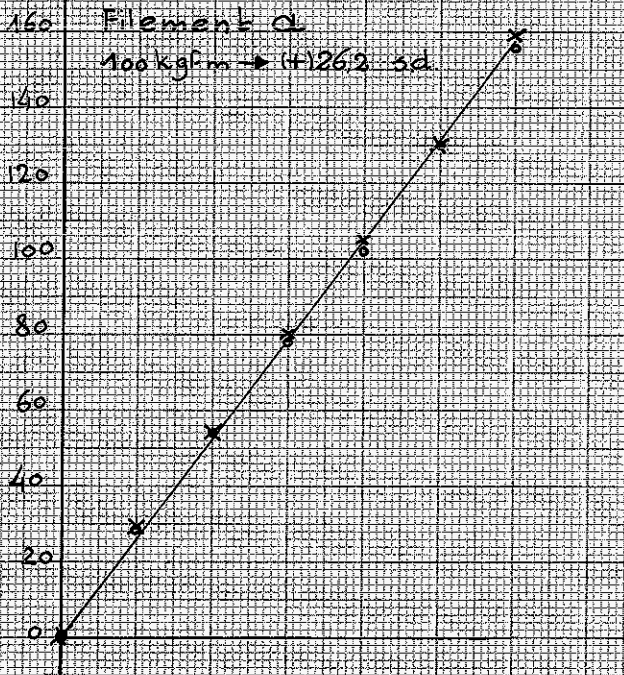
Filement b

100 kgfm → (+) 253 d.



Filement a

100 kgfm → (+) 262 d.



Schaaldelen

Mw (kgfm)

Mw (kgfm)

Rakstrookje 3.

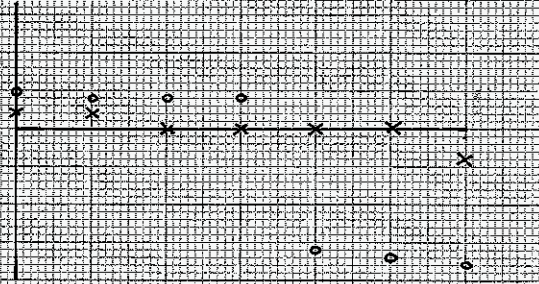
Belasten

o 1^o Serie x 2^o Serie

Ontlasten

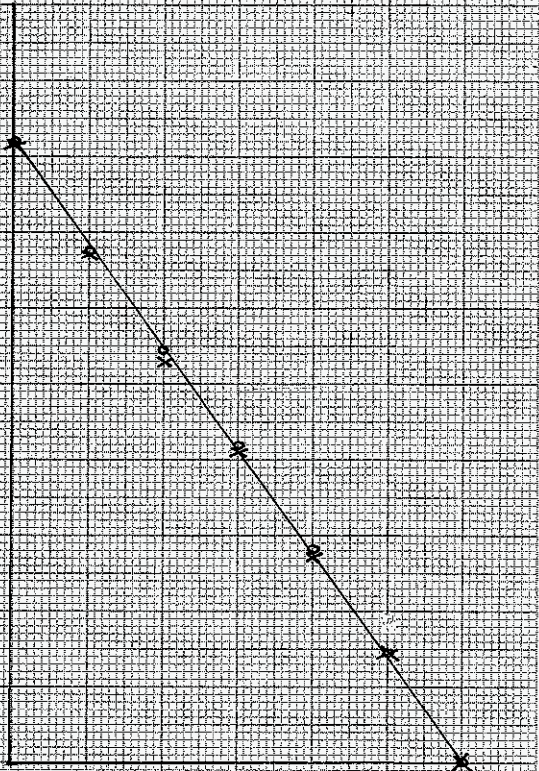
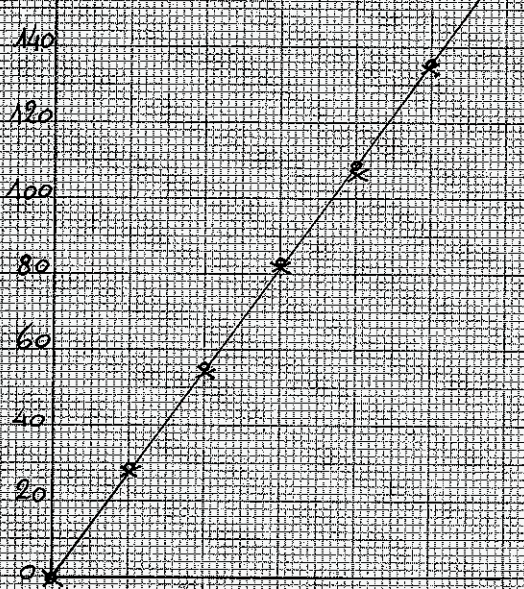
Filement c

100 kgfm → (+) 0,75 sd.



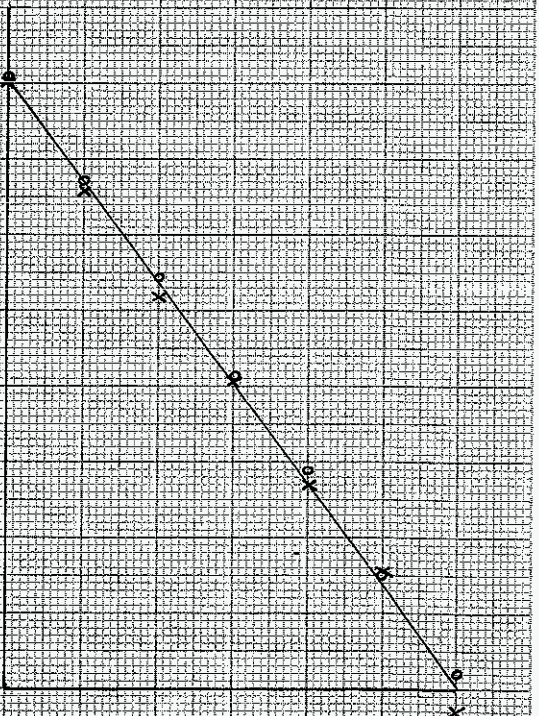
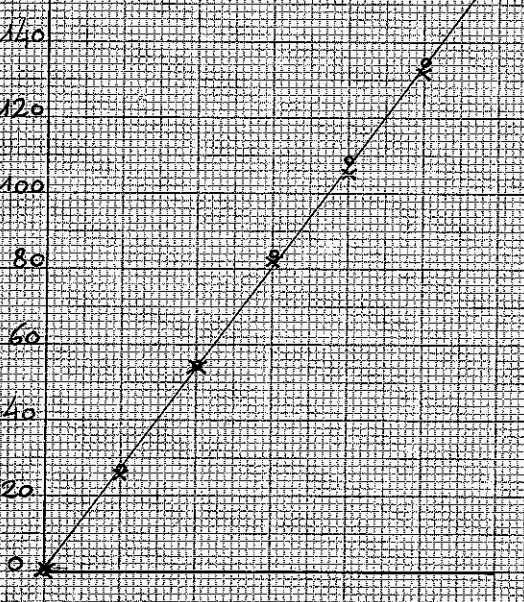
Filement b

100 kgfm → (+) 2,73 sd.



Filement a

100 kgfm → (+) 2,68 sd.



Schaaldelen

o 100 200 300 400 500 600

600 500 400 300 200 100 0

Mw (kgfm)

Mw (kgfm)

Berekening van de schuifspanning t.p.v. rekstrookje 2:

$$\tau_2 = \frac{Mw}{2 \cdot A \cdot t}$$

$$Mw = 100 \text{ kgfm} = 10.000 \text{ kgfcm}$$

$$A = \frac{\pi}{4} 17^2 = 226 \text{ cm}^2$$

$$t = 0,72 \text{ cm}$$

$$\tau_2 = \frac{10.000}{2 \cdot 226 \cdot 0,72} = \underline{\underline{30,7 \text{ kgf/cm}^2}}$$

Gemeten waarden:

$$100 \text{ kgfm} \rightarrow 39,5 \text{ sd.}$$

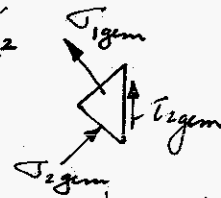
$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{2}{K} \cdot \text{meteruitslag} = \frac{2}{2,04} \cdot 39,5 = 38,5 \text{ } \mu \text{ rek}$$

$$\tau_{2 \text{ gem}} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{2,1 \cdot 10^6}{2 \cdot 1,28} \cdot 38,5 = \underline{\underline{31,6 \text{ kgf/cm}^2}} \text{ (verschil 3\%)}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6$$

$$\nu = \frac{1}{m} = 0,28$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{2 \text{ gem}} = 31,6 \text{ kgf/cm}^2$$



Berekening van de hoofdspanningen onder 45° met de as t.p.v. rekstrookje 11

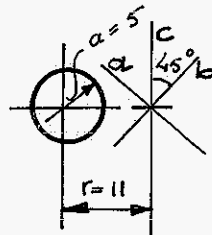
$$\tau_2 = \tau_{11} = \frac{Mw}{2 \cdot A \cdot t} = 30,7 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{11} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = 30,7 \left(1 - 3 \cdot \frac{5^4}{11^4} + 2 \cdot \frac{5^2}{11^2} \right) =$$

$$30,7 (1 - 0,1275 + 0,412) =$$

$$30,7 \cdot 1,2845 = \underline{\underline{39,4 \text{ kgf/cm}^2}}$$



Gemeten waarden

$$\epsilon_a = +26,2 \cdot \frac{2}{2,04} = +25,7 \text{ } \mu \text{ rek}$$

$$\epsilon_b = -25,3 \cdot \frac{2}{2,04} = -24,8 \text{ } \mu \text{ rek}$$

$$\epsilon_c = +2,7 \cdot \frac{2}{2,04} = +2,65 \text{ } \mu \text{ rek}$$

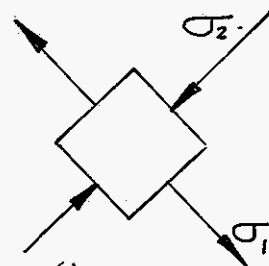
Dmv de rekcirkel van Mohr, zijn grafisch volgens Murphy, de hoofdrekken ϵ_1 en ϵ_2 bepaald.

$$\epsilon_1 = +25,8 \mu \text{ rek}$$

$$\epsilon_2 = -25,0 \quad "$$

$$\sigma_1 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2)$$

$$\sigma_1 = \frac{2,1}{1 - 0,28^2} (25,8 - 0,28 \cdot 25,0) = \underline{\underline{42,8 \text{ kgF/cm}^2}} \quad (\approx 8\%)$$



$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) = \frac{2,1}{1 - 0,28^2} (-25,0 + 0,28 \cdot 25,8) = \underline{\underline{-40,7 \text{ kgF/cm}^2}} \quad (3,2\%)$$

Gemeten rekken t.p.v. rekstrookje 3 en de daaruit berekende hoofdspansingen.

$$\epsilon_a = -26,8 \cdot \frac{2}{2,04} = -26,3 \mu \text{ rek}$$

$$\epsilon_b = +27,3 \cdot \frac{2}{2,04} = +26,8 \quad "$$

$$\epsilon_c = -0,75 \cdot \frac{2}{2,04} = -0,74 \quad "$$

Hoofdrekken volgens Murphy. (Rekcirkel van Mohr)

$$\epsilon_1 = +26,8 \mu \text{ rek}$$

$$\epsilon_2 = -25,4 \quad "$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) = \frac{2,1}{1 - 0,28^2} (26,8 - 0,28 \cdot 25,4) = \underline{\underline{44,9 \text{ kgF/cm}^2}} \quad (14\%)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) = \frac{2,1}{1 - 0,28^2} (-25,4 + 0,28 \cdot 26,8) = \underline{\underline{-40,8 \text{ kgF/cm}^2}} \quad (3,5\%)$$

Gevonden waarde voor; $1 - \frac{3a^4}{r^4} + 2 \frac{a^2}{r^2}$; Hier theoretisch

$$1 - \frac{3 \cdot 5^4}{11^4} + 2 \cdot \frac{5^2}{11^2} = \underline{\underline{1,2845}}$$

$$\text{Bij rekstrookje 11: } \frac{42,8}{31,6} = 1,355 \quad \text{en} \quad \frac{-40,7}{-31,6} = 1,289$$

$$\text{Bij rekstrookje 3: } \frac{44,9}{31,6} = 1,420 \quad \text{en} \quad \frac{-40,8}{-31,6} = 1,291$$

Conclusies

Experiment:

De bij dit rapport gevoegde grafieken, waarin de afgeleide schaaldeelen (geëduceerd op de nulstand) zijn uitgezet als functie van het wrijvend moment, stemmen aan dat de meetpunten een goed een rechte lijn bepalen. Tussen belasting en ontlasten is geen verschil te constateren. Evenmin is er een verschil tussen een torsiemoment rechtson of linksom. De meetresultaten mogen dus als betrouwbaar worden aangemerkt.

De grootste moeilijkheid bij het experiment was het op de juiste wijze in de wrijfbank plaatsen van het proefstuk. Deze moeilijkheid vindt zijn oorsprong in het feit dat de platen die aan de uiteinden der buis zijn bevestigd ten gevolge van het lassen scheef getrokken waren. Omdat het buitoppervlak der buis niet bewaakt was, verviel hiermee iedere referentie. Het proefstuk is dan ook in feite "op het oog" ingespannen. We moeten verwachten dat er kleine buigspanningen optreden. Opmerkelijk en nog niet verklaard is het feit dat reekstroomlijn no 25 (nabij den uiteinde der buis) een niet-lineair verband te zien gaf tussen rek en belasting. Bij een belasting van ± 300 kgm was er een omkeerpunt gelegen.

Vergelijking theorie en experiment

Een eind oevijheid van de discontinuïteit wordt verwacht dat een schuifspanning volgens uit de Bredtsele theorie wordt gevonden.

$$\tau = \tau_2 = \frac{M_w}{2 \cdot \pi R^2 t}$$

Verwacht wordt dat het plaats van reekstroomlijn no 2

deze spanning gevonden wordt. Het meetrapport toont een verschil van $\pm 3\%$ tussen gemeten en berekende waarde. Dit resultaat is goed te noemen. De afwijking kan geheel het gevolg zijn van meet-
onnauwkeurigheid, verschil in de afmetingen der buis, onnauwkeurigheid in de plattechtig van het rekstrookje, niet volkomen cirkelvormig zijn van het draadje.

Ter plaatse van rekstrookje no 11 ($\psi = 0$) wordt praktisch alleen zuivere wringspanning gemeten. De afwijking die gevonden wordt kan het gevolg zijn van bovengenoemde onnauwkeurigheden. Uit deze meting is niet te concluderen dat de gebruikte theorie foutieve resultaten zou leveren.

Rekstrookje 3 ($\psi = \frac{\pi}{2}$) vertoont hetzelfde beeld.

We willen concluderen dat bij de in het experiment gebruikte verhoudingen a/R en t/R ($\frac{a}{R} \approx \frac{1}{7}$; $\frac{t}{R} \approx \frac{1}{10}$) de gegeven benaderingstheorie voldoende nauwkeurige resultaten levert.

15 april 1964

J. Jansz.