Het principe van Reissner, toegepast op het probleem van torsie met welvingsverhindering

Het principe van Reissner, toegepast op het probleem van torsie met welvingsverhindering.

0. Samenvatting

Het principe van Reissner levert, wanneer alleen veronderstellingen gemaakt worden over de vervormingen in dit geval dezelfde resultaten als met behulp van het principe van minimum potentiële energie gevonden zijn. Hieraan kleven de bekende nadelen.

Veronderstellen we daarentegen dat de dwarsdoorsnede als geheel draait om een hoek ϑ en dat de axiale normaalspanningen evenredig zijn met de welvingsfunctie volgens de Saint-Venant ($\sigma_z = \beta'\varphi$), dan wordt een sluitende torsietheorie gevonden. De moeilijkheid is een oplossing te vinden van:

$\Delta \psi = \varphi$ met $\frac{d\psi}{dn} = 0$ op de randen.

Voor een dunwandige koker is de oplossing te vinden in een bruikbare vorm.

Als verondersteld wordt $\sigma_z = \vartheta'\varphi$, ontstaat een vijfde orde d.v. in ϑ met 6 randvoorwaarden. Er is dan in het algemeen geen oplossing mogelijk.

1. Het variatieprincipe van Reissner; hypothesen

Definieer:

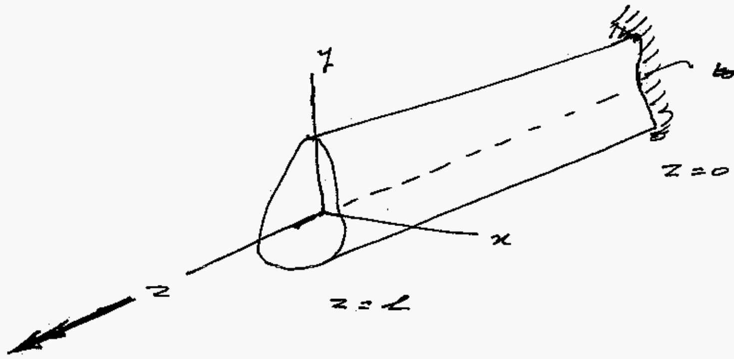
$$R = \iiint \left\{ \tau^{ij} u_{i|j} - W(\tau^{ij}) \right\} dV - \iint_{S_1} \bar{\tau}^{ij} n_i u_j \, dS +$$

$$- \iint_{S_2} \tau^{ij} n_i (u_j - \bar{u}_j) \, dS$$

met τ^{ij} : componenten spanningstensor
u_i : " verplaatsingsvector
$W(\tau^{ij})$: vormveranderingsenergie, uitgedrukt in de spanningen
S_1 : deel van buitenopp., waar de spanningen voorgeschreven zijn : $\bar{\tau}^{ij}$
S_2 : deel van opp., waar verplaatsingen voorgeschreven zijn : $\bar{u}_i$

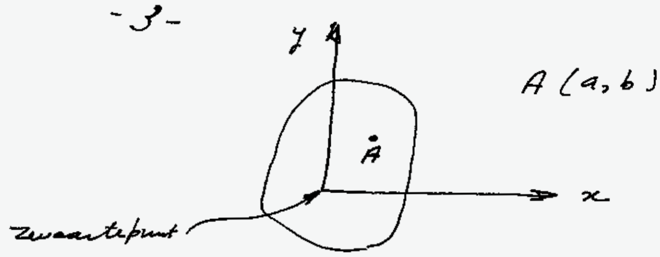
Het principe van Reissner zegt dat

$\delta R = 0$ voor onafhankelijke variaties van τ^{ij} en u_i
(zie rapport WE - 65/).



Hypothesen:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$



dwarsdoorsnede

Bij $z=0$ wordt de welving volkomen verhinderd. De dwarsdoorsnede van de balk is willekeurig. Voor $z=l$ zijn spanningen $\bar{\tau}_{xz}$ en $\bar{\tau}_{yz}$ voorgeschreven waarvoor geldt

$$\iint (\bar{\tau}_{zy}\, x - \bar{\tau}_{zx}\, y)\, dx\, dy = M_w$$

$$\iint \bar{\tau}_{zy}\, dx\, dy = 0 \quad ; \quad \iint \bar{\tau}_{zx}\, dx\, dy = 0.$$

Wanneer de dwarsdoorsnede symmetrisch is ten opzichte van de x- en y-as, lijkt een zinvolle veronderstelling van het verplaatsingsveld:

$$u = -\vartheta y$$
$$v = \vartheta x \qquad \vartheta = \vartheta(z).$$

(zie hiervoor rapport WE-65/4).

$$w = w(x,y,z).$$

De grootheid R wordt in dit geval:

$$R = \iiint \Big[\sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{zx}\Big(-\vartheta' y + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \tau_{zy}\Big(\vartheta' x + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) +$$

$$- \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{2G} \Big] dx\,dy\,dz - \vartheta(l) M_w +$$

$$\cancel{+ \iint G\Big(-\vartheta' y + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big|_{z=0} u_{z=0} + G\Big(\vartheta' x + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big|_{z=0} v_{z=0}} + -$$

$$+ \vartheta'(0) \iint (-y\,\tau_{zx} + x\,\tau_{zy})\, dy\, dx + \iint \sigma_z(x,y,0) . w(x,y,0)\, dx\, dy$$

2. Dubbelsymmetrische doorsnede ; $w = \vartheta'(z)\,\varphi(x,y)$

In dit geval geldt:

$$R = \iiint \left[\sigma_z \vartheta'' \varphi + \tau_{zx} \vartheta' \left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \tau_{zy} \vartheta' \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\sigma_z^2}{2E} + \right.$$

$$\left. - \frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{2G} \right] dx\,dy\,dz - \vartheta(l) M_w + \vartheta(0) \iint (-y\tau_{zx} + x\tau_{zy})\,dx\,dy +$$

$$+ \vartheta'(0) \iint \varphi\, \sigma_z(x,y,0)\,dx\,dy$$

Uit $\delta R = 0$ volgt:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta\sigma_z & : & \sigma_z = E\varphi\vartheta'' \\ \delta\tau_{zx} & : & \tau_{zx} = G\vartheta'\left(-y + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \\ \delta\tau_{zy} & : & \tau_{zy} = G\vartheta'\left(x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \end{array}\right\} \text{ wet van Hooke}$$

met randcondities $\quad \vartheta(0) = 0$
$\quad\quad \vartheta'(0) = 0$

Bij het gekozen vervormingsveld volgt met behulp van het principe van Reissner voor het verband tussen spanningen en vervormingen de exacte wet van Hooke.

$$\delta\vartheta \quad : \quad \iint \left[-\varphi \frac{d\sigma_z}{dz} + \tau_{zx}\left(-y + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \tau_{zy}\left(x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \right] dx\,dy = M_w$$

Invullen van de wet van Hooke levert een differentiaalvergelijking in ϑ die volkomen overeenkomt met (2.1) uit WE-65/4 (pag. 6) als voor $\varphi(x,y)$ de welvingsfunctie van de Saint-Venant wordt gekozen.

Hiermee is aangetoond dat de geconstateerde moeilijkheden door gebruik van het principe van Reissner niet worden opgelost.

Het gekozen vervormingsveld zal geen beschrijving leveren van de werkelijkheid.

3. Dubbelsymmetrische doorsnede: $w = \beta'\varphi(x,y)$

In dit geval geldt:

$$R = \iiint \Big[\sigma_z \beta'' \varphi + \tau_{zx}\Big(-\vartheta' y + \beta' \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big) + \tau_{zy}\Big(\vartheta' x + \beta' \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big) +$$

$$- \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{2G} \Big] dx\,dy\,dz \quad - \vartheta(l) M_w \quad +$$

$$+ \quad \vartheta(0) \iint (-y\tau_{zx} + x\tau_{zy})\,dx\,dy \quad + \beta'(0) \iint \varphi\, \sigma_z(x,y,0)\,dx\,dy$$

Variatie van de spanningen levert:

$$\sigma_z = E\beta''\varphi$$

$$\tau_{zx} = G\Big(-\vartheta' y + \beta' \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)$$

$$\tau_{zy} = G\Big(\vartheta' x + \beta' \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)$$

Dit is weer eenvoudig de wet van Hooke.
De resultaten uit dit variatieprincipe stemmen overeen met de resultaten uit het principe van minimum potentiële energie (zie WE-65/4 pag. 9 e.v.)
De conclusies die in dit rapport getrokken zijn, gelden dus ook hier.
De benaderingsoplossing blijkt zowel als in de daad gewerkt wordt met een dubbelsymmetrische dwarsdoorsnede.
Voor een willekeurige doorsnede is de resultante van de schuifspanningsverdeling in de dwarsdoorsnede niet alleen een wringend moment. Door een geschikte keuze van het torsiecentrum is te bereiken dat de buigende momenten nul zijn; er resulteert dan echter een dwarskracht.

4. Willekeurige dwarsdoorsnede; $\sigma_z = \sigma_0(z)\,\varphi(x,y)$

We kiezen $\varphi(x,y)$ de welvingsfunctie van de Saint-Venant voor rotatie om het punt $A(a,b)$. Dit punt (a,b) is zo gekozen dat:

$$\iint \sigma_z\, x\, dx\,dy = \sigma_0(z)\iint \varphi\, x\, dx\,dy = 0$$

$$\iint \sigma_z\, y\, dx\,dy = \sigma_0(z)\iint \varphi\, y\, dx\,dy = 0$$

Verder is $\varphi(x,y)$ nog zo bepaald, dat

$$\iint \sigma_z\, dx\,dy = \sigma_0(z)\iint \varphi\, dx\,dy = 0.$$

Kiezen we nu voor het vervormingsveld in de dwarsdoorsnede:

$$u = -\vartheta(y-b)$$
$$v = \vartheta(x-a)$$

dan geldt:

$$R = \iiint \left\{ \sigma_0(z)\,\varphi\,\frac{\partial w}{\partial z} + \left[-\vartheta'(y-b) + \frac{\partial w}{\partial x}\right]\tau_{xz} + \right.$$
$$\left. + \left[\vartheta'(x-a) + \frac{\partial w}{\partial y}\right]\tau_{yz} - \frac{\sigma_0^2\varphi^2}{2E} - \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} \right\} dx\,dy\,dz +$$
$$-\vartheta(l)\,M + \vartheta(0)\iint\left[(-y\overset{+b}{}\,\tau_{zx} + (x\overset{-a}{})\,\tau_{zy}\right] dx\,dy + \sigma_0(0)\iint \varphi\, w(x,y,0)\,dx\,dy$$

Gevarieerd kunnen worden: $\sigma_0(z)$, τ_{xz}, τ_{yz}, ϑ, w

$\delta\sigma_0(z)$: $$\iint\left[\varphi\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\varphi^2\sigma_0(z)}{E}\right]dx\,dy = 0 \qquad (4.1)$$

$\delta\tau_{xz}$: $$\tau_{xz} = G\left[-\vartheta'(y-b) + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \qquad (4.2)$$

$\delta\tau_{yz}$: $$\tau_{yz} = G\left[\vartheta'(x-a) + \frac{\partial w}{\partial y}\right] \qquad (4.3)$$

$\delta\vartheta$: $$\frac{\partial}{\partial z}\iint\left[-\tau_{xz}(y-b) + \tau_{yz}(x-a)\right]dx\,dy = 0 \qquad (4.4)$$

δw : $\qquad \varphi\, \sigma_0' + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \qquad (4.5)$

Als randcondities vinden we

$z = 0 \quad \iint \varphi\, w(x,y,0)\, dx\, dy = 0 \qquad (4.6)$

$\vartheta(0) = 0 \qquad (4.7)$

$z = l \quad M = \iint\left[-\tau_{xz}(y-b) + \tau_{yz}(x-a)\right] dx\, dy \qquad (4.8)$

$$\oiint \delta w\left(\varphi\, \sigma_0(z)\, n_z + \tau_{xz}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y\right) dS +$$

$$\sigma_0(0) \iint_{(z=0)} \delta w\, \varphi\, dx\, dy = 0$$

Deze laatste voorwaarde omgewerkt, levert:

voor het zijdelings oppervlak:

$\tau_{xz}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y = 0 \qquad (4.9)$

en

voor $z = l$ $\qquad \sigma_0(l) = 0 \qquad (4.10)$

Substitueren (4.2) en (4.3) in (4.5)

$\varphi\, \sigma_0' + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (4.11)$

Substitueren (4.2) en (4.3) in (4.9):

$$\left[-\vartheta'(y-b) + \frac{\partial w}{\partial x}\right] n_x + \left[\vartheta'(x-a) + \frac{\partial w}{\partial y}\right] n_y = 0$$

of $\quad \frac{\partial w}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial w}{\partial y}\, n_y = \vartheta'\left[(y-b)\, n_x - (x-a)\, n_y\right]$

Met behulp van: $\quad n_x = \frac{dy}{ds}$

$n_y = -\frac{dx}{ds}$

gaat deze uitdrukking over in:

$$\frac{dw}{dn} = \vartheta'\left[(y-b)\frac{dy}{ds} + (x-a)\frac{dx}{ds}\right] = \vartheta'\frac{d}{ds}\left[\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)-by-ax\right]$$

op de contourlijn

of $$\frac{dw}{dn} = \vartheta'\frac{d}{ds}\left(\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2}\right) \qquad (4.12)$$

We stellen nu in (4.11) en (4.12):

$$w = -\frac{\sigma_0'}{g}\psi + \vartheta'\chi \qquad (4.13)$$

Dan moet gelden:

$$\Delta\psi = \varphi \qquad \text{en} \qquad \Delta\chi = 0 \qquad (4.14)$$

en op de randen:

$$\frac{d\psi}{dn} = 0 \qquad\qquad \frac{d\chi}{dn} = +\frac{d}{ds}\left[\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2}\right]$$

We zien dat de functie χ aan dezelfde randvoorwaarden voldoet als de welvingsfunctie van de Saint-Venant, bij draaien om het punt (a,b).
Hieruit volgt:

$$\chi = \varphi + C \qquad C: \text{constante}$$

Substitueren we (4.13) in (4.1), dan volgt daaruit:

$$\iint\left\{\varphi\left[-\frac{\sigma_0''}{g}\psi + \vartheta''\chi\right] - \varphi^2\frac{\sigma_0}{E}\right\}dx\,dy = 0$$

$$-\frac{\sigma_0''}{g}\iint\varphi\psi\,dx\,dy + \vartheta''\iint\varphi\chi\,dx\,dy - \frac{\sigma_0}{E}\iint\varphi^2\,dx\,dy = 0 \qquad (4.15)$$

Hierin worden de oppervlakteintegralen bekend verondersteld.

De tweede differentiaalvergelijking in σ_0 en ϑ vinden we door (4.2) en (4.3) te substitueren in (4.4) en vervolgens voor w vgl. (4.13) te schrijven

$$\frac{\partial}{\partial z}\iint\left\{-(y-b)\left(-\vartheta'(y-b)+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+(x-a)\left(\vartheta'(x-a)+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\sigma_0'}{G}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\vartheta'\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\iint\left\{-(y-b)\left[-\vartheta'(y-b)-\frac{\sigma_0'}{G}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\vartheta'\frac{\partial\chi}{\partial x}\right]+\right.$$

$$\left.+(x-a)\left[\vartheta'(x-a)-\frac{\sigma_0'}{G}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\vartheta'\frac{\partial\chi}{\partial y}\right]\right\}dx\,dy=0$$

$$\vartheta''\iint\left\{(y-b)^2+(x-a)^2-(y-b)\frac{\partial\chi}{\partial x}+(x-a)\frac{\partial\chi}{\partial y}\right\}dx\,dy+$$

$$-\frac{\sigma_0''}{G}\iint\left\{-(y-b)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(x-a)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}dx\,dy=0$$

Naar z integreren levert:

$$\vartheta'\iint\left\{(x-a)^2+(y-b)^2+(x-a)\frac{\partial\chi}{\partial y}-(y-b)\frac{\partial\chi}{\partial x}\right\}dx\,dy+$$

$$-\frac{\sigma_0'}{G}\iint\left\{(x-a)\frac{\partial\psi}{\partial y}-(y-b)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}dx\,dy=\text{Constant.}$$

De randconditie (4.8) omgeschreven levert voor ~~[illegible]~~ deze constante $\frac{M_w}{G}$.

Dus

$$G\vartheta''\iint\left\{(x-a)^2+(y-b)^2+(x-a)\frac{\partial\chi}{\partial y}-(y-b)\frac{\partial\chi}{\partial x}\right\}dx\,dy+$$

$$-\sigma_0'\iint\left\{(x-a)\frac{\partial\psi}{\partial y}-(y-b)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}dx\,dy=M_w \qquad (4.16)$$

We willen de vergelijkingen (4.15) en (4.16) compacter schrijven.

Op de eerste plaats hebben we bewezen dat

$$\chi = \varphi + c$$

We voeren in:

$$J_\varphi = \iint \varphi^2 \, dx\, dy$$

$$J_d = \iint \left\{ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (x-a)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (y-b)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx\, dy$$

(torsiestijfheid volgens de Saint-Venant)

$$A = \iint \varphi \psi \, dx\, dy$$

Verder komt nog voor de integraal:

$$\iint \left\{ (x-a)\frac{\partial \psi}{\partial y} - (y-b)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} dx\, dy =$$

$$\oint \psi \left[(x-a) n_y - (y-b) n_x \right] ds =$$

$$-\oint \psi \frac{d}{ds} \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2} \, ds = - \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

met (4.14)

Verder geldt volgens Green:

$$\iint (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \, dx\, dy = \oint \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn} \right) ds$$

(Bewijs: $\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi = \operatorname{div} \underline{a}$ met $\underline{a} = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y}$)

In dit geval: $\Delta \varphi = 0$ $\qquad \Delta \psi = \varphi$

$$\frac{d\psi}{dn} = 0$$

Dus volgens Green:

$$-\iint \varphi^2\, dx\, dy = \oint \psi \frac{d\varphi}{dn}\, ds \quad = - \mathcal{J}_\varphi$$

Hiermee is bewezen:

$$\iint \left\{ (x-a)\frac{\partial \psi}{\partial y} - (y-b)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} dx\, dy = \mathcal{J}_\varphi$$

De differentiaalvergelijkingen (4.15) en (4.16) luiden nu.

$$\boxed{\begin{aligned} & -\frac{A}{g}\sigma_0'' + \mathcal{J}_\varphi^* \vartheta'' - \frac{\mathcal{J}_\varphi}{E}\sigma_0 = 0 \\ & g \mathcal{J}_d \vartheta' + \mathcal{J}_\varphi \sigma_0' = M_w \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(4.17) \\ &(4.18). \end{aligned}$$

Randcondities: $\vartheta(0) = 0$

$\sigma_0(\ell) = 0$

$$z = 0 \quad : \iint \varphi \; w(x, y, 0)\, dx\, dy = 0$$

$$= \iint \varphi \left[-\frac{\sigma_0'(0)}{g}\psi + \vartheta'(0)\chi \right] dx\, dy =$$

$$= -\frac{\sigma_0'(0)}{g}\iint \varphi\psi\, dx\, dy + \vartheta'(0)\iint \varphi\chi\, dx\, dy$$

$$0 = -\frac{A}{g}\sigma_0'(0) + \mathcal{J}_\varphi^* \vartheta'(0).$$

Hierin is $\mathcal{J}_\varphi^* = \iint \varphi\chi\, dx\, dy = \iint \varphi(\varphi + c)\, dx\, dy =$

$$\mathcal{J}_\varphi + c\iint \varphi\, dx\, dy = \mathcal{J}_\varphi.$$

Het * zullen we dus weg mogen laten.

Uit (4.17) en (4.18) elimineren we σ_0.
Uit (4.18) volgt

$$g \mathcal{J}_d \vartheta'' = \mathcal{J}_\varphi \sigma_0''$$

Uit (4.17) volgt dan:

$$\left[-\frac{A\, J_d}{J_\varphi} + J_\varphi \right] \vartheta'' = \frac{J_\varphi}{E}\, \sigma_0$$

$$\underline{\sigma_0 = E \left(-\frac{A\, J_d}{J_\varphi^2} + 1 \right) \vartheta''} \qquad (4.19)$$

Uit (4.18) volgt hiermee:

$$\underline{G\, J_d\, \vartheta' - E \left(J_\varphi - \frac{A\, J_d}{J_\varphi} \right) \vartheta''' = M_w} \qquad (4.20)$$

Met randcondities:

$$\vartheta(0) = 0$$
$$\vartheta''(l) = 0 \qquad (4.21)$$
$$\vartheta'(0) = \frac{-A}{-A\, J_d + J_\varphi^2} \cdot \frac{M_w}{G}.$$

De differentiaalvergelijking in ϑ is weer van hetzelfde karakter als bij voorgaande veronderstellingen.

<u>Discussie</u>

1. Voor $z=0$, waar de welving volledig verhinderd wordt is in deze theorie niet op iedere plaats de verplaatsing in z-richting nul. Hiervoor zou immers moeten gelden: $\sigma_0'(0) = 0$, $\vartheta'(0) = 0$. Deze eisen zijn in strijd met (4.21).

2. De uit deze theorie berekende normaalspanningen hebben geen resultante, vanwege de geschikte keuze van het punt A.

3. De schuifspanningen hebben als resultante
<u>géén</u> dwarskracht.
Immers:

$$\tau_{xz} = G\vartheta'\left(-(y-b) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \sigma_0'\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$D_x = \iint \tau_{xz}\,dx\,dy = -\sigma_0'\iint \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\,dy =$$

$$\left(= -\sigma_0' \oint \psi\, n_x\, ds\right)$$

Evenzo:

$$D_y = \left(-\sigma_0'\oint \psi\, n_y\, ds\right) = -\sigma_0'\iint\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx\,dy$$

Nu geldt:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - x\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - x\varphi$$

want $\Delta\psi = \varphi$.

Hiermee geldt:

$$D_x = +\sigma_0'\iint x\varphi\,dx\,dy - \sigma_0'\oint x\frac{d\psi}{dn}\,ds$$

Door de keuze van A is er voor gezorgd dat

$$\iint x\varphi\,dx\,dy = 0$$

en verder is de randvoorwaarde voor ψ

$$\frac{d\psi}{dn} = 0 \quad \text{op Contour.}$$

Dus

$$D_x = 0$$

Evenzo is te bewijzen dat

$$D_y = 0$$

4. Behalve de welvingsfunctie van de Saint-Venant: φ moet ook de functie ψ bepaald worden, die voldoet aan:

$$\Delta \psi = \varphi \qquad \text{en} \qquad \frac{d\psi}{dn} = 0 \quad \text{op de rand.}$$

In het algemeen zal dit zeer moeilijk zijn (bipotentiaalvgl.). Voor een dunwandige gesloten koker moet dit zijn uit te voeren.

5. Willekeurige dwarsdoorsnede; $\sigma_z = E\vartheta''\varphi$

De welvingsfunctie volgens de Saint-Venant φ is betrokken op het punt A, zodat de normaalspanningen als resultante geen buigend moment en geen normaalkracht hebben.

Nu geldt:

$$R = \iiint \Big\{ E\vartheta''\varphi \frac{\partial w}{\partial z} + \left[-\vartheta'(y-b) + \frac{\partial w}{\partial x}\right]\tau_{xz} + \left[\vartheta'(x-a) + \frac{\partial w}{\partial y}\right]\tau_{yz} +$$
$$- \frac{E}{2}(\vartheta'')^2\varphi^2 - \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} \Big\}\, dx\,dy\,dz - \vartheta(l)M +$$
$$+ \vartheta(0)\iint\{(-y+b)\,\tau_{zx} + (x-a)\,\tau_{zy}\}\,dx\,dy + E\vartheta''(0)\iint\varphi\, w(x,y,0)\,dx\,dy$$

Gevarieerd kunnen worden: τ_{xz}, τ_{yz}, ϑ en w.

$\delta\tau_{xz}$: $$\tau_{xz} = G\left[-\vartheta'(y-b) + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \qquad (5.1)$$

$\delta\tau_{yz}$: $$\tau_{yz} = G\left[\vartheta'(x-a) + \frac{\partial w}{\partial y}\right] \qquad (5.2)$$

$\delta\vartheta$: $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint E\varphi\frac{\partial w}{\partial z}\,dx\,dy - \frac{\partial}{\partial z}\iint\left[-\tau_{xz}(y-b) + \tau_{yz}(x-a)\right]dx\,dy\, +$$
$$- E\vartheta^{IV}\iint\varphi^2\,dx\,dy = 0 \qquad (5.3)$$

δw : $$E\varphi\vartheta''' + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} = 0 \qquad (5.4)$$

Met randcondities:

$$\vartheta(0) = 0 \qquad (5.5)$$

$z = l$: $$M = \iint\left[-\tau_{xz}(y-b) + \tau_{yz}(x-a)\right]dx\,dy - E\iint\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,dx\,dy +$$
$$+ E\iint\varphi^2\vartheta'''\,dx\,dy \qquad (5.6)$$

$z = 0$: $$\iint\varphi\, w(x,y,0)\,dx\,dy = 0 \qquad (5.7)$$

$z = 0$ $$\iint\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,dx\,dy - \vartheta'''\iint\varphi^2\,dx\,dy = 0 \qquad (5.8)$$

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ z=l \end{array}\right\} \qquad \iint \varphi \frac{\partial w}{\partial z}\, dx\, dy - \vartheta'' \iint \varphi^2\, dx\, dy = 0 \qquad (5.9)$$

$$z = l \qquad \vartheta'' = 0 \qquad (5.10)$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad \text{op contour} \qquad (5.11)$$

Substitueer (5.1) en (5.2) in (5.4)

$$E \varphi \vartheta''' + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (5.12)$$

~~(Substitueer (5.1) en (5.2) in (5.3) :~~

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint E \varphi \frac{\partial w}{\partial z}\, dx\, dy - \frac{\partial}{\partial z} \iint \left\{ G \vartheta' \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] + G \left[-\frac{\partial w}{\partial x}(y-b) + \frac{\partial w}{\partial y}(x-a) \right] \right\} dx\, dy$$

~~(5.13)~~

Uit (5.11) volgt:

$$\frac{dw}{dn} = \vartheta' \left[(y-b) n_x - (x-a) n_y \right] \qquad (5.14)$$

Voer in:

$$w = -\frac{E \vartheta'''}{G} \varphi + \vartheta' \chi \qquad (5.15)$$

Uit (5.12) volgt dan:

$$\left\| \begin{array}{ll} \Delta \psi = \varphi & \Delta \chi = 0 \\ \frac{d\psi}{dn} = 0. & \frac{d\chi}{dn} = (y-b) n_x - (x-a) n_y \end{array} \right. \qquad (5.16)$$

Hieruit volgt $\chi = \varphi$

Voor de spanningen geldt nu:

$$\tau_{xz} = G\vartheta'\left[-(y-b) + \frac{\partial \chi}{\partial x}\right] - E\vartheta'''\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\tau_{yz} = G\vartheta'\left[(x-a) + \frac{\partial \chi}{\partial y}\right] - E\vartheta'''\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (5.17)$$

Diff. 5.3 kan eenmaal naar z geïntegreerd worden met gebruikmaking van randcondities (5.6). We vinden zo:

$$-\iint E\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,dx\,dy + \iint\left[-\tau_{xz}(y-b) + \tau_{yz}(x-a)\right]dx\,dy +$$

$$+\iint E\vartheta'''\varphi^2\,dx\,dy = M \qquad (5.18)$$

Opm: In het algemeen is M dus niet zonder meer de resultante der schuifspanningen!

In (5.18) substitueren we (5.17) en (5.15). We voeren de volgende afkortingen in.

$$\iint \varphi^2\,dx\,dy = J_\varphi$$

$$\iint\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (x-a)\frac{\partial \chi}{\partial y} - (y-b)\frac{\partial \chi}{\partial x}\right]dx\,dy = J_d$$

$$\iint \varphi\chi\,dx\,dy = J_\varphi$$

$$\iint \varphi\psi\,dx\,dy = A$$

$$\iint\left[(x-a)\frac{\partial \psi}{\partial y} - (y-b)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]dx\,dy = J_\varphi$$

(zie pag. 11).

(5.16) gaat dan over in:

$$\frac{E^2}{G}A\,\vartheta^{V} - EJ_\varphi\vartheta''' + GJ_d\vartheta' - EJ_\varphi\vartheta''' + EJ_\psi\vartheta''' = M$$

Dus:

$$\frac{E^2}{G} A \vartheta^{V} - E \mathcal{J}_\varphi \vartheta''' + G J_d \vartheta' = \mathcal{M} \qquad (5.19)$$

<u>Randcondities:</u>

$$\vartheta(0) = 0$$
$$\vartheta''(l) = 0$$

$$z=0 \quad : \iint \varphi \, w(x,y,0)\,dx\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{E}{G} A \vartheta''' + \mathcal{J}_\varphi \vartheta' = 0$$

$$z=0 \quad : \iint \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,dx\,dy - \vartheta''' \iint \varphi^2\,dx\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{E}{G} A \vartheta^{V} = 0.$$

$$\left.\begin{matrix} z=0 \\ z=l \end{matrix}\right\} \iint \varphi \frac{\partial w}{\partial z}\,dx\,dy - \vartheta'' \iint \varphi^2\,dx\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{E}{G} A \vartheta^{IV} = 0.$$

We merken op dat voor bovenstaande 5e orde d.v. 6 randvoorwaarden voorhanden zijn. In het algemeen zal de oplossing dan dit systeem dus niet bestaan, tenzij afhankelijkheid in de randcondities is aan te tonen. We zullen hier niet verder op ingaan.

De resultante van de schuifspanningen – wat het wringend moment betreft – komt <u>niet</u> overeen met formule (5.19). Dit is wel het geval als $A=0$. Dan verdwijnt bovendien het feit dat er meer randvoorwaarden zijn dan door de differentiaalvergelijking geëist wordt.
De schuifspanningen hebben als resultante geen dwarskracht.

6 Willekeurige dwarsdoorsnede ; $w = w(x,y,z)$; $\sigma_z = \sigma_z(x,y,z)$

In dit geval geldt:

$$R = \iiint \left\{ \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \left[-\vartheta'(y-b) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \tau_{xz} + \left[+\vartheta'(x-a) + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \tau_{yz} + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2E} \sigma_z^2 - \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} \right\} dx\,dy\,dz \quad - \vartheta(l) M \quad +$$

$$+ \vartheta(0) \iint \left\{ -(y-b)\tau_{xz} + (x-a)\tau_{yz} \right\} dx\,dy + \iint \sigma_z(x,y,0)\, w(x,y,0)\, dx\,dy$$

Gevarieerd moeten worden: σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}, ϑ en w.

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z} \tag{6.1}$$

$$\tau_{xz} = G\left[-\vartheta'(y-b) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \tag{6.2}$$

$$\tau_{yz} = G\left[\vartheta'(x-a) + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \iint \left\{ -\tau_{xz}(y-b) + \tau_{yz}(x-a) \right\} dx\,dy = 0 \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{6.5}$$

Randcondities:

$$w(x,y,0) = 0 \tag{6.6}$$

$$\vartheta(0) = 0 \tag{6.7}$$

$$M = \iint \left\{ -\tau_{xz}(y-b) + \tau_{yz}(x-a) \right\} dx\,dy \quad \text{voor } z = l \tag{6.8}$$

$$\tau_{xz}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y = 0 \quad \text{op } C. \tag{6.9}$$

$$\sigma_z(x,y,l) = 0 \tag{6.10}$$

Substitueer (6.1) en (6.2) in (6.5):

$$E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Met (6.9): $\quad \dfrac{dw}{dn} = \vartheta'(y-b)n_x - \vartheta'(x-a)n_y$

Stel $w = f(z) \cdot g(x,y)$

$$E f'' g(x,y) + G f \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$f \frac{dg}{dn} = \vartheta'(y-b) n_x - \vartheta'(x-a) n_y \quad \text{op } C.$$

In principe is dit stelsel niet oplosbaar, omdat de randvoorwaarden voor $g(x,y)$ afhangt van de z-coordinaat. De differentiaalvgl. in f en g is wel oplosbaar omdat het gedeelte dat afhangt van z te scheiden is van het deel dat afhangt van x en y.

We zouden ook kunnen stellen

$$w = \vartheta' \chi + f(z) g(x,y)$$

Dan is aan de randvoorwaarden te voldoen door:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\chi}{dn} &= (y-b) n_x - (x-a) n_y \\ \frac{dg}{dn} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{op } C$$

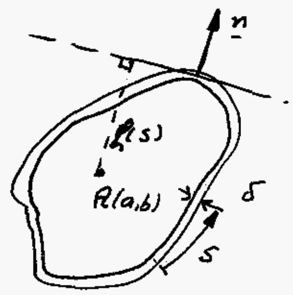
De differentiaalvergelijking luidt dan echter:

$$E \vartheta''' \chi + E f'' g + G \vartheta' \Delta \chi + G f \Delta g = 0 .$$

Hierin is geen scheiding van de variabelen te verkrijgen.

We zullen allereerst trachten het voorgaande toe te passen op een eenvoudig voorbeeld. Daarna is het misschien mogelijk aan te geven op welke manier een algemene oplossing verkregen kan worden.

7. Balk met tweevoudig samenhangende dunwandige dwarsdoorsnede.



Voor deze dwarsdoorsnede willen we de in hoofdstuk 4 behandelde theorie toepassen (benaderend).
Het punt A en het punt $s=0$ zijn zo gekozen dat

$$\oint \varphi(s)\,\delta\, ds = 0$$

$$\oint \varphi(s)\, x\, \delta\, ds = 0$$

$$\oint \varphi(s)\, y\, \delta\, ds = 0$$

Stellen we voor de eenvoud δ is constant, dan is een goede benadering voor de welvingsfunctie:

$$\varphi(s) = \frac{2A}{L}\, s - \int_0^s h(\xi)\, d\xi \qquad (7.0)$$

waarin A: het door de profiellijn omsloten oppervlak
$L = \oint ds$.

In WE-65/4 pag. 20 is deze uitdrukking afgeleid uitgaande van de algemene theorie. Zij volgt uiteraard ook eenvoudig uit de theorie van Bredt.

De in 4 gegeven theorie zullen we voor dit speciale geval opnieuw afleiden, omdat het mogelijk is ~~tot~~ in de algemene theorie de juiste verwaarlozingen toe te passen.

Als enige coördinaat in de dwarsdoorsnede treedt op de booglengte s.
We veronderstellen alle spanningen gelijkmatig verdeeld over δ.

<u>Hypothese:</u>

$$v = h(s).\vartheta(z) \qquad \text{(verpl. in s richting)}$$

$$\sigma_z = \sigma_0(z)\,\varphi(s)$$

$$\sigma_x = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zn} = 0.$$

n: normaal profiellijn.

$$R = \iint \left[\sigma_0 \varphi \frac{\partial w}{\partial z} + \left[\vartheta' h + \frac{\partial w}{\partial s} \right] \tau_{zs} - \frac{\sigma_0^2 \varphi^2}{2E} - \frac{\tau_{zs}^2}{2G} \right] \delta \, ds\, dz +$$

$$- \vartheta(l) M_w + \vartheta(0) \oint h\, \tau_{zs} \delta\, ds + \sigma_0(0) \oint \varphi\, w(s,0)\, \delta\, ds$$

Gevarieerd kunnen worden: $\sigma_0(z)$, τ_{zs}, ϑ en w.

$$\oint \left[\varphi \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\varphi^2 \sigma_0}{E} \right] \delta\, ds = 0 \qquad (7.1)$$

$$\tau_{zs} = G \left[\vartheta' h + \frac{\partial w}{\partial s} \right] \qquad (7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \oint h\, \tau_{zs}\, \delta\, ds = 0 \qquad (7.3)$$

$$\delta.\varphi.\sigma_0' + \frac{\partial}{\partial s} (\delta \tau_{zs}) = 0 \qquad (7.4)$$

Randcondities:

$$\oint \varphi\, w(s,0)\, \delta\, ds = 0 \qquad (7.5)$$

$$\vartheta(0) = 0 \qquad (7.6)$$

$$\oint h\, \tau_{zs}\, \delta\, ds = M_w \quad \text{voor } z = l \qquad (7.7)$$

$$\sigma_0(l) = 0 \qquad (7.8)$$

Substitueer (7.2) in (7.4) en veronderstel steeds δ = constant:

$$\varphi \sigma_0' + G \vartheta' \frac{dh}{ds} + G \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0$$

Stel $\quad w = -\frac{\sigma_0'}{G} \psi(s) + \vartheta' \chi(s)$

$$\varphi \sigma_0' + G \vartheta' \frac{dh}{ds} - \sigma_0' \frac{d^2 \psi}{ds^2} + G \vartheta' \frac{d^2 \chi}{ds^2} = 0$$

Hieraan is voldaan als:

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \varphi \qquad \text{en} \qquad \frac{d^2\chi}{ds^2} + \frac{dh}{ds} = 0.$$

Uit (7.0) volgt:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{dh}{ds} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Kies } \chi = \varphi.$$

Dus:

$$w = -\frac{\sigma_0'}{G} \psi(s) + \vartheta' \varphi(s) \qquad (7.9)$$

$$\text{met} \quad \frac{d^2\psi}{ds^2} = \varphi \qquad (7.10)$$

Als randcondities van $\psi(s)$ geldt:

$$\psi(L) = \psi(0)$$

Uit (7.10) volgt:

$$\frac{d\psi}{ds} = \int_{\eta=0}^{s} \varphi \, d\eta + C$$

Wanneer we deze uitdrukking met ds vermenigvuldigen en over de de hele contour integreren, vinden we:

$$\psi(s=L) - \psi(s=0) = \oint ds \int_{\eta=0}^{s} \varphi \, d\eta + CL = s \int_{\eta=0}^{s} \varphi \, d\eta \Big|_{s=0}^{L} - \oint s\varphi \, ds + CL$$

Omdat $w(0) = w(L)$ is $\psi(L) = \psi(0)$.
Verder is $\oint \varphi\, ds = 0$ vanwege de keuze van φ
Er volgt dus

$$c = \frac{\oint s\varphi\, ds}{L}$$

dus $$\frac{d\psi}{ds} = \int_{\eta=0}^{s} \varphi\, d\eta + \frac{\oint s\varphi\, ds}{L}$$

Uit (7.3) en (7.7) volgt:

$$\oint h\tau_{zs}\, \delta\, ds = M_w =$$

$$M_w = G\vartheta' \oint \left(h^2 + h\frac{d\varphi}{ds}\right)\delta\, ds - \sigma_0' \oint h \frac{d\psi}{ds}\, \delta\, ds$$

Voor $\oint h \frac{d\psi}{ds}\, \delta\, ds$ kunnen we schrijven:

$$\oint \frac{d\psi}{ds}\, \delta\, d\left(\int_{\eta=0}^{s} h\, d\eta\right) = \frac{d\psi}{ds}.\delta. \int_{\eta=0}^{s} h\, d\eta \Bigg|_{s=0}^{s=L} +$$

$$-\oint \left(\int_{\eta=0}^{s} h\, d\eta\right) . \frac{d^2\psi}{ds^2}\, \delta\, ds = (\text{wegens } 7.10) =$$

$$\left(\frac{d\psi}{ds}\right)_{s=L} \delta . 2A - \oint \varphi \left(\int_{\eta=0}^{s} h\, d\eta\right) . \delta\, ds =$$

$$\frac{2A \oint s\varphi\, \delta\, ds}{L} + \oint \varphi^2\, \delta\, ds - \frac{2A}{L} \oint s\varphi\, \delta\, ds = \oint \varphi^2\, \delta\, ds.$$

Voer in: $\oint \varphi^2\, \delta\, ds = \mathcal{J}_\varphi$; $\oint \left(h^2 + h\frac{d\varphi}{ds}\right)\delta\, ds = J_d$
dan geldt: (klassieke torsiestijfheid)

$$\underline{M_w = G J_d \vartheta' - \mathcal{J}_\varphi \sigma_0'} \qquad (7.11)$$

De tweede differentiaalvergelijking voor σ_0 en ϑ wordt gevonden met (7.1) en (7.9).

Hierbij stellen we nog $\oint \varphi \psi \delta ds = B$ (in hoofdstuk 4. A)

$$-\frac{B}{G} \sigma_0'' + J_\varphi \vartheta'' - \frac{J_\psi}{E} \sigma_0 = 0 \qquad (7.12)$$

De differentiaalvergelijkingen (7.11) en (7.12) stemmen geheel overeen met vgl. (4.17) en (4.18) (pag. 11). Alleen de karakteristieke grootheden van de dwarsdoorsnede zijn toegespitst op een dunne koker.
Ook de randcondities stemmen geheel overeen met die uit hoofdstuk 4.

De schuifspanningen zijn

$$\tau_{zs} = G \vartheta' \left(h + \frac{d\varphi}{ds} \right) - \sigma_0' \frac{d\psi}{ds} \qquad (7.13)$$

Als resulterend wringend moment van deze spanningen ontstaat vgl. (7.11).
De resulterende dwarskracht is nul.
Immers:

$$\oint \tau_{zs}\, dx = G \vartheta' \oint \frac{2A}{L}\, dx - \sigma_0' \oint \frac{d\psi}{ds} . dx$$

Nu geldt:

$$\oint \frac{d\psi}{ds}\, dx = x \frac{d\psi}{ds} \Big|_{s=0}^{L} - \oint x \frac{d^2\psi}{ds^2}\, ds =$$

$$= 0 - \oint x \varphi\, ds = 0.$$

en $\oint \frac{2A}{L}\, dx = 0.$

Dus $\oint \tau_{zs}\, dx = 0$; Evenzo $\oint \tau_{zs}\, dy = 0.$

De schuifspanningsverdeling wordt nu, als we gebruik maken van de uitdrukking voor $\frac{d\psi}{ds}$ en van (4.19) voor σ_0:

$$\tau_{zs} = G\,\frac{2A}{L}\,\vartheta' - E\left(-\frac{B J_d}{J_\varphi^2} + 1\right)\left[\int_0^s \varphi\, d\eta + \frac{\oint s\varphi\, ds}{L}\right]\vartheta'''$$

waarbij ϑ moet voldoen aan:

$$G J_d\,\vartheta' - E\left(J_\varphi - \frac{B J_d}{J_\varphi}\right)\vartheta''' = M_w$$

$$\vartheta(0) = 0$$
$$\vartheta''(l) = 0$$
$$\vartheta'(0) = \frac{-B}{-A J_d + J_\varphi^2}\cdot\frac{M_w}{G}$$

Deze formules kunnen zeer waarschijnlijk nog in een beter hanteerbare vorm gegoten worden. In de toekomst zal dit zeker gebeuren.

We willen ook nagaan hoe de in hoofdstuk 5 gegeven theorie voor dunwandige kokers er uitziet. Het is duidelijk dat ook nu voor de differentiaalvergelijking in ϑ te veel randvoorwaarden aanwezig zijn. Eis voor het sluitend maken der theorie is dat $B = \oint \varphi\psi\, ds = 0$. Het is wellicht aan te tonen dat in de d.v. de term met B te verwaarlozen is ten opzichte van de andere termen.

De schuifspanningsverdeling is:

$$\tau_{zs} = G\cdot\frac{2A}{L}\,\vartheta' - E\left[\int_0^s \varphi\, d\eta + \frac{\oint s\varphi\, ds}{L}\right]\vartheta'''$$

In dat geval krijgen we een resultaat dat veel gaat lijken op een resultaat dat op de volgende wijze kan worden afgeleid:

Stel $\sigma_z = E\vartheta''\varphi$
De extra schuifspanningen, die hierbij horen volgen uit het evenwicht $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau^*}{\partial s} = 0$.

Dus $$\tau^*(s) = -\int_{\eta=0}^{s} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\, d\eta + \tau^*(0) =$$

$$= -E\vartheta''' \int_{\eta=0}^{s} \varphi\, d\eta + \tau^*(0)$$

De totale schuifspanning is de som van deze schuifspanningen en die volgens de theorie van Bredt. Dus:

$$\tau_{zs} = G\frac{2A}{L}\vartheta' - E\vartheta'''\int_{\eta=0}^{s}\varphi\, d\eta + \tau^*(0)$$

Nu is $\tau^*(0)$ op iedere plaats s hetzelfde. Hij kan dus samengevoegd gedacht worden met de term $G\frac{2A}{L}\vartheta'$! Kies dus $\tau^*(0) = 0$

Deze schuifspanningen hebben geen resulterende dwarskracht. Immers:

$$\oint dx\left(\int_{\eta=0}^{s}\varphi\, d\eta\right) = x\int_{\eta=0}^{s}\varphi\, d\eta\,\Big|_{s=0}^{L} - \oint x\varphi\, ds = 0.$$

De eis dat deze schuifspanningen als resultante een moment M_w leveren, geeft de differentiaalvergelijking in ϑ.
Op deze manier is dan voldaan aan het axiale evenwicht op iedere plaats. De verplaatsing in z-richting $w(s,z)$ is echter voor $s=0$ en $s=L$ ongelijk, of de verplaatsing v is niet voor $s=0$ en $s=L$

hetzelfde.
Immers:

$$\tau_{zs} = G\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = G\frac{2A\vartheta'}{L} - E\vartheta''' \int_{\eta=0}^{s} \varphi\, d\eta$$

Integreren:

$$G \oint \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) ds = G.2A\vartheta' - E\vartheta''' \oint ds \left(\int_{\eta=0}^{s} \varphi\, d\eta\right) =$$

$$= G.2A\vartheta' + E\vartheta''' \oint \varphi s\, ds =$$

$$= G\left[w(L) - w(0)\right] + G \oint \frac{\partial v}{\partial z}\, ds.$$

Wanneer voor de verplaatsing langs de contourlijn gekozen wordt:

$$v = h\vartheta$$

dan zou moeten gelden:

$$G\left[w(L) - w(0)\right] + G\vartheta'.2A = G.2A\vartheta' + E\vartheta''' \oint \varphi s\, ds$$

Dus $w(L) - w(0) \neq 0$. De aansluiting is verbroken.
We kunnen ook stellen:

$$v = h\vartheta + \frac{E}{G}\varphi s \vartheta''$$

Dan geldt:

$$G\left[w(L) - w(0)\right] + G\vartheta'.2A + E\vartheta''' \oint \varphi s\, ds =$$

$$G.2A.\vartheta' + E\vartheta''' \oint \varphi s\, ds$$

Nu is dus wel voldaan aan

$$w(L) = w(0).$$

De aansluiting in axiale richting is hiermee gegarandeerd. In dit geval is echter $v(0) \neq v(L)$
In tangentiele richting is geen aansluiting.
Op beide plaats is wel het axiale evenwicht gegarandeerd, maar de aansluiting is verbroken.
Bij de door ons gegeven theorie m.b.v. het

principe van Reissner is globaal voldaan aan het axiale evenwicht, maar de aansluiting is gegarandeerd.
Op de eerste plaats kan in een speciaal geval numeriek nagegaan worden hoeveel verschil er bestaat tussen de spanningen berekend op de verschillende manieren.
Uiteindelijk zal het experiment uit moeten wijzen welke behandelingswijze de werkelijkheid het best benadert