Torsie van een rechthoekige koker met vervormbare dwarsdoorsnede

J.D. Janssen

WE-65/42

Torsie van een Rechthoekige Koker met vervormbare dwarsdoorsnede ; Computerprogramma 627

1. Samenvatting

De Vlasov-theorie wordt weergegeven op een afwijkende manier. De hier beschreven gedachtengang wijkt eveneens essentieel af van de door v.d. Ven in zijn afstudeerwerk gegeven beschrijving.

We komen tot dezelfde eindresultaten als v.d. Ven en Vlasov.

Aan de hand van de (verder uitgewerkte) formules volgens Vlasov, is een Fortranprogramma geschreven ter berekening van de vervormings- en spanningsgrootheden van een aan een uiteinde star ingeklemde rechthoekige koker. Deze koker wordt aan het andere uiteinde belast door een wringend moment en een

evenwichtssysteem van normaalspanningen en schuifspanningen.
In dit rapport wordt aangegeven hoe het programma gehanteerd wordt.

2. De theorie

Bij de torsie van kokers is de invloed van de vormverandering van de dwarsdoorsnede vaak zeer groot. De torsietheorie, die gebaseerd is op het onveranderlijk zijn van de dwarsdoorsnede levert resultaten, die de werkelijkheid slecht beschrijven (zie b.v. afstudeerwerk A.A.F. v.d. Ven).
Door Vlasov is een theorie ontwikkeld, die de vormverandering der dwarsdoorsnede in rekening brengt voor balken opgebouwd uit platen.
De verplaatsingen in de richting van de profiellijn wordt geschreven als (alleen wringing beschouwd):

$$v(s) = \vartheta(z)\, h(s) + \chi(z)\, \psi(s) \qquad (2.1)$$

Hierin is $h(s)$ de afstand van het dwarskrachtenmiddelpunt tot de raaklijn aan de profiellijn in het punt s.
$\psi(s)$ is een gekozen functie van s, die zo is dat de samenhang gehandhaafd blijft. Verder bevat $\psi(s)$ geen delen die overeenstemmen met de

beweging als star geheel van de dwarsdoorsnede.

Beperken we ons tot een rechthoekige koker dan kan voor $\psi(s)$ gekozen worden:

$$\psi(s) = x'(s)y(s) + x(s)\, y'(s) \qquad (2.2)$$

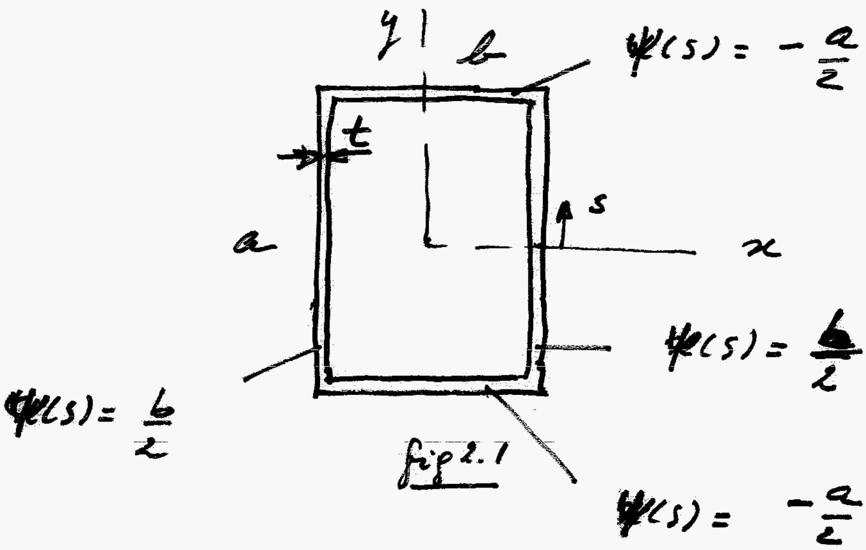


fig 2.1

Voor de verplaatsing in axiale richting schrijven we:

$$w = \beta'(z)\, \varphi(s)$$

Hierin is $\varphi(s)$ de welvingsfunctie uit de Bredt-theorie.

Behalve de axiale normaalspanningen en de schuifspanningen brengen we in de uitdrukking voor de vormveranderingsenergie ook nog in rekening de invloed van buigende momenten in de langsvlakken (M_s)

Deze momenten zijn het gevolg van de verplaatsingen $v = \varkappa(z) . \psi(s)$
We onderzoeken hoe de vormveranderings-energie hiervan berekend kan worden.
Zowel door Vlasov als door v.d. Veen zijn hieraan beschouwingen gewijd, die ons in het geheel niet duidelijk zijn. We zullen trachten een werkwijze aan te duiden die aannemelijk is.
T.g.v. $v = \varkappa(z)\,\psi(s)$ krijgt de dwarsdoorsnede de vorm die in fig 2.2. is weergegeven.

fig 2.2

We beschouwen nu een staafwerk in de vorm van de dwarsdoorsnede met scharnieren in de hoekpunten. De afmetingen van de dwarsdoorsnede van de staven zijn $t \times 1$.
Deze staafconstructie kan zonder meer in een vorm gebracht worden, zodat de hoekpunten samenvallen met de hoekpunten in fig 2.2 (zie fig. 2.3)

De vorm gaat lijken op die uit fig 2.2 als bij de scharnieren momenten M worden aangebracht zoals in fig 2.3 is aangegeven.

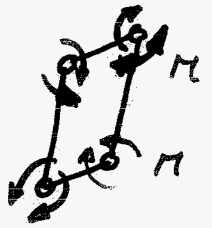


fig 2.3

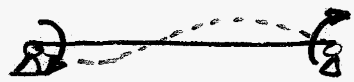
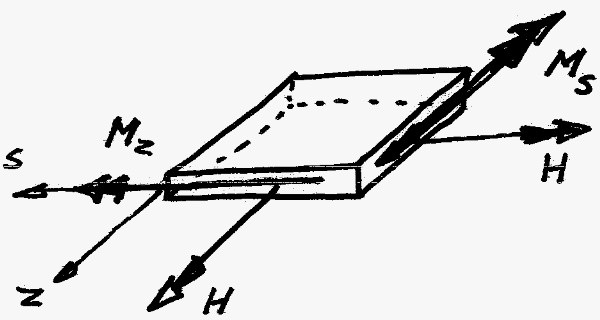


fig 2.4

De staven worden krom, zoals fig 2.4 toont. Het moment in een balk verandert lineair met s.
Dit is voor de werkelijke balk een acceptabele omstandigheid. Immers voor iedere plaat waaruit de koker is opgebouwd, geldt wat de buiging betreft:

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} - 2\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial s} = 0 \quad \text{(geen uitw. belasting)}$$



We zijn er van uit gegaan dat de normaalspanningen en schuifspanningen in de dwarsdoorsnede gelijkmatig verdeeld zijn over de wanddikte. Dit betekent dat verondersteld is

$M_z = H = 0$.

Hieruit volgt dus: $\frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} = 0 \rightarrow M_s$ is een lineaire functie van s.

Wanneer het staafsysteem uit fig 2.3 belast wordt door momenten M bij de knooppunten is M_s eveneens een lineaire functie van s. De momenten M moeten nu zo bepaald worden dat de staven loodrecht op elkaar staan.

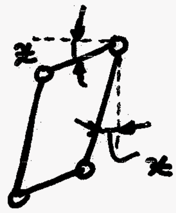
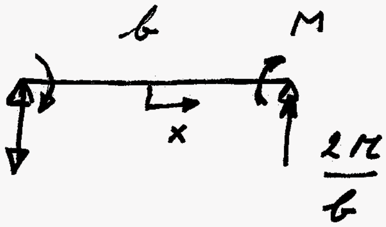


fig. 2.5

De momenten moeten er voor zorgen dat bij de knooppunten de staven een hoek $2\chi(z)$ ten opzichte van elkaar verdraaien.

Met het principe van Castigliano kunnen we M bepalen.

We beschouwen een staaf.



$$M(x) = \frac{2M}{b}\,x$$

$$A = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{4M^2 x^2 dx}{b^2\, 2EJ} = \frac{2}{12}\,\frac{M^2 b}{EJ} \qquad J = \frac{1}{12}\,t^3 \cdot 1$$

De in het geheel in het staafwerk opgeloopte vormveranderingsenergie bedraagt:

$$A = \frac{1}{3}\,\frac{M^2}{EJ}(a+b)$$

Castigliano:

$$\delta\,\varkappa(z) = \frac{2}{3}\,\frac{M}{EJ}(a+b)$$

$$M = \frac{12\,EJ}{a+b}\,\varkappa(z) = \frac{Et^3}{a+b}\,\varkappa(z) \qquad (2.3)$$

De opgeloopte vormveranderingsenergie is dus:

$$A = \frac{4Et^3}{a+b}\,\varkappa^2$$

De potentiele energie van een balk die bij $z = l$ staat is ingeklemd luidt:

$$V = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{l} \oint \left[E\varphi^2 \beta''^2 + G\left(\beta' \frac{d\varphi}{ds} + \vartheta' h + x' \psi \right)^2 \right] dF\,dz$$

$$+ \frac{4Et^3}{a+b} \int_0^l x^2\,dz - \int_P \sigma_z(l)\, w\, dF$$

$$- \int_P \tau(l)\, v\, dF$$

Definities

$$J_\omega = \int_F \varphi^2\, dF \qquad (2.4)$$

$$J_a = \int_P \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 dF \qquad (2.5)$$

$$J_p = \int_F h^2\, dF \qquad (2.6)$$

$$-J_a \cancel{J_d = J_p} = \int h \frac{d\varphi}{ds}\, dF \qquad (2.7)$$

$$\eta^2 = 1 - \frac{J_d}{J_p} \qquad (2.8)$$

$$J_d = -J_a + J_p$$

Zie WE-65/38 pag 18 e.v.

Bovendien komen nog de volgende oppervlakte-integralen voor.

$$\int_F \psi \frac{d\varphi}{ds}\, dF \quad , \quad \int_F \psi\, \ell\, dF \quad , \int_F \psi^2 dF$$

We merken nog eens op dat voor ψ geldt:

$$\psi(s) = \cancel{xy'}\; y\frac{dx}{ds} + x\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}(xy)$$

Voor een rechthoekige koker geldt voor

$$\varphi(s) = \frac{a-b}{a+b}\,\frac{b}{2}\, s \qquad \text{als} \quad -\frac{a}{2} \le s \le \frac{a}{2}$$

$$\varphi(s) = -\frac{a-b}{a+b}\,\frac{a}{2}\left(s - \frac{a+b}{2}\right) \qquad \text{als} \quad \frac{a}{2} \le s \le \frac{a}{2} + b$$

enz.

We merken op:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{ds} = \frac{a-b}{a+b}\,\psi(s)} \qquad (2.9)$$

Geldt deze relatie ook voor een <u>niet</u> rechthoekige koker?

Met behulp van (2.9) kan nu geschreven worden:

$$\int_F \psi \frac{d\varphi}{ds} dF = \frac{a+b}{a-b} J_a \qquad (2.10)$$

$$\int_F \psi h \, dF = - \frac{a+b}{a-b} J_a \qquad (2.11)$$

$$\int_F \psi^2 dF = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 J_a \qquad (2.12)$$

Variëren van de potentiële energie levert:

$$0 = \int_{z=0}^{l} \Big[E J_\omega \beta'' \delta\beta'' + G J_a (\beta' - \vartheta') \delta\beta' + G J_a \frac{a+b}{a-b} x' \delta\beta'$$

$$+ G J_a \beta' \delta\vartheta' + G J_p \vartheta' \delta\vartheta' - \frac{a+b}{a-b} G J_a x' \delta\vartheta' +$$

$$+ \frac{a+b}{a-b} G J_a \beta' \delta x' - \frac{a+b}{a-b} G J_a \vartheta' \delta x' + \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 G J_a x' \delta x'$$

$$+ \frac{8Et^3}{a+b} x \, \delta x - M_w \delta\vartheta' \Big] dz +$$

$$- B(l) \, \delta\beta'(l) - \Phi(l) \, \delta x(l)$$

Hierin geldt:

$$B = \int \sigma \psi \, dF$$

$$\Phi = \int \tau \psi \, dF$$

$$M_w = \int \tau h \, dF$$

Hieruit volgen onderstaande d.v.:

$$-EI_w\beta''' + GI_a(\beta' - \vartheta') + GI_a\frac{a+b}{a-b}x' = 0 \qquad (2.13)$$

$$-GI_a\beta' + GI_p\vartheta' - \frac{a+b}{a-b}GI_a x' - M_w = 0 \qquad (2.14)$$

$$-\frac{a+b}{a-b}GI_a\beta'' + \frac{a+b}{a-b}GI_a\vartheta'' + \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 GI_a x'' +$$

$$+\frac{8Et^3}{a+b}x = 0 \qquad (2.15)$$

De randcondities luiden:

$\underline{z=0}$ $\qquad \vartheta = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad \beta' = 0 \qquad (2.16)$

$\underline{z=l}$ $\qquad B(l) = EI_w\beta''(l) \qquad (2.17)$

$$\frac{a+b}{a-b}GI_a\left[\beta' - \vartheta' + \frac{a+b}{a-b}x'\right]_{z=l} = Q(l) \qquad (2.18)$$

(2.13) + (2.14) levert:

$$-EI_w\beta''' + G(I_p - I_a)\vartheta' - M_w = 0$$

of

$$\boxed{\vartheta' = \frac{1}{GI_d}\left(M_w + EI_w\beta'''\right)} \qquad (2.19)$$

Uit (2.14) en (2.19) volgt:

$$-G J_a \beta' + G J_p \cdot \frac{1}{G J_d}\left(E J_w \beta''' + M_w\right) - \frac{a+b}{a-b} G J_a x' =$$

$$M_w$$

$$-G J_a \beta' + E J_w \frac{J_p}{J_d} \beta''' + \left(\frac{J_p}{J_d} - 1\right) M_w =$$

$$\frac{a+b}{a-b} G J_a x'$$

$$x' = \frac{a-b}{a+b}\left[-\beta' + \frac{E J_w}{G J_a} \frac{J_p}{J_d} \beta''' + \left(\frac{J_p}{J_d} - 1\right)\frac{M_w}{G J_a}\right] \quad (2.20)$$

Differentieren van (2.15) en substitutie van (2.19) en (2.20) levert:

$$\cancel{-\beta'''} + \frac{E J_w}{G J_d} \beta^{IV} \cancel{+\beta'''} - \frac{E J_w}{G J_a} \frac{J_p}{J_d} \beta^{V} +$$

$$\frac{8 E t^3 (a-b)^2}{G J_a (a+b)^3}\left[-\beta' + \frac{E J_w}{G J_a} \frac{J_p}{J_d} \beta''' + \left(\frac{J_p}{J_d} - 1\right)\frac{M_w}{G J_a}\right] = 0$$

$$\frac{E J_w}{G J_d}\left(1 - \frac{J_p}{J_a}\right)\beta^{V} + F\left[\frac{E J_w}{G J_d} \frac{J_p}{J_a} \beta''' - \beta' + \frac{J_p - J_d}{J_d} \frac{M}{G J_a}\right]$$

$$= 0$$

met $$F = \frac{8Et^3(a-b)^2}{gJ_a(a+b)^3}$$

$$\beta^{IV} + F\frac{gJ_d}{EJ_w}\frac{J_a}{J_a - J_p}\left[\frac{EJ_w}{gJ_d}\frac{J_p}{J_p - J_d}\beta''' - \beta' + \right.$$

$$\left. + \frac{J_p - J_d}{J_d}\frac{M_w}{gJ_a}\right] = 0$$

Stel

$$2p^2 = F\frac{J_p}{J_d^*}$$

$$s^4 = F\frac{gJ_a^*}{EJ_w}$$

$$m = \frac{F\,J_a^*}{EJ_w \cdot J_d^*}$$

d.w. luidt:

$$\boxed{\beta^{IV} - 2p^2\beta''' + s^4\beta' = mM_w} \qquad (2.20)$$

In WE-65/38 pag 18 is voor een recht-hoekige koker afgeleid:

$$J_p = (a+b)\frac{abt}{2}$$

$$J_a = \frac{(a-b)^2\,abt}{2(a+b)}$$

$$J_d = \frac{4a^2b^2t}{2(a+b)}$$

$$J_w = \frac{1}{24}\,\frac{a^2b^2t\,(a-b)^2}{a+b}$$

Er geldt dus: $$F = \frac{8Et^3(a-b)}{g(a+b)^2(a-b)^2abt}\,\frac{2(a+b)}{} = \frac{16E}{g}\,\frac{t^2}{ab(\cancel{\ldots})(a+b)}\,2$$

$$2p^2 = \frac{16Et^2(\cancel{a-b})}{g\,ab(a+b)(a-b)^2}\cdot\frac{(a+b)\,abt\;\;2(a+b)}{4\,a^2b^2t} =$$

$$= \frac{4E}{g}\,\frac{t^2}{a^2b^2}\cdot\frac{\cancel{a+b}}{\cancel{a-b}}$$

$$S^4 = \frac{16Et^2}{g\,ab(a-b)(a+b)}\cdot\frac{g}{E}\,\frac{(a-b)^2abt}{2(a+b)}\cdot\frac{24(a+b)}{a^2b^2t\,(a-b)^2} =$$

$$= \frac{192\;t^2}{a^2b^2\;(a+b)^2}\cdot\frac{\cancel{a+b}}{\cancel{a-b}}$$

$$m = \frac{s^4}{g\, I_d} = \frac{192\, t^2}{g\, a^2 b^2 (a+b)^2}\; \frac{a+b}{2\, a^2 b^2 t} = \frac{96\, t}{g\, a^4 b^4 (a+b)}$$

Resumerend

d.v. $$\beta^{V} - 2p^2 \beta''' + s^4 \beta' = m\, M_w \qquad (2.21)$$

$$2p^2 = \frac{4E}{g}\;\frac{t^2}{a^2 b^2} \qquad (2.22)$$

$$s^4 = \frac{192\; t^2}{a^2 b^2 (a+b)^2} \qquad (2.23)$$

$$m = \frac{96\; t}{g\, a^4 b^4 (a+b)} \qquad (2.24)$$

Deze resultaten stemmen overeen met de door van de Ven berekende vergelijkingen, uitgezonderd de uitdrukking voor m!

Formule (2.20) kan vervangen worden door een eenvoudiger uitdrukking uitgaande van (2.21), (2.15) en (2.19). Hieruit volgt dat x evenredig is met β^{IV}.

D.v.(2.21) kan opgelost worden. We verwijzen hiervoor naar het boek van Vlasov pag 236 e.v.
We hebben deze berekeningen niet nagecyferd.
We hebben hier alleen de gevolgde werkwijze om tot een oplossing te komen wanneer de dwarsdoorsnede van vorm kan veranderen met eigen woorden willen weergeven, omdat de beschouwing van Vlasov en van de Veen ons niet bevredigden.

We zullen in het vervolg verwijzen naar de vergelijkingen van Vlasov en opnemen met de vergelijkingen uit tabel 29 (Vlasov, pag 240).

3. Karakteristieke grootheden voor kokers

In (2.22) en (2.23) is afgeleid:

$$2p^2 = \frac{4E}{g} \frac{t^2}{a^2b^2} = 8(1+\nu)\frac{t^2}{a^2b^2}$$

$$s^2 = \frac{8\sqrt{3}\, t}{ab(a+b)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2+p^2}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{s^2-p^2}{2}}$$

$$\gamma_1 = \frac{a+b}{2g t a^2b^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{b-a}{2g t a^2b^2}$$

$$d = \frac{1}{24} E t a^2b^2(a+b)$$

$$\phi_1 = \cosh\alpha z \sin\beta z$$

$$\phi_2 = \cosh\alpha z \cos\beta z$$

$$\phi_3 = \sinh\alpha z \cos\beta z$$

$$\phi_4 = \sinh\alpha z \sin\beta z$$

Door Vlasov zijn nog enige afwijkende definities gebruikt.

$$B = -\int_F \sigma\, x y\, dF \qquad \text{(axiaal bimoment)}$$

$$M_w = \int_F \tau\, h\, dF \qquad \text{(wringend moment)}$$

$$Q = \int_F \tau \left(\frac{dx}{ds} y + x \frac{dy}{ds} \right) dF \qquad \text{(bimoment in dwarsdoorsnede)}$$

$$u = U(z)\, x.y.$$

$$v = \vartheta(z)\, h + \varkappa(z) \left(\frac{dx}{ds} y + x \frac{dy}{ds} \right)$$

$$\sigma_z = E\, U'(z)\, x.y. = -\frac{E\, B(z)}{d}\, x y$$

$$\tau = G \left[U(z) \left(\frac{dx}{ds} y + x \frac{dy}{ds} \right) + \vartheta' h + \varkappa'(z) \left(\frac{dx}{ds} y + x \frac{dy}{ds} \right) \right] =$$

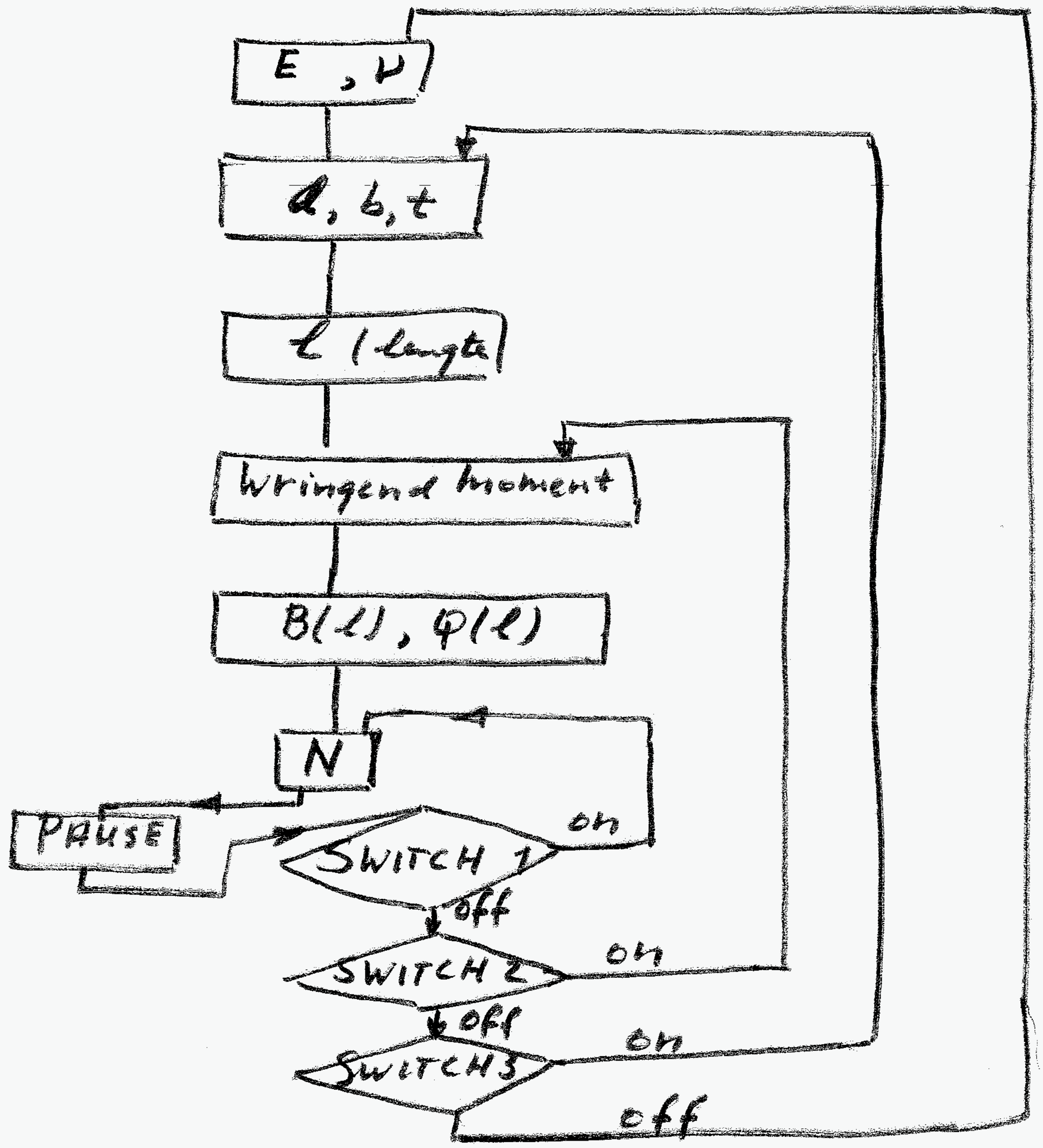
$$G \left[(-k_2 M + k_1 Q) \left(\frac{dx}{ds} . y + x \frac{dy}{ds} \right) + (k_1 M - k_2 Q)\, h \right]$$

4. Programma Fortran 627

Het Fortran programma is bijgevoegd. We zullen het hier niet verder beschrijven. Hij die deze taal verstaat zal de formules van Vlasov uit tabel 29 (pag 241) ontdekken.

Input gegevens

SWITCH Standen



Opm

N bepaalt van hoeveel plaatsen z de verschillende grootheden worden berekend.

De doorsneden worden gekarakteriseerd door :

$$0 \qquad \frac{1}{N-1} \qquad \frac{2}{N-1} \quad \cdots\cdots \quad \frac{N-1}{N-1} = 1$$

$\downarrow$ star ingeklemd

$\downarrow$ belasting gegeven: M_W, $B(\ell)$; $Q(\ell)$

Opm:

De inputgegevens moeten in bij elkaar passende ~~ge~~ eenheden gegeven worden.

De in te lezen waarde voor E is : elasticiteitsmodulus $\times 10^{-6}$.

Output gegevens

$B(0)$, $Q(0)$

$\chi(z)$, $U(z)$, $\vartheta(z)$, $B(z)$, $Q(z)$

voor N waarden van z (gelijke intervallen

Opm: Outputgegevens in bij de inputgegevens horende eenheden.

9 december 1965