# Constructies voor het nauwkeurig bewegen en positioneren. Deel 7. Beheersen van vrijheidsgraden. Deel 1.

Beheersen van vrijheidsgraden

# Constructies voor het nauwkeurig bewegen en positioneren (7)

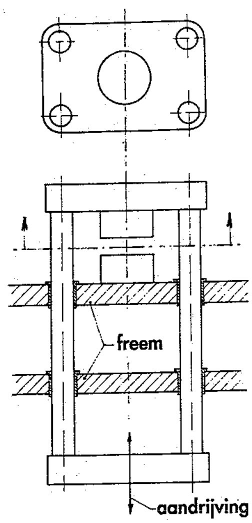
**M.P. Koster, P.C.J.N. Rosielle en E.A.G. Reker**

## Beheersen van vrijheidsgraden

De positie van een star lichaam wordt volkomen vastgelegd door het voorschrijven van 3 translatie- en 3 rotatiecoördinaten. Deze onafhankelijke coördinaten noemt men de *graden van vrijheid*. Een lichaam is *statisch bepaald* als elke graad van vrijheid juist één keer is voorgeschreven. Wordt een coördinaat op meer dan één manier voorgeschreven dan is er sprake van een statisch onbepaalde constructie (statische vergelijkingen voldoen dan n.l. niet meer om de oplegkrachten te bepalen).

### Overbepaaldheid

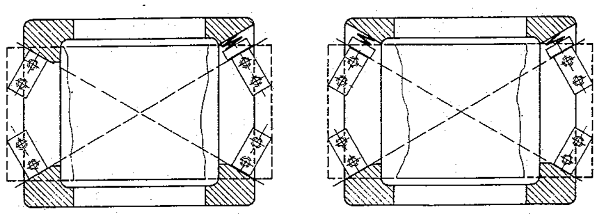
Naarmate men meer gewend raakt aan "statisch bepaald construeren" krijgt men meer bewondering voor de kundige wijze waarop men in machinefabrieken en werkplaatsen erin slaagt om door allerlei nauwkeurige bewerkingen standaardconstructies af te leveren die functioneren, hoewel ze qua ontwerp overbepaald zijn.
Zo is de gebruikelijke vier kolommenpers, zie figuur 65, met zijn acht geleidingsvoeringen die elk vier vrijheidsgraden vastleggen 32 – 5 = 27 voudig overbepaald.
De axiale beweging, verzorgd door hydroplunjer of excentermechanisme, voegt daar in de meeste gevallen nog enige overbepaaldheid aan toe.
Alleen door de boringen in onder- en bovenjuk en in het freem heel precies evenwijdig en in een gelijk patroon te kotteren en in bedrijf de temperatuurverschillen en de vervorming door belasting binnen de perken te houden, kan men hopen dat het ding niet vastloopt.
In feite zijn de vier kolommen nodig om de perskracht van het onderjuk naar het bovenjuk over te brengen; ze behoeven niet alle vier bij de rechtgeleiding ingeschakeld te worden.




Figuur 65.

### Thermisch centrum

Figuur 66 toont twee doorsneden ter hoogte van respectievelijk de onderste en bovenste freemplaat van een pers. Op deze beide niveau's ligt op vier plaatsen een aanraakpunt. Van de in totaal acht punten zijn er vijf vast en drie verend uitgevoerd, zodat een statisch bepaalde geleiding ontstaat.
Doordat de vlakken waarop de aanraakpunten rusten naar het centrum wijzen (de pool) treedt bij homogene temperatuurverandering geen verschuiving van het middelpunt op. Zo'n punt heet thermisch centrum.



Figuur 66.

### Contactspanning en contactstijfheid bij bolopIegging

Voor het vastleggen van een translatie wordt de oplegging van een bol op een plat vlak veel gebruikt. Bij gegeven toelaatbare Hertze contactspanning kan een oplegvlak met een tienmaal grotere straal een honderd maal zo grote belasting opnemen.
Voor een stalen bol straal r [mm] op een stalen vlak geldt:

$$\sigma_{Hz\,max} = 1360(F/r^2)^{1/3}\ [\mathrm{N/mm^2}] \qquad (1)$$

met oplegkracht $F$ [N].

Als voor geharde stalen kogels op een gehard stalen vlak een $\sigma_{Hz}$ van 3000 $\mathrm{N/mm^2}$ toelaatbaar is (voorzichtig neerzetten want bij een valhoogte van slechts ca. 2 cm is deze $\sigma_{Hz}$ al bereikt!) dan geldt:

$$F_{max}/r^2 = 10\ [\mathrm{N/mm^2}].$$

Geeft men steeds de maximale belasting $F_{max}$ dan ontstaat voor elke kogelafmeting (uiteraard) een gelijkvormig deformatiebeeld.
Bij $\sigma_{Hz} = 3000\ \mathrm{N/mm^2}$ is de straal van het contactvlak $a = 0{,}04\ r$ en de "invering" $\delta$, dat is de toenadering van het kogelmiddelpunt tot het oorspronkelijke ongedeformeerde vlak:
$\delta = 1{,}6.10^{-3}\ r$.
De invering wordt kleiner als men bij een gegeven, relatief lage belasting een grotere bolstraal kiest, want

$$\delta = 3{,}5.10^{-4}\,(F^2/r)^{1/3} \qquad (2)$$

voor stalen bol op stalen vlak.
Met $F = 10$ N en r = 1000 mm is $\delta = 0{,}16$ µm.
Een dergelijke oplegging kan reproduceerbaar zijn met een plaatsnauwkeurigheid in de orde van één tiende micrometer wanneer de oppervlaktegesteldheid dat toelaat. Grote radii met lage vlaktedruk hebben daarom alleen zin als de beide contactoppervlakken voldoende "glad" zijn (ruwheidshoogte zeker kleiner dan de indrukking). Eventueel kan men dat bereiken door de oplegging éénmaal (veel) hoger te belasten.

Het verband tussen belasting en invering is niet lineair. Men kan niet spreken van "de stijfheid" van de oplegging maar hoogstens van een "lokale stijfheid" $dF/d\delta$.

Uit $\delta = 3{,}5.10^{-4}.r^{-1/3}.F^{-2/3}$ volgt voor stalen bol op stalen vlak:

$$dF / d\delta = 4300\ r^{1/3}.F^{1/3}\ \mathrm{N/mm}. \qquad (3)$$

Bij $r$ = 1000 mm en $F$ = 10 N was $\delta$ = 0,16 µm en is $dF/d\delta$ = 94.000 N/mm.
Bij $r$ = 1000 mm en $F$ = 10000 N is $\delta$ = 16 en $dF/d\delta$ = 940.000 N/mm, dus 10 maal zo groot.
Opgemerkt wordt dat de "lokale stijfheid" steeds 1,5 maal de "gemiddelde stijfheid" bedraagt.
In gereedschapwerktuigen en dergelijke

## 101

# Beheersen van vrijheidsgraden

worden kogellagers "voorgespannen", niet alleen om de speling te elimineren maar ook om "de stijfheid" op te voeren!

Een kogel in een conisch gat kan uiteraard niet meer rollen, maar heeft wel lijnaanraking met de daaruit voortvloeiende hoge belastbaarheid en stijfheid. Via een tussengevoegde kogel kunnen twee lichamen met elk een conisch "centergat" dus behoorlijk stijf de drie coördinaten x, y, z van het bolmiddelpunt op elkaar overdragen.
Men realisere zich dat – zeker bij het lijncontact – een groot deel van de "toenadering" voor rekening komt van de "kuil in het vlak".

Soms zit men met het probleem dat men op een gegeven beschikbaar oppervlak een belasting af moet steunen met kogels of rollen. Uit de schaalwetten volgt dat het voor de belastbaarheid (de Hertze spanning) niets uitmaakt of men een grote rol neemt met een langsdoorsnede gelijk aan dat oppervlak, of $s^2$ rollen met een s maal kleinere straal én lengte.
De invering neemt echter met de schaalfactor s af dus de oplegging met kleine rollen is s maal zo stijf! Dit zou men gevoelsmatig wellicht niet verwachten.
Voorwaarde is wel dat de diametertolerantie van de rollen, de vlakheid van de oplegvlakken en de ruwheid ook met de factor s verbeteren, anders wordt de belasting niet gelijkmatig over de rollen verdeeld.
Naaldlagers hebben blijkbaar bestaansrecht naast rollagers, qua stijfheid zijn ze zelfs voordeliger, doch ze werden pas mogelijk toen de bewerkingsnauwkeurigheid daarvoor voldoende ver ontwikkeld was.
Voor kogels loopt het verhaal volledig analoog want één kogel draagt bij dezelfde $\sigma_{Hz}$ evenveel als $s^2$ kogels met s maal kleinere straal en s maal kleinere invering. Wel geldt ruwweg: rollen zijn 50 maal zo hoog belastbaar en dan nog 10 keer zo stijf als kogels van vergelijkbare afmetingen.

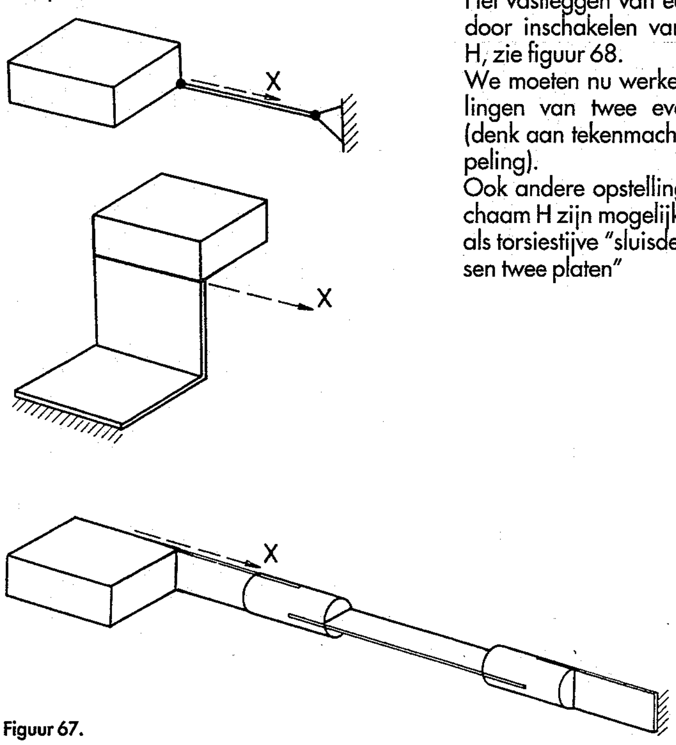
## Het vastleggen van vrijheidsgraden

Het opleggen van een bol zoals hierboven besproken is een manier om een translatie vast te leggen. Trek/drukstaven en sprieten en de omgezette bladveer zijn varianten.
Zij zijn nog eens samengevat in figuur 67.
Een spriet hoeft geen vaste lengte te hebben. Schroefspillen, lucht- en hydraulische cilinders hebben als functie in hun langsrichting een beweging voor te schrijven.
We zullen nu achtereenvolgens alle mogelijke combinaties schetsen die zich bij het vastleggen van 1 t/m 6 vrijheidsgraden kunnen voordoen.

### Eén vrijheidsgraad vastgelegd

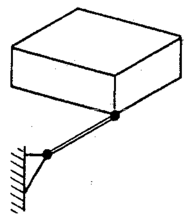
Het vastleggen van één hoek kan alleen door inschakelen van een hulplichaam H, zie figuur 68.
We moeten nu werken met serieschakelingen van twee evenwijdige sprieten (denk aan tekenmachine of stijve askoppeling).
Ook andere opstellingen van het hulplichaam H zijn mogelijk, zie figuur 69: als torsiestijve "sluisdeur" of als "pijp tussen twee platen"

**Eén spriet**

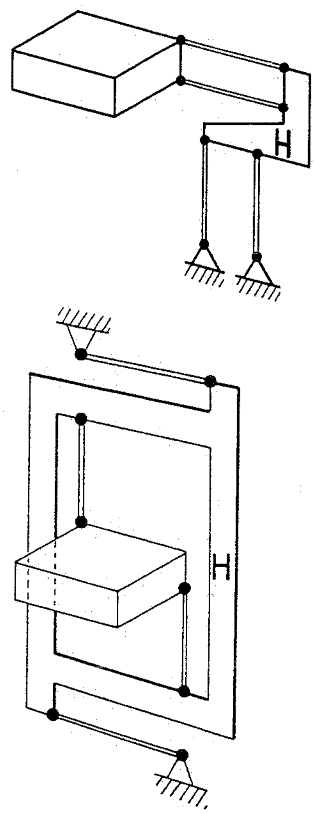



**Figuur 67.**

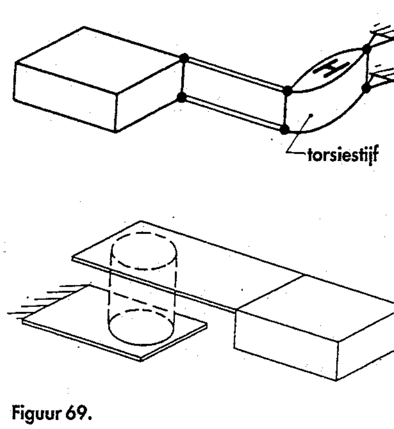
• **Eén hoek:**



• **Eén lengte:**



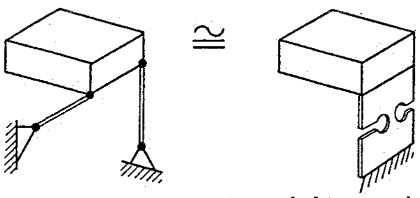

**Figuur 68.**



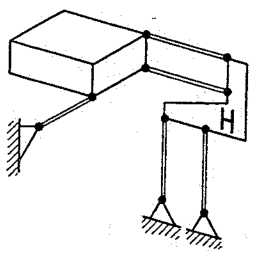

**Figuur 69.**

**Twee vrijheidsgraden vastgelegd**
Zie figuur 70

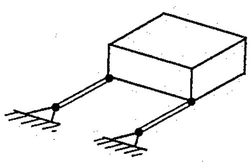
- **Twee lengtes:**



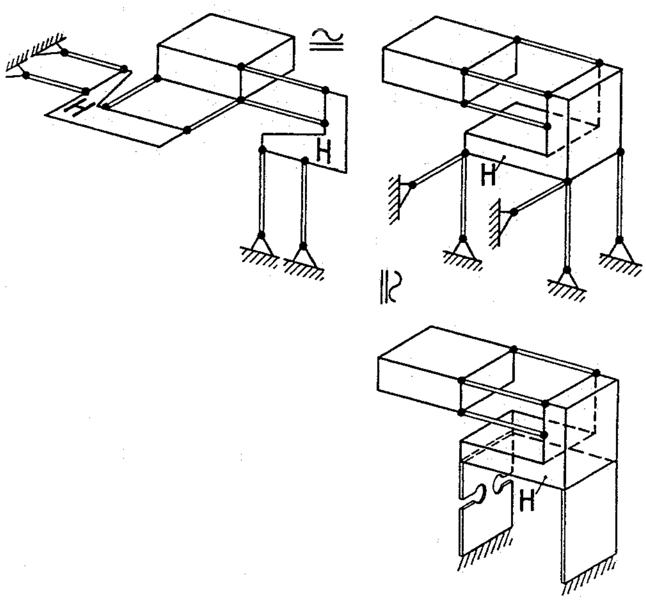
- **Eén lengte + één hoek om de lengteas (x + ρ):**



- **Eén lengte + één hoek niet om de lengteas (b.v. x + θ):**



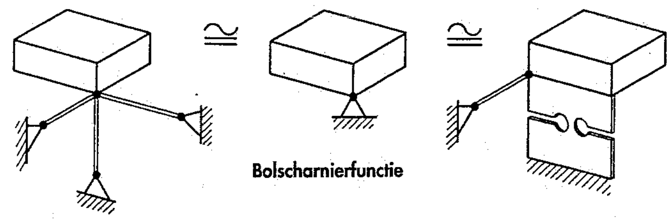
- **Twee hoeken:**



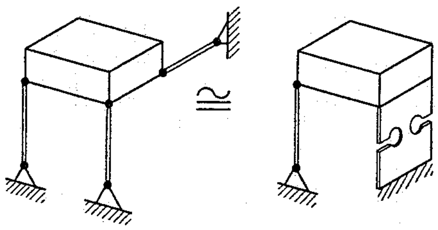
Figuur 70.

**Drie vrijheidsgraden vastgelegd**
Zie figuur 71

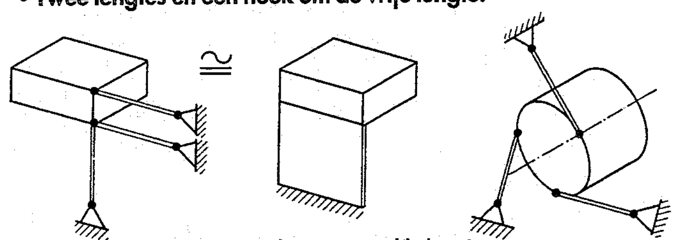
- **Drie lengtes:**




- **Twee lengtes en een hoek om een vastgestelde lengte:**

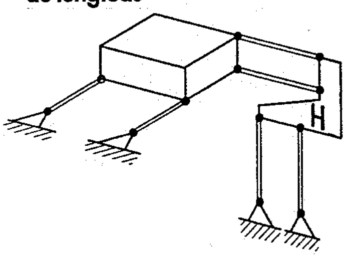


- **Twee lengtes en een hoek om de vrije lengte:**

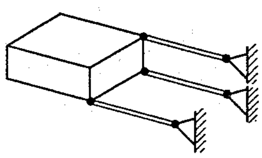


Deze situatie is geknipt voor een bladveer!

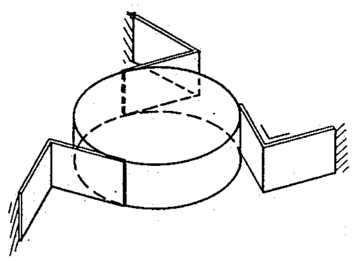
- **Eén lengte en twee hoeken waarvan één "om de vastgelegde lengteas"**



- **Eén lengte en twee hoeken , niet om de vastgelegde lengteas**



Wat overblijft zijn vrijheidsgraden in een plat vlak



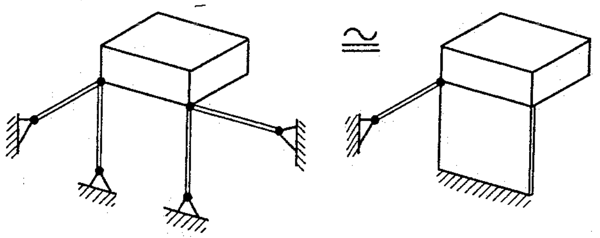
Figuur 71.

# 103

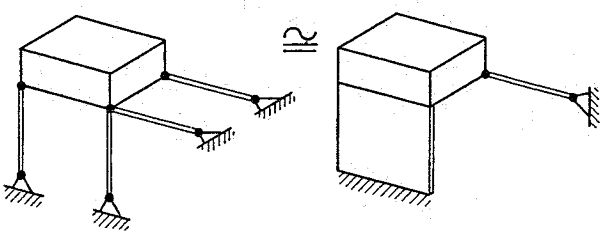
## Beheersen van vrijheidsgraden

**Vier vrijheidsgraden vastgelegd**
Zie figuur 72

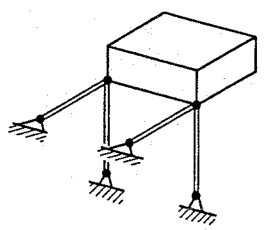
- **Drie lengtes en een hoek:**

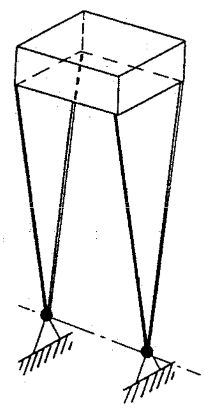


- **Twee lengtes en twee hoeken, met de vrije hoek om een vastgestelde lengte:**

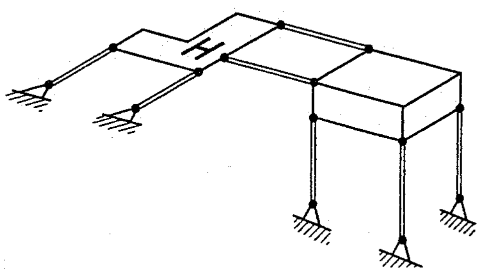


- **Twee lengtes en twee hoeken, met de vrije hoek om de vrije lengte (aslagering):**





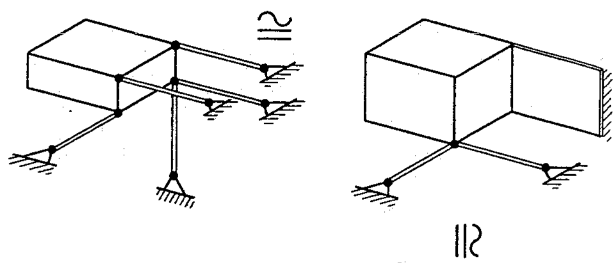
- **Eén lengte en drie hoeken:**



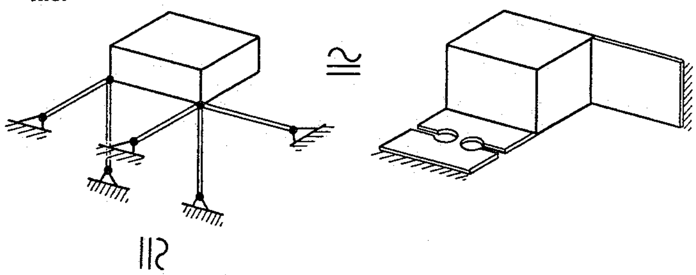
**Figuur 72.**

**Vijf vrijheidsgraden vastgelegd**
Zie figuur 73

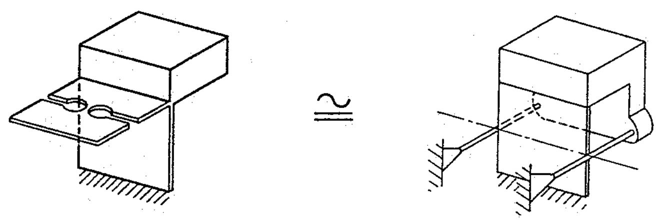
- **Drie lengtes en twee hoeken:**

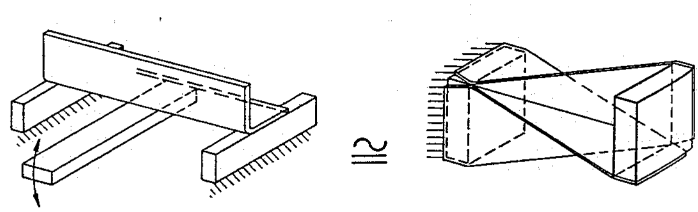


- **In uitvoering met sprieten is dit een correct kruisveerscharnier**

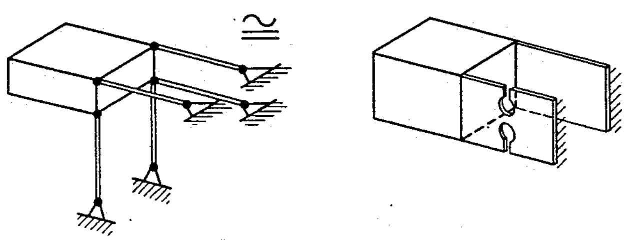


- **Correct kruisveerscharnier**



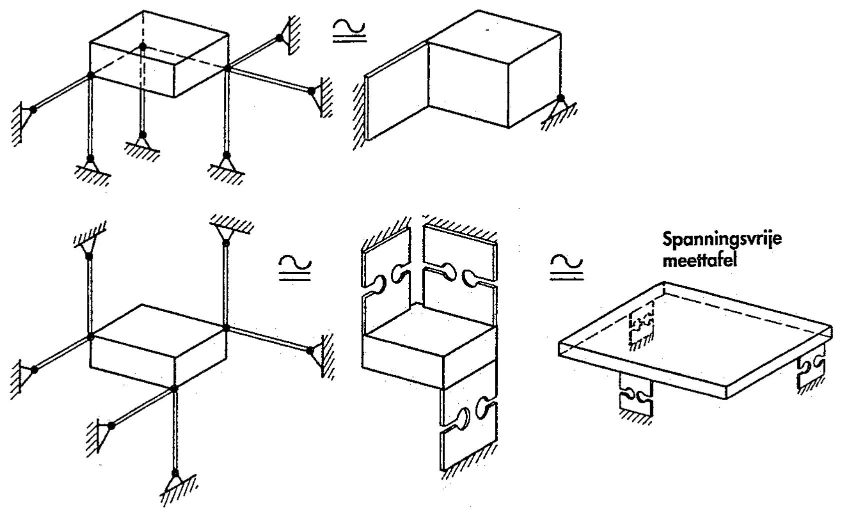


- **Twee lengtes en drie hoeken:**



**Figuur 73.**

Wanneer sterkte en stijfheid overwegend in één vlak gevraagd worden kan men in dat vlak één (hoofd)veer leggen en de twee dan nog vast te leggen vrijheidsgraden fixeren met twee sprieten links en rechts van de hoofdveer en bijvoorbeeld even dik en lang.
De uitvoering van figuur 73 met bladveer met gatscharnier zal in de praktijk alleen dan voldoen als het gatscharnier is aangebracht op de plaats waar het buigend moment in de bladveer juist gelijk aan nul is. Neemt men deze voorzorg niet dan zal de buiging zich in de dam van het gatscharnier concentreren, omdat die veel en veel buigslapper is dan de rest van de bladveer.




Figuur 74.

## Zes vrijheidsgraden vastgelegd

"Metselen" — Ingieten — "zes sprieten". Zie figuur 74

Men kan een lichaam niet vastzetten met twee bladveren hoewel die elk 3 vrijheidsgraden vastleggen. In principe kan een lichaam dat vastzit aan één bladveer, draaien om elke lijn in het vlak waarin de onvervormde bladveer ligt. Wanneer deze "scharnierlijn" een (eventueel verlengde) inklemlijn snijdt, is er naast buiging sprake van torsie van de bladveer, die essentieel gepaard gaat met welving van de doorsnede. De gebruikelijke inklemmingen belemmeren die welving, waardoor vooral relatief korte bladveren extra stijf worden ten gevolge van trek- en drukspanningen.
Deze spanningen zijn evenredig met de hoekrotatie. De effecten van de verlenging van de buitenvezel ten opzichte van vezels langs de torsie-as nemen kwadratisch met de hoekverdraaiing toe maar zijn bij kleine uitwijkingen nog verwaarloosbaar.
Zit het lichaam vast aan twee bladveren, dan kan het alleen nog draaien om de snijlijn van hun vlakken. De beweging van een punt van het lichaam langs deze "snijlijn" is echter tweevoudig (dus overbepaald) vastgelegd. Steeds is er dus tevens een overbepaaldheid in twee bladveren, die we er bijvoorbeeld met een gatscharnier uit kunnen halen. Zijn de bladveren evenwijdig dan ligt die snijlijn op oneindig en hebben we een translatie.
Overigens is elke bladveer op zichzelf weer te beschouwen als een overbepaalde verzameling van kleinere bladveren, er kan "wind" in komen ten gevolge van bolling van de wals, plaatselijke verhitting of plastische vloei.
Ook zijn er dwarscontractieverschijnselen, bijvoorbeeld ten gevolge van drukspanning in de inklemming of ten gevolge van de trek- en drukspanningen bij buiging. De veer zet dan aan de kant met drukspanning uit in dwarsrichting en krimpt in dwarsrichting aan de andere kant waar de trekspanning heerst. Hij gaat daardoor ook in zijn dwarsdoorsnede enigszins krom staan ("elastische buiging"; prachtig te zien als men een tekengommetje dubbel vouwt).

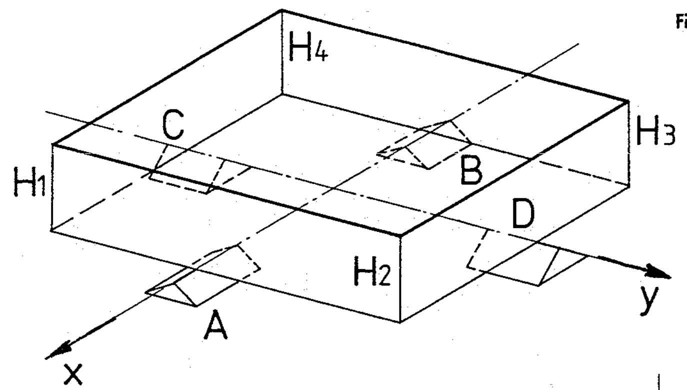
## Interne vrijheidsgraden

Een star lichaam heeft geen "interne vrijheidsgraden" en kan dus met de bekende zes externe belemmeringen geheel gedefinieerd "in de wereld" worden gefixeerd.
Een draad of spriet is op te vatten als een verzameling (bol)scharnieren; over een betrekkelijk kleine lengte "groeien" uit een vastgelegd draadstuk telkens weer 5 vrijheidsgraden.
Een bladveer of dunne plaat is te zien als een verzameling lijnscharnieren; over een zekere lengte groeien er telkens 3 vrijheidsgraden bij.
Om een draad of band geheel te fixeren heeft men eigenlijk oneindig veel bevestigingen nodig.
Nu is, zeker in realistische constructies (bijna) nooit iets "helemaal vrij" of "helemaal vastgelegd". Het is in wezen steeds een kwestie van meer of minder slap (in constructies met elastische elementen) of met meer of minder wrijving (in constructies met materiële draaipunten en geleidingen) versus meer of minder stijf of meer of minder slipvrij op elkaar geklemd etc.

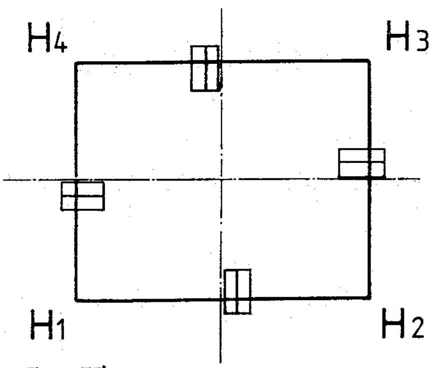
Zie het bekende probleem van de tafel op drie of vier poten; hij is flink buigstijf maar slechts matig torsiestijf, dus is op een redelijk vlakke vloer die vierde poot meestal een verbetering van het "functioneren als tafel".

Toch komt het in de techniek veel voor dat een "lichaam" in bepaalde opzichten als star doch in andere opzichten (eventueel ten opzichte van andere belastingsrichtingen of belastingspatronen) als relatief bewegelijk wordt ervaren. Men kan zo'n bewegelijkheid dan interpreteren als een "interne vrijheidsgraad". Voor het ruimtelijk fixeren zijn zes steunpunten of "belemmeringen" dan niet langer voldoende maar is er nog één extra nodig voor elke interne vrijheidsgraad.
Zo heeft het schoendoosdeksel (bodem + opstaande randen) van figuur 75a een grote buigstijfheid voor de x-as en de y-as.
Opgelegd op de dakkanten A en B kan het wippen, een blokkering bij C verhindert ook dat, en een steun bij D maakt het geheel overbepaald: het gewicht rust óf op AB óf op CD.
Een verticale belasting in de hoek $H_1$ laat $H_1$ zakken, $H_2$ stijgen, $H_3$ zakken, $H_4$ stijgen en dat past weer bij de zakking van $H_1$. Derhalve is "vouwen over de diagonaal" een interne vrijheidsgraad. Er zijn twee diagonalen maar er is toch maar één interne vrijheidsgraad. In feite is het torsie van de bodemplaat (+ of — teken),gepaard met torsie van de opstaande randen, met behoud van rechtheid van de ribben.
De ondersteuning bij A, B, C en D

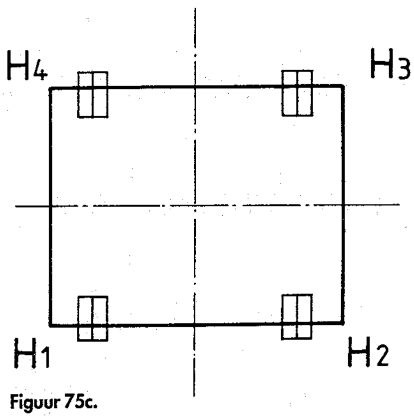
# Beheersen van vrijheidsgraden




Figuur 75a.




Figuur 75b.




Figuur 75c.

(die tevens geacht wordt op wrijving de x, y en θ vast te leggen) is dus zowel éénmaal overbepaald als éénmaal onderbepaald. Verplaatsing van de dakkantopleggingen naar de hoekpunten maakt de oplegging statisch bepaald. Overigens is het niet nodig precies naar de hoek te gaan. Een situatie als in figuur 75b voldoet. Hier is elk steunpunt een beetje uit het midden is weggeschoven zodat de verhouding i tussen linker- en rechterdeel van de ondersteunde ribbe niet meer gelijk aan 1 is.
Immers, als $H_1$ over een afstand z daalt, stijgt $H_2$ over i.z, daalt $H_3$ over $i^2z$, stijgt $H_4$ over $i^3z$ en moet $H_1$ weer dalen met $i^4z$. Als nu $i^4$ maar voldoende afwijkt van 1 is de constructie al statisch bepaald. Uiteraard voldoet ook een oplegging als in figuur 75c.

Een open zeskante doos (bodem + zeshoekige opstaande rand) heeft 3 interne vrijheidsgraden; een open driekante doos is een star lichaam.
Ook een open driehoekige koker (mits aangepakt bij de ribben) is een star lichaam. Een open vierkante koker heeft echter 2 interne vrijheidsgraden: "plat vouwen" en "scharnieren om de diagonaal".

**"Constructies voor het nauwkeurig bewegen en positioneren"** is een selectie uit de verzameling constructieprincipes die op initiatief van Prof. ir. W. v.d. Hoek in 1962 is opgezet en die nog steeds wordt uitgebreid. Onder redactionele leiding van Prof.dr.ir. M.P. Koster (TU-Twente) is door Ir. P.C.J.N. Rosielle en E.A.G. Reker (TU-Eindhoven) specieel voor de lezers van *Mikroniek* een selectie gemaakt die in 18 afleveringen wordt gepresenteerd.
Bijdragen van lezers als kritiek, suggesties of eigen ervaring worden door de auteurs op prijs gesteld.