

# Spanningsverdeling in niet-prismatische houten liggers

***Citation for published version (APA):***

Brouwers, G. J. T., & Jorissen, A. J. M. (2012). Spanningsverdeling in niet-prismatische houten liggers. In A. J. M. Jorissen, & A. J. M. Leijten (Eds.), *Onderzoeksmiddag Construeren met hout, 15 januari 2010* (pp. 23-36). Technische Universiteit Eindhoven.

***Document status and date:***

Published: 01/01/2012

***Document Version:***

Accepted manuscript including changes made at the peer-review stage

***Please check the document version of this publication:***

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

***General rights***

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

***Take down policy***

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

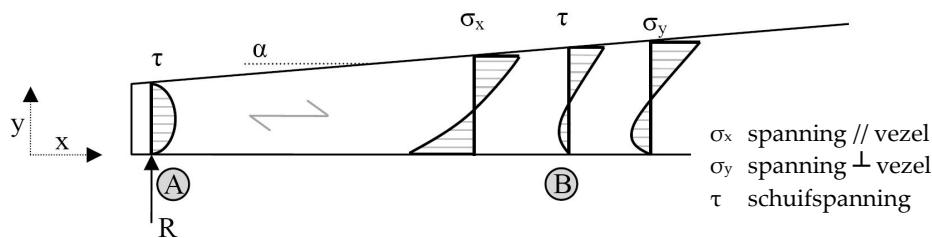
---

## 1. Abstract

In dit artikel wordt ingegaan op de spanningsverdeling in niet prismatische houten liggers met een éénzijdig verlopende doorsnede. Ten gevolge van niet evenwijdig aan de houtvezel verlopende randen treden er spanningen loodrecht op de houtvezel en schuifspanningen op. Deze spanningen ontstaan door zowel moment als dwarskracht. Aan de hand van handberekeningen en computermodellen worden de spanningen bepaald om zo nodig tot een “verbeterde” rekenregel te komen. Om de spanningen te kunnen toetsen is een meer geavanceerd bezwijkcriterium voor de sterkte noodzakelijk. Het in de praktijk gebruikte Norris criterium wordt in dit artikel bekeken.

## 2. Aanleiding

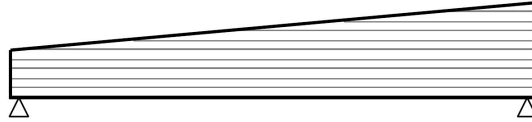
Het is niet moeilijk om van een prismatische ligger met parallelle randen een taps ligger te zagen. Vandaar dat dit liggertype veel in de praktijk voorkomt. Deze tapsheid geeft mogelijkheden tot waterafschot als het dakliggers betreft. Er zijn enkelzijdige en dubbelzijdige taps liggers. Deze type liggers zijn architectonisch eleganter en technisch gezien efficiënter omdat de doorsnede de momentenlijn meer volgt dan een prismatische ligger. Voor het ontwerp is te beseffen dat de aangesneden rand niet parallel loopt met de vezelrichting. Bekend is dat de sterkte varieert met de vezelrichting.



Figuur 1: Overzicht spanningen éénzijdig verlopende doorsnede

De spanningsverdeling in niet prismatische houten liggers zijn niet te berekenen met de gebruikelijke formules voor prismatische liggers. Ten gevolge van niet evenwijdig aan de houtvezel verlopende randen treden er spanningen loodrecht op de houtvezel en schuifspanningen op, weergegeven in figuur 1. Aan het bepalen van deze spanningen, analytisch en numeriek, is in het verleden (rond 1980) aandacht besteed door o.a. Riberholt, Gutkowski, Dewey, Foschi, Fox, Möhler, Blumer en Ehlbeck. Tevens wordt in STEP les B8, Eurocode 5 en NEN 6760 aandacht aan de niet prismatische liggers besteed. De formules waarmee de spanningen worden berekend zijn niet doorzichtig.

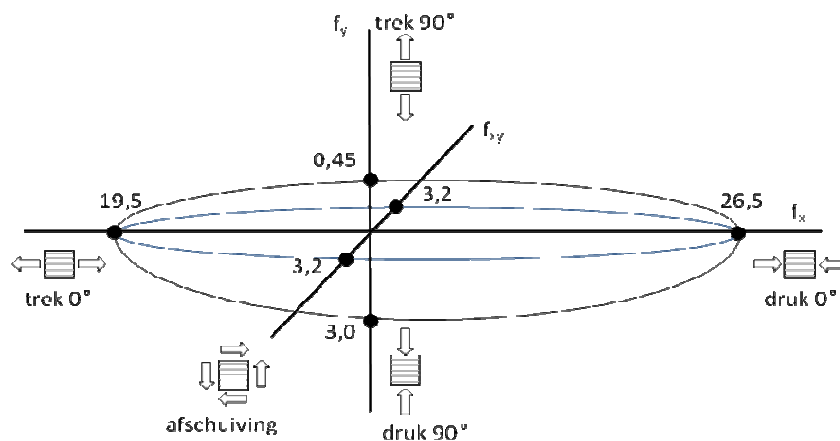
Het doel binnen mijn afstuderen is een brede basis te leggen voor vervolg onderzoek naar de spanningsverdeling bij niet prismatische houten liggers, waarbij de achtergrond van de verschillende geldende formules in de norm duidelijk en helder is. In dit artikel wordt ingegaan op de niet-prismatische ligger met een éézijdig verlopende doorsnede, weergegeven in figuur 2.



Figuur 2: niet-prismatische ligger met een éézijdig verlopende doorsnede

### 3. Breukcriterium hout

Ten gevolge van de simultaan in meerdere richtingen optredende spanningen is het formuleren van een meer geavanceerd bezwijkcriterium voor de sterkte noodzakelijk. In de praktijk wordt het zogenaamde Norris criterium gebruikt. Dit is een bijzonder geval van het Tsai-Wu criterium. Het materiaal hout heeft in de drie hoofdrichtingen andere sterkte waarden, met bij een trekbelasting een bros bezwijkgedrag. In figuur 3 zijn de karakteristieke waarden van het gelamineerd naaldhout (GL28h) uitgezet. Door middel van een drietal eclipsen wordt een ruimtelijk figuur ingesloten. Combinaties van spanningen, die buiten deze figuur vallen, hebben theoretisch bezwijken tot gevolg.



Figuur 3: Karakteristieke waarden voor GL28h in N/mm<sup>2</sup> (NEN-EN 1194)

Het Tsui-Wu criterium [1] voor een anisotroop materiaal is een algemeen breukcriterium in de vorm van een polynoom. [2]

$$F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijj}\sigma_{ij}^2 + \dots = 1 \quad \text{met: } i, j = x, y, z \quad (1)$$

Voor een vlakke spanningstoestand, met alleen spanningen in één vlak, en zonder hogere orde termen, is het criterium uit te schrijven tot formule (2)

$$F_{ij} \sigma_{ij} + F_{ijj} \sigma_{ij}^2 = 1 \quad \text{met: } i, j = x, y \quad (2)$$

$$F_{xx} \sigma_{xx} + F_{yy} \sigma_{yy} + F_{xy} \sigma_{xy} + F_{xxxx} \sigma_{xx}^2 + F_{yyyy} \sigma_{yy}^2 + F_{xyxy} \sigma_{xy}^2 + F_{xxyy} \sigma_{xx} \sigma_{yy} = 1$$

Hierin is

$$F_{xx} = \frac{1}{f_{90;t}} - \frac{1}{f_{90;c}}; \quad F_{xxxx} = \frac{1}{f_{0;t} f_{0;c}}; \quad \alpha = 0,5 \arctan \frac{2F_{xyxy}}{F_{xxxx} - F_{yyyy}}$$

$$F_{yy} = \frac{1}{f_{90;t}} - \frac{1}{f_{90;c}}; \quad F_{yyyy} = \frac{1}{f_{90;t} f_{90;c}}$$

$$F_{xy} = \frac{1}{f_v} - \frac{1}{f_v}; \quad F_{xxyy} = \frac{1}{f_v f_v}$$

met:

- $f_{0;t}$  treksterkte evenwijdig aan de vezelrichting
- $f_{0;c}$  druksterkte evenwijdig aan de vezelrichting
- $f_{90;t}$  treksterkte loodrecht op de vezelrichting
- $f_{90;c}$  druksterkte loodrecht op de vezelrichting
- $f_v$  schuifsterkte

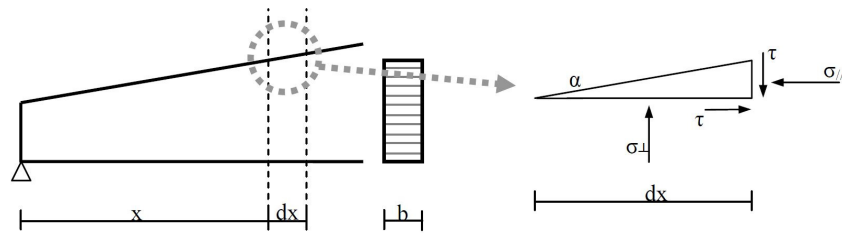
De laatste term met  $F_{xxyy}$  staat voor de helling van de ellipsvormige curve. De Tsai-Wu vergelijking kan worden gereduceerd: de helling kan worden verwaarloosd waardoor  $F_{xxyy} = 0$ . Er vanuit gaande dat de sterkte in druk- en trekrichting evenwijdig- en loodrecht op de vezelrichting elkaar weinig ontlopen, kunnen alle  $F_{ij}$  parameters gelijk aan 0 worden gesteld. Hierdoor resteren alleen de termen met de spanningen in het kwadraat.

$$F_{xxxx} \sigma_{xx}^2 + F_{yyyy} \sigma_{yy}^2 + F_{xyxy} \sigma_{xy}^2 = 1 \quad (3)$$

Dit spanningscriterium is ontwikkeld door Norris [3] en kan worden gezien als een bijzonder geval van het Tsai-Wu criterium, weergegeven in formule (4)

$$\left( \frac{\sigma_{xx}}{f_0} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{yy}}{f_{90}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{xy}}{f_v} \right)^2 = 1 \quad (4)$$

De transformatie regels van het Tsai-Wu criterium zijn algemeen. Formule (3) geldt voor richtingen samenvallend met de hoofdrichtingen: evenwijdig en loodrecht op de vezelrichting. Aan de afgeschuinde zijde is de sterkte onder een hoek met de vezelrichting belangrijk.



Figuur 4: analyse spanningstoestand

Uit het evenwicht van het element in figuur 4 volgt, dat behalve de spanning evenwijdig aan de vezel ( $\sigma_x$ ) ook schuifspanningen ( $\tau$ ) op moeten treden en daardoor ook spanningen loodrecht op de vezel ( $\sigma_y$ ).

Horizontaal evenwicht:

$$\tau = \sigma_x \tan \alpha \quad (5)$$

Verticaal evenwicht:

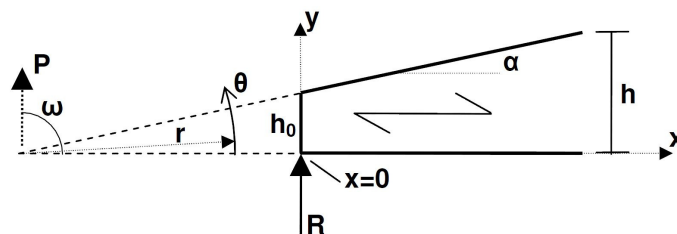
$$\sigma_y = \tau \tan \alpha = \sigma_x \tan^2 \alpha \quad (6)$$

Door formule (5) en (6) in formule (4) in te vullen, volgt na enkele omrekeningen de formule zoals deze in de NEN6760 staat.

$$\sigma_\alpha = \frac{f_0}{\sqrt{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha \left(\frac{f_0}{f_{90}}\right)^2 + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left(\frac{f_0}{f_{90}}\right)^2}} \quad (7)$$

#### 4. Spanningsverdeling volgens Riberholt

De rekenregels in NEN6760 (art.11.9.1.3) [4] zijn gebaseerd op het onderzoek naar de spanningen in de uiterste vezel bij een niet-prismatische ligger met een éénzijdig verlopende doorsnede van H. Riberholt. [5]



Figuur 5: Schematisatie tot wig

Een niet prismatische ligger is te schematiseren tot een wig met aan de top een equivalente puntlast (P), waarvoor de spanningsverdeling bekend is. Op voldoende grote afstand van de oplegging geldt

$$M = R \times x = P \times r \quad (8)$$

Hout is een orthotroop materiaal waardoor formule (9) geldig is.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_0 & -\nu_{21}/E_{90} & 0 \\ -\nu_{12}/E_0 & 1/E_{90} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{met: } \nu_{21}/E_{90} = \nu_{12}/E_0 = \nu/E_0 \quad (9)$$

De spanningen in de wig zijn volgens onderzoek van Lekhnitski uit 1962 [6].

$$\sigma_\theta = 0 \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{A \cos \theta + B \sin \theta}{L(\theta)} \quad \text{met: } L(\theta) = \frac{\cos^4 \alpha}{E_0} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu}{E_0} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{E_{90}}$$

De constante waarden A en B worden bepaald doordat er in het deel van de wig evenwicht moet optreden. De constanten worden aan de hand van formule (11) opgelost.

$$A I_1 + B I_2 = -\frac{P}{b} \cos \omega = 0 \quad (11)$$

$$A I_2 + B I_3 = -\frac{P}{b} \sin \omega = -\frac{P}{b}$$

met:

$$I_1 = E_{90} \frac{\beta \arctan(\beta \tan \alpha) - \delta \arctan(\delta \tan \alpha)}{(\beta^2 - \delta^2)}$$

$$I_2 = -\frac{E_{90}}{2(\beta^2 - \delta^2)} \ln \left( \frac{\cos^2 \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \delta^2 \sin^2 \alpha} \right)$$

$$I_3 = E_{90} \frac{\frac{1}{\beta} \arctan(\beta \tan \alpha) - \frac{1}{\delta} \arctan(\delta \tan \alpha)}{(\beta^2 - \delta^2)}$$

Hier wordt voor  $\beta \approx 1,13$  en  $\delta \approx 3,97$  aangehouden.

Met  $A = f(\alpha) \times P / (b \times E_{90})$  en  $B = g(\alpha) \times P / (b \times E_{90})$  kan de formule worden herschreven. Daarnaast is in de formule een relatie gelegd tussen  $\sigma_r$  en  $\sigma_m$ , door benaderend aan te nemen dat  $M \approx Pr$ .

$$\sigma_r = \frac{P}{r \times t} \times \frac{f(\alpha) \cos \theta + g(\alpha) \sin \theta}{E_{90} L(\theta)} = \frac{M}{W} \times \frac{\tan^2 \alpha}{6} \times \frac{f(\alpha) \cos \theta + g(\alpha) \sin \theta}{E_{90} L(\theta)} \quad (12)$$

Volgens het onderzoek van Riberholt geldt hiervoor bij benadering voor de twee maatgevende waarden:

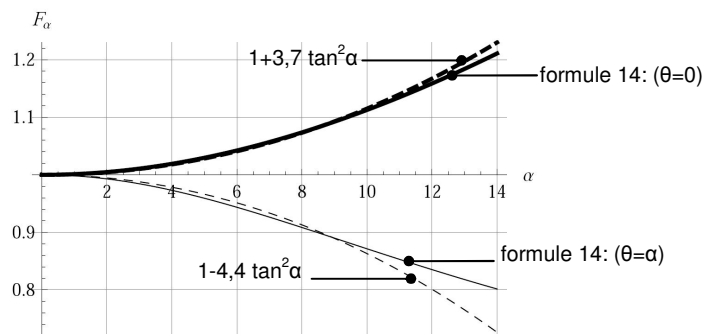
$$\text{als } \theta = 0: \quad \sigma_r \approx (1 + 3,7 \tan^2 \alpha) \sigma_m \quad (13)$$

$$\text{als } \theta = \alpha: \quad \sigma_r \approx (1 - 3,7 \tan^2 \alpha) \sigma_m$$

In de NEN6760 (art.11.9.1.3) is de factor voor  $\theta = \alpha$  aangepast tot

$$\text{als } \theta = \alpha: \quad \sigma_r \approx (1 - 4,4 \tan^2 \alpha) \sigma_m \quad (14)$$

Deze aanpassing geeft een te lage spanning vanaf een hoek  $\alpha$  van  $10^\circ$ , zoals weergegeven in figuur 6. Het is dan ook opmerkelijk dat de toetsing in de NEN6760 te gebruiken is tot een hoek  $\alpha$  van  $20^\circ$ .



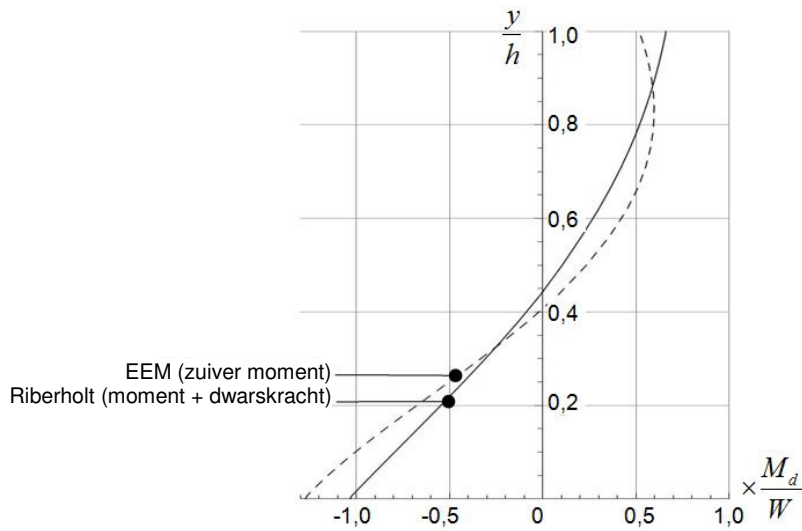
Figuur 6: benadering spanningen volgens NEN6760

## 5. Spanningsverdeling verkregen met eindige elementen modellen (EEM)

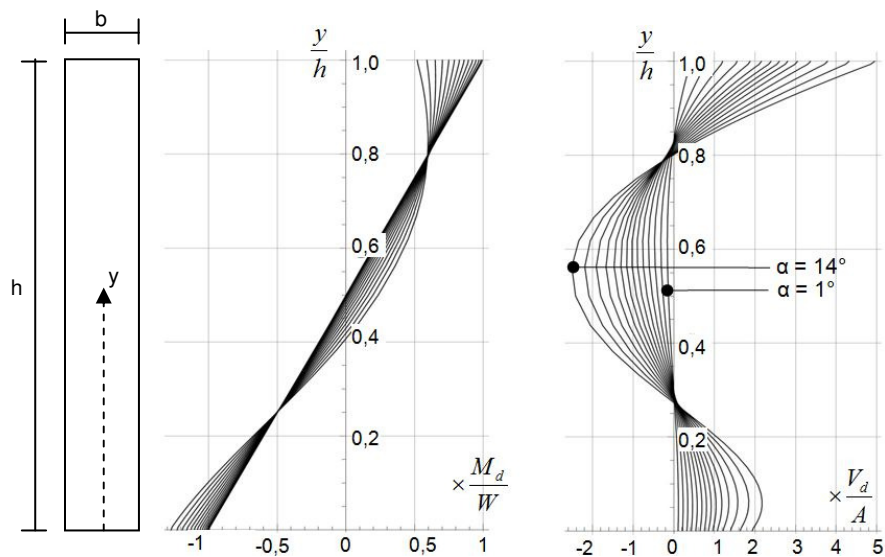
Uit het onderzoek in het eindige elementen pakket Abaqus/CAE komen enkele interessante punten naar voren. Zo geven de spanningen, bepaald in het onderzoek van Riberholt, vanaf een doorsnede van minimaal  $2 \times h_0$  een goede weergave van de optredende spanningen. Het onderzoek van Riberholt is gebaseerd op een doorsnede waar naast een moment ( $F \times l$ ) ook een dwarskracht ( $F$ ) optreedt. In een doorsnede waar een zuiver moment optreedt, geeft de formule voor spanningen evenwijdig aan de vezel uit het onderzoek van Riberholt een onveilige waarde, zoals in figuur 7 is weergegeven. Hoe groter de hoek  $\alpha$  wordt, hoe onveiliger deze waarde is.

Door de spanningen ten gevolge van moment en dwarskracht afzonderlijk te bepalen, en later superponeren, kan men uiteindelijk een "verbeterde" rekenregel bepalen. De spanning evenwijdig aan de vezel, voor zowel moment als dwarskracht, is in figuur 8 voor verschillende waarden van  $\alpha$

weergegeven. In de figuren 9 en 10 is voor respectievelijk schuifspanningen en spanningen loodrecht op de vezel deze opsplitsing bij een hoek  $\alpha$  van  $8^\circ$  gedaan.

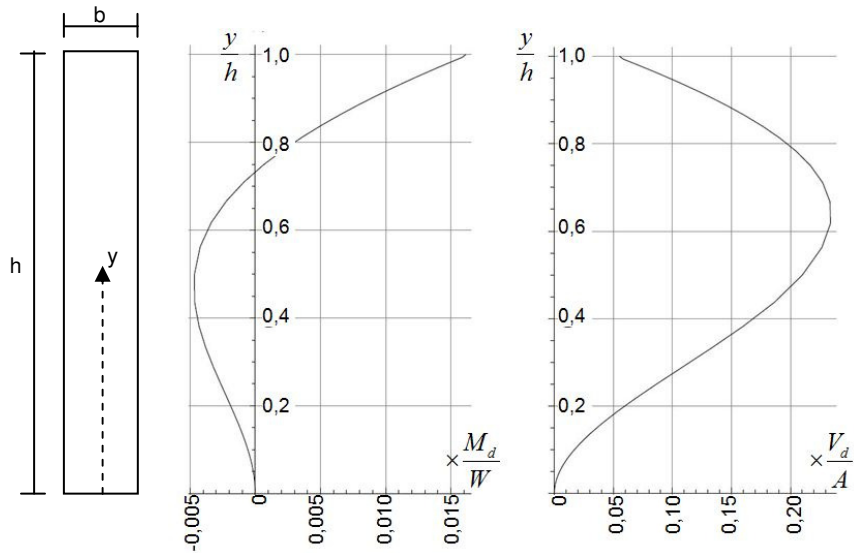


Figuur 7: Spanningen evenwijdig aan de vezel ( $\sigma_x$ ) bij een hoek  $\alpha$  van  $14^\circ$  ten gevolge van een zuiver moment

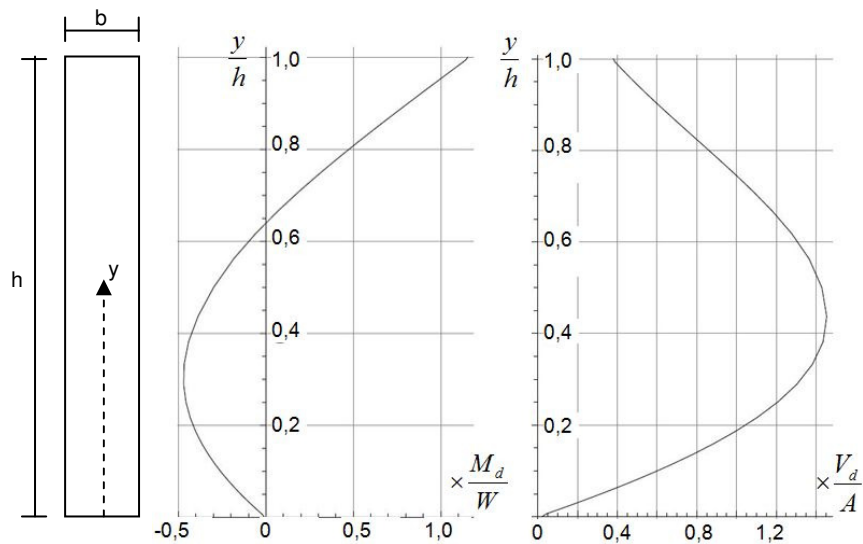


Figuur 8: spanning evenwijdig aan de vezel ( $\sigma_x$ ) bij een hoek  $\alpha$  van  $1^\circ$  tot  $15^\circ$  ten gevolge van (a) moment (b) dwarskracht.





Figuur 9: schuifspanning ( $\tau_{xy}$ ) bij een hoek  $\alpha$  van  $8^\circ$  ten gevolge van (a) moment (b) dwarskracht.



Figuur 10: Spanningen loodrecht op de vezel ( $\sigma_y$ ) bij een hoek  $\alpha$  van  $8^\circ$  ten gevolge van (a) moment (b) dwarskracht.

Het is opvallend dat door belasting op een zuiver moment bij een niet prismaatise ligger met een éézijdig verlopende doorsnede trekspanningen loodrecht op de vezel ontstaan. Hoe groter de hoek  $\alpha$  is, hoe groter deze spanningen zijn. Bij een hoek  $\alpha$  groter dan  $14^\circ$  is voor het bezwijken van de

ligger deze trekspanning loodrecht op de vezel zelfs maatgevend boven de buigspanning in de uiterste vezel.

De spanning evenwijdig aan de vezel, weergegeven in figuur 8, kan worden benaderd met behulp van een vierdegraads polynoom. Evenals in het onderzoek van A.C.Maki en E.W.Kuenzi uit 1965 [7] kunnen de schuifspanning en spanning loodrecht op de vezel met behulp van polynomen worden benaderd, weergegeven in formule (15).

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{6M}{bh^2} \left[ a^* \left( \frac{y}{h} \right)^4 + b^* \left( \frac{y}{h} \right)^3 + c^* \left( \frac{y}{h} \right)^2 + d^* \frac{y}{h} + e^* \right] + \\
 &\quad \frac{F}{bh} \left[ f^* \left( \frac{y}{h} \right)^4 + g^* \left( \frac{y}{h} \right)^3 + h^* \left( \frac{y}{h} \right)^2 + i^* \frac{y}{h} + j^* \right] \tan \alpha \\
 \tau_{xy} &= \frac{6M}{bh^2} \left[ \frac{6a^*}{5} \left( \frac{y}{h} \right)^5 + \frac{5b^*}{4} \left( \frac{y}{h} \right)^4 + \frac{4c^*}{3} \left( \frac{y}{h} \right)^3 + \frac{3d^*}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 + 2e^* \frac{y}{h} \right] \tan \alpha - \\
 &\quad \frac{6F}{bh} \left[ \frac{a^*}{5} \left( \frac{y}{h} \right)^5 + \frac{b^*}{4} \left( \frac{y}{h} \right)^4 + \frac{c^*}{3} \left( \frac{y}{h} \right)^3 + \frac{d^*}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 + e^* \frac{y}{h} \right] + \\
 &\quad \frac{F}{bh} \left[ f^* \left( \frac{y}{h} \right)^5 + g^* \left( \frac{y}{h} \right)^4 + h^* \left( \frac{y}{h} \right)^3 + i^* \left( \frac{y}{h} \right)^2 + j^* \frac{y}{h} \right] \tan \alpha \\
 \sigma_y &= \frac{6M}{bh^2} \left[ \frac{7a^*}{5} \left( \frac{y}{h} \right)^6 + \frac{3b^*}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^5 + \frac{5c^*}{3} \left( \frac{y}{h} \right)^4 + 2d^* \left( \frac{y}{h} \right)^3 + 3e^* \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \tan^2 \alpha - \\
 &\quad \frac{6F}{bh} \left[ \frac{a^*}{5} \left( \frac{y}{h} \right)^6 + \frac{b^*}{4} \left( \frac{y}{h} \right)^5 + \frac{c^*}{3} \left( \frac{y}{h} \right)^4 + \frac{d^*}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^3 + e^* \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \tan \alpha + \\
 &\quad \frac{F}{bh} \left[ f^* \left( \frac{y}{h} \right)^6 + g^* \left( \frac{y}{h} \right)^5 + h^* \left( \frac{y}{h} \right)^4 + i^* \left( \frac{y}{h} \right)^3 + j^* \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \tan^2 \alpha
 \end{aligned} \tag{15}$$

Hierbij hebben de constante  $a^*$  tot en met  $j^*$  per hoek  $\alpha$  een andere waarde.

## 6. "Verbeterde" rekenregel

Met behulp van formule (15) kan voor een niet prismatische ligger met een éénzijdig verlopende doorsnede een formule voor de maatgevende spanning evenwijdig aan de rand worden gegeven. Aan de rand, evenwijdig aan de vezel geldt de "verbeterde" rekenregel, weergegeven m.b.v. formule (16).

$$\text{als } \theta = 0: \quad \sigma_x \approx (1 + 4,3 \tan^2 \alpha) \frac{M_d}{W} - \frac{53\alpha}{500} \frac{V_d}{A} \tag{16}$$

$$\text{volgens NEN: } \sigma_x \approx (1 + 3,7 \tan^2 \alpha) \frac{M_d}{W}$$

De spanning evenwijdig aan de afgeschuinde zijde is een combinatie van een spanning evenwijdig aan de vezel, schuifspanningen en spanning loodrecht op de vezel. De spanning aan de afgeschuinde zijde kan worden bepaald met

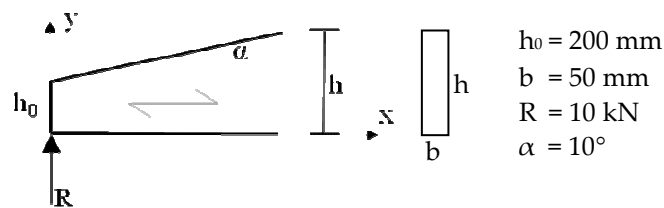
$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (17)$$

Formule (17) wordt met de volgende “verbeterde” rekenregel benaderd.

$$\text{als } \theta = \alpha: \quad \sigma_{\alpha} \approx (1 + 16,8 \tan^3 \alpha - 10,2 \tan^2 \alpha) \frac{M_d}{W} + (0,45\alpha - 0,014\alpha^2) \frac{V_d}{A} \quad (18)$$

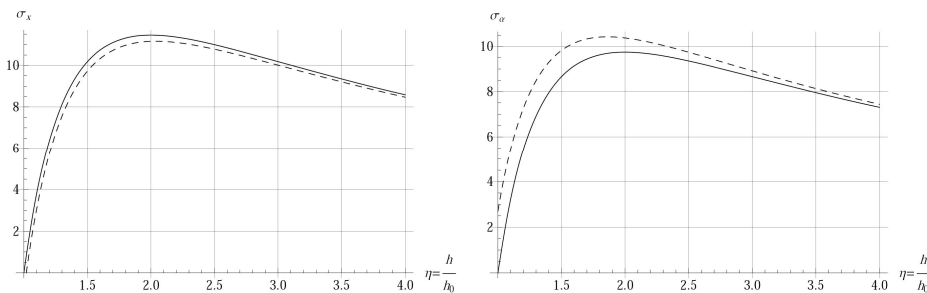
$$\text{volgens NEN: } \sigma_x \approx (1 - 4,4 \tan^2 \alpha) \frac{M_d}{W}$$

Beide “verbeterde” rekenregels geven tot een hoek  $\alpha$  van  $10^\circ$  de optredende spanning nauwkeurig weer. Bij een grotere hoek gaat de krachtsafdracht van buiging over naar boogwerking in de niet prismatische ligger.



Figuur 11: voorbeeldberekening: afmetingen niet prismatische ligger

De spanningsverdeling volgens formule (16) en (18) is voor een voorbeeld, weergegeven in figuur 11, per  $\eta$  ( $=h/h_0$ ) met de getrokken lijn weergegeven in figuur 12. De gestreepte lijn is de spanning die volgens NEN6760 optreedt. In de doorsnede  $\eta = 2$  (bij een hoek  $\alpha$  van  $10^\circ$ ) is de spanning evenwijdig aan de vezel aan de niet afgeschuinde zijde 3,9% hoger en de spanning evenwijdig aan de afgeschuinde zijde 10,8% lager dan de spanning volgens NEN6760.



Figuur 12: Spanningen volgens “verbeterde” rekenregel tov NEN6760 bij een hoek  $\alpha$  van  $10^\circ$  (a) niet afgeschuinde zijde (formule (16)) (b) afgeschuinde zijde (formule (18)).

---

## 7. Bronvermelding

- [1] S. W.Tsai, E. M.Wu, A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*. vol. 5, pp. 58-80, 1971
- [2] A.Leijten. Tapse, gebogen- en gekepte liggers. In PAO cursus: Eurocode 5 en de Nationale annex: construeren met hout. 2008.
- [3] C.B. Norris, Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses. . Forest Products Laboratory (U.S.), Rept.no.1816, 1962.
- [4] NEN 6760. Technische grondslagen voor bouwconstructies TGB 1990 Houtconstructies Basiseisen Eisen en bepalingsmethoden. NEN, Delft, 2003.
- [5] H. Riberholt. Tapered timber beams. CIB working commission W18, paper W18/11-10-1, Wenen, 1979.
- [6] S.G. Lekhnitskii. Anisotropic plates. Gordon and Breach Science Publisher, 1968
- [7] A.C.Maki, E.W.Kuenzi, Deflection and stresses of tapered wood beams. Forest Products Laboratory (U.S.), FPL paper 34, 1965.