

Numeriek gereedschap ten behoeve van dunwandige balkkonstrukties

Citation for published version (APA):

Veldpaus, F. E. (1973). *Numeriek gereedschap ten behoeve van dunwandige balkkonstrukties*. [Dissertatie 1 (Onderzoek TU/e / Promotie TU/e), Mechanical Engineering]. Technische Hogeschool Eindhoven.
<https://doi.org/10.6100/IR107637>

DOI:

[10.6100/IR107637](https://doi.org/10.6100/IR107637)

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1973

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

NUMERIEK GEREEDSCHAP
TEN BEHOEVE VAN
DUNWANDIGE BALKKONSTRUKTIES

F. E. VELDPAUS

**NUMERIEK GEREEDSCHAP
TEN BEHOEVE VAN
DUNWANDIGE BALKKONSTRUKTIES**

NUMERIEK GEREEDSCHAP TEN BEHOEVE VAN DUNWANDIGE BALKKONSTRUKTIES

Some procedures for the analysis of
thin-walled beam structures
(with summary in English)

PROEFSCHRIFT

ter verkrijging van de graad van doctor in de
technische wetenschappen aan de Technische
Hogeschool Eindhoven, op gezag van de rector
magnificus, prof.dr.ir. G. Vossers, voor een
commissie aangewezen door het college van
dekanen in het openbaar te verdedigen op
vrijdag 22 juni 1973 te 16.00 uur

door

FRANCISCUS EGBERTUS VELDPAUS
geboren te Mill en St. Hubert c.a.

Dit proefschrift is goedgekeurd door de promotoren

Prof.dr.ir. J.D. Janssen

en

Prof.ir. W.L. Esmeyer

Aan Nettie en Bart

Inhoud

Hoofdstuk 1	Algemene inleiding.....	13
	Literatuur bij hoofdstuk 1.....	16
Hoofdstuk 2	Enige definities en afspraken.....	17
Hoofdstuk 3	Dunwandige, cilindrische balken met open dwarsdoorsnede	21
3.1	Inleiding.....	21
3.2	De potentiële energie.....	22
3.2.1	Inleiding	22
3.2.2	Het verplaatsingsveld en het spanningsveld	24
3.2.3	De elastische energie	27
3.2.4	De potentiële energie van de traagheidskrachten .	29
3.2.5	De potentiële energie van de belasting	30
3.2.6	De totale potentiële energie	32
3.3	De differentiaalvergelijkingen en de randcondities	33
3.4	Een bruikbare benadering : de theorie volgens Vlasov ..	36
3.4.1	Inleiding	36
3.4.2	De oplossing van de homogene, statische differentiaalvergelijkingen	37
3.4.3	De homogene, statische oplossing voor de kracht-vektor	38
3.4.4	Nadere beschouwing van de elastische energie	39
3.4.5	De theorie volgens Vlasov	40
3.5	De methode der eindige elementen	42
3.5.1	Inleiding	42
3.5.2	De verplaatsingsvektor als functie van de lokale axiale coördinaat	43
3.5.3	De elastische energie per element	44
3.5.4	De potentiële energie ten gevolge van de traagheidskrachten	45

3.5.5	De potentiële energie van de belasting op een element	45
3.5.6	De totale potentiële energie in een rechte, in elementen verdeelde balk	46
3.5.7	De interessante vergelijkingen	48
3.6	Enige opmerkingen over de oplossingsmethode	48
3.6.1	Formulering van de oplossing voor statische problemen	48
3.6.2	Berekening van een aantal eigenfrequenties en eigentrillingsvormen	49
3.6.3	De analyse van gedwongen trillingen	51
3.7	Enige speciale gevallen voor de kinematisch consistente krachtvektor f_c	52
3.8	De spanningsverdeling in een element	52
3.9	Benadering voor de stijfheidsmatrix, de massamatrix en de krachtvektor	56
3.10	Vergelijking der elementen	57
3.10.1	Inleiding	57
3.10.2	Vergelijking voor statische problemen	58
3.10.3	Vergelijking voor dynamische problemen	59
3.11	Slotopmerkingen	64
	Literatuur bij hoofdstuk 3	65
Hoofdstuk 4	Dunwandige kokers met willekeurige dwarsdoorsnede ..	68
4.1	Inleiding	68
4.2	Schematisering van de koker	69
4.3	Hypothesen over de verplaatsingen en spanningen	71
4.3.1	Inleiding	71
4.3.2	Het verplaatsingsveld in een plaat	71
4.3.3	Het spanningsveld in een plaat	72
4.4	De potentiële energie	73
4.4.1	Inleiding	73
4.4.2	De elastische energie in een plaat	74
4.4.3	De potentiële energie van de belasting op een plaat	76
4.4.4	De totale potentiële energie in een koker met lengte L	77

4.5	De differentiaalvergelijkingen	80
4.6	Benaderingsoplossing met behulp van de elementen- methode	82
4.6.1	Inleiding	82
4.6.2	Het verloop van $\hat{v}(x)$ in een kokerelement	83
4.6.3	De stijfheidsmatrix Q_e van een kokerelement ..	86
4.6.4	De relevante krachtvectoren van een koker- element	86
4.6.5	Berekening van de interessante kracht- en ver- plaatsingsgrootheden	87
4.6.6	Berekening van de spanningen in een plaat	87
4.7	Benadering voor lange kokers	91
4.7.1	Inleiding	91
4.7.2	De differentiaalvergelijkingen voor lange kokers	91
4.7.3	Toepassing van de elementenmethode bij lange kokers	93
4.8	Benadering bij verwaarlozing van de rek in omtreks- richting	94
4.8.1	Inleiding	94
4.8.2	Benadering met behulp van de elementenmethode	94
	Literatuur bij hoofdstuk 4	98
Hoofdstuk 5	Kwantificering en vergelijking van de theorieën voor balken met willekeurige doorsnede	100
5.1	Inleiding	100
5.2	Karakterisering van de rekenprogramma's	100
5.3	De mogelijkheden van de rekenprogramma's	105
5.4	Enkele toepassingen van de rekenprogramma's	106
5.5	Konklusies	118
	Literatuur bij hoofdstuk 5	119
Hoofdstuk 6	Huidige mogelijkheden en toekomstige ontwikkelingen.	120
Appendix A	Berekening van de stijfheidsmatrices voor dunwandige balken met open doorsnede	125
A.1	Definities	125
A.2	De konstitutieve vergelijkingen	126
A.3	De elastische energie U	126
A.4	De stijfheidsmatrix als de afschuiving van het midden- vlak en de dwarsdoorsnede ongelijk aan nul is	127

A.5	De stijfheidsmatrix volgens de theorie van Vlasov ..	130
A.6	De stijfheidsmatrix bij een benaderend verplaatsingsveld	132
A.7	De relatieve fout in de componenten van $s_{\omega}^b \cdot Q_{\omega\omega}^b$ ten opzichte van $s_{\omega} \cdot Q_{\omega\omega}$	134
Appendix B	Berekening van de massamatrices voor dunwandige balken met open doorsnede	135
B.1	Definities	135
B.2	De massamatrix voor het verplaatsingsveld volgens de theorie van Vlasov	136
B.3	De massamatrix bij een benaderend verplaatsingsveld	138
B.4	De relatieve fout in de componenten van M_b ten opzichte van de componenten van M_v	139
Appendix C	Berekening van de kinematisch consistente krachtvectoren van de verdeelde belasting	141
C.1	Definities	141
C.2	Kinematisch consistente krachtvektor bij het verplaatsingsveld volgens de theorie van Vlasov	141
C.3	Kinematisch consistente krachtvektor bij het benaderend verplaatsingsveld	143
Appendix D	Berekening van de stijfheidsmatrix voor kokers met willekeurige doorsnede	145
D.1	Definities en veronderstellingen	145
D.2	De elastische energie per plaat, uitgedrukt in δ_p en \bar{v}_p	146
D.3	De spanningsvektor δ_p , uitgedrukt in \bar{v}_p	147
D.4	De elastische energie per plaat, uitgedrukt in $\bar{v}_p(x)$	148
D.5	De elastische energie U_p , gerelateerd aan het globale koördinatensysteem	149
D.6	De elastische energie in een koker ter lengte l ..	149
D.7	Benadering voor de stijfheidsmatrix van een koker-element met lengte l	150
D.8	Berekening van de interessante matrices voor het geval $\epsilon_s = 0$, $\sigma_s = 0$	152

Appendix E	Berekening van de krachtvectoren voor kokers met willekeurige dwarsdoorsnede	154
E.1	Definities en veronderstellingen.....	154
E.2	De potentiële energie ten gevolge van de verdeelde belasting	154
E.3	De potentiële energie ten gevolge van de belasting in de eindvlakken	155
Samenvatting	157
Summary	159

Algemene inleiding

In moderne constructies wordt steeds meer gebruik gemaakt van onderdelen die gekarakteriseerd kunnen worden met de woorden "dunwandige balken". Met zijn constructie-onderdelen die wat hun gedrag betreft een middenpositie innemen tussen balken (in de klassieke zin van het woord) en schalen. De lengte ervan is groot in vergelijking met een karakteristieke afmeting van de dwarsdoorsnede en de wanddikte is klein ten opzichte van die karakteristieke afmeting.

Naar de vorm van de doorsnede kunnen de dunwandige balken in drie groepen verdeeld worden (fig. 1.1) :

1. dunwandige balken met open doorsnede
2. dunwandige balken met gesloten, één- of meercellige doorsnede
3. dunwandige balken met een doorsnede die ten dele open, ten dele gesloten is.

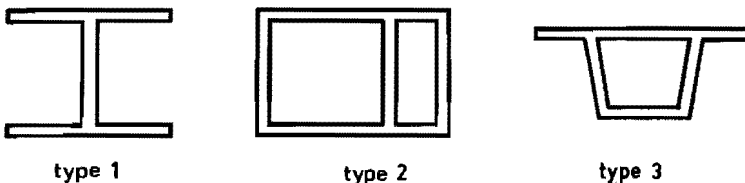


Fig. 1.1 Enige karakteristieke dwarsdoorsneden

Met enig voorbehoud kan gesteld worden dat balken van type 1 worden toegepast als geen hoge eisen gesteld worden aan de eigen torsiestijfheid van de balken.

De elementaire theorieën - de buigingstheorie volgens Bernoulli-Navier en de torsietheorieën volgens de Saint Venant en Bredt - leiden in een aantal situaties tot resultaten die niet voldoende goed overeenstemmen met de werkelijkheid. Met name is dit voor dunwandige balken het geval indien zij op torsie belast worden. De oorzaak hiervan moet gezocht worden in de hypo-

thesen van de Saint Venant en van Bredt volgens welke er bij torsie geen axiale normaalspanningen kunnen optreden terwijl de dwarsdoorsnede vrij kan welven. Bovendien wordt in de elementaire torsietheorie aangenomen dat de vorm van de dwarsdoorsnede niet verandert. Deze veronderstelling is voor balken van type 2 en 3 (zie fig. 1.1) echter slechts acceptabel als er een voldoende groot aantal dwarsschotten is aangebracht.

Reeds in het begin van deze eeuw is - o.a. door von Bach - onderzoek verricht naar het gedrag van dunwandige balken. Op dit gebied bestaat dan ook een uitgebreide literatuur. Wij zullen niet trachten hiervan een overzicht te geven, maar verwijzen daarvoor naar Kollbrunner [1]. Naar onze mening verdient het werk van Vlasov [2] echter bijzondere aandacht. Van de ideeën en werkwijzen uit [2] zal in dit proefschrift herhaaldelijk gebruik worden gemaakt.

In de literatuur op het gebied van de lineaire elasticiteitsleer wordt vaak het principe van de minimale potentiële energie centraal gesteld. Gewoonlijk wordt daarbij voor de potentiële energie een uitdrukking geponeerd waarin reeds - al dan niet expliciet aangegeven - verwachtingen omtrent het verloop der spanningen verdiskonteerd zijn. Het is niet altijd duidelijk hoe die uitdrukkingen tot stand zijn gekomen en welke veronderstellingen eraan ten grondslag liggen.

Ook in dit proefschrift zal bij de afleiding der theorieën steeds dit energieprincipe gehanteerd worden. In tegenstelling met de eerder genoemde werkwijze zullen wij daarbij echter de uitdrukking voor de potentiële energie niet poneren maar met behulp van het energieprincipe volgens Reissner afleiden uit expliciet geformuleerde veronderstellingen over het verplaatsings- en spanningsveld. Het voordeel hiervan is dat - min of meer gevoelsmatige of op ervaring berustende - verwachtingen omtrent het verloop der spanningen en het verloop der verplaatsingen op eenvoudige en systematische wijze in rekening gebracht kunnen worden. Naar onze mening is deze werkwijze daarom ook uitermate geschikt om theorieën te ontwikkelen voor situaties die wezenlijk gekompliceerder zijn dan die welke hier ter sprake komen.

Er zijn een aantal redenen om het principe van de minimale potentiële energie centraal te stellen. De meest belangrijke zijn :

- op deze wijze kunnen de berekeningen overzichtelijk en systematisch worden opgezet; dit voordeel kan ten volle worden uitgebuit door gebruik te maken van matrixnotatie.

- de relevante resultanten van de belasting op het beschouwde konstruktie-onderdeel volgen direkt uit de berekeningen.
- de randkondities in de krachtgrootheden en het verband tussen de snede-(kracht)grootheden en de verplaatsingsgrootheden kunnen eenvoudig afgeleid worden.
- deze opzet der berekeningen biedt de mogelijkheid om verschillende theorieën voor eenzelfde konstruktie-onderdeel met elkaar te vergelijken door de bij die theorieën behorende uitdrukkingen voor de potentiële energie met elkaar te vergelijken. Hierdoor wordt het mogelijk om uitspraken te doen van het type : "In een dergelijke situatie zullen de theorieën tot nagenoeg dezelfde resultaten leiden". Hiervan zal met name in hoofdstuk 3 gebruik gemaakt worden.
- deze aanpak is uitermate geschikt om benaderingsmethoden te ontwikkelen die zich goed lenen voor verwerking met een digitale rekenautomaat. Ook dit voordeel kan in niet onbelangrijke mate vergroot worden door gebruik te maken van matrixnotatie.

In dit proefschrift worden enige theorieën voor dunwandige balken besproken. Hoofdstuk 3 bevat een modifikatie van de theorie volgens Vlasov voor het statische en dynamische gedrag van balken van type 1. De modifikatie betreft de invloed van de afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede bij torsie en buiging. Nagegaan wordt onder welke omstandigheden deze deformatie buiten beschouwing gelaten mag worden. De hypothesen van Vlasov over de vormvastheid van de doorsnede en over het patroon der werving blijven gehandhaafd.

In hoofdstuk 4 komen enige theorieën ter sprake voor dunwandige, cilindrische balken met willekeurige dwarsdoorsnede, dus voor balken van type 1, 2 en 3. In overeenstemming met Vlasov [2] wordt de cilindrische balk door het aanbrengen van denkbeeldige sneden langs beschrijvende verdeeld in een aantal rechthoekige platen, strippen genaamd. Over het verloop van de spanningen en de verplaatsingen in omtreksrichting van een dergelijke strip worden veronderstellingen geponeerd, die enigszins afwijken van de veronderstellingen uit [2]. Met de eis dat de verplaatsingen op de verbindingslijnen der strippen kontinu zijn kan het verloop van de verplaatsingen in een willekeurige dwarsdoorsnede worden uitgedrukt in een beperkt aantal onbekende functies. Voor deze functies zal een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen worden opgesteld, dat vrijwel steeds zo omvangrijk is dat het ondoenlijk is om de exakte oplossing ervan te bepalen. Daarom zal aandacht worden

besteed aan een benaderingsmethode, die berust op technieken uit de eindige elementenmethode en uitmondt in de ontwikkeling van een kokerelement.

Dit element zal enige overeenkomst vertonen met het klassieke balkelement. Het aantal vrijheidsgraden in de eindvlakken ervan is echter (veel) groter dan bij het klassieke element omdat in hoofdstuk 4 deformatiemogelijkheden in rekening worden gebracht die in de klassieke balkentheorie niet kunnen optreden. Het voordeel van het kokerelement ten opzichte van "gewone" plaalementen is dat het aantal vrijheidsgraden van een in elementen verdeelde balk bij een verdeling in kokerelementen (veel) kleiner kan zijn dan bij een verdeling in plaalementen.

In hoofdstuk 5 komt de opbouw ter sprake van de rekenprogramma's voor de numerieke verwerking van de theorieën uit hoofdstuk 4. Bovendien worden enige betrekkelijk eenvoudige toepassingen van deze programma's besproken en worden de resultaten vergeleken met analytische en/of experimentele resultaten uit de literatuur.

In het laatste hoofdstuk worden de huidige toepassingsmogelijkheden en enige mogelijke uitbreidingen en verfijningen van de theorieën en rekenprogramma's uit de hoofdstukken 3, 4 en 5 geschetst.

Literatuur bij hoofdstuk 1

- |1| Kollbrunner, C.F., Basler, K. : Torsion, Springer-Verlag, Berlin, 1966
- |2| Vlasov, V.Z. : Thin-walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.

HOOFDSTUK 2

Enige definities en afspraken

De analyses in dit proefschrift hebben betrekking op dunwandige, cilindrische balken met konstante dwarsdoorsnede. De relevante materiaaleigenschappen, te weten de elasticiteitsmodulus (E), de constante van Poisson (ν) en de soortelijke massa (ρ_m) worden konstant verondersteld.

De meetkundige plaats van de zwaartepunten der dwarsdoorsneden wordt als of balkas genoemd.¹⁾ De cilinder waarvan de as evenwijdig is met de balkas en die de wand van de balk "door midden" deelt wordt het middenvlak van de balk genoemd. De profiellijn is de snijlijn van het middenvlak met een vlak loodrecht op de as. Bij de berekeningen wordt steeds verondersteld dat de eindvlakken van de balk platte vlakken zijn loodrecht op de as.

De x -as van het te hanteren rechtsdraeiende Cartesische koördinatensysteem x, y, z is evenwijdig met de as. De oorsprong ligt in een der eindvlakken en de positieve richting van de x -koördinaat is zodanig dat de eindvlakken van de balk zullen korresponderen met $x=0$ en $x=l$, waarbij l de lengte is (zie fig. 2.1). De y - en z -as kunnen binnen het kader van de genoemde beperkingen willekeurig gekozen worden.

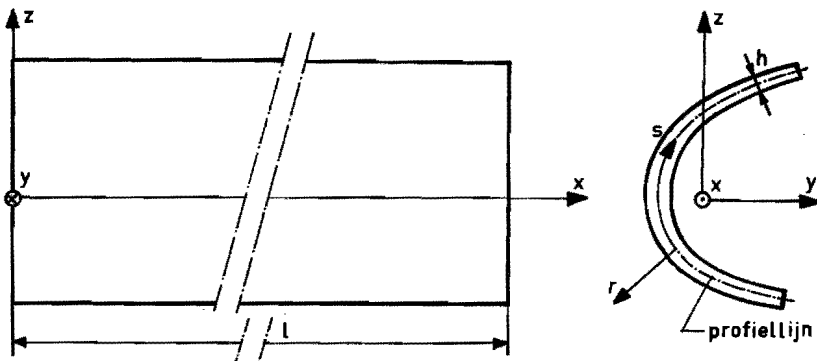


Fig. 2.1. Balk met koördinatensystemen

1) Met doorsnede en dwarsdoorsnede wordt in het vervolg steeds een doorsnede loodrecht op de balkas bedoeld.

Voor de beschrijving van het verloop der verplaatsingen en spanningen in een dwarsdoorsnede zullen wij gebruik maken van het rechtsdraaiende, orthogonale kromlijnige koördinatensysteem x, s, r (zie fig. 2.1). Daarbij is s de boogkoördinaat, gemeten langs de profiellijn, terwijl r in absolute waarde gelijk is aan de afstand tot het middenvlak. De cilinder $r=+\frac{h}{2}$, respectievelijk $r=-\frac{h}{2}$ wordt het buitenoppervlak, respectievelijk binnenoppervlak van de balk genoemd. Voor het middenvlak zal uiteraard gelden : $r=0$. Geven wij de y - en z -koördinaat van een punt van het middenvlak aan met y_0 en z_0 dan kan de vergelijking van dit vlak gegeven worden door $y_0=y_0(s)$ en $z_0=z_0(s)$.

De verplaatsingen van een willekeurig punt in x, y en z -richting, respectievelijk in x, s en r -richting worden aangeduid met \bar{u}_x, \bar{u}_y en \bar{u}_z , respectievelijk \bar{u}_x, \bar{u}_s en \bar{u}_r . Als het betreffende punt een punt is van het middenvlak zullen deze verplaatsingen worden aangeduid met u_x, u_y en u_z , respectievelijk u_x, u_s en u_r (zie fig. 2.2). Voor de benaming der spanningen worden de gebruikelijke afspraken gevolgd. Als de spanningen betrekking hebben op een willekeurig, niet in het middenvlak gelegen punt worden de betreffende symbolen weer voorzien van $\bar{}$ (zie fig. 2.3). Zo zal bijvoorbeeld voor de axiale normaalspanning in het middenvlak gelden : $\sigma_x(x, s) = \bar{\sigma}_x(x, s, r=0)$.

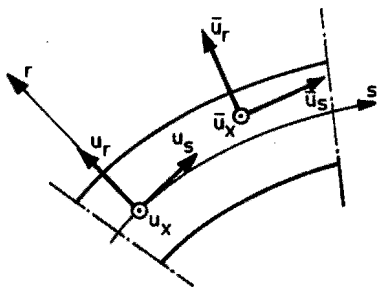


Fig. 2.2 De verplaatsingen

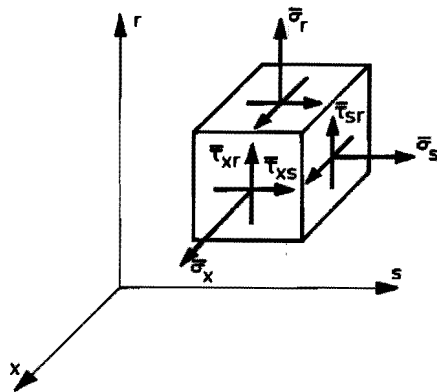


Fig. 2.3 De spanningen

De belasting van de balk kan bestaan uit voorgeschreven spanningen $\bar{\sigma}_{x1}, \bar{\tau}_{xs1}$ en $\bar{\tau}_{xr1}$ in eindvlak 1 ($x=0$) en/of voorgeschreven spanningen $\bar{\sigma}_{x2}, \bar{\tau}_{xs2}$ en $\bar{\tau}_{xr2}$ in eindvlak 2 ($x=l$). Bovendien kan de balk belast worden door

krachten per oppervlakte-eenheid: q_x in x-richting, q_s in s-richting en q_r in r-richting (zie fig. 2.4). Tenzij anders vermeld wordt steeds verondersteld dat deze krachten aangrijpen in het middenvlak $r=0$ van de balk. Een eventuele gekoncentreerde belasting, bijvoorbeeld door een puntkracht, kan op de gebruikelijke wijze in rekening worden gebracht.

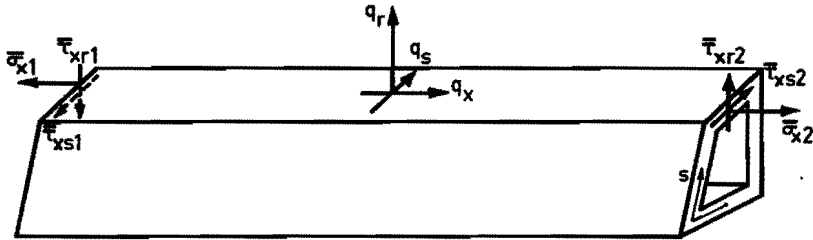


Fig. 2.4 De belasting van de balk

Voor het representeren van de berekeningen en de resultaten van de afleidingen wordt intensief gebruik gemaakt van matrixnotatie. Daarbij worden de volgende afspraken gehanteerd :

- een matrix wordt vrijwel steeds aangegeven met een hoofdletter, eventueel gevolgd door een of meer indices.
- als A een matrix is met n rijen en m kolommen dan zeggen wij dat A van orde $(n \times m)$ is.
- de component in rij r, kolom k van een matrix A wordt aangeduid met $A[r, k]$.
- een vektor moet steeds opgevat worden als een kolomvektor. Een vektor met n componenten is equivalent met een matrix van orde $(n \times 1)$.
- een vektor wordt steeds aangegeven met een kleine letter, eventueel gevolgd door een of meer indices.
- de ^{de} i component van een vektor v wordt aangeduid met $v[i]$.
- transponeren van matrices en vektoren wordt aangegeven met ^T, dus $\overset{T}{A}[r, k] = A[k, r]$.
- inverteren van een matrix wordt aangegeven met ⁻¹, dus $A^{-1} \cdot A = I$; hierin is I de eenheidsdiagonaalmatrix.
- matrices en vektoren, waarvan de componenten een functie zijn van de axiale koördinaat x, worden voorzien van het symbool $\hat{}$, dus $\hat{A} = \hat{A}(x)$.

Het aantal symbolen in dit proefschrift is erg groot. Wij beperken

ons tot een lijstje van de meest voorkomende en belangrijkste grootheden die in het voorgaande nog niet genoemd zijn en die bij de afleidingen een meer dan plaatselijke rol spelen.

V : potentiële energie

U : elastische energie

U_k : potentiële energie ten gevolge van de traagheidskrachten

P : potentiële energie ten gevolge van de belasting

v : verplaatsingsvektor waarin alle relevante verplaatsingsgrootheden van een snede, een element of een gehele balk zijn opgeborgen.

f : krachtvektor waarin alle relevante krachtgrootheden van een snede, een element of een gehele balk zijn opgeborgen.

σ : spanningsvektor

Q : stijfheidsmatrix

M : massamatrix

Deze symbolen kunnen van een of meer indices voorzien zijn. Tenzij anders vermeld hebben deze indices de volgende betekenis :

b : benadering (alleen in hoofdstuk 3)

c : kinematisch consistent (alleen voor krachtvectoren)

e : element

l : theorie voor lange kokers (alleen in hoofdstuk 4)

p : strip of rechthoekige plaat (alleen in hoofdstuk 4)

v : Vlasov-theorie

Ter wille van de overzichtelijkheid en de beknoptheid van de afleidingen in de hoofdstukken 3 en 4 worden in die hoofdstukken alleen de werkwijze en de (formele) resultaten gegeven. Voor de verdere uitwerking en voor tussenresultaten wordt steeds verwezen naar de appendices A tot en met E.

*Dunwandige, cilindrische balken met open dwarsdoorsnede**3.1 Inleiding*

Bij de analyse van dunwandige balken met open dwarsdoorsnede kan gebruik gemaakt worden van de buigingstheorie volgens Bernoulli-Navier en de torsietheorie, die is gebaseerd op de oplossing volgens de Saint-Venant voor een balk met smalle rechthoekige dwarsdoorsnede. Beide theorieën zijn een-dimensionaal van karakter.

In deze elementaire torsietheorie wordt uitgegaan van de hypothesen dat de profiellijn bij belasting niet van vorm verandert, dat er geen axiale normaalspanningen optreden (geen welvingsverhindering) en dat de schuifspanningen in het middenvlak gelijk zijn aan nul. Het gebruiksgebied van deze theorie is beperkt en voor de onderhavige constructie-elementen zijn daarom vele andere eendimensionale theorieën voorgesteld waarin één of meer van de veronderstellingen uit de elementaire theorie worden verworpen.

Bornscheuer [1], Jagn [2], Kollbrunner-Hajdin [3] en Vlasov [4] brengen het effect van een eventuele welvingsverhindering in rekening. Axiale normaalspanningen en schuifspanningen in het middenvlak (de z.g. extra schuifspanningen) spelen in hun beschouwingen een belangrijke rol. Zij handhaven de hypothese dat de profiellijn niet van vorm verandert en veronderstellen dat de invloed van de extra schuifspanningen op de totale deformatie verwaarloosbaar is. Heilig [5] en Roik-Sedlacek [6] tonen aan dat deze veronderstelling voor de gebruikelijke profielen gehanteerd mag worden als de balk niet al te kort is.

Kollbrunner-Hajdin [7] en Sedlacek [8] hebben een methode aangegeven waarmee niet alleen de welving van de dwarsdoorsnede maar ook een zekere vervorming van de profiellijn in rekening kan worden gebracht. Ook zij nemen daarbij aan dat de vervorming ten gevolge van de extra schuifspanningen verwaarloosbaar is.

De genoemde auteurs maken in de hier vermelde publikaties betrekkelijk weinig gebruik van de bestaande energieprincipes; hoogstens passen zij het principe van de virtuele arbeid toe om na te gaan welke resultanten van een

voorgeschreven belasting van belang zijn bij een aangenomen verplaatsingsveld.

In dit hoofdstuk zullen wij, uitgaande van hypothesen over het verloop van de verplaatsingen en de spanningen als functie van de coördinaten in de dwarsdoorsnede, met behulp van het energieprincipe volgens Reissner een uitdrukking afleiden voor de potentiële energie. Op die uitdrukking zullen wij ons steeds baseren bij de analyse van het statische zowel als het dynamische gedrag van dunwandige, cilindrische balken met open dwarsdoorsnede.

De hypothesen over de spanningen en verplaatsingen komen in hoofdzaak overeen met die volgens Vlasov [4]. In tegenstelling tot Vlasov nemen wij niet a priori aan dat de afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede gelijk zijn aan nul. Dit heeft tot gevolg dat buiging en torsie in de af te leiden theorie niet eenvoudig ontkoppeld kunnen worden. Wij zullen een tweetal vereenvoudigingen van de theorie beschouwen en nagaan wanneer die toegepast mogen worden.

Bij de berekeningen volgen wij de in de methode der eindige elementen gebruikelijke werkwijzen, zodat wij ons primair zullen richten op het bepalen van de stijfheidsmatrices, de massamatrices en de z.g. kinematisch consistente krachtvectoren. Meer dan in [4] zullen wij daarbij aandacht besteden aan methoden om spanningen te berekenen uit de verplaatsingen.

3.2 De potentiële energie

3.2.1 Inleiding

In de lineaire driedimensionale elasticiteitstheorie kan voor de potentiële energie een uitdrukking V_3 worden afgeleid waarin alleen verplaatsingsfuncties en voorgeschreven belastinggrootheden optreden.

De veronderstellingen, die in het kader van een theorie worden gemaakt over het verplaatsingsveld resulteren veelal in een veld dat één- of tweedimensionaal van karakter is, d.w.z. een veld waarin de onbekende functies die dat veld beschrijven, nog slechts afhangen van één, respectievelijk twee onafhankelijke (geometrische) coördinaten.

Substitutie van een dergelijk veld in V_3 levert soms geen bruikbare uitdrukking voor de potentiële energie. Visser [10] geeft hiervan een treffende illustratie; hij laat zien dat de stijfheid van een trekstaaf wordt overschat met 50% als de gebruikelijke hypothese (alleen verplaatsingen in axiale richting) wordt gehanteerd. Deze afwijking wordt veroorzaakt doordat bij de afleiding van V_3 gebruik wordt gemaakt van de wet van Hooke terwijl die wet, toegepast op het aangenomen verplaatsingsveld, resul-

teert in een spanningsveld dat niet overeenstemt met het te verwachten veld.

Bij een één- of tweedimensionaal verplaatsingsveld kan een bruikbare relatie voor de potentiële energie worden bepaald door bij de afleiding een aangepaste versie van de wet van Hooke te hanteren of door, in overeenstemming met [10], een werkwijze te volgen waarin zowel hypothesen over de spanningen als over de verplaatsingen verdiskonteerd kunnen worden. Wij passen de laatste methode toe en maken gebruik van het energieprincipe volgens Reissner.

Dit principe is gebaseerd op een door Hellinger geformuleerde energieuitdrukking H (zie bijv. Langhaar [9] en Visser [10]):

$$H = -\Gamma + C + U_k + P_c + P_r \quad (3.2.1)$$

Hierin hangt Γ alleen af van spanningsgrootheden terwijl C zowel van spannings- als van verplaatsingsgrootheden afhangt. U_k , P_r en P_c representeren de bijdragen van respectievelijk de traagheidskrachten, de voorgeschreven belasting in de eindvlakken en de voorgeschreven belasting op het cilindrische oppervlak van de balk. Geven wij de interessante spannings- en verplaatsingsgrootheden symbolisch aan met σ , respectievelijk v , dan kan H in symbolische vorm H geschreven worden: $\Gamma = \Gamma(\sigma^2)$, $C = C(\sigma, v)$, $U_k = U_k(\dot{v}, v)$, $P_c = P_c(\sigma^0, v)$ en $P_r = P_r(\sigma^0, v)$ waarbij 0 aangeeft dat de betreffende grootheid een voorgeschreven waarde heeft.

Volgens Reissner is de variatie van H gelijk aan nul voor elke toelaatbare variatie van σ en v . Variëren van σ levert de konstitutieve vergelijkingen $\sigma = \sigma(v)$, die beschouwd kunnen worden als de aan de veronderstellingen over het spannings- en verplaatsingsveld aangepaste versie van de wet van Hooke. Deze vergelijkingen worden gebruikt om de spanningsgrootheden σ te elimineren uit (3.2.1), waardoor een uitdrukking ontstaat die alleen afhangt van de verplaatsingsgrootheden v en de voorgeschreven belasting σ^0 en die dus geïnterpreteerd kan worden als een relatie voor de potentiële energie V :

$$V = U + U_k + P_c + P_r \quad (3.2.2)$$

U is de elastische energie, die U in symbolische vorm U is gedefinieerd door:

$$U(v^2) = -\Gamma(\sigma^2(v)) + C(\sigma(v), v) \quad (3.2.3)$$

Met het principe van Reissner volgt dat de variatie van V gelijk is aan nul voor iedere kinematisch toelaatbare variatie van de verplaatsingsgrootheden. Voor ons geval kan bovendien worden aangetoond dat de tweede variatie

van V positief definitief is. Deze beweringen tezamen vormen het principe van de minimale potentiële energie.

Uitgaande van veronderstellingen over het verplaatsings- en het spanningsveld zullen wij in dit deelhoofdstuk achtereenvolgens de termen U , U_k , P_c en P_r bepalen en uitdrukken in de voorgeschreven belasting en een aantal onbekende verplaatsingsfuncties.

3.2.2 Het verplaatsingsveld en het spanningsveld

De door Vlasov [4] geponeerde hypothesen over de verplaatsingen resulteren in een ééndimensionaal veld waarin de afhankelijkheid van de coördinaten s en r in de dwarsdoorsnede bekend is. Deze veronderstellingen zijn :

- de verplaatsingen \bar{u}_x , \bar{u}_s en \bar{u}_r van een willekeurig punt (x, s, r) van de balk kunnen met de Love-Kirchhoff hypothesen worden uitgedrukt in de verplaatsingen van punten van het middenvlak.
- de verplaatsingen u_x , u_s en u_r van punten van het middenvlak zijn te schrijven als de som van een aantal produkten van een bekende functie van de boogcoördinaat s en een onbekende functie van de axiale coördinaat x en de tijd t .

Het verband tussen de verplaatsingen u_s en u_r enerzijds en de boogcoördinaat s anderzijds wordt bepaald door de hypothese dat de profiellijn bij belasting niet van vorm verandert. Hierdoor kunnen u_s en u_r in een willekeurige doorsnede x worden uitgedrukt in de verplaatsingen u_{yd} en u_{zd} in y -, respectievelijk z -richting van een willekeurig punt D van die doorsnede en de hoekverdraaiing ϕ_x van die doorsnede om de x -as. Kiezen wij de coördinaten y_d en z_d van D onafhankelijk van x dan geldt (fig. 3.1):

$$u_s(x, s, t) = + \frac{dy_o}{ds} \cdot u_{yd}(x, t) + \frac{dz_o}{ds} \cdot u_{zd}(x, t) + \rho(s) \cdot \phi_x(x, t) \quad (3.2.4)$$

$$u_r(x, s, t) = - \frac{dz_o}{ds} \cdot u_{yd}(x, t) + \frac{dy_o}{ds} \cdot u_{zd}(x, t) + g(s) \cdot \phi_x(x, t) \quad (3.2.5)$$

waarbij $\rho(s)$ en $g(s)$ zijn gedefinieerd door:

$$\rho(s) = \frac{dz_o}{ds} \{y_o(s) - y_d\} - \frac{dy_o}{ds} \{z_o(s) - z_d\} \quad (3.2.6)$$

$$g(s) = \frac{dy_o}{ds} \{y_o(s) - y_d\} + \frac{dz_o}{ds} \{z_o(s) - z_d\} \quad (3.2.7)$$

De totale axiale verplaatsing u_x van punten van het middenvlak wordt als functie van s bepaald uit de veronderstelling dat $u_x(x, s, t)$ gelijk is

aan de som van een axiale verplaatsing $u_{x_0}(x,t) - y_0(s) \cdot \phi_z(x,t) + z_0(s) \cdot \phi_y(x,t)$ ten gevolge van een beweging van doorsnede x als star vlak en een axiale verplaatsing $\omega(s) \cdot \beta(x,t)$ ten gevolge van de welving van die doorsnede.

Evenals Vlasov nemen wij aan dat het patroon van de welving, ω , gelijk zal zijn aan het patroon volgens de elementaire torsiëtheorie, zodat zal gelden:

$$\rho(s) = \frac{d\omega}{ds} \quad (3.2.8)$$

Onze veronderstelling over de axiale verplaatsing luidt dus (zie fig. 3.1):

$$u_x(x,s,t) = u_{x_0}(x,t) - y_0(s) \cdot \phi_z(x,t) + z_0(s) \cdot \phi_y(x,t) + \omega(s) \cdot \beta(x,t) \quad (3.2.9)$$

Naast de genoemde hypothesen neemt Vlasov nog aan dat de afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede gelijk zijn aan nul. Wij zullen hiervan echter geen gebruik maken.

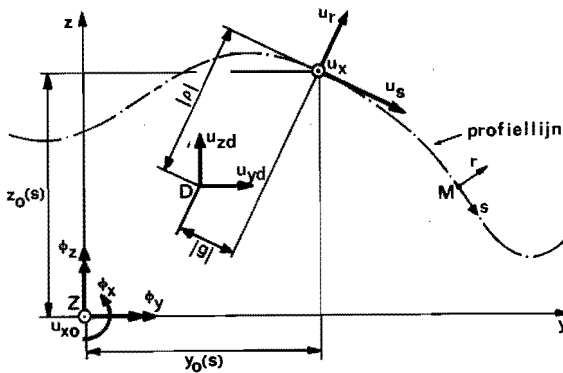


Fig. 3.1 De interessante verplaatsingsgrootheden in een dwarsdoorsnede.

Bereken wij de onafhankelijke verplaatsingsfuncties u_{x_0} , u_{yd} , u_{zd} , ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z en β op in de verplaatsingsvektor \vec{v} :

$$\vec{v}(x,t) = \begin{bmatrix} u_{x_0} & u_{yd} & \phi_z & u_{zd} & \phi_y & \phi_x & \beta \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

en definiëren wij de matrix A door:

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_0 & 0 & z_0 & 0 & \omega \\ 0 & \frac{dy_0}{ds} & 0 & \frac{dz_0}{ds} & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \frac{dz_0}{ds} & 0 & \frac{dy_0}{ds} & 0 & g & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

dan kunnen wij schrijven:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_s \\ u_r \end{bmatrix} (x, s, t) = A(s) \cdot \nabla(x, t) \quad (3.2.12)$$

Met de Love-Kirchhoff hypothesen kan het verband tussen de verplaatsingen van een niet in het middenvlak gelegen punt en de verplaatsingen van punten van het middenvlak worden bepaald. Als R de kromtestraal van de profiellijn is dan volgt:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_s \\ \bar{u}_r \end{bmatrix} (x, s, r, t) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_s \\ u_r \end{bmatrix} (x, s, t) - r \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial x} \\ \frac{\partial u_r}{\partial s} - \frac{u_s}{R} \\ 0 \end{bmatrix} (x, s, t) \quad (3.2.13)$$

Bij de geponeerde veronderstellingen over het verplaatsingsveld behoort een rekveld, waarin alleen de axiale rek $\bar{\epsilon}_x$ en de afschuiving $\bar{\gamma}_{xs}$ ongelijk zijn aan nul. Er geldt:

$$\bar{\epsilon}_x(x, s, r, t) = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \epsilon_x - r \cdot \epsilon_b \quad (3.2.14)$$

$$\bar{\gamma}_{xs}(x, s, r, t) = \frac{R}{R+r} \cdot \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} = \frac{R}{R+r} \cdot (\gamma_m - (2 + \frac{r}{R}) \cdot r \cdot \gamma_s) \quad (3.2.15)$$

waarbij:

$$\epsilon_x(x, s, t) = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_b(x, s, t) = \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \quad (3.2.16)$$

$$\gamma_m(x, s, t) = \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_s(x, s, t) = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (3.2.17)$$

Bij de afleiding van de uitdrukking voor de elastische energie U via het principe van Reissner hanteren wij de in de klassieke plaat- en schalentheorie gebruikelijke hypothesen over het spanningsveld. Volgens die hypothesen zijn $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\tau}_{xr}$ en $\bar{\tau}_{sr}$ gelijk aan nul en zijn $\bar{\sigma}_x$ en $\bar{\tau}_{xs}$ lineair in r. Hoewel de rek in omtreksrichting, $\bar{\epsilon}_s$, gelijk is aan nul nemen wij aan

dat ook de normaalspanning in die richting, $\bar{\sigma}_s$, overall nul gesteld mag worden.

Voor de van nul verschillende spanningen $\bar{\sigma}_x$ en $\bar{\tau}_{xs}$ kunnen wij op grond van het bovenstaande dus noteren:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\tau}_{xs} \end{bmatrix} (x, s, r, t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot \frac{r}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cdot \frac{r}{h} \end{bmatrix} \cdot \hat{\sigma}(x, s, t) \quad (3.2.18)$$

waarbij de spanningsvektor $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x, s, t)$ is gedefinieerd door:

$$\hat{\sigma}(x, s, t) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_b & \tau_m & \tau_s \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

De fysische betekenis van de spanningsgrootheden σ_x , σ_b , τ_m en τ_s is triviaal.

3.2.3 De elastische energie

Door substitutie van het aangenomen verplaatsings- en spanningsveld in de relaties voor Γ en C (zie bijv. [9] en [10]) volgt:

$$\Gamma = \int_{x=0}^l \int_S \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\sigma}_x^2}{E} + \frac{\bar{\tau}_{xs}^2}{G} \right) \cdot \left(1 + \frac{r}{R} \right) \cdot dr \cdot ds \cdot dx \quad (3.2.20)$$

$$C = \int_{x=0}^l \int_S \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\epsilon}_x + \bar{\tau}_{xs} \cdot \bar{\gamma}_{xs} \right) \cdot \left(1 + \frac{r}{R} \right) \cdot dr \cdot ds \cdot dx \quad (3.2.21)$$

Met \int_S wordt hierbij integratie langs de gehele profiellijn aangeduid. Daar $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xs}$, $\bar{\epsilon}_x$ en $\bar{\gamma}_{xs}$ bekende functies van r zijn kan de integratie over de wanddikte worden uitgevoerd. Dit levert:

$$\Gamma = \int_{x=0}^l \int_S \frac{1}{2} \hat{\sigma} \cdot F_{\sigma} \cdot \hat{\sigma} \cdot h(s) \cdot ds \cdot dx \quad (3.2.22)$$

$$C = \int_{x=0}^l \int_S \hat{\sigma} \cdot (W_{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + W_{\epsilon} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + W_{\nu} \cdot \hat{v}) \cdot h(s) \cdot ds \cdot dx \quad (3.2.23)$$

met positief definitie matrix F_{σ} .

Omdat U_k , P_r en P_c onafhankelijk zijn van $\bar{\sigma}$ zal voor iedere toelaatbare variatie van $\bar{\sigma}$ gelden: $\delta H = -\delta I + \delta C = 0$, waaruit voor $\bar{\sigma}$ kan worden afgeleid:

$$\bar{\sigma}(x, s, t) = \frac{1}{2} (F_{\sigma} + F_{\sigma}^{\vee})^{-1} \cdot (W_{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + W_{\epsilon} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + W_{\vee} \cdot \bar{v}) \quad (3.2.24)$$

Substitutie van dit resultaat in $U = -I + C$ levert voor de elastische energie een relatie waarin behalve \bar{v} en $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ ook $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}$ voorkomt:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} & \bar{v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{\rho\rho} & S_{\rho\epsilon} & S_{\rho\vee} \\ S_{\epsilon\rho} & S_{\epsilon\epsilon} & S_{\epsilon\vee} \\ S_{\vee\rho} & S_{\vee\epsilon} & S_{\vee\vee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\ \bar{v} \end{bmatrix} dx \quad (3.2.25)$$

Binnen het kader van de hypothesen over het verplaatsings- en spanningsveld is deze uitdrukking voor U exakt. Voor een balk met "voldoende zwakgekromde" profiellijn en "voldoende kleine" wanddikte h is in [11] aangetoond dat de termen met $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}$ verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de overige termen. Voorwaarde is daarbij dat de balk tenminste zo lang is dat berekeningen met een eëndimensionale theorie zoals de onderhavige nog van enige praktische betekenis kunnen zijn. Bovendien moet $\int_S (1 + \frac{h}{R}) \cdot f(s) ds$ voor iedere functie $f(s)$ voldoende nauwkeurig benaderd worden door $\int f(s) ds$ en moet bij de berekening van de bijdrage van $\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\epsilon}_x$ in (3.2.21) de afschuiving van de dwarsdoorsnede en van het middenvlak verwaarloosd mogen worden. De buigspanning $\sigma_b(x, s)$ is dan overal gelijk aan nul. Het is uiteraard niet geoorloofd deze afschuiving buiten beschouwing te laten bij de berekening van de bijdrage van $\bar{\tau}_{x5} \cdot \bar{\gamma}_{x5}$ tot C . Balken die aan de hier aangestipte eisen voldoen zullen wij dunwandig noemen.

Het heeft geen zin in de verdere berekeningen de termen met $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}$ in rekening te brengen omdat door de veronderstellingen over het verplaatsingsveld - en in het bijzonder door de veronderstelling over het patroon van de welvingafwijkingen ten opzichte van de exakte oplossing worden geïntroduceerd waarvan niet verwacht kan worden dat zij veel kleiner zijn dan de afwijkingen ten gevolge van het weglaten van deze termen.

Voor dunwandige balken wordt de elastische energie in deze benadering gegeven door de direkt uit (3.2.25) af te leiden relatie

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} & \hat{v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{\epsilon\epsilon} & S_{\epsilon v} \\ S_{v\epsilon} & S_{vv} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\ \hat{v} \end{bmatrix} dx \quad (3.2.26)$$

De optredende deelmatrices S_{ab} zijn gedefinieerd door:

$$S_{ab} = \int_S \frac{1}{2} \hat{W}_a \cdot (F_\sigma + \hat{F}_\sigma)^{-1} \cdot \hat{W}_b \cdot h(s) \cdot ds \quad (a = \epsilon, v; \quad b = \epsilon, v) \quad (3.2.27)$$

Bij de berekening ervan formeert zich een aantal integralen, die karakteristiek zijn voor de dwarsdoorsnede van de balk:

$$F = \int_S h(s) \cdot ds \quad ; \quad J_s = \frac{1}{3} \int_F h^2(s) \cdot dF \quad (3.2.28)$$

$$S_a = \int_F a(s) \cdot dF \quad (a = y, z, \omega) \quad (3.2.29)$$

$$I_{ab} = \int_F a(s) \cdot b(s) \cdot dF \quad (a = y, z, \omega; \quad b = y, z, \omega) \quad (3.2.30)$$

$$X_{ab} = \int_F \frac{da}{ds} \cdot \frac{db}{ds} \cdot dF \quad (a = y, z, \omega; \quad b = y, z, \omega) \quad (3.2.31)$$

Hierin is $\int_S f(s) \cdot h(s) \cdot ds$ aangegeven met $\int_F f(s) \cdot dF$.

3.2.4 De potentiële energie van de traagheidskrachten

De potentiële energie van de traagheidskrachten, U_k , wordt bepaald door deze krachten op te vatten als voorgeschreven volumekrachten $-s_m \ddot{u}_x$, $-s_m \ddot{u}_s$ en $-s_m \ddot{u}_r$ in respektievelijk x -, s - en r -richting. Dan volgt:

$$U_k = \int_{x=0}^l \int_S \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_m (\ddot{u}_x \cdot \bar{u}_x + \ddot{u}_s \cdot \bar{u}_s + \ddot{u}_r \cdot \bar{u}_r) \cdot (1 + \frac{r}{R}) \cdot dr \cdot ds \cdot dx \quad (3.2.32)$$

en met de veronderstellingen over het verplaatsingsveld kan U_k worden uitge-

drukt in de vektoren \vec{v} , $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2}$. Voor dunwandige balken kan worden aangetoond dat de termen met $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2}$ verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de overige termen. Wordt, evenals bij de berekening van U , verondersteld dat bij integratie over de profiellijn $\frac{h}{R}$ ten opzichte van 1 verwaarloosd mag worden, dan kunnen wij schrijven:

$$U_k = \int_{x=0}^l \vec{v} \cdot T_m \cdot \ddot{v} \cdot dx, \quad (3.2.33)$$

waarbij de matrix T_m bepaald is door:

$$T_m = \int_S s_m \cdot \vec{A}(s) \cdot A(s) \cdot h \cdot ds = \int_F s_m \cdot \vec{A} \cdot A \cdot dF \quad (3.2.34)$$

Omdat de in de balk opgehoopte kinetische energie in deze benadering gelijk is aan $\frac{1}{2} \int_{x=0}^l \vec{v} \cdot T_m \cdot \dot{v} \cdot dx$ zullen wij T_m de specifieke massamatrix noemen.

Bij de berekening ervan treedt naast de reeds geïntroduceerde karakteristieken van de dwarsdoorsnede nog een geometrische grootte op, namelijk het polaire oppervlaktetraagheidsmoment ten opzichte van punt D:

$$I_d = \int_F \{(y_o - y_d)^2 + (z_o - z_d)^2\} \cdot dF \quad (3.2.35)$$

3.2.5 De potentiële energie van de belasting

Voor dunwandige balken mogen wij aannemen dat de verdeelde belasting op het cilindrische oppervlak van de balk, $\vec{q}(x, s, t) = [q_x \ q_s \ q_r]$, aangrijpt in het middenvlak $r = 0$. De potentiële energie van deze belasting, P_c , is dan gelijk aan:

$$P_c = - \int_{x=0}^l \int_S (q_x \cdot u_x + q_s \cdot u_s + q_r \cdot u_r) \cdot ds \cdot dx \quad (3.2.36)$$

en kan in matrixnotatie worden geschreven als:

$$P_c = - \int_{x=0}^l \vec{v} \cdot \hat{f}_c \cdot dx \quad (3.2.37)$$

De krachtvektor $\hat{f}_c = \hat{f}_c(x, t)$, die is gedefinieerd door:

$$\hat{f}_c(x, t) = \int_S \vec{A}(s) \cdot \vec{q}(x, s, t) \cdot ds, \quad (3.2.38)$$

bevat alle relevante informatie over de verdeelde belasting in doorsnede x .
 Duiden wij de componenten ervan aan met k_x , k_y , k_z , m_x , m_y , m_z en b , dus:

$$\mathbf{f}_c(x, t) = \begin{bmatrix} k_x & k_y & m_z & k_z & m_y & m_x & b \end{bmatrix}, \quad (3.2.39)$$

dan blijkt bij uitwerken van (3.2.38) te gelden:

$$k_x = \int_S q_x(x, s, t) \cdot ds \quad (3.2.40)$$

$$k_y = \int_S \left(\frac{dy_o}{ds} \cdot q_s - \frac{dz_o}{ds} \cdot q_r \right) \cdot ds; \quad m_z = - \int_S y_o \cdot q_x \cdot ds \quad (3.2.41)$$

$$k_z = \int_S \left(\frac{dz_o}{ds} \cdot q_s + \frac{dy_o}{ds} \cdot q_r \right) \cdot ds; \quad m_y = \int_S z_o \cdot q_x \cdot ds \quad (3.2.42)$$

$$m_x = \int_S (\rho \cdot q_s + g \cdot q_r) \cdot ds \quad ; \quad b = \int_S \omega(s) \cdot q_x \cdot ds \quad (3.2.43)$$

Daarbij zijn k_x , k_y , k_z en m_x , m_y , m_z krachten, respectievelijk momenten per axiale lengte-eenheid; b is het (axiale) bimoment per axiale lengte-eenheid.

De potentiële energie van de belasting in de eindvlakken $x = 0$ en $x = l$ van de balk is gelijk aan:

$$P_r = - \int_F (\bar{\sigma}_x \cdot \bar{u}_x + \bar{\tau}_{xs} \cdot \bar{u}_s + \bar{\tau}_{xr} \cdot \bar{u}_r) \cdot dF \Big|_{x=0}^l \quad (3.2.44)$$

waarbij voor $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xs}$ en $\bar{\tau}_{xr}$ aan rand 1 ($x=0$) en aan rand 2 ($x=l$) $\bar{\sigma}_{x1}$, $\bar{\tau}_{xs1}$ en $\bar{\tau}_{xr1}$, respectievelijk $\bar{\sigma}_{x2}$, $\bar{\tau}_{xs2}$ en $\bar{\tau}_{xr2}$ gelezen moet worden. In deze relatie

is $\int_S \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dots \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot dr \cdot ds$ aangegeven met $\int_F \dots dF$.

Bij de bepaling van de bijdrage van $\bar{\sigma}_x \cdot \bar{u}_x$ wordt de afschuiving van de dwarsdoorsnede en van het middenvlak gelijk gesteld aan nul. De reden hiervan is gelegen in de verwaarlozingen die zijn ingevoerd bij de berekening van de bijdrage van de term $\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\epsilon}_x$ in (3.2.21). Dan geldt dus:

$$\bar{\sigma}_x \cdot \bar{u}_x = \bar{\sigma}_x \cdot \left\{ u_{x0} + (z_o + r \cdot \frac{dz_o}{ds}) \cdot \phi_y - (y_o - r \cdot \frac{dy_o}{ds}) \cdot \phi_z + (\omega + r \cdot g) \cdot \beta \right\} \quad (3.2.45)$$

Substitutie van dit resultaat en van de veronderstellingen over \bar{u}_s en \bar{u}_r in (3.2.44) levert dat de bijdrage tot P_r van de voorgeschreven spanningen

gen voor elk der eindvlakken wordt bepaald door een zevental resultanten. Voor de spanningen in een willekeurige doorsnede $x=x_1$ geldt een overeenkomstige berekening. Bepalen wij namelijk de potentiële energie van een afgesneden deel $0 \leq x \leq x_1$ van de balk dan blijkt dat van de spanningen $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xs}$ en $\bar{\tau}_{xr}$ in doorsnede $x=x_1$ slechts de volgende karakteristieken van belang zijn:

$$K_x = \int_F \bar{\sigma}_x \cdot dF \quad (3.2.46)$$

$$K_y = \int_F \left(\frac{dy}{ds} \cdot \bar{\tau}_{xs} - \frac{dz}{ds} \cdot \bar{\tau}_{xr} \right) \cdot dF; \quad M_z = - \int_F \left(y_o - r \cdot \frac{dz}{ds} \right) \cdot \bar{\sigma}_x \cdot dF \quad (3.2.47)$$

$$K_z = \int_F \left(\frac{dz}{ds} \cdot \bar{\tau}_{xs} + \frac{dy}{ds} \cdot \bar{\tau}_{xr} \right) \cdot dF; \quad M_y = \int_F \left(z_o + r \cdot \frac{dy}{ds} \right) \cdot \bar{\sigma}_x \cdot dF \quad (3.2.48)$$

$$M_x = \int_F \left((\rho \cdot r) \bar{\tau}_{xs} + g \cdot \bar{\tau}_{xr} \right) \cdot dF; \quad B = \int_F (\omega + r \cdot g) \cdot \bar{\sigma}_x \cdot dF \quad (3.2.49)$$

K_x , K_y en K_z zijn de resulterende krachten in x-, y- en z-richting, M_x , M_y en M_z zijn de resulterende momenten om de x-, y- en z-as en B is het resulterende axiale bimoment. Deze krachtgrootheden bergen wij op in de krachtvector $\hat{f}(x,t)$, die gedefinieerd is door:

$$\hat{f}(x,t) = \begin{bmatrix} K_x & K_y & M_z & K_z & M_y & M_x & B \end{bmatrix} \quad (3.2.50)$$

De krachtvectoren f_1 en f_2 van de eindvlakken $x=0$ en $x=l$ kunnen nu worden bepaald door in (3.2.46)...(3.2.50) $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xs}$ en $\bar{\tau}_{xr}$ te vervangen door $\bar{\sigma}_{x1}$, $\bar{\tau}_{xs1}$ en $\bar{\tau}_{xr1}$, respektievelijk $\bar{\sigma}_{x2}$, $\bar{\tau}_{xs2}$ en $\bar{\tau}_{xr2}$. Wordt bovendien nog gesteld:

$$v_1 = \hat{v}(x=0) \quad ; \quad v_2 = \hat{v}(x=l) \quad (3.2.51)$$

dan volgt dat wij voor P_r ook kunnen schrijven:

$$P_r = - v_2 \cdot f_2 + v_1 \cdot f_1 \quad (3.2.52)$$

3.2.6 De totale potentiële energie

Substitutie van U volgens (3.2.26), U_k volgens (3.2.33), P_c volgens (3.2.37) en P_r volgens (3.2.52) in (3.2.2) levert voor de potentiële energie:

$$V = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\lambda} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{\epsilon\epsilon} & S_{\epsilon v} \\ S_{v\epsilon} & S_{vv} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\ \hat{v} \end{bmatrix} + \hat{v} \cdot T_m \cdot \ddot{\hat{v}} - \hat{v} \cdot \hat{f}_e \right\} dx + \\ - \hat{v}_2 \cdot f_2 + \hat{v}_1 \cdot f_1 \quad (3.2.53)$$

De componenten van de matrices $S_{\epsilon\epsilon}$, $S_{\epsilon v}$, $S_{v\epsilon} = S_{\epsilon v}$, S_{vv} en T_m hangen alleen af van de materiaaleigenschappen E , G en s_m en de karakteristieken F , S_a , I_{ab} , X_{ab} , J_s en I_d ($a, b = y, z, \omega$) van de dwarsdoorsnede. Een aantal van deze karakteristieken, te weten S_a , I_{ab} , X_{ab} en I_d zijn afhankelijk van de ligging van de coördinatensystemen. Door een geschikte keuze kunnen de genoemde matrices aanzienlijk vereenvoudigd worden. Als wij de y - en z -as laten samenvallen met de centrale hoofdtraagheidsassen ($S_y = S_z = 0$; $I_{yz} = 0$), de oorsprong M van de s -coördinaat in een z.g. hoofddoorsprong kiezen ($S_\omega = 0$) en voor D het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz nemen ($I_{y\omega} = I_{z\omega} = 0$), dan nemen $S_{\epsilon\epsilon}$, $S_{\epsilon v}$, $S_{v\epsilon}$, S_{vv} en T_m de in appendix A en B gegeven vorm aan.

In [12] is een programma gepresenteerd om bij gegeven geometrie van de dwarsdoorsnede de interessante karakteristieken te berekenen, zowel voor een willekeurig coördinatensysteem als voor het hiervoor geïntroduceerde hoofdkoördinatensysteem.

3.3 De differentiaalvergelijkingen en de randcondities

Met het principe van de minimale potentiële energie volgt uit (3.2.53) een stelsel inhomogene partiële differentiaalvergelijkingen met randcondities in de componenten van $\hat{v}(x, t)$. Volgens dit principe is de variatie van V gelijk aan nul voor alle kinematisch toelaatbare variaties van \hat{v} ; hierbij moeten traagheidskrachten beschouwd worden als voorgeschreven belastinggrootheden. Wij vinden:

$$S_{\epsilon\epsilon} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + (S_{\epsilon v} - S_{v\epsilon}) \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - S_{vv} \cdot \hat{v} - T_m \cdot \ddot{\hat{v}} = - \hat{f}_c \quad (3.3.1)$$

In elk der eindvlakken zullen zeven kracht- en/of verplaatsingsgrootheden zijn voorgeschreven met dien verstande dat als een component van de krachtvektor (verplaatsingsvektor) van een eindvlak een voorgeschreven waarde bezit de overeenkomstige component van de verplaatsingsvektor (krachtvektor) van dat vlak géén voorgeschreven waarde zal bezitten.

Door variaties van v_1 en v_2 te beschouwen kan het verband tussen de randkrachten en de vektor \hat{v} worden afgeleid. Dit levert:

$$f_1 = S_{\epsilon\epsilon} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + S_{\epsilon v} \cdot \hat{v} \quad \text{voor } x=0 \text{ en alle } t \quad (3.3.2)$$

$$f_2 = S_{\epsilon\epsilon} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + S_{\epsilon v} \cdot \hat{v} \quad \text{voor } x=l \text{ en alle } t. \quad (3.3.3)$$

De werkelijke randcondities voor een specifiek probleem kunnen worden bepaald door van het stelsel vergelijkingen, gevormd door (3.3.2), (3.3.3) en

$$v_1 = \hat{v}(x=0, t) \quad ; \quad v_2 = \hat{v}(x=l, t), \quad (3.3.4)$$

alleen die vergelijkingen te beschouwen waarvan de grootheid in het linkerlid een voorgeschreven waarde heeft. Dit levert in totaal veertien condities op. Wij zullen in het vervolg zowel (3.3.2) en (3.3.3) als (3.3.4) randcondities noemen.

Op de gebruikelijke wijze kan worden aangetoond dat de krachtvektor $\hat{f}(x, t)$ voldoet aan:

$$\hat{f}(x, t) = S_{\epsilon\epsilon} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + S_{\epsilon v} \cdot \hat{v} \quad \text{voor } 0 < x < l \text{ en alle } t, \quad (3.3.5)$$

zodat wij in plaats van (3.3.2) en (3.3.3) ook kunnen schrijven:

$$f_1 = \hat{f}(x=0, t) \quad ; \quad f_2 = \hat{f}(x=l, t) \quad (3.3.6)$$

Door de structuur van $S_{\epsilon\epsilon}$, $S_{\epsilon v}$, $S_{v\epsilon} = S_{\epsilon v}^T$, S_{vv} en T_m valt het stelsel vergelijkingen voor de componenten van $\hat{v}(x, t)$ uiteen in een stelsel van één differentiaalvergelijking met twee randcondities voor de axiale verplaatsing u_{x0} en een stelsel van zes differentiaalvergelijkingen met twaalf randcondities waarin de verplaatsingsfuncties u_{yd} , u_{zd} , ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z en β gekoppeld voorkomen. Om dit duidelijk tot uitdrukking te brengen schrijven wij de differentiaalvergelijkingen (3.3.1) in gewijzigde vorm neer:

$$EF \cdot u_{x0}'' - s_m \cdot F \cdot \ddot{u}_{x0} = -k_x \quad (3.3.7)$$

$$\begin{bmatrix} EI_{yy} \cdot \phi_z'' \\ -EI_{zz} \cdot \phi_y'' \\ -EI_{\omega\omega} \cdot \beta'' \end{bmatrix} + GX \begin{bmatrix} u_{yd}' - \phi_z \\ u_{zd}' + \phi_y \\ \phi_x' + \beta \end{bmatrix} - s_m \begin{bmatrix} I_{yy} \cdot \phi_z \\ -I_{zz} \cdot \phi_y \\ -I_{\omega\omega} \cdot \beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_z \\ -m_y \\ -b \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

$$GJ_s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_x'' \end{bmatrix} + GX \begin{bmatrix} u_{yd}'' - \phi_z' \\ u_{zd}'' + \phi_y' \\ \phi_x'' + \beta \end{bmatrix} - s_m \begin{bmatrix} F & 0 & z_d F \\ 0 & F & -y_d F \\ z_d F & -y_d F & I_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{yd} \\ \ddot{u}_{zd} \\ \ddot{\phi}_x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_y \\ k_z \\ m_x \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

Differentiëren naar x is hier aangegeven met $'$. De matrix X bevat de geometrische karakteristieken $X_{yy}, X_{yz}, \dots, X_{\omega\omega}$ en is gedefinieerd door:

$$X = \overset{\nabla}{X} = \begin{bmatrix} X_{yy} & X_{yz} & X_{y\omega} \\ X_{yz} & X_{zz} & X_{z\omega} \\ X_{y\omega} & X_{z\omega} & X_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

Gaan wij op soortgelijke wijze te werk met de vergelijkingen (3.3.5) voor de componenten van $\hat{f}(x,t)$, dan vinden wij:

$$K_x = EF \cdot u_{x0}' \quad (3.3.11)$$

$$\begin{bmatrix} M_z \\ M_y \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} \cdot \phi_z' \\ EI_{zz} \cdot \phi_y' \\ EI_{\omega\omega} \cdot \beta \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

$$\begin{bmatrix} K_y \\ K_z \\ M_x \end{bmatrix} = GJ_s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_x' \end{bmatrix} + GX \begin{bmatrix} u_{yd}' - \phi_z \\ u_{zd}' + \phi_y \\ \phi_x + \beta \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

Uit (3.3.7)...(3.3.9) blijkt dat de differentiaalvergelijkingen alleen dan homogeen zijn als het cilindrische oppervlak van de balk onbelast is, dus als $\hat{f}_c(x,t) = 0$ voor $0 \leq x \leq l$ en alle t . Problemen waarvoor deze voorwaarde vervuld is zullen wij homogeen noemen.

Voor problemen waarin traagheidskrachten geen rol spelen, dus waarvoor $\ddot{\hat{v}}(x,t) = 0$ voor $0 \leq x \leq l$ en voor alle t , gaat (3.3.1) over in een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde; problemen van deze soort zullen wij statisch noemen en het bijbehorende stelsel differentiaalvergelijkingen zal worden aangeduid als het statische stelsel.

3.4 Een bruikbare benadering: de theorie volgens Vlasov

3.4.1 Inleiding

Het bepalen van de algemene oplossing van dynamische, inhomogene problemen stuit in veel gevallen op grote moeilijkheden; voor problemen met een statisch, homogeen karakter kan de oplossing echter betrekkelijk eenvoudig worden aangegeven. Problemen van het eerstgenoemde type zullen dan ook veelal tot een oplossing worden gebracht door een benaderingsmethode - bijvoorbeeld gebaseerd op werkwijzen uit de methode der eindige elementen - te hanteren.

Het stelsel differentiaalvergelijkingen (3.3.1) is veel gekompliceerder dan dat volgens Vlasov [4]. Dit komt onder andere tot uitdrukking in het aantal vergelijkingen; in de onderhavige theorie (waarin een zekere afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede in rekening wordt gebracht) treden zeven onafhankelijke differentiaalvergelijkingen op tegen vier in de theorie uit [4]. Bovendien zijn deze vergelijkingen, in tegenstelling met die volgens Vlasov, ook voor statische problemen gekoppeld.

Bekend is dat de Vlasov-theorie tot voldoende nauwkeurige resultaten leidt als de geometrie van de balk - en in het bijzonder de lengte l ervan - aan zekere eisen voldoet. Het is daarom van belang om na te gaan onder welke omstandigheden de verschillen tussen beide theorieën verwaarloosbaar zijn; bij het onderzoek naar deze omstandigheden zullen wij ons hier beperken tot statische, homogene problemen.

De algemene oplossing $\hat{v}(x)$ voor problemen van dit type bevat veertien integratieconstanten. Met de randcondities (3.3.4) kunnen deze constanten - en dus ook de vektoren $\hat{v}(x)$ en $\hat{f}(x)$ - worden uitgedrukt in de vektoren v_1 en v_2 van de eindvlakken. Vervolgens kan uit de randcondities (3.3.6) het (lineaire) verband worden bepaald tussen enerzijds de door f_1 en f_2 gekarakteriseerde belasting in de eindvlakken en anderzijds de door v_1 en v_2 gekarakteriseerde verplaatsingen van die vlakken.

Voor statische, homogene problemen is de elastische energie U gelijk aan $\frac{1}{2} v_2 \cdot f_2 - \frac{1}{2} v_1 \cdot f_1$. Door nadere analyse van de termen in deze uitdrukking kan worden onderzocht hoe groot de invloed van de afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede op de totale deformatie is. Daaruit resulteren eisen waaraan de geometrie van de balk moet voldoen opdat deze invloed voor iedere willekeurige belasting in de eindvlakken verwaarloosbaar klein zal zijn. Als aan die eisen voldaan is mag de afschuiving ver-

waarloosd worden; de onderhavige theorie gaat dan over in de theorie volgens Vlasov [4].

Deze berekeningen over de invloed van de afschuiving zijn niet zonder meer toepasbaar voor dynamische en/of inhomogene problemen; de voorwaarden waaraan de geometrie van de balk dan moet voldoen kunnen afwijken van die voor homogene, statische problemen. In overeenstemming met de gebruikelijke werkwijze zullen wij aannemen dat ook voor dynamische en inhomogene problemen de afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede verwaarloosd mag worden als de geometrie van de balk voldoet aan de voorwaarden die zijn afgeleid voor statische, homogene problemen.

3.4.2 De oplossing van de homogene statische differentiaalvergelijkingen

De oplossing van (3.3.1) voor homogene, statische problemen wordt - in matrixnotatie - gegeven door:

$$\hat{v}(x) = \hat{D}_a(x) \cdot a \quad (3.4.1)$$

De vektor a bevat veertien integratieconstanten. De componenten van \hat{D}_a zijn lineaire combinaties van de functies $1, x, x^2, x^3, \cosh(\bar{\alpha}x)$ en $\sinh(\bar{\alpha}x)$. Hierin is $\bar{\alpha}$ een karakteristieke grootte die wordt bepaald door de geometrie van de dwarsdoorsnede en de materiaaleigenschappen (zie appendix A).

Met $\hat{v}(x=0) = v_1$ en $\hat{v}(x=l) = v_2$ volgt uit (3.4.1) een stelsel lineaire vergelijkingen voor de integratieconstanten. Om dit stelsel eenvoudig te kunnen noteren bergen wij de componenten van v_1 en v_2 op in de verplaatsingsvektor v_e , gedefinieerd als:

$$v_e = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{x2} & u_{y1} & \phi_{z1} & u_{y2} & \phi_{z2} & u_{z1} & \phi_{y1} & u_{z2} & \phi_{y2} & \phi_{x1} & \beta_1 & \phi_{x2} & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

De indices 1 en 2 hebben betrekking op rand $x=0$, respektievelijk $x=l$. Ter verkorting van de notatie zijn u_{x0} , u_{y0} en u_{z0} vervangen door respektievelijk u_x , u_y en u_z .

Uit (3.4.1) en (3.4.2) volgt dat a moet voldoen aan:

$$v_e = D_a \cdot a \quad (3.4.3)$$

waarbij D_a een vierkante matrix is die direkt kan worden afgeleid uit $\hat{D}_a(x=0)$ en $\hat{D}_a(x=l)$. Omdat \hat{v} in een willekeurige snede x eenduidig uitgedrukt moet

kunnen worden in de vektoren v_1 en v_2 van de eindvlakken zal D_a regulier zijn. Voor de homogene, statische oplossing $\hat{v}(x)$ geldt derhalve:

$$\hat{v}(x) = \hat{D}_a(x) \cdot D_a^{-1} \cdot v_e \quad (3.4.4)$$

Voor kleine en grote waarden van de parameter $\bar{\epsilon} = \bar{a} \cdot l$ (voor $\bar{\epsilon} \ll 1$ en $\bar{\epsilon} \gg 1$) treden moeilijkheden op bij het numeriek bepalen van D_a^{-1} . Deze kunnen worden opgelost door D_a^{-1} niet numeriek maar analytisch te bepalen (zie appendix A). De uitdrukkingen voor de componenten van D_a^{-1} kunnen dan in een vorm gebracht worden die zich wel goed leent voor numerieke berekeningen. Zo kan voor $\bar{\epsilon} \ll 1$ gebruik worden gemaakt van reeksontwikkelingen voor die uitdrukkingen.

3.4.3 De homogene, statische oplossing voor de krachtvektor

Voor homogene, statische problemen kan de krachtvektor $\hat{f}(x)$ met (3.3.11)(3.3.13) worden uitgedrukt in v_e :

$$\hat{f}(x) = \hat{Q}_a(x) \cdot v_e \quad (3.4.5)$$

In analogie met de verplaatsingsvektor v_e definiëren wij een krachtvektor f_e waarin de componenten van $-f_1$ en $+f_2$ worden gerangschikt in een zodanige volgorde dat $\nabla v_e \cdot f_e \equiv \nabla v_2 \cdot f_2 - \nabla v_1 \cdot f_1$; voor f_e moet dan gesteld worden:

$$f_e = \begin{bmatrix} -K_{x1} & K_{x2} & -K_{y1} & -M_{z1} & K_{y2} & M_{z2} & -K_{z1} & -M_{y1} & K_{z2} & M_{y2} & -M_{x1} & -B_1 \\ M_{x2} & B_2 & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

Met (3.4.5) volgt eenvoudig dat de componenten van f_e een lineaire combinatie zijn van de componenten van v_e , dus:

$$f_e = Q_a \cdot v_e \quad (3.4.7)$$

De vierkante matrix Q_a , die het verband legt tussen de krachtgrootheden in de eindvlakken van de balk en de verplaatsingen van die vlakken, wordt de stijfheidsmatrix genoemd (zie ook appendix A). Op fysische gronden volgt dat deze matrix symmetrisch en semi-positief definitief is.

De in de balk opgehoopte elastische energie U is gelijk aan de arbeid, verricht door de belasting in de eindvlakken, dus:

$$U = \frac{1}{2} \nabla v_2 \cdot f_2 - \frac{1}{2} \nabla v_1 \cdot f_1 = \frac{1}{2} \nabla v_e \cdot f_e, \quad (3.4.8)$$

zodat met (3.4.7) volgt:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \cdot \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{v}_e \quad (3.4.9)$$

Omdat de verplaatsingsvektor $\hat{\mathbf{v}}(x)$, waarop de berekening van $\hat{\mathbf{f}}(x)$ is gebaseerd, voldoet aan de homogene statische differentiaalvergelijkingen kan worden aangetoond dat dezelfde stijfheidsmatrix gevonden zal worden indien U niet wordt bepaald op de hiervoor geschetste wijze, maar door substitutie van (3.4.4) in (3.2.26).

3.4.4 Nadere beschouwing van de elastische energie

Voor de bestudering van de invloed van de afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede op de totale deformatie van de balk schrijven wij \mathbf{Q}_a als het verschil van een tweetal matrices $\bar{\mathbf{Q}}_a$ en \mathbf{Q}_a^* , zodat voor de elastische energie U geschreven kan worden:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \cdot \bar{\mathbf{Q}}_a \cdot \mathbf{v}_e - \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \cdot \mathbf{Q}_a^* \cdot \mathbf{v}_e \quad (3.4.10)$$

Daarbij is $\bar{\mathbf{Q}}_a$ een semi-positief definitie matrix die qua structuur overeenkomt met de stijfheidsmatrix volgens de theorieën van Heilig [5] en Janssen [13]. In die theorieën wordt de afschuiving van de dwarsdoorsnede buiten beschouwing gelaten; buiging en torsie kunnen dan eenvoudig ontkoppeld worden. De componenten van $\bar{\mathbf{Q}}_a$ hangen af van de lengte ℓ , van de geometrische karakteristieken $F, I_{yy}, I_{zz}, J_s, I_{\omega\omega}$, van de materiaaleigenschappen E en G en van $\bar{\alpha}$. De componenten van \mathbf{Q}_a^* hangen bovendien nog af van de karakteristieken $X_{yy}, X_{yz}, \dots, X_{\omega\omega}$ die de stijfheid tegen afschuiving bepalen. Voor nadere informatie over $\bar{\mathbf{Q}}_a$ en \mathbf{Q}_a^* wordt verwezen naar [11] en naar appendix A.

In appendix A is plausibel gemaakt dat voor iedere verplaatsingsvektor $\mathbf{v}_e \neq 0$ de term $\frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \cdot \mathbf{Q}_a^* \cdot \mathbf{v}_e$ ten opzichte van $\frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \cdot \bar{\mathbf{Q}}_a \cdot \mathbf{v}_e$ te verwaarlozen is als de balk maar lang genoeg is, d.w.z. als ℓ voldoet aan:

$$\ell^2 \gg \max \left(\frac{12EI_{yy}}{G} \cdot \lambda_{yy}, \frac{12EI_{zz}}{G} \cdot \lambda_{zz}, \frac{12EI_{\omega\omega}}{G} \cdot \lambda_{\omega\omega} \right) \quad (3.4.11)$$

Hierin zijn $\lambda_{yy}, \lambda_{zz}$ en $\lambda_{\omega\omega}$ geometrische karakteristieken die volgens appendix A geheel bepaald worden door $X_{yy}, X_{yz}, \dots, X_{\omega\omega}$.

In een uitgebreide en gedetailleerde analyse over de grootte van de termen in (3.4.10) is in [11] bewezen dat $\frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \cdot \mathbf{Q}_a^* \cdot \mathbf{v}_e \ll \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \cdot \bar{\mathbf{Q}}_a \cdot \mathbf{v}_e$ voor iedere

krachtvektor $f_e \neq 0$ als λ voldoet aan :

$$\lambda^2 > \frac{3}{\Delta} \cdot \max \left(\frac{12EI_{yy}}{G} \cdot \lambda_{yy}, \frac{12EI_{zz}}{G} \cdot \lambda_{zz}, \frac{12EI_{\omega\omega}}{G} \cdot \lambda_{\omega\omega} \right) \quad (3.4.12)$$

Daarbij is Δ een willekeurig positief getal, waarvoor volgens [11] moet gelden:

$$\Delta \geq \frac{1}{2} \lambda_{\omega\omega} \cdot J_s \quad (3.4.13)$$

Om een indruk te krijgen van de grootte van deze factor $\lambda_{\omega\omega} \cdot J_s$ beschouwen wij de situatie dat bij de afleiding der theorie de invloed van de afschuiving van de dwarsdoorsnede buiten beschouwing wordt gelaten. Dan ontstaat de theorie volgens Janssen [13] en blijkt te gelden $\lambda_{\omega\omega} = \frac{1}{X_{\omega\omega}}$, dus :

$$\lambda_{\omega\omega} \cdot J_s = \frac{\int_F h^2 \cdot dF}{\int_F \rho^2 \cdot dF} \quad (3.4.14)$$

Voor de gebruikelijke profielen, zoals I en U balken, is $\lambda_{\omega\omega} \cdot J_s$ zeker veel kleiner dan 1.

Als $\frac{1}{2} v_e \cdot Q_a^* \cdot v_e$ te verwaarlozen is ten opzichte van $\frac{1}{2} v_e \cdot Q_a \cdot v_e$ dan betekent dit volgens [11] dat bij de berekening van de totale elastische energie de bijdrage van de afschuiving van de dwarsdoorsnede geheel en die van de afschuiving van het middenvlak ten dele verwaarloosd mogen worden. Als bovendien $\lambda_{\omega\omega} \cdot J_s$ veel kleiner is dan 1 mag ook de elastische energie ten gevolge van de afschuiving van het middenvlak geheel verwaarloosd worden. Bij de berekening van de potentiële energie mag de afschuiving dan gelijk aan nul gesteld worden, zodat voor de verplaatsingsfuncties zal gelden :

$$\phi_y = - u_z' \quad (3.4.15)$$

$$\phi_z = + u_y' \quad (3.4.16)$$

$$\beta = - \phi_x' \quad (3.4.17)$$

Ook in deze relaties is weer u_y en u_z geschreven in plaats van u_{yd} en u_{zd} . Dit zal in het vervolg steeds geschieden.

3.4.5 De theorie volgens Vlasov

De in 3.2 afgeleide uitdrukking voor de potentiële energie geldt ook als de relaties (3.4.15).....(3.4.17) gehanteerd mogen worden. Bij toepassing

van het principe van de minimale potentiële energie moeten die relaties dan echter als nevencondities in rekening worden gebracht.

Als onafhankelijk te variëren verplaatsingsfuncties kiezen wij de verplaatsing u_x van het zwaartepunt in axiale richting, de verplaatsingen u_y en u_z van het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz in y - en z -richting en de hoekverdraaiing ϕ_x om de x -as. Met $\delta V = 0$ voor alle kinematisch toelaatbare variaties van u_x , u_y , u_z en ϕ_x volgt een stelsel van vier differentiaalvergelijkingen:

$$EF.u_x'' - s_m.F.\ddot{u}_x = -k_x \quad (3.4.18)$$

$$EI_{yy}.u_y'''' - s_m.l_{yy}.\ddot{u}_y'' + s_m.F(\ddot{u}_y + z_d.\ddot{\phi}_x) = k_y - m_z' \quad (3.4.19)$$

$$EI_{zz}.u_z'''' - s_m.l_{zz}.\ddot{u}_z'' + s_m.F(\ddot{u}_z - y_d.\ddot{\phi}_x) = k_z + m_y' \quad (3.4.20)$$

$$EI_{\omega\omega}.\phi_x'''' - GJ_s.\phi_x'' - s_m.l_{\omega\omega}.\ddot{\phi}_x'' + s_m.F(z_d.\ddot{u}_y - y_d.\ddot{u}_z) + s_m.l_d.\ddot{\phi}_x = m_x + b' \quad (3.4.21)$$

en randcondities in de krachtgrootheden voor $x=0$ en $x=l$:

$$\hat{f}(x=0, t) = f_1(t); \quad \hat{f}(x=l, t) = f_2(t) \quad (3.4.22)$$

De componenten van de vektor $\hat{f}(x, t)$ zijn weer gedefinieerd door (3.2.46).... (3.2.50) en kunnen op de gebruikelijke wijze worden uitgedrukt in de onafhankelijke verplaatsingsfuncties. Dit levert:

$$K_x = EF.u_x' \quad (3.4.23)$$

$$K_y = -EI_{yy}.u_y'''' + s_m.l_{yy}.\ddot{u}_y'' - m_z \quad (3.4.24)$$

$$M_z = EI_{yy}.u_y'' \quad (3.4.25)$$

$$K_z = -EI_{zz}.u_z'''' + s_m.l_{zz}.\ddot{u}_z'' + m_y \quad (3.4.26)$$

$$M_y = -EI_{zz}.u_z'' \quad (3.4.27)$$

$$M_x = -EI_{\omega\omega}.\phi_x'''' + GJ_s.\phi_x'' + s_m.l_{\omega\omega}.\ddot{\phi}_x'' + b \quad (3.4.28)$$

$$B = -EI_{\omega\omega}.\phi_x'' \quad (3.4.29)$$

Wij wijzen erop dat deze vergelijkingen voor statische problemen geheel overeenstemmen met die volgens Vlasov [4].

3.5 De methode der eindige elementen

3.5.1 Inleiding

De differentiaalvergelijkingen (3.4.18)...(3.4.21) zijn eenvoudiger dan het oorspronkelijke stelsel (3.3.7)...(3.3.9). Toch kan ook in de theorie volgens Vlasov de exakte oplossing voor inhomogene, instationaire problemen slechts in uitzonderingsgevallen eenvoudig worden aangegeven. Dynamische problemen en problemen waarin het cilindrisch oppervlak van de balk belast is, kunnen echter voldoende nauwkeurig worden opgelost door gebruik te maken van de methode der eindige elementen. Het uitgangspunt van die methode wordt hier gevormd door de relatie voor de potentiële energie, die ten grondslag ligt aan de Vlasov-theorie en door veronderstellingen over het verloop van de verplaatsingsvektor $\hat{v}(x,t)$ als functie van de axiale coördinaat.

Door het aanbrengen van $N+1$ snedevlakken (inclusief de eindvlakken van de balk) loodrecht op de as van de balk wordt de balk verdeeld in N stukken, die wij elementen zullen noemen; in overeenstemming met het spraakgebruik in de elementenmethode spreken wij over knooppunten in plaats van snedevlakken. Per element voeren wij een lokale axiale coördinaat x_e in, waarvan de positieve richting correspondeert met de positieve richting van de globale x -coördinaat. De eindvlakken van een element met lengte l_e zullen overeenkomen met $x_e=0$ en $x_e=l_e$.

Over het verloop van de verplaatsingsvektor $\hat{v}(x_e,t)$ in axiale richting worden veronderstellingen geponeerd, zodanig dat \hat{v} in een willekeurige snede x_e van een element kan worden uitgedrukt in de vektoren $v_{e1}=\hat{v}(x_e=0,t)$ en $v_{e2}=\hat{v}(x_e=l_e,t)$ van de eindvlakken $x_e=0$ en $x_e=l_e$ van dat element. Tesamen met de hypothesen uit 3.2.2 over \bar{u}_x , \bar{u}_s en \bar{u}_r resulteren deze veronderstellingen voor elk element in een verplaatsingsveld dat als functie van x_e , s en r geheel bepaald is en waarin als onbekenden alleen v_{e1} en v_{e2} optreden; deze vektoren zullen in het algemeen functies zijn van de tijd t .

Voor elk element worden de in dat element opgehoopte elastische energie, de potentiële energie van de traagheidskrachten en de potentiële energie van de belasting op het cilindrisch oppervlak bepaald en uitgedrukt in de vektoren v_{e1} en v_{e2} van dat element. Met behulp van deze resultaten en van de gegevens over de in de knooppunten aangrijpende uitwendige belasting kan de totale, in de balk opgehoopte potentiële energie V worden uitgedrukt in de verplaatsingen van de knooppunten. Toepassing van het principe van de minimale potentiële energie levert dan een stelsel vergelijkingen waaruit de on-

bekende knooppuntsverplaatsingen kunnen worden opgelost (als beweging van de balk als star lichaam verhinderd is).

Indien de verdeling van de balk in elementen wordt verfynd zullen de resultaten van de berekening konvergeren naar de exakte waarden - exakt volgens de theorie van Vlasov - indien het gekozen verplaatsingsveld voldoet aan een aantal eisen die o.a. door Visser [10] en Melosh [14] zijn geformuleerd. Uiteraard is konvergentie alleen dan gewaarborgd als de resultaten niet in belangrijke mate worden beïnvloed door afrondingsfouten.

Binnen het kader van de eisen uit [10] en [14] kan de keuze van het verplaatsingsveld willekeurig zijn. Wij zullen gebruik maken van de homogene, statische oplossing van de differentiaalvergelijkingen volgens Vlasov; voor homogene, statische problemen vinden wij dan de exakte oplossing terwijl wij - op grond van ervaringen met de methode van Rayleigh voor de approximatieve berekening van eigenfrequenties van een konstruktie - verwachten dat berekeningen met dit veld voor problemen met een dynamisch karakter ook bij een betrekkelijk grove verdeling in elementen tot (voldoende) nauwkeurige resultaten zullen leiden.

De berekening van de stijfheidsmatrix voor één element zal een zeer grote overeenkomst vertonen met de berekeningen in 3.4.2 en 3.4.3. Immers, de daar beschouwde balk kan gezien worden als zijnde "opgebouwd" uit één element. Om deze overeenkomst te accentueren zullen wij in dit deelhoofdstuk voor een element dezelfde notatie hanteren als in het voorgaande voor de balk. Dit betekent o.a. dat wij de lokale koördinaat zullen aanduiden met x in plaats van x_e en dat wij de verplaatsingsvectoren v_{e1} en v_{e2} van de eindvlakken zullen aangeven met v_1 en v_2 .

3.5.2 De verplaatsingsvektor als funktie van de lokale axiale koördinaat

Voor het verloop van de vektor \hat{v} als funktie van x in een element (met lengte λ) kiezen wij de homogene statische oplossing van de differentiaalvergelijkingen (3.4.18)...(3.4.21). Deze is te schrijven als:

$$\hat{v}(x) = \hat{D}_v(x) \cdot a \quad (3.5.1)$$

Hierin is a weer de vektor van integratiekonstanten die op dezelfde wijze als in 3.4.2 kan worden uitgedrukt in de verplaatsingsvektor v_e van de eindvlakken van het element:

$$v_e = D_v \cdot a \quad (3.5.2)$$

De definitie van v_e correspondeert met (3.4.2) waarbij de indices 1 en 2 nu echter betrekking hebben op de eindvlakken 1 ($x=0$) en 2 ($x=l$) van het element. Voor de componenten van $\hat{D}_v(x)$ en D_v verwijzen wij naar appendix A.

Omdat D_v regulier is kan a worden opgelost en kan de verplaatsingsvektor $\hat{v}(x)$ in een willekeurige snede x met (3.5.1) worden uitgedrukt in v_e . Er volgt:

$$\hat{v}(x) = \hat{D}_v(x) \cdot D_v^{-1} \cdot v_e \quad (3.5.3)$$

Als het cilindrisch oppervlak van het element belast is en als traagheids krachten een rol spelen zal het werkelijke verplaatsingsveld $\hat{v}(x,t)$ als functie van x afwijken van \hat{v} volgens (3.5.3). Wij nemen aan dat ook dan het verloop van \hat{v} in axiale richting met (3.5.3) voldoende goed beschreven kan worden. Bij dynamische problemen zullen de componenten van v_e echter afhangen van de tijd t. Wij veronderstellen derhalve:

$$\hat{v}(x,t) = \hat{D}_v(x) \cdot D_v^{-1} \cdot v_e(t) \quad (3.5.4)$$

Dit veld voldoet aan de volgens [10] en [14] te stellen eisen.

3.5.3 De elastische energie per element

Substitutie van \hat{v} volgens (3.5.3) in de relaties (3.4.23)...(3.4.29) voor de componenten van \hat{f} leert dat deze vektor voor homogene, statische problemen gegeven kan worden door:

$$\hat{f}(x) = \hat{Q}_v(x) \cdot v_e \quad (3.5.5)$$

In overeenstemming met de werkwijze in 3.4.3 worden de componenten van $f_1 = \hat{f}(x=0)$ en $f_2 = \hat{f}(x=l)$ opgeborgen in de krachtvektor f_e en wel in dezelfde volgorde als in 3.4.3. Dan volgt:

$$f_e = Q_v \cdot v_e \quad (3.5.6)$$

Q_v is de stijfheidsmatrix volgens de Vlasov-theorie (zie appendix A).

Omdat \hat{v} volgens (3.5.3) een oplossing is van de homogene statische differentiaalvergelijkingen kan worden aangetoond dat de in het element opgehoopte elastische energie U gelijk is aan:

$$U = \frac{1}{2} v_e^T \cdot Q_v \cdot v_e \quad (3.5.7)$$

Deze relatie is ook bruikbaar voor dynamische problemen, omdat wij dan voor \hat{v} als functie van x hetzelfde verloop hanteren als voor statische problemen.

3.5.4 De potentiële energie ten gevolge van de traagheidskrachten

Bij invullen van (3.5.4) in (3.2.33) volgt een benadering voor de potentiële energie van de traagheidskrachten, U_k :

$$U_k = \mathbf{v}_e^T \cdot \mathbf{M}_v \cdot \ddot{\mathbf{v}}_e \quad (3.5.8)$$

Hierin is \mathbf{M}_v de zogenaamde massamatrix; deze matrix is symmetrisch en is gedefinieerd als:

$$\mathbf{M}_v = \mathbf{D}_v^{-1} \left\{ \int_{x=0}^l \mathbf{D}_v(x) \cdot \mathbf{T}_m \cdot \hat{\mathbf{D}}_v(x) \cdot dx \right\} \mathbf{D}_v^{-1} \quad (3.5.9)$$

Bij de berekening van de componenten van \mathbf{M}_v (in appendix B) biedt het voordelen om deze matrix te schrijven als de som van twee symmetrische matrices $\bar{\mathbf{M}}_v$ en \mathbf{M}_v^* , zodanig dat $\mathbf{v}_e^T \cdot \bar{\mathbf{M}}_v \cdot \ddot{\mathbf{v}}_e$ gelijk is aan de potentiële energie van de traagheidskrachten als de werkelijke massaverdeling van het element wordt geschematiseerd tot een gekoncentreerde massa per (axiale) lengte-eenheid in het zwaartepunt van de dwarsdoorsnede en een gekoncentreerd massa-traagheidsmoment per (axiale) lengte-eenheid eveneens in het zwaartepunt. De overige termen van U_k worden verzameld in $\mathbf{v}_e^T \cdot \mathbf{M}_v^* \cdot \ddot{\mathbf{v}}_e$.

Voor balken, waarvan de lengte en de geometrie van de dwarsdoorsnede voldoen aan de in 3.4.4 gestelde eisen blijkt dat de term $\mathbf{v}_e^T \cdot \mathbf{M}_v^* \cdot \ddot{\mathbf{v}}_e$ voor iedere $v_e \neq 0$ klein is ten opzichte van $\mathbf{v}_e^T \cdot \bar{\mathbf{M}}_v \cdot \ddot{\mathbf{v}}_e$ (zie appendix B). Als de theorie volgens Vlasov gehanteerd mag worden zal dus bij benadering gelden: $\mathbf{M}_v \approx \bar{\mathbf{M}}_v$. Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld, zullen wij steeds van deze benadering gebruik maken.

3.5.5 De potentiële energie van de belasting op een element

De potentiële energie per (axiale) lengte-eenheid van de belasting op het cilindrische oppervlak van een element is $-\hat{v}(x,t) \cdot \hat{f}_c(x,t)$, waarbij componenten van $\hat{f}_c(x,t)$ op de volgens (3.2.39)....(3.2.43) gegeven wijze samenhangen met de oppervlaktebelasting. Integratie over de lengte van het element le-

vert de totale potentiële energie van de belasting op het cilindrische oppervlak:

$$P_c = - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{f}_c \quad (3.5.10)$$

Daarbij is \mathbf{f}_c de z.g. kinematische consistente krachtvektor van de verdeelde belasting. Deze is gedefinieerd door (zie ook appendix C):

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{D}_v^{-1} \cdot \int_{x=0}^l \mathbf{D}_v(x) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_c(x,t) dx \quad (3.5.11)$$

De bijdrage van de belasting in de eindvlakken van het element tot de potentiële energie is gelijk aan:

$$P_r = - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{f}_e \quad (3.5.12)$$

Uit het bovenstaande volgt dat alle relevante informatie over de belasting van het element is opgeborgen in de vektoren \mathbf{f}_c en \mathbf{f}_e .

3.5.6 De totale potentiële energie in een rechte, in elementen verdeelde balk

Wij beschouwen een rechte, cilindrische balk die in axiale richting is verdeeld in elementen. Als de koppeling tussen de elementen op de juiste wijze tot stand gebracht wordt is de totale potentiële energie V gelijk aan de som over alle elementen van de in die elementen opgehoopte energie V_e . In het onderhavige geval, waarin de elementen onderling star verbonden zijn en in elkaars verlengde liggen, levert die koppeling geen problemen op. Wij zullen ons beperken tot problemen van dit type.

De verplaatsingsgrootheden $u_x, u_y, u_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ en β van alle snedevlakken (knooppunten), inclusief de eindvlakken van de balk, worden opgeborgen in de totale verplaatsingsvektor \mathbf{v}_t . De verplaatsingsvektor \mathbf{v}_e van een element is dan een deelvektor van \mathbf{v}_t .

Omdat de in een element opgehoopte potentiële energie gelijk is aan:

$$V_e = \frac{1}{2} \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{M}_v \cdot \ddot{\mathbf{v}}_e - \mathbf{v}_e \cdot (\mathbf{f}_e + \mathbf{f}_c) \quad (3.5.13)$$

kan voor de totale potentiële energie geschreven worden:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{M}_t \cdot \ddot{\mathbf{v}}_t - \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{f}_t \quad (3.5.14)$$

De totale stijfheidsmatrix Q_t en massamatrix M_t kunnen op de - in de elementenmethode - gebruikelijke wijze worden samengesteld uit de matrices Q_v en M_v van de elementen. Zij zijn niet-negatief definitief en mogen zonder enige beperking symmetrisch genomen worden. De totale krachtvektor f_t hangt af van de uitwendige belasting op de balk.

Een aantal van de componenten van v_t zal een voorgeschreven waarde - gelijk of ongelijk aan nul - bezitten. Wij nemen aan dat tenminste zoveel componenten zijn voorgeschreven dat beweging van de balk als star lichaam verhinderd is. Alleen voor dynamische problemen is dit een beperking van de algemeenheid; in [15] is een werkwijze aangeduid die meer algemeen toepasbaar is.

De onbekende, niet voorgeschreven componenten van v_t bergen wij op in de deelvektor v , terwijl de componenten met een voorgeschreven waarde ongelijk aan nul worden opgeborgen in de deelvektor v_o . Het aantal componenten van v zij n . Voeren wij een nulvektor $v_R=0$ in voor de componenten van v_t met een voorgeschreven waarde gelijk aan nul dan kan - eventueel na hernoeming - geschreven worden:

$$\underline{v}_t = \begin{bmatrix} \underline{v} & \underline{v}_o & \underline{v}_R \end{bmatrix} \quad (3.5.15)$$

Deze splitsing van v_t is uiteraard alleen mogelijk als in iedere snede waarin één of meer der verplaatsingsgrootheden $u_x, u_y, u_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ en β zijn voorgeschreven een knooppunt wordt gelokaliseerd.

De krachtvektor f_t wordt op analoge wijze gesplitst in een drietal deelvectoren f_o, f en f_R en wel zodanig dat $\underline{v}_t \cdot f_t \equiv \underline{v}_o \cdot f_o + \underline{v} \cdot f + \underline{v}_R \cdot f_R = \underline{v}_o \cdot f_o + \underline{v} \cdot f$. De componenten van f_R zijn op te vatten als de (onbekende) ondersteuningskrachten.

Met v_t volgens (3.5.15) kan (3.5.14) - eventueel na hernoeming van rijen en kolommen in de matrices Q_t en M_t - worden overgevoerd in:

$$\begin{aligned} \underline{v} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{v} & \underline{v}_o & \underline{v}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{v}_o \\ \underline{v}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v} & \underline{v}_o & \underline{v}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{v}_o \\ \underline{v}_R \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \underline{v} & \underline{v}_o & \underline{v}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_o \\ f \\ f_R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Uit het gegeven dat de balk niet als star lichaam kan bewegen volgt dat de matrix Q_{11} positief definitief zal zijn. M_{11} zal altijd niet-negatief definitief zijn. Bij een geschikt gekozen nummering van de componenten van v zullen Q_{11} en M_{11} de vorm hebben van een bandmatrix met geringe bandbreedte.

Omdat v_R een nulvektor is volgt uit (3.5.16) dat de matrices Q_{i3} , M_{i3} ($i=1,2,3$) en de vektor f_R niet van belang zijn bij de berekening van V .

3.5.7 De interessante vergelijkingen

De componenten van v mogen onafhankelijk van elkaar gevarieerd worden. De eis: $\delta V=0$ voor iedere variatie δv leidt tot een stelsel van n gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de componenten van v :

$$M_{11} \cdot \ddot{v} + Q_{11} \cdot v = f_o - M_{12} \cdot \ddot{v}_o - Q_{12} \cdot v_o \quad (3.5.17)$$

Uit (3.5.16) kan bovendien een stelsel vergelijkingen voor de onbekende krachtoektoren f en f_R worden afgeleid:

$$\begin{bmatrix} f \\ f_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \downarrow Q_{12} & Q_{22} \\ \downarrow Q_{13} & \downarrow Q_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \downarrow M_{12} & M_{22} \\ \downarrow M_{13} & \downarrow M_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{v}_o \end{bmatrix} \quad (3.5.18)$$

In plaats van door het oorspronkelijke stelsel partiële differentiaalvergelijkingen wordt het gedrag van de konstruktie nu beschreven door een (groot) aantal lineaire differentiaalvergelijkingen in de onafhankelijk variabele t .

3.6 Enige opmerkingen over de oplossingsmethode

3.6.1 Formulering van de oplossing voor statische problemen

Voor statische problemen gaat (3.5.17) over in een stelsel lineaire vergelijkingen voor de onbekende knooppuntsverplaatsingen:

$$Q_{11} \cdot v = f_o - Q_{12} \cdot v_o \quad (3.6.1)$$

Bij het oplossen van dit stelsel kan gebruik worden gemaakt van het gegeven dat Q_{11} een symmetrische, positief definitieve bandmatrix is, bijv. door de rekenprocedures van Choleski [16] toe te passen.

Zodra v bekend is kunnen de onbekende vectoren f en f_R worden berekend met:

$$f = Q_{12} \cdot v + Q_{22} \cdot v_0 \quad ; \quad f_R = Q_{13} \cdot v + Q_{23} \cdot v_0 \quad (3.6.2)$$

De verplaatsingsvektor $\hat{v} = \hat{v}(x)$, die ten grondslag ligt aan de berekening van de stijfheidsmatrix Q_V en de kinematisch consistente krachtvektor f_c van een element, voldoet aan de homogene, statische differentiaalvergelijkingen volgens Vlasov. Daaruit kan worden aangetoond dat de oplossing v van (3.6.1) exakt is in het kader van de Vlasov-theorie, althans voor statische problemen. Voor homogene problemen (dit zijn problemen waarbij alleen in de knooppunten een uitwendige belasting aangrijpt) is dit triviaal; de aangenomen verplaatsingsvektor $\hat{v} = \hat{v}(x)$ is dan immers exakt. De bewering geldt echter ook voor inhomogene problemen, mits de belasting op het cilindrische oppervlak van de elementen op de in 3.5.5 aangegeven wijze in rekening wordt gebracht.

Voor ieder element kan de verplaatsingsvektor v_e dus exakt bepaald worden. Ook de in f_e opgeborgen krachtgrootheden in de eindvlakken van een element kunnen exakt berekend worden als gebruik wordt gemaakt van de uit (3.5.13) af te leiden relatie:

$$f_e = Q_V \cdot v_e - f_c \quad (3.6.3)$$

De berekening van $\hat{v}(x)$ en $\hat{f}(x)$ in een willekeurige snede x van een element komt in 3.8 ter sprake.

Wij wijzen erop dat, waar het woord exakt gebruikt is, de invloed van afrondingsfouten uiteraard buiten beschouwing is gebleven.

3.6.2 Berekening van een aantal eigenfrequenties en eigentrillingsvormen

Een benadering voor een aantal van de laagste eigenfrequenties en eigentrillingsvormen van de balk kan berekend worden uit het stelsel karakteristieke vergelijkingen:

$$(-\Omega^2 \cdot M_{11} + Q_{11}) \bar{v} = 0 \quad (3.6.4)$$

dat ontstaat door in (3.5.17) het rechterlid gelijk aan nul te nemen ($f_0 = 0$, $u_0 = 0$ voor alle t) en door $v(t) = \bar{v} \cdot \cos(\Omega t)$ te substitueren.

Uit de eigenschappen van Q_{11} en M_{11} volgt dat de eigenwaarden $\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_n^2$ reëel en positief zijn. Wij nummeren ze zodanig dat $\Omega_i \leq \Omega_j$ als $i < j$. De bijbehorende eigenvectoren (eigentrillingsvormen) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ zijn reëel.

Voor het berekenen van de eigenhoekfrequenties Ω_i en eigentrillingsvormen \bar{v}_i ($i=1,2,\dots,n$) kunnen diverse werkwijzen gevolgd worden. Door Rutishauser [17] is een iteratieve methode gepresenteerd waarin rekening wordt gehouden met de bandstructuur van Q_{11} en M_{11} . Deze methode voldoet zeer goed als de bandbreedte klein is ten opzichte van n en als het aantal te berekenen eigenwaarden veel kleiner is dan n .

Aan de berekende Ω_i en \bar{v}_i mag voor grote waarden van i (i ongeveer gelijk aan n) niet veel waarde gehecht worden. De voornaamste oorzaak hiervan moet gezocht worden in de schematisering van de constructie: de hogere eigentrillingsvormen kunnen niet voldoende nauwkeurig beschreven worden met het aangenomen verplaatsingsveld. Indien voor het beschouwde probleem geen analytische oplossing bekend is kan het aantal voldoende nauwkeurig berekende eigenhoekfrequenties en eigentrillingsvormen bepaald worden door dezelfde constructie door te rekenen met een andere - meestal fijnere - verdeling in elementen en de resultaten van beide berekeningen te vergelijken.

Uiteraard heeft een dergelijke werkwijze alleen zin als de resultaten niet te zeer beïnvloed zijn door afrondingsfouten. De volgende ervaringsregel kan soms uitkomst bieden: als de buigings- en torsietrillingen ontkoppeld zijn (dus als het zwaartepunt en het dwarskrachtenmiddenpunt samenvallen) is het aantal eigenfrequenties, dat bij een gegeven verdeling in elementen voor een bepaald type trillingen (longitudinale trillingen, transversale trillingen, torsietrillingen) met voor de praktijk voldoende nauwkeurigheid berekend kan worden, ongeveer $\frac{1}{3}$ tot $\frac{1}{2}$ maal het aantal graden van vrijheid waarmee die trillingen beschreven worden [18]. Voorwaarde is hierbij dat het verplaatsingsveld, dat gehanteerd is bij de berekening van de massa- en stijfheidsmatrix van een element, voldoet aan de homogene, statische differentiaalvergelijkingen.

Voor bepaalde problemen kan het - om welke reden dan ook - noodzakelijk zijn een fijne verdeling in elementen te hanteren, waardoor het aantal graden van vrijheid zeer groot kan worden. Indien het aantal te berekenen eigenfrequenties (m) veel kleiner is dan het aantal graden van vrijheid (n) kan gebruik worden gemaakt van procedures om het aantal graden van vrijheid met behulp van statische beschouwingen te reduceren. De afmetingen van de matrices, die een rol spelen bij dynamische berekeningen, kunnen dan drastisch gereduceerd worden. Een wezenlijk probleem is echter dat nog erg weinig bekend is over fouten die hierdoor geïntroduceerd worden. Voor een beschrijving van de methode verwijzen wij naar [19] en [20].

3.6.3 De analyse van gedwongen trillingen

De gedwongen beweging van het beschouwde probleem wordt beschreven door de lineaire, inhomogene differentiaalvergelijkingen (3.5.17). Ter afkorting zullen wij het rechterlid van dit stelsel aangeven met g , dus:

$$g(t) = f_0(t) - M_{12} \cdot \ddot{v}_0 - Q_{12} \cdot v_0 \quad (3.6.5)$$

Indien de eigenfrequenties en eigenvektoren van de konstruktie bekend zijn kan de rekentijd voor de bepaling van de gedwongen beweging worden verkort door stelsel (3.5.17) eerst in een zo eenvoudig mogelijke vorm te brengen. De eigenvektoren $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ worden genormeerd met Q_{11} als kern, (dus: $\bar{v}_i \cdot Q_{11} \cdot \bar{v}_j = \delta_{ij}$, waarbij δ_{ij} de Kronecker-delta is) en opgeborgen in de matrix E :

$$E = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \dots & \bar{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.6.6)$$

Met de lineaire transformatie:

$$v(t) = E \cdot \tilde{b}(t) \quad (3.6.7)$$

volgt dan na voorvermenigvuldiging van (3.5.17) met \bar{E} een stelsel ongekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de componenten van de vektor \tilde{b} :

$$\Lambda \cdot \ddot{\tilde{b}} + \tilde{b} = \bar{E} \cdot g \quad (3.6.8)$$

De hierin optredende matrix Λ is een diagonaalmatrix waarvoor geldt:

$$\Lambda[i, j] = \frac{\delta_{ij}}{\omega_i^2} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (3.6.9)$$

Voor het bepalen van de oplossing van (3.6.8) kan gebruik worden gemaakt van de werkwijzen uit de theorie van trillingssystemen met één graad van vrijheid.

Bij praktische problemen zullen steeds slechts een beperkt aantal van de laagste eigenfrequenties en de bijbehorende eigentrillingsvormen nodig zijn voor een voldoende nauwkeurige beschrijving van de beweging van het systeem; de invloed van de hogere eigenfrequenties wordt dan buiten beschouwing gelaten. Nemen wij aan dat slechts de eerste m eigenhoekfrequenties $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ en eigentrillingsvormen $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ nodig zijn, dan behoeven wij slechts de eerste m componenten van $\tilde{b} = \tilde{b}(t)$ te bepalen. Bij de berekening van

de gezochte vektor $v(t)$ moet dan in plaats van (3.6.7) gebruik worden gemaakt van:

$$v(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{b}[i] \cdot \bar{v}_i \quad (3.6.10)$$

De overgang van (3.6.7) op (3.6.10) wordt dynamische condensatie genoemd (zie ook [15]).

3.7 Enige speciale gevallen voor de kinematisch consistente krachtvektor f_c

In het kader van het principe van de minimale potentiële energie en van de veronderstellingen over het verplaatsingsveld wordt de belasting op het cilindrische oppervlak van een element geheel gekarakteriseerd door de vektor f_c . Als f_c wordt berekend op de in 3.5.5 aangegeven wijze, dan is deze vektor de in dit kader beste representatie van die belasting. De componenten ervan zijn - afgezien van het teken - gelijk aan de inklemgrootheden die optreden als de beide eindvlakken van het element worden ingeklemd en het cilindrische oppervlak op de voorgeschreven wijze wordt belast. Deze interpretatie is alleen geldig als de traagheidskrachten buiten beschouwing blijven.

Als $f_c(x,t)$ gegeven is als functie van x kan f_c met (3.5.11) worden bepaald, bijv. met behulp van numerieke integratietechnieken. Het verdient echter aanbeveling om voor veelvuldig optredende belastingsituaties - zoals een van x onafhankelijke en een lineair met x veranderende belasting - analytische uitdrukkingen voor de componenten van f_c af te leiden. Voor belastingsituaties, die slechts sporadisch optreden kan desnoods gebruik worden gemaakt van numerieke integratie. Het is dikwijls ook mogelijk de belasting op het cilindrische oppervlak van het element te ontwikkelen in een Fourierreeks, waarvan de periode gerelateerd is aan de lengte l van het element.

In appendix C worden analytische uitdrukkingen gegeven voor de componenten van f_c , behorende bij de genoemde speciale belastingsituaties.

3.8 De spanningsverdeling in een element

De axiale normaalspanning σ_x in een willekeurige doorsnede x van een element wordt bepaald door de wet van Hooke toe te passen op het aangenomen verplaatsingsveld. Dit levert:

$$\sigma_x = E(u_x' - \gamma_0 \cdot \phi_z' + z_0 \cdot \phi_y' + \omega \cdot \beta') \quad (3.8.1)$$

De axiale verplaatsing van het zwaartepunt wordt hier weer aangeduid met u_x in plaats van u_{x_0} . Wordt de afschuiving van het middenvlak verwaarloosd, dan kan σ_x met behulp van (3.4.23), (3.4.25), (3.4.27) en (3.4.29) worden uitgedrukt in de snedegrootheden K_x , M_y , M_z en B:

$$\sigma_x = \frac{K_x}{F} - y_0(s) \cdot \frac{M_z}{I_{yy}} + z_0 \cdot \frac{M_y}{I_{zz}} + \omega(s) \cdot \frac{B}{I_{\omega\omega}} \quad (3.8.2)$$

Afgezien van de laatste term is dit resultaat bekend uit de elementaire balkentheorie.

Hanteren wij de wet van Hooke ook bij de berekening van de schuifspanning $\bar{\tau}_{xs} = \tau_m + 2 \cdot \frac{r}{h} \cdot \tau_s$ en beperken wij ons daarbij tot dunwandige balken met zwakgekromde profiellijn, dan volgt dat τ_m gelijk is aan nul en dat τ_s gelijk is aan:

$$\tau_s = -G \cdot h \cdot \phi_x \quad (3.8.3)$$

Deze methode van spanningsberekening leidt tot het onbevredigende resultaat dat de schuifspanning in het middenvlak identiek gelijk is aan nul, waardoor het axiale evenwicht van een blokje met afmetingen $h \cdot ds \cdot dx$ uit de balk niet vervuld is. In de elementaire balkentheorie doet zich een soortgelijke situatie voor bij buiging door een dwarskracht. De schuifspanningen worden dan niet met de wet van Hooke bepaald uit de verplaatsingen, maar uit de eis dat ieder blokje axiaal in evenwicht is. Bij de onderhavige theorie kan een soortgelijke werkwijze gevolgd worden. De betreffende vergelijking voor een blokje $h \cdot ds \cdot dx$ luidt dan:

$$h \cdot \sigma_x' + \frac{\partial}{\partial s} (h \cdot \tau_m) = -q_x + s_m \cdot h \cdot \{\ddot{u}_x - y_0 \cdot \ddot{\phi}_z + z_0 \cdot \ddot{\phi}_y + \omega \cdot \ddot{\beta}\} \quad (3.8.4)$$

In een werkwijze, die gebaseerd is op het principe van de minimale potentiële energie, mogen wij de werkelijke axiale oppervlaktebelasting q_x vervangen door een willekeurige andere belasting q_x^* , mits q_x^* en q_x dezelfde bijdrage leveren tot de potentiële energie. Deze eis impliceert dat q_x^* en q_x in iedere snede dezelfde resultanten k_x , m_y , m_z en b moeten leveren. Een geschikte keuze voor q_x^* lijkt te zijn:

$$q_x^* = h \cdot \frac{k_x}{F} - y_0 \cdot \frac{m_z}{I_{yy}} + z_0 \cdot \frac{m_y}{I_{zz}} + \omega \cdot \frac{b}{I_{\omega\omega}} \quad (3.8.5)$$

In [21] heeft Janssen een soortgelijke werkwijze aangegeven voor dunwandige kokers met rechthoekige dwarsdoorsnede.

Vervanging van q_x door q_x^* , gevolgd door substitutie van (3.4.23)..... (3.4.29) doet de evenwichtsvergelijking overgaan in:

$$\frac{\partial}{\partial s} \{h(s) \cdot \tau_m\} = -h(s) \left\{ y_o \cdot \frac{K_y}{I_{yy}} + z_o \cdot \frac{K_z}{I_{zz}} + \omega \cdot \frac{M_d}{I_{\omega\omega}} \right\} \quad (3.8.6)$$

Daarbij is M_d het z.g. transversale bimoment, gedefinieerd door:

$$M_d = M_x + GJ_s \cdot \beta = B^i + b + s_m \cdot I_{\omega\omega} \cdot \ddot{\phi}_x^i \quad (3.8.7)$$

Voor statische, homogene problemen geldt blijkbaar: $M_d = B^i$

Integratie over de booglengte s met $s=s_1$ als startpunt levert:

$$\tau_m \cdot h = (\tau_m \cdot h)_{s=s_1} - T_y \cdot K_y - T_z \cdot K_z - T_\omega \cdot M_d \quad (3.8.8)$$

waarbij integratieconstante $(\tau_m)_{s=s_1}$ bepaald wordt uit de eis dat τ_m gelijk is aan nul op elk vrij uiteinde van de profiellijn. T_y , T_z en T_ω zijn afhankelijk van s , s_1 en van de geometrie van de dwarsdoorsnede:

$$T_a(s, s_1) = \int_{s=s_1}^s \frac{a(\xi)}{I_{aa}} \cdot h(\xi) \cdot d\xi \quad (a=y, z, \omega) \quad (3.8.9)$$

In [12] is een procedure geschetst om T_y , T_z en T_ω met behulp van een digitale rekenautomaat te berekenen in een aantal diskrete punten van de profiellijn.

De spanningen σ_x , τ_m en τ_s in een willekeurige snede x kunnen met (3.8.2), (3.8.8) en (3.8.3) worden bepaald als de componenten van de krachtvektor f en de verplaatsingsvektor \hat{v} in die snede bekend zijn. Deze vektoren kunnen op meerdere manieren bepaald worden.

Zodra alle knooppuntsverplaatsingen bekend zijn kan de verplaatsingsvektor v_e voor elk element bepaald worden. De krachtvektor f_e van een element wordt berekend uit:

$$f_e = M_v \cdot \ddot{v}_e + Q_v \cdot v_e - f_c, \quad (3.8.10)$$

welke relatie eenvoudig kan worden afgeleid uit relatie (3.5.13) voor de in het element opgehoopte potentiële energie. Uit v_e en f_e volgen direkt de vektoren \hat{v} en \hat{f} voor de eindvlakken van het betreffende element.

Bij de bepaling van \hat{v} en \hat{f} in een willekeurige snede x in het element kunnen wij diverse werkwijzen volgen. Bij de meest eenvoudige methode wordt \hat{v} bepaald met (3.5.3) en \hat{f} met (3.4.23)...(3.4.29). Deze methode levert alleen dan juiste resultaten als het aangenomen verplaatsingsveld voor het beschouwde probleem het exakte is; zij is derhalve zeer geschikt voor statische, homogene problemen.

Bij een andere werkwijze wordt het element door het aanbrengen van een snede op de plaats x verdeeld in twee stukken die wij subelementen noemen. Voor \hat{v} in een willekeurige snede ξ ($0 \leq \xi \leq x$) in een subelement wordt weer vergelijking (3.5.3) gehanteerd. De potentiële energie V_s van het subelement $0 \leq \xi \leq x$ kan dan worden uitgedrukt in v_e , de gezochte vektor $\hat{f}(x)$, de vektor f_1 van eindvlak $x=0$ van het element en een vektor \hat{f}_s die de belasting op het cilindrische oppervlak van het subelement representeert. Door toepassing van het principe van de minimale potentiële energie op V_s volgt tenslotte voor \hat{f} een relatie van de vorm:

$$\hat{f} = \hat{M}_d(x) \cdot \hat{v}_e + \hat{Q}_d(x) \cdot v_e - \hat{f}_d \quad (3.8.11)$$

Deze werkwijze heeft ten opzichte van de eerder genoemde het voordeel dat ook voor dynamische en inhomogene problemen het globale evenwicht van het afgesneden deel (het subelement) gegarandeerd is.

Karakteristiek voor beide methoden is dat \hat{v} in een willekeurige snede met (3.5.3) geheel bepaald is door v_e . Het is ook mogelijk het element zelf op te vatten als een balk die door het aanbrengen van een snede op die plaatsen waar \hat{v} en \hat{f} gevraagd worden, wordt verdeeld in een aantal subelementen. In de eindvlakken van deze "balk" worden de verplaatsingen voorgeschreven, gelijk aan de betreffende componenten van de vektor v_e van het oorspronkelijke element. Toepassing van de in 3.5 en 3.6 geschetste werkwijze levert de vektoren \hat{v} en \hat{f} in de scheidingsvlakken tussen de subelementen. Deze werkwijze vereist extra rekenwerk, maar levert voor statische problemen - zowel homogene als inhomogene - de exakte resultaten. Voor dynamische problemen zal in ieder geval voor elk deel-element het globale evenwicht gegarandeerd zijn; wij mogen verwachten dat resultaten, berekend op deze wijze, nauwkeuriger zijn dan die, berekend met een der eerder genoemde methoden.

3.9 Benadering voor de stijfheidsmatrix, de massamatrix en de krachtvektor

De berekening van de componenten van de massa- en stijfheidsmatrix, gebaseerd op de oplossing van de statische, homogene differentiaalvergelijkingen volgens Vlasov, is erg bewerkelijk doordat in de uitdrukking voor de hoekverdraaiing ϕ_x hyperbolische functies optreden. Voor korte elementen ($\varepsilon \ll 1$) en voor zeer lange elementen ($\varepsilon \gg 1$) kunnen daarbij bovendien grote numerieke moeilijkheden optreden.

Het is mogelijk een ander verplaatsingsveld te kiezen dat weliswaar niet aan deze differentiaalvergelijkingen voldoet maar ook de genoemde nadelen niet bezit. Op dit veld betrekking hebbende grootheden voorzien wij van een index b om ze te onderscheiden van de overeenkomstige grootheden voor het veld uit 3.5.

Voor u_{xb} , respectievelijk u_{yb} en u_{zb} wordt uiteraard weer het lineaire, respectievelijk het derde-graads verloop in x -richting gekozen. Het ligt voor de hand om voor ϕ_{xb} eveneens een derde-graads polynoom in x te nemen. Voor de verplaatsingsvektor $\hat{v}_b(x)$ zal dan gelden:

$$\hat{v}_b = \hat{D}_b(x) \cdot a_b \quad (3.9.1)$$

Op dezelfde wijze als in 3.5 kan a_b worden uitgedrukt in de verplaatsingsvectoren $v_1 = \hat{v}_b(x=0)$ en $v_2 = \hat{v}_b(x=l)$ van de eindvlakken van het element, zodat voor \hat{v}_b geschreven kan worden :

$$\hat{v}_b = \hat{D}_b(x) \cdot D_b^{-1} \cdot v_e \quad (3.9.2)$$

De in 3.5 geschetste werkwijze voor de berekening van de stijfheidsmatrix kan hier niet gevolgd worden, omdat die werkwijze alleen dan toegepast mag worden als de aangenomen verplaatsingsvektor oplossing is van de homogene, statische differentiaalvergelijkingen. De stijfheidsmatrix, behorende bij de aangenomen verplaatsingsvektor \hat{v}_b , kan worden bepaald uit de definitievergelijking van deze matrix:

$$U = \frac{1}{2} v_e^T \cdot Q_b \cdot v_e \quad (3.9.3)$$

Hierin is U de in het element opgehoopte elastische energie. Wij wijzen erop dat deze definitie van de stijfheidsmatrix in overeenstemming is met de definitie in 3.5. Door substitutie van \hat{v}_b volgens (3.9.2) in relatie (3.2.26) voor U kan Q_b berekend worden (zie appendix A).

De massamatrix M_b en de kinematisch consistente krachtvektor f_{cb} van de verdeelde belasting kunnen bepaald worden op dezelfde wijze als in (3.5). Er volgt:

$$M_b = D_b^{-1} \cdot \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}^l} D_b \cdot T_m \cdot \hat{D}_b \cdot dx \cdot D_b^{-1} \quad (3.9.4)$$

$$f_{cb} = D_b^{-1} \cdot \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}^l} D_b \cdot \hat{f}_c \cdot dx \quad (3.9.5)$$

De structuur van Q_b en M_b is dezelfde als die van Q_v , respectievelijk M_v . Voor de componenten van \hat{D}_b , D_b^{-1} , Q_b en M_b verwijzen wij naar de appendices A en B. In appendix C zijn de componenten van f_{cb} gegeven voor de in 3.8 genoemde speciale belastingssituaties.

De in een element opgehoopte potentiële energie, V_b , is gelijk aan:

$$V_b = \frac{1}{2} \hat{v}_e \cdot Q_b \cdot v_e + \hat{v}_e \cdot M_b \cdot \ddot{v}_e - \hat{v}_e \cdot (f_e + f_{cb}) \quad (3.9.6)$$

Berekeningen met deze uitdrukking voor de potentiële energie van een element als uitgangspunt zullen steeds een benaderend karakter dragen als torsie een rol speelt. De aangenomen vektor \hat{v}_b voldoet echter aan alle eisen die relevant zijn in het kader van het principe van de minimale potentiële energie. Als de verdeling in elementen wordt verfijnd zullen de resultaten dus convergeren naar de exakte waarden volgens de theorie van Vlasov.

3.10 Vergelijking der elementen

3.10.1 Inleiding

Zowel het in 3.5 gepresenteerde element, V-element genaamd, als het element uit 3.9, B-element genaamd, kan gebruikt worden om statische en dynamische problemen betreffende dunwandige balken met open dwarsdoorsnede tot een oplossing te brengen. Daarbij heeft het B-element het voordeel dat de componenten van de stijfheids- en massamatrix en van de kinematisch consistente krachtvektor veel eenvoudiger te berekenen zijn dan bij het V-element. Het laatstgenoemde element zal echter in het algemeen - en zeker voor statische problemen - nauwkeuriger resultaten leveren.

Een voor alle mogelijke problemen geldende vergelijking van de kwaliteiten van de beide elementen is niet of nauwelijks uitvoerbaar. Het is zinvol hierbij onderscheid te maken tussen statische en dynamische problemen.

3.10.2 Vergelijking voor statische problemen

Volgens 3.6.1 zullen berekeningen met het V-element zowel bij homogene als bij inhomogene statische problemen leiden tot de exakte waarden voor de knooppuntsverplaatsingen, mits een eventuele belasting op het cilindrisch oppervlak op kinematisch consistente wijze in rekening wordt gebracht. Met "exakt" wordt hier "exakt volgens de Vlasov-theorie" bedoeld. Berekeningen met het B-element zullen, ook bij statische problemen, resulteren in benaderingen voor de knooppuntsverplaatsingen als de balk op torsie wordt belast. Het bewijs hiervan is triviaal; immers, vergelijking van de stijfheidsmatrices Q_b en Q_v leert dat alle componenten gelijk zijn, met uitzondering van de componenten die corresponderen met de verplaatsingen ϕ_{x1} , ϕ_{x2} , β_1 en β_2 . Dit zijn echter juist de componenten die het gedrag bij torsie beschrijven (zie appendix A).

Uit het voorgaande mag niet gekonkludeerd worden dat bij statische problemen steeds het V-element gehanteerd moet worden. Ook het andere element zal tot voldoende nauwkeurige resultaten leiden als de lengte der elementen maar klein genoeg is. Om na te gaan wat "klein genoeg" is bepalen wij voor de met torsie samenhangende componenten van Q_b de relatieve afwijking ten opzichte van de overeenkomstige componenten van Q_v (zie appendix A). Deze relatieve afwijkingen blijken geheel bepaald te worden door de parameter $\epsilon = \alpha \cdot l$, waarbij l de lengte is van het element en α een karakteristieke grootte is die alleen afhangt van de materiaaleigenschappen E en G en van de geometrie van de dwarsdoorsnede:

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot J_s}{E \cdot I_{\omega\omega}}} \quad (3.10.1)$$

Bovendien volgt dat de afwijkingen voor kleine waarden van ϵ ($\epsilon < 1$) ongeveer evenredig zijn met $(\frac{\epsilon}{10})^4$ en dat de grootste relatieve afwijking voor $\epsilon=1$ ongeveer 0,05% is. Voor toenemende ϵ nemen de afwijkingen snel toe; voor $\epsilon=3$ zijn zij echter nog steeds kleiner dan 4%. Op grond hiervan kan worden aangetoond dat het B-element ook bij torsiebelastingen tot voldoende nauwkeurige, praktisch bruikbare resultaten voor de knooppuntsverplaatsingen zal leiden als voor alle elementen geldt $\epsilon < 3$. Deze bewering wordt

bevestigd door berekeningen aan balken waarvan de totale lengte L voldoet aan $\alpha \cdot L \gg 1$; de balken zijn verdeeld in N ($N \geq 1$) identieke elementen van het type B, zodat voor elk element geldt: $\epsilon = \alpha \cdot \frac{L}{N}$. In [22] geeft Janssen een grafiek waarin de invloed van de parameter ϵ op de berekende verplaatsingen duidelijk tot uitdrukking komt. Uit deze berekeningen volgt bovendien dat ook de snedegrootheden in de eindvlakken der elementen met het B-element voldoende nauwkeurig berekend worden als voor alle elementen ϵ maar kleiner is dan 3.

De hiervoor gegeven resultaten zijn geldig als het cilindrisch oppervlak van de elementen onbelast is, dus als voor elk element de krachtvektor $\hat{f}_c(x)$ een nulvektor is. Indien dit niet het geval is zullen de verschillen tussen de resultaten van de beide typen elementen in het algemeen niet alleen afhangen van de parameter ϵ maar ook van de aard van de belasting, dus van het verloop van \hat{f}_c als funktie van x . Algemeen geldende uitspraken over deze verschillen kunnen dan niet meer worden afgeleid. Uiteraard is dit wel mogelijk als $\hat{f}_c = \hat{f}_c(x)$ gegeven is. Wij beperken ons hier tot het - veel voorkomende - geval dat \hat{f}_c onafhankelijk is van x .

Dan kan worden aangetoond dat de relatieve verschillen tussen de componenten van f_{cb} (de kinematisch consistente krachtvektor van het B-element) en de overeenkomstige componenten van f_c (de kinematisch consistente krachtvektor van het V-element) voor kleine waarden van ϵ evenredig zijn met ϵ^2 . Voor $\epsilon=1$ zijn zij kleiner dan 1,5%, terwijl zij bij toenemende ϵ snel groter worden.

3.10.3 *Vergelijking voor dynamische problemen*

Zowel het B- als het V-element is gebaseerd op een verplaatsingsveld dat niet voldoet aan de differentiaalvergelijkingen van Vlasov voor dynamische problemen. Beide typen elementen zullen voor dit soort problemen dan ook leiden tot benaderingsoplossingen. Bovendien zullen de resultaten volgens het B-element verschillen van de resultaten volgens het V-element als er torsie optreedt. Dit wordt veroorzaakt door de verschillen tussen de componenten van de massamatrices M_b en M_v en de stijfheidsmatrices Q_b en Q_v . Uit de berekeningen in appendix B volgt dat de interessante relatieve afwijkingen van componenten van M_b ten opzichte van de overeenkomstige componenten van M_v alleen afhangen van de dimensieloze parameter ϵ . Voor $\epsilon \rightarrow 0$ blijken deze afwijkingen van de orde ϵ^2 te zijn; voor toenemende ϵ nemen zij snel toe, zoals volgt uit de grafieken in appendix B.

Wij zullen in dit deelhoofdstuk aan de hand van enige voorbeelden nagaan onder welke voorwaarden het V-element tot voldoende nauwkeurige resultaten zal leiden. Daarna worden de resultaten van dit element vergeleken met die van het B-element en wordt nagegaan wanneer de optredende verschillen voldoende klein zijn. Hierbij wordt alleen gekeken naar de berekende eigenhoekfrequenties. In eerste instantie beperken wij ons tot balken waarvan het dwarskrachtenmiddelpunt en het zwaartepunt van de doorsnede samenvallen zodat torsietrillingen ontkoppeld zijn van buigingstrillingen. De interpretatie van de resultaten der berekeningen wordt daardoor in hoge mate vereenvoudigd.

Voor het verkrijgen van numerieke resultaten is een rekenprogramma ontwikkeld dat bruikbaar is voor konstrukties die bestaan uit een rechte, in elementen verdeelde balk waarvan de beweging als star lichaam is onderdrukt. Met dit programma kunnen statische problemen tot een oplossing worden gebracht en kan een aantal van de laagste eigenhoekfrequenties met de bijbehorende eigentrillingsvormen (eigenvektoren) worden bepaald; voor de berekening van deze dynamische grootheden wordt gebruik gemaakt van de iteratieve methode volgens Rutishauser [17]. In het programma zijn procedures opgenomen voor de berekening van de stijfheidsmatrices Q_b en Q_v en de massamatrices M_b en M_v van de beide typen elementen. De gebruiker dient aan te geven welk type gehanteerd moet worden. Bij de berekening van M_b en M_v kan desgewenst de zogenaamde extra matrix (M_b^* voor het B-element en M_v^* voor het V-element, zie 3.5.4 en appendix B) in rekening worden gebracht. Wij zullen deze extra matrix hier buiten beschouwing laten.

Wij passen dit programma toe voor de berekening van enige eigenhoekfrequenties en eigentrillingsvormen van de eenzijdig ingeklemde balk (lengte L) uit fig. 3.2. Deze balk is verdeeld in $N(N > 1)$ identieke elementen van type B of V.

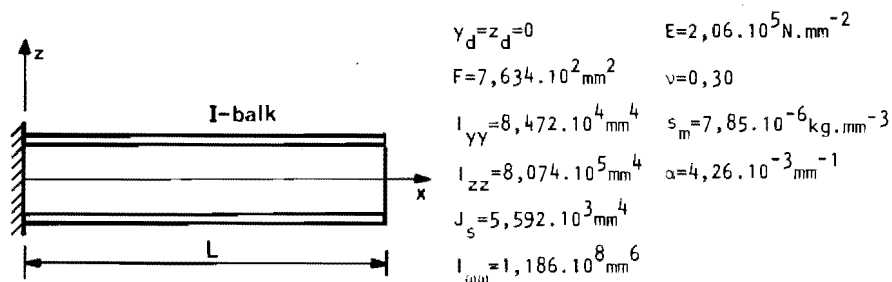


Fig. 3.2 De balk met de relevante karakteristieke grootheden.

Omdat voor de beschouwde balk geldt: $y_d = z_d = 0$ zullen axiale trillingen, buigingstrillingen en torsiestrillingen ontkoppeld zijn. Voor axiale trillingen en voor buigingstrillingen zullen het B- en het V-element tot dezelfde oplossing leiden als het "klassieke" balkelement en daarvan is bekend hoe de berekende eigenfrequenties convergeren naar de juiste waarde als - bij gelijk blijvende lengte L - de verdeling in elementen wordt verfijnd (zie bijvoorbeeld [23]). Wij zullen ons in dit geval beperken tot torsiestrillingen van de balk.

In tabel 3.1 zijn voor enige waarden van L de vier laagste torsie-eigenhoekfrequenties $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ en Ω_4 (in rad/sec) gegeven als functie van het aantal elementen, N. De gekozen waarden van L en N zijn zodanig dat steeds geldt $0,1 \leq \epsilon \leq 10$; een vergelijking van de beide element-typen voor andere waarden van ϵ heeft geen praktisch nut omdat voor $\epsilon < 0,1$ de resultaten vrijwel gelijk zijn terwijl zij voor $\epsilon > 10$ enorm verschillen.

Behalve de grootte van Ω_i ($i=1,2,3,4$) komt in de tabel ook voor de relatieve afwijking $\Delta\Omega_i = \frac{\Omega_i(N) - \Omega_i(8)}{\Omega_i(8)}$, waarbij $\Omega_i(N)$ de i^{de} torsie-eigenhoekfrequentie is bij een verdeling in N elementen. De resultaten in deze tabel zijn berekend met V-elementen.

L = 187,5mm; $\alpha \cdot L = 0,8$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\Omega_1$ (%)	$\Omega_2 \cdot 10^{-4}$	$\Delta\Omega_2$ (%)	$\Omega_3 \cdot 10^{-5}$	$\Delta\Omega_3$ (%)	$\Omega_4 \cdot 10^{-5}$	$\Delta\Omega_4$ (%)
1.	0,8	6,592	0,2	6,018	59,1	-	-	-	-
2.	0,4	6,581	0,0	3,815	0,9	1,273	21,9	3,685	80,4
4.	0,2	6,578	0,0	3,787	0,1	1,052	0,7	2,068	1,2
8.	0,1	6,578	0,0	3,782	0,0	1,044	0,0	2,043	0,0

L = 375 mm; $\alpha \cdot L = 1,6$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\Omega_1$ (%)	$\Omega_2 \cdot 10^{-4}$	$\Delta\Omega_2$ (%)	$\Omega_3 \cdot 10^{-4}$	$\Delta\Omega_3$ (%)	$\Omega_4 \cdot 10^{-4}$	$\Delta\Omega_4$ (%)
1.	1,6	2,064	0,9	1,653	64,9	-	-	-	-
2.	0,8	2,047	0,1	1,012	1,0	3,260	22,5	9,351	81,4
4.	0,4	2,045	0,0	1,004	0,1	2,681	0,7	5,219	1,2
8.	0,2	2,045	0,0	1,002	0,0	2,661	0,0	5,155	0,0

L = 750 mm; $\alpha.L = 3,2$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-2}$	$\Delta\Omega_1 (\%)$	$\Omega_2 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\Omega_2 (\%)$	$\Omega_3 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\Omega_3 (\%)$	$\Omega_4 \cdot 10^{-4}$	$\Delta\Omega_4 (\%)$
1.	3,2	7,77	2,0	5,536	85,0	-	-	-	-
2.	1,6	7,63	0,2	3,033	1,4	8,898	24,8	2,478	85,9
4.	0,8	7,62	0,0	2,998	0,2	7,194	0,9	1,353	1,5
8.	0,4	7,62	0,0	2,992	0,0	7,143	0,0	1,336	0,0

L = 1500 mm; $\alpha.L = 6,4$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-2}$	$\Delta\Omega_1 (\%)$	$\Omega_2 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\Omega_2 (\%)$	$\Omega_3 \cdot 10^{-3}$	$\Delta\Omega_3 (\%)$	$\Omega_4 \cdot 10^{-4}$	$\Delta\Omega_4 (\%)$
1.	6,4	3,32	4,2	2,746	154	-	-	-	-
2.	3,2	3,21	0,5	1,111	2,8	2,902	32,4	7,594	101
4.	1,6	3,19	0,0	1,085	0,4	2,218	1,2	3,828	1,5
8.	0,8	3,19	0,0	1,081	0,0	2,191	0,0	3,771	0,0

Tabel 3.1. De laagste torsie-eigenhoekfrequenties (V-element).

De balk is ook doorgerekend met een verdeling in 16 elementen; de resultaten daarvan zijn niet opgenomen omdat zij geheel overeenstemmen met de resultaten voor N=8.

Uit de tabel volgt een bevestiging van de reeds in 3.6.2 genoemde ervaringsregel. Immers, voor de balk uit fig. 3.2 is het aantal vrijheidsgraden voor de beschrijving van torsietrillingen gelijk aan 2.N en uit de tabel volgt dat het aantal torsie-eigenhoekfrequenties, dat voldoende nauwkeurig bepaald wordt (d.w.z. $\Delta\Omega_i < 5\%$) ongeveer gelijk is aan N. In tabel 3.1 niet opgenomen resultaten bevestigen deze regel ook voor hogere eigenhoekfrequenties Ω_i ($i > 4$). Uit de tabel kan bovendien worden afgelezen dat de resultaten niet in sterke mate beïnvloed worden door de parameter ϵ . Het blijkt gunstig te zijn ervoor te zorgen dat ϵ niet veel groter wordt dan 1.

Om een indruk te krijgen van de kwaliteiten van het B-element voor dynamische berekeningen is de balk verdeeld in elementen van het type B en zijn dezelfde combinaties van L en N doorgerekend als hiervoor. In tabel 3.2 zijn enige resultaten opgenomen; de grootheden R_i geven de afwijking van de de torsiehoekfrequenties volgens het B-element (Ω_{B_i}) ten opzichte

van de overeenkomstige hoekfrekwentie, berekend met het V-element (Ωv_i), dus :

$$R_i = \frac{\Omega b_1 - \Omega v_i}{\Omega v_i} \quad (3.10.2)$$

L = 187,5 mm; $\alpha.L = 0,8$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-3}$	R_1 (%)	$\Omega_2 \cdot 10^{-4}$	R_2 (%)	$\Omega_3 \cdot 10^{-5}$	R_3 (%)	$\Omega_4 \cdot 10^{-5}$	R_4 (%)
1	0,8	6,628	0,5	5,941	-1,3	-	-	-	-
2	0,4	6,582	0,0	3,815	0,0	1,270	-0,3	3,674	-0,3
4	0,2	6,578	0,0	3,786	0,0	1,052	0,0	2,068	0,0
8	0,1	6,578	0,0	3,782	0,0	1,044	0,0	2,043	0,0

L = 375 mm; $\alpha.L = 1,6$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-3}$	R_1 (%)	$\Omega_2 \cdot 10^{-4}$	R_2 (%)	$\Omega_3 \cdot 10^{-4}$	R_3 (%)	$\Omega_4 \cdot 10^{-4}$	R_4 (%)
1	1,6	2,077	0,6	1,552	-6,1	-	-	-	-
2	0,8	2,047	0,0	1,011	-0,1	3,223	-1,1	9,245	-1,1
4	0,4	2,045	0,0	1,003	0,0	2,680	0,0	5,217	0,0
8	0,2	2,045	0,0	1,002	0,0	2,661	0,0	5,155	0,0

L = 750 mm; $\alpha.L = 3,2$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-2}$	R_1 (%)	$\Omega_2 \cdot 10^{-3}$	R_2 (%)	$\Omega_3 \cdot 10^{-3}$	R_3 (%)	$\Omega_4 \cdot 10^{-4}$	R_4 (%)
1	3,2	7,90	1,7	4,488	-18,9	-	-	-	-
2	1,6	7,64	0,1	3,028	-0,2	8,533	-4,1	2,371	-4,3
4	0,8	7,62	0,0	2,997	0,0	7,182	-0,2	1,351	-0,1
8	0,4	7,62	0,0	2,992	0,0	7,132	-0,1	1,336	0,0

L = 1500 mm; $\alpha.L = 6,4$

N	ϵ	$\Omega_1 \cdot 10^{-2}$	R_1 (%)	$\Omega_2 \cdot 10^{-3}$	R_2 (%)	$\Omega_3 \cdot 10^{-3}$	R_3 (%)	$\Omega_4 \cdot 10^{-3}$	R_4 (%)
1	6,4	3,38	1,6	1,596	-41,9	-	-	-	-
2	3,2	3,21	0,1	1,103	-0,7	2,548	-12,1	6,495	-14,5
4	1,6	3,19	0,0	1,083	-0,2	2,206	-0,5	3,811	-0,4
8	0,8	3,19	0,0	1,080	-0,1	2,190	0,0	3,767	-0,1

Tabel 3.2 De laagste torsie-eigenhoekfrekwenties (B-element).

Uit de tabel blijkt dat de resultaten van het B- en het V-element niet noemenswaardig verschillen als ϵ niet groter is dan 1. Reeds eerder is op grond van tabel 3.1 gekonkludeerd dat het voor de nauwkeurigheid van de (met V-elementen) berekende torsie-eigenhoekfrequenties gunstig is als er bij het verdelen van de balk in elementen voor gezorgd wordt dat de parameter ϵ der elementen niet veel groter wordt dan 1. Op grond van het bovenstaande kan dan echter ook het veel eenvoudiger B-element worden toegepast zonder dat de nauwkeurigheid belangrijk verandert.

Om na te gaan of deze konklusies ook gelden als buigings- en torsietrillingen niet ontkoppeld zijn is het rekenprogramma gebruikt voor de bepaling van een aantal eigenhoekfrequenties van een U-balk. De konklusies worden door die berekeningen inderdaad bevestigd.

3.11 Slotopmerkingen

Bij de berekeningen in dit hoofdstuk staat het principe van de minimale potentiële energie centraal. Hierdoor en door gebruik te maken van matrixnotatie is het mogelijk om op systematische en overzichtelijke wijze theorieën af te leiden en in elkaar over te voeren.

Uitgaande van veronderstellingen over de verplaatsingen en de spanningen is een theorie opgesteld voor dunwandige balken met open dwarsdoorsnede waarbij het effect van de afschuiving van de dwarsdoorsnede en van het middenvlak niet a priori buiten beschouwing wordt gelaten. Met verwijzing naar 11; wordt aangegeven wanneer deze theorie overgaat in de theorie volgens Vlasov, waarbij het effect van die afschuiving wel verwaarloosd wordt.

0.a. door toepassing van werkwijzen uit de methode der eindige elementen is getracht de hanteerbaarheid van de Vlasov-theorie voor praktische berekeningen te vergroten. Dit streven heeft geleid tot een rekenprogramma [12] waarmee de geometrische karakteristieken eenvoudig bepaald kunnen worden. Bovendien zijn procedures ontwikkeld voor de berekening van de massa- en stijfheidsmatrix van het element dat op deze theorie is gebaseerd. Deze procedures zijn zo opgezet dat afrondingsfouten geen rol van betekenis kunnen spelen bij de numerieke bepaling van de componenten van die matrices.

In dit hoofdstuk is tevens aandacht besteed aan de berekening der spanningen uit de snedegrootheden en de verplaatsingen. Met [12] kunnen de daarbij benodigde functies van de koördinaat s numeriek bepaald worden.

In 3.9 is een benaderingsmethode geschetst die resulteert in een element (het B-element) dat veel eenvoudiger is dan het element volgens de

Vlasov-theorie (het V-element). Uit een vergelijking van de elementen in 3.10 resulteren aanwijzingen voor het gebruik ervan:

- voor statische en dynamische problemen waarbij geen torsie optreedt leveren beide typen elementen dezelfde resultaten
- voor statische problemen waarbij wel torsie optreedt is het wenselijk gebruik te maken van het V-element als de parameter ϵ van de elementen groter is dan 2 à 3. Voor kleinere waarden van ϵ kunnen beide typen elementen worden toegepast.
- voor dynamische problemen waarbij torsie optreedt is het ter wille van de nauwkeurigheid gewenst te zorgen dat ϵ voor alle elementen kleiner is dan 1 à 2. Indien dit geldt leveren beide typen elementen vrijwel dezelfde resultaten.

Literatuur bij hoofdstuk 3

- [1] Bornscheuer, W.F. : Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau, 21 (1952), nr.1, p.1 e.v.
- [2] Jagn, J.I. : Biege- und Torsionsverformungen dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957.
- [3] Kollbrunner, C.F., Hajdin, W. : Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil. Mitt. TKSSV, Verlag der Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Zürich, nr. 29, okt. 1964, nr. 30, maart 1965.
- [4] Vlasov, V.Z. : Thin-walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
- [5] Heilig, R. : Der Schubverformungseinfluss auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil. Der Stahlbau, 30 (1961), nr. 4, p. 97 e.v.
- [6] Roik, K., Sedlacek, G. : Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen. Der Stahlbau, 35 (1966), nr. 2, p. 42 e.v.

- [7] Kollbrunner, C.F., Hajdin, N. : Die Verschiebungsmethode in der Theorie der dünnwandigen Stäbe und ein neues Berechnungsmodell des Stabes mit in seinen Ebenen deformierbaren Querschnitten. Abhandlungen, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich, 28-11 (1968), p. 87 e.v.
- [8] Sedlacek, G. : Zur Berechnung der Spannungsverteilung in dünnwandigen Stäben unter Berücksichtigung der Profilverformungen. Der Stahlbau, 38 (1969), nr. 10, p. 314 e.v.
- [9] Langhaar, H.L. : Energy methods in applied mechanics. Wiley, New York, 1962.
- [10] Visser, W. : The finite element method in deformation and heat conducting problems. Dissertatie, Technische Hogeschool, Delft, 1968.
- [11] Veldpaus, F.E. : Toepassing van het principe van de minimale potentiële energie voor de vergelijking van een tweetal theorieën voor dunwandige balken met open dwarsdoorsnede. Rapport WE-71/35, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1971.
- [12] Veldpaus, F.E. : Beschrijving van de ALGOL-procedure GEOMETRICAL DATA. Rapport WE-73/1, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1973 (nog te verschijnen).
- [13] Janssen, J.D. : Het afbakenen van het gebruiksgebied van enige theorieën voor sterkte en stijfheid van dunwandige balken : analytische en numerieke methoden. De Ingenieur, 81 (1969), nr.42, p. 0 119 e.v.
- [14] Melosh, R.W. : Basis for the derivation of matrices for the direct stiffness method. AIAA-Journal, 1 (1963), p. 1631 e.v.
- [15] Brönlund, O.E., et alii : DYNAN user's reference manual. ISD-report no. 97, University of Stuttgart, Stuttgart, 1971.
- [16] Rutishauser, H. : Algorithmus 1 : Lineares Gleichungssystem mit symmetrischer, positiv-definiten Bandmatrix nach Choleski. Computing, 1 (1966), p. 77 e.v.
- [17] Rutishauser, H. : Computational aspects of F.L. Bauers simultaneous iteration method. Numerische Mathematik, 13 (1969), p. 4 e.v.
- [18] Besseling, J.F. : Numerical Methods in Stress Analysis. Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, 1968.

- |19| Guyan, R.J. : Reduction of stiffness and mass matrix. AIAA-Journal, 3 (1965), p. 380
- |20| Banens, J.P.A. : Enkele methoden voor het bepalen van de grootste eigenwaarden van bandmatrices. Afstudeerrapport groep WE, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1972.
- |21| Janssen, J.D. : Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige rechthoekige kokers. Dissertatie, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1967.
- |22| Janssen, J.D. : De mogelijkheden van de methode der eindige elementen bij de berekening van de sterkte en stijfheid van dunwandige balken. De Ingenieur, 82 (1970), nr. 43, p. 0 121 e.v.
- |23| Przemieniecki, J.S. : Theory of matrix structural analysis. McGraw - Hill, New York, 1968.

Dunwandige kokers met willekeurige dwarsdoorsnede

4.1 Inleiding

De torsietheorie volgens Bredt [1] voor dunwandige balken met één- of meercellige doorsnede is, evenals de torsietheorie volgens de Saint Venant voor dunwandige balken met nulcellige doorsnede, onder andere gebaseerd op de veronderstelling dat de doorsnede vrij kan welven, maar overigens niet van vorm verandert. Er treden dan geen axiale normaalspanningen op.

Een theorie met een groter toepassingsgebied ontstaat door uit te gaan van de hypothese dat het patroon van de welving in iedere doorsnede gelijk is aan het patroon volgens de Bredttheorie en daarbij niet a priori aan te nemen dat de axiale normaalspanningen gelijk zijn aan nul. Daarbij kan de vorm van de doorsnede star gedacht worden [2,3,4] of er kan een zekere vervorming van de doorsnede in rekening worden gebracht [4,5,6,7,8,9]. Deze vervorming wordt soms ten onrechte buiten beschouwing gelaten [10].

De - onder andere - door Dabrowski [5], Janssen [6], Resinger [7], Lacher [8] en Vlasov [9] voorgestelde werkwijzen zijn bruikbaar voor kokers met gesloten dwarsdoorsnede, die zijn opgebouwd uit vlakke platen. Zij voeren tot een stelsel gewone lineaire differentiaalvergelijkingen waarin als onafhankelijk variabele alleen de axiale coördinaat optreedt. Zelfs voor kokers met een eenvoudige dwarsdoorsnede is het opstellen van dit stelsel een zeer bewerkelijk proces dat niet eenvoudig te programmeren is voor verwerking met een digitale rekenautomaat. Een ander nadeel van de genoemde werkwijzen is dat, meestal langs numerieke weg, de oplossing bepaald moet worden van dit veelal grote, moeizaam verkregen stelsel differentiaalvergelijkingen. Uiteraard zullen deze bezwaren vooral dan van belang zijn als de koker is opgebouwd uit een groot aantal platen en als er een verdeelde belasting op het cilindrisch oppervlak werkt.

In dit hoofdstuk zullen wij een werkwijze aangeven die bruikbaar is voor dunwandige kokers met willekeurige dwarsdoorsnede. Evenals in hoofdstuk 3 gaan wij uit van het principe van de minimale potentiële energie, waarbij wij weer het energieprincipe volgens Reissner zullen hanteren om een uitdrukking

af te leiden voor de elastische energie. Met deze werkwijze kunnen desgewenst de differentiaalvergelijkingen op eenvoudige en systematische wijze worden opgesteld. Wij zullen in dit hoofdstuk veel aandacht besteden aan een methode waarmee benaderingsoplossingen van het probleem bepaald kunnen worden.

De te gebruiken hypothesen over de spanningen en verplaatsingen stemmen niet helemaal overeen met die volgens Vlasov [9]. Wij zullen in eerste instantie namelijk geen gebruik maken van de veronderstellingen dat de zogenaamde anticlastische buiging verhinderd is en dat de rek van de profiellijn in omtreksrichting gelijk is aan nul. Wij zullen enige vereenvoudigingen van de op te stellen theorie beschouwen; één van die vereenvoudigingen zal overeenkomen met de theorie volgens Vlasov.

In tegenstelling tot hoofdstuk 3 zullen wij ons hier beperken tot statische problemen. De dynamische eigenschappen van een koker kunnen desgewenst op soortgelijke wijze als in hoofdstuk 3 bepaald worden.

4.2 Schematisering van de koker

De profiellijn van een koker met willekeurige dwarsdoorsnede kan benaderd worden door een - eventueel groot - aantal (p) rechte lijnstukken die in de eindpunten, knooppunten genaamd, met elkaar verbonden kunnen zijn (fig. 4.1). De knooppunten zullen steeds op of nabij de profiellijn gelokaliseerd

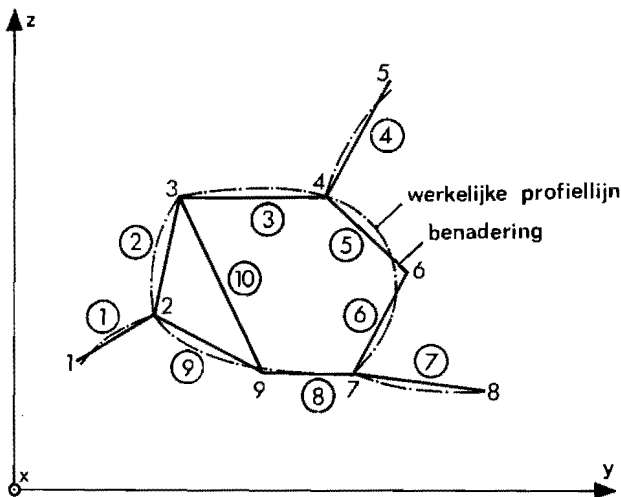


Fig. 4.1 - Dwarsdoorsnede met werkelijke en benaderende profiellijn.

worden. In deze schematisering wordt de koker opgebouwd gedacht uit p vlakke, rechthoekige platen die langs de verbindingslijnen, knooplijnen genaamd, star met elkaar gekoppeld zijn. De doorsnijing van een knooplijn, respektievelijk het middenvlak van een plaat, met een vlak loodrecht op de as van de koker zal overeenkomen met een van de eerder genoemde knooppunten, respektievelijk lijnstukken.

De knooppunten en lijnstukken worden genummerd in de een of andere, vrij te kiezen volgorde (fig. 4.1). De met een knooppunt, respektievelijk lijnstuk, korresponderende knooplijn, respektievelijk plaat, wordt voorzien van hetzelfde nummer als dat knooppunt, respektievelijk lijnstuk. In fig. 4.1 zijn de nummers van de lijnstukken aangegeven met omcirkelde getallen.

Naast deze globale nummering wordt per plaat een lokale nummering ingevoerd van de knooplijnen die de plaat begrenzen (fig. 4.2). Het verband tussen deze lokale en de globale nummering wordt gegeven door een matrix \mathcal{L}_e van orde $(p \times 2)$, waarvan de componenten op rij i ($i = 1, 2, \dots, p$) gelijk zijn aan de globale nummers van de knooplijnen die plaat i begrenzen. Voor de plaat uit fig. 4.2 zal gelden :

$$\mathcal{L}_e [i, 1] = n \quad ; \quad \mathcal{L}_e [i, 2] = q \quad (4.2.1)$$

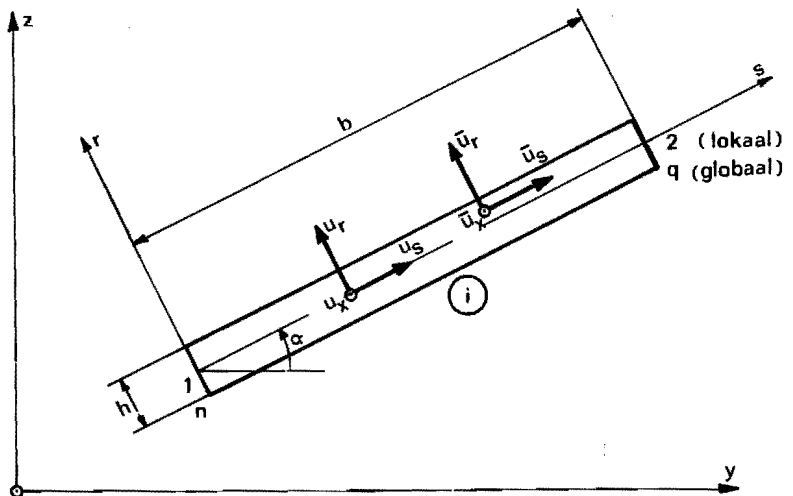


Fig. 4.2 Lokale en globale koördinatensysteem voor plaat i

Bij de beschrijving van het gedrag van een plaat zullen wij zowel gebruik maken van het globale koördinatensysteem x, y, z als van het lokale, rechtsdraaiende, Cartesische assenstelsel x, s, r (fig. 4.2). De oorsprong van de s -koördinaat ligt op de knoopplijn met lokaal nummer 1 en de positieve richting ervan korrespondeert met de richting van deze knoopplijn naar die met lokaal nummer 2.

Wij zullen ons beperken tot de situatie dat de koker cilindrisch is en dat de dikte h en de materiaaleigenschappen E en ν per plaat konstant zijn. De geometrie van de geschematiseerde koker kan dan worden vastgelegd met de lengte ℓ , de dikte h van alle platen, de y - en z -koördinaat van alle knooppunten en de matrix ℓ_e . De genoemde beperkingen zijn niet van wezenlijk belang voor de te beschrijven methode, maar door deze beperkingen te accepteren kunnen de berekeningen in hoge mate vereenvoudigd worden.

4.3 Hypothesen over de verplaatsingen en de spanningen

4.3.1 Inleiding

Voor kokers, die zijn opgebouwd uit vlakke platen, kan het verplaatsings- en spanningsveld worden afgeleid uit de hypothesen over het verloop van de verplaatsingen en spanningen in die platen. Bij het opstellen van die hypothesen gaan wij ervan uit dat de breedte b van elk der platen veel kleiner is dan ℓ en dat de plaatdikte h klein is ten opzichte van b . De hypothesen zullen alléén betrekking hebben op het verloop van spanningen en verplaatsingen als functie van de koördinaten s en r en niet op het verloop in axiale richting.

4.3.2 Het verplaatsingsveld in een plaat

Met de hypothesen volgens Love-Kirchhoff (het "stekelhuid"-principe) kunnen de verplaatsingen $\bar{u}_x, \bar{u}_s, \bar{u}_r$ van een willekeurig punt (x, s, r) van de plaat worden uitgedrukt in de verplaatsingen u_x, u_s, u_r van punten van het middenvlak $r=0$ van de plaat (zie fig.4.2). Met :

$$\phi_x = \frac{\partial u_r}{\partial s} \quad ; \quad \phi_s = -\frac{\partial u_r}{\partial x} \quad (4.3.1)$$

kan volgens deze hypothesen geschreven worden:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_s \\ \bar{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_s \\ u_r \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} \phi_s \\ -\phi_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

De term $r \cdot \phi_s$ in (4.3.2) wordt door Vlasov [9] niet in rekening gebracht. Wij zullen de vervorming, die door deze term wordt gepresenteerd, in het vervolg de anti-clastische buiging noemen.

In overeenstemming met [9] benaderen wij het verloop van u_x en u_r in s-richting door een lineair, respectievelijk een derdegraads polynoom in s. Deze veronderstelling zal alleen geoorloofd zijn als de breedte b van de beschouwde plaat veel kleiner is dan de lengte ℓ . Vlasov neemt bovendien aan dat de rek van het middenvlak in s-richting, $\epsilon_s = \bar{\epsilon}_s(x, s, r=0)$, overal gelijk is aan nul. Wij zullen geen gebruik maken van deze veronderstelling maar nemen aan dat ϵ_s onafhankelijk is van s. De verplaatsing in s-richting van punten van het middenvlak, u_s , zal dus lineair zijn in s.

Met de genoemde veronderstellingen kunnen u_x , u_s en u_r op een willekeurige plaats (x, s) ($0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq s \leq b$) worden uitgedrukt in de verplaatsingen $u_{xn}(x)$, $u_{sn}(x)$, $u_{rn}(x)$ en $\phi_{xn}(x)$ aan de rand $s=0$ en de verplaatsingen $u_{xq}(x)$, $u_{sq}(x)$, $u_{rq}(x)$ en $\phi_{xq}(x)$ aan de rand $s=b$. Beschouwen wij deze verplaatsingen als de componenten van de zogenaamde lokale verplaatsingsvektor $\hat{v}_p(x)$,

$$\hat{v}_p(x) = \begin{bmatrix} u_{xn} & u_{xq} & u_{sn} & u_{sq} & u_{rn} & u_{rq} & \phi_{xn} & \phi_{xq} \end{bmatrix}, \quad (4.3.3)$$

dan zal voor u_x , u_s en u_r geschreven kunnen worden:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_s \\ u_r \end{bmatrix} = \hat{A}(s) \cdot A^{-1} \cdot \hat{v}_p(x) \quad (4.3.4)$$

In appendix D zijn relaties gegeven voor de componenten van \hat{A} en A^{-1} .

4.3.3 Het spanningsveld in een plaat

In overeenstemming met de klassieke theorie voor plaatbuiging nemen wij aan dat de spanningen $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_s$ en $\bar{\sigma}_{xs}$ lineaire functies zijn van de diktekoördinaat r en dat de spanningen $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\tau}_{xr}$ en $\bar{\tau}_{sr}$ geen bijdrage leveren tot de elastische energie. Bovendien veronderstellen wij dat:

1. $\bar{\sigma}_s(x, s, r=0)$ en $\bar{\tau}_{xs}(x, s, r) - \bar{\tau}_{xs}(x, s, r=0)$ onafhankelijk zijn van s
2. $\bar{\sigma}_x(x, s, r)$, $\bar{\sigma}_s(x, s, r) - \bar{\sigma}_s(x, s, r=0)$ en $\bar{\tau}_{xs}(x, s, r=0)$ lineair zijn in s.

Door deze hypothesen ligt vast hoe de interessante spanningen $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_s$ en $\bar{\tau}_{xs}$ verlopen als functie van s en r. In matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_s \\ \bar{\tau}_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \frac{s}{b} & 0 & 0 & 0 & \xi \cdot \eta & \frac{s}{b} \cdot \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \cdot \eta & \frac{s}{b} \cdot \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \frac{s}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \cdot \bar{\sigma}_p(x) \quad (4.3.5)$$

Ter afkorting is hierbij gesteld $\xi = 1 - \frac{s}{b}$ en $\eta = 2 \cdot \frac{r}{h}$. Bovendien is de spanningsvektor $\bar{\sigma}_p(x)$ ingevoerd :

$$\bar{\sigma}_p(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{xn} & \sigma_{xq} & \sigma_s & \tau_n & \tau_q & \sigma_{bxn} & \sigma_{bxq} & \sigma_{bsn} & \sigma_{bsq} & \tau_{sv} \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

De componenten van $\bar{\sigma}_p$ hebben een eenvoudig te onderkennen fysische betekenis.

De in (4.3.5) tot uitdrukking gebrachte hypothesen zijn enerzijds gebaseerd op het te verwachten spanningsveld bij het aangenomen verplaatsingsveld en anderzijds op de verwachting dat met (4.3.5) het werkelijke verloop der spanningen in smalle, dunne platen ($b \ll l$, $h \ll b$) voldoende goed benaderd kan worden.

Over de hypothese $\bar{\tau}_{xs}(x,s,r) = \xi \cdot \tau_n(x) + \frac{s}{b} \cdot \tau_q(x) + \eta \cdot \tau_{sv}(x)$ zij opgemerkt dat de laatste term is toegevoegd om ook torsie van kokers met (gedeeltelijk) open dwarsdoorsnede te kunnen beschrijven.

De hypothesen wijken af van die uit [9]. Vlasov neemt aan dat $\bar{\tau}_{xs}$ niet afhangt van r en dat $\bar{\sigma}_s(x,s,r=0)$ overal gelijk is aan nul. Bovendien wordt in [9] op een aantal plaatsen in de berekeningen gesteld : $v = 0$. De aanname dat $\bar{\tau}_{xs}$ onafhankelijk is van r heeft tot gevolg dat de bedoelde theorie uit [9] niet zonder meer kan worden toegepast voor kokers met een gedeeltelijk open dwarsdoorsnede.

4.4 De potentiële energie

4.4.1 Inleiding

Evenals in hoofdstuk 3 maken wij gebruik van het energieprincipe volgens Reissner om voor de potentiële energie V een uitdrukking af te leiden die zo goed mogelijk aansluit bij de hypothesen over de spanningen en de verplaatsingen. Laten wij dynamische verschijnselen buiten beschouwing dan wordt de energie in een plaat gegeven door:

$$H_p = U_p + P_{cp} + P_{ep} + P_{rp} \quad (4.4.1)$$

Daarbij is U_p de elastische energie, uitgedrukt in \bar{v}_p en $\bar{\sigma}_p$. P_{cp} en P_{ep} representeren de bijdrage van de verdeelde belasting in het middenvlak $r=0$, respectievelijk van de belasting in de eindvlakken $x=0$ en $x=l$ van de plaat. De term P_{rp} geeft de energie ten gevolge van de krachtgrootheden aan de randen $s=0$ en $s=b$.

Per plaat passen wij het principe van Reissner toe door te eisen dat $\delta H_p = 0$ voor alle continue variaties van $\bar{\sigma}_p$. Worden de krachtgrootheden aan de randen $s=0$ en $s=b$ daarbij als voorgeschreven grootheden beschouwd, dan volgt $\delta U_p = 0$. Hieruit kan het verband tussen $\bar{\sigma}_p$ en \bar{v}_p worden afgeleid; dit wordt gebruikt om $\bar{\sigma}_p$ te elimineren uit de relatie voor de elastische energie. Daardoor ontstaat voor U_p een uitdrukking waarin als onbekenden alleen nog de componenten van \bar{v}_p voorkomen.

Substitutie van deze uitdrukking in (4.4.1) en sommatie van H_p over alle platen levert de totale energie in de koker. Deze energie wordt geheel bepaald door een aantal verplaatsingsfuncties en de voorgeschreven belasting en kan dus beschouwd worden als de in de koker opgehoopte potentiële energie V .

4.4.2 De elastische energie in een plaat

Volgens 4.3.3 nemen wij aan dat de spanningen $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\tau}_{xr}$ en $\bar{\tau}_{sr}$ géén bijdrage leveren tot de elastische energie, zodat daarvoor zal gelden:

$$U_p = + \int_{x=0}^l \int_{s=0}^b \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ -\frac{1}{2E} (\bar{\sigma}_x^2 - 2\nu \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_s^2) - \frac{1}{2G} \bar{\tau}_{xs} + \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{\sigma}_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial s} + \bar{\tau}_{xs} \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} \right) \right\} dr ds dx \quad (4.4.2)$$

Door invullen van (4.3.2), (4.3.4) en (4.3.7) en integratie over de dikte h en de breedte b van de plaat volgt:

$$U_p = \int_{x=0}^l \left\{ -\frac{1}{2} \bar{\sigma}_p \cdot F_{\sigma} \cdot \bar{\sigma}_p + \bar{\sigma}_p \cdot (W_v \cdot \bar{v}_p + W_{\theta} \cdot \bar{\theta}_p + W_x \cdot \bar{x}_p) \right\} dx \quad (4.4.3)$$

Hierin zijn $\bar{\theta}_p$ en \bar{x}_p de eerste en tweede afgeleide naar x van de lokale verplaatsingsvektor:

$$\bar{\theta}_p = \frac{d\bar{v}_p}{dx}; \quad \bar{x}_p = \frac{d^2\bar{v}_p}{dx^2} \quad (4.4.4)$$

F_{σ} is een positief definitie matrix waarvan de componenten geheel bepaald worden door de materiaaleigenschappen E en ν en de afmetingen b en h van de plaat. De componenten van de matrices W_a ($a = v, \theta, \chi$) hangen alleen maar af van b en h .

Uit $\delta U_p = 0$ voor alle continue variaties van $\hat{\sigma}_p$ volgen direkt de konstitutieve vergelijkingen. In matrixvorm:

$$\hat{\sigma}_p(x) = F_{\sigma}^{-1} \cdot (W_v \cdot \hat{v}_p + W_{\theta} \cdot \hat{\theta}_p + W_{\chi} \cdot \hat{\chi}_p) \quad (4.4.5)$$

Hiermee kunnen wij $\hat{\sigma}_p$ elimineren uit (4.4.3). Dan ontstaat:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \begin{bmatrix} \hat{v}_p \\ \hat{\theta}_p \\ \hat{\chi}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{vv} & S_{v\theta} & S_{v\chi} \\ S_{\theta v} & S_{\theta\theta} & S_{\theta\chi} \\ S_{\chi v} & S_{\chi\theta} & S_{\chi\chi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_p \\ \hat{\theta}_p \\ \hat{\chi}_p \end{bmatrix} dx \quad (4.4.6)$$

waarbij de matrices S_{ab} ($a, b = v, \theta, \chi$) worden bepaald door:

$$S_{ab} = S_{ba} = W_a \cdot F_{\sigma}^{-1} \cdot W_b \quad (4.4.7)$$

Voor de berekening van de componenten van de matrices in dit deelhoofdstuk wordt verwezen naar appendix D. Uit die berekeningen blijkt dat $S_{\theta\chi} = S_{\chi\theta}$ een nulmatrix is en dat de structuur van de overige matrices S_{ab} ($a, b = v, \theta, \chi$) op de volgende wijze kan worden gekarakteriseerd:

$$S_{vv} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{■} & & & \\ \hline & \text{■} & & \\ \hline & & \text{■} & \\ \hline & & & \text{■} \\ \hline \end{array}$$

$$S_{v\theta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \text{■} & & \\ \hline \text{■} & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

$$S_{v\chi} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \text{■} & \\ \hline & & \text{■} & \\ \hline \end{array}$$

$$S_{\theta\theta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{■} & & & \\ \hline & \text{■} & & \\ \hline & & \text{■} & \\ \hline & & & \text{■} \\ \hline \end{array}$$

$$S_{\chi\chi} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \text{■} & \\ \hline & & \text{■} & \\ \hline \end{array}$$

Ieder blokje stelt een matrix van orde (2×2) voor. Alleen in de gearceerde blokjes kunnen getallen ongelijk aan nul voorkomen.

4.4.3 De potentiële energie van de belasting op een plaat

De potentiële energie P_{cp} ten gevolge van de in het middenvlak $r=0$ aangrijpende belasting $\hat{q} = [q_x \ q_s \ q_r]$ is gelijk aan:

$$P_{cp} = - \int_{x=0}^{\ell} \int_{s=0}^b (q_x \cdot u_x + q_s \cdot u_s + q_r \cdot u_r) ds dx \quad (4.4.8)$$

en kan dus geschreven worden als:

$$P_{cp} = - \int_{x=0}^{\ell} \hat{v}_p \cdot \hat{f}_{cp} \cdot dx \quad (4.4.9)$$

Daarbij is $\hat{f}_{cp}(x)$ de krachtvektor die kinematisch consistent is met de belasting $\hat{q}(x)$ en die gedefinieerd is als:

$$\hat{f}_{cp}(x) = \hat{A}^{-1} \int_{s=0}^b \hat{A}(s) \cdot \hat{q}(x,s) \cdot ds \quad (4.4.10)$$

Ook de potentiële energie P_{ep} ten gevolge van de belasting aan de randen $x=0$ en $x=\ell$ kan worden uitgedrukt in \hat{v}_p . Er geldt:

$$P_{ep} = - \int_{s=0}^b \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\bar{\sigma}_x \cdot \bar{u}_x + \bar{\tau}_{xs} \cdot \bar{u}_s + \bar{\tau}_{xr} \cdot \bar{u}_r) \Big|_{x=0}^{\ell} dr ds \quad (4.4.11)$$

waarbij $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xs}$ en $\bar{\tau}_{xr}$ aan de randen $x=0$ en $x=\ell$ vervangen moeten worden door de voorgeschreven spanningen $\bar{\sigma}_{x1}, \bar{\tau}_{xs1}$ en $\bar{\tau}_{xr1}$, respectievelijk $\bar{\sigma}_{x2}, \bar{\tau}_{xs2}, \bar{\tau}_{xr2}$ aan die randen. Met de hypothesen over het verplaatsingsveld kan (4.4.11) worden overgevoerd in :

$$P_{ep} = - \left[\hat{v}_p \quad \hat{m}_p \right]_{(x=\ell)} \cdot \begin{bmatrix} f_{p2} \\ m_{p2} \end{bmatrix} + \left[\hat{v}_p \quad \hat{m}_p \right]_{(x=0)} \cdot \begin{bmatrix} f_{p1} \\ m_{p1} \end{bmatrix} \quad (4.4.12)$$

De vektoren f_{pi} en m_{pi} ($i=1,2$) bevatten blijkbaar alle relevante informatie over de belasting aan de randen $x=0$ en $x=\ell$ van de plaat. Bij de omwerking van (4.4.11) naar (4.4.12) volgt dat de eerste vier componenten van m_{p1} en m_{p2} gelijk zijn aan nul.

Bij de berekening van de potentiële energie P_{rp} ten gevolge van de krachtgrootheden aan de randen $s=0$ en $s=b$ moet onderscheid gemaakt worden tussen randen waarop wel en randen waarop geen uitwendige belasting aangrijpt. Voor de berekening van de totale potentiële energie in de koker ten gevolge van de be-

lasting zijn de randen, die niet uitwendig belast zijn, niet van belang. De bijdrage van de randen die wel een uitwendige belasting dragen kan in rekening gebracht worden in P_{cp} in plaats van P_{rp} . Bij de verdere berekeningen zullen wij P_{rp} daarom buiten beschouwing laten.

4.4.4 De totale potentiële energie in een koker met lengte l

De totale energie die is opgehoopt in een uit platen opgebouwde koker, kan bepaald worden door de bijdragen van alle platen te sommeren. Ten einde deze sommatie op eenvoudige wijze te kunnen uitvoeren zullen wij alle van belang zijnde vektoren en matrices van elk der platen relateren aan één assenstelsel, het globale x, y, z - koördinatensysteem.

Naast de lokale verplaatsingsvektor \hat{v}_p introduceren wij de globale verplaatsingsvektor \hat{v}_g , gedefinieerd door (fig.4.3) :

$$\hat{v}_g(x) = \begin{bmatrix} u_{xn} & u_{xq} & u_{yn} & u_{yq} & u_{zn} & u_{zq} & \phi_{xn} & \phi_{xq} \end{bmatrix} \quad (4.4.13)$$

Het verband tussen \hat{v}_g en \hat{v}_p kan worden vastgelegd met een orthonormale transformatiematrix T waarvan de componenten alléén afhangen van de hoek α tussen de globale y -as en de lokale s -as van de beschouwde plaat. Er geldt:

$$\hat{v}_p(x) = T \cdot \hat{v}_g(x); \quad \hat{v}_g(x) = T^T \cdot \hat{v}_p(x) \quad (4.4.14)$$

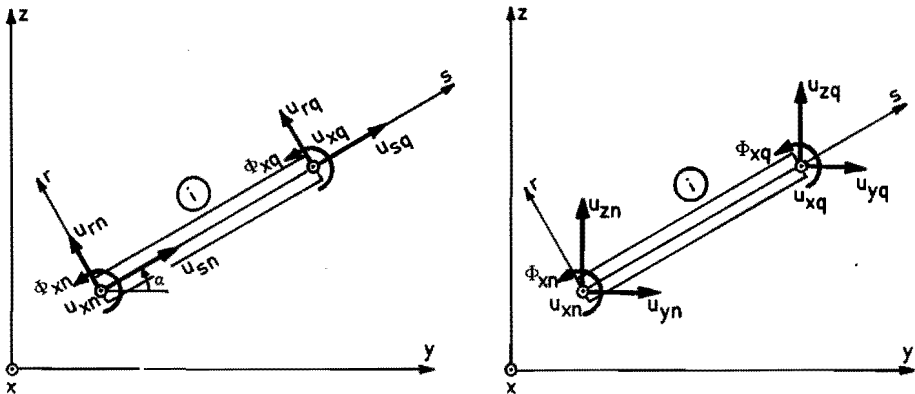


Fig. 4.3 De componenten van de lokale en de globale verplaatsingsvektor van een plaat

De reeds afgeleide uitdrukkingen voor U_p en $P_{cp} + P_{ep}$ kunnen nu worden omgewerkt tot relaties van de volgende vorm:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} \begin{bmatrix} \hat{v}_g \\ \hat{\theta}_g \\ \hat{x}_g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{v\theta} & K_{vx} \\ K_{\theta v} & K_{\theta\theta} & K_{\theta x} \\ K_{xv} & K_{x\theta} & K_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_g \\ \hat{\theta}_g \\ \hat{x}_g \end{bmatrix} \cdot dx \quad (4.4.15)$$

$$P_{cp} + P_{ep} = - \int_{x=0}^{\ell} \hat{v}_g \cdot \hat{f}_{cg} \cdot dx - \begin{bmatrix} \hat{v}_g \\ \hat{\theta}_g \end{bmatrix}_{(x=\ell)} \cdot \begin{bmatrix} f_{g2} \\ m_{g2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_g \\ \hat{\theta}_g \end{bmatrix}_{(x=0)} \cdot \begin{bmatrix} f_{g1} \\ m_{g1} \end{bmatrix} \quad (4.4.16)$$

De hierbij optredende vektoren met index g ontstaan uit de gelijknamige vektoren met index p door vóórvermenigvuldiging met de matrix \hat{T} , terwijl de deelmatrices K_{ab} ($a, b = v, \theta, x$) worden gegeven door:

$$K_{ab} = K_{ba} = \hat{T} \cdot S_{ab} \cdot \hat{T} \quad (4.4.17)$$

Voor de berekening van de totale elastische energie U en de totale potentiële energie ten gevolge van de belasting, P , voeren wij een vektor $\hat{v}=\hat{v}(x)$ in waarin alle interessante verplaatsingsgrootheden van doorsnede x worden opgeborgen. Wij stellen:

$$\hat{v}(x) = \begin{bmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{w}(x) \\ \hat{\phi}(x) \end{bmatrix} \quad (4.4.18)$$

met:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xm} \end{bmatrix} \quad (4.4.19)$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{ym} & u_{z1} & u_{z2} & \dots & u_{zm} \end{bmatrix} \quad (4.4.20)$$

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_{x1} & \phi_{x2} & \dots & \phi_{xm} \end{bmatrix} \quad (4.4.21)$$

Hierin zijn u_{xi} , u_{yi} , u_{zi} en ϕ_{xi} de verplaatsingen van knooppunt i ($i=1,2,\dots,m$) in doorsnede x .

Door sommatie over alle platen kan de totale potentiële energie V in de koker bepaald worden. Met

$$\hat{\theta}(x) = \frac{d\hat{v}}{dx} ; \quad \hat{x}(x) = \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} \quad (4.4.22)$$

ontstaat dan uiteindelijk een uitdrukking van de volgende vorm:

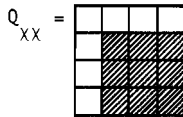
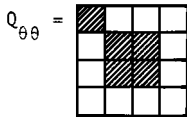
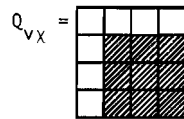
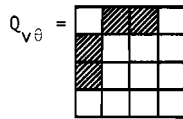
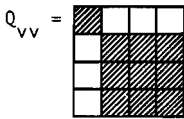
$$V = U + P \quad (4.4.23)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\theta} \\ \hat{x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{vv} & Q_{v\theta} & Q_{vx} \\ Q_{\theta v} & Q_{\theta\theta} & Q_{\theta x} \\ Q_{xv} & Q_{x\theta} & Q_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\theta} \\ \hat{x} \end{bmatrix} \cdot dx \quad (4.4.24)$$

$$P = - \int_{x=0}^{\ell} \hat{v} \cdot \hat{f}_c \cdot dx - \begin{bmatrix} \hat{v}_2 & \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_2 \\ m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{\theta}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad (4.4.25)$$

Daarbij zijn v_1, θ_1 en v_2, θ_2 gelijk aan $\hat{v}, \hat{\theta}$ aan rand 1 ($x=0$), respectievelijk rand 2 ($x=\ell$).

Uit de wijze waarop de matrices Q_{ab} ($a, b = v, \theta, x$) worden berekend uit de matrices K_{ab} van de afzonderlijke platen volgt dat $Q_{\theta x} = Q_{x\theta}$ een nulmatrix is en dat de structuur van de overige matrices Q_{ab} op de volgende manier kan worden weergegeven:



In deze figuren representeert ieder blokje een matrix van orde $(m \times m)$. Getallen ongelijk aan nul kunnen alleen in de gearceerde blokjes voorkomen.

Om bij de verdere berekeningen van deze structuur gebruik te kunnen maken partitioneren wij Q_{ab} ($a, b = v, \theta, x$) op een wijze die overeenstemt met de

splitsing van \hat{v} in de deelvectoren \hat{u} , \hat{w} en $\hat{\phi}$. Wij schrijven:

$$Q_{ab} = \hat{Q}_{ba} = \begin{bmatrix} A_{ab} & B_{ab} & 0 \\ C_{ab} & D_{ab} & E_{ab} \\ 0 & F_{ab} & G_{ab} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m \\ m \\ m \end{array} \quad (a, b = v, \theta, x) \quad (4.4.26)$$

Ook de in (4.4.24) en (4.4.25) optredende vectoren worden - op dezelfde manier als \hat{v} - gesplitst in deelvectoren. Wij schrijven ($i = 1, 2$):

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}; \quad v_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \phi_i \end{bmatrix}; \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \hat{\psi} \\ \hat{\rho} \end{bmatrix}; \quad \theta_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \psi_i \\ \rho_i \end{bmatrix} \quad (4.4.27)$$

$$\hat{f}_c = \begin{bmatrix} \hat{n}_c \\ \hat{k}_c \\ \hat{t}_c \end{bmatrix}; \quad f_i = \begin{bmatrix} N_i \\ K_i \\ T_i \end{bmatrix}; \quad m_i = \begin{bmatrix} 0 \\ M_i \\ B_i \end{bmatrix} \quad (4.4.28)$$

4.5 De differentiaalvergelijkingen

Met het principe van de minimale potentiële energie, toegepast op (4.4.23),(4.4.25), kan het stelsel differentiaalvergelijkingen voor de componenten van \hat{v} worden afgeleid. Er volgt:

$$- A_{\theta\theta} \cdot \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + (B_{v\theta} - \hat{C}_{v\theta}) \cdot \frac{d\hat{w}}{dx} + A_{vv} \cdot \hat{u} = \hat{n}_c(x) \quad (4.5.1)$$

$$+ D_{xx} \cdot \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} + E_{xx} \cdot \frac{d^4 \hat{\phi}}{dx^4} + (D_{vx} - D_{\theta\theta} + D_{xv}) \cdot \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} + (E_{vx} + \hat{F}_{vx}) \cdot \frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} + (C_{v\theta} - \hat{B}_{v\theta}) \cdot \frac{d\hat{u}}{dx} + D_{vv} \cdot \hat{w} + E_{vv} \cdot \hat{\phi} = \hat{k}_c(x) \quad (4.5.2)$$

$$\begin{aligned}
 & + \nabla_{XX} \cdot \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + G_{XX} \cdot \frac{d^4 \tilde{\phi}}{dx^4} + (F_{VX} + \nabla_{VX}) \cdot \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + (G_{VX} + G_{XV}) \cdot \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dx^2} + \\
 & + \nabla_{VV} \cdot \tilde{w} + G_{VV} \cdot \tilde{\phi} = \hat{f}_c(x) \quad (4.5.3)
 \end{aligned}$$

Bovendien kunnen randvoorwaarden voor de eindvlakken $x=0$ en $x=l$ worden afgeleid. Stellen wij:

$$\hat{f}(x) = \begin{bmatrix} \hat{N} \\ \hat{K} \\ \hat{T} \end{bmatrix} = - \frac{d\hat{m}}{dx} + \begin{bmatrix} A_{\theta\theta} \cdot \frac{d\hat{u}}{dx} + \nabla_{V\theta} \cdot \tilde{w} \\ D_{\theta\theta} \cdot \frac{d\tilde{w}}{dx} + \nabla_{V\theta} \cdot \hat{u} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5.4)$$

$$\hat{m}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{M} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{XX} \cdot \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + E_{XX} \cdot \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dx^2} + \nabla_{VX} \cdot \tilde{w} + \nabla_{VX} \cdot \tilde{\phi} \\ \nabla_{XX} \cdot \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + G_{XX} \cdot \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dx^2} + \nabla_{VX} \cdot \tilde{w} + \nabla_{VX} \cdot \tilde{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.5.5)$$

dan volgt dat aan deze randen de volgende kondities zullen gelden ($i=1,2$):

$$\hat{N} = N_i ; \quad \hat{u} = u_i ; \quad (4.5.6)$$

$$\hat{K} = K_i ; \quad \hat{M} = M_i ; \quad \hat{w} = w_i ; \quad \hat{\psi} = \psi_i \quad (4.5.7)$$

$$\hat{T} = T_i ; \quad \hat{B} = B_i ; \quad \hat{\phi} = \phi_i ; \quad \hat{\rho} = \rho_i \quad (4.5.8)$$

waarbij $i=1$ voor $x=0$ en $i=2$ voor $x=l$.

Niet alle kondities (4.5.6), ..., (4.5.8) kunnen geïnterpreteerd worden als randkondities in de gebruikelijke zin van het woord. Bij een concreet probleem zullen steeds aan elke rand i ($i=1,2$) m componenten van N_i en u_i , $4 \cdot m$ componenten van K_i , M_i , w_i en ψ_i en $2 \cdot m$ componenten van T_i , B_i , ϕ_i en ρ_i een voorgeschreven waarde bezitten. De werkelijke randkondities ontstaan door van (4.5.6), ..., (4.5.8) alleen die vergelijkingen te beschouwen waarvan het rechterlid een voorgeschreven waarde heeft.

Uit het voorgaande blijkt dat de differentiaalvergelijkingen en de randkondities eenvoudig geformuleerd kunnen worden zodra de uitdrukking voor de potentiële energie is opgesteld. Dit stelsel vergelijkingen levert echter in het algemeen geen goed bruikbare basis voor verdere berekeningen. Immers,

voor het bepalen van het homogene deel van de totale oplossing $\hat{v} = \hat{v}(x)$ moet het met (4.5.1), ..., (4.5.3) samenhangende eigenwaardeprobleem worden opgelost. Weliswaar zijn hiervoor oplossingsstrategieën bekend (zie bijvoorbeeld Vlasov [9] en Kollbrunner - Hajdin [11]) maar deze stuiten op grote - numerieke - problemen als m niet zeer klein is. Als het rechterlid van (4.5.1), ..., (4.5.3) van nul verschilt moet bovendien een particuliere oplossing bepaald worden; daarvoor zijn echter geen praktisch bruikbare, min of meer algemeen toepasbare werkwijzen aan te geven. Hierbij zij opgemerkt dat differentiemethode of numerieke integratie soms wellicht uitkomst kunnen bieden.

In verband met de hiervoor gesignaleerde problemen zullen wij in het volgende deelhoofdstuk een werkwijze beschrijven die niet uitgaat van het stelsel differentiaalvergelijkingen maar van de uitdrukking voor de potentiële energie waaruit dat stelsel is afgeleid. Deze werkwijze is, evenals de werkwijze in 3.5, gebaseerd op technieken uit de eindige elementenmethode. Er kunnen praktisch bruikbare benaderingsoplossingen mee bepaald worden, maar de resultaten ervan zullen slechts in uitzonderingsgevallen exakt overeenkomen met de oplossing van de differentiaalvergelijkingen.

4.6 *Benaderingsoplossing met behulp van de elementenmethode*

4.6.1 *Inleiding*

De koker wordt door het aanbrengen van snedevlakken loodrecht op de as, knoopvlakken genaamd, verdeeld in elementen, kokerelementen genaamd. In zo'n kokerelement, waarvan de lengte gelijk zij aan l , wordt het verloop van \hat{v} aangenomen, zodanig dat \hat{v} voor een willekeurige snede x eenduidig kan worden uitgedrukt in $v_1 = \hat{v}(x=0)$, $\theta_1 = \hat{\theta}(x=0)$ en $v_2 = \hat{v}(x=l)$, $\theta_2 = \hat{\theta}(x=l)$ van de eindvlakken $x=0$ en $x=l$ van het element.

Met deze veronderstelling over \hat{v} en met (4.4.23), ..., (4.4.25) kan de potentiële energie in het element worden uitgedrukt in v_1 , θ_1 , v_2 en θ_2 , waarna op dezelfde wijze als in 3.5 de totale potentiële energie V in de koker kan worden uitgedrukt in de uitwendige belasting en de verplaatsingen van de knoopvlakken (dit zijn de snedevlakken, inclusief de eindvlakken van de koker). Vervolgens kunnen deze vektoren op de gebruikelijke, reeds in 3.6 aangeduide wijze bepaald worden.

Zodra de verplaatsingsvectoren van de knoopvlakken, die een kokerelement begrenzen, bekend zijn kan voor eik van de platen waaruit dat kokerelement is

opgebouwd de plaatvektor \hat{v}_p bepaald worden. Daaruit volgen de spanningen in die platen.

4.6.2 Het verloop van $\hat{v}(x)$ in een kokerelement

In de onderhavige, eëndimensionale theorie wordt het verloop van de verplaatsingen in een kokerelement gekarakteriseerd door \hat{v} als functie van x . Uit analytische en experimentele resultaten van Janssen [6] voor dunwandige kokers met vierkante dwarsdoorsnede blijkt dat $\hat{v} = \hat{v}(x)$ in belangrijke mate niet-lineair kan zijn. Indien wij desondanks voor alle componenten van \hat{v} een lineair verloop in axiale richting aannemen zullen wij - in het algemeen - de koker in een groot aantal kokerelementen moeten verdelen als wij het werkelijke verplaatsingsveld met voldoende nauwkeurigheid willen benaderen. Een ernstiger nadeel van een dergelijke veronderstelling over het verloop van \hat{v} is echter dat de aansluiting tussen de kokerelementen onderling niet gegarandeerd kan worden en dat slechts in uitzonderingsgevallen convergentie naar de exakte resultaten zal optreden als de verdeling in elementen verfijnd wordt.

Kayser [12] gaat uit van een geheel andere veronderstelling over het verloop van $\hat{v}(x)$. Hij neemt aan dat alle componenten van $\hat{v}(x)$ harmonische functies van x zijn. Zijn werkwijze is uitermate geschikt voor situaties waarin de componenten van \hat{v} in een Fourierreeks ontwikkeld kunnen worden, maar door de genoemde veronderstelling is het toepassingsgebied ervan beperkt.

Wij willen hier een verplaatsingsveld kiezen dat de hiervoor genoemde nadelen niet of in veel mindere mate vertoont en dat voldoet aan de volgende eisen:

1. alle homogene rektoestanden die in de onderhavige theorie op kunnen treden moeten beschreven kunnen worden.
2. de aansluiting tussen de kokerelementen onderling moet volledig gegarandeerd kunnen worden.

Rekening houdende met de structuur van de matrices Q_{ab} ($a, b = v, \theta, \chi$) volgt bij nadere analyse van de elastische energie volgens (4.4.24) dat de rektoestand in een willekeurige snede x wordt bepaald door de vektoren \hat{u} , $\frac{d\hat{u}}{dx}$, \hat{w} , $\frac{d\hat{w}}{dx}$, $\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}$, en $\hat{\phi}$, $\frac{d\hat{\phi}}{dx}$, $\frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2}$. Als gevolg van de eerste eis moet het nog te kiezen verloop van $\hat{v} = \left[\hat{u} \quad \hat{w} \quad \hat{\phi} \right]$ in ieder geval toelaten dat elk van de genoemde vektoren konstant wordt. Beperken wij ons tot polynomen als interpolatiefunk-

ties dan volgt dat \bar{u} tenminste lineair en dat \bar{w} en $\bar{\phi}$ tenminste kwadratisch in x moeten zijn.

Om de gevolgen van de tweede eis na te gaan beschouwen wij een knoopvlak waarin twee kokerelementen i en j gekoppeld worden (fig. 4.4).

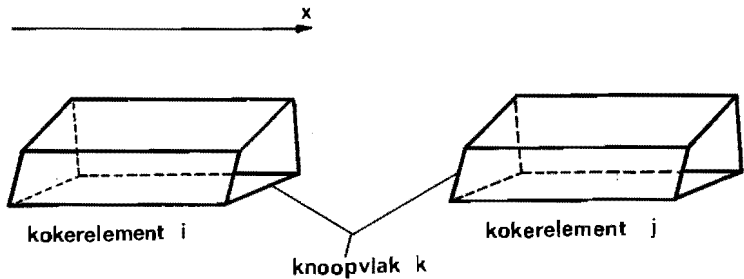


Fig. 4.4 In knoopvlak k te koppelen kokerelementen i en j

De aansluiting tussen deze elementen is verzekerd als voor elk punt (s, r) van het rechtereindvlak van element i de totale verplaatsing gelijk is aan de totale verplaatsing van het overeenkomstige punt (s, r) van het linkereindvlak van element j . Met de veronderstellingen uit 4.3.2 over het verloop van de verplaatsingen als functie van s en r volgt dat bij de koppeling van twee kokerelementen de vektoren \bar{u} , \bar{w} , $\bar{\psi} = \frac{d\bar{w}}{dx}$, $\bar{\phi}$ en $\bar{\rho} = \frac{d\bar{\phi}}{dx}$ ook in het knoopvlak continu moeten zijn. Dit kan op de gebruikelijke wijze worden gerealiseerd door de componenten van \bar{u} , \bar{w} en $\bar{\phi}$ in een willekeurige snede x in een kokerelement uit te drukken in de componenten van u_1, u_2 respectievelijk w_1, ψ_1, w_2, ψ_2 en $\phi_1, \rho_1, \phi_2, \rho_2$ van de knoopvlakken die het element begrenzen (zie fig. 4.5). Beperken wij ons weer tot polynomen als interpolatiefunctie dan kan op grond hiervan voor \bar{u} een lineair en voor \bar{w} en $\bar{\phi}$ een derdegraads verloop gekozen worden. Bij die keuze zal gelden:

$$\bar{u}(x) = \bar{g}_1(x) \cdot u_1 + \bar{g}_2(x) \cdot u_2 \quad (4.6.1)$$

$$\bar{w}(x) = \hat{h}_1(x) \cdot w_1 + \hat{h}_2(x) \cdot \lambda \cdot \psi_1 + \hat{h}_3(x) \cdot w_2 + \hat{h}_4(x) \cdot \lambda \cdot \psi_2 \quad (4.6.2)$$

$$\bar{\phi}(x) = \hat{h}_1(x) \cdot \phi_1 + \hat{h}_2(x) \cdot \lambda \cdot \rho_1 + \hat{h}_3(x) \cdot \phi_2 + \hat{h}_4(x) \cdot \lambda \cdot \rho_2 \quad (4.6.3)$$

waarbij \bar{g}_1 en \bar{g}_2 lineair in x zijn terwijl $\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{h}_3$ en \hat{h}_4 derdegraadsfuncties van x zijn (zie appendix D).

Het is uiteraard mogelijk om in plaats van (4.6.1) voor \hat{u} een soortge-
lijik verloop te kiezen als voor \hat{w} en $\hat{\phi}$, dus:

$$\hat{u}(x) = \hat{h}_1(x) \cdot u_1 + \hat{h}_2(x) \cdot \ell \cdot \epsilon_1 + \hat{h}_3(x) \cdot u_2 + \hat{h}_4(x) \cdot \ell \cdot \epsilon_2 \quad (4.6.4)$$

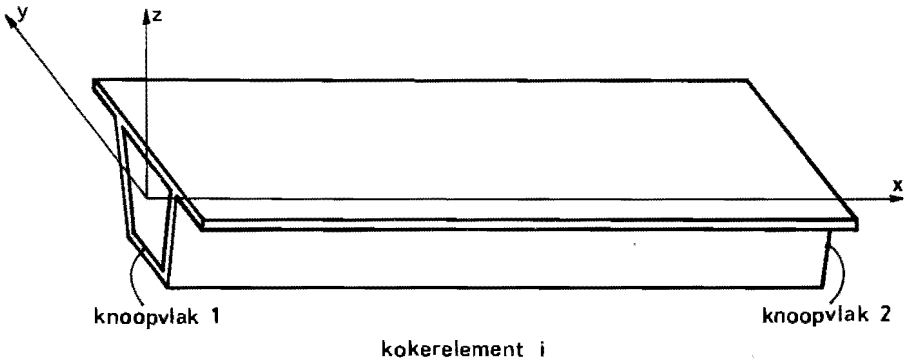


Fig. 4.5 Kokerelement *i* met de (lokale) nummering der knoopvlakken

Behalve de componenten van u_1 en u_2 treden dan ook de componenten van $\epsilon_1 = \left(\frac{d\hat{u}}{dx}\right)_{x=0}$ en $\epsilon_2 = \left(\frac{d\hat{u}}{dx}\right)_{x=\ell}$ op als parameter. De moeilijkheid hierbij is dat van geval tot geval moet worden nagegaan welke koppeling er gelegd moet worden tussen de rekvektor ϵ_- van het rechtereindvlak van element *i* en de rekvektor ϵ_+ van het linkereindvlak van element *j* (zie fig.4.4). Deze koppeling zal in het algemeen niet gegeven worden door de relatie $\epsilon_- = \epsilon_+$ omdat (bijvoorbeeld) een diskontinuiteit in de vektor \hat{N} der normaalkrachten in het vlak van koppeling zal leiden tot extra termen in die relatie. Bij de verdere ontwikkeling van de theorie zou hiermee rekening gehouden kunnen worden, maar dit veroorzaakt een aantal extra komplikaties. Wij blijven daarom werken met het lineaire verloop van \hat{u} volgens (4.6.1) en aksepteren daarbij het nadeel dat in een aantal situaties een fijne verdeling in kokerelementen nodig zal zijn om de gewenste nauwkeurigheid van de resultaten te kunnen bereiken. In hoofdstuk 6 zal nog een andere veronderstelling over $\hat{u} = \hat{u}(x)$ ter sprake komen, waarin \hat{u} wel een derdegraadsfunctie van x is maar waarbij het koppelingsprobleem met de aangrenzende elementen niet optreedt.

Omdat \hat{u} , \hat{w} en $\hat{\phi}$ deelvectoren zijn van de vektor \hat{v} kunnen wij in plaats van (4.6.1),.....,(4.6.3) ook schrijven :

$$\hat{v}(x) = \hat{D}(x) \cdot v_e \quad (4.6.5)$$

waarin v_e de verplaatsingsvektor van het beschouwde kokerelement is :

$$\underline{v}_e = [\underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \underline{w}_1 \quad \underline{\psi}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{\psi}_2 \quad \underline{\phi}_1 \quad \underline{\phi}_2 \quad \underline{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2] \quad (4.6.6)$$

$\hat{D}(x)$ is een matrix van orde $(4m+14m)$, waarvan de componenten eenvoudig bepaald kunnen worden door vergelijking van (4.6.5) en (4.6.6) met (4.6.1),..., (4.6.3).

4.6.3 De stijfheidsmatrix Q_e van een kokerelement

Substitutie van het gekozen verloop voor $\hat{v}(x)$ in (4.4.24) levert de elastische energie U_e , uitgedrukt in de verplaatsingsvectoren \underline{u} , \underline{w} , $\underline{\psi}$, $\underline{\phi}$ en $\underline{\rho}$ van de eindvlakken $x=0$ en $x=l$ van het beschouwde kokerelement. Wij vinden :

$$U_e = \frac{1}{2} \underline{v}_e^T \cdot Q_e \cdot \underline{v}_e \quad (4.6.7)$$

Hierin is Q_e de stijfheidsmatrix van het element. Nadere uitwerking levert dat deze matrix de volgende structuur heeft (zie appendix D) :

$$Q_e = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ \underline{v} B & D & E \\ 0 & \underline{v} E & G \end{bmatrix}$$

Elk van de deelmatrices A, respectievelijk B, D, E, G wordt geheel bepaald door A_{ab} , respectievelijk B_{ab} , D_{ab} , E_{ab} , G_{ab} ($a, b = v, \theta, x$).

4.6.4 De relevante krachtvectoren van een kokerelement

Uit (4.4.25) volgt dat de potentiële energie ten gevolge van de belasting op een kokerelement bij het aangenomen verloop van \hat{v} gelijk is aan :

$$P_e = - \underline{v}_e^T (f_e + f_c) \quad (4.6.8)$$

Hierin representeert f_e de belasting in de eindvlakken van het element,

$$\hat{f}_e = \begin{bmatrix} -N_1 & N_2 & -K_1 & -M_1 & K_2 & M_2 & -T_1 & -B_1 & T_2 & B_2 \end{bmatrix}, \quad (4.6.9)$$

terwijl f_c de krachtvektor is die kinematisch consistent is met de verdeelde belasting op het cilindrisch oppervlak van het element :

$$f_c = \int_{x=0}^l \hat{D}(x) \cdot \hat{f}_c(x) \cdot dx \quad (4.6.10)$$

4.6.5 Berekening van de interessante kracht- en verplaatsingsgrootheden

Uit de relaties voor U_e en P_e kan de potentiële energie V in een in elementen verdeelde koker worden bepaald, waarna met de werkwijzen uit 3.6.1 \hat{u} , \hat{w} , $\hat{\psi}$, $\hat{\phi}$ en $\hat{\rho}$ voor elk der knooppvlakken en f_e voor elk der kokerelementen berekend kunnen worden.

De vektoren \hat{u} , \hat{w} , $\hat{\psi}$, $\hat{\phi}$, en $\hat{\rho}$ in een willekeurige snede in een kokerelement kunnen met (4.6.5) bepaald worden als v_e bekend is. Indien deze werkwijze niet tot voldoende nauwkeurige resultaten leidt kan een der methoden uit 3.8 gehanteerd worden. Die kunnen ook gebruikt worden om de krachtvectoren \hat{N} , \hat{K} , \hat{M} , \hat{T} en \hat{B} in een willekeurige snede x te bepalen.

4.6.6 Berekening van de spanningen in een plaat

Om de spanningen in plaat i ($i = 1, 2, \dots, p$) te berekenen kunnen wij uitgaan van de konstitutieve vergelijkingen (4.4.5). Er geldt (zie ook fig. 4.6):

$$\sigma_{xn}(x) = \bar{\sigma}_x(x, 0, 0) = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_s) + \frac{E}{2} (u'_{xn} - u'_{xq}) \quad (4.6.11)$$

$$\sigma_{xq}(x) = \bar{\sigma}_x(x, b, 0) = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_s) - \frac{E}{2} (u'_{xn} - u'_{xq}) \quad (4.6.12)$$

$$\sigma_s(x) = \bar{\sigma}_s(x, s, 0) = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_s + \nu \cdot \epsilon_x) \quad (4.6.13)$$

$$\tau_n(x) = \bar{\tau}_{xs}(x, 0, 0) = G \cdot (u'_{sn} - \frac{1}{b} (u_{xn} - u_{xq})) \quad (4.6.14)$$

$$\tau_q(x) = \bar{\tau}_{xs}(x, b, 0) = G \cdot (u'_{sq} - \frac{1}{b} (u_{xn} - u_{xq})) \quad (4.6.15)$$

$$\sigma_{bxn}(x) = \bar{\sigma}_x(x, 0, \frac{h}{2}) - \bar{\sigma}_x(x, 0, 0) = \frac{E \cdot h}{1-\nu} (\chi_{xn} + \nu \cdot \chi_{sn}) \quad (4.6.16)$$

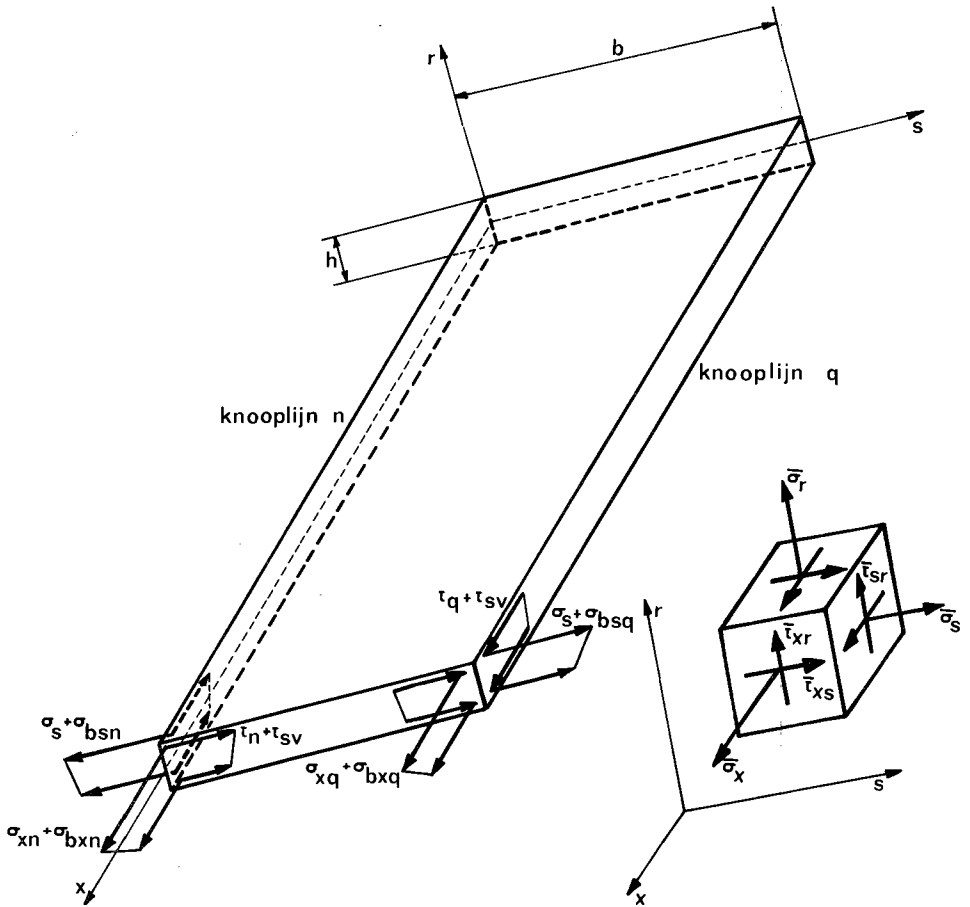


Fig. 4.6 De spanningsparameters in doorsnede x in een plaat

$$\sigma_{bxq}(x) = \bar{\sigma}_x(x, b, \frac{h}{2}) - \bar{\sigma}_x(x, b, 0) = \frac{E \cdot h}{1-\nu} \cdot (\chi_{xq} + \nu \cdot \chi_{sq}) \quad (4.6.17)$$

$$\sigma_{bsn}(x) = \bar{\sigma}_s(x, 0, \frac{h}{2}) - \bar{\sigma}_s(x, 0, 0) = \frac{E \cdot h}{1-\nu} \cdot (\chi_{sn} + \nu \cdot \chi_{xn}) \quad (4.6.18)$$

$$\sigma_{bsq}(x) = \bar{\sigma}_s(x, b, \frac{h}{2}) - \bar{\sigma}_s(x, 0, 0) = \frac{E \cdot h}{1-\nu} \cdot (\chi_{sq} + \nu \cdot \chi_{xq}) \quad (4.6.19)$$

$$\tau_{sv}(x) = \bar{\tau}_{xs}(x, s, \frac{h}{2}) - \bar{\tau}_{xs}(x, s, 0) = G \cdot \frac{h}{b} \cdot (u'_{rn} - u'_{rq}) \quad (4.6.20)$$

Hierin is differentiëren naar x aangegeven met ' : $f' = \frac{df}{dx}$. Voor de ter afkorting ingevoerde rekgrootheden geldt :

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \cdot (u'_{xn} + u'_{xq}) \quad ; \quad \epsilon_s = -\frac{1}{b} \cdot (u_{sn} - u_{sq}) \quad (4.6.21)$$

$$\chi_{xn} = -\frac{1}{60} \cdot \{ + 33 \cdot u''_{rn} - 3 \cdot u''_{rq} + b \cdot (4 \cdot \phi''_{xn} - \phi''_{xq}) \} \quad (4.6.22)$$

$$\chi_{xq} = -\frac{1}{60} \cdot \{ - 3 \cdot u''_{rn} + 33 \cdot u''_{rq} + b \cdot (\phi''_{xn} - 4 \cdot \phi''_{xq}) \} \quad (4.6.23)$$

$$\chi_{sn} = +\frac{1}{b^2} \cdot \{ + 3 \cdot (u_{rn} - u_{rq}) + b \cdot (2 \cdot \phi_{xn} + \phi_{xq}) \} \quad (4.6.24)$$

$$\chi_{sq} = +\frac{1}{b^2} \cdot \{ - 3 \cdot (u_{rn} - u_{rq}) + b \cdot (\phi_{xn} + 2 \cdot \phi_{xq}) \} \quad (4.6.25)$$

Voor de berekening van de spanningsparameters in een willekeurige doorsnede moeten de componenten van \hat{u} , $\frac{d\hat{u}}{dx}$, \hat{w} , $\frac{d\hat{w}}{dx}$, $\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}$, $\hat{\phi}$ en $\frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2}$ voor die doorsnede bekend zijn. De hiervoor geschetste benaderingsmethode levert wel \hat{u} , \hat{w} , $\frac{d\hat{w}}{dx}$, $\hat{\phi}$ en $\frac{d\hat{\phi}}{dx}$ voor een beperkt aantal doorsneden (te weten de knoovlakken) maar niet $\frac{d\hat{u}}{dx}$, $\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}$ en $\frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2}$. Voor de berekening daarvan en voor de berekening van \hat{u} , \hat{w} , $\frac{d\hat{w}}{dx}$, $\hat{\phi}$ en $\frac{d\hat{\phi}}{dx}$ in een willekeurige snede x in een kokerelement kan worden uitgegaan van de veronderstellingen (4.6.1).....(4.6.3) over het verloop van \hat{u} , \hat{w} en $\hat{\phi}$ in het element.

Voor de eindvlakken van een kokerelement kunnen $\frac{d\hat{u}}{dx}$, $\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}$ en $\frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2}$ echter ook bepaald worden langs een geheel andere weg, die in het algemeen tot nauwkeuriger resultaten zal leiden. Zodra v_e bekend is kan met $f_e = Q_e \cdot v_e - f_c$ ook de krachtvector f_e (en dus de vectoren \hat{N} , \hat{R} , \hat{M} , \hat{T} en \hat{B} van de eindvlakken van dat element) bepaald worden. Uit de definitie-vergelijkingen (4.5.4) en (4.5.5) voor \hat{N} , \hat{M} en \hat{B} volgt:

$$A_{\partial\theta} \cdot \frac{d\hat{u}}{dx} = \hat{N} - \nabla_{v\theta} \cdot \hat{w} \quad (4.6.26)$$

$$\begin{bmatrix} D_{XX} & E_{XX} \\ \nabla_{XX} & G_{XX} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d^2\hat{w}}{dx^2} \\ \frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{M} \\ \hat{B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla_{vX} & \nabla_{vX} \\ \nabla_{vX} & \nabla_{vX} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.6.27)$$

Voor de eindvlakken zijn de vectoren in het rechterlid van deze vergelijkingen bekend.

Uit (4.6.26) kan $\frac{d\hat{u}}{dx}$ worden opgelost omdat $A_{\theta\theta}$ positief definitief is. De matrix in het linkerlid van (4.6.27) is in het algemeen slechts semi-positief definitief, zodat $\frac{d^2\hat{w}}{dx^2}$ en $\frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2}$ niet zonder meer kunnen worden uitgedrukt in \hat{M} , \hat{B} , \hat{w} en $\hat{\phi}$. Door op stelsel (4.6.27) een aantal manipulaties uit te voeren is het echter steeds mogelijk om voor elke plaat i ($i = 1, 2, \dots, p$) waaruit het kokerelement is opgebouwd, de verplaatsingsgrootheden u_{rn}'' , u_{rq}'' , ϕ_{xn}'' en ϕ_{xq}'' uit te drukken in \hat{M} , \hat{B} , \hat{w} en $\hat{\phi}$.

Voor de berekening van de axiale normaalspanning $\sigma_x = \bar{\sigma}_x(x, s, 0)$ kan nog een geheel andere weg gevolgd worden door :

1. te eisen dat $\sigma_x(x, s)$ per plaat lineair is in s .
2. te eisen dat er geen sprong is in de axiale normaalspanning, ook niet bij de overgang van de ene plaat naar de andere. De normaalspanning $\sigma_x^i(x, s)$ in plaat i kan dan worden uitgedrukt in de axiale normaalspanningen $\sigma_{xn}(x)$ en $\sigma_{xq}(x)$ ter plaatse van de knooplijnen n en q die de plaat begrenzen (zie fig. 4.2)

$$\sigma_x^i(x, s) = \left(1 - \frac{s}{b}\right) \cdot \sigma_{xn} + \frac{s}{b} \cdot \sigma_{xq} \quad (4.6.28)$$

3. te eisen dat de arbeid, verricht door deze spanningen, identiek gelijk is aan $\frac{1}{2} \hat{u} \cdot \hat{N}$. Met het in 4.3 geponeerde lineaire verloop van de axiale verplaatsing $u_x(x, s)$ volgt :

$$\sum_{i=1}^p b_i \cdot h_i \cdot \left\{ \left(\sigma_{xn} + \frac{1}{2} \sigma_{xq} \right) \cdot u_{xn} + \left(\frac{1}{2} \sigma_{xn} + \sigma_{xq} \right) \cdot u_{xq} \right\} \equiv \hat{u} \cdot \hat{N} \quad (4.6.29)$$

Hieruit resulteert een stelsel vergelijkingen van de vorm :

$$S \cdot \hat{\sigma}(x) = \hat{N}(x) \quad (\hat{\sigma}[k] = \sigma_{xk} \text{ voor } k=1, 2, \dots, m) \quad (4.6.30)$$

waarbij S een symmetrische, positief definitieve matrix van orde $(m \cdot m)$ is. Uit (4.6.30) kunnen dus de axiale membraannormaalspanningen ter plaatse van de knooplijnen bepaald worden.

Voor sommige typen doorsneden kan een betere benadering voor de schuifspanning $\bar{\tau}_{xs}(x, s)$ in het middenvlak der platen worden bepaald door uit te gaan van de eis dat voor een elementair blokje $dx \cdot ds \cdot h$ het axiale

krachtenevenwicht gegarandeerd moet zijn. Janssen schetst in [6] hoe hiervan gebruik kan worden gemaakt bij kokers met een rechthoekige dwarsdoorsnede. Deze werkwijze kan echter niet eenvoudig gegeneraliseerd worden voor kokers met een dwarsdoorsnede waarin in een of meer der knooppunten méér dan twee platen aan elkaar gekoppeld zijn.

4.7 Benadering voor lange kokers

4.7.1 Inleiding

Uit analytische en experimentele resultaten voor kokers met een eenvoudige dwarsdoorsnede blijkt dat de invloed van de anti-clastische buiging op de totale deformatie van de koker te verwaarlozen is als de lengte ℓ groter is dan een karakteristieke maat van de dwarsdoorsnede. Uiteraard zal deze buiging wel van belang zijn in de onmiddellijke omgeving van een plaats waar een diskontinuiteit in belasting of ondersteuning optreedt (zie bijvoorbeeld Janssen [6]).

Ook in de onderhavige theorie kan plausibel gemaakt worden dat deze buiging buiten beschouwing gelaten kan worden als ℓ maar "voldoende groot" is. Wij zullen niet nagaan wanneer ℓ "voldoende groot" is, maar nemen aan dat deze buiging geen bijdrage levert tot de potentiële energie in de koker. Hiervan uitgaande zal worden aangetoond dat de deelvektor $\hat{\mathbb{T}}(x)$ van $\hat{\mathbb{V}}(x)$ kan worden uitgedrukt in de deelvektor $\hat{\mathbb{W}}(x)$ en de deelvektor $\hat{\mathbb{t}}_c(x)$ van $\hat{\mathbb{f}}_c(x)$.

De berekeningen zullen weer uitmonden in een stelsel differentiaalvergelijkingen, dat weliswaar veel eenvoudiger is dan het stelsel uit 4.5, maar waarvan de bepaling van de exakte oplossing weer - zij het in mindere mate - op de reeds eerder in 4.5 gesignaleerde moeilijkheden stuit. Wij zullen daarom aandacht besteden aan een methode om benaderingsoplossingen te bepalen.

4.7.2 De differentiaalvergelijkingen voor lange kokers

Zoals in 4.7.1 reeds is opgemerkt nemen wij aan dat de bijdrage van de anti-clastische buiging tot de totale potentiële energie te verwaarlozen is. In de voorgaande afleiding kan dit in rekening worden gebracht door in (4.4.2) en (4.4.11) de term $\bar{\sigma}_x \cdot \bar{u}_x = \bar{\sigma}_x (u_x - r \frac{\partial u_r}{\partial x})$ te vervangen door $\bar{\sigma}_x \cdot u_x$. Dit heeft tot gevolg dat de matrices W_x en S_{ax} ($a = v, \theta, \chi$) vervangen moeten worden door nulmatrices en dat de vektoren m_{p1} en m_{p2} overgaan in nulvektoren.

Op eenvoudige wijze kan worden aangetoond dat de relaties (4.4.24) voor de elastische energie en (4.4.25) voor de potentiële energie van de belasting blijven gelden mits gesteld wordt : $Q_{a\chi} = \nabla_{\chi a} = 0$ ($a = v, \theta, \chi$) en $m_1 = m_2 = 0$. Voor de totale potentiële energie in een koker met lengte ℓ zal dus gelden :

$$V = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} \begin{bmatrix} \nabla \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{vv} & Q_{v\theta} \\ Q_{\theta v} & Q_{\theta\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} \cdot dx - \int_{x=0}^{\ell} \nabla \cdot \hat{f}_c \cdot dx - \nabla_2 \cdot f_2 + \nabla_1 \cdot f_1 \quad (4.7.1)$$

Op dezelfde wijze als in 4.5 kan hieruit een stelsel differentiaalvergelijkingen met randcondities worden afgeleid. Met de reeds in 4.4.4 en 4.5 geïntroduceerde deelmatrices en deelvectoren volgt :

$$- A_{\theta\theta} \cdot \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + (B_{v\theta} - \nabla_{v\theta}) \cdot \frac{d\hat{w}}{dx} + A_{vv} \cdot \hat{u} = \hat{n}_c(x) \quad (4.7.2)$$

$$- D_{\theta\theta} \cdot \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} + (C_{v\theta} - \nabla_{v\theta}) \cdot \frac{d\hat{u}}{dx} + D_{vv} \cdot \hat{w} + E_{vv} \cdot \hat{\phi} = \hat{k}_c(x) \quad (4.7.3)$$

$$+ E_{vv} \cdot \hat{w} + G_{vv} \cdot \hat{\phi} = \hat{t}_c(x) \quad (4.7.4)$$

Voeren wij in analogie met (4.5.4) weer de krachtvectoren \hat{N} en \hat{K} in, nu gedefinieerd door:

$$\hat{N} = A_{\theta\theta} \cdot \frac{d\hat{u}}{dx} + \nabla_{v\theta} \cdot \hat{w} \quad (4.7.5)$$

$$\hat{K} = D_{\theta\theta} \cdot \frac{d\hat{w}}{dx} + \nabla_{v\theta} \cdot \hat{u}, \quad (4.7.6)$$

dan is te bewijzen dat aan de randen $x=0$ en $x=\ell$ de volgende condities moeten gelden:

$$\hat{N} = N_i ; \quad \hat{u} = u_i \quad (4.7.7)$$

$$\hat{K} = K_i ; \quad \hat{w} = w_i \quad (4.7.8)$$

waarbij $i=1$ betrekking heeft op rand $x=0$ en $i=2$ op rand $x=\ell$. Wij wijzen er op dat deze "randcondities" geïnterpreteerd moeten worden op dezelfde wijze als in 4.5.

Een van de meest opvallende verschillen tussen de bovenstaande vergelijkingen en die in 4.5 is dat in plaats van het stelsel vierde orde diffe-

rentiaalvergelijkingen (4.5.3) hier het stelsel lineaire vergelijkingen (4.7.4) optreedt. Omdat G_{VV} positief definit is kan $\tilde{\phi}$ uit (4.7.4) worden opgelost :

$$\tilde{\phi} = - G_{VV}^{-1} \cdot \nabla_{VV} \cdot \tilde{w} + G_{VV}^{-1} \cdot \hat{t}_c \quad (4.7.9)$$

In [9] maakt Vlasov gebruik van een soortgelijk verband tussen $\tilde{\phi}$ en \tilde{w} . Hij laat daarbij echter de vektor $\hat{t}_c(x)$ buiten beschouwing.

Substitutie van $\tilde{\phi}$ volgens (4.7.9) in (4.7.3) levert een stelsel tweede orde differentiaalvergelijkingen voor \tilde{w} . Er volgt :

$$\begin{aligned} - D_{\theta\theta} \cdot \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + (C_{V\theta} - B_{V\theta}) \cdot \frac{d\tilde{w}}{dx} + (D_{VV} - E_{VV} \cdot G_{VV}^{-1} \cdot \nabla_{VV}) \cdot \tilde{w} = \\ = \hat{k}_c(x) - E_{VV} \cdot G_{VV}^{-1} \cdot \hat{t}_c(x) \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

4.7.3 Toepassing van de elementenmethode bij lange kokers

Het is in principe mogelijk \tilde{u} en \tilde{w} te bepalen uit (4.7.2) en (4.7.10). Voor realistische waarden van m (m groter dan 4 à 5) is dit echter een zeer arbeidsintensief proces. Daarom zullen wij gebruik maken van eenzelfde benaderingsmethode als in 4.6, waarbij in dit geval het verband tussen enerzijds $\tilde{\phi}$ en anderzijds \tilde{w} en \hat{t}_c in rekening moet worden gebracht. Wij voeren daarom vektoren \tilde{v}_ℓ en $\hat{\theta}_\ell$ in waarvan \tilde{u} en \tilde{w} en $\tilde{\varepsilon} = \frac{d\tilde{u}}{dx}$, $\tilde{\psi} = \frac{d\tilde{w}}{dx}$ deelvectoren zijn:

$$\tilde{v}_\ell = \begin{bmatrix} \nabla \\ \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} ; \quad \hat{\theta}_\ell = \begin{bmatrix} \nabla \\ \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.7.11)$$

Met (4.7.9) kan dan voor \tilde{v} geschreven worden :

$$\tilde{v} = T_\ell \cdot v_\ell + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{VV}^{-1} \cdot \hat{t}_c \end{bmatrix} \quad (4.7.12)$$

waarbij de afhankelijkheidsmatrix T_ℓ wordt gegeven door :

$$T_\ell = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & -G_{VV}^{-1} \cdot \nabla_{VV} \end{bmatrix} \quad (4.7.13)$$

— Door substitutie van (4.7.12) in uitdrukking (4.7.1) voor de potentiële energie ontstaat :

$$V = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{v}_\ell \\ \hat{\theta}_\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{VV}^\ell & Q_{V\theta}^\ell \\ Q_{\theta V}^\ell & Q_{\theta\theta}^\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_\ell \\ \hat{\theta}_\ell \end{bmatrix} - \hat{v}_\ell \cdot \hat{f}_{c\ell} \right\} dx - \hat{v}_{2\ell} \cdot f_{2\ell} + \hat{v}_{1\ell} \cdot f_{1\ell} \quad (4.7.14)$$

met $v_{1\ell} = \hat{v}_\ell(x=0)$ en $v_{2\ell} = \hat{v}_\ell(x=\ell)$. De vektoren $\hat{f}_{c\ell}$, $f_{2\ell}$ en $f_{1\ell}$ ontstaan uit respectievelijk f_c , f_2 en f_1 door vermenigvuldiging met T_ℓ , terwijl de matrices Q_{ab}^ℓ ($a, b = v, \theta$) volgen uit $Q_{ab}^\ell = T_\ell \cdot Q_{ab} \cdot T_\ell$.

Om tot eenzelfde benaderingsmethode te komen als in 4.6 verdelen wij de koker weer in kokerelementen en worden hypothesen geponeerd over het verloop van \hat{u} en \hat{w} in axiale richting in zo'n element. Wij kiezen weer het lineaire, respectievelijk derdegraads verloop zoals gegeven door (4.6.1) en (4.6.2), zodat wij voor \hat{v}_ℓ kunnen schrijven :

$$\hat{v}_\ell(x) = \hat{D}_\ell(x) \cdot v_e \quad (4.7.15)$$

De vektor v_e in deze relatie wijkt af van de gelijknamige vektor in 4.6. Hier geldt :

$$v_e = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{w}_1 & \hat{\psi}_1 & \hat{w}_2 & \hat{\psi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.7.16)$$

De berekening van de stijfheidsmatrix en de relevante krachtvectoren van een kokerelement verloopt op dezelfde wijze als in 4.6. Dit geldt ook voor de kracht- en verplaatsingsvectoren van de knoopvlakken en voor de spanningen in de platen. In de relaties voor de buigspanningen (4.6.16)...., (4.6.19) moeten χ_{xn} en χ_{xq} in het onderhavige geval gelijk aan nul gesteld worden. Meer details over deze werkwijze komen ter sprake in de appendices D en E.

4.8 Benadering bij verwaarlozing van de rek in omtrekriching

4.8.1 Inleiding

Bij het opstellen van de hypothesen over het verloop van de spanningen en de verplaatsingen in een plaat (zie 4.3) is uitgegaan van de veronderstelling dat in de elastische energie de bijdrage van de rek ϵ_s van het midden-

vlak $r=0$ niet te verwaarlozen is ten opzichte van de bijdrage van axiale ver-
 lenging en buiging. Voor vele voorkomende belastinggevallen zal de bijdrage
 van ϵ_s echter relatief klein zijn, zeker als de lengte van de koker "voldoen-
 de groot" is. Verwaarlozen van die bijdrage kan in de opzet van de analyse
 via het energieprincipe van Reissner in rekening worden gebracht door zowel
 de rek $\epsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}$ als de normaalspanning $\sigma_s(x,s) = \bar{\sigma}_s(x,s,r=0)$ voor alle x
 en s gelijk aan nul te stellen. Per plaat hangt de verplaatsing $u_s(x,s) =$
 $\bar{u}_s(x,s,r=0)$ van het middenvlak in omtrekriching dan alleen af van de axiale
 koördinaat.

De genoemde wijzigingen in de hypothesen over het spannings- en ver-
 plaatsingsveld blijken verstrekkende gevolgen te hebben voor de analyse. Wij
 zullen de konsekventies ervan in dit deelhoofdstuk nagaan.

4.8.2 Benadering met behulp van de elementenmethode

De hypothese $\epsilon_s = 0$ voor elke plaat impliceert dat voor de verplaatsing
 in omtreksrichting van punten van het middenvlak $r=0$ moet gelden (zie ook
 fig. 4.3) :

$$u_s(x,s) = u_{sn}(x) = u_{sq}(x) \quad (4.8.1)$$

Bij de berekeningen in de voorgaande deelhoofdstukken werd gebruik ge-
 maakt van de veronderstelling $u_s(x,s) = (1 - \frac{s}{b}) \cdot u_{sn}(x) + \frac{s}{b} \cdot u_{sq}(x)$. Om hier
 een zo goed mogelijke aansluiting met die berekeningen te verkrijgen schrij-
 ven wij in plaats van (4.8.1) :

$$u_s(x,s) = \frac{1}{2} \cdot u_{sn}(x) + \frac{1}{2} \cdot u_{sq}(x) \quad (4.8.2)$$

Bij toepassing van het principe van de minimale potentiële energie moet dan
 wel rekening worden gehouden met (4.8.1).

Voor de berekening van de elastische energie per plaat maken wij weer
 gebruik van het energieprincipe volgens Reissner. Met (4.8.2) en de extra
 veronderstelling $\sigma_s(x,s) = 0$ volgt voor U_p een uitdrukking van de vorm
 (4.4.6). De daarin optredende matrices $S_{vv}, S_{v\theta}, \dots, S_{xx}$ moeten echter ge-
 wijzigd worden in de in appendix D aangegeven zin. Voor de potentiële ener-
 gie van de belasting blijven de relaties uit 4.4.3 en uit appendix E gelden,
 ondanks het feit dat de veronderstelling voor u_s volgens (4.8.2) afwijkt van
 de veronderstelling die in 4.4.3 is gehanteerd.

Op de gebruikelijk, reeds meerdere malen aangegeven wijze kan de totale potentiële energie worden uitgedrukt in de uitwendige belasting en de componenten van de verplaatsingsvektor $\vec{v} = [\vec{u} \quad \vec{w} \quad \vec{\phi}]$. De componenten van \vec{v} - en met name die van de deelvektor \vec{w} van \vec{v} - mogen niet allemaal worden opgevat als onafhankelijk te variëren grootheden. Immers voor elke plaat moet een relatie van het type (4.8.1) gelden, zodat er verbanden zullen bestaan tussen de componenten van \vec{w} . Beschouwen wij plaat i , begrensd door de knooplijnen n en q (zie fig. 4.2) dan moet op grond van (4.8.1) gelden :

$$(\vec{w}[n] - \vec{w}[q]) \cdot \cos \alpha_i + (\vec{w}[n+m] - \vec{w}[q+m]) \cdot \sin \alpha_i = 0 \quad (4.8.3)$$

waarbij gebruik is gemaakt van $u_{yk} = \vec{w}[k]$, $u_{zk} = \vec{w}[k+m]$ voor $k = 1, 2, \dots, m$.

Voor iedere plaat uit de koker geldt een dergelijke relatie, zodat $\vec{w}(x)$ zal moeten voldoen aan :

$$\tilde{H} \cdot \vec{w}(x) = 0 \quad (4.8.4)$$

Hierin is \tilde{H} een matrix van orde $(p * 2m)$ waarvan in rij i alleen de componenten $\tilde{H}[i, n] = -\tilde{H}[i, q] = \cos \alpha_i$ en $\tilde{H}[i, n+m] = -\tilde{H}[i, q+m] = \sin \alpha_i$ ongelijk aan nul kunnen zijn.

De rang r van \tilde{H} hangt af van de geometrie van de dwarsdoorsnede maar zal uiteraard voldoen aan $r \leq \min(p, 2m)$ en dus aan $r \leq p$ omdat p ten hoogste gelijk is aan $2m$. Uit overwegingen met fysische achtergrond volgt dat r gelijk is aan $2m - n_s$, waarbij n_s gelijk is aan het aantal bewegingsmogelijkheden in het vlak van de dwarsdoorsnede als die doorsnede wordt opgevat als een stangenmechanisme. Dit mechanisme ontstaat door de verbindingslijnen tussen de knooppunten (fig. 4.1) te beschouwen als starre stangen die in de knooppunten scharnierend verbonden zijn. Voor het aantal bewegingsmogelijkheden van dit stangenmechanisme blijkt te gelden : $2m - p \leq n_s \leq m + 1$, zodat uit $r = 2m - n_s$ volgt $m - 1 \leq r \leq p$.

Als de rang van \tilde{H} gelijk is aan r dan kunnen met (4.8.4) r componenten van $\vec{w}(x)$ worden uitgedrukt in de overige $n_s = 2m - r$ componenten. Algemeener : de $2m$ componenten van \vec{w} kunnen worden uitgedrukt in n_s onafhankelijke verplaatsingsfuncties. Voor die functies kunnen n_s onafhankelijke componenten van \vec{w} gekozen worden, maar nodig is dat niet. Het ligt voor de hand bij de keuze ervan de eerder genoemde bewegingsmogelijkheden van het stangenmechanisme als uitgangspunt te nemen. Rangschikken wij deze onafhankelijke functies in een vektor \vec{w}_v dan zal dus gelden :

$$\vec{w}(x) = H_v \cdot \vec{w}_v(x) \quad (4.8.5)$$

Het is in principe mogelijk een procedure te ontwikkelen om, uitgaande van de matrix \tilde{H} , de componenten van H_V te bepalen met een digitale rekenauto-maat. Aan een dergelijke werkwijze kleven nogal wat bezwaren van numerieke en praktische aard, die niet eenvoudig ondervangen kunnen worden. Voor vrijwel alle van praktisch belang zijnde kokers zal een dergelijke werkwijze ook niet noodzakelijk zijn omdat de geometrie van de (geschematiseerde) dwars-doorsnede zo eenvoudig is dat direkt een set van n_s onafhankelijke verplaat-singsfuncties kan worden aangegeven. Zodra bekend is welke functies gekozen zijn kunnen de componenten van H_V betrekkelijk eenvoudig bepaald worden door weer gebruik te maken van de reeds eerder gememoreerde schematisering van de doorsnede tot een stangenmechanisme. Wij zullen hierna steeds aanne-men dat H_V bekend is.

Voor de verdere berekeningen biedt het voordelen om de onafhankelijke componenten van $\hat{v}(x)$ te verzamelen in een aparte vektor \hat{v}_V . Met :

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}; \quad \hat{v}_V = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w}_V \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & H_V & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.8.6)$$

(I is de eenheidsmatrix van orde $(n * n)$) kunnen wij dan schrijven :

$$\hat{v}(x) = H \cdot \hat{v}_V(x) \quad (4.8.7)$$

De berekeningen in de voorgaande deelhoofdstukken zijn ook geldig voor het onderhavige geval als in die berekeningen enige - formeel eenvoudige - modifikaties worden aangebracht. Wij zullen ons beperken tot de wijzigingen in de relaties voor de potentiële energie.

Allereerst moet bij de berekening van Q_{VV} , $Q_{V\theta}$, ..., Q_{XX} , in rekening worden gebracht dat S_{VV} , $S_{V\theta}$, ..., S_{XX} in het onderhavige geval ($\epsilon_s=0$) moeten worden aangepast in de in appendix D aangegeven zin.

De relaties (4.4.23), (4.4.24) en (4.4.25) blijven gelden als :

1. $\hat{v}(x)$ vervangen wordt door $\hat{v}_V(x)$ en $\hat{\theta}(x)$ door $\hat{\theta}_V = \frac{d\hat{v}_V}{dx}$.
2. Q_{ab} ($a, b = v, \theta, x$) wordt vervangen door $\nabla H \cdot Q_{ab} \cdot H$
3. \hat{f}_c , f_i en m_i ($i = 1, 2$) worden vervangen door $\nabla H \cdot \hat{f}_c$, $\nabla H \cdot f_i$ en $\nabla H \cdot m_i$

Ook in de uitdrukking (4.7.14) voor de potentiële energie bij verandering van de anti-clastische buiging moeten wijzigingen worden aangebracht. Om deze eenvoudig aan te kunnen geven introduceren wij - in overeenstemming met de werkwijze in 4.7 - een vektor $\hat{v}_{v\ell}$ waarvan \hat{u} en \hat{w}_v deelvectoren zijn. Met :

$$\hat{v}_\ell = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w}_v \end{bmatrix} ; \quad \hat{v}_{v\ell} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w}_v \end{bmatrix} ; \quad H_{v\ell} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_v \end{bmatrix} \quad (4.8.8)$$

volgt dan :

$$\hat{v}_\ell = H_{v\ell} \cdot \hat{v}_{v\ell}(x) \quad (4.8.9)$$

Uitdrukking (4.7.14) geldt dan ook voor het geval $\epsilon_5=0$ als :

1. \hat{v}_ℓ wordt vervangen door $\hat{v}_{v\ell}$ en $\hat{\theta}_\ell$ door $\frac{d}{dx}(\hat{v}_{v\ell}) = \hat{\theta}_{v\ell}$
2. n_{ab}^ℓ wordt vervangen door $\mathbb{H}_{v\ell} \cdot Q_{ab}^\ell \cdot H_{v\ell}$ ($a, b = v, \theta$)
3. $\hat{f}_{c\ell}$ en $f_{i\ell}$ ($i = 1, 2$) worden vervangen door $\mathbb{H}_{v\ell} \cdot \hat{f}_{c\ell}$ en $\mathbb{H}_{v\ell} \cdot f_{i\ell}$.

De verdere analyses in de voorgaande deelhoofdstukken zijn telkens gebaseerd op de uitdrukking voor de potentiële energie. De wijzigingen die voor het geval $\epsilon_5=0$ in die analyses moeten worden aangebracht zijn direkt af te leiden uit het voorgaande.

Literatuur bij hoofdstuk 4

- [1] Timoshenko, S., Goodier, J.N. : Theory of elasticity. McGraw-Hill, New York, 1951.
- [2] Heilig, R. : Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau, 30 (1961), nr. 11, p. 333 e.v.
- [3] Kollbrunner, C.F., Hajdin, N. : Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil. Mitt. TKSSV, Verlag Schweizer Stahlbau - Vereinigung, Zürich, nr. 32 (juni 1966).

- |4| Janssen, J.D., Veldpaus, F.E. : Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt. Abhandlungen, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich, 32-11(1972), p.85 e.v.
- |5| Dabrowski, R. : Der Schubverformungseinfluss auf die Wölbkrafttorsion der Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil. Der Bauingenieur 40 (1965), nr. 11, p. 444 e.v.
- |6| Janssen, J.D. : Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige rechthoekige kokers. Dissertatie, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1967.
- |7| Resinger, F. : Der dünnwandige Kastenträger. Forschungsheft aus dem Gebiet des Stahlbaues, Stahlbauverlag, Köln, nr. 13, 1959.
- |8| Lacher, G. : Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiften Tragwerke mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast. Der Stahlbau, 31 (1962), nr. 10, p. 299 e.v., nr. 11, p. 325 e.v.
- |9| Vlasov, V.Z. : Thin-walled elastic beams. Israel Programm for Scientific Translations, Jerusalem (1961).
- |10| Janssen, J.D., Veldpaus, F.E. : De invloed van schotten op het gedrag van rechthoekige kokers. Rapport WE-70/15, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1970.
- |11| Kollbrunner, C.F., Hajdin, N. : Dünnwandige Stäbe mit in ihren Ebenen deformierbaren Querschnitten. Theorie der Falwerke nach der Verschiebungsmethode. Institut für bauwissenschaftliche Forschung, Verlag Leeman, Zürich, nr. 1, 1968.
- |12| Kayser, Th. : Lastspreiding in enkele moderne brugtypen. TNO-rapport no. BI-70-20, TNO-IBBC, Delft, 1970.

Kwantificering en vergelijking van de theorieën voor balken met willekeurige doorsnede

5.1 Inleiding.

Voor de numerieke uitwerking van de in hoofdstuk 4 beschreven benaderingstheorieën zijn een drietal rekenprogramma's ontwikkeld :

- in programma I (gebaseerd op de analyse in 4.6) wordt zowel de invloed van anti-clastische buiging als van de rek in omtreksrichting, ϵ_s , in rekening gebracht.
- in programma II (gebaseerd op de analyse in 4.7) wordt wel de invloed van ϵ_s , maar niet die van de anti-clastische buiging in rekening gebracht
- in programma III (gebaseerd op de analyse in 4.8) wordt noch de invloed van ϵ_s noch die van de anti-clastische buiging in rekening gebracht.

Het blokschema en de in- en uitvoer van de programma's zullen in 5.2 ter sprake komen.

De programma's kunnen gebruikt worden voor statische berekeningen aan constructies die bestaan uit een rechte, dunwandige balk. Deze balk wordt in axiale richting verdeeld in N elementen, kokerelementen genaamd. In de huidige opzet van de programma's zijn nog geen procedures ingebouwd om een verdeelde belasting op het cilindrisch oppervlak van de elementen in rekening te brengen. In 5.3 worden de mogelijkheden van de programma's toegelicht.

Om een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid der benaderingstheorieën uit 4.6, 4.7 en 4.8 worden in 5.4 de resultaten van de programma's voor enige konkrete problemen vergeleken met experimentele resultaten. In 5.5 worden de konklusies uit 5.4 gegeneraliseerd .

5.2 Karakterisering van de rekenprogramma's

In dit deelhoofdstuk zullen wij een summiere beschrijving geven van de structuur van de rekenprogramma's I, II en III. Een zeer beknopte schets —

van de werkwijze, die aan deze programma's ten grondslag ligt, is reeds gegeven in 3.5.6 en 3.6.1

Wij beschouwen een balk die verdeeld is in N kokerelementen. Laat het aantal vrijheidsgraden ¹⁾ per knooppvlak gelijk zijn aan n_v en laat \tilde{v}_t de vektor zijn waarin alle vrijheidsgraden van de balk zijn opgeborgen in een zodanige volgorde dat $\tilde{v}_t [(k-1).n_v+i]$ de i^{de} vrijheidsgraad van knooppvlak k ($k=1,2,\dots,N+1$) is. Deze volgorde heeft tot voordeel dat van elke vrijheidsgraad van ieder knooppvlak direkt de positie in \tilde{v}_t kan worden aangegeven. Dit betekent dat uit \tilde{v}_t de verplaatsingsvektor v_e van kokerelement e ($e=1,2,\dots,N$) eenvoudig kan worden afgeleid omdat in v_e de vrijheidsgraden van de knooppvlakken $k=e$ en $k=e+1$ zijn gerangschikt. Het nadeel van de gekozen volgorde is dat de vrijheidsgraden in \tilde{v}_t niet naar soort zijn gerangschikt. Evenals in 3.5.6 onderscheiden wij drie soorten vrijheidsgraden en introduceren wij een vektor v_t die dezelfde componenten heeft als \tilde{v}_t en waarin de vrijheidsgraden wel naar soort zijn gerangschikt :

$$v_t = \begin{bmatrix} v \\ v_o \\ v_R \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

De vektoren v en v_o bevatten de onbekende vrijheidsgraden respektievelijk de voorgeschreven vrijheidsgraden ongelijk aan nul. In v_R zijn de onderdrukte vrijheidsgraden opgeborgen, zodat zal gelden $v_R=0$. Het verband tussen enerzijds de componenten van \tilde{v}_t en anderzijds die van v_t wordt vastgelegd door de lokatiematrix \lnp die is gedefinieerd door :

$$\tilde{v}_t [(k-1).n_v+i] = v_t [\lnp[k, i]] \quad (5.2.2)$$

voor $k=1,2,\dots,N+1$ en $i=1,2,\dots,n_v$. Hiermee kan het verband tussen de componenten van de vektor v_e van kokerelement e en de componenten van v_t worden bepaald. Wij kunnen schrijven :

$$v_e[i] = v_t [\text{lok}[e, i]] \quad (5.2.3)$$

voor $e=1,2,\dots,N$ en $i=1,2,\dots,2.n_v$. Van de matrices \lnp en lok wordt in de rekenprogramma's veelvuldig gebruik gemaakt.

1) Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld wordt met "vrijheidsgraden" steeds bedoeld "onafhankelijke vrijheidsgraden".

Volgens hoofdstuk 4 is de elastische energie in kokerelement e gelijk aan $\frac{1}{2} \underline{v}_e \cdot Q_e \cdot v_e$. De stijfheidsmatrix Q_e van het kokerelement kan bepaald worden op de in hoofdstuk 4 aangegeven wijze. De totale elastische energie in de balk, U , wordt gegeven door :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \underline{v}_e \cdot Q_e \cdot v_e = \frac{1}{2} \underline{v}_t \cdot Q_t \cdot v_t \quad (5.2.4)$$

Door gebruik te maken van (5.2.3) kan de totale stijfheidsmatrix Q_t worden bepaald uit de matrices Q_e van de kokerelementen.

Q_t en de totale krachtvektor f_t worden, op dezelfde wijze als in 3.5.6, gepartitioneerd in deelmatrices, respectievelijk deelvectoren :

$$\underline{v}_t = \begin{bmatrix} v \\ v_o \\ v_R \end{bmatrix}; \quad Q_t = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ \underline{v} Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ \underline{v} Q_{13} & \underline{v} Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}; \quad f_t = \begin{bmatrix} f_o \\ f \\ f_R \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

De vektor f_o bevat de bekende, uitwendige krachten die werken op de onbekende vrijheidsgraden. De componenten ervan kunnen met (5.2.2) worden bepaald uit de specificatie van de voorgeschreven belasting in de knoopvlakken. Zoals in 5.1 reeds is vermeld kan met de huidige programma's nog geen verdeelde belasting op het cilindrisch oppervlak van de kokerelementen in rekening worden gebracht.

Als traagheidstermen buiten beschouwing worden gelaten dan kan de onbekende vektor v volgens 3.5.7 worden opgelost uit :

$$Q_{11} \cdot v = f_o - Q_{12} \cdot v_o \quad (5.2.6)$$

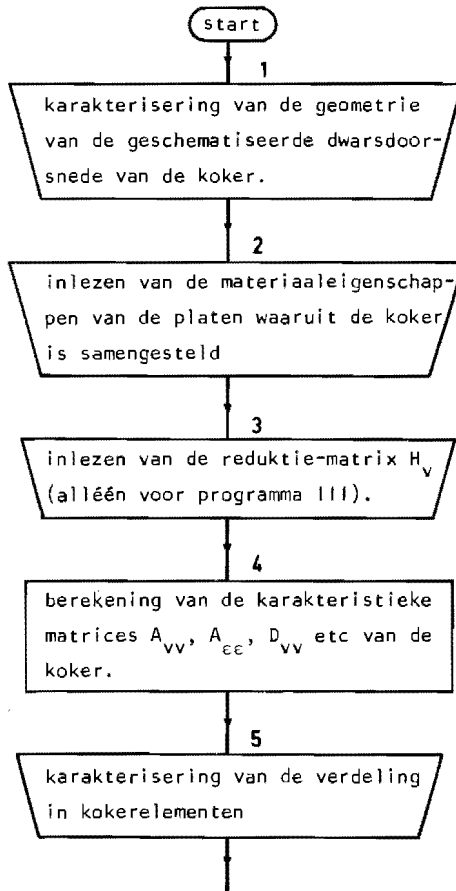
Het rechterlid in (5.2.6) mag bekend verondersteld worden.

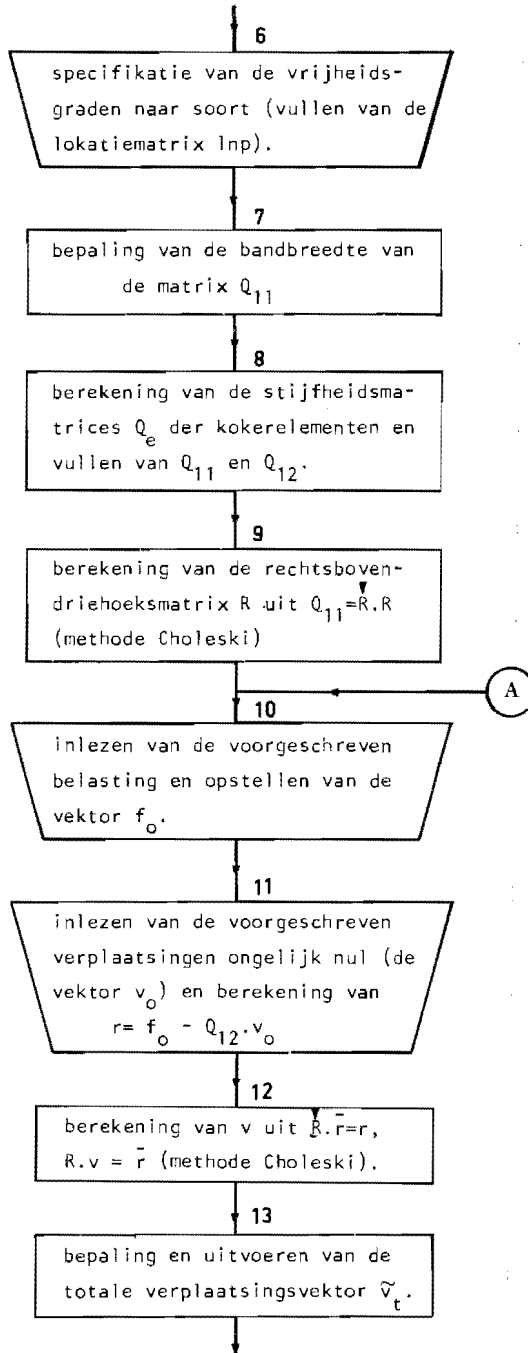
Q_{11} is positief definit als iedere beweging van de balk als star lichaam verhinderd is. Als de onbekende vrijheidsgraden op een geschikte wijze worden gerangschikt in de vektor v zal Q_{11} een duidelijke bandstructuur vertonen. Voor het oplossen van (5.2.6) wordt daarom gebruik gemaakt van de methode volgens Choleski voor bandmatrices.

Zodra v berekend is kunnen v_t en \tilde{v}_t worden bepaald. Bovendien kunnen voor iedere kokerelement de verplaatsingsvektor v_e en - met $f_e = Q_e \cdot v_e$ - de vektor f_e der krachtgrootheden in de eindvlakken van het element worden bepaald. Uit v_e - en eventueel f_e - kunnen de spanningen berekend worden in

de platen waaruit dat element is opgebouwd. In de huidige rekenprogramma's wordt bij de berekening der spanningen de meest voor de hand liggende werkwijze gevolgd door uit te gaan van de konstitutieve vergelijkingen die met het principe van Reissner zijn afgeleid. De daarbij benodigde afgeleiden van de verplaatsingen worden bepaald door differentiatie naar x van het aangenomen verplaatsingsveld.

De hiervoor beschreven werkwijze is in fig. 5.1 weergegeven in de vorm van een blokschema. Dit schema is zo globaal van opzet dat de verschillen tussen de drie rekenprogramma's niet tot uitdrukking komen. Die verschillen treden voornamelijk op in de blokken 3,4,6,8,14 en 15; voor nadere informatie wordt verwezen naar [2]





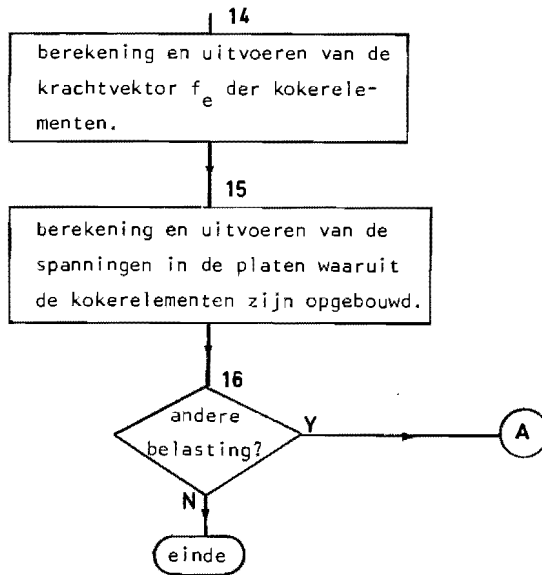


Fig. 5.1 Het (zeer) globale blokschema der rekenprogramma's

5.3 De mogelijkheden van de rekenprogramma's

De theorieën in hoofdstuk 4 en de rekenprogramma's I, II en III zijn bruikbaar voor cilindrische, dunwandige balken met willekeurige open, gesloten of open-gesloten dwarsdoorsnede. Enige van praktisch belang zijnde dwarsdoorsneden zijn geschetst in fig. 5.2.

Balken met open dwarsdoorsnede kunnen in veel gevallen ook geanalyseerd worden met de theorie uit hoofdstuk 3. Indien verwacht moet worden dat het gedrag van de balk in belangrijke mate wordt beïnvloed door vervorming van de dwarsdoorsnede is het gewenst bij de analyse gebruik te maken van een der theorieën uit hoofdstuk 4.

In vergelijking met de werkwijze volgens Kollbrunner-Hajdin [3] voor balken met open doorsnede, Vlasov [4] voor gesloten doorsnede en Steinle

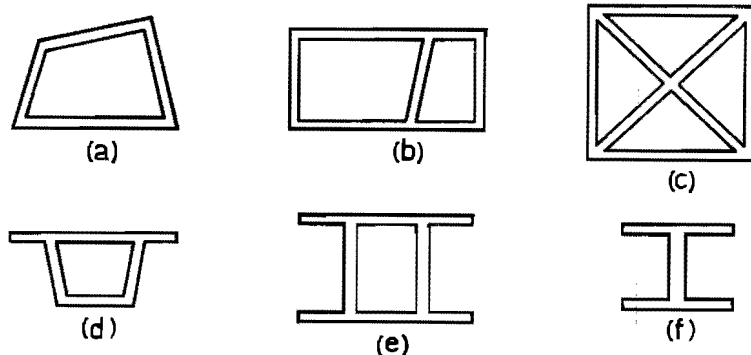


Fig. 5.2 Enige voorbeelden van mogelijke dwarsdoorsneden

[5] voor open-gesloten doorsnede heeft de werkwijze volgens hoofdstuk 4. het voordeel dat niet eerst allerlei geometrische karakteristieken van de doorsnede bepaald behoeven te worden. In de rekenprogramma's I, II en III worden die karakteristieken bepaald uit de door de gebruiker in te lezen gegevens over de geometrie van de doorsnede. Vooral voor balken met een grillig gevormde dwarsdoorsnede is dit een groot voordeel.

De ondersteuning van de balk mag willekeurig zijn als beweging van de balk als star lichaam maar verhinderd is. Het in rekening brengen van een ondersteuning of van een voorgeschreven vrijheidsgraad ongelijk aan nul zal in de programma's niet op problemen stuiten als ter plaatse van die ondersteuning of vrijheidsgraad een knooppvlak wordt gelokaliseerd.

In de huidige rekenprogramma's moet de uitwendige, voorgeschreven belasting op de balk worden ingevoerd als een in de knooppvlakken aangrijpende belasting. Een eventuele verdeelde belasting op het cilindrisch oppervlak van een kokerelement kan in rekening worden gebracht indien de gebruiker die belasting - liefst op kinematisch consistente wijze - omzet in gekoncentreerde krachten in de knooppvlakken die het element begrenzen. Deze gekoncentreerde krachten kunnen in de programma's wel verwerkt worden.

5.4 Enkele toepassingen van de rekenprogramma's

In zijn proefschrift geeft Janssen een aantal analytische en experimentele resultaten voor de spanningen in de dunwandige balk uit fig. 5.3 (zie [1] pag. 123-146). Deze balk, hierna ook wel koker genoemd, wordt in de doorsnede $x=0$ belast door een evenwichtssysteem van krachten waarvan de werklijn samen-

valt met een van de diagonalen van de vierkante dwarsdoorsnede. De relevante afmetingen zijn vermeld in fig. 5.3 en fig. 5.4. Wij zullen de drie hiervoor genoemde rekenprogramma's toepassen voor dit probleem en de berekende spanningen vergelijken met de experimentele waarden volgens [1].

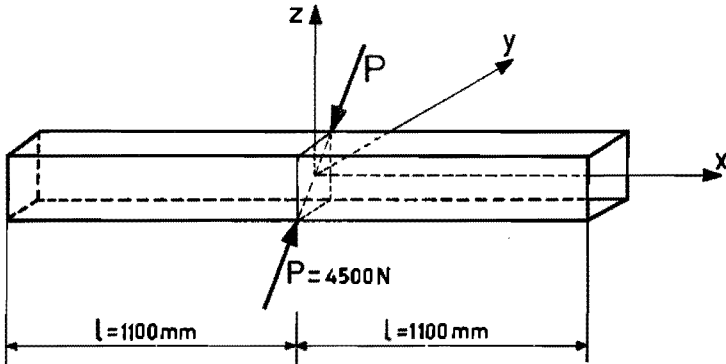


Fig. 5.3 Lange dunwandige balk, in het midden belast door een evenwichts-systeem van puntkrachten

De koker wordt in omtreksrichting verdeeld gedacht in vier platen die overeenkomen met de zijwanden van de koker. De nummering van de platen en de knooppunten is in fig. 5.4 aangegeven.

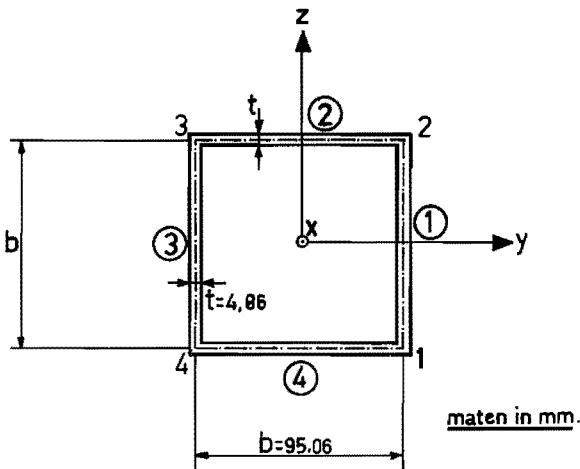
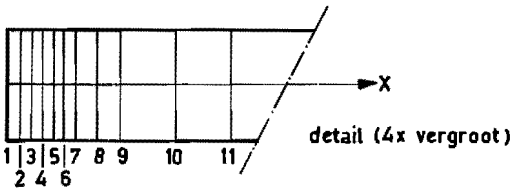
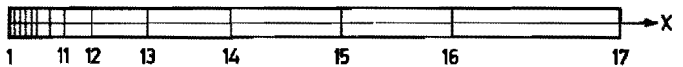


Fig. 5.4 De dwarsdoorsnede van de balk

Om het aantal elementen, waarin de koker verdeeld wordt, te beperken wordt gebruik gemaakt van de symmetrie van de konstruktie en de belasting ten opzichte van $x=0$. Wij kunnen ons dus beperken tot het gedeelte $0 \leq x \leq l$ van de koker. De gekozen verdeling in kokerelementen en de nummering en koördinaten van de knooppunten zijn gegeven in fig. 5.5. In de buurt van $x=0$ is de verdeling veel fijner dan bij het vrije uiteinde omdat de axiale gradiënten van de spanningen bij $x=0$ veel groter zullen zijn dan bij $x=l$.



$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0 \text{ mm}; & x_5 &= 20 \text{ mm}; & x_9 &= 50 \text{ mm}; & x_{13} &= 250 \text{ mm}; & x_{17} &= 1100 \text{ mm}; \\
 x_2 &= 5 \text{ mm}; & x_6 &= 25 \text{ mm}; & x_{10} &= 75 \text{ mm}; & x_{14} &= 400 \text{ mm}; \\
 x_3 &= 10 \text{ mm}; & x_7 &= 30 \text{ mm}; & x_{11} &= 100 \text{ mm}; & x_{15} &= 600 \text{ mm}; \\
 x_4 &= 15 \text{ mm}; & x_8 &= 40 \text{ mm}; & x_{12} &= 150 \text{ mm}; & x_{16} &= 800 \text{ mm};
 \end{aligned}$$

Fig. 5.5 De verdeling in kokerelementen van de rechterhelft van de balk

De figuren 5.7 tot en met 5.14 bevatten enige resultaten van de berekeningen. De getrokken lijn en de stippellijn geven de resultaten van programma I, respectievelijk programma III. Waar wel een getrokken lijn maar géén stippellijn voorkomt zijn de verschillen tussen de resultaten van I en III zo gering dat deze beide lijnen samenvallen. De resultaten van programma II zijn niet opgenomen in de grafieken. Deze resultaten blijken steeds tussen die van de programma's I en III te liggen en zijn niet bijster interessant omdat de verschillen tussen de resultaten van I en III vrijwel steeds bijzonder klein zijn.

De experimenteel bepaalde waarden uit [1] zijn aangegeven met "dikke" ronde punten. Waar Janssen voor dezelfde grootte meer dan één waarde vermeld is de gemiddelde waarde gehanteerd.

Om de interpretatie van de grafieken te vergemakkelijken zijn de spanningsgrootheden, die in deze grafieken voorkomen, in fig. 5.6 aangegeven.

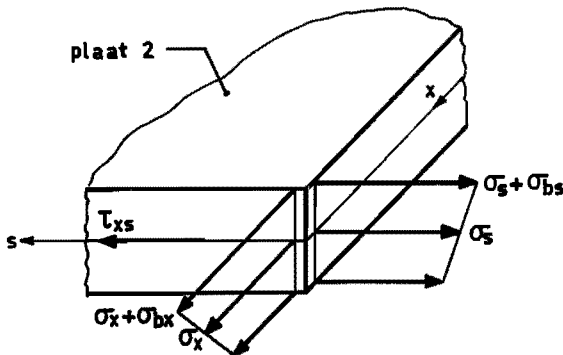


Fig. 5.6 De interessante spanningsgrootheden in plaat 2.

In de eerste vijf grafieken is het verloop in axiale richting van enige interessante spanningen weergegeven. Opgemerkt moet worden dat de getekende lijnen steeds zijn opgebouwd uit rechte verbindingslijnen tussen de berekende spanningen in de knoopvlakken. De procedure voor de berekening der spanningen levert namelijk voor elk kokerelement alleen de spanningen σ_x , σ_s , τ_{xs} , σ_{bx} , σ_{bs} en τ_{sv} in elk der knooppunten van de knoopvlakken die dat element begrenzen.

De figuren 5.7, 5.8 en 5.9 geven de axiale membraanspanning $\sigma_x = \sigma_x(x)$ voor $y = -33$ mm in plaat 2, de membraanspanning $\sigma_s = \sigma_s(x)$ voor $y = +33$ mm in plaat 2 en de schuifspanning τ_{xs} voor $y=0$ in plaat 2. In fig. 5.10 en fig. 5.11 is het verloop van $\sigma_{bx} = \sigma_{bx}(x)$ en $\sigma_{bs} = \sigma_{bs}(x)$ voor $y = -33$ mm in plaat 2 in beeld gebracht.

uit fig. 5.7 blijkt dat de gemeten waarden van de axiale normaalspanning σ_x goed overeenstemmen met de resultaten van de beide rekenprogramma's. Bij fig. 5.9 dient opgemerkt te worden dat de rekenprogramma's met de huidige procedure voor de spanningsberekening onmogelijk tot de juiste waarde van τ_{xs} in doorsnede $x=0$ kunnen leiden. Vanwege de in rekening gebrachte symmetrie ten opzichte van het vlak $x=0$ zal de berekende waarde van deze spanning

namelijk gelijk zijn aan nul. Voor $x > 50$ mm blijkt het verloop van $\tau_{x_5} = \tau_{x_5}(x)$ redelijk goed beschreven te worden. De afwijkingen tussen de berekende en de gemeten waarden voor $x > 50$ mm moeten verklaard worden uit de in hoofdstuk 4 geponeerde veronderstelling volgens welke τ_{x_5} in een plaat lineair verandert met de omtrekskoördinaat. Volgens Janssen (zie [1]) wordt het verloop van τ_{x_5} met deze koördinaat echter in goede benadering beschreven door een parabool. Nauwkeuriger waarden voor τ_{x_5} kunnen bepaald worden door de procedure voor de spanningsberekening aan te passen in de door Janssen aangegeven zin (zie [1] en 4.6.6) of door de koker in meer dan vier platen op te delen. Uit fig. 5.8 blijkt dat het verloop van σ_5 voor $x > 20$ mm door de resultaten van programma I (de getrokken lijn) wel goed gekarakteriseerd wordt maar dat de maximale waarde, $\sigma_5(x=0)$, volgens de berekening een factor drie kleiner is dan de gemeten waarde. De oorzaak hiervan is gelegen in de gekozen verdeling van de koker in platen (zie fig. 5.4) en in de in hoofdstuk 4 gehanteerde veronderstelling dat σ_5 in omtreksrichting in een plaat niet verandert. In de buurt van het aangrijpingspunt van de belasting zal σ_5 in die richting echter een zeer grote gradient vertonen. Een betere benadering voor σ_5 kan gevonden worden door de koker in meer platen te verdelen. Bij fig. 5.8 zij nog opgemerkt dat σ_5 volgens programma III uiteraard identiek gelijk is aan nul.

Uit fig. 5.10 en fig. 5.11 volgt dat de buigspanningen σ_{bx} en σ_{bs} met beide programma's goed beschreven worden. Voor kleine waarden van x ($x < 50$ mm) treden er merkbare afwijkingen op tussen de resultaten van de beide programma's. De verklaring hiervan moet gezocht worden in de verschillen tussen de theorieën die aan deze programma's ten grondslag liggen: in programma I wordt het effect van de anti-clastische buiging wel in rekening gebracht en in programma III niet. Wij kunnen daarom stellen dat deze afwijkingen veroorzaakt worden door het optreden van anti-clastische buiging in de buurt van $x=0$. Deze gevolgtrekking wordt gesteund door het oscillerende karakter van σ_{bx} volgens programma I en door de uitdemplengte van deze slingering (zie fig. 5.10). Overigens zij opgemerkt dat Janssen in [1] een soortgelijk verloop van σ_{bx} in de buurt van $x=0$ vindt met een analyse die gebaseerd is op de klassieke plaattheorie.

De figuren 5.12, 5.13 en 5.14 brengen het berekende en het gemeten verloop in omtreksrichting van de spanningen σ_x , σ_{bs} en σ_{bx} in plaat 2 in doorsnede $x=0$ in beeld. Het verloop van deze spanningen tussen $y = -\frac{1}{2}b$ en $y = +\frac{1}{2}b$ zal zeker in doorsnede $x=0$ allerminst lineair zijn (zie bijvoorbeeld [1], fig. 7.5.3). Omdat de koker in onze schematisering uit slechts vier

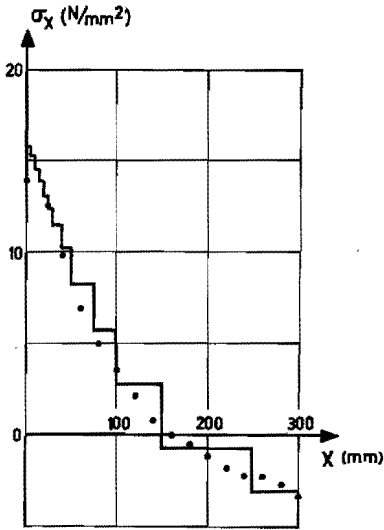


Fig. 5.7
 $\sigma_x = \sigma_x(x)$ voor $y = -33$ mm

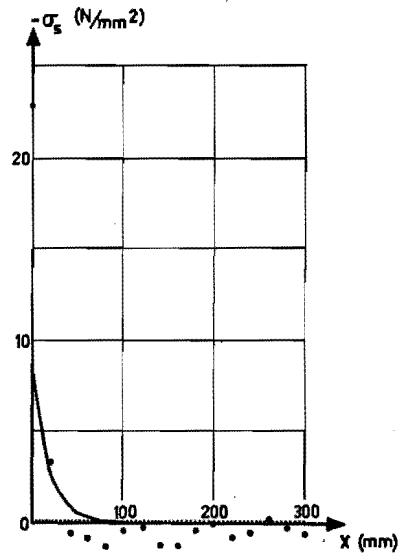


Fig. 5.8
 $\sigma_s = \sigma_s(x)$ voor $y = +33$ mm

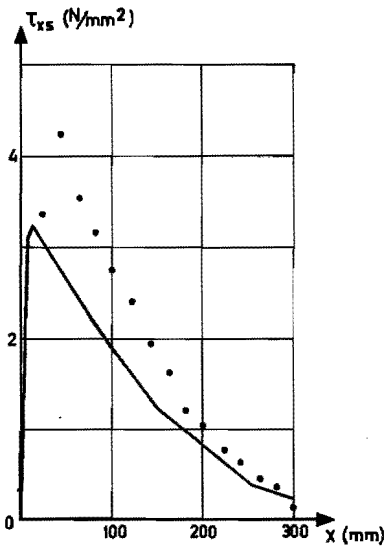


Fig. 5.9
 $\tau_{xs} = \tau_{xs}(x)$ voor $y = 0$

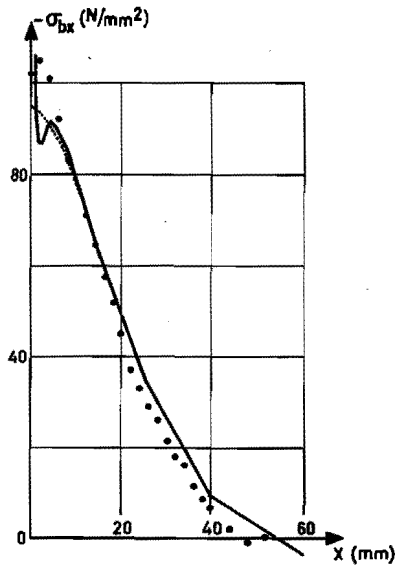


Fig. 5.10
 $\sigma_{bx} = \sigma_{bx}(x)$ voor $y = -33$ mm

platen is opgebouwd leveren de rekenprogramma's alléén maar de spanningen in de hoekpunten $y = -\frac{1}{2}b$ en $y = +\frac{1}{2}b$ (zie fig. 5.4). In de grafieken zijn de berekende waarden verbonden door rechte lijnen.

Uit fig. 5.12 en 5.13 blijkt dat de berekende waarden voor σ_x en σ_{bs} goed overeenstemmen met de gemeten spanningen en dat de verschillen tussen de resultaten van de beide rekenprogramma's klein genoemd mogen worden. Dit geldt niet meer voor fig. 5.14. Weliswaar komen de in absolute waarde grootste, gemeten buigspanningen σ_{bx} redelijk goed overeen met de resultaten van programma I, maar het verloop van $\sigma_{bx} = \sigma_{bx}(y)$ wordt niet erg bevredigend voorspeld. Bovendien zijn de verschillen tussen de resultaten van de programma's I en III erg groot. Dit laatste is niet zo verwonderlijk omdat in programma III de anti-clastische buiging verhinderd is terwijl dit in programma I niet het geval is. Deze buiging zal voor kleine waarden van x - en zeker in doorsnede $x=0$ - echter van grote betekenis zijn. Om te komen tot

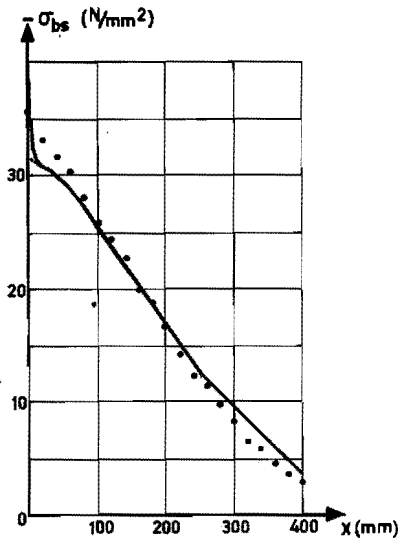


Fig. 5.11

$\sigma_{bs} = \sigma_{bs}(x)$ voor $y = -33$ mm

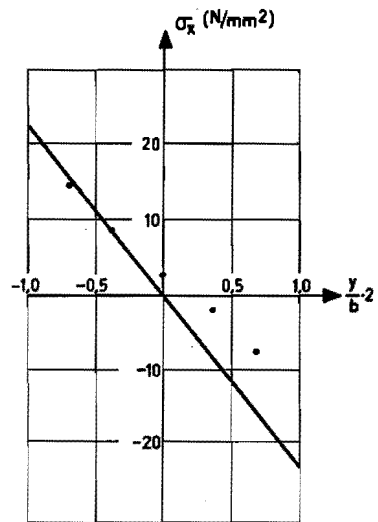


Fig. 5.12

$\sigma_x = \sigma_x(y)$ voor $x=0$ in plaat 2

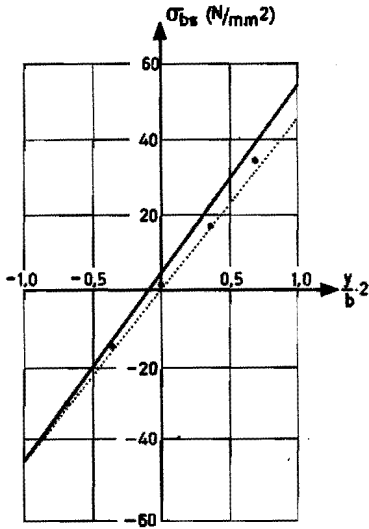


Fig. 5.13

$\sigma_{bs} = \sigma_{bs}(y)$ voor $x=0$ in plaat 2

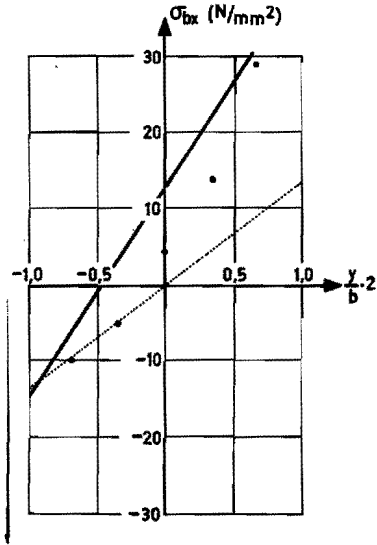


Fig. 5.14

$\sigma_{bx} = \sigma_{bx}(y)$ voor $x=0$ in plaat 2

een betere voorspelling van het verloop van de spanningen σ_x , σ_{bs} en σ_{bx} in omtreksrichting zal de koker in meer dan vier platen verdeeld moeten worden en/of een betere procedure voor de berekening van de spanningen ontwikkeld moeten worden.

Resumerend kan gesteld worden dat zowel programma I als programma III tot een zeer bevredigende voorspelling van de spanningen leiden als wordt afgezien van de onmiddellijke omgeving van het aangrijpingspunt van de belasting. In de buurt van dat punt blijkt programma I te resulteren in spanningen die wezenlijk realistischer zijn dan de spanningen volgens programma III. Daarbij dient echter te worden opgemerkt dat de rekentijd en de hoeveelheid geheugen bij programma III veel gunstiger zijn dan bij programma I. Beschouwen wij als voorbeeld weer het probleem uit fig. 5.3 en fig. 5.4 met de verdeling in 16 kokerelementen volgens fig. 5.5 dan blijkt te gelden :

	programma I	programma II	programma III
totaal aantal onbekende vrijheidsgraden	457	325	195
bandbreedte van de te dekomponeren matrix Q_{11}	55	39	23
rekentijd op de EL-X8	857 sec	380 sec	126 sec

De zeer grote verschillen in rekestijden en benodigde geheugenruimte worden voornamelijk veroorzaakt door de verschillen in bandbreedte en aantal onbekenden.

Op grond van het bovenstaande kan gekonkludeerd worden dat het bij de analyse van het probleem uit fig. 5.3 aanbeveling verdient om gebruik te maken van programma III. Als ook de spanningen in de buurt van het aangrijpingspunt van de gekoncentreerde belasting nauwkeurig voorspeld moeten worden moet programma I gehanteerd worden en zal het wenselijk zijn de koker in meer dan vier platen te verdelen. Dit zal echter gepaard gaan met een veel hogere rekestijd.

De geldigheid van deze konklusies voor kokers met een andere dwarsdoorsnede kan getoetst worden aan het probleem uit fig. 5.15. De ten dele open, ten dele gesloten dwarsdoorsnede van de koker is geschetst in fig. 5.16. In de eindvlakken zijn platen aangebracht die geschematiseerd worden tot ideale dwarschotten, dit wil zeggen tot schotten die in hun vlak oneindig stijf zijn en géén stijfheid bezitten tegen belasting loodrecht op het vlak. De eindvlakken van de koker kunnen dus vrij welven, maar de profiellijn kan niet van vorm veranderen. De dwarschotten zijn bevestigd aan de "vaste" wereld.

In het midden van de koker grijpen twee puntkrachten aan die een wringend moment van 2000 Nm veroorzaken. Zowel de konstruktie als de belasting zijn symmetrisch ten opzichte van het vlak $x=0$.

Voor de analyse van dit probleem wordt de koker opgedeeld in zes platen zoals is aangegeven in fig. 5.16. De gekozen verdeling in koker-elementen is geschetst in fig. 5.17.

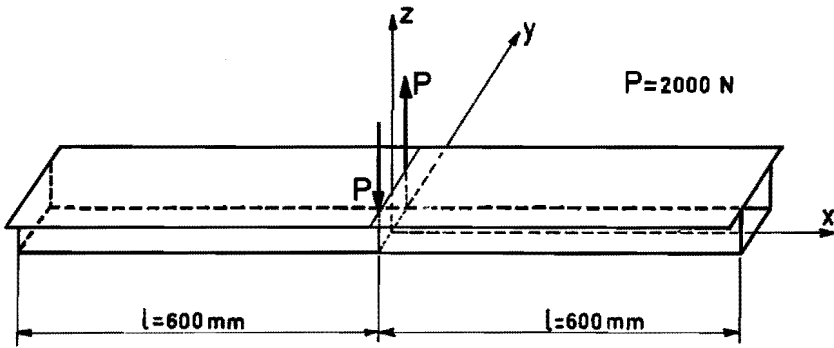


Fig. 5.15 De koker met belasting volgens Steinle

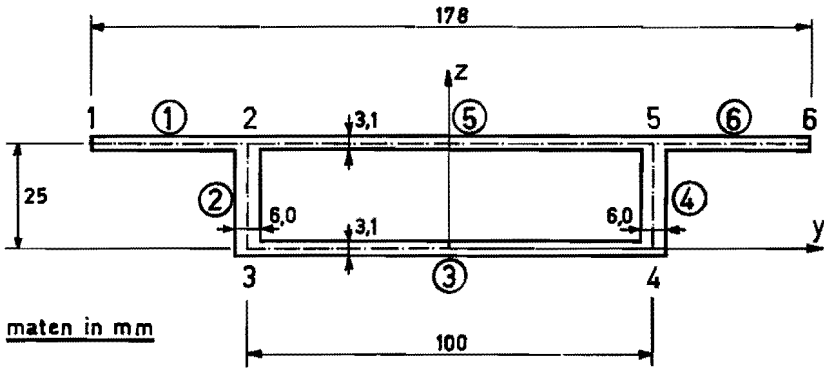
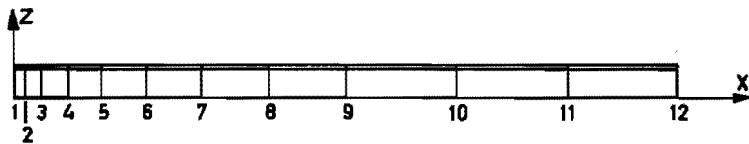


Fig. 5.16 Dwarsdoorsnede van de koker uit fig. 5.15



$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0 \text{ mm}; & x_4 &= 50 \text{ mm}; & x_7 &= 170 \text{ mm}; & x_{10} &= 400 \text{ mm}; \\
 x_2 &= 10 \text{ mm}; & x_5 &= 80 \text{ mm}; & x_8 &= 230 \text{ mm}; & x_{11} &= 500 \text{ mm}; \\
 x_3 &= 25 \text{ mm}; & x_6 &= 120 \text{ mm}; & x_9 &= 300 \text{ mm}; & x_{12} &= 600 \text{ mm};
 \end{aligned}$$

Fig. 5.17 De verdeling van de balk in kokerelementen

In [5] geeft Steinle een aantal experimentele resultaten voor dit probleem. Deze worden in de figuren 5.18 tot en met 5.23 gerepresenteerd door de "dikke" ronde stippen. De betekenis van de getrokken lijn en de stippellijn is dezelfde als in fig. 5.7 tot en met fig. 5.14.

De figuren 5.18, 5.19 en 5.20 geven het verloop in axiale richting van de axiale membraamspanning σ_x ter plaatse van de knooplijnen 1, 2 en 3 (zie fig. 5.16). Bij knooplijn 2 komen drie platen, te weten de platen 1, 2 en 5 bij elkaar. De rekenprogramma's leveren voor elk der platen een normaalspanning σ_x ter plaatse van knooplijn 2. Deze spanningen kunnen verschillend zijn; in grafiek 5.19 is de gemiddelde waarde uitgezet. Een overeenkomstige opmerking geldt voor de spanning σ_x ter plaatse van knooplijn 3 (fig. 5.20).

Het verloop van de schuifspanning $\tau_{xs} = \tau_{xs}(x)$ voor $y = 12,5$ mm in plaat 2 is weergegeven in fig. 5.21. De beide laatste grafieken geven $\sigma_{bs} = \sigma_{bs}(x)$ en $\sigma_{bx} = \sigma_{bx}(x)$ in plaat 2 ter plaatse van knooplijn 3.

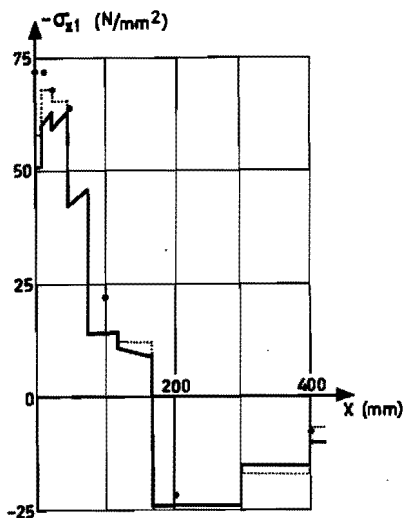


Fig. 5.18

$\sigma_x = \sigma_x(x)$ bij knooplijn 1

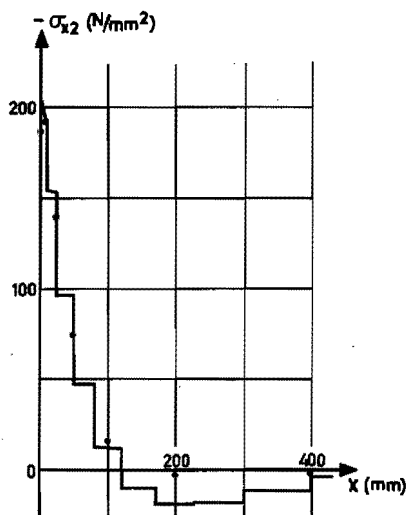


Fig. 5.19

$\sigma_x = \sigma_x(x)$ bij knooplijn 2

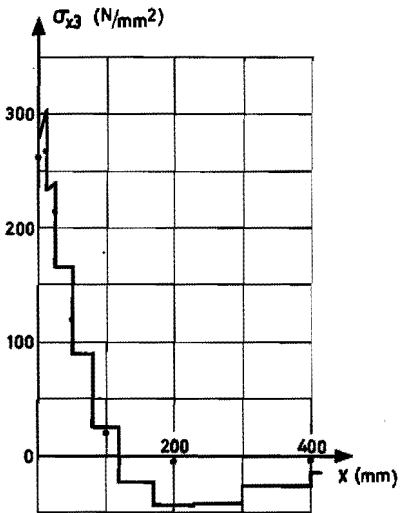


Fig. 5.20
 $\sigma_x = \sigma_x(x)$ bij knooplijn 3

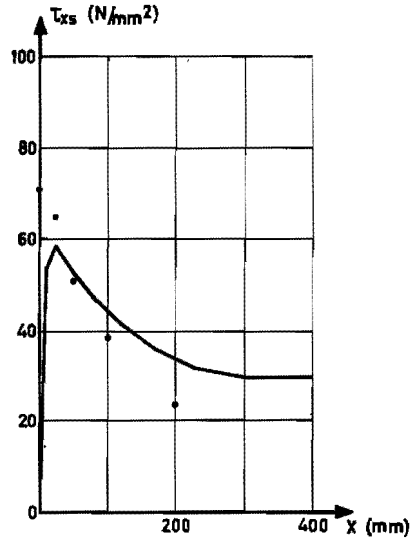


Fig. 5.21
 $\tau_{xs} = \tau_{xs}(x)$ in plaat 2

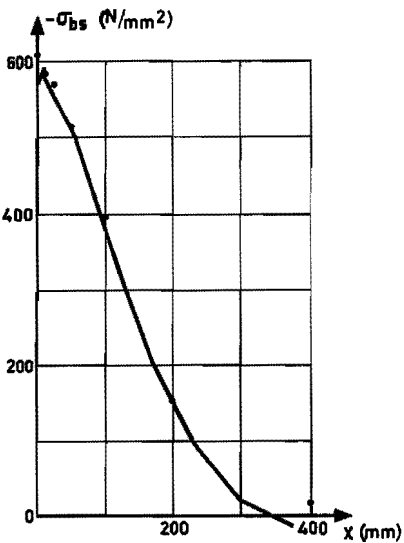


Fig. 5.22
 $\sigma_{bs} = \sigma_{bs}(x)$ voor $y=0$ in plaat 2

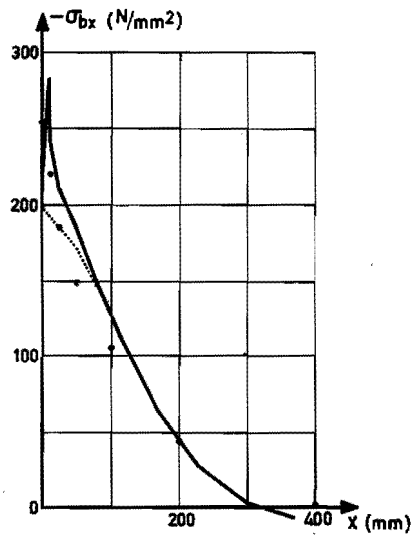


Fig. 5.23
 $\sigma_{bx} = \sigma_{bx}(x)$ voor $y=0$ in plaat 2

Beschouwing van deze grafieken leert dat de eerder gegeven konklusies ook voor dit probleem ten volle blijven gelden. Dit geldt niet alleen voor de verschillen tussen de berekende en gemeten waarde van de spanningen maar ook voor de rekestijden en de benodigde hoeveelheid geheugenruimte zoals blijkt uit de onderstaande tabel :

	programma I	programma II	programma III
totaal aantal onbekende vrijheidsgraden	446	330	198
bandbreedte van de te dekomponeren matrix Q_{11}	83	59	35
rekestijd op EL-X8	2628 sec	1370 sec	395 sec

Ook in dit geval is de rekestijd met programma III meer dan zes maal zo klein als met programma I terwijl de berekende resultaten van beide programma's - afgezien van de onmiddellijke omgeving van het aangrijpingspunt van de gekoncentreerde belasting - niet in belangrijke mate verschillen.

5.5 Konklusies

Uit de toepassingen in 5.4 volgt dat de rekenprogramma's bij een geschikte verdeling van de te analyseren koker in platen en in kokerelementen tot een realistische voorspelling van de optredende spanningen zullen leiden. Als men niet zo zeer geïnteresseerd is in de spanningen in de onmiddellijke omgeving van een diskontinuiteit in de belasting verdient programma III verre de voorkeur boven de beide andere rekenprogramma's omdat dit programma in een veel kortere rekestijd en met veel minder geheugenruimte tot vrijwel dezelfde resultaten zal leiden als de programma's I en II. Als men wel geïnteresseerd is in de genoemde spanningen en verwacht moet worden dat de anti-clastische buiging van wezenlijk belang is dan kan gebruik worden gemaakt van programma I. Rekenprogramma II, dat in het voorgaande nauwelijks aan de orde geweest is, kan gebruikt worden in die situaties waarin de rek van de platen in omtreksrichting van belang zal zijn terwijl de anti-clastische buiging verhinderd verondersteld mag worden.

Voor verreweg de meeste praktisch interessante problemen zal programma III echter kunnen worden toegepast.

Een andere konklusie die uit de berekeningen in 5.4 getrokken kan worden is dat het zeer gewenst is om betere procedures te ontwikkelen voor de bepaling van de spanningen uit de berekende snede(kracht)groottheden en verplaatsingen. Ook zullen procedures ontwikkeld dienen te worden voor de - nauwkeurige - berekening van de spanningen in een willekeurige dwarsdoorsnede die niet samenvalt met een van de knoopvlakken. Met deze procedures zal het dan zeer waarschijnlijk mogelijk zijn om nauwkeuriger benaderingen voor de spanningen te bepalen met een minder fijne verdeling in kokerelementen dan nu noodzakelijk is. In 4.6.6 zijn reeds enige mogelijke werkwijzen geschetst voor een dergelijke procedure.

Literatuur bij hoofdstuk 5

- [1] Janssen, J.D. : Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige rechthoekige kokers. Dissertatie, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1967.
- [2] Veldpaus, F.E. : Beschrijving van een drietal rekenprogramma's voor de analyse van dunwandige kokers. Rapport WE-73/2, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1973 (nog te verschijnen).
- [3] Kollbrunner, C.F. und Hajdin, N. : Die Verschiebungsmethode in der Theorie der dünnwandigen Stäbe und ein neues Berechnungsmodell des Stabes mit in seinen Ebenen deformierbaren Querschnitten. Abhandlungen, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich, 28-11 (1968), p. 87 e.v.
- [4] Vlasov, V.Z. : Thin walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
- [5] Steinle, A. : Torsion und Profilverformung. Dissertatie, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1967.

Huidige mogelijkheden en toekomstige ontwikkelingen

Bij de analyse van een uit dunwandige balken samengestelde constructie met behulp van de resultaten uit dit proefschrift kunnen twee problemen onderscheiden worden :

1. de bepaling van de relevante eigenschappen van de balken met de hiervoor besproken elementen.
2. het koppelen van de in elementen verdeelde balken tot de complete constructie.

In dit hoofdstuk zullen wij de huidige mogelijkheden van de ontwikkelde elementen en rekenprogramma's voor het oplossen van deze problemen zeer summier aangeven en bovendien enige gewenste uitbreidingen en verfijningen schetsen.

De elementen uit hoofdstuk 3 kunnen gehanteerd worden bij de analyse van het statische en dynamische gedrag van dunwandige cilindrische balken met open dwarsdoorsnede waarvan de vervorming van de profiellijn buiten beschouwing gelaten mag worden. Om de toepassing van deze elementen te vergemakkelijken is een procedure ontwikkeld waarmee de geometrische karakteristieken van de dwarsdoorsnede (nodig bij het opstellen van de stijfheids- en massamatrix: en bij de berekening der spanningen) eenvoudig numeriek bepaald kunnen worden. De procedures voor de berekening van de massa- en stijfheidsmatrix zijn zodanig van opzet dat de invloed van afrondingsfouten niet ontoelaatbaar groot kan worden.

Met de kokerelementen uit hoofdstuk 4 kan het statische gedrag van dunwandige, cilindrische balken met willekeurige dwarsdoorsnede geanalyseerd worden. In de bijbehorende rekenprogramma's worden de relevante karakteristieken van de dwarsdoorsnede bepaald uit een eenvoudig op te geven karakterisering van de geometrie van die doorsnede. De gebruiker behoeft die geometrische doorsnede - karakteristieken dus niet zelf te bepalen. Het in rekening brengen van verdeelde belasting en van dynamische effecten is nog niet mogelijk maar zal zonder problemen gerealiseerd kunnen worden door dezelfde werkwijze te volgen als in hoofdstuk 3.

In de kokerelementen en de rekenprogramma's kunnen nog bepaalde, in principe niet moeilijk te verwezenlijken verfijningen worden aangebracht. De eerste verfijning heeft betrekking op het verloop in axiale richting van de axiale verplaatsingen (de componenten van de vektor \bar{u}). Bij de huidige elementen is dit verloop lineair. Daardoor zal in veel gevallen een fijne verdeling in elementen noodzakelijk zijn om het werkelijke verloop van \bar{u} voldoende nauwkeurig te kunnen beschrijven. Dit bezwaar kan ondervangen worden door voor de componenten van \bar{u} een tweede of hogere graads polynoom te kiezen. De in 4.6.2 gesignaleerde koppelingsproblemen met aangrenzende elementen kunnen vermeden worden door als extra verplaatsingsparameters niet de afgeleide(n) van de componenten van \bar{u} in de eindvlakken van het element maar de axiale verplaatsingen in een of meer snedevlakken in het element te kiezen (zie fig. 6.1). Omdat de extra parameters dan géén rol spelen bij de koppeling met de aangrenzende elementen



Fig. 6.1 Kokerelement met parameters voor het verloop van \bar{u}

kunnen zij worden uitgedrukt in de overige verplaatsingsparameters van het element en in de verdeelde belasting op het cilindrisch oppervlak. De uiteindelijke verplaatsingsvektor v_e komt dan weer overeen met die uit hoofdstuk 4. De stijfheidsmatrix Q_e en de kinematisch consistente krachtvektor van de verdeelde belasting, f_c , zullen echter anders zijn. Een dergelijke wijziging in de veronderstelling over het verloop van \bar{u} zal resulteren in een nauwkeuriger element. De berekening van Q_e en f_c zal echter gekompliceerder zijn en meer rekentijd vereisen dan bij de elementen uit hoofdstuk 4.

De tweede verfijning betreft de verdeling van de koker in platen. Gezien de benodigde rekentijden is het wellicht gewenst om in de rekenprogramma's de mogelijkheid in te bouwen om de verdeling in platen plaatselijk te verfijnen. Een voorbeeld met twee kokerelementen is geschetst in fig. 6.2. De combinatie van deze elementen kan worden opgevat als een nieuw element waarvan het aantal knooppunten in het ene eindvlak verschilt van het aantal in het andere eindvlak (zie fig. 6.3). Om bij het koppelen van de beide elementen de continuïteit der verplaatsingen te kunnen garanderen moeten er verbanden gelegd worden tussen enerzijds de verplaatsingen

van het tussenpunt A en anderzijds de verplaatsingen van de punten B en C (zie fig. 6.2). Dit betekent echter dat de rekenprogramma's de mogelijkheid moeten bieden om afhankelijkheidsrelaties tussen de verplaatsingsparameters op een efficiënte wijze in rekening te brengen.¹⁾

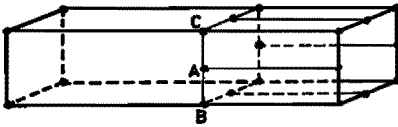


Fig. 6.2 Plaatselijk verfijnen van de verdeling in platen.

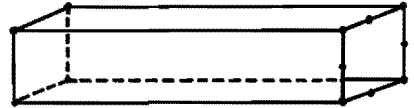


Fig. 6.3 Het nieuwe element.

Een derde, dringend gewenste verfijning heeft betrekking op de berekening der spanningen. Dit onderwerp is in 4.6.6 en 5.5 reeds ter sprake gekomen.

Voor een nadere toelichting van de mogelijkheden en de gewenste uitbreidingen van de rekenprogramma's bij de oplossing van het in de aanhef van dit hoofdstuk genoemde koppelingsprobleem is het zinvol om onderscheid te maken tussen :

1. konstrukties die bestaan uit één rechte, dunwandige balk met konstante dwarsdoorsnede. Deze konstrukties komen bijvoorbeeld voor in de bruggen- en kranenbouw
2. konstrukties waarin koppelingen voorkomen van balken met verschillende dwarsdoorsneden en/of balkassen die niet in elkaars verlengde liggen.

Bij de eerstgenoemde konstrukties doen zich uiteraard geen problemen voor als alle elementen van hetzelfde type zijn. In de eindvlakken van te koppelen elementen treden dan immers precies dezelfde verplaatsingsparameters op. Dikwijls zal een dergelijke konstruktie echter verdeeld worden in verschillende typen elementen, bijvoorbeeld als in een gedeelte van de konstruktie (deel A) veel grotere gradiënten in omtreksrichting in het verloop van de spanningen en verplaatsingen verwacht moeten worden dan in de rest van de konstruktie (deel B). Enige mogelijkheden voor de verdeling in elementen zijn dan :

- 1) Een aantal van de in dit hoofdstuk genoemde verfijningen en uitbreidingen van de rekenprogramma's zijn niet gerealiseerd vanwege de overgang op een ander type computer bij het Rekencentrum van de Technische Hogeschool Eindhoven.

- deel A verdeeld in plaatbuigingselementen (bijvoorbeeld elementen van het type TRIB 3 uit ASKA [1]), deel B verdeeld in kokerelementen
- deel A verdeeld in kokerelementen waarin zowel ani-clastische buiging als plaatrek in omtreksrichting in rekening wordt gebracht, deel B verdeeld in kokerelementen waarin die deformatie-mogelijkheden niet op kunnen treden
- deel A verdeeld in kokerelementen, deel B in "klassieke" balkelementen of in een van de typen elementen uit hoofdstuk 3.

Bij een dergelijke verdeling in elementen zal het koppelen van de delen A en B niet op principiële moeilijkheden stuiten als de programma's de mogelijkheid bieden om afhankelijkheidsrelaties tussen de verplaatsingsparameters in het verbindingsvlak in rekening te brengen.

Het probleem van de koppeling van twee of meer balken met verschillende dwarsdoorsneden en/of assen die niet in elkaars verlengde liggen is in zijn algemeenheid niet opgelost en is zeer waarschijnlijk ook niet algemeen op te lossen binnen het kader van de ééndimensionale theorieën uit dit proefschrift. Er zijn immers grote verschillen mogelijk in de constructieve uitvoering van een dergelijke koppeling terwijl de eigenschappen van die koppeling in het algemeen belangrijk beïnvloed zullen worden door de gekozen uitvoering. Om die eigenschappen voldoende nauwkeurig te bepalen zal veelal tenminste een tweedimensionale theorie (plaattheorie!) gehanteerd moeten worden. De eigenschappen kunnen dan echter ook bepaald worden door de direkte omgeving van de verbindingsplaats der balken (het koppelingsgedeelte) te beschouwen, dit gedeelte te verdelen in plaatbuigingselementen en de stijfheidsmatrix van het koppelingsgedeelte te bepalen, gerelateerd aan de verplaatsingen aan die randen waaraan de balken gekoppeld zijn. Het is uiteraard ook mogelijk de benodigde eigenschappen experimenteel te bepalen. Zodra de stijfheidsmatrix van het koppelingsgedeelte en de stijfheidsmatrices van de te koppelen balken bekend zijn kan de totale stijfheidsmatrix van de constructie worden opgesteld. Het zal duidelijk zijn dat het bij berekeningen van dit type gewenst is de hier ontwikkelde elementen in te bouwen in bestaande programma-systemen zoals ASKA [1].

In veel gevallen is de hierboven gesuggereerde, moeizame werkwijze niet nodig omdat het in die gevallen mogelijk is om een eenvoudige en redelijke schematisering van de koppeling te maken. Deze schematisering kan voor de te koppelen einddoorsneden van de balken bijvoorbeeld resulteren in uitspraken van het volgende type :

- bepaalde verplaatsingsparameters (of combinaties daarvan) in de einddoorsnede van een balk worden door de koppeling onmogelijk gemaakt. Ter plaatse van de verbindingsplaats kan bijvoorbeeld de welving of de vervorming van de dwarsdoorsnede verhinderd worden
- bepaalde verplaatsingsparameters (of combinaties daarvan) in de einddoorsnede van een balk behoeven niet gekoppeld te worden aan verplaatsingsparameters van de overige balken. Deze situatie treedt bijvoorbeeld op als de balk op de verbindingsplaats vrij kan welven
- bepaalde verplaatsingsparameters (of combinaties daarvan) in de einddoorsnede van een balk moeten rechtstreeks gekoppeld worden aan verplaatsingsgrootheden in de eindvlakken van de overige balken.

Indien een modelvorming van dit type mogelijk is kunnen de programma's uit hoofdstuk 5 gehanteerd worden om het gedrag van de constructie te analyseren.

Met enige kleine modifikaties kunnen deze rekenprogramma's ook toegepast worden voor de analyse van dunwandige balken met rechte balkas en continue veranderende dwarsdoorsnede. Daarbij wordt de balk verdeeld in een aantal elementen. De dwarsdoorsnede is per element konstant maar zal in het algemeen van element tot element verschillen om een zo goed mogelijke benadering van de werkelijke, veranderende doorsnede van de balk te verkrijgen. In de snedevlakken tussen de elementen zal continuïteit in de verplaatsingsparameters geëist kunnen worden.

De programma's kunnen bovendien gebruikt worden voor de analyse van een zwak gekromde balk door hem opgebouwd te denken uit een aantal elementen met (per element) een rechte as. Op deze wijze kan de werkelijke geometrie voldoende goed benaderd worden. In de snedevlakken tussen de elementen zal weer continuïteit in de verplaatsingsparameters geëist dienen te worden.

Het is uiteraard mogelijk (maar wellicht niet noodzakelijk) om langs analytische weg elementen te ontwikkelen waarmee het gedrag van niet cilindrische of gekromde, dunwandige balken nauwkeuriger beschreven kan worden dan op de hiervoor aangegeven wijze mogelijk is. Voor de ontwikkeling van die elementen zal echter nog veel extra onderzoek vereist zijn.

Uit de voorgaande opmerkingen in dit hoofdstuk moge duidelijk zijn dat met de in dit proefschrift gepresenteerde elementen en procedures (eventueel na enige modifikaties in de huidige software) zeer vele praktisch belangrijke dunwandige constructies (benaderend) geanalyseerd kunnen worden.

Literatuur bij hoofdstuk 6

[1] - : ASKA User's Reference Manual, ISD Report No. 73, 1971.

Berekening van de stijfheidsmatrices voor dunwandige balken met open doorsnede

A.1 Definities

1.1 De verplaatsingsvektor \vec{v} in een willekeurige snede x (zie fig. A.1):

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} u_{xo} & u_{yd} & \phi_z & u_{zd} & \phi_y & \phi_x & \beta \end{bmatrix}$$

1.2 De verplaatsingsvektor \vec{v}_e van een element (zie fig. A.2):

$$\vec{v}_e = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{x2} & u_{y1} & \phi_{z1} & u_{y2} & \phi_{z2} & u_{z1} & \phi_{y1} & u_{z2} & \phi_{y2} & \phi_{x1} & \beta_1 & \phi_{x2} & \beta_2 \end{bmatrix}$$

1.3 De krachtvektor \vec{f} in een willekeurige snede x (zie fig. A.1):

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} K_x & K_y & M_z & K_z & M_y & M_x & B \end{bmatrix}$$

1.4 De krachtvektor \vec{f}_e van een element (zie fig. A.2):

$$\vec{f}_e = \begin{bmatrix} -K_{x1} & K_{x2} & -K_{y1} & -M_{z1} & K_{y2} & M_{z2} & -K_{z1} & -M_{y1} & K_{z2} & M_{y2} & -M_{x1} & -B_1 & M_{x2} & B_2 \end{bmatrix}$$

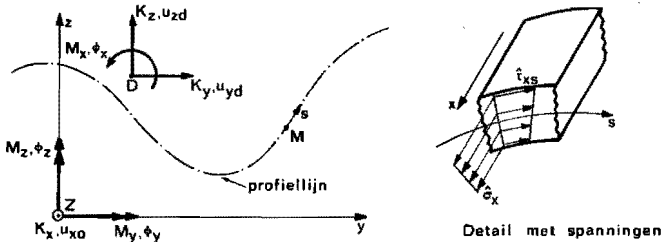


Fig. A.1 De interessante verplaatsings- en krachtgrootheden in een willekeurige doorsnede

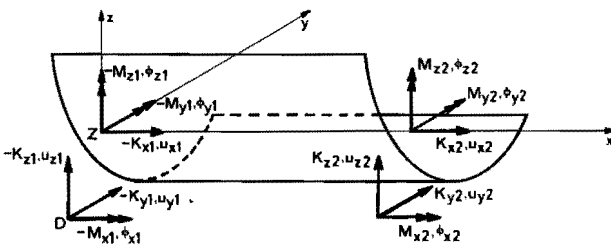


Fig. A.2 De kracht- en verplaatsingsgrootheden in de eindvlakken

1.5 De spanningsvector $\bar{\sigma}$ in een willekeurig punt (x,s) van het middenvlak (zie fig. A.1)

Beperken wij ons tot de in 3.2.3 aangegeven benadering voor dunwandige balken dan kan de spannings-toestand in een willekeurig punt (x,s) worden gekarakteriseerd door:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_m & \tau_s \end{bmatrix}$$

In deze benadering is de in 3.2.2 geïntroduceerde bulgspanning σ_b gelijk aan nul.

A.2 De konstitutieve vergelijkingen

Met het energieprincipe volgens Reissner kan het verband tussen de spanningen en de verplaatsingen worden bepaald:

$$\bar{\sigma} = F_{\sigma}^{-1} (W_{\epsilon} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + W_v \cdot \bar{v})$$

De matrices F_{σ} , F_{σ}^{-1} , W_{ϵ} en W_v zijn daarbij gelijk aan:

$$F_{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix}; \quad F_{\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 3G \end{bmatrix}$$

$$W_{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dy_0}{ds} & 0 \\ -y_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dz_0}{ds} & 0 \\ z_0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & -\frac{h}{3} \\ w & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad W_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{dy_0}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dz_0}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \end{bmatrix}$$

In overeenstemming met de in 3.2.3 aangegeven benadering zijn de termen met $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}$ in de relatie voor $\bar{\sigma}$ weggelaten.

A.3 De elastische energie U

In de benadering uit 3.2.3 wordt de elastische energie U gegeven door:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\ \bar{v} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} S_{\epsilon\epsilon} & S_{\epsilon v} \\ S_{v\epsilon} & S_{vv} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\ \bar{v} \end{bmatrix} dx$$

waarbij de matrices $S_{\epsilon\epsilon}$, $S_{v\epsilon}$, $S_{\epsilon v}$ en S_{vv} zijn gedefinieerd door:

$$S_{ab} = S_{ba} = \int_F W_a \cdot F_{\sigma}^{-1} \cdot W_b \cdot dF \quad (a=e,v; b=e,v)$$

Als de y- en z-as centrale hoofdtraagheidsassen zijn, M (fig. A.1) een hoofddoorsprong is van de boogkoordinaat s en D het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz is, dan geldt:

$$S_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} EF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G \cdot X_{yy} & 0 & G \cdot X_{yz} & 0 & G \cdot X_{y\omega} & 0 \\ 0 & 0 & EI_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G \cdot X_{yz} & 0 & G \cdot X_{zz} & 0 & G \cdot X_{z\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & G \cdot X_{y\omega} & 0 & G \cdot X_{z\omega} & 0 & G(X_{\omega\omega} + J_s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{\omega\omega} \end{bmatrix}$$

$$S_{CV} = S_{VC}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -GX_{yy} & 0 & GX_{yz} & 0 & GX_{y\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -GX_{yz} & 0 & GX_{zz} & 0 & GX_{z\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -GX_{y\omega} & 0 & GX_{z\omega} & 0 & GX_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{VV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GX_y & 0 & -GX_{yz} & 0 & -GX_{y\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -GX_{yz} & 0 & GX_{zz} & 0 & GX_{z\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -GX_{y\omega} & 0 & GX_{z\omega} & 0 & GX_{\omega\omega} \end{bmatrix}$$

De optredende geometrische karakteristieken F , I_{yy} , I_{zz} , $I_{\omega\omega}$, J_s en X_{ab} volgen uit:

$$F = \int_S h \cdot ds \quad ; \quad J_s = \frac{1}{3} \cdot \int_F h^2 dF$$

$$I_{aa} = \int_F a^2 dF \quad \text{voor } a=y,z,\omega$$

$$X_{ab} = \int_F \frac{da}{ds} \cdot \frac{db}{ds} \cdot dF \quad \text{voor } a,b=y,z,\omega$$

A.4 De stijfheidematrix als de afspiegeling van het middenvlak en de dwarsdoorsnede ongelijk aan nul is

4.1 De oplossing $\hat{v}(x)$ van de homogene, statische differentiaalvergelijkingen

De homogene, statische oplossing $\hat{v} = \hat{v}(x)$ van de differentiaalvergelijkingen (3.3.7), (3.3.8) en (3.3.9) wordt gegeven door:

$$\hat{v}(x) = \hat{D}_a(x) \cdot a$$

De veertien componenten van a zijn onafhankelijk van x . Voor \hat{D}_a geldt:

$$\hat{D}_a = \begin{bmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^{3-\lambda} \frac{s_y \cdot l}{2G} \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & -\lambda \frac{s_z \cdot l}{2G} \cdot \xi & 0 & 0 & -\lambda \frac{J_s}{y\omega} \cdot \text{ch} & -\lambda \frac{J_s}{y\omega} \cdot \text{sh} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{z}{l} \cdot \xi & \frac{3}{l} \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \frac{s_y \cdot l}{2G} \cdot \xi & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^{3-\lambda} \frac{s_z \cdot l}{2G} \cdot \xi & 0 & 0 & -\lambda \frac{J_s}{z\omega} \cdot \text{ch} & -\lambda \frac{J_s}{z\omega} \cdot \text{sh} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{z}{l} \cdot \xi & -\frac{3}{l} \cdot \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \text{ch} & \text{sh} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \frac{s_y}{y\omega} \cdot \frac{1}{2G} & 0 & 0 & 0 & -\lambda \frac{s_z}{z\omega} \cdot \frac{1}{2G} & 0 & -\frac{1}{l} & -\bar{\xi} \cdot \text{sh} & -\bar{\xi} \cdot \text{ch} \end{bmatrix}$$

Hierin is ξ een dimensieloze axiale coördinaat: $\xi = \frac{x}{L}$. De grootheden $\lambda_{yy}, \lambda_{yz}, \dots, \lambda_{\omega\omega}$ zijn componenten van een matrix λ , die de inverse is van X (zie {3.3.10}):

$$\lambda = X^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_{yy} & \lambda_{yz} & \lambda_{y\omega} \\ \lambda_{yz} & \lambda_{zz} & \lambda_{z\omega} \\ \lambda_{y\omega} & \lambda_{z\omega} & \lambda_{\omega\omega} \end{bmatrix}$$

De stijfheden s_y en s_z en de afkortingen ch , sh , \bar{c} en $\bar{\delta}$ zijn gedefinieerd als:

$$s_y = \frac{12EI}{L^3} \lambda_{yy}; \quad s_z = \frac{12EI}{L^3} \lambda_{zz}; \quad \bar{c} = \bar{\alpha} \cdot L; \quad \bar{\alpha}^2 = \frac{1}{1+\lambda} \cdot \frac{GJ_s}{EI} \quad (\bar{\alpha} > 0)$$

$$ch = \cosh(\bar{c} \cdot \xi); \quad sh = \sinh(\bar{c} \cdot \xi); \quad \bar{\delta} = \frac{\bar{c}}{L} (1 + \lambda_{\omega\omega} J_s)$$

a kan uitgedrukt worden in de verplaatsingsvektor v_e :

$$v_e = D_a \cdot a; \quad a = D_a^{-1} \cdot v_e$$

De matrix D_a kan eenvoudig worden afgeleid uit $\hat{D}_a(x)$ door achtereenvolgens $x=0$ en $x=L$ te substitueren. Wij interesseren ons niet voor D_a zelf, maar wel voor de inverse ervan. Bij de berekening daarvan voeren wij naast de reeds geïntroduceerde stijfheden s_y en s_z nog een stijfheidsgraad \bar{s}_ω en een matrix B in, die zijn gedefinieerd als:

$$\bar{s}_\omega = 2 \cdot \frac{EI_{\omega\omega}}{L^3} \cdot \frac{\bar{c}^2 (\cosh \bar{c} - 1)}{\bar{c} \sinh \bar{c} - 2 (\cosh \bar{c} - 1)}$$

$$a = \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} & b_{y\omega} \\ b_{yz} & b_{zz} & b_{z\omega} \\ b_{y\omega} & b_{z\omega} & b_{\omega\omega} \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{G}{L} \frac{X_{yy}}{s_y} + 1 & \frac{G}{L} \frac{X_{yz}}{\sqrt{s_y \cdot s_z}} & \frac{G}{L} \frac{X_{y\omega}}{\sqrt{s_y \cdot s_\omega}} \\ \frac{G}{L} \frac{X_{yz}}{\sqrt{s_y \cdot s_z}} & \frac{G}{L} \frac{X_{zz}}{s_z} + 1 & \frac{G}{L} \frac{X_{z\omega}}{\sqrt{s_z \cdot s_\omega}} \\ \frac{G}{L} \frac{X_{y\omega}}{\sqrt{s_y \cdot s_\omega}} & \frac{G}{L} \frac{X_{z\omega}}{\sqrt{s_z \cdot s_\omega}} & \frac{G}{L} \frac{X_{\omega\omega}}{s_\omega} + 1 \end{bmatrix}$$

Maken wij bovendien nog gebruik van de afkortingen:

$$\begin{aligned} r_y &= 2 \cdot u_{y1} + \bar{c} \cdot \phi_{z1} - 2 \cdot u_{y2} + \bar{c} \cdot \phi_{z2}; & \begin{bmatrix} \sqrt{s_y} \cdot p_y \\ \sqrt{s_z} \cdot p_z \\ \sqrt{s_\omega} \cdot p_\omega \end{bmatrix} &= B \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{s_y} \cdot r_y \\ \sqrt{s_z} \cdot r_z \\ \sqrt{s_\omega} \cdot r_\omega \end{bmatrix} \\ r_z &= 2 \cdot u_{z1} - \bar{c} \cdot \phi_{y1} - 2 \cdot u_{z2} - \bar{c} \cdot \phi_{y2}; \\ r_\omega &= 2 \cdot \phi_{x1} - \bar{c} \cdot \beta_1 - 2 \cdot \phi_{x2} - \bar{c} \cdot \beta_2 \end{aligned}$$

dan volgt na enig rekenwerk dat de componenten a_1, a_2, \dots, a_{14} van a gelijk zijn aan:

$$\begin{aligned} a_1 &= u_{x1}; \quad a_2 = -u_{x1} + u_{x2} \\ a_3 &= u_{y1} + \lambda_{y\omega} J_s \cdot a_{13}; \quad a_4 = \bar{c} \cdot \phi_{z1}; \quad a_5 = -3 \cdot u_{y1} - 2 \phi_{z1} \cdot \bar{c} + 3 u_{y2} - \phi_{z2} \cdot \bar{c} + \frac{3}{2} p_y; \quad a_6 = r_y - p_y \\ a_7 &= u_{z1} + \lambda_{z\omega} J_s \cdot a_{13}; \quad a_8 = -\bar{c} \cdot \phi_{y1}; \quad a_9 = -3 \cdot u_{z1} + 2 \phi_{y1} \cdot \bar{c} + 3 u_{z2} + \phi_{y2} \cdot \bar{c} + \frac{3}{2} p_z; \quad a_{10} = r_z - p_z \\ a_{11} &= \phi_{x1} - a_{13}; \quad a_{12} = \frac{1}{\bar{c}_1} \{ -(1+\bar{c}_1) \phi_{x1} + \beta_1 \bar{c} + (1+\bar{c}_1) \phi_{x2} + \beta_2 \bar{c} + \frac{1}{2} \bar{p}_\omega \} \\ a_{13} &= \frac{1}{2\bar{c}_1} \{ -\phi_{x1} + (1-\bar{c}_2) \cdot \beta_1 \bar{c} + \phi_{x2} + \bar{c}_2 \cdot \beta_2 \bar{c} + \frac{1}{2} \bar{p}_\omega \}; \\ a_{14} &= \frac{-1}{2\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_3} \{ -\phi_{x1} + (1-\bar{c}_3) \cdot \beta_1 \bar{c} + \phi_{x2} + \bar{c}_3 \cdot \beta_2 \bar{c} + \frac{1}{2} \bar{p}_\omega \} \end{aligned}$$

Daarbij is nog een drietal afkortingen \bar{c}_1, \bar{c}_2 en \bar{c}_3 ingevoerd:

$$\bar{c}_1 = \frac{GJ_s}{EI} \frac{1}{s_\omega} = \frac{GJ_s}{EI} \frac{L^2}{\bar{c}^2} \frac{\bar{c} \sinh \bar{c} - 2 (\cosh \bar{c} - 1)}{2 (\cosh \bar{c} - 1)}; \quad \bar{c}_2 = \frac{\sinh \bar{c} - \bar{c}}{\bar{c} (\cosh \bar{c} - 1)}; \quad \bar{c}_3 = \frac{\cosh \bar{c} - 1}{\bar{c} \cdot \sinh \bar{c}}$$

4.2 De stijfheidsmatrix Q_a

De krachtvector $\vec{f} = \vec{f}(x)$ kan worden bepaald uit de matrixvergelijking:

$$\vec{f}(x) = S_{\epsilon\epsilon} \cdot \frac{d\vec{v}}{dx} + S_{\epsilon v} \cdot \nabla = \hat{C}_a(x) \cdot D_a^{-1} \cdot v_e$$

Daarbij is de matrix $\hat{C}_a(x)$ gelijk aan:

$$\hat{C}_a(x) = S_{\epsilon\epsilon} \cdot \frac{dD_a}{dx} + S_{\epsilon v} \cdot \hat{D}_a$$

dus:

$$\hat{C}_a(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot \frac{EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot \frac{EI}{L^3} & 6 \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot \frac{EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot \frac{EI}{L^3} & -6 \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ_s \cdot \cosh(\bar{\epsilon}\xi) & -GJ_s \cdot \sinh(\bar{\epsilon}\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

De krachtvector f_e kan bepaald worden zodra $f_1 = \vec{f}(x=0)$ en $f_2 = \vec{f}(x=L)$ bekend zijn. Schrijven wij:

$$f_e = Q_a \cdot v_e = (\bar{Q}_a - Q_a^*) \cdot v_e$$

dan volgt voor de beide matrices \bar{Q}_a en Q_a^* :

$$\bar{Q}_a = \begin{bmatrix} s_x \cdot \bar{Q}_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y \cdot \bar{Q}_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z \cdot \bar{Q}_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{s}_w \cdot \bar{Q}_{ww} \end{bmatrix}; \quad Q_a^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y \cdot b_{yy} \cdot Q_{yy}^* & \sqrt{s_y \cdot s_z} \cdot b_{yz} \cdot Q_{yz}^* & \sqrt{s_y \cdot s_w} \cdot b_{yw} \cdot Q_{yw}^* \\ 0 & \sqrt{s_y \cdot s_z} \cdot b_{yz} \cdot Q_{yz}^* & s_z \cdot b_{zz} \cdot Q_{zz}^* & \sqrt{s_z \cdot s_w} \cdot b_{zw} \cdot Q_{zw}^* \\ 0 & \sqrt{s_y \cdot s_w} \cdot b_{yw} \cdot Q_{yw}^* & \sqrt{s_z \cdot s_w} \cdot b_{zw} \cdot Q_{zw}^* & s_w \cdot b_{ww} \cdot Q_{ww}^* \end{bmatrix}$$

met:

$$\bar{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{Q}_{yy} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \cdot L & -1 & \frac{1}{2} \cdot L \\ \frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{3} \cdot L^2 & -\frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{6} \cdot L^2 \\ -1 & \frac{1}{2} \cdot L & 1 & -\frac{1}{2} \cdot L \\ \frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{6} \cdot L^2 & -\frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{3} \cdot L^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{Q}_{zz} = R \cdot \bar{Q}_{yy} \cdot R;$$

$$\bar{Q}_{ww} = \begin{bmatrix} 1 + \bar{c}_1 & -\frac{1}{2} \cdot L & -(1 + \bar{c}_1) & -\frac{1}{2} \cdot L \\ -\frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{2} (1 + \bar{c}_2) \cdot L^2 & \frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{2} \cdot \bar{c}_2 \cdot L^2 \\ -(1 + \bar{c}_1) & \frac{1}{2} \cdot L & 1 + \bar{c}_1 & \frac{1}{2} \cdot L \\ -\frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{2} \cdot \bar{c}_2 \cdot L^2 & \frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{2} (1 + \bar{c}_2) \cdot L^2 \end{bmatrix}; \quad Q_{yy}^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \cdot L & -1 & \frac{1}{2} \cdot L \\ \frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{4} \cdot L^2 & -\frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{4} \cdot L^2 \\ -1 & -\frac{1}{2} \cdot L & 1 & -\frac{1}{2} \cdot L \\ \frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{4} \cdot L^2 & -\frac{1}{2} \cdot L & \frac{1}{4} \cdot L^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_{zz}^* = Q_{z\omega}^* = \bar{Q}_{\omega z}^* = Q_{\omega\omega}^* = \bar{R} \cdot Q_{yy}^* \cdot R$$

$$Q_{yz}^* = Q_{zy}^* = Q_{y\omega}^* = \bar{Q}_{\omega y}^* = Q_{yy}^* \cdot R$$

R is een diagonaalmatrix van orde (4+4) waarvan de termen op de hoofddiagonaal afwisselend +1 en -1 zijn, dus: $R[i,j] = (-1)^{i+1} \cdot \delta_{ij}$ voor $i, j = 1, 2, 3, 4$.

4.3 Benadering voor de stijfheidsmatrix

Voor elk der deelmatrices Q_{cd}^* ($c, d=y, z, \omega$) geldt dat de componenten in absolute waarde gelijk zijn aan of kleiner zijn dan de absolute waarde van de overeenkomstige componenten van \bar{Q}_{cc} en \bar{Q}_{dd} . Uit $Q_a = \bar{Q}_a - Q_a^*$ volgt dan dat Q_a^* ten opzichte van \bar{Q}_a mag worden verwaarloosd als de componenten $b_{yy}, \dots, b_{\omega\omega}$ van B in absolute waarde veel kleiner zijn dan 1. Met de definitie van B volgens A.4.1 kan plausibel worden gemaakt dat dit slechts dan zal gelden als voldaan wordt aan:

$$s_y \cdot \lambda_{yy} \ll \frac{G}{L}; \quad s_z \cdot \lambda_{zz} \ll \frac{G}{L}; \quad s_\omega \cdot \lambda_{\omega\omega} \ll \frac{G}{L},$$

dus als voor de lengte L zal gelden:

$$L^2 \gg \max \left(\frac{12EI_{yy} \cdot \lambda_{yy}}{G}, \frac{12EI_{zz} \cdot \lambda_{zz}}{G}, \frac{12EI_{\omega\omega} \cdot \lambda_{\omega\omega}}{G} \cdot \frac{1}{\bar{c}_1} \cdot \frac{1}{\bar{c}_2} \cdot \frac{\cosh^2 \bar{\epsilon}}{\sinh^2 2(\cosh \bar{\epsilon} - 1)} \right)$$

Deze voorwaarde is zeker vervuld als L voldoet aan:

$$L^2 \gg \max \left(\frac{12EI_{yy} \cdot \lambda_{yy}}{G}, \frac{12EI_{zz} \cdot \lambda_{zz}}{G}, \frac{12EI_{\omega\omega} \cdot \lambda_{\omega\omega}}{G} \right)$$

Voor een meer gedetailleerde uitwerking van het bovenstaande verwijzen wij referentie [11] van hoofdstuk 3.

Als de matrix Q_a^* mag worden verwaarloosd ten opzichte van \bar{Q}_a dan zal voor de vektor van de krachtgrootheden in de eindvlakken, f_e , dus gelden:

$$f_e = \bar{Q}_a \cdot v_e$$

Uit de structuur van \bar{Q}_a volgt dat buiging en torsie dan ontkoppeld zijn, althans voor de hier beschouwde statische problemen.

\bar{Q}_a kan nog vereenvoudigd worden. Voor de gebruikelijke profielen geldt dat het dimensieloze kental $\lambda_{\omega\omega} J_s$ veel kleiner is dan 1. Maken wij hiervan gebruik door $\lambda_{\omega\omega} J_s$ ten opzichte van 1 te verwaarlozen, dan gaan de grootheden \bar{s}_ω , $\bar{\epsilon}$, \bar{c}_1 en \bar{c}_2 over in:

$$s_\omega = \bar{s}_\omega (\lambda_{\omega\omega} J_s = 0) = \frac{GJ_s}{c_1 \cdot L}; \quad \epsilon = \bar{\epsilon} (\lambda_{\omega\omega} J_s = 0) = \lambda \sqrt{\frac{GJ_s}{EI_{\omega\omega}}}$$

$$c_1 = \bar{c}_1 (\lambda_{\omega\omega} J_s = 0) = \frac{\epsilon \sinh \epsilon - 2(\cosh \epsilon - 1)}{2(\cosh \epsilon - 1)}; \quad c_2 = \bar{c}_2 (\lambda_{\omega\omega} J_s = 0) = \frac{\sinh \epsilon - \epsilon}{\epsilon(\cosh \epsilon - 1)}$$

A.5 De stijfheidsmatrix volgens de theorie van Vlasov

5.1 De verplaatsingsvektor \hat{D} als functie van de axiale coördinaat

De homogene, statische oplossing van de differentiaalvergelijkingen volgens Vlasov (zie 3.4.5) kan in matrixvorm gegeven worden door:

$$\hat{v}(x) = \hat{D}_V(x) \cdot a$$

Hierin is a de vektor van integratieconstanten en is $\hat{D}_V(x)$ gelijk aan:

$$\tilde{D}_V(x) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} & \frac{2}{k}\xi & \frac{3}{k}\xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k} & -\frac{2}{k}\xi & -\frac{3}{k}\xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \cosh(\epsilon\xi) & \sinh(\epsilon\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k} & -\frac{\epsilon}{k}\sinh(\epsilon\xi) & -\frac{\epsilon}{k}\cosh(\epsilon\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

De integratieconstanten kunnen weer worden uitgedrukt in de verplaatsingsvektor v_e :

$$v_e = D_V \cdot a \Rightarrow \hat{v}(x) = \tilde{D}_V(x) \cdot D_V^{-1} \cdot v_e$$

Voor de inverse D_V^{-1} blijkt te gelden:

$$D_V^{-1} = \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{tors} \end{bmatrix}; \quad A_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_{yy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -3 & -2k & 3 & -k \\ 2 & k & -2 & k \end{bmatrix}; \quad A_{zz} = A_{yy} \cdot R$$

$$A_{tors} = \frac{1}{2\epsilon \cdot c_1} \cdot \begin{bmatrix} (2c_1+1) \cdot \epsilon & -(1-c_2) \cdot \epsilon k & -\epsilon & -\epsilon c_2 k \\ -(2c_1+2) \cdot \epsilon & \epsilon k & (2c_1+2) \cdot \epsilon & \epsilon k \\ -\epsilon & (1-c_2) \cdot \epsilon k & \epsilon & \epsilon c_2 k \\ (2c_1+2) & -(2c_1+1) \cdot k & -(2c_1+2) & -k \end{bmatrix}$$

De diagonaalmatrix R en de dimensieloze grootheden ϵ , c_1 en c_2 zijn reeds eerder in deze appendix gedefinieerd.

5.2 De stijfheidmatrix volgens de Vlasov-theorie

Door substitutie van $\hat{v} = \tilde{D}_V \cdot a = \tilde{D}_V \cdot D_V^{-1} \cdot v_e$ in (3.4.23)....(3.4.29) volgt dat de krachtvektor $f = f(x)$ voor homogene, statische problemen wordt gegeven door:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{C}_V(x) \cdot a = \tilde{C}_V(x) \cdot D_V^{-1} \cdot v_e$$

met rechthoekige matrix \tilde{C}_V die gelijk is aan:

$$\tilde{C}_V(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{EF}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{k^3}yy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{k^3}yy & \frac{6EI}{k^2}yy \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{k^3}zz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI}{k^2}zz & \frac{6EI}{k^2}zz \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6J_s}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6J_s \cdot \cosh(\epsilon\xi) & -6J_s \cdot \sinh(\epsilon\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

De snedegrootheden in de eindvlakken $x=0$ en $x=l$ worden weer opgeborgen in de krachtvektor f_e . Voor die vektor zal gelden:

$$f_e = Q_v \cdot v_e$$

waarbij de stijfheidsmatrix Q_v wordt gegeven door:

$$Q_v = \begin{bmatrix} s_x \cdot Q_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y \cdot Q_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z \cdot Q_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_w \cdot Q_{ww} \end{bmatrix}$$

De matrices Q_{xx} , Q_{yy} en Q_{zz} zijn gelijk aan de reeds eerder in deze appendix geïntroduceerde matrices \bar{Q}_{xx} , \bar{Q}_{yy} en \bar{Q}_{zz} , terwijl Q_{ww} gelijk is aan:

$$Q_{ww} = \begin{bmatrix} 1+c_1 & -\frac{\epsilon}{2} & -(1+c_1) & -\frac{\epsilon}{2} \\ -\frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon^2}{2}(1-c_2) & \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon^2}{2} \cdot c_2 \\ -(1+c_1) & \frac{\epsilon}{2} & (1+c_1) & \frac{\epsilon}{2} \\ -\frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon^2}{2} \cdot c_2 & \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon^2}{2}(1-c_2) \end{bmatrix}; \quad s_w = \frac{\epsilon^2}{c_1} \frac{EI_{ww}}{l^3} = \frac{GJ_s}{l} \frac{1}{c_1}$$

5.3 Reeksontwikkeling voor de componenten van Q_{ww}

Voor kleine waarden van ϵ ($\epsilon \ll 1$) levert de berekening van de componenten van Q_{ww} numerieke moeilijkheden op, die opgegeven kunnen worden door de formules voor die componenten te ontwikkelen in reeksen naar ϵ . Deze reeksen zijn overigens geldig voor alle waarden van ϵ .

De reeksen voor elk van de componenten van Q_{ww} kunnen eenvoudig bepaald worden zodra de reeksontwikkeling van de konstanten c_1 en c_2 bekend is. Hiervoor geldt:

$$c_1 = \frac{\epsilon^2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot F_n(\epsilon, 4)\}; \quad c_2 = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{F_n(\epsilon, 3)\}$$

met:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon, 2); \quad F_n(\epsilon, j) = \frac{2n}{(2n+j)!}; \quad n, j \text{ geheel}; \quad j \geq 0$$

Ook voor zeer grote waarden van ϵ ($\epsilon \gg 1$) kunnen numerieke moeilijkheden optreden. Deze kunnen worden overvallen door gebruik te maken van $k = e^{-\epsilon}$, $\sinh \epsilon = \frac{1}{2k}(1-k^2)$ en $\cosh \epsilon = \frac{1}{2k}(1+k^2)$. De vergelijkingen voor c_1 en c_2 gaan daarmee over in:

$$c_1 = \frac{\epsilon}{2} \frac{1+k}{1-k} - 1; \quad c_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{1+k}{1-k} - \frac{2k}{(1-k)^2}$$

A.6 De stijfheidsmatrix bij een benaderend verplaatsingsveld

6.1 Het benaderende verplaatsingsveld $\bar{v}(x) = \bar{v}_b(x)$

Voor de verplaatsingsvektor \bar{v} als functie van de axiale koördinaat nemen wij:

$$\bar{v}(x) = \bar{v}_b(x) = \bar{D}_b(x) \cdot a$$

met een matrix $\bar{D}_b(x)$ die gelijk is aan:

$$\bar{D}_b = \begin{bmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} & \frac{2}{k} \cdot \xi & \frac{3}{k} \cdot \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \cdot \xi & -\frac{3}{k} \cdot \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \cdot \xi & -\frac{3}{k} \cdot \xi^2 \end{bmatrix}$$

waarbij ξ weer de dimensieloze axiale coördinaat $\xi = \frac{x}{l}$ is. Op dezelfde wijze als in A.5 kan worden afgeleid:

$$\bar{v}_b(x) = \bar{D}_b(x) \cdot D_b^{-1} \cdot v_e$$

D_b^{-1} kan verkregen worden uit D_v^{-1} als in D_v^{-1} de deelmatrix $A_{\omega\omega}$ wordt vervangen door A_{zz} .

6.2 De stijfheidsmatrix Q_b

In de theorie volgens Vlasov gelden de volgende relaties voor de componenten van de verplaatsingsvektor:

$$u'_{yd} = \phi_z \quad ; \quad u'_{zd} = -\phi'_y \quad ; \quad \phi'_x = -\beta$$

Substitutie hiervan in de uitdrukking voor de elastische energie U volgens A.3 levert dat U in deze theorie wordt gegeven door:

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^x \frac{v}{dx} \bar{s}_{EE} \frac{dv}{dx} dx$$

waarbij de vierkante matrix \bar{s}_{EE} uit s_{EE} volgt door $X_{yy}, X_{yz}, \dots, X_{\omega\omega}$ gelijk aan nul te nemen. Met het aangenomen verplaatsingsveld $\bar{v}(x) = \bar{v}_b(x) = D_b(x) \cdot D_b^{-1} \cdot v_e$ volgt:

$$U = \frac{1}{2} v_e^T Q_b \cdot v_e$$

Hierin is Q_b de stijfheidsmatrix behorende bij het benaderende verplaatsingsveld. De structuur van deze matrix is dezelfde als die van de stijfheidsmatrix Q_v volgens de Vlasov-theorie. Partitioneren wij Q_b op dezelfde wijze als Q_v en voorzien wij de deelmatrices in Q_b van een bovenindex b dan zal uiteraard gelden:

$$Q_{xx}^b = Q_{xx} \quad ; \quad Q_{yy}^b = Q_{yy} \quad ; \quad Q_{zz}^b = Q_{zz}$$

Na enig rekenwerk volgt dat de deelmatrix $Q_{\omega\omega}^b$ gelijk is aan:

$$Q_{\omega\omega}^b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \cdot k & -1 & \frac{1}{2} \cdot k \\ \frac{1}{2} \cdot k & \frac{1}{3} \cdot k^2 & \frac{1}{2} \cdot k & \frac{1}{6} \cdot k^2 \\ -1 & \frac{1}{2} \cdot k & 1 & \frac{1}{2} \cdot k \\ \frac{1}{2} \cdot k & \frac{1}{6} \cdot k^2 & \frac{1}{2} \cdot k & \frac{1}{3} \cdot k^2 \end{bmatrix} + c^2 \cdot \frac{1}{360} \begin{bmatrix} 36 & -3 \cdot k & -36 & -3 \cdot k \\ -3 \cdot k & 4 \cdot k^2 & 3 \cdot k & -k^2 \\ -36 & 3 \cdot k & 36 & 3 \cdot k \\ -3 \cdot k & -k^2 & 3 \cdot k & 4 \cdot k^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad s_{\omega\omega}^b = \frac{12E I_{\omega\omega}}{l^3}$$

A.7 De relatieve fout in de componenten van $s_{\omega}^b \cdot Q_{\omega\omega}^b$ ten opzichte van $s_{\omega} \cdot Q_{\omega\omega}$

Wij voeren een matrix R_Q in, waarvan de componenten gelijk zijn aan de relatieve fout van de componenten van $s_{\omega}^b \cdot Q_{\omega\omega}^b$ ten opzichte van de overeenkomstige componenten van $s_{\omega} \cdot Q_{\omega\omega}$. In formulevorm:

$$R_Q[i,j] = \frac{s_{\omega} \cdot Q_{\omega\omega}[i,j] - s_{\omega}^b \cdot Q_{\omega\omega}^b[i,j]}{s_{\omega} \cdot Q_{\omega\omega}[i,j]} \quad (i,j = 1,2,3,4)$$

Na enig rekenwerk blijkt te gelden:

$$R_Q = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & -r_1 & r_2 \\ r_2 & r_3 & -r_2 & r_4 \\ -r_1 & -r_2 & r_1 & -r_2 \\ r_2 & r_4 & -r_2 & r_3 \end{bmatrix}$$

waarbij de konstanten r_1, r_2, r_3 en r_4 alleen afhangen van ϵ . Voor iedere waarde van ϵ geldt:

$$r_1 = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(2n+3) \cdot F_n(\epsilon, 8)}{\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon, 1)} \cdot \epsilon^4; \quad r_2 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(2n+3) \cdot F_n(\epsilon, 8)}{\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon, 2)} \cdot \epsilon^4$$

$$r_3 = -\frac{4}{15} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(4n+11) \cdot F_n(\epsilon, 8)}{\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) \cdot F_n(\epsilon, 3)} \cdot \epsilon^4; \quad r_4 = +\frac{2}{15} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(2n+13) \cdot F_n(\epsilon, 8)}{\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon, 3)} \cdot \epsilon^4$$

In fig. A.3 zijn r_1, \dots, r_4 weergegeven als functie van ϵ . Daaruit volgt bijvoorbeeld dat de maximale relatieve afwijking steeds kleiner is dan 0,05% als $\epsilon < 1$.

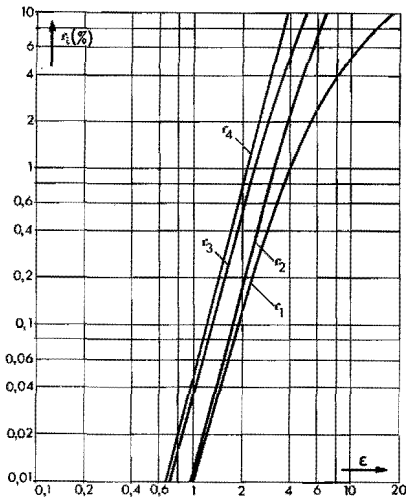


Fig. A.3

De relatieve afwijkingen r_1, r_2, r_3 en r_4

Berekening van de massamatrices voor dunwandige balken met open doorsnede

B.1 Definities en afpepraken

1.1 Voor de verplaatsingsvectoren $\bar{v}(x,t)$ en $v_e(t)$ gelden dezelfde definities als in appendix A.

1.2 De specifieke massamatrix.

De potentiële energie van de traagheidskrachten, U_k , is gelijk aan:

$$U_k = \int_{x=0}^L \bar{v} \cdot \bar{T}_m \cdot \ddot{v} dx$$

T_m is de z.g. specifieke massamatrix, die wij schrijven als de som van een tweetal matrices, n.l. \bar{T}_m en T_m^* . Met het hoofdkoördinatensysteem uit 3.2.6 en de in 3.2.4 voor dunwandige balken geïntroduceerde benaderingen volgt voor deze matrices:

$$\bar{T}_m = s_m \cdot \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & 0 & z_d \cdot F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 & -y_d \cdot F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_d \cdot F & 0 & -y_d \cdot F & 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_m^* = s_m \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{\omega\omega} \end{bmatrix}$$

Hierin is s_m de soortelijke massa en I_d het polaire oppervlaktetraagheidsmoment ten opzichte van het dwarskrachtenmiddelpunt:

$$I_d = I_{yy} + I_{zz} + (y_d^2 + z_d^2) \cdot F$$

De overige grootheden zijn reeds gedefinieerd in appendix A.

Voor de potentiële energie van de traagheidskrachten kan dus geschreven worden:

$$U_k = \bar{U}_k + U_k^* ; \quad \bar{U}_k = \int_{x=0}^L \bar{v} \cdot \bar{T}_m \cdot \ddot{v} dx ; \quad U_k^* = \int_{x=0}^L \bar{v} \cdot T_m^* \cdot \ddot{v} dx$$

Geven wij de verplaatsingen van het zwaartepunt van doorsnede x aan met u_{x0} , $u_{y0} = u_{yd} + z_d \cdot \phi_x$ en $u_{z0} = u_{zd} - y_d \cdot \phi_x$, dan volgt dat \bar{U}_k en U_k^* gelijk zijn aan:

$$\bar{U}_k = \int_{x=0}^L \left\{ s_m \cdot F (u_{x0} \cdot \ddot{u}_{x0} + u_{y0} \cdot \ddot{u}_{y0} + u_{z0} \cdot \ddot{u}_{z0}) + s_m (I_{yy} + I_{zz}) \cdot \phi_x \cdot \ddot{\phi}_x \right\} dx$$

$$U_k^* = \int_{x=0}^L s_m (I_{yy} \cdot \phi_z \cdot \ddot{\phi}_z + I_{zz} \cdot \phi_y \cdot \ddot{\phi}_y + I_{\omega\omega} \cdot \ddot{\theta} \cdot \ddot{\theta}) dx$$

Hieruit blijkt dat \bar{U}_k de potentiële energie van de traagheidskrachten is als de werkelijke massaverdeling van de balk wordt geschematiseerd tot een massa per axiale lengte-eenheid en een polair massa-traagheidsmoment per axiale lengte-eenheid, geconcentreerd in de as van de balk.

2.2 De massamatrix voor het verplaatsingsveld volgens de theorie van Vlasov

2.1 Het verplaatsingsveld als functie van de axiale coördinaat

Het verloop van $\bar{v}(x,t)$ als functie van x wordt gegeven door de homogene, statische oplossing volgens de theorie van Vlasov:

$$\bar{v}(x,t) = \bar{D}_V(x) \cdot D_V^{-1} \cdot v_e(t)$$

De matrices $\bar{D}_V(x)$ en D_V^{-1} zijn reeds gedefinieerd in appendix A.

2.2 Berekening van de massamatrix M_V

Met dit verplaatsingsveld volgt dat voor U_k geschreven kan worden:

$$U_k = v_e^T \cdot M_V \cdot \ddot{v}_e$$

waarbij M_V de gezochte massamatrix is. Evenals T_m schrijven wij M_V als de som van een tweetal matrices, te weten \bar{M}_V en M_V^* , die gedefinieerd zijn als:

$$\bar{M}_V = (D_V^{-1})^{-1} \cdot \int_{x=0}^{\xi} \bar{D}_V(x) \cdot \bar{T}_m \cdot \bar{D}_V(x) \cdot dx \cdot D_V^{-1}; \quad M_V^* = (D_V^{-1})^{-1} \cdot \int_{x=0}^{\xi} \bar{D}_V(x) \cdot T_m^* \cdot \bar{D}_V(x) \cdot dx \cdot D_V^{-1}$$

Uit de structuur van $D_V(x)$ en D_V^{-1} volgt dat \bar{M}_V en M_V^* van de volgende vorm zullen zijn:

$$\bar{M}_V = \begin{bmatrix} m \cdot \bar{M}_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \bar{M}_{yy} & 0 & z_d \cdot m \cdot \bar{M}_{yw} \\ 0 & 0 & m \cdot \bar{M}_{zz} & -y_d \cdot m \cdot \bar{M}_{z\omega} \\ 0 & z_d \cdot m \cdot \bar{M}_{yw} & -y_d \cdot m \cdot \bar{M}_{z\omega} & I_p \cdot \bar{M}_{\omega\omega} \end{bmatrix}; \quad M_V^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot i_y^2 \cdot M_{yy}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot I_z^2 \cdot M_{zz}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \cdot I_\omega^2 \cdot M_{\omega\omega}^* \end{bmatrix}$$

Hierin zijn m en I_p de totale massa en het totale massastraalheidsmoment om de as (evenwijdig aan de as van de balk) door het dwarskrachtenmiddelpunt. Er geldt:

$$m = s_m \cdot F \cdot \xi; \quad I_p = s_m \cdot I_d \cdot \xi = \frac{m}{F} \cdot \{ I_{yy} + I_{zz} + (y_d^2 + z_d^2) \cdot F \}$$

De in de definitievergelijking van M_V^* optredende parameters i_y , I_z en i_ω hangen alleen af van de geometrie:

$$i_y^2 = \frac{I_{yy}}{F \cdot \xi^2}; \quad I_z^2 = \frac{I_{zz}}{F \cdot \xi^2}; \quad i_\omega^2 = \frac{I_{\omega\omega}}{I_d \cdot \xi^2}$$

Na enig rekenwerk volgt dat de deelmatrices \bar{M}_{xx} , \bar{M}_{yy} , \bar{M}_{yw} , \bar{M}_{zz} , $\bar{M}_{z\omega}$ en $\bar{M}_{\omega\omega}$ worden gegeven door:

$$\bar{M}_{xx} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{M}_{yy} = \frac{1}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & 22 \cdot \xi & 54 & -13 \cdot \xi \\ 22 \cdot \xi & 4 \cdot \xi^2 & 13 \cdot \xi & -3 \cdot \xi^2 \\ 54 & 13 \cdot \xi & 156 & -22 \cdot \xi \\ -13 \cdot \xi & -3 \cdot \xi^2 & -22 \cdot \xi & 4 \cdot \xi^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_{yw} = \frac{1}{60} \cdot \begin{bmatrix} (2 \cdot c_1 + 21) & -(c_1 + c_2) \cdot \xi & -(2c_1 - 9) & -(c_1 - c_2) \cdot \xi \\ -(2 \cdot c_3 - 3) \cdot \xi & (c_3 + c_4) \cdot \xi^2 & (2 \cdot c_3 + 2) \cdot \xi & (c_3 - c_4) \cdot \xi^2 \\ -(2 \cdot c_1 - 9) & (c_1 - c_2) \cdot \xi & (2 \cdot c_1 + 21) & (c_1 + c_2) \cdot \xi \\ -(2 \cdot c_3 + 2) \cdot \xi & (c_3 - c_4) \cdot \xi^2 & (2 \cdot c_3 - 3) \cdot \xi & (c_3 + c_4) \cdot \xi^2 \end{bmatrix}$$

c_1, c_2, c_3 en c_4 worden geheel bepaald door de reeds in appendix A ingevoerde parameter c . Met:

$$c = e^4 \{ c \cdot \sinh \epsilon - 2(\cosh \epsilon - 1) \}$$

kan voor deze konstanten geschreven worden:

$$c_1 = \frac{1}{c} \{ (360 - 30 \cdot \epsilon^2) \cdot \epsilon \cdot \sinh \epsilon - (720 - 6 \cdot \epsilon^4) \cdot (\cosh \epsilon - 1) \}$$

$$c_2 = \frac{15}{\epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1)} \cdot \{ \epsilon \cdot \sinh \epsilon - 2(\cosh \epsilon - 1) \} = \frac{15 \cdot c}{\epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1)}$$

$$c_3 = \frac{1}{2 \cdot c} \cdot \{ -360 \cdot \epsilon \cdot \sinh \epsilon + (720 - 60 \cdot \epsilon^2 + \epsilon^4) \cdot (\cosh \epsilon - 1) \}$$

$$c_4 = \frac{1}{2 \cdot \epsilon^4 \cdot (\cosh \epsilon - 1)} \cdot \{ (60 - 5 \epsilon^2) \epsilon \cdot \sinh \epsilon - 120 \cdot (\cosh \epsilon - 1) \}$$

De matrices \bar{M}_{zz} en $\bar{M}_{2\omega}$ kunnen eenvoudig worden afgeleid uit \bar{M}_{yy} en $\bar{M}_{y\omega}$. Als R weer de diagonaalmatrix uit appendix A is (dus $R[i, j] = (-1)^{i+1} \cdot \delta_{ij}$ voor $i, j = 1, 2, 3, 4$) dan zal gelden:

$$\bar{M}_{zz} = R \cdot \bar{M}_{yy} \cdot R \quad ; \quad \bar{M}_{2\omega} = R \cdot \bar{M}_{y\omega}$$

Voor de deelmatrix $\bar{M}_{\omega\omega}$ wordt gevonden:

$$\bar{M}_{\omega\omega} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} (1+d_1) & (d_2+d_3) \cdot \epsilon & (1-d_1) & -(d_2-d_3) \cdot \epsilon \\ (d_2+d_3) \cdot \epsilon & (d_4+d_5) \cdot \epsilon^2 & (d_2-d_3) \cdot \epsilon & -(d_4-d_5) \cdot \epsilon^2 \\ (1-d_1) & (d_2-d_3) \cdot \epsilon & (1+d_1) & -(d_2+d_3) \cdot \epsilon \\ -(d_2-d_3) \cdot \epsilon & -(d_4-d_5) \cdot \epsilon^2 & -(d_2+d_3) \cdot \epsilon & (d_4+d_5) \cdot \epsilon^2 \end{bmatrix}$$

waarbij de konstanten d_1, d_2, d_3, d_4 en d_5 worden gegeven door:

$$d_1 = \frac{1}{\epsilon d} \{ 60 \cdot \sinh \epsilon - (24 - \epsilon^2) \cdot \epsilon \cdot (\cosh \epsilon - 1) - 60 \cdot \epsilon + 2 \cdot \epsilon^3 \}$$

$$d_2 = \frac{-1}{\epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1)} \{ \epsilon \cdot \sinh \epsilon - 2(\cosh \epsilon - 1) \} = -\frac{c_2}{15}$$

$$d_3 = \frac{-1}{\epsilon^2 \cdot d} \{ (6 + \epsilon^2) \cdot \epsilon \cdot \sinh \epsilon + (24 - 6 \epsilon^2) \cdot (\cosh \epsilon - 1) - 18 \cdot \epsilon^2 \}$$

$$d_4 = \frac{-1}{\epsilon^3 \cdot (\cosh \epsilon - 1)} \{ 3 \cdot \sinh \epsilon - \epsilon \cdot (\cosh \epsilon - 1) - 3 \epsilon \}$$

$$d_5 = \frac{1}{\epsilon^2 \cdot d} \{ -9 \cdot \epsilon \cdot \sinh \epsilon + (24 + \epsilon^2) \cdot (\cosh \epsilon - 1) - 3 \epsilon^2 \}$$

met: $d = 3 \{ (4 + \epsilon^2) (\cosh \epsilon - 1) - 4 \epsilon \cdot \sinh \epsilon + 2 \cdot \epsilon^2 \}$

De deelmatrices M_{yy}^* , $M_{zz}^* = R \cdot M_{yy}^* \cdot R$ en $M_{\omega\omega}^*$ in de definitievergelijking van M_V^* volgen uit:

$$M_{yy}^* = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3 \cdot \epsilon & -36 & 3 \cdot \epsilon \\ 3 \cdot \epsilon & 4 \cdot \epsilon^2 & -3 \cdot \epsilon & -\epsilon^2 \\ -36 & -3 \cdot \epsilon & 36 & -3 \cdot \epsilon \\ 3 \cdot \epsilon & -\epsilon^2 & -3 \cdot \epsilon & 4 \cdot \epsilon^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad M_{\omega\omega}^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e_1 & 2 \cdot e_2 \cdot \epsilon & e_1 & 2 \cdot e_2 \cdot \epsilon \\ 2e_2 \cdot \epsilon & (e_3 - e_2) \cdot \epsilon^2 & -2e_2 \cdot \epsilon & -(e_3 + e_2) \cdot \epsilon^2 \\ -e_1 & -2 \cdot e_2 \cdot \epsilon & e_1 & -2 \cdot e_2 \cdot \epsilon \\ 2e_2 \cdot \epsilon & -(e_3 + e_2) \cdot \epsilon^2 & -2e_2 \cdot \epsilon & (e_3 - e_2) \cdot \epsilon^2 \end{bmatrix}$$

waarbij de konstanten e_1, e_2 en e_3 zijn gedefinieerd als:

$$e_1 = \frac{12 \cdot c}{d} \{ c (\cosh \epsilon - 1) - 3(\sinh \epsilon - \epsilon) \} \quad ; \quad e_2 = \frac{3}{d} \{ 4(\cosh \epsilon - 1) - \epsilon \cdot \sinh \epsilon - \epsilon \}$$

$$e_3 = \frac{1}{(\cosh \epsilon - 1)} (\sinh \epsilon - \epsilon)$$

2.3 Reeksontwikkeling voor de componenten van \bar{M}_y en M_y^*

Bij de berekening van de componenten van $\bar{M}_{y\omega}$, $\bar{M}_{z\omega}$, $\bar{M}_{\omega\omega}$ en $M_{\omega\omega}^*$ treden voor kleine waarden van ϵ numerieke moeilijkheden op. Deze moeilijkheden kunnen voorkomen worden door de konstanten $c_1, \dots, c_4, d_1, \dots, d_5$ en e_1, \dots, e_3 in reeksen te ontwikkelen en bij de berekening deze reeksen te hanteren in plaats van de eerder gegeven uitdrukkingen. Voor die reeksen geldt:

$$c_1 = \frac{24}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot (n+3) \cdot (n+5) \cdot (2n+3) \cdot F_n(\epsilon, 8)\}; \quad c_2 = \frac{30}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot F_n(\epsilon, 4)\} = 30 \cdot \frac{a_2}{a_1}$$

$$c_3 = -\frac{1}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(n+8)(2n+3)(2n+5) \cdot F_n(\epsilon, 8)\}; \quad c_4 = -\frac{10}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot (n+2)(2n+9) \cdot F_n(\epsilon, 6)\}$$

$$d_1 = \frac{1}{3a_3} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(4n^2+32n+51) \cdot F_n(\epsilon, 7)\}; \quad d_2 = -\frac{c_2}{15}; \quad d_3 = -\frac{2}{3a_3} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(n+2)(2n+9) \cdot F_n(\epsilon, 8)\}$$

$$d_4 = \frac{2}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot F_n(\epsilon, 5)\}; \quad d_5 = \frac{2}{3a_3} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(n+2) \cdot F_n(\epsilon, 8)\}$$

$$e_1 = \frac{4}{a_3} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot F_n(\epsilon, 5)\} = 2 \cdot \frac{a_1}{a_3} \cdot d_4; \quad e_2 = -\frac{1}{a_3} \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot F_n(\epsilon, 6)\}; \quad e_3 = \frac{1}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon, 3)$$

met:

$$a_1 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon, 2); \quad a_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1) \cdot F_n(\epsilon, 4)\}; \quad a_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(2n+5) \cdot F_n(\epsilon, 6)\}$$

De functie $F_n(\epsilon, j)$ is gedefinieerd in appendix A.5.3.

De numerieke moeilijkheden, die voor zeer grote waarden van ϵ kunnen optreden kunnen worden opgelost op dezelfde wijze als in appendix A.5.3 is aangegeven voor de componenten van Q_v . De betreffende uitdrukkingen voor $c_1, \dots, c_4, d_1, \dots, d_5$ en e_1, \dots, e_3 kunnen eenvoudig afgeleid worden.

2.4 Vereenvoudiging van de massamatrix

De componenten van de deelmatrices M_{yy}^* , M_{zz}^* en $M_{\omega\omega}^*$ zijn kleiner dan of van dezelfde orde van grootte als de overeenkomstige componenten van respectievelijk \bar{M}_{yy} , \bar{M}_{zz} en $\bar{M}_{\omega\omega}$.

In appendix A is plausibel gemaakt dat de theorie van Vlasov alleen dan tot betrouwbare resultaten zal leiden als de geometrie van de balk aan bepaalde eisen voldoet. Deze eisen impliceren dat de parameters i_y , i_ω en i_z in de definitieve vergelijking van M_v^* voldoen aan $i_y \ll 1$, $i_z \ll 1$ en $i_\omega \ll 1$. Dit betekent echter dat voor alle vektoren $v_e \neq 0$ de term $v_e^T \cdot M_v^* \cdot v_e$ veel kleiner zal zijn dan de term $v_e^T \cdot \bar{M}_v \cdot v_e$. Voor U_k zal dus in goede benadering gelden:

$$U_k = \frac{1}{2} v_e^T \cdot \bar{M}_v \cdot v_e$$

B.3 De massamatrix bij een benaderend verplaatsingsveld

3.1 Het verplaatsingsveld $\delta(x, t) = \delta_b(x, t)$

Voor de verplaatsingsvektor \hat{v} als functie van x nemen wij hetzelfde verloop als in appendix A.6:

$$\hat{v}(x, t) = \hat{v}_b(x, t) = \hat{D}_b(x) \cdot D_b^{-1} \cdot v_b(t)$$

Voor de matrices $\hat{D}_b(x)$ en D_b^{-1} kan derhalve verwezen worden naar appendix A.

3.2 De massamatrix M_b

De massamatrix M_b , behorende bij dit verplaatsingsveld, kan berekend worden uit:

$$M_b = \bar{M}_b + M_b^*; \quad \bar{M}_b = \int_{x=0}^L \hat{v}_b(x) \cdot \bar{T}_m \cdot \hat{v}_b(x) dx \cdot D_b^{-1}; \quad M_b^* = D_b^{-1} \cdot \int_{x=0}^L \hat{D}_b(x) \cdot T_m^* \cdot \hat{D}_b(x) dx \cdot D_b^{-1}$$

Uitwerking van deze relaties levert dat de matrices \bar{M}_b en M_b^* gelijk zullen zijn aan:

$$\bar{M}_b = \begin{bmatrix} m \cdot \bar{M}_{xx}^b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \bar{M}_{yy}^b & 0 & z_d \cdot m \cdot \bar{M}_{yz}^b \\ 0 & 0 & m \cdot \bar{M}_{zz}^b & -y_d \cdot m \cdot \bar{M}_{zw}^b \\ 0 & z_d \cdot m \cdot \bar{M}_{yw}^b & -y_d \cdot m \cdot \bar{M}_{zw}^b & I_p \cdot \bar{M}_{\omega\omega}^b \end{bmatrix}; M_b^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 \cdot y \cdot m \cdot M_{yy}^{*b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \cdot m \cdot M_{zz}^{*b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i^2 \cdot I_p \cdot M_{\omega\omega}^{*b} \end{bmatrix}$$

waarbij voor de deelmatrices zal gelden:

$$\bar{M}_{xx}^b = \bar{M}_{xx}; \bar{M}_{yy}^b = \bar{M}_{yy}; \bar{M}_{zz}^b = \bar{M}_{\omega\omega}^b = \bar{M}_{zz}^b = R \cdot \bar{M}_{yy} \cdot R; \bar{M}_{yw}^b = \bar{M}_{yy} \cdot R$$

$$M_{yy}^{*b} = M_{yy}^*; M_{zz}^{*b} = M_{\omega\omega}^{*b} = M_{zz}^*$$

In overeenstemming met B.2.4 kan worden aangetoond dat voor gevallen, waarin berekeningen met dit element tot bruikbare resultaten zullen leiden, de term $\sqrt{e} \cdot M_{be}^{*b} \cdot \ddot{v}_e$ klein zal zijn ten opzichte van $\sqrt{e} \cdot \bar{M}_b \cdot \ddot{v}_e$, zodat voor U_k gesteld kan worden:

$$U_k = \sqrt{e} \cdot \bar{M}_b \cdot \ddot{v}_e$$

B.4 De relatieve fout van de componenten van M_b ten opzichte van de componenten van M_b

De deelmatrices $\bar{M}_{a\omega}^b$ ($a=y,z,\omega$) en $M_{\omega\omega}^{*b}$ verschillen van de overeenkomstige matrices $\bar{M}_{a\omega}$ en $M_{\omega\omega}^*$ en voor iedere component ervan kan de relatieve afwijking ten opzichte van de overeenkomstige component van $\bar{M}_{a\omega}$, respectievelijk $M_{\omega\omega}^*$ bepaald worden. In overeenstemming met de werkwijze in appendix A bergan wij die afwijkingen op in de matrices $\bar{R}_{a\omega}$, respectievelijk $R_{\omega\omega}^*$. Bij de berekening ervan volgt dat $\bar{R}_{z\omega}$ gelijk is aan \bar{R}_{yw} en dat $\bar{R}_{y\omega}$, $\bar{R}_{\omega\omega}$ en $R_{\omega\omega}^*$ van de volgende vorm zijn:

$$\bar{R}_{y\omega} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_5 & r_6 & r_7 & r_8 \\ -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ r_5 & r_6 & r_7 & r_8 \end{bmatrix}; \bar{R}_{z\omega} = \begin{bmatrix} r_9 & r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{10} & r_{13} & r_{12} & r_{14} \\ r_{11} & r_{12} & r_9 & -r_{10} \\ r_{12} & r_{14} & r_{10} & r_{13} \end{bmatrix}; R_{\omega\omega}^* = \begin{bmatrix} r_{15} & r_{16} & -r_{15} & r_{16} \\ r_{16} & r_{17} & -r_{16} & r_{18} \\ -r_{15} & -r_{16} & r_{15} & -r_{16} \\ r_{16} & r_{18} & -r_{16} & r_{17} \end{bmatrix}$$

De functies r_1, r_2, \dots, r_{18} hangen alleen af van de parameter ϵ . De waarde ervan kan worden afgelezen uit de onderstaande grafieken.

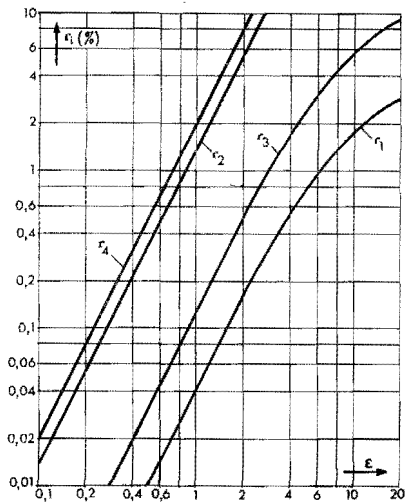


Fig. B.1
De relatieve afwijkingen r_1 , r_2 , r_3 en r_4

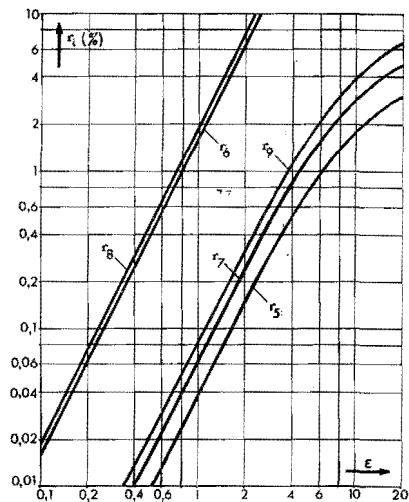


Fig. B.2
De relatieve afwijkingen r_5 , r_6 , r_7 , r_8 en r_9

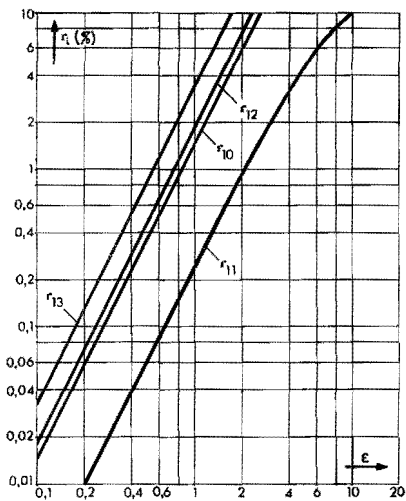


Fig. B.3
De relatieve afwijkingen r_{10} , r_{11} , r_{12} en r_{13}

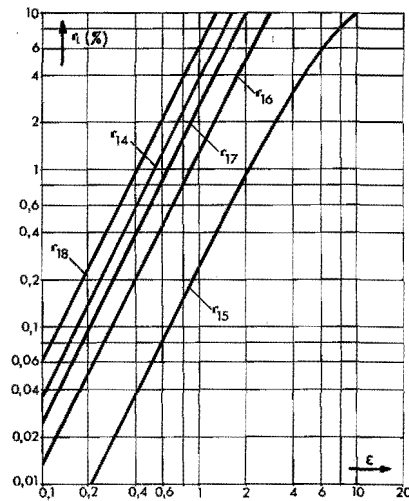


Fig. B.4
De relatieve afwijkingen r_{14} , r_{15} , r_{16} , r_{17} en r_{18}

Berekening van de kinematisch consistente krachtvectoren van de verdeelde belasting

C.1 Definities

1.1 Voor de verplaatsingsvectoren gelden dezelfde definities als in appendix A.

1.2 De potentiële energie van de belasting op het cilindrische oppervlak.

De potentiële energie van de belasting op het cilindrische oppervlak van een element, P_c , is:

$$P_c = - \int_{x=0}^l \bar{v} \cdot \bar{f}_c dx$$

De componenten van de vektor \bar{f}_c zijn krachtgrootheden per lengte-eenheid. Met:

$$\bar{f} = [k_x \quad k_y \quad m_z \quad k_z \quad m_y \quad m_x \quad b]$$

gelden volgens 3.2.5 de volgende vergelijkingen voor deze componenten:

$$k_x = \int_0^l q_x \cdot ds \quad ; \quad k_y = \int_0^l (q_s \cdot \frac{dy_0}{ds} - q_r \cdot \frac{dz_0}{ds}) ds \quad ; \quad k_z = \int_0^l (q_s \cdot \frac{dz_0}{ds} + q_r \cdot \frac{dy_0}{ds}) ds$$

$$m_x = \int_0^l (q_s \cdot \rho + q_r \cdot g) ds \quad ; \quad m_y = \int_0^l q_x \cdot z_0 \cdot ds \quad ; \quad m_z = - \int_0^l q_x \cdot y_0 \cdot ds \quad ; \quad b = \int_0^l q_x \cdot \omega \cdot ds$$

Voor de betekenis van de grootheden $y_0(s)$, $z_0(s)$, $\omega(s)$, $\rho(s)$ en $g(s)$ verwijzen wij naar fig. 3.1.

C.2. Kinematisch consistente krachtvektor bij het verplaatsingsveld volgens de theorie van Vlasov

Substitutie van $\bar{v} = \bar{D}_v(x) \cdot D_v^{-1} \cdot v_e$ in de relatie voor P_c levert:

$$P_c = - \bar{v}_e \cdot f_c \quad ; \quad f_c = D_v^{-1} \cdot \int_{x=0}^l \bar{D}_v(x) \cdot dx$$

Hierin is f_c de kinematisch consistente krachtvektor der verdeelde belasting. Voor \bar{D}_v en D_v^{-1} wordt verwezen naar appendix A.

Beperken wij ons tot het geval dat alle componenten van $\bar{f}_c(x)$ op dezelfde wijze van x afhangen, dus:

$$\bar{f}_c(x) = g(x) \cdot a$$

met bekende functie $g = g(x)$ en konstante vektor a , dan volgt:

$$f_c = F_v \cdot a \quad ; \quad F_v = D_v^{-1} \cdot \int_{x=0}^l \bar{D}_v(x) \cdot g(x) \cdot dx,$$

waarbij F_v een matrix is van de volgende vorm:

$$\bar{F}_v = \begin{bmatrix} c_{1,\ell} & c_{2,\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,\ell} & c_{4,\ell}^2 & c_{5,\ell} & c_{6,\ell}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_7 & c_{8,\ell} & -c_7 & c_{9,\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,\ell} & -c_{4,\ell}^2 & c_{5,\ell} & -c_{6,\ell}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_7 & c_{8,\ell} & c_7 & c_{9,\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10,\ell} & c_{11,\ell}^2 & c_{12,\ell} & c_{13,\ell}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{15,\ell} & -c_{14} & c_{16,\ell} \end{bmatrix}$$

Wij beschouwen hier een viertal speciale belastingsituaties, te weten $g(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{\ell}$, $g(x) = \cos(2\pi\frac{x}{\ell})$ en $g(x) = \sin(2\pi\frac{x}{\ell})$. Voor elk van die situaties zullen uitdrukkingen voor c_1, c_2, \dots, c_{16} worden afgeleid.

3.1 Konstante oppervlakte-belasting

Als $g(x) = 1$, dus als $\hat{f}_c(x) = a$ dan geldt:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}; \quad c_4 = \frac{1}{12}; \quad c_5 = \frac{1}{2}; \quad c_6 = -\frac{1}{12}; \quad c_7 = -1; \quad c_8 = c_9 = 0; \quad c_{10} = \frac{1}{2};$$

$$c_{11} = \frac{1}{2\epsilon^2 \cdot D} \{4\epsilon \sin\epsilon - (4 + \epsilon^2) \cdot (\cos\epsilon - 1) - 2\epsilon^2\}; \quad c_{12} = \frac{1}{2}; \quad c_{13} = -c_{11}; \quad c_{14} = 1; \quad c_{15} = c_{16} = 0$$

waarbij D wordt gegeven door : $D = \epsilon \sin\epsilon - 2 \cdot (\cos\epsilon - 1)$.

3.2 Lineair veranderende oppervlakte-belasting

Als $g(x) = \frac{x}{\ell}$, dus als $\hat{f}_c(x) = \frac{x}{\ell} \cdot a$, dan geldt:

$$c_1 = \frac{1}{6}; \quad c_2 = \frac{1}{3}; \quad c_3 = \frac{3}{20}; \quad c_4 = \frac{1}{30}; \quad c_5 = \frac{7}{20}; \quad c_6 = -\frac{1}{20}; \quad c_7 = -\frac{1}{2}; \quad c_8 = -c_9 = -\frac{1}{12};$$

$$c_{10} = \frac{1}{6\epsilon^2 \cdot D} \cdot \{(6 + \epsilon^2) \cdot \epsilon \cdot \sin\epsilon - (12 + 3\epsilon^2) \cdot (\cos\epsilon - 1)\}; \quad c_{11} = \frac{1}{6\epsilon D} \cdot \{3(\sin\epsilon - \epsilon) - \epsilon(\cos\epsilon - 1)\}; \quad c_{12} = \frac{1}{2} - c_{10};$$

$$c_{13} = \frac{1}{6\epsilon^2 \cdot D} \cdot \{-9 \cdot \epsilon \cdot \sin\epsilon + (12 + 2\epsilon^2) \cdot (\cos\epsilon - 1) + 3\epsilon^2\}; \quad c_{14} = \frac{1}{2};$$

$$c_{15} = -c_{16} = \frac{1}{2\epsilon^2 \cdot D} \cdot \{4\epsilon \cdot \sin\epsilon - (4 + \epsilon^2) \cdot (\cos\epsilon - 1) - 2\epsilon^2\}$$

waarbij D weer is gedefinieerd door : $D = \epsilon \cdot \sin\epsilon - 2(\cos\epsilon - 1)$.

3.3 Cosinus-vormig veranderende oppervlakte-belasting

Als $g(x) = \cos(p\frac{x}{\ell})$, dus als $\hat{f}_c(x) = \cos(p \cdot \frac{x}{\ell}) \cdot a$, dan geldt:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot r_1; \quad \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2} (v_1 + \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -2 & 6 \\ 6+p^2 & -12 \\ -4 & 6-p^2 \end{bmatrix} \cdot r_1); \quad \begin{bmatrix} c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2} (v_2 + \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -2 \\ 6-p^2 & -4 \end{bmatrix} \cdot r_2)$$

$$\begin{bmatrix} c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon^2 + p^2} \cdot (v_3 + \frac{1}{D}) \cdot \begin{bmatrix} -\epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1) & \epsilon^3 \cdot \sinh \epsilon \\ \epsilon \cdot (\sinh \epsilon - \epsilon) & -\epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1) \\ (\epsilon^2 + p^2) \cdot D + \epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1) & -\epsilon^3 \cdot \sinh \epsilon \\ \epsilon (\epsilon \cosh \epsilon - \sinh \epsilon) & p^2 \cdot D - \epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1) \end{bmatrix} \cdot r_1$$

$$\begin{bmatrix} c_{14} \\ c_{15} \\ c_{16} \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon^2 + p^2} \cdot (v_4 + \frac{1}{D}) \cdot \begin{bmatrix} -\epsilon^3 \cdot \sinh \epsilon & \epsilon^2 (\cosh \epsilon - 1) \\ \epsilon^2 \cdot (\cosh \epsilon - 1) & \epsilon (\sinh \epsilon - \epsilon) \\ -p^2 D + \epsilon^2 (\cosh \epsilon - 1) & \epsilon \cdot (\epsilon \cosh \epsilon - \sinh \epsilon) \end{bmatrix} \cdot r_2$$

waarbij voor D geldt: $D = \epsilon \sinh \epsilon - 2 \cdot (\cosh \epsilon - 1)$, terwijl r_1, r_2, v_1, v_2, v_3 en v_4 zijn gedefinieerd als:

$$r_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sin p}{p} \\ \frac{1 - \cos p}{p^2} \end{bmatrix}; \quad r_2 = p^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{p - \sin p}{p^3} \\ \frac{1 - \cos p}{p^2} \end{bmatrix}; \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p^2 \end{bmatrix}; \quad v_3 = -v_1; \quad v_4 = \begin{bmatrix} \epsilon^2 \\ 0 \\ p^2 \end{bmatrix}$$

2.4 Sinus-vormig veranderende oppervlakte-belasting

Als $g(x) = \sin(p \cdot \frac{x}{2})$, dus als $\bar{f}_c(x) = \sin(p \cdot \frac{x}{2}) \cdot a$, worden voor de konstanten c_1, c_2, \dots, c_{16} dezelfde relaties gevonden als hiervoor in 2.3, mits in de relaties in 2.3 voor r_1, r_2, v_1, v_2, v_3 en v_4 wordt gesubstitueerd:

$$r_1 = p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos p}{p^2} \\ \frac{p - \sin p}{p^2} \end{bmatrix}; \quad r_2 = p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos p}{p^2} \\ \frac{\sin p}{p} \end{bmatrix}; \quad v_1 = p \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = p \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = p \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_4 = -v_2$$

C.3 Kinematisch consistente krachtvektor bij het benaderend verplaatsingsveld

Bij de berekening van de kinematisch consistente krachtvektor van de verdeelde belasting bij het benaderend verplaatsingsveld kan dezelfde werkwijze gevolgd worden als in C.2. Dit levert:

$$f_{cb} = D_b^{-1} \cdot \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} D_b(x) \cdot \bar{f}_c(x) \cdot dx$$

Voor \hat{D}_b en D_b^{-1} wordt weer verwezen naar appendix A.

Als $\bar{f}_c(x)$ te schrijven is als $f_c(x) = g(x) \cdot a$ (konstante vektor a en gegeven functie $g = g(x)$), dan geldt:

$$f_{cb} = F_b \cdot a; \quad F_b = D_b^{-1} \cdot \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} D_b(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

waarbij F_b van de volgende vorm zal zijn :

$$F_b = \begin{bmatrix} c_{1,k} & c_{2,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,k} & c_{4,k}^2 & c_{5,k} & c_{6,k}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_7 & c_{8,k} & -c_7 & c_{9,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,k} & -c_{4,k}^2 & c_{5,k} & -c_{6,k}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_7 & c_{8,k} & c_7 & c_{9,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,k} & -c_{4,k}^2 & c_{5,k} & -c_{6,k}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_7 & c_{8,k} & c_7 & c_{9,k} \end{bmatrix}$$

De in deze matrix optredende konstanten c_1, c_2, \dots, c_9 zijn gelijk aan c_1, c_2, \dots, c_9 in de matrix F_v uit C.2.

Berekening van de stijfheidsmatrix voor kokers met willekeurige doorsnede

D.1 Definities en veronderstellingen

1.1 Verplaatsingen en verplaatsingsvectoren van een plaat (fig. 4.2)

De verplaatsingen $\bar{u}_x, \bar{u}_s, \bar{u}_r$ van een punt (x, s, r) van de plaat worden uitgedrukt in de verplaatsingen u_x, u_s en u_r van punten van het middenvlak $r=0$:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_s \\ \bar{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_s \\ u_r \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} \phi_s \\ -\phi_x \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \phi_x = \frac{\partial u_r}{\partial s}; \quad \phi_s = -\frac{\partial u_r}{\partial x}$$

Wij nemen aan dat u_x en u_s lineair zijn in s en dat u_r een derdegraads polynoom in s is:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_s \\ u_r \end{bmatrix} = \hat{A}(s) \cdot \hat{\delta}(x); \quad \hat{A}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix}$$

met onbekende vektor $\hat{\delta}(x)$. Er geldt (zie ook fig. 4.2):

$$\hat{\delta}(x) = A^{-1} \cdot \phi_p(x); \quad \phi_p(x) = \begin{bmatrix} u_{xn} \\ u_{xq} \\ u_{sn} \\ u_{sq} \\ u_{rn} \\ u_{rq} \\ \phi_{xn} \\ \phi_{xq} \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{b^3} \begin{bmatrix} b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b^2 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \cdot b & 3 \cdot b & -2 \cdot b^2 & -b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & b & b \end{bmatrix}$$

1.2 Spanningen in een plaat (fig. 4.6)

Wij nemen aan dat de spanningen op een willekeurige plaats (x, s, r) in de plaat worden gegeven door :

$$\bar{\sigma}_r(x, s, r) = \bar{\tau}_{xr}(x, s, r) = \bar{\tau}_{sr}(x, s, r) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_s \\ \bar{\tau}_{xs} \end{bmatrix}_{(x, s, r)} = \begin{bmatrix} \xi & \frac{s}{b} & 0 & 0 & 0 & \xi \cdot n & \frac{s}{b} \cdot n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \cdot n & \frac{s}{b} \cdot n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \frac{s}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix} \cdot \bar{\sigma}_p(x)$$

waarbij $\xi = 1 - \frac{s}{b}$ en $\eta = 2 \frac{r}{h}$. De spanningsvektor $\hat{\sigma}_p(x)$ is gedefinieerd door (fig.4.4):

$$\hat{\sigma}_p(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{xn} & \sigma_{xq} & \sigma_s & \tau_n & \tau_q & \sigma_{bkn} & \sigma_{bxq} & \sigma_{bsn} & \sigma_{bsq} & \tau_{sv} \end{bmatrix}$$

D.2 De elastische energie per plaat, uitgedrukt in $\hat{\sigma}_p$ en $\hat{\vartheta}_p$

Bij verwaarlozing van de elastische energie ten gevolge van $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\tau}_{xr}$ en $\bar{\tau}_{sr}$ zal voor de elastische energie per volume-eenheid, U_σ , gelden :

$$U_\sigma = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_x^2 - 2\nu \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_s^2) + \frac{1}{G} \bar{\tau}_{xs}^2 \right\} + \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} + \bar{\sigma}_s \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial s} + \bar{\tau}_{xs} \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} \right)$$

Substitutie van \bar{u}_x , \bar{u}_s , $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xs}$ en $\bar{\sigma}_s$ volgens D.1 en integratie over het volume van de plaat levert dat de in de plaat opgehoopte elastische energie U_p gelijk is aan:

$$U_p = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^L \hat{\sigma}_p^T \cdot F_\sigma \cdot \hat{\sigma}_p \cdot dx + \int_{x=0}^L \hat{\sigma}_p^T \cdot (W_v \cdot \hat{\vartheta}_p + W_0 \cdot \hat{\theta}_p + W_x \cdot \hat{\chi}_p) \cdot dx$$

waarbij $\hat{\theta}_p = \frac{d\hat{\vartheta}}{dx}$ en $\hat{\chi}_p = \frac{d^2\hat{\vartheta}}{dx^2}$; F_σ is een vierkante, symmetrische en positief definitie matrix, die bepaald kan worden uit :

$$\hat{\sigma}_p^T \cdot F_\sigma \cdot \hat{\sigma}_p = \int_F \left\{ \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_x^2 - 2\nu \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_s^2) + \frac{1}{G} \bar{\tau}_{xs}^2 \right\} dF \text{ voor alle } \hat{\sigma}_p(x).$$

terwijl W_v , W_0 en W_x zijn gedefinieerd door :

$$\hat{\sigma}_p^T \cdot W_v \cdot \hat{\vartheta}_p = \int_F \left\{ \bar{\sigma}_s \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial s} - r \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} \right) + \bar{\tau}_{xs} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial s} \right\} \cdot dF \text{ voor alle } \hat{\sigma}_p(x) \text{ en } \hat{\vartheta}_p(x)$$

$$\hat{\sigma}_p^T \cdot W_0 \cdot \hat{\theta}_p = \int_F \left\{ \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{\tau}_{xs} \left(\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} - 2 \cdot r \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x \partial s} \right) \right\} \cdot dF \text{ voor alle } \hat{\sigma}_p(x) \text{ en } \hat{\theta}_p(x)$$

$$\hat{\sigma}_p^T \cdot W_x \cdot \hat{\chi}_p = \int_F -r \cdot \bar{\sigma}_x \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} \cdot dF \text{ voor alle } \hat{\sigma}_p(x) \text{ en } \hat{\chi}_p(x)$$

Ter vereenvoudiging van de notatie is hierbij gebruik gemaakt van $\int_{s=0}^b \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dots dr \cdot ds = \int_F \dots dF$. Bij uitwerken van deze relaties volgt:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}; \quad F_1 = \frac{b \cdot h}{6 \cdot E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3\nu & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3\nu & 0 & 0 \\ -3\nu & -3\nu & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & 2 \cdot e_1 \end{bmatrix}; \quad F_2 = \frac{b \cdot h}{18 \cdot E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2\nu & -\nu & 0 \\ 1 & 2 & -\nu & -2\nu & 0 \\ -2\nu & -\nu & 2 & 1 & 0 \\ -\nu & -2\nu & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot e_1 \end{bmatrix}; \quad e_1 = \frac{E}{G}$$

$$W_v = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}; \quad V_1 = \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \frac{h^2}{6 \cdot b} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & b & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{\theta} = \begin{bmatrix} V_3 & 0 \\ 0 & V_4 \end{bmatrix}; \quad V_3 = \frac{b \cdot h}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad V_4 = \frac{h^2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{\chi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_5 \end{bmatrix}; \quad V_5 = \frac{b \cdot h^2}{360} \cdot \begin{bmatrix} -21 & -9 & -3 \cdot b & 2 \cdot b \\ -9 & -21 & -2 \cdot b & 3 \cdot b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.3 De spanningsvector $\hat{\sigma}_p$, uitgedrukt in $\hat{\varphi}_p$

Met het energieprincipe volgens Reissner kan voor de spanningsvector $\hat{\sigma}_p$ de volgende relatie worden afgeleid:

$$\hat{\sigma}_p(x) = F_{\sigma}^{-1} \cdot (W_V \cdot \hat{\varphi}_p + W_{\theta} \cdot \hat{\theta}_p + W_{\chi} \cdot \hat{\chi}_p)$$

Na enig elementair rekenwerk blijkt voor de hierin optredende matrixproducten te gelden:

$$F_{\sigma}^{-1} \cdot W_V = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}; \quad S_1 = \frac{E^*}{2b} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \cdot v & 2 \cdot v \\ 0 & 0 & -2 \cdot v & 2 \cdot v \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -(1-v) & (1-v) & 0 & 0 \\ -(1-v) & (1-v) & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_2 = \frac{E^*}{b} \cdot \frac{h}{b} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot v & -3 \cdot v & 2 \cdot v \cdot b & v \cdot b \\ -3 \cdot v & 3 \cdot v & -v \cdot b & -2 \cdot v \cdot b \\ 3 & -3 & 2 \cdot b & b \\ -3 & 3 & -b & -2 \cdot b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{\sigma}^{-1} \cdot W_{\theta} = \begin{bmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_4 \end{bmatrix}; \quad S_3 = \frac{E^*}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot v^2 & v^2 & 0 & 0 \\ v^2 & 2 \cdot v^2 & 0 & 0 \\ v & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-v \end{bmatrix}; \quad S_4 = \frac{E^*}{2} \cdot \frac{h}{b} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-v & -(1-v) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{\sigma}^{-1} \cdot W_{\chi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_5 \end{bmatrix}; \quad S_5 = \frac{E^*}{60} \cdot h \cdot \begin{bmatrix} -33 & 3 & -4 \cdot b & b \\ 3 & -33 & -b & 4 \cdot b \\ -33 \cdot v & 3 \cdot v & -4 \cdot b \cdot v & b \cdot v \\ 3 \cdot v & -33 \cdot v & -b \cdot v & 4b \cdot v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hierin is E^* de "gereduceerde" elasticiteitsmodulus: $E^* = \frac{E}{1-v^2}$

D.4 De elastische energie per plaat, uitgedrukt in $\bar{v}_p(x)$

Invullen van het verband tussen $\bar{\sigma}_p(x)$ en $\bar{v}_p(x)$ in de relatie voor U_p volgens D.2 levert de elastische energie, uitgedrukt in \bar{v}_p :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \left[\begin{array}{c} \bar{v}_p \\ \bar{\theta}_p \\ \bar{\chi}_p \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} S_{vv} & S_{v\theta} & S_{v\chi} \\ S_{\theta v} & S_{\theta\theta} & S_{\theta\chi} \\ S_{\chi v} & S_{\chi\theta} & S_{\chi\chi} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \bar{v}_p \\ \bar{\theta}_p \\ \bar{\chi}_p \end{array} \right] \cdot dx$$

Voor de hierin geïntroduceerde matrices S_{ab} ($a, b = v, \theta, \chi$) geldt :

$$S_{ab} = S_{ba} = W_a \cdot F_{\sigma}^{-1} \cdot W_b$$

en na enig rekenwerk volgt dat $S_{\theta\chi} = S_{\chi\theta}$ een nulmatrix is terwijl de overige gegeven worden door :

$$S_{vv} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}; \quad P_1 = \frac{E^*}{2} \cdot \frac{h}{b} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & -(1-\nu) & 0 & 0 \\ -(1-\nu) & (1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \frac{E^*}{6} \cdot \frac{h^3}{b^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3.b & 3.b \\ -6 & 6 & -3.b & -3.b \\ 3.b & -3.b & 2.b^2 & b^2 \\ 3.b & -3.b & b^2 & 2.b^2 \end{bmatrix}$$

$$S_{v\theta} = \begin{bmatrix} P_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_3 = \frac{E^*}{4} \cdot h \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1-\nu) & -(1-\nu) \\ 0 & 0 & (1-\nu) & (1-\nu) \\ -2.\nu & -2.\nu & 0 & 0 \\ 2.\nu & 2.\nu & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} P_4 & 0 \\ 0 & P_5 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \frac{E^*}{12} \cdot h \cdot b \cdot \begin{bmatrix} 4-\nu^2 & 2+\nu^2 & 0 & 0 \\ 2+\nu^2 & 4-\nu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) & (1-\nu) \\ 0 & 0 & (1-\nu) & 2(1-\nu) \end{bmatrix}; \quad P_5 = \frac{E^*}{6} \cdot \frac{h^3}{b^3} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & -(1-\nu) & 0 & 0 \\ -(1-\nu) & (1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{v\chi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_6 \end{bmatrix}; \quad P_6 = \frac{E^*}{360} \cdot \nu \cdot \frac{h^3}{b} \cdot \begin{bmatrix} -36 & 36 & -3.b & -3.b \\ 36 & -36 & 3.b & 3.b \\ -33.b & 3.b & -4.b^2 & b^2 \\ -3.b & 33.b & b^2 & -4.b^2 \end{bmatrix}$$

$$S_{\chi\chi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_7 \end{bmatrix}; \quad P_7 = \frac{E^*}{21600} \cdot h^3 \cdot b \cdot \begin{bmatrix} 666 & 234 & 93.b & -57.b \\ 234 & 666 & 57.b & -93.b \\ +93.b & 57.b & 14.b^2 & -11.b^2 \\ -57.b & -93.b & -11.b^2 & 14.b^2 \end{bmatrix}$$

D.5 De elastische energie U_p , gerelateerd aan het globale coördinatensysteem

De vektoren \hat{v}_p , $\hat{\theta}_p$ en \hat{x}_p zijn gerelateerd aan het lokale assenstelsel x, s, r van de plaat. Naast \hat{v}_p , $\hat{\theta}_p$ en \hat{x}_p voeren wij de globale vektoren \hat{v}_g , $\hat{\theta}_g = \frac{d\hat{\theta}}{dx}$ en $\hat{x}_g = \frac{d\hat{x}}{dx}$ in, die betrekking hebben op het globale coördinatensysteem. Er geldt (zie ook fig.4.3) :

$$\hat{v}_g(x) = [u_{xn} \quad u_{xq} \quad u_{yn} \quad u_{yq} \quad u_{zn} \quad u_{zq} \quad \phi_{xn} \quad \phi_{xq}]$$

Als α de hoek is tussen de positieve y - en s -as (met tekenafpraak volgens fig. 4.3) dan geldt:

$$\hat{v}_p(x) = T \cdot \hat{v}_g(x)$$

waarbij T een vierkante, orthonormale matrix is, gedefinieerd door :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wordt deze relatie voor \hat{v}_p ingevuld in de relatie voor de elastische energie dan ontstaat:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L [\hat{v}_g \quad \hat{\theta}_g \quad \hat{x}_g] \cdot \begin{bmatrix} K_{VV} & K_{V\theta} & K_{VX} \\ K_{\theta V} & K_{\theta\theta} & K_{\theta X} \\ K_{XV} & K_{X\theta} & K_{XX} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_g \\ \hat{\theta}_g \\ \hat{x}_g \end{bmatrix} \cdot dx$$

Hierin hangen de deelmatrices K_{ab} alleen af van T en van S_{ab} . Er geldt:

$$K_{ab} = K_{ba}^T = T \cdot S_{ab} \cdot T \quad \text{voor } a, b = v, \theta, x.$$

D.6 De elastische energie in een koker ter lengte L

De verplaatsingen u_{xk} , u_{yk} en u_{zk} en de hoekverdraaiing ϕ_{xk} van alle knooppunten ($k = 1, 2, \dots, m$) in doorsnede x worden opgeborgen in de vektoren \hat{u} , \hat{w} en $\hat{\phi}$ die deelvektor zijn van de verplaatsingsvektor $\hat{v}(x)$. Wij definiëren :

$$\hat{u} = [u_{x1} \quad u_{x2} \quad \dots \quad u_{xm}] \quad (m \text{ componenten})$$

$$\hat{w} = [u_{y1} \quad u_{y2} \quad \dots \quad u_{ym} \quad u_{z1} \quad u_{z2} \quad \dots \quad u_{zm}] \quad (2m \text{ componenten})$$

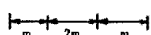
$$\hat{\phi} = [\phi_{x1} \quad \phi_{x2} \quad \dots \quad \phi_{xm}] \quad (m \text{ componenten})$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}; \quad \hat{\theta} = \frac{d\hat{v}}{dx}; \quad \hat{x} = \frac{d\hat{\theta}}{dx}$$

Voor de elastische energie U in een koker met lengte L geldt dan (zie ook 4.4.4) :

$$U = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\theta} \\ \bar{x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{VV} & Q_{V\theta} & Q_{Vx} \\ Q_{\theta V} & Q_{\theta\theta} & Q_{\theta x} \\ Q_{xV} & Q_{x\theta} & Q_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\theta} \\ \bar{x} \end{bmatrix} dx$$

De matrix Q_{ab} wordt geheel bepaald door de matrix K_{ab} van de afzonderlijke platen en de lokatiematrix L_b die vastlegt door welke knooppunten de platen begrensd worden. Na partitionering van Q_{ab} kan geschreven worden :

$$Q_{ab} = \bar{Q}_{ba} = \begin{bmatrix} A_{ab} & B_{ab} & 0 \\ C_{ab} & D_{ab} & E_{ab} \\ 0 & F_{ab} & G_{ab} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{m} \\ 2m \\ \bar{m} \end{matrix} \quad (a,b = v, \theta, x)$$


Voor deze deelmatrices gelden dan de volgende relaties (zie ook 4.4.4) :

$$\begin{aligned} A_{VV} &= \bar{A}_{VV} \neq 0; & B_{VV} &= \bar{C}_{VV} = 0; & D_{VV} &= \bar{D}_{VV} \neq 0; & E_{VV} &= \bar{F}_{VV} \neq 0; & G_{VV} &= \bar{G}_{VV} \neq 0 \\ A_{V\theta} &= \bar{A}_{\theta V} = 0; & B_{V\theta} &= \bar{C}_{\theta V} \neq 0; & D_{V\theta} &= \bar{D}_{\theta V} = 0; & E_{V\theta} &= \bar{F}_{\theta V} = 0; & G_{V\theta} &= \bar{G}_{\theta V} = 0 \\ C_{V\theta} &= \bar{B}_{\theta V} \neq 0; & & & & & F_{V\theta} &= \bar{E}_{\theta V} = 0; & & \\ A_{Vx} &= \bar{A}_{xV} = 0; & B_{Vx} &= \bar{C}_{xV} = 0; & D_{Vx} &= \bar{D}_{xV} \neq 0; & E_{Vx} &= \bar{F}_{xV} \neq 0; & G_{Vx} &= \bar{G}_{xV} \neq 0 \\ C_{Vx} &= \bar{B}_{xV} = 0; & & & & & F_{Vx} &= \bar{E}_{xV} \neq 0; & & \\ A_{\theta\theta} &= \bar{A}_{\theta\theta} \neq 0; & B_{\theta\theta} &= \bar{C}_{\theta\theta} = 0; & D_{\theta\theta} &= \bar{D}_{\theta\theta} \neq 0; & E_{\theta\theta} &= \bar{F}_{\theta\theta} = 0; & G_{\theta\theta} &= \bar{G}_{\theta\theta} = 0 \\ A_{\theta x} &= \bar{A}_{x\theta} = 0; & B_{\theta x} &= \bar{C}_{x\theta} = 0; & D_{\theta x} &= \bar{D}_{x\theta} \neq 0; & E_{\theta x} &= \bar{F}_{x\theta} \neq 0; & G_{\theta x} &= \bar{G}_{x\theta} \neq 0 \end{aligned}$$

De matrix $Q_{\theta x} = Q_{x\theta}$ is een nulmatrix.

D.7 Benadering voor de stijfheidsmatrix van een kokerelement met lengte L

Over het verloop van de deelvectoren \bar{u} , \bar{w} en $\bar{\phi}$ van \bar{v} als functie van x ($0 \leq x \leq L$; $x=0$ en $x=L$ zijn de eindvlakken van het kokerelement) worden de volgende veronderstellingen geponeerd :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= g_1(x) \cdot u_1 + g_2(x) \cdot u_2 \\ \bar{w}(x) &= h_1(x) \cdot w_1 + h_2(x) \cdot L \cdot \psi_1 + h_3(x) \cdot w_2 + h_4(x) \cdot L \cdot \psi_2 \quad (\bar{w} = \frac{dw}{dx}) \\ \bar{\phi}(x) &= h_1(x) \cdot \phi_1 + h_2(x) \cdot L \cdot \rho_1 + h_3(x) \cdot \phi_2 + h_4(x) \cdot L \cdot \rho_2 \quad (\bar{\phi} = \frac{d\phi}{dx}) \end{aligned}$$

waarbij u_1 , w_1 , ψ_1 , ϕ_1 en ρ_1 betrekking hebben op eindvlak i ($i=1$ voor $x=0$, $i=2$ voor $x=L$). Voor de hierin optredende functies g_j ($j=1,2$) en h_j ($j=1,2,3,4$) geldt :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\xi + 1 & ; & & g_2(x) &= \xi \\ h_1(x) &= +2 \cdot \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 + 1 & ; & & h_2(x) &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ h_3(x) &= -2 \cdot \xi^3 + 3 \cdot \xi^2 & ; & & h_4(x) &= \xi^3 - \xi^2 \end{aligned}$$

Hierin is gebruik gemaakt van de dimensieloze axiale coördinaat $\xi = \frac{x}{L}$. Met de verplaatsingsvector v_e van het kokerelement, gedefinieerd als :

$$\vec{v}_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

kan voor \vec{v} geschreven worden :

$$\vec{v}(x) = \hat{D}(x) \cdot v_e$$

en kan de elastische energie in het kokerelement, U_e , worden uitgedrukt in v_e :

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{v}_e^T \cdot Q_e \cdot v_e$$

Daarbij is Q_e de stijfheidsmatrix van het beschouwde element. In gepartitioneerde vorm :

$$Q_e = \begin{bmatrix} A_e & B_e & 0 \\ B_e & D_e & E_e \\ 0 & E_e & G_e \end{bmatrix} \begin{matrix} 2m \\ 8m \\ 4m \end{matrix}$$

De hierin optredende deelmatrices kunnen worden uitgedrukt in de matrices $A_{ab}, B_{ab}, \dots, G_{ab}$ ($a, b = v, \theta, x$). Voor A_e en B_e volgt :

$$A_e = \frac{E}{6} \begin{bmatrix} 2 \cdot A_{vv} & A_{v\theta} \\ A_{v\theta} & 2 \cdot A_{\theta\theta} \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} A_{\theta\theta} & -A_{\theta\theta} \\ -A_{\theta\theta} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$B_e = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 \cdot B_{v\theta}^* & + \bar{B}_{v\theta} \cdot L & + 6 \cdot \bar{B}_{v\theta} & - \bar{B}_{v\theta} \cdot L \\ -6 \cdot \bar{B}_{v\theta} & - B_{v\theta} \cdot L & + 6 \cdot B_{v\theta}^* & + \bar{B}_{v\theta} \cdot L \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} B_{v\theta}^* = B_{v\theta} + B_{\theta v} \\ \bar{B}_{v\theta} = B_{v\theta} - B_{\theta v} \end{matrix}$$

Om de notatie voor de matrices D_e, E_e en G_e nog enigermate binnen de perken te houden voeren wij een hulpmatrix R_e in :

$$R_e = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \cdot L & R_{13} & R_{14} \cdot L \\ R_{21} \cdot L & R_{22} \cdot L^2 & R_{23} \cdot L & R_{24} \cdot L^2 \\ R_{31} & R_{32} \cdot L & R_{33} & R_{34} \cdot L \\ R_{41} \cdot L & R_{42} \cdot L^2 & R_{43} \cdot L & R_{44} \cdot L^2 \end{bmatrix}$$

Voor R kan achtereenvolgens D, E of G worden gesubstitueerd. Er geldt ($i, j = 1, 2, 3, 4$) :

$$R_{ij} = L \cdot g_{vv}[i, j] \cdot R_{vv} + \frac{1}{L} \cdot [g_{vx}[i, j]] \cdot R_{vx} + g_{\theta\theta}[i, j] \cdot R_{\theta\theta} + g_{xv}[i, j] \cdot R_{xv} + \frac{1}{L^2} \cdot g_{xx}[i, j] \cdot R_{xx}$$

waarbij voor de hierin geïntroduceerde matrices $g_{vv}, g_{vx} = \frac{1}{g_{xv}}, g_{\theta\theta}$ en g_{xx} geldt :

$$g_{vv} = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}; \quad g_{vx} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -36 & -33 & 36 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 1 \\ 36 & 3 & -36 & 33 \\ -3 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{1}{30} \cdot \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}; \quad g_{\chi\chi} = +2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

D.8 Berekening van de interessante matrices voor het geval $\epsilon_s = 0$, $\sigma_s = 0$

In hoofdstuk 4.8 is de afleiding van de theorie geschetst voor het geval dat de rek $\epsilon_s = \bar{\epsilon}_s(x, s, 0)$ en de normaalspanning $\sigma_s = \bar{\sigma}_s(x, s, 0)$ gelijk aan nul genomen worden. De hypothesen over het spannings- en verplaatsingsveld zijn verder gelijk aan die uit D.1.1 en D.1.2. Met $u_s(x) = u_{sn}(x) = u_{sq}(x)$ en $\sigma_s = 0$ kunnen wij de afwijkende veronderstellingen als volgt noteren :

$$u_s(x, s) = \frac{1}{2} u_{sn}(x) + \frac{1}{2} u_{sq}(x); \quad u_{sn}(x) = u_{sq}(x).$$

$$\bar{\sigma}_s(x, s, r) = 2 \cdot \frac{r}{h} \left(\left(1 - \frac{s}{b}\right) \cdot \sigma_{bsn} + \frac{s}{b} \cdot \sigma_{bsq} \right).$$

Bergen wij de interessante spanningsparameters op in een vektor $\bar{\sigma}_p(x)$,

$$\bar{\sigma}_p(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{xn} & \sigma_{xq} & \tau_n & \tau_q & \sigma_{bxn} & \sigma_{bxq} & \sigma_{bsn} & \sigma_{bsq} & \tau_{sv} \end{bmatrix}$$

dan volgt dat de elastische energie U_p , die is opgehoopt in een plaat ter lengte L , wordt gegeven door :

$$\tilde{U}_p = \int_{x=0}^L \left[-\frac{1}{2} \bar{\sigma}_p^T \cdot \tilde{F}_\sigma \cdot \bar{\sigma}_p + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_p^T \cdot (\tilde{W}_v \cdot \bar{v}_p + \tilde{W}_\theta \cdot \bar{\theta}_p + \tilde{W}_\chi \cdot \bar{\chi}_p) \right] \cdot dx$$

De vektoren \bar{v}_p , $\bar{\theta}_p$ en $\bar{\chi}_p$ zijn reeds eerder gedefinieerd. Voor de hierin optredende matrices \tilde{F}_σ , \tilde{W}_v , \tilde{W}_θ en \tilde{W}_χ blijkt te gelden :

$$\tilde{F}_\sigma = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{F}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{F}_1 = \frac{b \cdot h}{6 \cdot E} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 2 \cdot e_1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{F}_2 = F_2$$

$$\tilde{W}_v = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{V}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{V}_1 = \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{V}_2 = V_2$$

$$\tilde{W}_\theta = \begin{bmatrix} \tilde{V}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{V}_4 \end{bmatrix}; \quad \tilde{V}_3 = \frac{b \cdot h}{12} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \tilde{V}_4 = V_4$$

$$\tilde{W}_\chi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{V}_5 \end{bmatrix}; \quad \tilde{V}_5 = V_5$$

Voor de matrices F_2, V_2, V_4 en V_5 wordt verwezen naar D.2.

De vektor $\tilde{\sigma}_p(x)$ kan weer worden uitgedrukt in $\tilde{\varphi}_p$ door het principe van Reissner te hanteren. Dit levert :

$$\tilde{\sigma}_p(x) = \tilde{F}_0^{-1} \cdot (\tilde{W}_v \cdot \tilde{\varphi}_p + \tilde{W}_\theta \cdot \tilde{\theta}_p + \tilde{W}_x \cdot \tilde{\chi}_p)$$

waarbij voor de optredende matrixprodukten gevonden wordt :

$$\tilde{F}_0^{-1} \cdot \tilde{W}_v = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_1 = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{1}{b} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_2 = S_2$$

$$\tilde{F}_0^{-1} \cdot \tilde{W}_\theta = \begin{bmatrix} \tilde{S}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_4 \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_3 = \frac{E}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e_1} & \frac{1}{e_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e_1} & \frac{1}{e_1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_4 = S_4$$

$$\tilde{F}_0^{-1} \cdot \tilde{W}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_5 \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_5 = S_5$$

Met dit verband tussen $\tilde{\sigma}_p$ en $\tilde{\varphi}_p$ kan $\tilde{\sigma}_p$ geëlimineerd worden uit de relatie voor \tilde{U}_p . Dan ontstaat :

$$\tilde{U}_p = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_p \\ \tilde{\theta}_p \\ \tilde{\chi}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{S}_{vv} & \tilde{S}_{v\theta} & \tilde{S}_{vX} \\ \tilde{S}_{\theta v} & \tilde{S}_{\theta\theta} & \tilde{S}_{\theta X} \\ \tilde{S}_{Xv} & \tilde{S}_{X\theta} & \tilde{S}_{XX} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_p \\ \tilde{\theta}_p \\ \tilde{\chi}_p \end{bmatrix} \cdot dx$$

Voor de hierin optredende matrices $\tilde{S}_{ab} = \tilde{S}_{ba}$ ($a, b = v, \theta, X$) volgt na enig rekenwerk :

$$\tilde{S}_{vv} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{P}_1 = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{h}{b} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{P}_2 = P_2$$

$$\tilde{S}_{v\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{P}_3 = \frac{E}{4(1+\nu)} \cdot h \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S}_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_4 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_5 \end{bmatrix}; \quad \tilde{P}_4 = \frac{E}{12} \cdot h \cdot b \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{e_1} & \frac{3}{e_1} \\ 0 & 0 & \frac{3}{e_1} & \frac{3}{e_1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{P}_5 = P_5$$

$$\tilde{S}_{Xa} = S_{Xa} \quad \text{voor } a = v, \theta, X.$$

Berekening van de krachtoektoren voor kokers met willekeurige dwarsdoorsnede

E.1: Definities en veronderstellingen

1.1 Verplaatsingen en verplaatsingsvektoren van een plaat

Hiervoor verwijzen wij naar appendix D.

1.2 De belasting van de plaat (fig. E.1)

Volgens 4.4.3 kunnen wij ons beperken tot de berekening van de potentiële energie ten gevolge van de in het middenvlak $r=0$ aangrijpende verdeelde belasting $\vec{q} = [q_x \ q_s \ q_r]$ en van de belasting door $\vec{\sigma}_{x1}$, $\vec{\tau}_{xs1}$ en $\vec{\tau}_{xr1}$ in eindvlak 1 ($x=0$) en $\vec{\sigma}_{x2}$, $\vec{\tau}_{xs2}$ en $\vec{\tau}_{xr2}$ in eindvlak 2 ($x=l$).

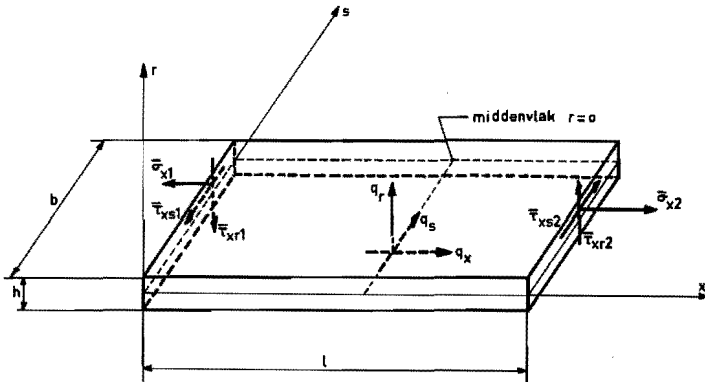


Fig. E.1 De uitswendige belasting op de plaat

E.2 De potentiële energie ten gevolge van de verdeelde belasting.

Voor de potentiële energie ten gevolge van de verdeelde belasting $q(x,s)$ geldt :

$$P_{cp} = - \int_{x=0}^l \int_{s=0}^b (u_x \cdot q_x + u_s \cdot q_s + u_r \cdot q_r) \cdot ds \cdot dx = - \int_{x=0}^l \vec{v}_p(x) \cdot (\vec{A}^{-1} \cdot \int_{s=0}^b \vec{A}(s) \cdot q(x,s) \cdot ds) dx$$

Hiervoor kan dus geschreven worden :

$$P_{cp} = - \int_{x=0}^l \vec{v}_p(x) \cdot \vec{f}_{cp}(x) \cdot dx$$

waarbij de kinematisch consistente krachtvektor \hat{f}_{cp} is gedefinieerd door :

$$\hat{f}_{cp}(x) = \hat{A}^{-1} \cdot \int_{s=0}^b \begin{bmatrix} q_x & 0 & 0 \\ s \cdot q_x & 0 & 0 \\ 0 & q_s & 0 \\ 0 & s \cdot q_s & 0 \\ 0 & 0 & q_r \\ 0 & 0 & s \cdot q_r \\ 0 & 0 & s^2 \cdot q_r \\ 0 & 0 & s^3 \cdot q_r \end{bmatrix} \cdot ds$$

E.3. De potentiële energie ten gevolge van de belasting in de eindvlakken

De belasting in de eindvlakken van de plaat levert een bijdrage tot de potentiële energie, die gelijk is aan :

$$P_{ep} = - \int_{s=0}^b \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ (\bar{\sigma}_{x2} \cdot \bar{u}_{x2} + \bar{\tau}_{xs2} \cdot \bar{u}_{s2} + \bar{\tau}_{xr2} \cdot \bar{u}_{r2}) - (\bar{\sigma}_{x1} \cdot \bar{u}_{x1} + \bar{\tau}_{xs1} \cdot \bar{u}_{s1} + \bar{\tau}_{xr1} \cdot \bar{u}_{r1}) \} dr \cdot ds$$

Daarbij geven de indices 1 en 2 aan dat de betreffende grootheden betrekking hebben op eindvlak 1 ($x=0$), respectievelijk op eindvlak 2 ($x=l$). Stellen wij :

$$\hat{v}_p(x=0) = v_{p1} \quad ; \quad \hat{\theta}_p(x=0) = \theta_{p1} \quad ; \quad \hat{v}_p(x=l) = v_{p2} \quad ; \quad \hat{\theta}_p(x=l) = \theta_{p2}$$

dan kan voor P_{ep} geschreven worden:

$$P_{ep} = -v_{p2} \cdot f_{p2} - \theta_{p2} \cdot m_{p2} + v_{p1} \cdot f_{p1} + \theta_{p1} \cdot m_{p1}$$

met krachtvectoren f_{pi} en m_{pi} ($i = 1,2$) die zijn gedefinieerd door :

$$f_{pi} = \hat{A}^{-1} \cdot \int_{s=0}^b \begin{bmatrix} n_i \\ s \cdot n_i \\ k_{si} \\ s \cdot k_{si} \\ k_{ri} \\ s \cdot k_{si} \cdot t_i \\ s^2 \cdot k_{ri} \cdot 2s \cdot t_i \\ s^3 \cdot k_{ri} \cdot 3 \cdot s^2 \cdot t_i \end{bmatrix} \cdot ds \quad ; \quad m_{pi} = \hat{A}^{-1} \cdot \int_{s=0}^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{xi} \\ s \cdot m_{xi} \\ s^2 \cdot m_{xi} \\ s^3 \cdot m_{xi} \end{bmatrix} \cdot ds \quad (i = 1,2)$$

Ter verkorting van de notatie zijn de krachtgrootheden per lengte-eenheid n_i , k_{si} , k_{ri} , m_{xi} en t_i ingevoerd. Er geldt :

$$\begin{bmatrix} n_i \\ k_{si} \\ k_{ri} \end{bmatrix} = \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xi} \\ \bar{\tau}_{xsi} \\ \bar{\tau}_{xri} \end{bmatrix} \cdot dr \quad ; \quad \begin{bmatrix} m_{xi} \\ t_i \end{bmatrix} = \int_{r=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xi} \\ \bar{\tau}_{xsi} \end{bmatrix} \cdot r \cdot dr \quad (i = 1,2)$$

Samenvatting

In dit proefschrift worden enige theorieën voor de beschrijving van het mechanische gedrag van dunwandige balken afgeleid, vergeleken en in een praktisch bruikbare vorm gebracht.

Uitgaande van het principe van Reissner, dat de mogelijkheid biedt om zowel veronderstellingen over verplaatsingen als over spanningen in rekening te brengen, worden uitdrukkingen verkregen voor de elastische energie. Het principe van de minimale potentiële energie vormt daarna de basis voor de formulering en de vergelijking der behandelde theorieën. Deze werkwijze biedt met name goede mogelijkheden voor het verkrijgen van benaderingsoplossingen die gebaseerd zijn op de technieken uit de methode der eindige elementen.

In hoofdstuk 3 wordt een theorie voor het statische en dynamische gedrag van dunwandige balken met open dwarsdoorsnede besproken. In tegenstelling met Vlasov [1] wordt de invloed van de afschuiving van het middenvlak en van de dwarsdoorsnede niet buiten beschouwing gelaten. Aangegeven wordt onder welke omstandigheden deze invloed te verwaarlozen is en de theorie volgens Vlasov gehanteerd mag worden.

Om de praktische bruikbaarheid van de Vlasov-theorie te verhogen is een element ontwikkeld dat gebaseerd is op het homogene, statische verplaatsingsveld volgens Vlasov. Hiermee kunnen homogene en inhomogene, statische en dynamische problemen tot een oplossing worden gebracht. Er wordt ruime aandacht geschonken aan de berekening van de spanningen uit de berekende verplaatsingen en krachten in de eindvlakken van een element.

In hoofdstuk 3 wordt nog een tweede element besproken dat ook gebaseerd is op de energie-uitdrukking die ten grondslag ligt aan de Vlasov-theorie. Het aangenomen verplaatsingsveld is echter eenvoudiger dan bij het eerder genoemde element. Een vergelijking van de beide typen elementen leert dat veelal het eenvoudiger element kan worden toegepast.

In hoofdstuk 4 wordt een theorie afgeleid voor de analyse van het statische gedrag van dunwandige balken met willekeurige dwarsdoorsnede. De daarbij gehanteerde veronderstellingen komen niet geheel overeen met die

volgens Vlasov [1], waardoor de invloed van de zogenaamde anti-clastische buiging en van de rek in omtreksrichting benaderend in rekening kunnen worden gebracht. Er worden enkele vereenvoudigingen van deze theorie beschouwd door telkens een van de genoemde deformatiemogelijkheden uit te sluiten. De berekeningen resulteren voor elk der theorieën in de ontwikkeling van een zogenaamd kokerelement. Evenals in hoofdstuk 3 wordt ook hier aandacht geschonken aan de berekening der spanningen.

Voor de numerieke uitwerking van de theorieën uit hoofdstuk 4 zijn enige rekenprogramma's ontwikkeld. Een zeer summiere beschrijving en enige toepassingen daarvan komen ter sprake in hoofdstuk 5. Uit de konfrontatie van de berekende spanningen met experimentele resultaten blijkt dat deze programma's, afgezien van de directe omgeving van het aangrijpingspunt der belasting, tot een zeer bevredigende voorspelling van de realiteit leiden. Deze konfrontatie geeft ook enige aanwijzingen over de gebruiksmogelijkheden van de programma's en daardoor ook van de theorieën die eraan ten grondslag liggen.

In hoofdstuk 6 wordt aandacht besteedt aan de huidige toepassingsmogelijkheden van de ontwikkelde theorieën en rekenprogramma's en aan enige uitbreidingen en verfijningen om de bruikbaarheid voor de analyse van realistische konstrukties te vergroten.

[1] Vlasov, V.Z. : Thin-walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.

Summary

This dissertation presents a few theories for the analysis of the mechanical behaviour of thin-walled beams. These theories are compared and adapted to improve practical applicability.

Starting from the Reissner principle, which makes it possible to take into account assumptions on displacements as well as on stresses, a relation for the potential energy is derived. Next, this relation is used to develop and compare the theories based on different assumptions on the displacements. In combination with finite element techniques, this approach offers the possibility to formulate approximate solutions.

After a general introduction and some remarks on co-ordinate-systems and notation in chapter 1 and 2, chapter 3 discusses a theory for the statical and dynamical analysis of thin-walled beams with open cross-section. Contrary to Vlasov [1], the influence of the shear strain of the middle surface and the cross-section is taken into account. A further investigation of this theory reveals under what circumstances Vlasov's theory may be used. In order to simplify numerical calculations with Vlasov's theory an element is developed based on the solution for the displacement of the Vlasov statical, homogeneous differential equations. With this element inhomogeneous and dynamical problems can be solved as well. Much attention is paid to the calculation of the stresses in an element.

In chapter 3 also a second element is considered, based on the same relation for the energy as the former element. However, a different and simplified displacement field is used. A comparison of both elements shows that in many circumstances the latter element can be used instead of the Vlasov element.

Chapter 4 presents a theory for the analysis of the statical behaviour of thin-walled beams with arbitrary cross-section. The hypotheses used do not entirely agree with the Vlasov assumptions [1]. Particularly the influence of the so-called anti-clastic bending and of the normal strain of the middle surface in circumferential direction are taken into account in

an approximate way. A few simplifications of this theory are derived by excluding one or both of the above-mentioned deformations. For each of these theories a "tube-element" is developed.

The computer programs used to obtain numerical results with the theories of chapter 4 are briefly described in chapter 5, where a few applications are given as well.

A comparison between the calculated and experimental values of the stresses shows that these programs yield a satisfactory prediction of reality, at least at some distance from the concentrated load system. This comparison also gives some indications for the applicability of the programs. These indications can also be made plausible theoretically.

Finally chapter 6 indicates the present possibilities of the theories and computer programs for the analysis of realistic thin-walled beam structures and reveals a few refinements required to improve the practical applicability of these theories and programs.

[1] Vlasov, V.Z. : Thin-walled beams. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.

Stellingen

1.

Het door Visser voorgestelde rechthoekige "box beam element 1" zal bij het analyseren van vlakke, in hun vlak belaste platen steeds leiden tot resultaten die minstens evengoed zijn als de resultaten die, bij dezelfde verdeling in elementen, bereikt worden met het rechthoekige "REM 4"-element. Hanteren van "REM 4"-elementen zal steeds resulteren in minstens even goede resultaten als het gebruik van driehoekige "TRIM 3"-elementen indien ieder vierhoekig element wordt vervangen door twee "TRIM 3"-elementen.

Visser, W. : The finite element method in deformation and heat conduction problems. Dissertatie, Technische Hogeschool, Delft, 1968.

Brekelmans, W.A.M., Veldpaus, F.E. : Comparison of some simple membrane elements. Rapport WE-73/3, Technische Hogeschool, Eindhoven, nog te verschijnen.

2.

Uit recente publikaties blijkt dat de ideeën en werkwijzen, die gehanteerd worden in de methode der eindige elementen voor de analyse van het mechanisch gedrag van systemen, met vrucht kunnen worden toegepast in verscheidene gebieden van de fysica en de technische wetenschappen. Deze methode moet derhalve beschouwd gaan worden als een methode uit het gebied der numerieke wiskunde en niet als een der specifieke werkwijzen uit het gebied der (technische) mechanica.

Visser, W. : The finite element method in deformation and heat conduction problems. Dissertatie, Technische Hogeschool, Delft, 1968.

Zienkiewicz, O.C. : The finite element method in engineering science. McGraw-Hill, Londen, 1971.

3.

Geïndividualiseerde onderwijssystemen, zoals ontwikkeld en gebruikt door de vakgroep Technische Mechanica van de afdeling der Werktuigbouwkunde van de Technische Hogeschool Eindhoven, brengen een verschuiving teweeg in de taak van de docent in de richting van de van hem te verwachten intellectuele vaardigheden.

4.

De door Janssen bepaalde oscillatie in het verloop der axiale buigspanningen in de direkte nabijheid van het aangrijpingspunt van de gekoncentreerde belasting is een gevolg van de invloed van de anti-clastische buiging.

Janssen, J.D. : Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige rechthoekige kokers. Dissertatie, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1967, p.134 e.v., fig. 7.5.2

Dit proefschrift, hoofdstuk 5.4

5.

Programmasystemen, die gebaseerd zijn op de methode der eindige elementen, dienen in elk geval te beschikken over efficiënte procedures om afhankelijkheidsrelaties tussen de verplaatsingsparameters in rekening te brengen.

Dit proefschrift, hoofdstuk 6.

6.

De door Guyan aangegeven werkwijze om met behulp van statische beschouwingen het aantal vrijheidsgraden bij de analyse van het dynamisch gedrag van constructies te reduceren is van zeer groot praktisch belang.

Deze werkwijze kan worden beschouwd als een logische generalisatie van de algemeen gebruikte methode om de massamatrix van een element te bepalen. Voor een efficiënte toepassing van Guyans reductiemethode moeten gefundeerde en praktisch bruikbare richtlijnen ontwikkeld worden. O.a. door Banens zijn reeds duidelijke aanwijzingen verstrekt.

Guyan, R.J. Reduction of stiffness and mass matrix. AIAA-Journal, 3 (1965), p.380.

Banens, J.P.A. : Enkele methoden voor het bepalen van de grootste eigenwaarden van bandmatrices. Afstudeerrapport groep WE, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1972.

7.

Door uit te gaan van de veronderstelling dat de berekende schuifspanning in fig. 5.9 van dit proefschrift het gemiddelde is van een in werkelijkheid parabolisch verlopende schuifspanning kunnen de gemeten waarden voor $x > 50$ mm alleszins bevredigend voorspeld worden.

Dit proefschrift, hoofdstuk 5.4

8.

Bij de vergelijking van elementtypen voor de analyse van het mechanisch gedrag van constructies met de methode der eindige elementen wordt o.a. door Khanna uitgegaan van de elastische energie, uitgedrukt in de relevante verplaatsingsparameters. Er ontstaat een veel bruikbaarere methode indien de elastische energie wordt uitgedrukt in de relevante rekparameters.

Khanna, J. : Criterion for selecting stiffness matrices. AIAA-Journal, 3 (1965), p. 1976.

9.

Laat A en B twee verschillende element-typen zijn van dezelfde vorm en met dezelfde verplaatsingsgrootheden als parameters. Laat de massa- en stijfheidsmatrices van A en B op kinematisch consistente wijze bepaald zijn uit dezelfde uitdrukking voor de potentiële energie. Uit een onderlinge vergelijking van de kwaliteiten van A en B voor statische problemen mogen dan géén konklusies getrokken worden over de kwaliteiten ervan voor dynamische problemen.

Dit proefschrift, hoofdstuk 3.10

10.

De door Kollbrunner-Hajdin voorgestelde overgangskondities bij de koppeling van dunwandige balken zijn voor praktische constructies veelal onjuist.

Kollbrunner, C.F., Hajdin, N. : Dünnwandige Stäbe. Springer-Verlag, Berlin etc., 1972, pag. 136 e.v.

Dit proefschrift, hoofdstuk 6.

11.

Reeds in het vóór-kandidaats gedeelte van de opleiding voor werktuigkundig ingenieur dient ruime aandacht besteed te worden aan de methode der eindige elementen. Kennis van energieprincipes, van onderdelen van de variatie- en matrixrekening en van (tenminste) één computertaal zullen daarbij onontbeerlijk zijn.