

Onderwijs is mensenwerk : over het gebruik van computers in het wiskunde-onderwijs

Citation for published version (APA):

Simons, F. H. (1998). *Onderwijs is mensenwerk : over het gebruik van computers in het wiskunde-onderwijs*. Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1998

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

ONDERWIJS IS
MENSENWERK
Over het gebruik
van computers in
het wiskunde-
onderwijs

AFSCHEIDSCOLLEGE

Prof.dr. F.H. Simons



Technische Universiteit Eindhoven

AFSCHEIDS- COLLEGE

Gegeven op 16 januari 1998
aan de
Technische Universiteit Eindhoven

Prof.dr. F.H. Simons

Mijnheer de Rector Magnificus,
dames en heren,

Na meer dan 32 jaar is op 1 januari 1998 mijn dienstverband met de Technische Universiteit Eindhoven beëindigd. Daarmee is voor mij een nieuwe fase in mijn leven aangebroken. Het stelt mij in de gelegenheid terug te blikken op de voorgaande fase en daarvan de balans op te maken.

Ik heb gestudeerd aan de Universiteit van Amsterdam. Ik ben begonnen als student sterrenkunde, maar tengevolge van de buitengewoon inspirerende wiskundecolleges van professor J. de Groot ben ik al na een jaar omgezwaaid naar wiskunde. Gedurende mijn studie volgde ik met veel plezier een aantal colleges bij professor Helmburg, die in 1964 hoogleraar werd aan deze universiteit, toen nog Technische Hogeschool geheten. Na mijn afstuderen in Amsterdam ben ik in 1965 aan deze instelling medewerker van professor Helmburg geworden. Ik bewaar heel goede herinneringen aan de plezierige samenwerking die wij in de jaren tot mijn promotie en zijn vertrek naar Innsbruck in 1971 gehad hebben. Ik ben blij dat wij nog steeds contact hebben.

Toen ik hier in 1965 kwam werken, ging mijn werk zoals voor vrijwel

iedereen bestaan uit onderzoek en onderwijs. Mijn onderzoek lag op het terrein van de ergodentheorie, een mooie naam voor de theorie van meetbare transformaties in meetruimten, en resulteerde in een aantal artikelen en een proefschrift. Maar van het begin af aan heeft ook de onderwijstaak mij zeer geboeid. In 1965 werd met de eigen P-opleiding wiskunde gestart en daar werd ik zonder enige ervaring als studiebegeleider en instructeur aan toegevoegd. Natuurlijk had de toenmalige onderafdeling een soort verzekering gesloten voor het geval ik door mijn onervarendheid brokken zou gaan maken, en wel door als mijn assistent bij mijn instructies de zeer ervaren Van der Meiden aan te stellen, één van mijn latere collega's bij de groep Basisonderwijs. Mijn 'meeloper' Van der Meiden was dus mijn onofficiële supervisor. Ook van hem heb ik onderwijstechnisch veel opgestoken.

Toen ik in Eindhoven ging werken, trof ik daar een zeer plezierige sfeer aan. Grote belangstelling voor onderzoek werd gecombineerd met een grote belangstelling voor onderwijs. Voor iedereen stond het belang van de faculteit, toen onderafdeling geheten, centraal. Het onderwijs bestond voor het grootste gedeelte uit het zogenaamde basisonderwijs, het algemene wiskundeonderwijs voor alle studenten aan deze instelling. Dit onderwijs werd toen niet beschouwd als een sluitpost voor de

onderafdeling. Het was vanzelfsprekend dat het van uitstekende kwaliteit moest zijn. De vakken hadden de inspirerende namen Wiskunde I tot en met Wiskunde V. Ze waren in principe bestemd voor alle studierichtingen. Verschillen tussen de studierichtingen kwamen tot uitdrukking in het aantal vakken dat zij afnamen. Maar alle studenten aan deze instelling kregen toen in hun eerste jaar Wiskunde I en Wiskunde II. Dat betekende 6 uur college en 2 middagen instructie en oefeningen per week gedurende het gehele eerste jaar. Dat is nu voor vrijwel alle studenten vaak aanzienlijk lager.

In 1969 werd de Groep Basisonderwijs opgericht. Deze groep kreeg tot taak het verzorgen van het basisonderwijs in de wiskunde hoofdzakelijk ten behoeve van de studierichtingen anders dan die der wiskunde. De oprichting was niet helemaal onomstreden. Sommigen vonden de GBO volledig overbodig omdat de toenmalige hoogleraren dit onderwijs uitstekend verzorgden; anderen maakten zich bezorgd dat waar de aandacht verdeeld moest worden over onderzoek, bijbehorend onderwijs en basisonderwijs, dit laatste er kwalitatief al gauw bij in zou schieten. Het is opmerkelijk te zien dat momenteel bij onze faculteit na de opheffing van de GBO deze zorgen opnieuw bestaan.

Omdat de onderwijsdruk op de onderafdeling steeds toenam en omdat toentertijd het geven van colleges was voorbehouden aan hoogleraren en lectoren, creëerde de onderafdeling een aantal lectoraten speciaal ten behoeve van het basisonderwijs, zeg dus maar voor de GBO. Mijn werk lag niet op het terrein van het service-onderwijs en ik was dan ook heel verbaasd dat ik na mijn promotie een brief van de toenmalige decaan kreeg waarin stond dat mijn naam genoemd was in verband met een van deze lectoraten en of ik maar wilde solliciteren. Daar moest ik wel even over nadenken. Maar onderwijs heeft mij altijd getrokken. Ik besloot het te doen en werd in 1972 min of meer tot mijn verbazing lector in de wiskunde. In 1979 waren de jaren dat er in het universitair onderwijs overal geld voor was voorbij. De minister bedacht toen een opmerkelijke bezuinigingstruc: alle lectoren werden hoogleraren, zodat nieuw te benoemen hoogleraren op een lectorssalaris konden worden aangeesteld. Dus wederom tot mijn verbazing was ik eind 1979 opeens hoogleraar in de wiskunde.

Het was een gebruik, maar geen verplichting, dat een nieuw benoemde kroondocent een intreerede of openbare les zou houden over zijn werkterrein. Ik heb dat niet gedaan om de eenvoudige reden dat er toen, in 1972, over het basisonderwijs eigenlijk niets te vertellen was.

Het doel van dat onderwijs was en is toekomstige ingenieurs vertrouwd te maken met het wiskundige gereedschap dat zij in hun professionele leven nodig zouden hebben. In die tijd was het gebruik van wiskunde hoofdzakelijk beperkt tot rekenen met pen en papier en dus werd de inhoud van het basisonderwijs bepaald door wat er betrekkelijk eenvoudig met de hand gedaan kon worden. Dat was in een proces van tenminste een eeuw behoorlijk uitgekristalliseerd. Het universitaire service-onderwijs in de wiskunde had dan ook overal op de wereld ongeveer dezelfde inhoud: een paar cursussen analyse, een paar cursussen lineaire algebra en vaak ook nog statistiek en kansrekening. Wat zou je daar in een openbare les over kunnen vertellen?

Nu, na 25 jaar bij het service-onderwijs van de faculteit betrokken te zijn geweest, is er zoveel over het basisonderwijs te vertellen dat een afscheidscollege daar in feite veel te kort voor is. In deze periode is het basisonderwijs sterk veranderd. Daar zijn vele redenen voor aan te geven, waarvan ik er hier slechts twee noem.

Een eerste constatering is dat we de cursussen van 25 jaar geleden nu absoluut niet meer zouden kunnen geven. We worden geconfronteerd met een voortdurende daling van de wiskundige kwaliteit van de binnenkomende studenten. Om misver-

standen te vermijden: hiermee zeg ik niet dat de studenten dommer geworden zijn. Domheid en wiskundige begaafdheid lijken mij niets met elkaar te maken te hebben; ik ken domme wiskundig zeer begaafde mensen zowel als wijze wiskundige onbenullen. We hebben dus in de loop der jaren geleidelijk het niveau van onze cursussen verlaagd, daarmee min of meer gehoorzaamend aan de zogenaamde 'wet van Posthumus', genoemd naar de tweede rector van deze universiteit. Hij had een heel grote belangstelling voor onderwijs en zorgde er onder andere voor dat al heel vroeg aan deze instelling onderzoek gedaan werd naar de kwaliteit van het onderwijs. Zijn stelling luidde dat wat je ook aan het onderwijs doet, het onderwijssysteem er vanzelf voor zorgt dat het slagingspercentage ongeveer hetzelfde blijft. Het betekent impliciet dat de exameneisen bewust of onbewust aangepast worden aan de populatie studenten of leerlingen. Geleidelijk aan is het accent steeds meer komen te liggen op het kunnen maken van vraagstukken in plaats van op inzicht en begrijpen. Dit verschijnsel is niet typisch Nederlands. In vrijwel alle westerse landen wordt het gesignaleerd.

Een tweede aspect is het op grote schaal beschikbaar komen van de computer. Dat betekent dat wiskunde nu al lang niet meer uitsluitend met potlood en papier wordt

beoefend. Dat heeft grote consequenties voor de inhoud en voor de presentatie van het basisonderwijs, dat nu mede tot taak krijgt de toekomstige gebruikers van wiskunde vertrouwd te maken met dit gereedschap. Ik heb mij met deze problematiek vele jaren intensief bezig gehouden en daar wil ik het in dit afscheidscollege over hebben. Omdat ik in deze korte tijd onmogelijk alle facetten aan de orde kan stellen, zal ik mij beperken tot slechts een onderdeel van het basisonderwijs, en wel wat met een Engels-Amerikaanse term nu meestal calculus genoemd wordt. Een ouder woord is analyse, hoewel sommigen een subtiel verschil aanbrengen tussen calculus en analyse.

Calculus en computers

Het woord calculus heeft natuurlijk iets te maken met kalk. Heel vroeger werd met een soort telraam gerekend. Er werden lijnen op de grond getrokken waarover met steentjes geschoven werd. Omdat kalksteen makkelijk in kleine brokjes te breken is, zal er veel met kalksteentjes gerekend zijn en op die manier ontstond de calculus voor het rekenen. Toen er meer gerekend moest worden, bijvoorbeeld in de twaalfde en dertiende eeuw door de opkomende bankiershuizen in Italië, en weer wat later door de verschillende vorsten in Europa, werden die onhandige ongelijke steentjes vervangen door

metalen schijfjes van gelijke afmeting, de rekenpenningen, en werden de lijnen op tafels aangebracht, ook wel op tafelkleden. Aanvankelijk waren de rekenpenningen nogal primitief van uitvoering, maar later begonnen ze een zekere status uit te stralen. De vorsten gingen voor hun administratie rekenpenningen met hun eigen emblemen gebruiken en dat werd natuurlijk prompt nagevolgd. Uiteindelijk werden rekenpenningen zelfs gebruikt voor allerlei vormen van politieke propaganda.

Uiteraard werd het rekengereedschap ook gebruikt in het onderwijs. In figuur 1 ziet U een rekenpenning van omstreeks 1550. Aan de voorzijde is een rekenmeester achter zijn rekestafel met de rekenpenningen in de weer. De keerzijde laat het alfabet zien. Dit is dus een heel oud voorbeeld van het gebruik van technologie in het onderwijs.

Het rekenen met penningen verdween geleidelijk aan rond 1600 uit de Noordelijke Nederlanden ten gunste van het rekenen met Arabische cijfers. Maar nog heel lang waren er mensen die zich daartegen verzetten en bleven vasthouden aan het penningrekenen. Het is grappig te constateren dat we nu in een soortgelijke situatie zijn. Het is duidelijk dat in de toekomst het rekenwerk aan de computer overgelaten zal gaan worden, maar er zijn veel mensen die zich daartegen verzetten en hun berekeningen



Fig. 1.

uitsluitend met potlood en papier uitvoeren.

Laten we nu eens gaan kijken naar een traditionele calculuscursus van zo'n vijftieng jaar geleden, toen ik met dit onderwijs begon. Zoals reeds gezegd bestond de inhoud uit allerlei wiskundige begrippen en technieken die zeer belangrijk waren voor het rekenen met pen en papier. Differentiëren, integreren, reeksen en reeksontwikkelingen, oplossen van differentiaalvergelijkingen waren de standaardonderwerpen. Ik heb al deze onderwerpen van het begin af aan met veel plezier gedoceerd. Misschien zijn de onderwerpen vanuit wiskundig standpunt niet bijster interessant, maar hoe je deze zaken aan grote groepen niet primair in wiskunde geïnteresseerde studenten

moet overbrengen is op zichzelf al een uitdaging.

Om de een of andere mij ook onbekende reden ben ik altijd geïnteresseerd geweest in de effecten van technologie op en in het onderwijs. Aan het eind van de jaren zeventig begonnen kleine zakrekenmachines op ruime schaal beschikbaar te komen. Na verloop van tijd werden die programmeerbaar, in Reverse Polish Notation of zelfs in BASIC. Sommige hadden een heel groot geheugen, van wel 200 byte. Het is nu nauwelijks voorstelbaar dat dat groot genoeg was om enkele eenvoudige numerieke algoritmen te kunnen gebruiken.

Het toevoegen van numerieke procedures aan de klassieke calcu-

luscursus bleek ingrijpende consequenties te hebben. Bij wijze van voorbeeld wil ik iets vertellen over de problemen waar we mee geconfronteerd werden toen we aan de cursus een eenvoudig algoritme voor numerieke integratie toevoegden.

In iedere klassieke calculuscursus staat hoe we de integraal

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 2)^2(x - 3)} dx$$

met potlood en papier aanpakken. We nemen de integrand, passen partiële breuksplitsing toe, integreren ieder van de zo gevonden termen, vullen de bovengrens en de ondergrens in en trekken de resultaten van elkaar af. Dat kost de gemiddelde student tenminste twintig minuten en gaat meestal gepaard met een aantal rekenfouten. Maar met ons zakrekenmachientje vinden we heel snel de numerieke benadering -0.0920487 .

De studenten vonden dit natuurlijk prachtig. Maar zij stelden meteen de zeer gerechtvaardigde vraag waarom zij op het examen zo'n opgave nog met de hand moesten maken, terwijl wij ze in dezelfde cursus gereedschap geven waarmee het veel makkelijker kan. Ik kon mij daar toen, zo rond 1980, nog uit redden door te zeggen dat zo'n numerieke procedure natuurlijk alleen maar een

benaderend antwoord geeft, terwijl het handwerk het exacte resultaat oplevert. Nu kan ik dat antwoord niet meer geven. We hebben tegenwoordig de beschikking over zogenaamde computeralgebrapakketten; programmatuur waarmee we zowel numeriek als symbolisch kunnen rekenen. Voor het basisonderwijs zijn de belangrijkste van deze pakketten momenteel *Mathematica*, *Maple* en *Derive*. Ik gebruik meestal *Mathematica* [1]. Met zo'n pakket vinden we (zelfs op een zakrekenmachine) de exacte waarde van deze integraal:

$$-\frac{1}{66} + \frac{71 \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}{484\sqrt{2}} + \frac{42 \log 2}{121} - \frac{42 \log 3}{121}$$

Maar zegt dit exacte antwoord U meer dan de numerieke benadering?

Met behulp van een eenvoudige zakrekenmachine voorzien van een numerieke integratieprocedure konden we dus al in het begin van de jaren tachtig alle integralen uit een traditionele cursus numeriek benaderen. Maar voor het toepassen van deze numerieke procedure is in feite geen begrip of zelfs maar rekendigheid nodig is. Het is alleen maar knoppen drukken. Dat is natuurlijk niet wat wij de studenten willen leren. Hoe krachtig een computer ook is, de eenvoudige handtechnieken voor integratie blijven nodig, net zo als de calculator kennis van hoofdrekenen niet overbodig maakt.

Maar daarvan moet je de studenten wel overtuigen en dat lukt niet als je ze simpelweg het gebruik van de machine verbiedt.

De oplossing van dit probleem vonden we bij zogenaamde oneigenlijke integralen. Die konden we niet rechtstreeks met behulp van de numerieke integratieprocedure bepalen. Maar meestal kunnen ze door een geschikte substitutie omgezet worden in een gewone integraal die vervolgens benaderd kan worden. Dat transformeren van de integraal vereist nog handrekenwerk. Hier is een voorbeeld.

Beschouw de oneigenlijke integraal

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}} dx.$$

Door met de hand de substitutie $x = 1/t$ toe te passen gaat de integraal over in de gewone integraal

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t^6 + t}}$$

en met de zakrekenmachine vinden we 1.41223 als benadering. Enige jaren lang hebben we op deze manier in het onderwijs een goede balans kunnen vinden tussen handrekenvaardigheden en computertechnieken. Maar dat is nu ook verleden tijd. De benodigde substituties om oneigenlijke integralen om te zetten in eigenlijke zitten nu standaard in de computeralgebrapakket-

ten, zodat we de integraal nu alleen door wat knoppen drukken kunnen benaderen. Hoe moeten we nu nog handrekenvaardigheden voor het bepalen van integralen verkopen aan de studenten? We hebben dat probleem nog niet opgelost.

Dit is niet het enige probleem dat opduikt als we computeralgebra in de cursus gaan gebruiken. De laatste integraal komt in een traditionele calculuscursus niet voor om een vrij opmerkelijke reden: alle technieken om deze integraal met de hand uit te rekenen falen. Iets preciezer: we kunnen bewijzen dat we de primitieve van de integrand niet in gesloten vorm kunnen beschrijven met behulp van de uit het vwo bekende functies. Dat is voor de meeste studenten heel verwarrend. Als het ze niet lukt een integraal met de hand uit te rekenen, ligt het dan aan hun rekenvaardigheid of kan het echt niet? Wanneer kan het dan echt niet? In de traditionele cursussen (en het vwo) komt dat probleem niet voor omdat daar alleen opgaven gegeven worden die 'kunnen'. Studenten krijgen daardoor soms het misplaatste idee dat met wiskunde alles kan en dat wiskunde 'af' is. Een curieus voorbeeld van dit idee kwam eens naar voren toen ik op college een methode voor het bepalen van een nulpunt van een functie aan het behandelen was. Eén van de studenten werd wat onrustig en stelde na verloop van tijd een vraag.

“Als ik het goed begrijp”, zei hij, “bent U bezig de vergelijking $f(x) = 0$ op te lossen. En dat is één vergelijking met één onbekende, en dat hebben we op het vwo toch al gehad?”. Ik heb hem toch maar uit de droom geholpen.

Gebruik van computeralgebra noopt ons dus ook in te gaan op wat er nog analytisch mogelijk is en wat niet. Maar ook hier zorgt de kracht van de hedendaagse pakketten voor problemen. Met de nieuwste versies van computeralgebrapakketten ‘kunnen’ vele integralen die klassiek niet ‘kunnen’ toch wel. Met *Mathematica* vinden we voor de laatste integraal een exact resultaat waarin Hypergeometric2F1 voorkomt. Bij andere integralen vinden we nog tal van andere functies. Het is duidelijk dat als we over meer standaardfuncties beschikken dan alleen de uit het vwo bekende, we natuurlijk ook meer integralen exact uit kunnen rekenen. Daarmee wordt in sommige gevallen het gebruik van numerieke procedures weer overbodig. Maar moeten we al die functies waar een gebruiker van computeralgebra tegen aan kan lopen en die tot nu toe vrijwel alleen aan specialisten bekend waren, nu ook in het basisonderwijs gaan behandelen?

Conclusies

Ik heb U iets verteld over de consequenties van het gebruik van een

modern computeralgebrapakket in het onderwijs. Computeralgebra is een stuk gereedschap waarmee vrijwel alle opgaven uit een traditionele cursus zowel numeriek als symbolisch door knoppendrukken gemaakt kunnen worden. Bovendien kunnen heel wat gecompliceerdere problemen op dezelfde primitieve manier opgelost worden. Wat cru geformuleerd: het gebruik van computeralgebra verhoogt het niveau van wat gedaan kan worden zonder enig begripen tot dat van het derde jaar.

Is dat erg? Het verschil met de klassieke situatie is niet groot. Helaas geldt voor veel studenten dat zij in de klassieke cursussen slechts klassieke problemen leren op te lossen met klassieke oplossingsmethoden; zij slagen voor het examen als zij genoeg van de wiskundige handrecepten kunnen toepassen. Inzicht wordt meestal niet gevraagd. Vaak wordt gezegd dat als studenten maar vaak genoeg iets uitrekenen het begrip vanzelf wel komt. Ik geloof daar niet zo erg in. De meeste van onze eerstejaars studenten hebben een redelijke vaardigheid in een paar eenvoudige wiskundige technieken, maar aan het begrip mankeert wel het een en ander. Zo kennen zij bijvoorbeeld bijna allemaal de formule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

maar vrijwel niemand ziet dat dit betekent dat $\sin x$ vrijwel gelijk is

aan x als x dicht bij 0 ligt; een eigenschap die eigenlijk veel meer inzicht geeft.

Aan de andere kant is begrip iets heel subjectiefs. Ik heb vaak genoeg studenten gesproken die op examens nogal wat onzin opschreven, maar er desondanks oprecht van overtuigd waren dat zij het goed begrepen, want zij konden alle eerdere examenopgaven maken (dachten ze). Mijn idee was dat ze er niets van begrepen.

Ik heb geen idee hoe je begrip zou moeten examineren. Een schriftelijk examen test in de regel alleen vaardigheden en weetjes. Het vreemde van een mondeling examen is dat als de examinator zelf zijn vak goed begrijpt, het hem al direct aan het begin van het examen duidelijk is of de kandidaat het ook begrijpt. De examinator weet in de regel al na een paar minuten wat de uitslag zal zijn. De resterende tijd dient alleen om de student, die toch geacht wordt geruime tijd aan de bestudering van het vak besteed te hebben, niet een katterig gevoel te geven door hem na twee minuten al weer weg te sturen. Het resterende half uur geeft nog maar heel kleine verschuivingen in het eindoordeel. Ik ben heel nieuwsgierig hoe dit proces van 'waarnemen van begrip' eigenlijk werkt.

Ik vind het vanzelfsprekend dat we computeralgebra in het basisonderwijs moeten gaan gebruiken. Zouden we de studenten een kennismaking met dit gereedschap moeten onthouden alleen omdat hierdoor het onderwijs zou kunnen ontaarden in knoppen drukken? Ik zie geen principieel verschil tussen een student die een opgave met de hand maakt door het klakkeloos toepassen van een recept en een student die hetzelfde probleem oplost met computeralgebra. Alleen is de laatste eerder klaar en is het aantal rekenfouten aanzienlijk lager. Het enige wat er mis kan gaan, is het overtikken van de formule. Aan dit verschijnsel zit een heel aantrekkelijke kant, en die heeft te maken met de zogenaamde kwaliteit van het onderwijs. Daar wordt de laatste tijd nogal over gesproken. Volgens velen is het slecht met de kwaliteit van het universitaire onderwijs gesteld. Dat is niet mijn indruk, tenminste niet aan deze instelling. Maar wanneer noem je onderwijs van goede kwaliteit, en als je het al weet, hoe meet je dat dan? Studenten hebben waarschijnlijk net zo snel een gevoel of een docent 'goed' of 'slecht' is als examinatoren hebben over het begrijpen van de stof door een kandidaat. Uit enquêtes van studenten kan iets over de kwaliteit van het onderwijs achterhaald worden.

Maar politici en andere beleidsmakers hebben geen moeite met het

begrip kwaliteit van het onderwijs. Zij nemen eenvoudigweg het slagingspercentage voor de examens als maat. Als er veel studenten zakken voor het examen was het onderwijs dus per definitie slecht en als bijna alle studenten slagen dan was het onderwijs voortreffelijk. Gelukkig zijn studenten kritischer. Er zijn bij ons vakken met hoge slagingspercentages waarvan de studenten verklaren dat ze er niets van begrijpen. Is dat nu kwalitatief goed onderwijs? Aan de andere kant, dezelfde studenten verklaren over het vak basiswiskunde, dat ik de laatste jaren gegeven heb, dat ze dat heel goed onderwijs vinden ondanks het feit dat het rendement niet heel hoog is.

Maar nu weer terug naar ons hoofdonderwerp. Als we de huidige cursussen onveranderd laten en alleen computeralgebra toevoegen, dan zal het onderwijs gaan bestaan uit het maken van opgaven met behulp van enkele eenvoudige computercommando's. Dat is niet inspirerend voor de studenten en niet inspirerend voor de docenten. Bovendien is het volmaakt overbodig. Zodra andere studierichtingen door krijgen dat de door hen gewenste wiskundige technische vaardigheden aanwezig zijn in computeralgebrapakketten, zullen zij geneigd zijn hun wiskundeonderwijs sterk te reduceren of misschien wel af te schaffen. Op een aantal plaatsen in Europa zien we dat al gebeuren.

De opkomst van het gebruik van computeralgebra kan dus leiden tot een verminderde vraag naar wiskundeonderwijs voor die studierichtingen waarin maar een bescheiden gebruik van wiskunde gemaakt wordt. Echter, ook voor deze studierichtingen zullen nieuwe cursussen ontwikkeld moeten worden, minder gericht op rekenvaardigheden en meer op de specifieke toepassingen van wiskunde in de betreffende discipline.

Aan de andere kant is voor topresearch is juist een goed inzicht in wiskunde essentieel; computeralgebra en andere wiskundige programmatuur is daarbij een onontbeerlijk stuk gereedschap. De beschikbaarheid hiervan stelt andere wiskundige eisen aan de gebruiker; het verandert de manier waarop we wiskunde bedrijven en toepassen. Om dit gereedschap goed te kunnen gebruiken is een heel ander wiskundeonderwijs nodig, met een accent op concepten, inzicht en redeneren en minder op technische vaardigheden. De inhoud van de cursussen wordt mede bepaald door de mogelijkheden en vooral ook onmogelijkheden van de gebruikte pakketten. Het ontwikkelen van dergelijke cursussen is niet eenvoudig. We hebben tientallen jaren ervaring met cursussen met receptuur voor het oplossen van standaardproblemen met potlood en papier maar veel minder ervaring met cursussen die het accent leggen op begrip.

Dergelijke cursussen worden voor de studenten moeilijker, maar voor de goede studenten ook veel uitdagender dan de huidige.

Educatief gebruik van de computer

Tot nu toe heb ik alleen aandacht geschonken aan de belangrijkste functie van de computer: rekenen, numeriek en symbolisch. Maar de hedendaagse computer is ook uitermate geschikt voor tekstverwerking en kan mooie plaatjes maken. Het ligt dus voor de hand om de huidige boeken te presenteren in een vorm die op het scherm gelezen kan worden. Op een computer kunnen de illustraties zelfs 'bewegend' zijn en van geluid voorzien worden. Als we daar dan nog de faciliteiten aan toevoegen van ter plaatse het reken- en tekenwerk uitvoeren en elektronisch bladeren, dan krijgen we in plaats van het traditionele boek een zogenaamd *interactief diktaat*.

In de meeste versies van het computergebruikspakket *Mathematica* werkt de gebruiker in een zogenaamd 'notebook' (niet te verwarren met een 'laptop'). Daarmee heeft die gebruiker alle gewenste faciliteiten voor een interactief dictaat tot zijn beschikking. In *Mathematica* is de volledige handleiding, een boek van bijna 1400 bladzijden, aanwezig als interactief dictaat! Afgezien van de inhoudelijke consequenties waarover ik hiervoor gesproken heb, is het eenvoudig de huidige college-

dictaten te presenteren als interactieve dictaten in de vorm van *Mathematica*-notebooks.

Het lijkt erop dat een interactief dictaat alleen maar voordelen heeft boven een klassieke papieren versie. Dat is niet helemaal waar. Veel gebruikers verklaren dat ze toch regelmatig papieren afdrucken maken ondanks het feit dat alles 'on line' beschikbaar is. Ze vinden dat dat makkelijker leest. Ook is er een didactisch nadeel: een interactief dictaat nodigt niet uit tot zelf nadenken. Alles wat je zou willen is beschikbaar. Als je de grafiek van $x + 1/x$ nodig hebt dan ben je sterk in de verleiding om even een plot-opdracht te geven in plaats van de grafiek uit het hoofd te tekenen. Inderdaad zien we dat in veel recent ontwikkeld materiaal voor de triviaalste zaken een computercommando gebruikt wordt.

Verbetert een interactief dictaat de kwaliteit van het onderwijs? Dat is dezelfde vraag of het drukken van de collegedictaten in vierkleurendruk op glanzend papier en de tekst voorzien van historische voetnoten de kwaliteit van het onderwijs verbetert. Een interactief diktaat is eenvoudigweg een verpakking van de cursus, net als een ouderwetse syllabus of een boek. Is de verpakking mooi, dan zijn we misschien wat eerder in de verleiding het product te kopen, maar uiteindelijk is het het product zelf, dus de inhoud

van de verpakking, dat beoordeeld moet worden.

Hier en daar wordt wel geopperd dat als we de cursussen in de vorm van interactieve dictaten beschikbaar zouden stellen, we het aantal contacturen voor het onderwijs zouden kunnen verminderen en dus zouden kunnen bezuinigen.

Misschien kan dat inderdaad voor vakken waarvan de inhoud hoofdzakelijk feitenkennis is. Het kan zelfs bij wiskunde voor die cursussen waarbij het accent ligt op het maken van vraagstukken. Je kunt goed opschrijven hoe een standaardvraagstuk gemaakt moet worden en we leren de studenten te imiteren. Het enige probleem hierbij is dat de receptuur standaard beschikbaar is in ieder computeralgebrapakket. Zoals al opgemerkt, zullen de afnemers van zo'n cursus al gauw zeggen dat ze een dergelijke cursus niet meer nodig hebben. Dat levert inderdaad een bezuiniging op de onderwijsinspanning op, maar van een ongewenste soort.

Heel anders ligt het bij vakken waar inzicht, begrijpen, centraal staat. Het idee om de computer bij het onderwijs te gaan gebruiken als een soort docent is bepaald niet nieuw. Vele jaren geleden was in onderwijskringen 'computer aided instruction' erg populair. Voor tal van vakken werden cursussen ontwikkeld waarbij het aanbieden van lesmateriaal en terugkoppeling naar de student door

de computer gebeurde. Maar dat viel zwaar tegen. Het ontwikkelen van dit soort lesmateriaal bleek ongelofelijk duur te zijn en bovendien voor wiskunde absoluut geen succes. In Engeland en de Verenigde Staten is alleen met het bijspijkeren van eerstejaars studenten met onvoldoende voorkennis van wiskunde enig resultaat gemeld. Maar dat onderwijs concentreert zich hoofdzakelijk op hoe eenvoudige vraagstukken gemaakt moeten worden.

Voor conceptuele cursussen is een goede docent voor de klas absoluut noodzakelijk. Het aantal mispercepties van studenten over de voor een wiskundige eenvoudigste zaken is onvoorstelbaar. Een boek of een interactief dictaat kan nooit alle gedachtenkronkels of soms het ontbreken daarvan bij een student voorzien. Een docent moet dus steeds inspelen op wat hij bij de studenten aan reacties oproept. Deze intensieve wisselwerking kan niet door computerprogramma's worden opgevangen. Ik zie niet in hoe met interactieve dictaten voor begripsmatige cursussen een bezuiniging op de onderwijsinspanning verkregen kan worden.

Ervaringen met het MathWise project [2], waarin een aantal universiteiten in Groot Brittannië een groot aantal modules voor het onderwijs ontwikkelen, wijzen in dezelfde richting. De studenten ervaren het ontbreken van de 'teacher-student

interaction' als een groot nadeel. Ik ga nu nog even kort in op andere programma's die speciaal voor het wiskundeonderwijs ontwikkeld zijn. Een computer geeft een docent mogelijkheden ter verduidelijking van de leerstof die op de klassieke manier met een bord en een krijtje niet uitvoerbaar zijn. Vele docenten hebben daartoe zelf programma's ontwikkeld. Als voorbeeld noem ik het programma Microscope [3], een klein maar handig stukje software dat gebruikt kan worden bij tweedimensionale vectorvelden.

De in de loop der jaren door verschillende docenten opgebouwde ervaring begint nu te resulteren in publicaties van cursusmateriaal. Een voorbeeld hiervan is Interactive Differential Equations [4], bedoeld als aanvulling op het traditionele onderwijs in differentiaalvergelijkingen. Er hoort een papieren(!) werkboek bij waarin tal van, ook wiskundige, vragen gesteld worden over de diverse voorbeelden. Helaas moet ik ook constateren dat er nogal wat software op de markt gebracht wordt waarin het bedrijven van wiskunde terug gebracht wordt tot het bekijken van plaatjes. Daarbij wordt aan de essentie van wiskunde: het zorgvuldig en kritisch kunnen redeneren, geen aandacht besteed.

Slot

Ik kom nu aan het laatste deel van mijn verhaal. Ik heb U verteld dat ik al rond 1980 begonnen ben met de introductie van computers in het basisonderwijs. Daarna heb ik een paar facetten van de consequenties hiervan besproken, gebaseerd op mijn eigen ervaringen in het basisonderwijs. Misschien heeft U het idee gekregen dat de ontwikkelingen die ik U geschetst heb, voortgekomen zijn uit een welbewust beleid van onze faculteit. Dat is echter niet het geval. Na mijn eerste experimenten met de zakrekenmachine kon ik verder gaan met dit werk door gebruik te maken van specifieke wensen van een tweetal studierichtingen, eerst werktuigbouwkunde en daarna informatica.

Het ontwikkelen van onderwijs met geïntegreerd gebruik van software is een omvangrijk werk. Er moet heel zorgvuldig afgewogen worden welke onderwerpen behandeld gaan worden en hoe, waar de accenten komen te liggen, hoe computergebruik zich verhoudt tot het handrekenwerk, hoeveel tijd de onderwerpen vragen, enz. We hadden geen idee wat studenten moeilijk zouden vinden en wat niet; we hebben er wat dat betreft ook wel eens flink naast gezeten. Bovendien ontwikkelden de computers en de professionele software zich snel, zodat we het onderwijs steeds aan moesten passen aan de technische verande-

ringen. Maar het was ook bijzonder inspirerend werk. We hebben in Eindhoven een aantal jaren internationaal duidelijk voorop gelegen met het gebruik van computers in het basisonderwijs. Dat blijkt ook uit de daarop volgende periode van 'oogsten', die eigenlijk nog steeds voortduurt. Regelmatig werd ik uitgenodigd voor voordrachten over dit onderwerp. Vertegenwoordigers van andere instellingen zijn op bezoek geweest om te zien hoe het onderwijs met computers daadwerkelijk verliep. Daarbij mag ik wel vermelden dat onze instelling al heel vroeg veel geïnvesteerd heeft in computers en computerruimten, zodat er een infrastructuur ontstaan was, waar veel andere instellingen jaloers op waren.

De ontwikkeling van dit onderwijs met computers heeft jarenlang aanleiding tot discussie gegeven binnen de GBO. Er waren voorstanders, maar meer tegenstanders. Een van mijn collega's noemde het een 'modieuze bevlieging'. Het verzet tegen het gebruik van computers in het onderwijs was overigens geen typisch Eindhovens verschijnsel en evenmin beperkt tot wiskunde. Vermoedelijk zit er een soort conservatisme achter: men voelt in de onderwijswereld wel aan dat computers veranderingen nodig maken maar men weet niet welke en heeft er ook geen zin in. Een duidelijk voorbeeld maakte ik vele jaren geleden mee toen ik in Leeuwarden een

voordracht hield voor een groep van overwegend HTS-leraren. Ik vertelde toen dat ik partiële breuksplitsing niet meer behandelde; dat is een wiskundige techniek die een computer heel wat beter kan dan de wiskundige. De zaal reageerde geschokt en verontwaardigd. Partiële breuksplitsing is nu net een onderwerp waarvan we door jarenlange ervaring heel goed weten hoe we dat moeten uitleggen en examineren; het was (daarom?) dus heel belangrijk.

De laatste twee jaar heb ik mij bezig gehouden met de ontwikkeling van de cursus basiswiskunde voor de studierichting informatica. Die cursus is nog lang niet af. Aan de ontwikkeling daarvan is echter abrupt een einde gekomen door wat ik beschouw als een zwarte bladzijde in de geschiedenis van onze faculteit: de reorganisatie en de manier waarop de faculteit daarmee omsprong en omspringt. Ik kan mij niet aan de indruk onttrekken dat regelmatig persoonlijk belang geprevaleerd heeft boven het faculteitsbelang. De gebeurtenissen noodzaakten mij het besluit te nemen, eerder dan oorspronkelijk de bedoeling was, mijn activiteiten aan deze instelling te beëindigen.

Zonder het te weten heb ik in het afgelopen voorjaarstrimester dus mijn laatste onderwijs aan deze instelling gegeven; aan 25 jaar intensieve bemoeienis met het basison-

derwijs is een eind gekomen. Nu geef ik een afscheidscollege en kijk terug op deze lange periode. Gelukkig niet in wrok, ondanks de laatste twee jaar. Ik ben in de laatste twee jaar ver weg gedreven van de faculteit als organisatie, maar ik heb mijn onderwijs met evenveel plezier en inzet gegeven als in de daaraan voorafgaande jaren.

Ik heb mijn afscheidscollege "Onderwijs is mensenwerk" genoemd. Daar zijn vele redenen voor. Ik heb hiervoor al uiteengezet dat voor begripsmatige vakken een computer nooit een docent kan vervangen. Onderwijs geven blijft dus mensenwerk. Maar onderwijs is ook bedoeld voor mensen. Ik heb het werken met studenten altijd zeer inspirerend gevonden, ondanks het feit dat de verhouding zeer asymmetrisch is: de docent staat voor een grote groep studenten en wil ze iets leren; de studenten kijken naar de docent en willen niet altijd iets leren. Als je niet uitkijkt, dan wordt een college al gauw eenrichtingsverkeer. De docent neemt een bak met wiskunde en stort die over de hoofden van de arme studenten uit. Het hoeft niet op die manier. Je kunt de studenten sterk betrekken bij je onderwijs. Als je bijvoorbeeld een wiskundig concept wilt uitleggen, dan kun je eerst de studenten vragen wat zijzelf denken dat het is, ze zelf een formulering laten geven en daarop kritiek uitlokken van hun collega-studenten, net zo lang tot er

een bevredigende omschrijving van het concept tot stand gekomen is. Ik benadruk altijd dat wiskunde een verzameling ideeën is en een formule alleen maar een weerslag van een idee. De kunst van wiskunde is het idee achter de formule te achterhalen en dat kan heel goed in interactie met de studenten. Als je met die instelling onderwijs geeft, dan kan er iets heel moois gebeuren. De hele groep studenten, hoe onderling verschillend ze ook zijn, kan zich als een soort eenheid gaan gedragen. Er ontstaat dan tijdens het college een zeer sterke wisselwerking tussen de groep studenten in zijn totaliteit en de docent; inspirerend voor beide partijen. Daarbij heb ik het voordeel dat ik de studenten een heel mooi vak moet leren, namelijk wiskunde. Er zijn zeker studenten die die schoonheid kunnen waarderen. De schoonheid van de wiskunde gaat niet verloren bij gebruik van een computer. Ik kan het niet laten U daarvan één voorbeeldje te laten zien.

Het probleem is wiskundig gezegd het maken van een willekeurige permutatie. Ruwer gezegd: het door elkaar gooien van een verzameling getallen. Hoe zou U de getallen 1, 2, 3, 4, 5 door elkaar gooien? Na wat nadenken gaat U waarschijnlijk op de volgende manier te werk. U kiest willekeurig een van deze vijf getallen. Die zet U apart en houdt dus nog vier getallen over. Daaruit kiest U er weer een en zet die achter het

vorige gekozen getal. Nu heeft U nog drie getallen over. U kiest er een, zet die achter het laatst gekozen getal, enzovoort, tot U niets meer over heeft. U heeft zo de getallen 1, 2, 3, 4, 5 in een willekeurige volgorde gezet. In feite heeft U hiermee al een algoritme voor het maken van een willekeurige permutatie beschreven; het zal U duidelijk zijn dat dit recept net zo goed werkt voor vijf getallen als voor duizend; dit laatste duurt alleen wat langer. Het implementeren van dit algoritme is niet triviaal, maar ook niet bijzonder moeilijk. Maar er is een veel mooier algoritme.

We gaan uit van de getallen 1, 2, 3, 4, 5 en zetten voor ieder van die getallen een willekeurig reëel getal, bijvoorbeeld als volgt: {0.870021,1}, {0.273344,2}, {0.129775,3}, {0.324568,4}, {0.146799,5}. Sorteren we nu naar het toegevoegde element dan vinden we {0.129775,3}, {0.146799,5}, {0.273344,2}, {0.324568,4}, {0.870021,1}. Als we nu die toegevoegde getallen weer weglaten, vinden we {3,5,2,4,1}; we hebben het oorspronkelijke rijtje 1, 2, 3, 4, 5 door elkaar gehusseld! Het enige wat we nodig hebben is een random generator voor getallen tussen 0 en 1 en die is standaard in vrijwel alle programmeertalen beschikbaar. Dit algoritme is veel eenvoudiger te implementeren dan het eerst beschreven algoritme.

Ik ben nu aan het eind van mijn verhaal. Ik heb U iets verteld van mijn ideeën over het gebruik van computers in het onderwijs in wiskunde. Een computer is niets anders dan een krachtig stuk gereedschap waarvan we op een verstandige manier van gebruik moeten maken. Computeralgebrapakketten zijn nu al zo krachtig dat zij de traditionele cursussen, voor zover die zich richten op het kennen van een aantal wiskundige technieken, overbodig maken. Op termijn zou dit kunnen leiden tot een afname van de omvang van het basisonderwijs. Aan de andere kant ontstaat de behoefte tot het ontwikkelen van nieuwe cursussen, waarbij bijna vanzelfsprekend een sterk accent zal komen te liggen op concepten en redeneren. Daar is nog veel meer over te vertellen, maar daar is geen tijd meer voor. Op een gewoon college zou ik nu gezegd hebben "dat vertel ik U de volgende keer wel". Die opmerking laat ik nu achterwege.

Ik dank U voor Uw aandacht.

Referenties

1. Mathematica: Wolfram Research Inc., Champaign, IL 61820, USA.
2. Diana Mackie: Strategies for embedding computer-based learning into teaching. ICTMT-3, Third International Conference on Technology in Mathematics Teaching. Koblenz, September 29th - October 2nd, 1997.
3. Matthias Kawsky, Arizona State University, kawski@akaikuma.la.asu.edu, <http://ciee.eas.asu.edu/fc/microscope/>
4. Beverley West, Steven Strogatz, Jean Marie McDill , John Cantwell: Interactive Differential Equations. Addison Wesley Interactive, 1996, ISBN 0-201-57132-3.

Vormgeving en druk:
Universiteitsdrukkerij TUE
Technische Universiteit Eindhoven

Informatie:
Promoties & Plechtigheden
Telefoon (040-247)2250/4676

ISBN 90 386 1111 0



Fred Simons werd in 1939 in Amsterdam geboren. Na het behalen van het diploma h.b.s.-B studeerde hij aan de Universiteit van Amsterdam waar hij in 1965 cum laude slaagde voor het doctoraal examen wiskunde. Van 1961 tot 1965 was hij als kandidaats-assistent werkzaam aan het Mathematisch Instituut te Amsterdam, achtereenvolgens bij de hoogleraren dr. A. Heijting en dr. C.G. Lekkerkerker. In 1965 werd hij wetenschappelijk medewerker bij de onderafdeling der Wiskunde van de Technische Hogeschool Eindhoven, waar hij in 1971 bij prof.dr. G.M.T.P. Helmborg promoveerde op een proefschrift over Markov processen. In 1972 werd hij ten behoeve van het basisonderwijs lector aan de Technische Universiteit Eindhoven, welk lectoraat eind 1979 werd omgezet in een hoogleraarschap. Zijn bijzondere interesse

had het gebruik van computers in het basisonderwijs. Naast een aantal artikelen verscheen in 1987 een boek van zijn hand over dit onderwerp. Hij was o.a. lid van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, bestuurslid van de Stichting Computer Algebra Nederland en voorzitter en vice-voorzitter van de Mathematics Working Group van SEFI, de Europese vereniging voor ingenieursopleidingen.