

## Асимптотическая сложность оценки по столкновениям для решения линейных систем

**Citation for published version (APA):**

Danilov, D., & Ermakov, S. M. (1997). Асимптотическая сложность оценки по столкновениям для решения линейных систем. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 37(5), 515-523.  
[http://www.maik.ru/contents/commat/commat5\\_97v37cont.htm](http://www.maik.ru/contents/commat/commat5_97v37cont.htm)

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1997

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

УДК 519.612

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ОЦЕНКИ ПО СТОЛКНОВЕНИЯМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 1997 г. Д. Л. Данилов, С. М. Ермаков

(С.-Петербург)

Поступила в редакцию 07.09.95 г.

Проведен анализ сложности оценки по столкновениям в сопряженной схеме Неймана–Улама для решения систем линейных алгебраических уравнений. Выявлено, что рассмотренный стохастический метод не только обладает лучшим, чем итерационные методы, асимптотическим порядком сложности, но и в некоторых случаях является асимптотически оптимальным. Отмеченное свойство оптимальности проявляется, например, в системах сеточных уравнений некоторых краевых задач математической физики.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжено исследование сложности стохастических алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.), начатое в работах [1], [2]. Напомним, что в первой из этих работ были получены оценки битовой сложности алгоритмов решения с.л.а.у., порождаемых так называемой оценкой по поглощению в прямой схеме Неймана–Улама. Асимптотические порядки сложности этих алгоритмов (при росте размерности системы уравнений) сравнивались с соответствующими порядками сложности итеративных методов. Было выявлено существование классов с.л.а.у., для которых сложность стохастических методов имеет лучший асимптотический порядок с ростом размерности системы.

Однако оценка по поглощению, будучи проста для теоретического анализа, не является единственной используемой на практике монте-карловской оценкой. Наряду с ней достаточно распространена и оценка по столкновениям, приводящая к более сложному, но и более эффективному алгоритму. Вопросам сравнительной сложности стохастических алгоритмов, порождаемых оценкой по столкновениям в сопряженной схеме Неймана–Улама, и посвящена эта статья.

Отметим также, что несмотря на ряд достоинств подхода, основанного на сравнении битовых сложностей различных вычислительных методов (т.е. числа так называемых битовых операций, требуемых для реализации того или иного вычислительного метода), полученные при анализе закономерности продолжают оставаться в силе и при более широком подходе. Это побудило авторов при дальнейшем анализе сложностей стохастических и детерминированных методов выражать эти сложности в терминах производимых над числами арифметических операций (сложений, умножений и др.). Получение одного случайного бита в рамках этого подхода также считается арифметической операцией.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Приведем подробную формулировку задачи. В предыдущей работе [1] мы уже выписывали основные предположения для решения с.л.а.у. с помощью прямой оценки по поглощению. Для удобства читателя, а также в связи с тем, что некоторые из них требуют переформулировки для сопряженной схемы, воспроизведем их здесь.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$x = Ax + f, \quad (1.1)$$

где  $x = (x_i)_{i=1}^d$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ ,  $f = (f_i)_{i=1}^d$ , и формально сопряженную к ней систему

$$y = A^T y + h, \quad (1.2)$$

где  $y = (y_i)_{i=1}^d$ ,  $h = (h_i)_{i=1}^d$ , при следующих предположениях.

1.  $0 < \lambda(|A^T|) < 1$  (где  $\lambda(A)$  – наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ ). В силу этого предположения, для любого  $h \in \mathbb{R}^d$  будет сходиться метод последовательных приближений:

$$y^{(n)} = |A^T|y^{(n-1)} + h.$$

Кроме того, это же предположение гарантирует сходимость итерационного ряда и для мажорантной системы

$$\hat{x} = |A|\hat{x} + |f|.$$

2. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица  $|A^T|$  является субстохастической и используется в качестве переходной матрицы  $P$  однородной марковской цепи (м.ц.)  $(\pi, P)$ ,  $\pi = (\pi_i)_{i=1}^d$ ,  $P = (p_{ij})_{i,j=1}^d$ , сопряженной схемы Неймана–Улама.

Действительно (см. [4]), при выполнении условия 1 матрица  $|A^T|$  может быть приведена к субстохастической путем преобразования  $D^{-1}|A^T|D$  (масштабирования переменных), где  $D$  – диагональная матрица. Далее в качестве  $|A^T|$  рассматриваем уже такую приведенную матрицу.

3. При решении системы (1.1) методом Монте-Карло используется оценка по столкновениям для сопряженной схемы Неймана–Улама [7], подробно описанная в разделе 2.

4. Моделирование всех распределений, необходимых для реализации стохастических алгоритмов, осуществляется оптимальным образом с помощью ПДР-деревьев (см. [8]) или близким к нему по трудоемкости способом.

5. Сложность соответствующих алгоритмов определяется в статье в терминах арифметических операций, требуемых для определения решения с заданной степенью точности (погрешности).

6. Под погрешностью детерминистического алгоритма понимается норма разности между точным решением (1.1) и приближенным.

7. В нашей работе под погрешностью стохастического метода подразумевается ширина доверительного интервала рандомизованной оценки. Подробнее вопросы описания погрешностей стохастических методов освещены в [6, с. 284–287].

## 2. ОЦЕНКА ПО СТОЛКНОВЕНИЯМ В СОПРЯЖЕННОЙ СХЕМЕ НЕЙМАНА–УЛАМА

Рассмотрим задачу об оценке линейного функционала от решения системы (1.1) вида

$$I_h = (x^T, h),$$

где  $h$  – заданный вектор. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (1.2), формально сопряженную к (1.1), и соответствующий функционал:

$$I_f^* = (y^T, f). \quad (2.1)$$

Очевидно, что  $I_f^* = I_h$ . Построим однородную обрывающуюся м.ц.  $(\gamma_0, \dots, \gamma_\tau)$ , где  $\gamma_0$  имеет распределение  $\pi$ , а  $\gamma_i$  – распределение  $(p_{i1}, \dots, p_{id}, q_i)$ ,  $q_i = 1 - \sum_{j=1}^d p_{ij}$  – вероятность поглощения из состояния  $i$ , а  $\tau$  – момент поглощения м.ц. Запишем формальную оценку по столкновениям для определения (2.1):

$$\xi^{\text{adj}} = \sum_{n=0}^{\tau} \frac{f_{\gamma_0}}{\pi_{\gamma_0}} (-1)^{\theta_n} h_{\gamma_n}. \quad (2.2)$$

Здесь случайная величина  $\theta_n$  – количество отрицательных элементов матрицы  $a_{j,i}$  системы (1.1) таких, что отрезок траектории м.ц. длины  $n$  имеет звено  $(i, j)$  (с учетом кратности таких звеньев). Условие состоятельности такой оценки (см. [7]) есть  $\pi^* < f$ . С целью упрощения вычисления оценки (2.2) положим

$$\pi^* = |f| / \|f\|_{11}, \quad (2.3)$$

где  $\|f\|_{\Pi} = \sum_{i=1}^d |f_i|$ , после чего (2.2) приобретает вид

$$\xi^{\text{adj}} = \text{sign}(f_{\gamma_0}) \|f\|_{\Pi} \sum_{n=0}^{\tau} (-1)^{\theta_n} h_{\gamma_n}. \tag{2.4}$$

Через  $\text{sign}(s)$  обозначена функция

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Поскольку ниже будут рассматриваться только сопряженные оценки по столкновениям, индекс adj при написании оценки будет опускаться. В дальнейшем при анализе сложности нам потребуется выражение для второго момента оценки (2.4). Пользуясь результатами, изложенными, например, в [5], можно установить, что

$$E\xi^2 = (\chi^T, H(2y - h)),$$

где  $\chi = |A|\chi + f_{\pi}^2$ ,  $f_{\pi}^2 = (f_i^2/\pi_i)_{i=1}^d$  и  $H = \text{diag}(h)$  – матрица, по диагонали которой стоят элементы вектора  $h$ , а остальные элементы нулевые.

Предположим теперь, что с помощью оценки вида (2.4) мы рассчитываем целый набор функционалов  $I_{(s)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \leq d$ , где  $I_{(s)} = I_{h(s)}$ . Из построения (2.4) следует, что на каждой моделируемой траектории можно оценивать все  $m$  этих функционалов. Ниже будет рассматриваться случай, когда  $m = d$  и  $h(s) = \delta^{(s)}$ ,

$$\delta_k^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(Здесь верхний индекс нумерует вектор, а нижний – компоненту вектора). В этом случае выписанные выше формулы имеют вид

$$\xi_{(i)} = \text{sign}(f_{\gamma_0}) \|f\|_{\Pi} \sum_{n=0}^{\tau} (-1)^{\theta_n} \delta_{\gamma_n}^{(i)} \tag{2.5}$$

и

$$E\xi_{(i)}^2 = (\chi^T, \Delta^{(i)}(2y^{(i)} - \delta^{(i)})) \tag{2.6}$$

для второго момента соответственно. В формуле (2.6) величина  $y^{(i)}$  – решение уравнения

$$y^{(i)} = A^T y^{(i)} + \delta^{(i)}, \tag{2.7}$$

а  $\Delta^{(i)} = \text{diag}(\delta^{(i)})$ .

При решении системы (1.1) с помощью оценки (2.5) моделируется некоторое число  $N$  независимых траекторий сопряженной м.ц. и в качестве приближенного решения системы берется арифметическое среднее оценок (2.5) по этим траекториям, т.е.

$$\bar{\xi}_{(i)}(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_{(i)}(k), \tag{2.8}$$

где  $\xi_{(i)}(k)$  – значение оценки (2.5) на  $k$ -й траектории м.ц. Ввиду того что все  $\xi_{(i)}(k)$  входят в сумму линейно, возможно вынести за знак суммы  $\|f\|_{\Pi}$  и, таким образом, получить

$$\bar{\xi}_{(i)}(N) = \frac{\|f\|_{\Pi}}{N} \sum_{k=1}^N \xi'_{(i)}(k), \tag{2.9}$$

где

$$\xi'_{(i)} = \text{sign}(f_{\gamma_0}) \sum_{n=0}^{\tau} (-1)^{\theta_n} \delta_{\gamma_n}^{(i)}, \tag{2.10}$$

а  $\xi'_{(i)}(k)$  – значение  $\xi'_{(i)}$  на  $k$ -й независимой траектории м.ц. Теперь при моделировании траектории м.ц. можно лишь суммировать вклады  $\text{sign}(f_{\gamma_0})(-1)^{\theta_n} \delta_{\gamma_n}^{(i)}$  и только после того, как будут промоделированы все  $N$  траекторий, произвести домножение на  $\|f\|_{\Pi}$  и вычисление арифметического среднего. Такое преобразование существенно уменьшает объем вычислительной работы (подробнее см. раздел 7).

### 3. ОБ ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

В работе [8] подробно излагались методы моделирования дискретных и непрерывных распределений с использованием так называемых ПДР-деревьев. Алгоритмы такого рода используют для получения дискретных с.в. последовательность случайных битов, т.е. реализаций с.в., принимающей с равными вероятностями значения 0 и 1. Будем считать получение одного случайного бита одной арифметической операцией. Не воспроизводя выкладки, проделанные в § 3 статьи [1], сформулируем лишь результат, который нам потребуется в дальнейшем.

**Теорема 1.** Пусть  $t_{\text{mod}}(P, i)$  – сложность моделирования одного ( $i$ -го) переходного распределения м.ц.  $(\pi, P)$  (т.е. распределения  $(p_{i1}, \dots, p_{id}, q_i)$ , где  $q_i = 1 - \sum_{j=1}^d p_{ij}$  – вероятность поглощения из  $i$ -го состояния),  $t_{\text{mod}}(\pi)$  – сложность моделирования начального распределения этой м.ц. Тогда

$$t_{\text{mod}}(P, i) \leq \bar{t}_{\text{mod}}(P), \quad \bar{t}_{\text{mod}}(P) = 3[\lg(d^* + 1) + 2], \quad (3.1)$$

$$t_{\text{mod}}(\pi) \leq \bar{t}_{\text{mod}}(\pi), \quad \bar{t}_{\text{mod}}(\pi) = 3[\lg(K(\pi)) + 2], \quad (3.2)$$

где  $K(\pi)$  – число ненулевых элементов вектора  $\pi$ , а  $d^*$  – максимальное число ненулевых элементов в строке матрицы  $P$ .

### 4. ОБЩАЯ СХЕМА ОЦЕНИВАНИЯ СЛОЖНОСТИ МОНТЕ-КАРЛОВСКОГО МЕТОДА

Как и в работе [1], будем определять сложность монте-карловского метода решения с.л.а.у. через среднее число арифметических операций, требуемых для достижения заданной ширины доверительного интервала арифметического среднего (2.9). Таким образом, сложность монте-карловского метода решения с.л.а.у. есть  $ET(\epsilon)$ , где  $T(\epsilon) = T(\epsilon, A, f, \gamma)$  – количество арифметических операций, требуемых для выполнения неравенства

$$\gamma \sqrt{D \bar{\xi}_{(i)}(N)} \leq \epsilon \quad (4.1)$$

для любого  $i$ . Через  $\gamma$  обозначена константа, определяющая ширину доверительного интервала. (Аргументы  $A, f, \gamma$  при  $T$  здесь и далее для краткости опускаются.)

Поведение величины  $ET(\epsilon)$  описывается следующей теоремой.

**Теорема 2.** Для сложности монте-карловского метода решения системы линейных алгебраических уравнений  $ET(\epsilon)$  справедлива оценка сверху:

$$ET(\epsilon) \leq \frac{2\gamma^2}{\epsilon^2} \|\chi\|_1 \max_i \|y^{(i)}\|_1 \{E\tau(\bar{t}_{\text{mod}}(P) + 5) + \bar{t}_{\text{mod}}(\pi) + 1\} + 4 \dim(x), \quad (4.2)$$

где  $4 \dim(x)$  – размерность вектора  $x$ , а  $\|\chi\|_1 = \max_{i=1, d} |\chi_i|$ .

**Доказательство.** Очевидно, что условие (4.1) заведомо будет выполнено при числе траекторий, определяемом выражением

$$N' = \frac{\gamma^2}{\epsilon^2} \|E\xi^2\|_1,$$

где  $E\xi^2$  – вектор, у которого  $i$ -я компонента равна  $E\xi_{(i)}^2$ . Перечислим операции, производимые при моделировании одной траектории. Пусть  $n$  – номер промоделированного звена м.ц. С учетом формулы (2.10) легко определить, что для вычисления монте-карловской оценки на одной траектории требуется следующее.

1. Смоделировать начальное распределение (т.е. найти  $\gamma_0$ ) и определить  $\text{sign}(f_{\gamma_0})$ . Это действие требует  $t_{\text{mod}}(\pi) + 1$  арифметических операций ( $n = 1$ , что соответствует начальному звену).
2. Смоделировать переходное распределение (т.е. найти  $\gamma_n$ ), для чего требуется  $t_{\text{mod}}(P, \gamma_n)$  арифметических операций.
3. Произвести проверку, является ли состояние поглощающим, – это 1 арифметическая операция. Если произошло поглощение, то моделирование траектории прекращается и число промоделированных траекторий увеличивается на 1. В противном случае переходим к следующему пункту.
4. Вычислить оценку (2.10), для чего необходимо вычисление  $\theta_n = \theta_{n-1} \text{sign}(a_{\gamma_n \gamma_{n-1}})$  и  $(-1)^{\theta_n}$  – это 3 арифметические операции, вычисление  $(-1)^{\theta_n} \text{sign}(f_{\gamma_0})$  – это 1 арифметическая операция.
5. Вновь переходим к п. 2, полагая  $n := n + 1$ .

Таким образом, с учетом оценок (3.1), (3.2) получаем, что при моделировании и вычислении оценки на одной траектории затрачивается в среднем не более  $\mathbb{E}t[\bar{t}_{\text{mod}}(P) + 5] + \bar{t}_{\text{mod}}(\pi) + 1$  арифметических операций. Кроме того, для вычисления среднего (2.9) требуется получить значение  $\|f\|_{\Pi}$  (вообще говоря, не более  $2\dim(x)$  арифметических операций), а также умножить накопленные суммы на  $\|f\|_{\Pi}$  и поделить на число траекторий – это еще  $2\dim(x)$  арифметических операций. Поэтому  $\mathbb{E}T(A, \varepsilon)$  оценивается следующим образом:

$$\mathbb{E}T(A, \varepsilon) \leq N \left\| \mathbb{E} \xi^2 \right\|_1 \{ \mathbb{E}t[\bar{t}_{\text{mod}}(P) + 5] + \bar{t}_{\text{mod}}(\pi) + 1 \} + 4\dim(x).$$

Наконец, оценивая  $\| \mathbb{E} \xi^2 \|_1$ , имеем

$$\mathbb{E}(\xi^{(i)})^2 = (\chi^T \Delta^{(i)} (2y^{(i)} - \delta^{(i)})) \leq 2(\chi^T, \Delta^{(i)} y^{(i)}) \leq 2\|\chi\|_1 \|y^{(i)}\|_1,$$

откуда

$$\| \mathbb{E}(\xi(N))^2 \|_1 \leq 2\|\chi\|_1 \max_i \|y^{(i)}\|_1,$$

что и доказывает равенство (4.2).

**Замечания.** 1. Учитывая (2.3), можно установить, что вектор  $\chi$  есть решение уравнения

$$\chi = |A| \chi + \|f\|_{\Pi} |f|.$$

2. Формула (4.2) может быть записана в следующей форме:

$$\mathbb{E}T(\varepsilon) \leq \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2} (T^{(1)} + T^{(2)}) + T^{(3)}, \tag{4.3}$$

где  $T^{(1)} = \|\chi\|_1 \max_i \|y^{(i)}\|_1 \mathbb{E}t[\bar{t}_{\text{mod}}(P) + 5]$ ,  $T^{(2)} = \|\chi\|_1 \max_i \|y^{(i)}\|_1 [\bar{t}_{\text{mod}}(\pi) + 1]$ ,  $T^{(3)} = 4\dim(x)$ . Первое из слагаемых отражает сложность алгоритма, связанную с моделированием переходных распределений м.ц., второе – сложность, обусловленную моделированием начального распределения. Третье слагаемое соответствует вспомогательным операциям.

## 5. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О СРАВНИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ

Приведем некоторые соображения, говорящие о том, что рассмотренный стохастический метод может иметь преимущества перед детерминированными (итерационными) методами решения линейных систем. Как хорошо известно, в случае заполненных матриц ( $K(A) = O(d^2)$ , через  $K(A)$  обозначено число элементов матрицы  $A$ ) и фиксированного количества итераций асимптотический порядок сложности этих методов есть  $O(d^2)$ .

Рассмотрим подробнее формулу (4.2). Легко видеть следующее.

1. Порядок (4.2) по  $\varepsilon$  есть  $O(1/\varepsilon^2)$ , что отражает сильную зависимость сложности монте-карловского метода от точности решения.
2. В правой части (4.2) формальная зависимость от  $d$  отсутствует. Однако для заполненных матриц имеем  $K(\pi) = O(d)$ ,  $d_A^* = O(d)$ ; кроме того,  $\|\chi\|_1 \leq \|f\|_{\Pi} \|\hat{x}\|_1 \leq d\|f\|_{\Pi} \|\hat{x}\|_1$ . Рассматривая системы с ограниченными средней длиной траектории и нормами  $\|f\|_{\Pi}$ ,  $\|\hat{x}\|_1$  при фиксированном порядке точности  $\varepsilon$ , получаем в асимптотике по  $d$  порядок  $O(d \log(d))$ , что лучше, чем у итеративных методов.

Приведенные соображения показывают, что существуют классы с.л.а.у., для которых монтекарловский метод имеет преимущество перед итерационными. На практике, однако, решаемые системы могут иметь специфические особенности (их матрицы могут быть разреженными,  $\varepsilon$  может зависеть от  $d$  и т.д.). Поэтому интересно провести подробный сравнительный анализ оценок сложности для некоторых модельных линейных систем. Вопрос о выборе модельной задачи также непрост, поскольку из практического опыта известно, что стохастические методы эффективны для решения сложных задач (с разрывными коэффициентами, в областях сложной формы и др.), в то время как аналитические оценки удается получить лишь для достаточно простых случаев. В связи с этим было решено провести сравнительный анализ итерационных и стохастических методов для с.л.а.у., получаемых при решении внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном гиперкубе. Эта задача, будучи хорошо исследуемой аналитически, в то же время является почти общепринятым примером, широко используемым в специальной литературе при анализе свойств вычислительных методов (см. [3], [9]–[11]).

## 6. СЛОЖНОСТЬ ОЦЕНКИ ПО СТОЛКНОВЕНИЯМ ВНУТРЕННЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Ранее (см. [2]) было установлено, что в случае с.л.а.у., получаемых при дискретизации внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в многомерном гиперкубе, оценка по поглощению имеет с ростом размерности исходной задачи лучший асимптотический порядок сложности, чем итеративный метод. Однако на практике подобные системы обычно решаются при фиксированной размерности задачи, а меняется лишь шаг сетки. В связи с этим здесь анализ сложности ведется при произвольной, но фиксированной размерности и асимптотика берется по шагу сетки.

Рассмотрим разностную схему для внутренней задачи Дирихле с нулевыми граничными условиями в  $n$ -мерном гиперкубе:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = -\Phi(x), \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (6.1)$$

где  $\Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n), \exists i: x_i = 0\}$  – граница гиперкуба и  $\|\Phi\|_C$  фиксирована. Производя стандартную (см., например, [3] и [10]) аппроксимацию задачи (6.1) с помощью  $(2n + 1)$ -точечного шаблона на сетке с постоянным шагом  $h = 1/(d + 1)$  (при этом точка гиперкуба с координатами  $(i_1 h, \dots, i_n h)$  обозначается как  $(i_1, \dots, i_n)$  и значение функции  $\Phi_{x_1, \dots, x_n}$  в этой точке – как  $\Phi_{i_1, \dots, i_n}$  соответственно), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$x_{i_1, \dots, i_n} = \frac{1}{2n} \sum_{j_1, \dots, j_n \in J(i_1, \dots, i_n)} x_{j_1, \dots, j_n} + \frac{h^2}{2n} \Phi_{i_1, \dots, i_n},$$

где

$$J(i_1, \dots, i_n) = (i_1 \pm 1, \dots, i_n \pm 1) \cap \Omega^0, \quad \Omega^0 = \{(k_1, \dots, k_n): 1 \leq k_1 \leq d, \dots, 1 \leq k_n \leq d\},$$

которая после соответствующей смены обозначений записывается в виде (1.1), причем верно следующее:

- 1)  $\dim(x) = d^n$ ;
- 2) матрица  $A$  субстохастическая;
- 3)  $K(A) = 2nd^{(n-1)}(d-1)$ ;
- 4)  $A = A^T$  в силу самосопряженности оператора Лапласа (возможно, для выполнения последнего условия потребуется перенумерация компонент  $x$  и  $f$ ).

Проведем оценивание второго момента средней длины траектории, норм решений сопряженного уравнения и сложности моделирования распределений. Оценки асимптотического порядка величины  $\|\chi\|_1$  и средней длины траектории легко получаются из рассмотрения соответствующих конечно-разностных уравнений. Результаты оценивания норм решений сопряженного уравнения можно сформулировать в виде следующих лемм, подробное доказательство которых опускается.

**Лемма 1.** Для нормы решения уравнения (2.7) равномерно по любому индексу справедлива оценка

$$\|y^{(i_1, \dots, i_n)}\|_1 \leq nh^n 2^{n-1} \sum_{k_1, \dots, k_n} \left[ \sum_{s=1}^n \sin^2 \frac{\pi k_s h}{2} \right]^{-1}.$$

**Доказательство.** Утверждение доказывается через разложение решения уравнения

$$y_{m_1, \dots, m_n}^{(i_1, \dots, i_n)} = \frac{1}{2n} \sum_{j_1, \dots, j_n \in J(m_1, \dots, m_n)} y_{j_1, \dots, j_n}^{(i_1, \dots, i_n)} + \delta_{m_1, \dots, m_n}^{(i_1, \dots, i_n)}$$

по собственным векторам конечно-разностной задачи Дирихле с последующим оцениванием модуля компоненты  $y^{(i_1, \dots, i_n)}$ . (В записанном выше уравнении верхние индексы нумеруют векторы, а нижние – компоненты векторов.)

В следующей лемме выводится асимптотическая оценка суммы  $\sum_{k_1, \dots, k_n} [k_1^2 + \dots + k_n^2]^{-1}$ , для доказательства которой достаточно оценить мультииндексную сумму через соответствующий многомерный интеграл и произвести необходимые арифметические преобразования.

**Лемма 2.** Пусть  $I(d) = \sum_{k_1, \dots, k_n} [k_1^2 + \dots + k_n^2]^{-1}$  и суммирование идет по  $1 \leq k_s \leq d$  для  $1 \leq s \leq n$ . Тогда

$$I(d) \leq \frac{2^n - 1}{n} + S_{n-1} \alpha_n(\sqrt{nd}),$$

где  $S_{n-1} = 2\pi(k/2)/\Gamma(k/2)$  – площадь поверхности единичной  $n$ -мерной гиперсферы и

$$\alpha_n(r) = \begin{cases} 1 - 1/r, & n = 1, \\ \ln(r), & n = 2, \\ (r^{n-2} - 1)/(n - 2), & n \geq 3. \end{cases}$$

Теперь можно перейти к исследованию норм решений сопряженного уравнения.

**Лемма 3.** Нормы решения сопряженного уравнения  $\|y^{(i_1, \dots, i_n)}\|_1$  в асимптотике по  $d \rightarrow \infty$  при фиксированном  $n$  ведут себя следующим образом:

$$\|y^{(i_1, \dots, i_n)}\|_1 \leq \begin{cases} \frac{16(d+1)}{\pi^2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{d}\right) \right\} = O(d), & n = 1, \\ \frac{16}{\pi^2} \left\{ 3 + 8\pi \left[ \ln(d) + \frac{\ln(2)}{2} \right] \right\} = O(\lg(d)), & n = 2, \\ \frac{n \cdot 2^{n+4}}{\pi^2 d^{n-2}} \left\{ \frac{2^n - 1}{2n} + \frac{\pi^{n/2} (n^{(n-2)/2} d^{n-2} - 1)}{(n-2)\Gamma(n/2)} \right\} = O(1), & n \geq 3. \end{cases}$$

Эта лемма является непосредственным следствием двух предыдущих.

Опуская некоторые тривиальные выкладки, можно резюмировать лишь окончательные результаты. В табл. 1 приведены асимптотические порядки при  $d \rightarrow \infty$  основных параметров систем, а также трех слагаемых, входящих в правую часть (4.3), и оценок сложности монте-карловского алгоритма при соответствующем выборе точности решения  $\epsilon$ . Так, в восьмом столбце таблицы записаны асимптотические порядки сложности монте-карловского алгоритма при фиксированной степени погрешности  $\epsilon = \epsilon_0$ , в девятом столбце – соответствующие порядки сложности при  $\epsilon = h^2$ . Такой выбор  $\epsilon$  используется на практике в случае, когда глобальный порядок аппроксимации рассматриваемой конечно-разностной схемы есть  $h^2$ . Наконец, в последний столбец помещены соответствующие порядки для случая  $\epsilon = h^s, 0 \leq s < \infty$ , который обобщает два предыдущих. Все рассмотренные порядки выражены в терминах количества точек сетки на ребре гиперкуба (т.е. величины  $d$ ).

Таблица 1

$n$	$\ y\ _1$	$\ \chi\ _1$	$E\tau^*$	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$T^{(3)}$	$\epsilon = \epsilon_0$	$\epsilon = 1/d^2$	$\epsilon = 1/d^s$
1	$d$	$1/d$	$d^2$	$d^2$	$\log d$	$d$	$d^2$	$d^6$	$d^{2+2s}$
2	$\log d$	1	$d^2$	$d^2 \log d$	$\log^2 d$	$d^2$	$d^2 \log d$	$d^6 \log d$	$d^{2+2s} \log d$
$\geq 3$	1	$d^{n-2}$	$d^2$	$d^n$	$d^{n-2} \log d$	$d^n$	$d^n$	$d^{n+4}$	$d^{n+2s}$



Табл. 2 содержит те же самые величины, однако выраженные в терминах числа уравнений системы  $N$ . Напомним, что это число связано с количеством разбиений ребра очевидным соотношением  $N = d^n$ .

Для сравнительного анализа сложности проведем аналогичные выкладки для метода простой итерации. В работе [1] выписаны оценки числа итераций, необходимых для вычисления решения системы вида (1.1) с заданной погрешностью (см. лемму 2 и замечания 1, 2 к ней). В некоторых работах по вычислительной математике (см., например, [11]) при асимптотическом анализе свойств вычислительных алгоритмов используют оценки количества итераций, требуемых для уменьшения нормы ошибки в заданное число раз. Несмотря на то, что получаемые при этом асимптотические порядки (итерационных методов), как правило, лучше, чем приведенные ранее в [1], мы используем здесь указанный подход, поскольку сравнительный анализ выявляет преимущества стохастического метода даже при таких очень выигрышных для итерационных методов условиях.

Согласно формуле (2.10) из [11, с. 204], количество итераций, требующихся для уменьшения второй нормы ошибки решения в  $1/\varepsilon$  раз, находится как

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\lg(\varepsilon)}{\lg(q(\tau))} \right\rceil + 1,$$

где  $q(\tau)$  – граница спектра оператора шага итерационного метода с параметром  $\tau$ . Для метода простой итерации  $\tau = 1$ , а для системы (6.1) справедливо  $\lg^{-1}[q\tau] = O(h^2)$  для любого  $n$ . Учитывая, что на каждой итерации требуется произвести, вообще говоря, не менее  $O(K(A))$  арифметических операций, можно выписать соответствующие порядки сложности, которые и приведены в табл. 3 и 4. Заметим, что порядки сложности, записанные на пересечении вторых строк и столбцов этих таблиц, по существу совпадают с данными, приведенными в книге [11, с. 283].

Сформулируем несколько наиболее очевидных выводов.

1. При фиксированной погрешности оценка по столкновениям имеет лучший асимптотический порядок сложности, чем метод простой итерации при размерности решаемой задачи  $n \geq 2$ .

2. При фиксированной погрешности оценка по столкновениям имеет порядок сложности, пропорциональный числу уравнений системы при  $n \geq 3$ . Легко заметить, что этот порядок не улучшаем: действительно, даже если решение системы уже известно и каждая его компонента вычисляется за одну арифметическую операцию, вычисление всех  $N$  значений потребует  $N$  арифметических операций и будет иметь асимптотический порядок сложности  $N$ . Таким образом, оценка по столкновениям имеет асимптотически оптимальный в указанном смысле порядок сложности при размерности решаемой задачи  $n \geq 3$ .

3. В случае когда величина погрешности связана с шагом сетки как  $\varepsilon = h^2$ , оценка по столкновениям имеет худший асимптотический порядок сложности, чем метод простой итерации при любой размерности решаемой задачи.

4. В случае когда величина погрешности связана с шагом сетки как  $\varepsilon = h^s$  и  $s \leq 1$ , оценка по столкновениям имеет лучший асимптотический порядок сложности, чем метод простой итерации при размерности решаемой задачи  $n \geq 3$ . При размерности задачи  $n = 2$  стохастический алгоритм обладает таким же асимптотическим порядком сложности, как и итеративный.

Таблица 2

$n$	$\ y\ _1$	$\ x\ _1$	$E\tau^*$	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$T^{(3)}$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\varepsilon = N^{-2/n}$	$\varepsilon = N^{-s/n}$
1	$N$	$1/N$	$N^2$	$N^2$	$\lg N$	$N$	$N^2$	$N^6$	$N^{2+2s}$
2	$\lg N$	1	$N$	$N \lg N$	$\lg^2 N$	$N$	$N \lg N$	$N^3 \lg N$	$N^{1+s} \lg N$
$\geq 3$	1	$N^{(n-2)/n}$	$N^{2/n}$	$N$	$N^{(n-2)/n} \lg N$	$N$	$N$	$N^{(n+4)/n}$	$N^{(n+2s)/n}$

Таблица 3

$n$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\varepsilon = d^{-2}$	$\varepsilon = d^{-s}$
1	$d^3$	$d^3 \lg d$	$d^3 \lg d$
2	$d^4$	$d^4 \lg d$	$d^4 \lg d$
$\geq 3$	$d^{n+2}$	$d^{n+2} \lg d$	$d^{n+2} \lg d$

Таблица 4

$n$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\varepsilon = N^{-2/n}$	$\varepsilon = N^{-s/n}$
1	$N^3$	$N^3 \lg N$	$N^3 \lg N$
2	$N^2$	$N^2 \lg N$	$N^2 \lg N$
$\geq 3$	$N^{1+2/n}$	$N^{1+2/n} \lg N$	$N^{1+2/n} \lg N$

Таблица 5

$n$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\varepsilon = d^{-2}$	$\varepsilon = d^{-s}$
1	$d^2$	$d^2 \lg d$	$d^2 \lg d$
2	$d^3$	$d^3 \lg d$	$d^3 \lg d$
$\geq 3$	$d^{n+1}$	$d^{n+1} \lg d$	$d^{n+1} \lg d$

Таблица 6

$n$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\varepsilon = N^{-2/n}$	$\varepsilon = N^{-s/n}$
1	$N^2$	$N^2 \lg N$	$N^2 \lg N$
2	$N^{3/2}$	$N^{3/2} \lg N$	$N^{3/2} \lg N$
$\geq 3$	$N^{1+1/n}$	$N^{1+1/n} \lg N$	$N^{1+1/n} \lg N$

5. Очевидно, что асимптотическая сложность стохастического метода гораздо сильнее зависит от погрешности решения, чем сложность метода итеративного, которая при  $\varepsilon = h^s$  от  $s$  вообще не зависит.

Аналогичные результаты дает сравнение оценки по столкновениям с методом последовательной верхней релаксации. Асимптотические порядки сложности этого метода приведены в табл. 5, 6.

При этом к уже отмеченным выводам следует добавить еще один.

В случае когда величина погрешности связана с шагом сетки как  $\varepsilon = h^s$  и  $s \leq 1/2$ , оценка по столкновениям имеет лучший асимптотический порядок сложности, чем метод последовательной верхней релаксации при размерности решаемой задачи  $n \geq 3$ . При размерности задачи  $n = 2$  стохастический алгоритм обладает таким же асимптотическим порядком сложности, как и релаксационный метод.

Отмеченные факты подтверждают распространенное мнение о том, что монте-карловские методы хороши для решения задач со сравнительно слабыми требованиями к точности. Особо следует отметить свойство оптимальности рассмотренного монте-карловского метода при фиксированном порядке погрешности решения, а также то, что рассматриваемые детерминированные методы при этом аналогичным свойством не обладают.

## 7. О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОНТЕ-КАРЛОВСКИХ ОЦЕНОК

В предыдущих разделах было проведено исследование сложности и доказано существование обширных классов задач, для которых монте-карловский метод решения систем линейных алгебраических уравнений имеет лучший асимптотический порядок сложности, чем ряд известных итерационных методов. Однако необходимо отметить еще одну чрезвычайно важную черту предлагаемой модификации монте-карловских методов.

Как известно (см. [3]), при практическом применении вычислительного метода большое значение имеет не только порядок сложности соответствующего алгоритма, но и константа при этом порядке. Рассмотрим с этой точки зрения полученные в разделе 4 оценки сложности. Величины  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ , которые имеют ведущий порядок, определяются сложностью моделирования траектории и вычисления оценки на ней. Из построения оценки (см. раздел 2) следует, что эти операции не требуют вычислений с плавающей точкой, наиболее трудоемких при использовании ЭВМ. Более того, поскольку при суммировании вкладов по траектории реально суммируются единицы (разряды), вся схема моделирования и вычисления оценок на траекториях может быть реализована на уровне поразрядных (битовых) операций, что делает такие алгоритмы исключительно привлекательными для реализации специализированных вероятностных процессоров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Д.Л., Ермаков С.М. О сравнительной трудоемкости метода Монте-Карло для решения систем линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 5. С. 661–676.
2. Данилов Д.Л., Ермаков С.М. О сложности схемы Неймана–Улама для решения системы сеточных уравнений многомерной задачи Дирихле // Вестн. СПбГУ. Сер. Математика. 1995. № 1. С. 11–14.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
5. Ермаков Н.С. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
6. Ермаков С.М., Жигляевский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
8. Кнут Д., Яо Э. Сложность моделирования неравномерных распределений // Кибернетич. сб. 1983. Вып. 19. С. 97–158.
9. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.