

# Spanningsverdeling in een wig t.g.v. een geconcentreerde kracht aan de top, werkend in een richting loodrecht op de symmetrie-as

**Citation for published version (APA):**

Bouter, F. H. (1968). *Spanningsverdeling in een wig t.g.v. een geconcentreerde kracht aan de top, werkend in een richting loodrecht op de symmetrie-as*. (DCT rapporten; Vol. 1968.011). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1968

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Spanningsverdeling in een wig t.g.v.  
een geconcentreerde kracht aan de top,  
werkend in een richting loodrecht op  
de symmetrie-as.

F.H. Bouter

WE 68/11

Spanningsverdeling in een wig t.g.v. een  
geconcentreerde kracht aan de top, werkend  
in een richting loodrecht op de symmetrie.as.

Eindhoven, april 1968

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized 'F' and 'B' followed by the name 'Bouler'.

F.H. Bouler

Spanningsverdeling in een wig t.g.v. een geconcentreerde kracht aan de top, werkend in een richting loodrecht op de symmetrie-as

## Inhoud

### I Inleiding.

### II THEORIE

II-1 2 Dim. spanningsprobleem in poolcoördinaten

II-2. Een aan de basis ingeklemde wig, belast door een geconcentreerde kracht in de top, werkend in een richting loodrecht op de symmetrie-as.

### III Experimenten

III-1. Het doormeten van een Araldit-model van de wig met behulp van de optische bank.

III-2 Resultaten 1<sup>e</sup> experiment.

III-3. 2<sup>e</sup> Experiment:

Metingen aan een electrisch analogon van de belaste wig.

### IV Conclusie

Grafieken : I t/m XII

### Literatuur:

FROCHT, Photoelasticity Vol. II. (1948)

TIMOSHENKO. GOODIER, Theory of Elasticity ; (second edition)

WE RAPPORT nr 68-12

## I. Inleiding

We beschouwen een oneindig lange wig belast door een kracht  $P$ , aangrijpend in de top, werkend in een richting loodrecht op de symmetrie-as.

De tophoek van de wig is  $40^\circ$ .

Ten gevolge van deze belasting zal er een radiale spanningsverdeling in de wig ontstaan.

Deze spanningsverdeling zal worden berekend en met experimenteel gevonden waarden worden geverifieerd.

Het experiment bestaat uit een twee dimensionaal optisch spanningsonderzoek. Hierbij vinden we de richting van de hoofdspanningen en het verschil van de hoofdspanningen, in het onderhavige geval de hoofdspanning zelf, omdat we hier, zoals reeds genoemd, met een radiale spanningsverdeling te maken hebben.

Als tweede experiment wordt een electrisch analoog van de wig doorgemeten. Dit geeft algemeen als resultaat de som van de hoofdspanningen, in dit geval weer direct de hoofdspanning.

## II. Theorie

### II-1 2 Dimensionaal spanningsprobleem in poolcoördinaten.

Het oplossen van een 2-dimensionaal spanningsprobleem, in Cartesische coördinaten, komt neer op het vinden van een spanningsfunctie  $\phi(x,y)$ , die moet voldoen aan de 4<sup>e</sup> orde differentiaalvergelijking  $\nabla^4 \phi = 0$  en aan de randvoorwaarden.

De spanningen vinden we dan met:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

De op deze manier afgeleide spanningen voldoen automatisch aan het evenwicht.

In ons geval verdient het de voorkeur om met poolcoördinaten te werken.

De coördinaten-transformatie wordt gegeven door  $r^2 = x^2 + y^2$   
 $\theta = \arctan y/x$

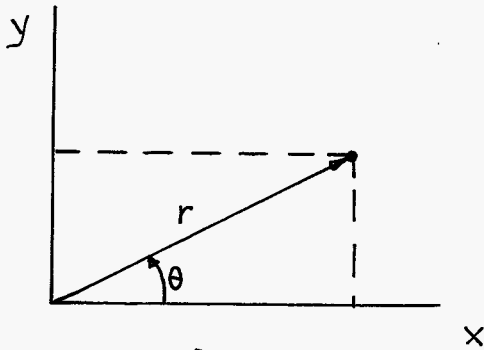


fig 1.

De transformatie van de bi-potentiaal vergelijking

$$\nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

verloopt als volgt.

$$\phi = \phi(r, \theta)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

$\frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  en  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$  vinden we door partijk differentiatie

van de vergelijkingen  $r^2 = x^2 + y^2$   
 $\theta = \arctan y/x$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} [r^2 = x^2 + y^2] \rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta.$$

$$\text{zo ook} \rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

$$\text{Hiermede wordt } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} =$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos \theta + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right] \cos \theta - \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] \frac{\sin \theta}{r} =$$

$$= \cos^3 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}.$$

op analoge wijze vinden we

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

De bi-potentiaal vergelijking in poolcoördinaten wordt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0, \quad \phi = \phi(r, \theta).$$

De spanningen worden als volgt van de spanningfunctie  $\phi(r, \theta)$  afgeleid.

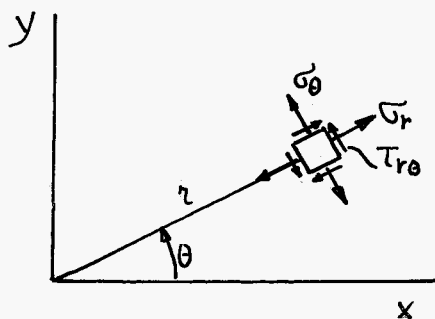


fig 2.

$$\sigma_r = (\sigma_x)_{\theta=0} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{\theta=0}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = (\sigma_y)_{\theta=0} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = (\tau_{xy})_{\theta=0} = \left(\frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right)_{\theta=0} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)$$

Resumé:

Het oplossen van een 2-dimensionaal spanningsprobleem in poolcoördinaten komt neer op het vinden van een spanningfunctie  $\phi = \phi(r, \theta)$ , die moet voldoen aan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \quad \text{en aan de randvoorwaarden.}$$

De spanningen vinden we uit  $\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$

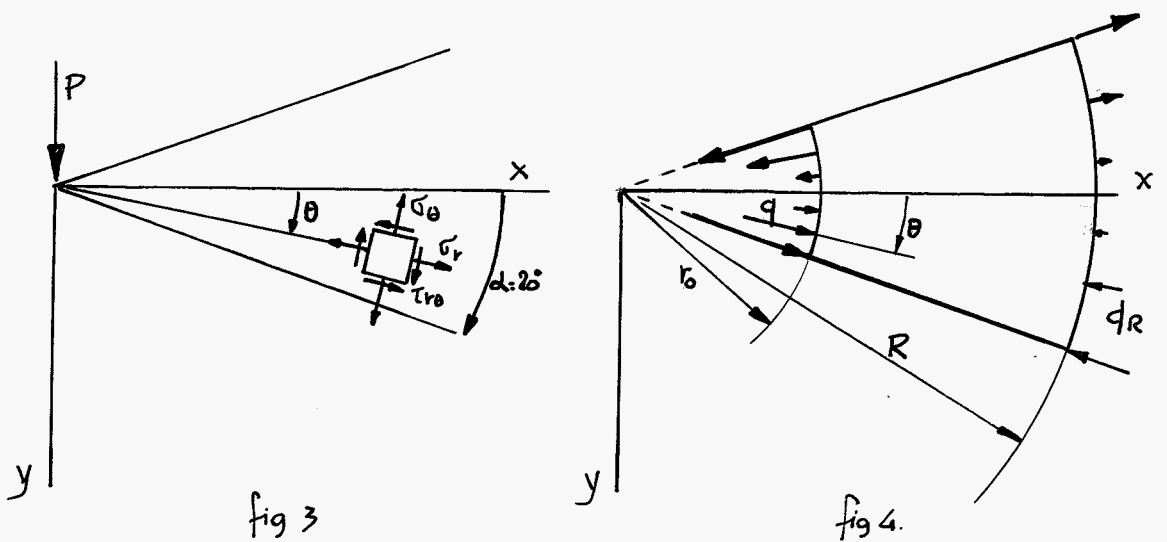
$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right).$$

II.2 Een aan de basis ingeklemde wig, belast door een geconcentreerde kracht in de top, werkend in een richting  $\perp$  op de symmetrie-as.

We passen de oplossingsmethode, gegeven door Flamant, toe.

Het assenkruis wordt met de oorsprong in de top van de wig gelegd. (fig 3)



We beschouwen een deel van de wig begrensd door de randen  $r=r_0$  en  $r=R$ . Op de rand  $r=r_0$  brengen we een belasting  $q = q_0 \frac{\sin \theta}{r_0}$  aan,  $q_0$  is constant; op de rand  $r=R$ :  $q_R = q_0 \frac{\sin \theta}{R}$ . (fig 4)

De resultante van de verdeelde belasting op  $r=r_0$  is een door de oorsprong gaande, in positieve  $y$ -richting gerichte kracht. Zorgen wij ervoor dat deze resultante de zelfde grootte heeft als de geconcentreerde kracht  $P$ , dan zal t.g.v. deze verdeelde belasting, volgens de Saint-Venant, op enige afstand van de top van de wig de zelfde spanningverdeling optreden als die t.g.v. van  $P$ .

We voeren de spanningfunctie  $\phi = C \cdot r \cdot \theta \cos \theta$  in en gaan na of deze functie aan de bi-potentialvergelijking voldoet.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{We substitueren voor } \frac{\partial \phi}{\partial r} &= C \theta \cos \theta, & \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= C r \cos \theta - C r \theta \sin \theta \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} &= -2 C r \sin \theta - C r \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{C \theta \cos \theta}{r} - \frac{2 C r \sin \theta}{r} - \frac{C \theta \cos \theta}{r} \right) =$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( -\frac{2 C r \sin \theta}{r} \right) = \left( \frac{-4 C r \sin \theta}{r^3} + \frac{2 C r \sin \theta}{r^3} + \frac{2 C r \sin \theta}{r^3} \right) = 0$$

De spanningfunctie  $\phi = C r \theta \cos \theta$  voldoet aan de bi-pot. vergelijking.

$$\text{De spanningen worden: } \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} =$$

$$= \frac{C \theta \cos \theta}{r} - \frac{C \theta \cos \theta}{r} - \frac{2 C r \sin \theta}{r} = -\frac{2 C}{r} \sin \theta$$



$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} (C \cos \theta - C \theta \sin \theta) = 0$$

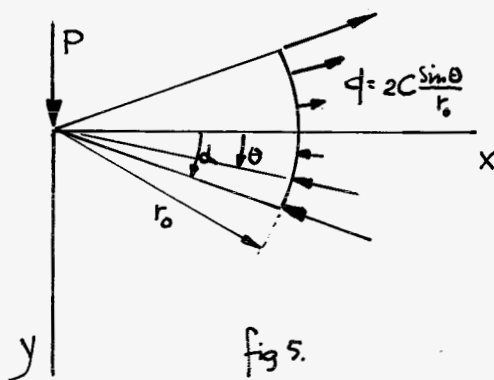
We hebben te maken met een radiale spanningverdeling.

### Randvoorwaarden.

Voor  $\theta = \pm 2\alpha$  zijn  $\sigma_{\theta}$  en  $\tau_{r\theta} = 0$ , daar zij overal nul zijn.

Voor de randen  $r=r_0$  en  $r=R$  voldoen we aan de randcondities indien we voor  $C = q_0/2$  nemen.

Om de constante  $C$  als functie van de geconcentreerde kracht  $P$  te vinden, beschouwen we het verticale evenwicht van de afgesneden top van de wig.



$$P - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2C \sin^2 \theta}{r_0} r_0 d d\theta = 0$$

Waarin  $d =$  dikte van de wig.

$$P = 2Cd \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = -\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \theta d \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha} + \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \theta d\theta$$

$$2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = -\sin 2\alpha + \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = -\sin 2\alpha + 2\alpha.$$

$$\text{Hiermede wordt } P = Cd(2\alpha - \sin 2\alpha) \rightarrow C = \frac{P}{d(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

De spanningen in de wig t.g.v. de geconcentreerde kracht  $P$  in de top van de wig zijn dus:

$$\sigma_r = \frac{-2P \sin \theta}{r d (2\alpha - \sin 2\alpha)},$$

$$\sigma_\theta = 0,$$

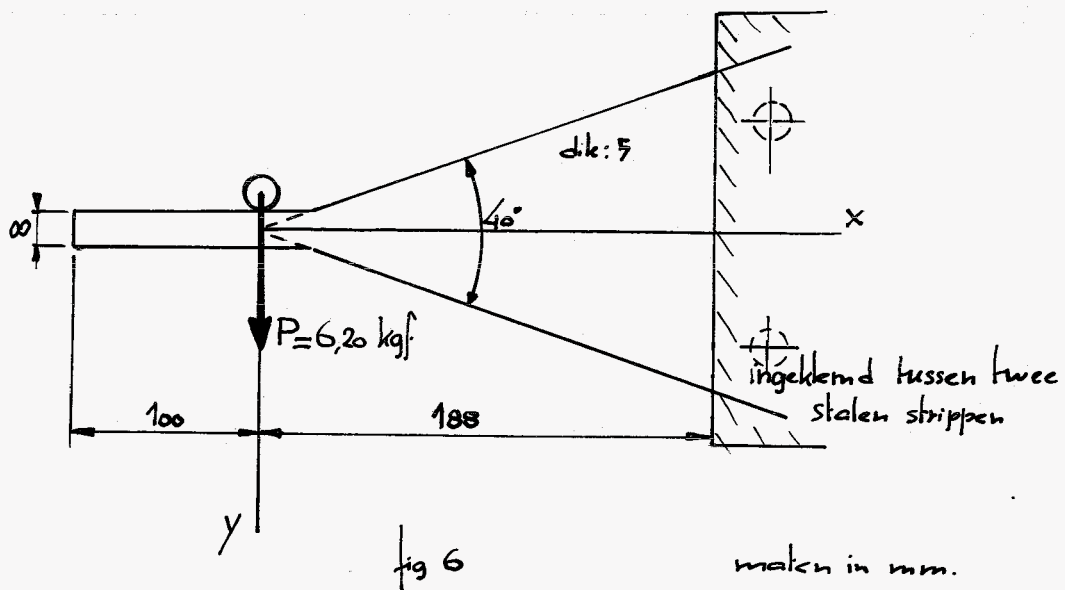
$$\tau_{r\theta} = 0.$$

$\sigma_r$  en  $\sigma_\theta$  blijken de hoofdspanningen te zijn.

### III. De experimenten.

III-1 Het doormeten van een Atalidite model van de wig met behulp van de optische bank.

De afmetingen van het model zijn in onderstaande figuur gegeven.



Opmerkingen: a: de invloed van het rechte balkje vanuit de top van de wig wordt hier niet bekeken.

b: de vrije lengte van 188 mm blijkt groot genoeg te zijn om de wig als oneindig te mogen beschouwen (te zien aan het spanningsbeeld)

Uit de metingen met de optische bank vinden we

- a: de richting van de hoofdspansingen
- b: het verschil van de hoofdspansingen.

Daar, zoals uit de theorie blijkt, één van de hoofdspansingen nul is ( $\sigma_\theta = 0$ ) zullen wij direct de fringewaarde van de andere hoofdspansing ( $\sigma_r$ ) vinden.

Te verwachten isochromaten-beeld:

De isochromaten zijn in ons geval krommen waarvoor geldt:  $\sigma_r = \text{constant}$

$$\sigma_r = \frac{-2P}{d(2\alpha - \sin 2\alpha)} \cdot \frac{\sin \theta}{r} = \text{constant} \quad \therefore \frac{\sin \theta}{r} = \text{constant} = p_i; p_i = 0, 1, \dots, n$$

$$\frac{\sin \theta}{r} = \frac{y}{r^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} = p_i \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = y \cdot \frac{1}{p_i} \quad p_i = 0, 1, \dots, n$$

dit zijn cirkels gaande door (0,0), met middelpunten op de y-as.

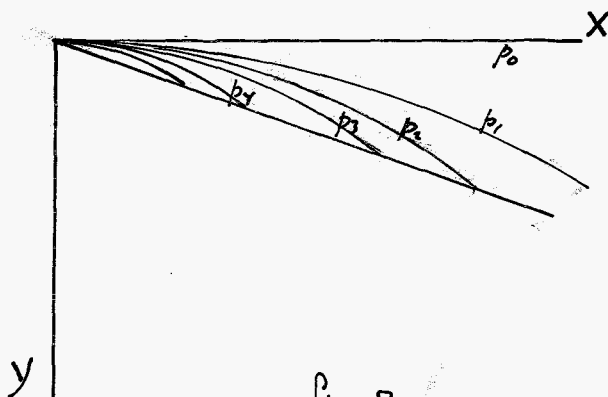


fig 7

In het limiet geval krijgen we een cirkel met middelpunt in (0,∞); dit is de 0° orde

Te verwachten isoklinen beeld

Door we te maken hebben met een radiale hoofdspansingsverdeling zullen de isoklinen rechten zijn vanuit de top van de wig.

### III.2 Resultaten 1<sup>e</sup> experiment

Er is gemeten op de lijnen  $X = 10,5, 20, 30, 45, 60$  en  $120$  mm, zowel in positieve- als in negatieve  $y$ -richting.

(De waarde  $X = 10,5$  mm ligt precies in de overgang van het rechte gedeelte naar de schuine zijde van de wig.)

Te verwachten verloop van de  $\sigma_r$ -waarde langs een lijn  $X = \text{constant}$ .

$$\sigma_r = \frac{-2P \sin \theta}{rd(2\alpha - \sin 2\alpha)} = \bar{P} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \bar{P} = \frac{-2P}{d(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

$$\sigma_r = \bar{P} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{y} = \bar{P} \frac{\sin^2(\arctan \frac{y}{X_1})}{y} = \sigma_r(y)_{X=\text{constant}} \quad [\text{kgfmm}^{-2}]$$

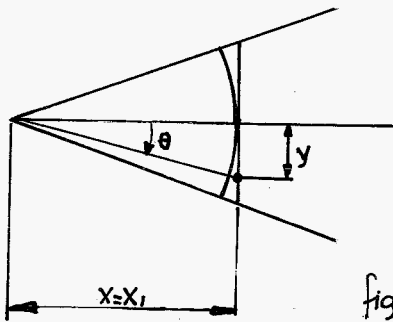


fig. 8

Om het theoretische- en gemeten verloop van  $\sigma_r$  in één grafiek te kunnen weergeven zijn de theoretische waarden van  $\sigma_r$  omgerekend van  $\text{kgfmm}^{-2}$  naar orden.

Dit gebeurt als volgt:

Uit de gegeven belasting  $P = 6,20$  kgf en de geometrie van de wig volgt:

$$\bar{P} = \frac{-2P}{d(2\alpha - \sin 2\alpha)} = -45,1 \text{ kgfmm}^{-1}$$

$$\text{dus } \sigma_r = -45,1 \frac{\sin^2 \theta}{y} \text{ kgfmm}^{-2}$$

Voor een bepaalde  $y$ -waarde op een lijn  $X = \text{constant}$  is de theoretische waarde van  $\sigma_r$  berekend.

Deze waarde is gelijkgesteld aan de gemeten waarde, in orden, van  $\sigma_r$  in dat zelfde punt.

$$\text{Vlgs Wertheim geldt: } n = \frac{\Delta \sigma \cdot d}{S}$$

$n$  orde  
 $\Delta \sigma$  verschil van de hoofdspanningen  
 $d$  dikte van het materiaal  
 $S$  spannings-optische constante.

$$\text{dus } S = \frac{\Delta \sigma \cdot d}{n} = \frac{\sigma_r \cdot d}{n}, \quad \text{We vinden uit deze gelijkstelling voor } S = 8,8 \text{ kgfcm}^{-1} \text{ orde}^{-1}$$

We laten dus één punt van de gemeten grafiek met de theoretisch berekende grafiek samenvallen en vergelijken het verloop van  $\sigma_r$  gemeten en  $\sigma_r$  theor.

Uit de resultaten blijkt dat de gemeten  $\sigma_r$ -krommen praktisch geheel op de theoretische krommen komen te liggen.

Hiermede is deze methode achteraf gereduceerd.

OPMERKING a) Voor  $X = 10,5$  mm krijgen we een grotere afwijking t.o.v. de theoretische krommen.  
Dit is het gevolg van het feit dat de vorm van het model daar ter plaatse afwijkt van het theoretisch aangenomen model.  
(Vergelijk fig 3 met fig 6)

b). We constateren aan de rand van het model een afwijking van het theoretisch  $\sigma_r$ -verloop. De spanning-toestand wordt daar verstoord door de reeds aanwezige spanningen in de rand van het model.

Gelet op bovenstaande opmerking b) zijn we dus niet in staat de juiste  $\sigma_r$ -waarde te meten aan de rand van de wig.  
De waarde van  $\sigma_r$  voor  $\theta = \pm 20^\circ$  kan door extrapolatie worden gevonden. Vanuit twee bij de rand gelegen (nog ongestoorde) punten op een lijn  $X = \text{constant}$  is lineair naar de rand toe geëxtrapolerd.  
Lineair extrapoleren kan hier door het  $\sigma_r$ -verloop praktisch lineair is.

In de bijgevoegde grafieken nr I t/m VI zijn de  $\sigma_r$  gemeten en  $\sigma_r$  theor. in orden, als functie van  $y$ , bij constant  $X$ , weergegeven.

Richting van de hoofdspanning. (isokline-waarde)

Voor een lijn  $X = \text{constant}$  is het theoretische verloop vlg.  $\theta = \arctan y/X$ .

Eveneens in de grafieken nr I t/m VI zijn de gemeten en berekende isokline-waarden voor resp.  $X = 10,5, 20, 30, 45, 60$  en  $120$  mm als functie van  $y$  uitgezet.

We constateren bij passage van hele orden een grote afwijking van de gemeten isokline-waarde t.o.v. de berekende.  
Het effect van deze grote fouten heeft geen meetbare invloed op de  $\sigma_r$ -waarden.

OPMERKING:

In grafiek VI,  $X = 120$  mm constateren we in een groot gebied rond  $y = 0$  een afwijking van de  $\alpha$ -waarde t.o.v. de theoretische waarde.  
Een verklaring kan gezocht worden in het feit dat we voor  $X = 120$  mm rond  $y = 0$  mm een spanning  $\sigma_r$  hebben die zeer weinig van de nul-waarde verschilt. De intensiteit is daar zeer laag en loopt, naar de rand toe, zeer langzaam op.  
De gemeten  $\alpha$ -waarden zijn daar met een grote fout beïnvloed.

### III-3. 2<sup>e</sup> Experiment: Metingen aan een elektrisch analoog van de belaste wig.

Zoals bekend voldoet de som van de hoofdspanningen van een 2. dimensionaal spanningsprobleem aan de Laplace vergelijking (zie Timoshenko - Goodier)

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = S = \text{constant.}$$

$\Delta S = 0$  geeft in principe oneindig veel oplossingen.

Indien een oplossing ook nog voldoet aan de randvoorwaarden, dan is die oplossing de oplossing van het gegeven 2. dim. spanningsprobleem.

Afgeleid kan worden dat de elektrische spanningsverdeling in een uniform geleidend medium voldoet aan de Laplace vergelijking  $\Delta V = 0$ .

Indien de spanning, aangelegd op een contour, gelijkvormig met de vorm van de wig, overeenkomt met de randspanning van het 2. dimensionale mechanisch probleem, dan zal de resulterende elektrische spanning in ieder punt binnen het contour evenredig zijn met de som van de hoofdspanningen in het overeenkomstige punt van het model.

In ons geval zal dus de gemeten elektrische potentiaal evenredig zijn met  $\sigma_r$ .

Op Teledeltos weertlandspapier, geplakt op een stuk perspex, is, 2x vergroot, de wig met afgesneden top met een dun ball-point lijntje getekend.

Op 5 mm vanaf dit getekende contour is op een aantal discrete punten een elektrische gelijkspanning aangebracht, zodanig dat de elektrische spanning, gemeten op het getekende contour, een continu verloop vertoont, overeenkomend met het verloop van de randspanning zoals die gemeten is aan het model in de optische bank.

Onderstaande figuur geeft aan hoe en waar de gelijkspanningen zijn aangebracht.

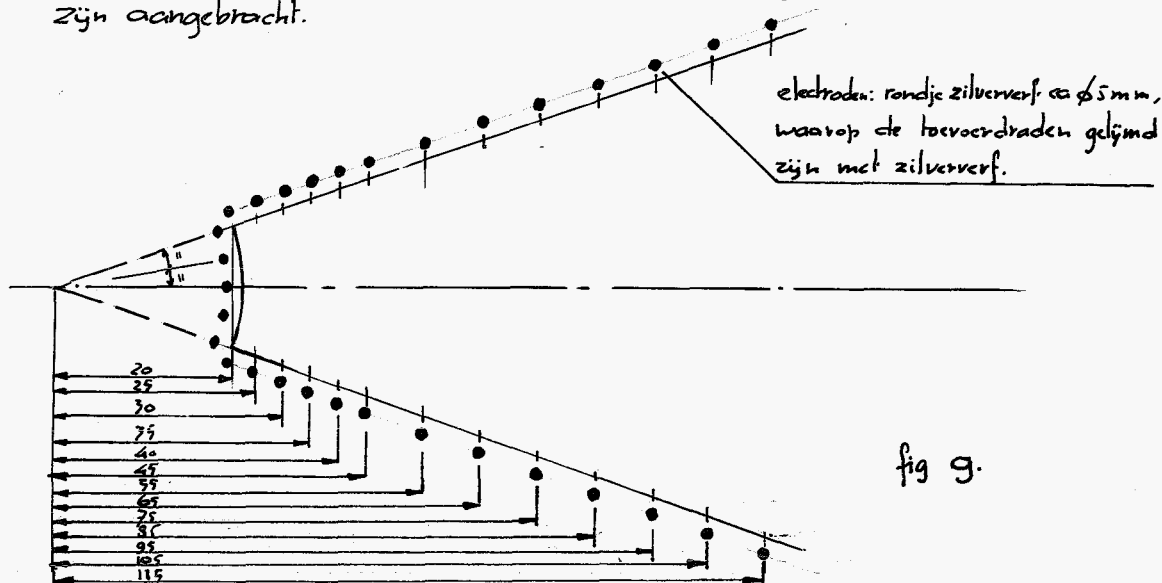


fig 9.

Om een zo goed mogelijk continu verloop van de spanning langs de rand te verkrijgen is de onderlinge afstand van de elektroden kleiner genomen naarmate de spanninggradient groter is.

De grootte van de elec. spanning [Volt] is gelijk gemaakt aan de waarde van de gemeten randspanning in orden  
dus  $1,00 \text{ Volt} \equiv 1,00 \text{ orde}$ .

Om redenen van technische aard ligt het 0-niveau op  $-10,00 \text{ Volt}$ .

Uitgaande van de bekende waarde van de randspanning in het snijpunt van de cirkelboog met de zijkant van de wig is langs de cirkelboog een sinus.vormig verloopende spanning ingesteld.

De verkregen elektrische randspanning is in grafiek VII uitgezet.

Gemeten is op de lijnen  $X=25, 30, 45, 60$  en  $120 \text{ mm}$ .  
In de grafieken VIII t/m XII is de gemeten waarde:  $\sigma_r(y)_{X=\text{constant}}$  (in Volt  $\equiv$  orde) vergeleken met het theoretisch verloop van  $\sigma_r$ .

De gemeten waarden vallen praktisch samen met de theoretische waarden.

We constateren voor  $X=120 \text{ mm}$  een iets grotere spreiding. Dit is waarschijnlijk het gevolg van het feit dat de laatste elektrode ligt op  $X=115$ , terwijl we meten op  $X=120 \text{ mm}$ , dus buiten het ingestelde gebied.

#### IV. Conclusie.

Binnen het toelaatbare gebied,  $X=20 \text{ mm}$  t/m  $X=120 \text{ mm}$ , zijn de resultaten van het experiment, zowel wat betreft de metingen met de optische bank als met het elektrisch analoog, aangaande de  $\sigma_r$ -waarde uitstekend te noemen.

Voor  $X=10,5$  constateren we een grote afwijking t.g.v het feit dat, zoals reeds genoemd, het model daar afwijkt van het theoretische model.

De bovengrens  $X=120 \text{ mm}$  is willekeurig; grotere waarden van  $X$  zijn niet doorgemeten.

De meetresultaten betreffende de  $\alpha$ -waarden vertonen een grotere spreiding, vooral daar waar de isochromaten liggen.

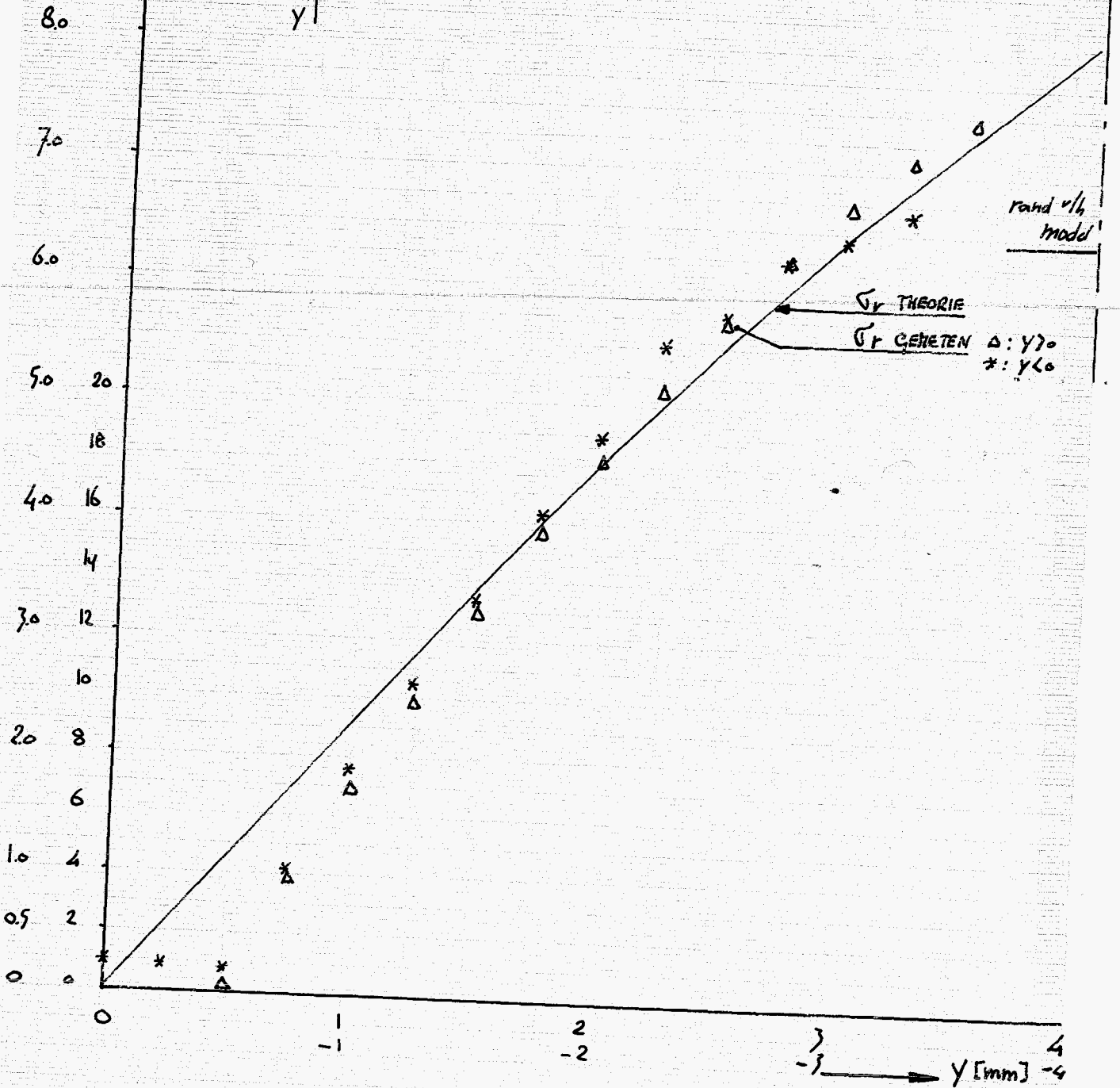
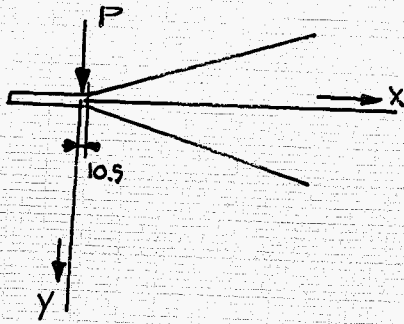
Als slotconclusie kan gezegd worden dat als aanvullend experiment op de metingen met behulp van de optische bank de elektrisch analoog-methode zeer goed bruikbaar is.

GRAFIEK I

$X = 10.5 \text{ mm}$   $\sigma_r = \sigma_r(y)$

$\alpha = \alpha(y)$  (niet gemeten).

$\sigma_r$  [order]  
↑  
 $\alpha$  [°]  
↑

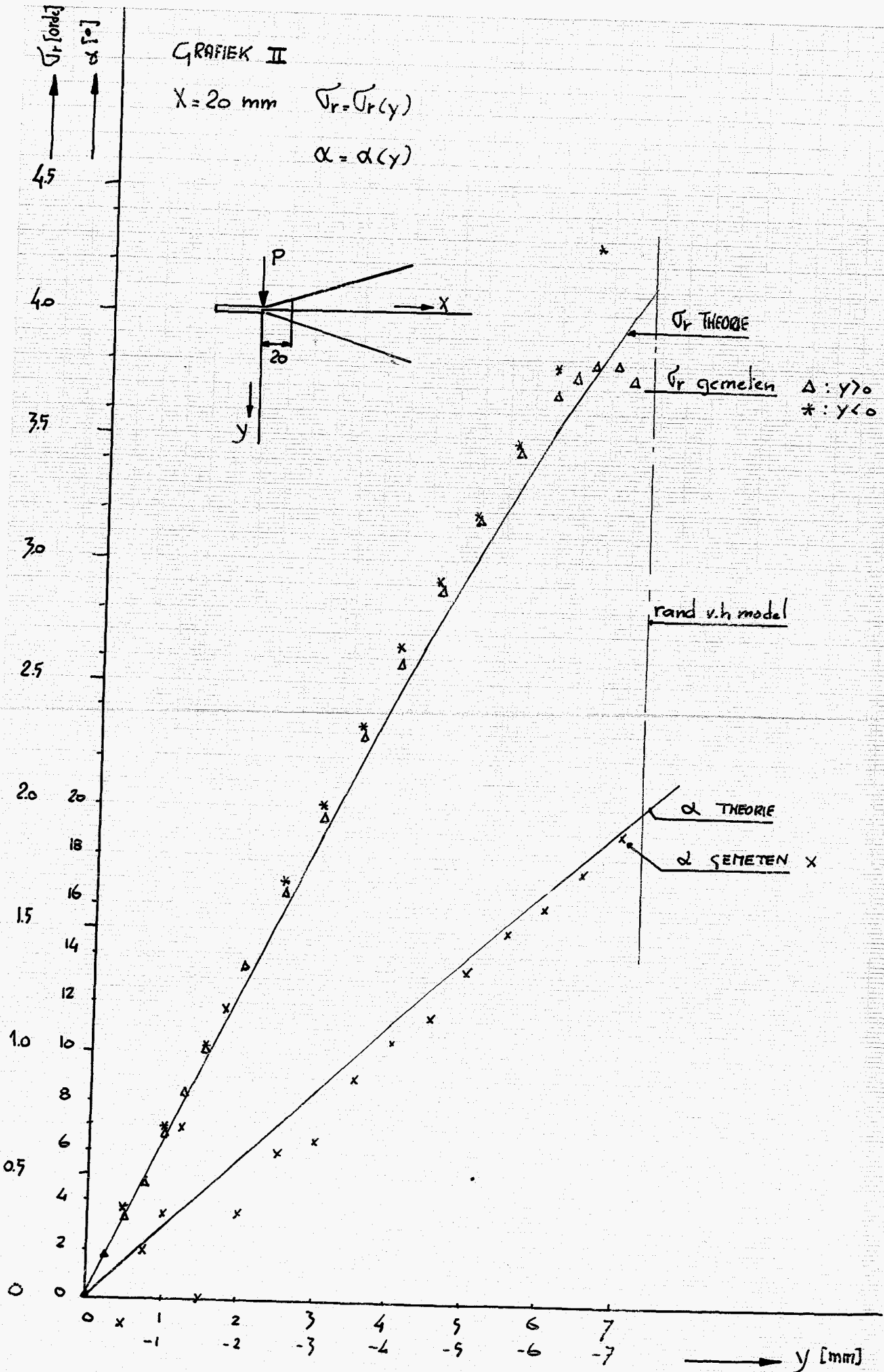




GRAFIEK II

$X = 20 \text{ mm}$   $\sigma_r = \sigma_r(y)$

$\alpha = \alpha(y)$



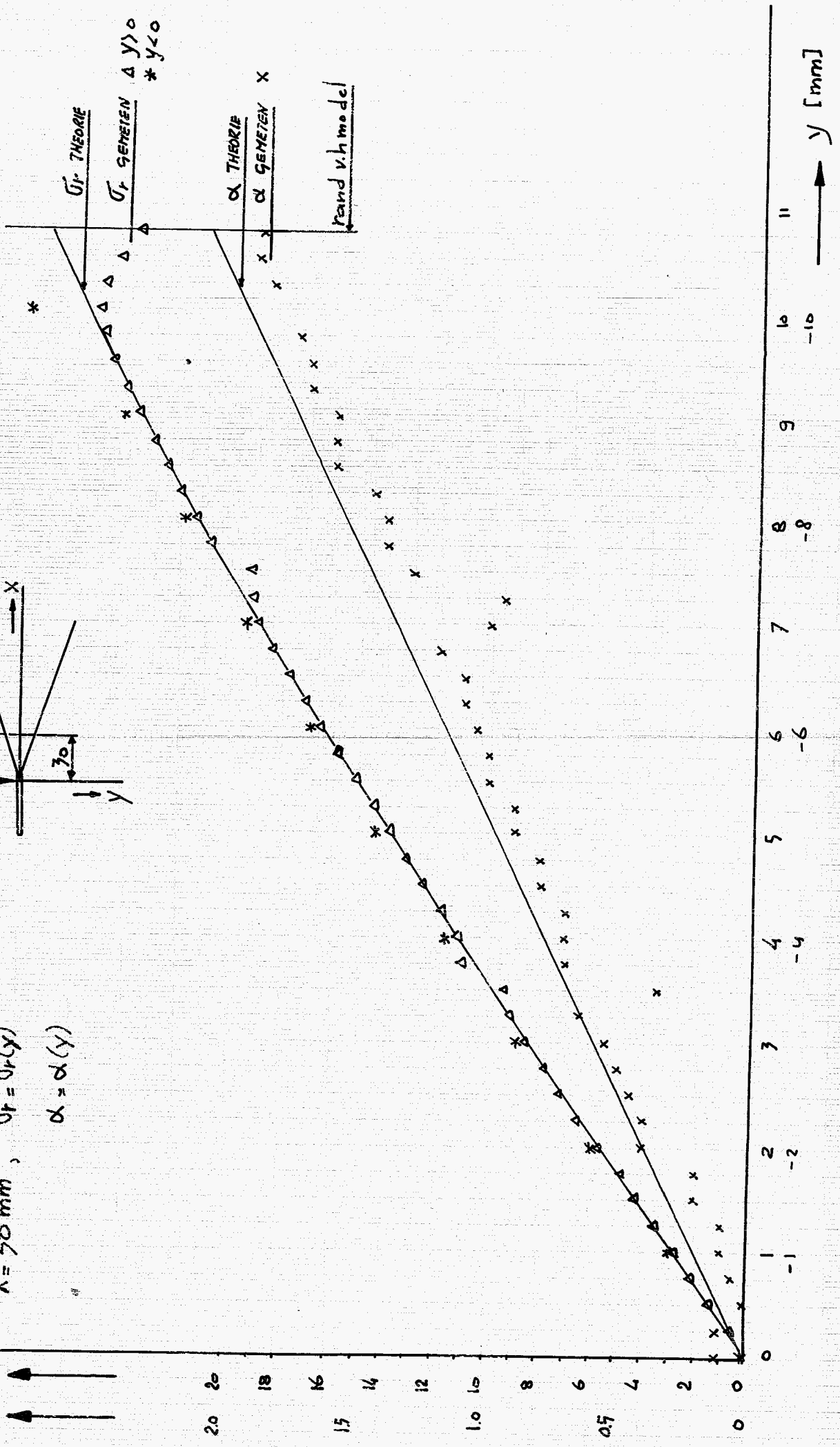
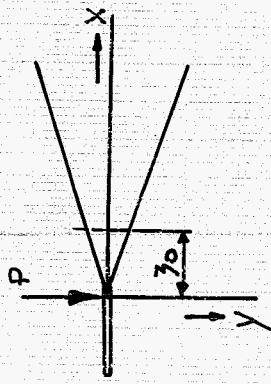
x

GRAFIEK III

$X = 30 \text{ mm}$ ,  $\sigma_T = \sigma_T(y)$

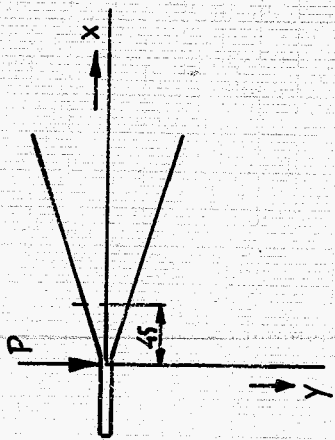
$\alpha = \alpha(y)$

$\sigma_T [\text{MPa}]$  ↑  
 $\alpha [^\circ]$  ↑



# GRAFIEK IV

$X = 45 \text{ mm}$   
 $\sigma_r = \sigma_r(y)$   
 $\alpha = \alpha(y)$



$\sigma_r$  [MPa]  $\rightarrow$

$\alpha$  [°]  $\rightarrow$

20

18

16

14

12

10

8

6

4

2

0

20

15

10

5

0

0

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

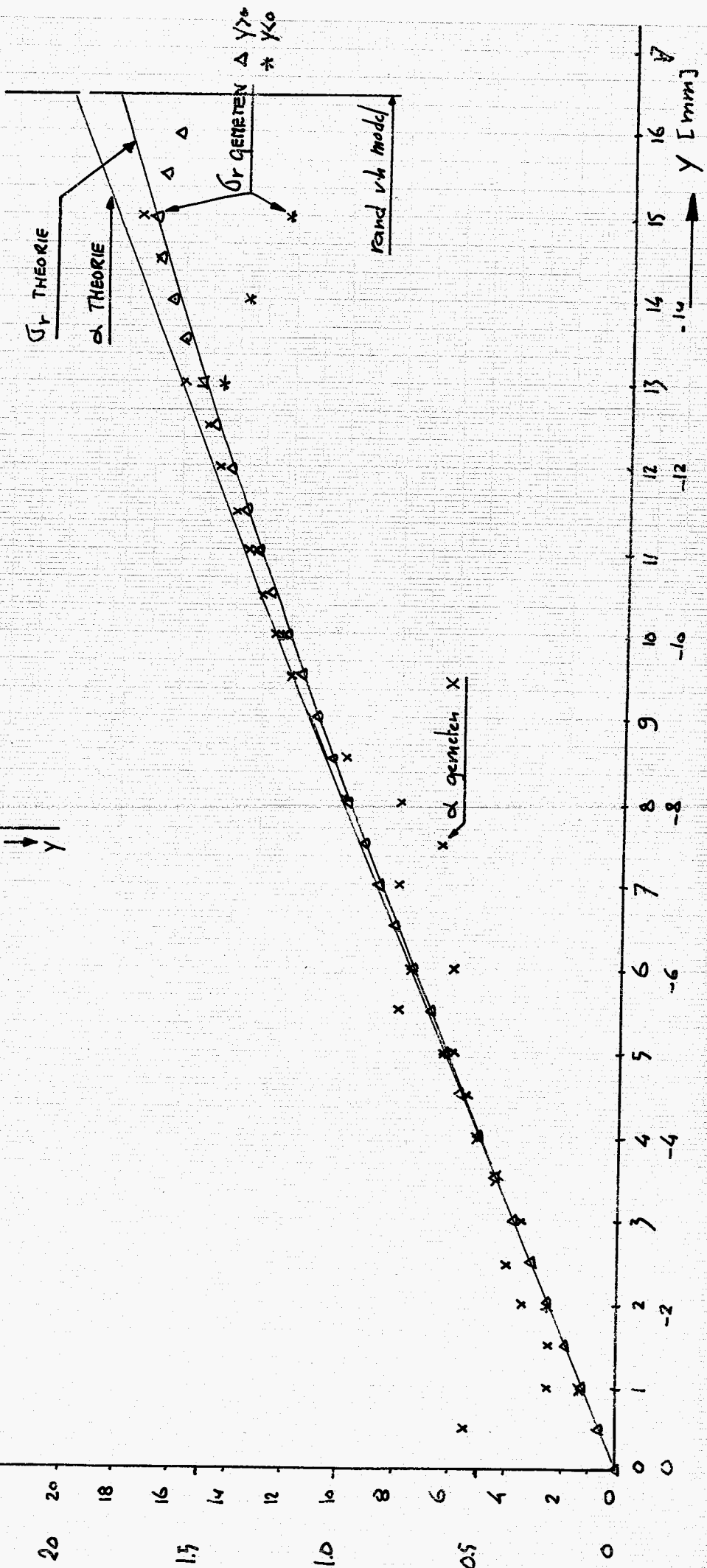
43

44

45

46

47

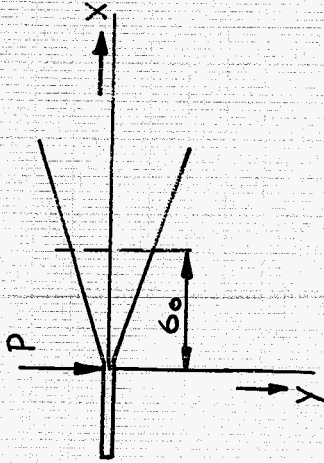


GRAFIEK IV

X = 60 mm

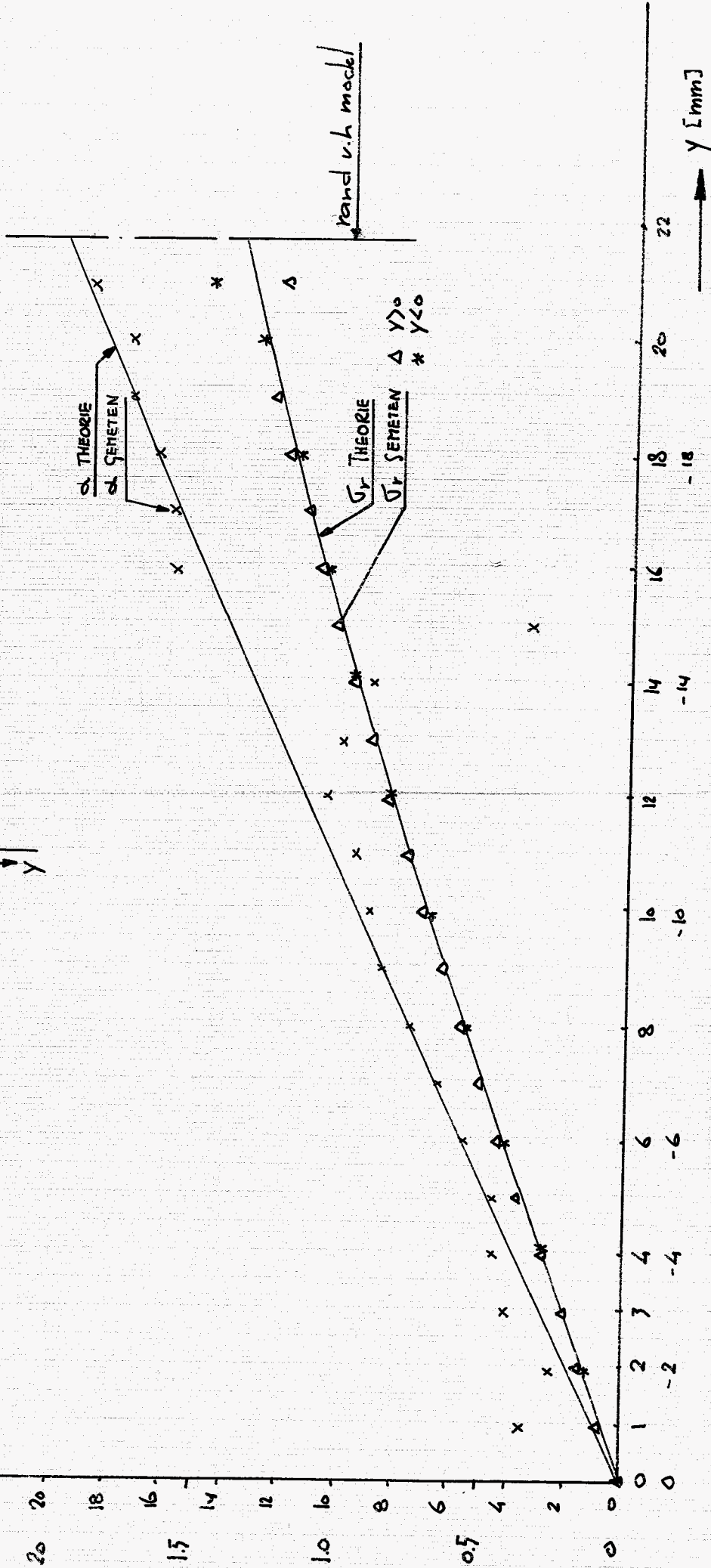
$$\sigma_T = \sigma_T(y)$$

$$\alpha = \alpha(y)$$



$\sigma_T$  [orde]  $\rightarrow$

$\alpha$  [°]  $\rightarrow$



rand v.h. model

$\sigma_T$  THEORIE

$\sigma_T$  GEMETEN

$\alpha$  THEORIE

$\alpha$  GEMETEN

$\Delta y > 0$

$\Delta y < 0$

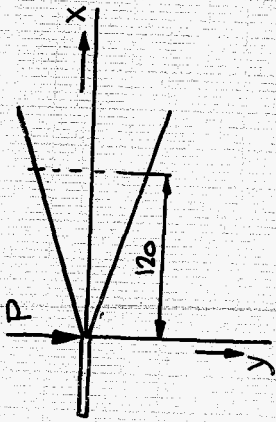
y [mm]

GRAFIK VII

X = 120 mm

$\sigma_r = \sigma_r(y)$

$\alpha = \alpha(y)$



$\sigma$  [MPa]      ↑

$\alpha$  [°]        ↑

2.0

1.8

1.6

1.4

1.2

1.0

0.8

0.6

0.4

0.2

0

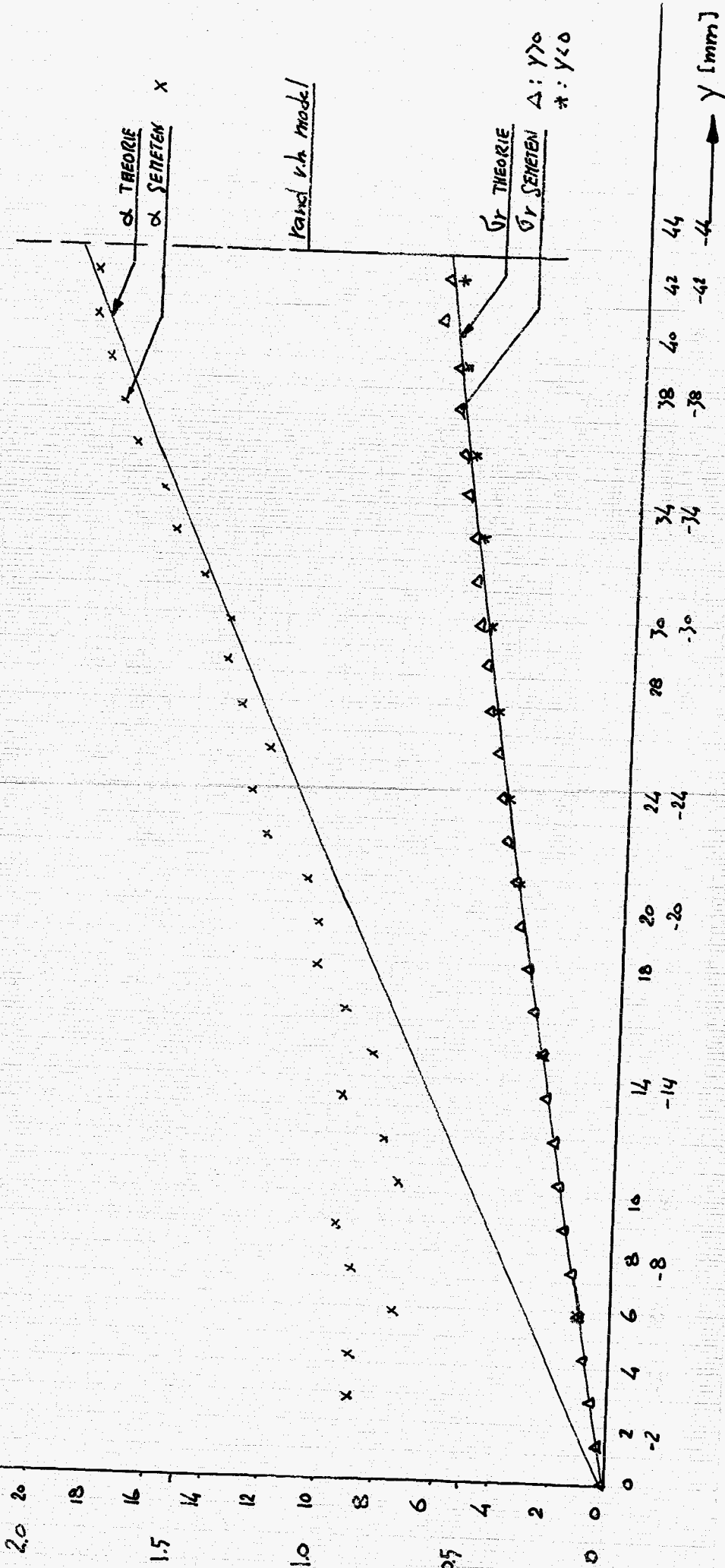
0

0

0

0

0



Y [mm]

44

42

40

38

34

30

28

24

20

18

14

10

8

6

4

2

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

44

42

40

38

34

30

28

24

20

18

14

10

8

6

4

2

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

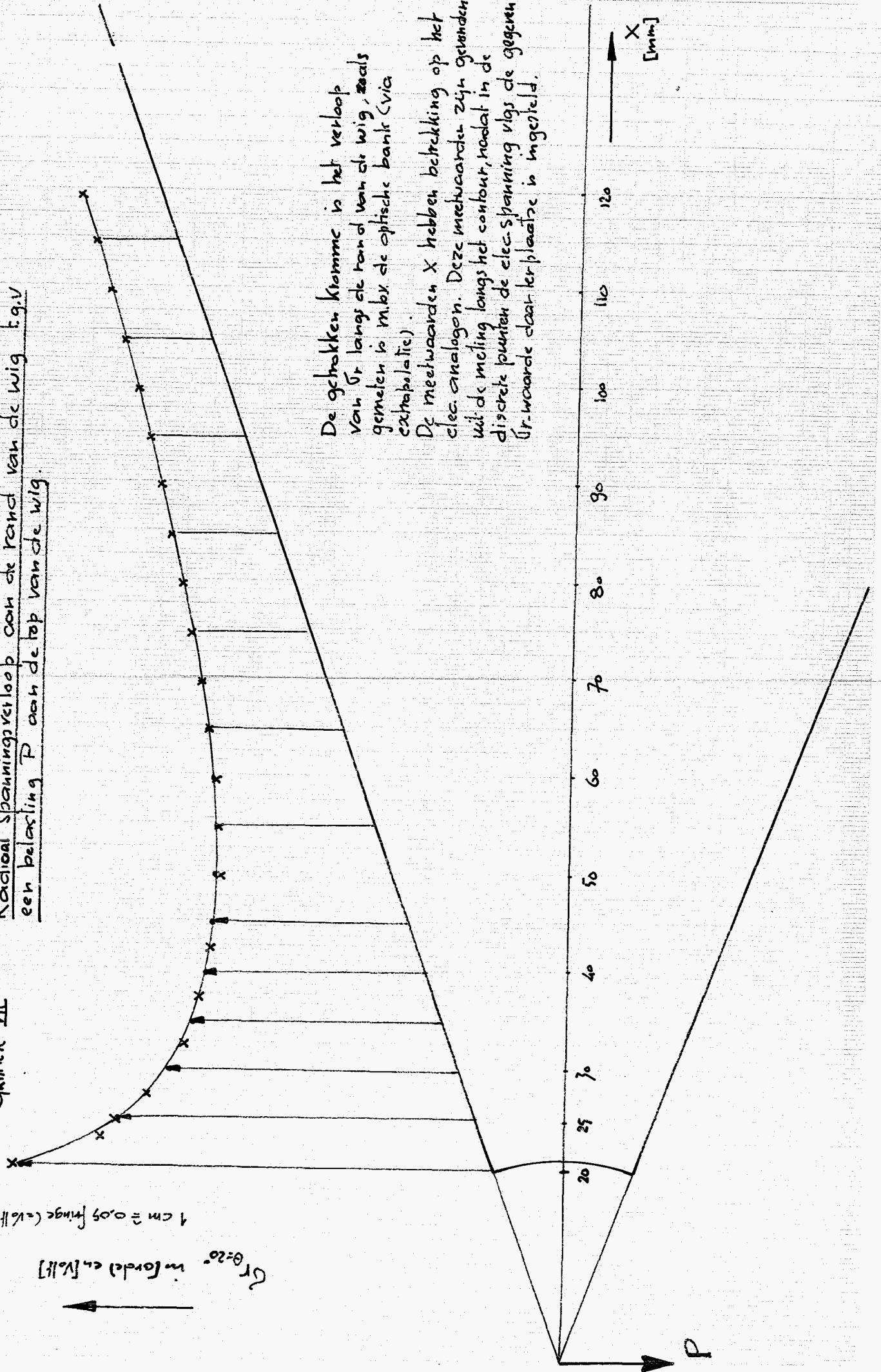
0

GRAFIEK VII

Radiaal spanningverloop aan de rand van de wig t.g.v. een belasting P aan de top van de wig.

1 cm  $\approx$  0,05 fringe (= Volt)

$\sigma_{r=20^\circ}$  in [ordel] en [Volt]

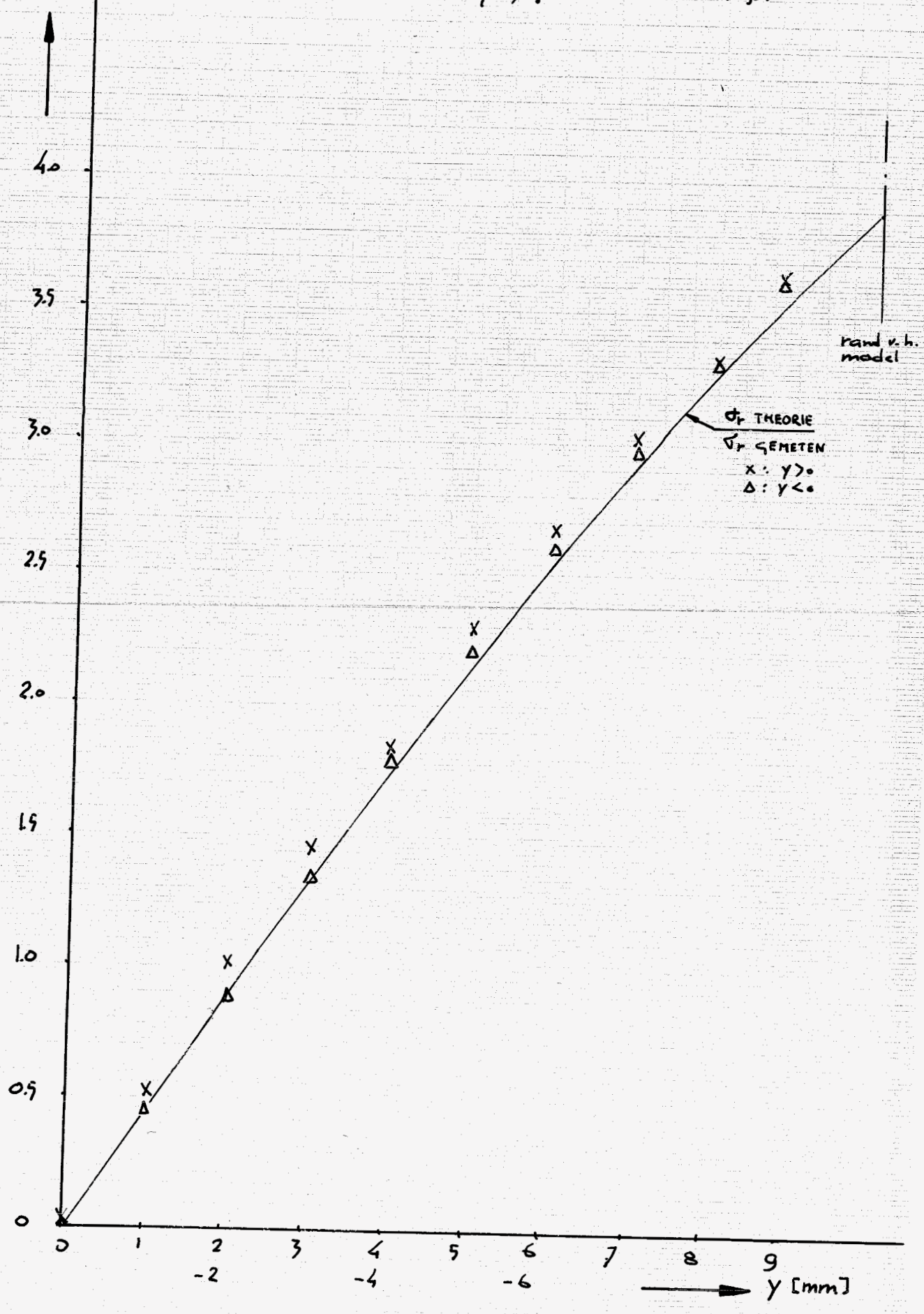


De getrokken kromme is het verloop van  $\sigma_r$  langs de rand van de wig, zoals gemeten is m.b.v. de optische bank (via extrapolatie).  
 De meetwaarden  $\sigma_r$  hebben betrekking op het elec. analogen. Deze meetwaarden zijn gevonden uit de meting langs het contour, omdat in de discrete punten de elec. spanning langs de gegeven  $\sigma_r$ -waarde daar ter plaatse is ingetekend.

# GRAFIEK VIII

$\lambda = 25 \text{ mm}$

$\sigma_r = \sigma_r(y)$ , GEMETEN MET ELEC. ANALOOG





# GRAFIEK IX

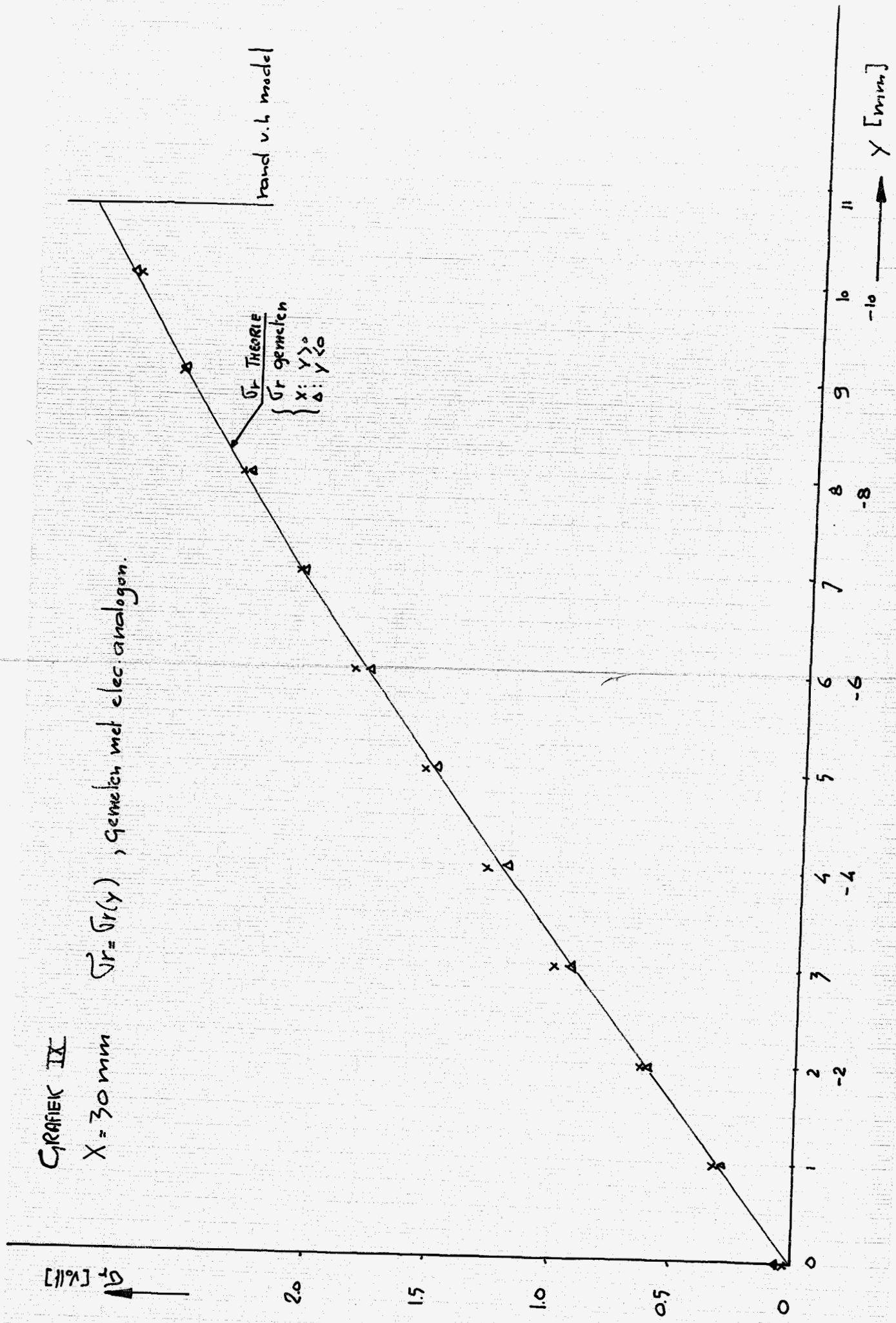
X = 30 mm

$\sigma_r = \sigma_r(y)$ , gemeten met elec. analoog.

$\sigma_r$  [%]

hand v.l. model

$\sigma_r$  THEORIE  
{  
X:  $y > 0$   
Δ:  $y < 0$



y [mm]

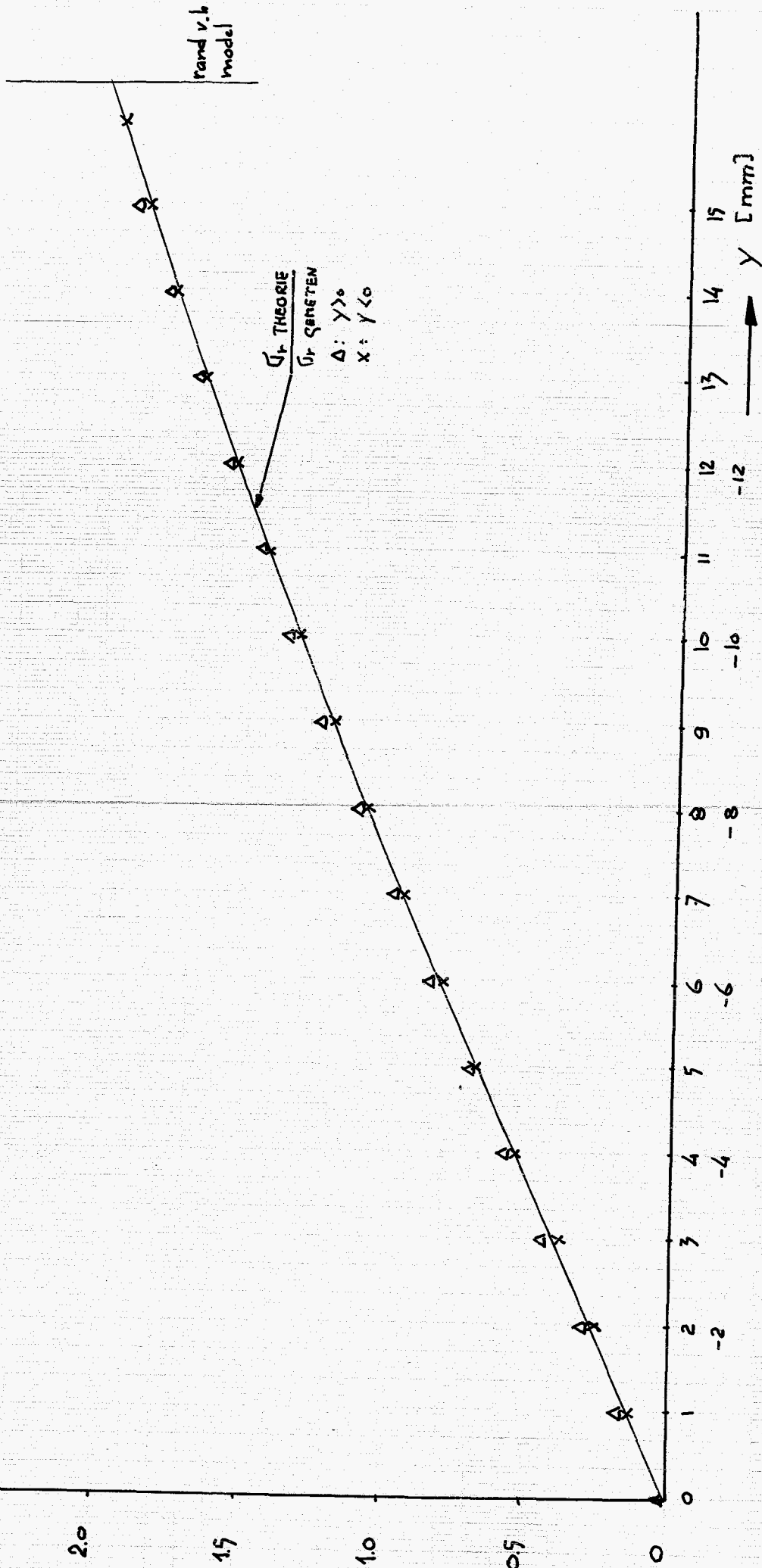


# GRAFIEK II

X = 45 mm

$\sigma_T = \sigma_T(y)$ , GEMETEN MET ELEC. ANALOOGON

$\sigma_T$  [kN]



# GRAFIEK XI

$X = 60 \text{ mm}$

$\sigma_r = \sigma_r(y)$ ,  $\sigma_{\text{METEN MET ELEC. ANALOSON}}$

$\sigma_r$  [MPa]

$y$  [mm]

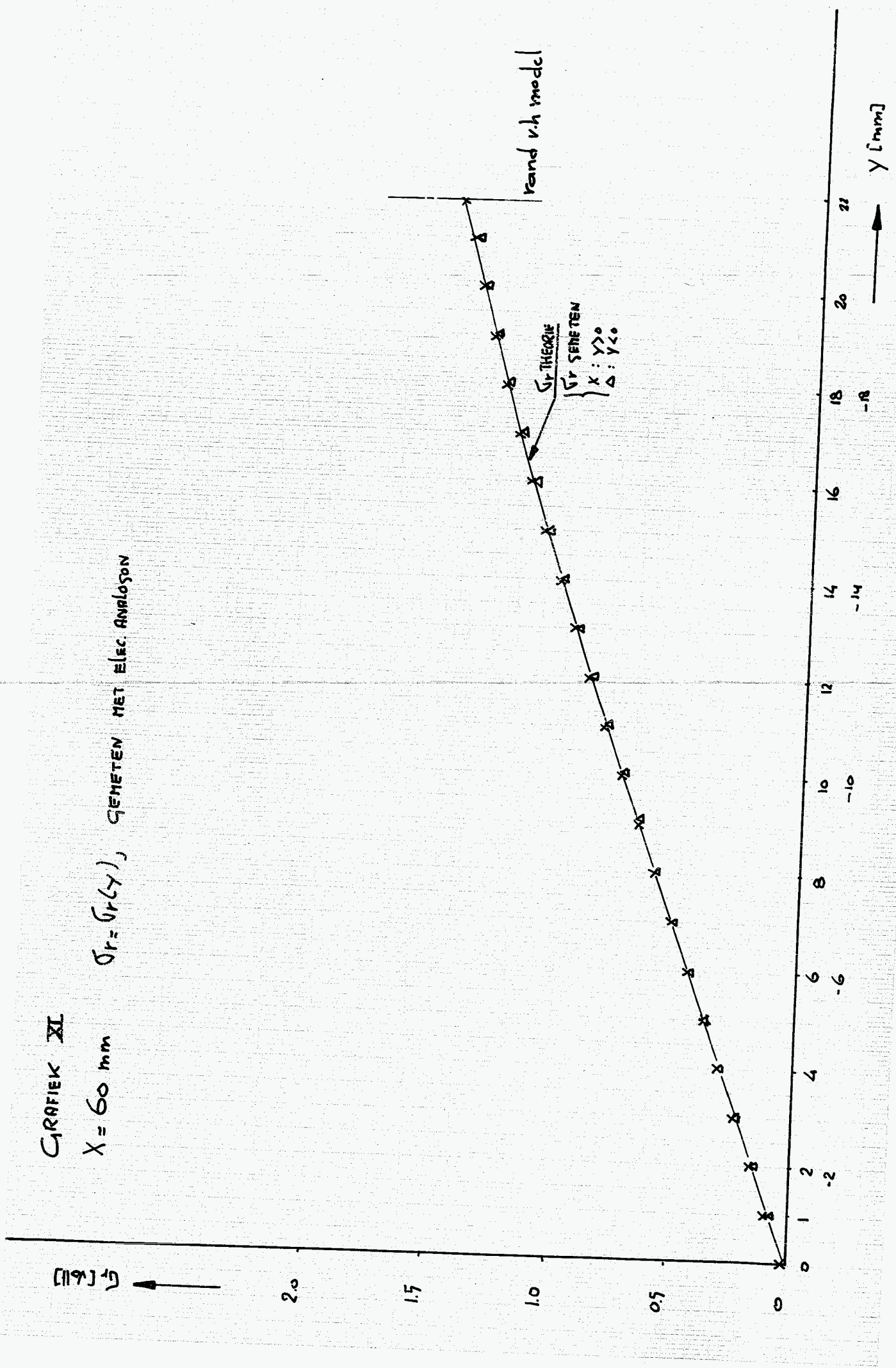
rand v.h. model

$\sigma_r$  THEORIE

$\sigma_r$  METEN

$x : y > 0$

$\Delta : y < 0$



[119] - D

# GRAFIEK XII

X = 120 mm

$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(y)$ ,  $\bar{\sigma}_r$  MET ELEC. ANALYSON

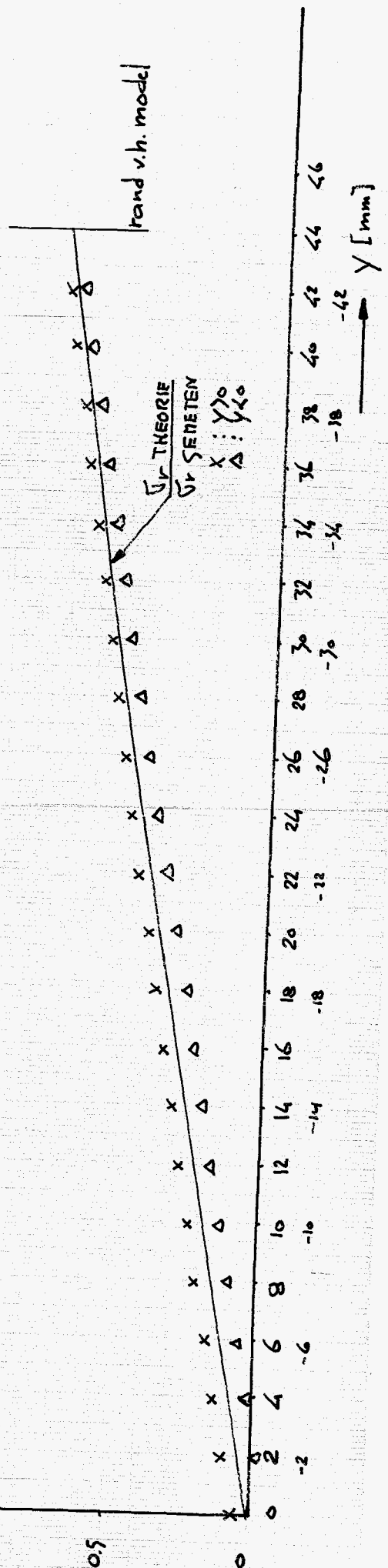
2.0

1.5

1.0

0.5

0



y [mm]