Enige aantekeningen bij de cursus DYNAN

WE-72-4

Enige aantekeningen bij de cursus DYNAN.

Plaats: ISD - Stuttgart

Tijd : 8-11-1971 t/m 12-11-1971

Cursusleider : O.E. Brönlund

F.E. Veldpaus.

november 1971.

~~WTHE 72-4~~

Inleiding.

De meeste voordrachten in deze cursus zullen worden gegeven door O.E. Brönlund, de leider van de DYNAN-groep bij het ISD, die ook eventuele vragen van algemene aard over DYNAN zal behandelen. Bij de voordrachten zullen verder steeds de volgende leden van het I. aanwezig zijn:

Braun en Johnson (voor reële eigenwaardeproblemen)
Bühlmeyer (voor complexe eigenwaardeproblemen)
Kiesbauer en Straub (voor systeemaangelegenheden).

De cursus DYNAN zal van 8-11-'71 t/m 12-11-'71 elke dag gehouden worden van 10.00 - 12.00 uur en van 15.00 - 17.00 uur. Buiten deze tijden wordt gelegenheid geboden voor gesprekken met ISD-leden over geconstateerde moeilijkheden en eventuele wensen met betrekking tot ASKA en DYNAN.

De lezingen in deze cursus kunnen verdeeld worden in een drietal - overigens niet duidelijk te onderscheiden - groepen:

1. lezingen over de theorie voor het dynamisch gedrag van grote constructies. De grondslagen van de elementenmethode worden bekend verondersteld; het onderwerp van de lezingen zal zijn het uitwerken van de bewegingsvergelijkingen. Verder zal veel aandacht besteed worden aan beschouwingen over de nauwkeurigheid waarmee eigenwaarden en eigenvectoren berekend worden.
2. lezingen over de toepassingen van DYNAN
3. bespreking van een zevental uitgewerkte voorbeelden.

Cursus DYNAN, maandag 8 november 1971 (voormiddag).

A. In DYNAN gehanteerde symbolen.

K : stijfheidsmatrix.

M : massamatrix.

C : dempingsmatrix.

Q : verplaatsingsvector. In theoretische beschouwingen wordt q gehanteerd in plaats van Q.

R : krachtvector.

U : bovendriehoeksmatrix, dus $U[i,j]=0$ als $i>j$.

X : matrix van eigenvectoren. De i^e kolom van X komt over een met de i^e eigenvector.

E : vector van eigenwaarden. In theoretische beschouwingen wordt Λ gehanteerd in plaats van E; Λ is een diagonaalmatrix ($\Lambda[i,j]=0$ als $i\neq j$; $\Lambda[i,i]=E[i]$).

De letter L, gevolgd door een symbool betekent label; zo is LX de label van de matrix van eigenvectoren.

B. In DYNAN gehanteerde indices.

R : reëel.

C : complex.

M : master.

D : afhankelijk (dependent).

P : voorgeschreven (prescribed).

U : niet voorgeschreven (unconstrained).

E : elastisch systeem (systeem na eliminatie van bewegingen als star lichaam).

S : aanduiding voor bewegingen als star lichaam (rigid body modes).

C. Notaties.

1. Een matrix A met n rijen en m kolommen wordt aangeduid door $A, (n*m)$.

2. De component op de i^e rij en de j^e kolom van een matrix A wordt aangeduid door a_{ij} of $A[i,j]$. De matrix met deze componenten zal ook wel worden aangegeven met $[a_{ij}]$, dus: $A \equiv [a_{ij}]$

3. Een matrix die is gepartitioneerd in deelmatrices wordt hype matrix genoemd. Voorbeeld: zij $A, (n*m)$ een matrix die op de volgende wijze wordt gepartitioneerd:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Dan zal A ook wel worden aangeduid met: $A = [A_{ij}]$ waarbij $A_{ij}, (n_i * m_j)$.

4. Een diagonaalmatrix $D, (n*n)$ met termen $d_1, d_2, --- d_n$ op de hoofddiagonaal wordt aangegeven met $D = \lceil d_i \rfloor$, dus:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & o & & O \\ o & d_2 & o & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ O & & o & d_n \end{bmatrix} \equiv \lceil d_i \rfloor \; ; \quad D, (n*n)$$

5. Transponeren en inverteren worden respectievelijk aangegeven met bovenindex t en bovenindex -1.

6. Transponeren van een matrix met complexe componenten wordt aangeduid met het symbool $*$. Zij $C = A + i.B$ ($C, (n*m)$; $A, (n*m)$; $B, (n*m)$; A en

B reëel) dan geldt: $C^* = A^t - i.B^t$. Een complexe matrix is hermitisc als $C = C^*$; voor een dergelijke matrix moet dus gelden: $A = A^t$, $B = -B^t$. Hieruit volgt o.a. dat de componenten op de hoofddiagonaal van een hermitisc matrix reëel moeten zijn.

7. Tenzij anders vermeld wordt met het woord vector steeds een <u>kolom</u> vector bedoeld.

8. Congruence-transformatie van een matrix $A, (n*n)$ in een matrix $C, (n*n)$ is gedefinieerd door:

$$C = B^t.A.B$$

waarbij $B, (n*n)$ regulier moet zijn.

9. Similarity-transformatie van een matrix $A, (n*n)$ in een matrix $C, (n*n)$ is gedefinieerd door:

$$C = B^{-1}AB$$

waarbij $B, (n*n)$ uiteraard regulier moet zijn.

10. Orthonormale (transformatie-)matrix $Q, (n*n)$ is een matrix die voldoet aan:

$$Q^t.Q = Q.Q^t = I$$

waarbij $I, (n*n)$ de eenheidsdiagonaalmatrix van orde $n*n$ is.

In verband met de hierna te geven analyse over de afwijkingen tussen de werkelijke en de berekende eigenwaarden en eigenvectoren worden eerst enige begrippen geïntroduceerd, die bij de analyse een belangrijke rol spelen.

1. <u>De scalaire functie</u> f <u>van een matrix</u> A, aangeduid met $f = f\{A\}$. Zo is bijv. $\lambda_i\{A\}$ een scalaire functie waarvan de waarde gelijk is aan de i^e-eigenwaarde van de matrix A.

2. <u>Het spoor van een matrix</u> A, aangeduid met $Trace\{A\}$. Dit is een scalaire functie van A, die is gedefinieerd door:

$$Trace\{A\} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad ; \quad A, (n*n).$$

3. <u>De singuliere waarden</u> (Engels: singular values) μ_i <u>van een matrix</u> A, $(n*n)$. Deze scalaire functies van A zijn gedefinieerd als:

$$\mu_i\{A\} = \sqrt{\lambda_i\{A^tA\}} = (\lambda_i\{A^tA\})^{\frac{1}{2}}$$

Als A symmetrisch ($A = A^t$) dan geldt:

$$\mu_i\{A\} = \mu_i\{A^t\} = (\lambda_i\{A.A\})^{\frac{1}{2}} = ((\lambda_i\{A\})^2)^{\frac{1}{2}} = |\lambda_i\{A\}|$$

Deze gelijkheid geldt omdat uit:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A.Ax = \lambda.Ax = \lambda^2.x$$

volgt dat $\lambda_i\{A.A\} = (\lambda_i\{A\})^2$. Als A niet alleen symmetrisch maar ook semi-positief definiet is zal voor $\mu_i\{A\}$ gelden:

$$\mu_i\{A\} = \lambda_i\{A\}$$

4. <u>Invariantie van eigenwaarden met orthonormale transformaties</u>.
Zij gegeven het eigenwaarde probleem $Ax = \mu x$ met oplossingen $\mu_1, \mu_2, ---\mu_n$ en $x_1, x_2, ----x_n$. Zij Q een orthonormale matrix (dus $Q^t = Q^{-1}$) en zij $\tilde{A} = A.Q$. Dan geldt voor de eigenwaarden $\tilde{\mu}_i$ van $\tilde{A}$:

$$\tilde{\mu}_i\{\tilde{A}\} = \mu_i\{A\}$$

Het bewijs hiervan is eenvoudig, immers:

$$\tilde{\mu}_i\{\tilde{A}\} = (\lambda_i\{\tilde{A}^t\tilde{A}\})^{\frac{1}{2}} = (\lambda_i\{Q^tA^tAQ\})^{\frac{1}{2}} = (\lambda_i\{A^tA\})^{\frac{1}{2}} = \mu_i\{A\}$$

5. __De p-norm van een vector x.__

Zij x, $(n*1)$ een kolomvector. Dan is de p-norm van x gedefinieerd door

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \text{----} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Vooral de één-, de twee- en de oneindig norm zijn van practisch belang. De twee-norm van x, $\|x\|_2$, is de Euclidische lengte van x.

6. __Matrixnormen.__

Met behulp van de zojuist geïntroduceerde vectornormen kunnen wij normen van matrices definieren. Zij A, $(n*r)$ een matrix met n rijen en r kolommen. Dan is de p-norm van A, $\|A\|_p$, gedefinieerd als:

$$\|A\|_p = \sup_{x\neq 0} (\|Ax\|_p / \|x\|_p)$$

waarbij sup de afkorting is van supremum. Met $\sup\limits_{x\neq 0}\left(\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\right)$ wordt het kleinste maximum voor alle $x \neq 0$ van het argument $\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ bedoeld.

Voor de één-, de twee- en de oneindig norm van een matrix A kunnen de volgende gelijkheden bewezen worden:

$$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

$$\|A\|_2 = (\lambda_1\{A^tA\})^{\frac{1}{2}} \quad ; \lambda_1 \text{ is de max. eigenwaarde van } A^tA.$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \Rightarrow \|A\|_\infty = \|A^t\|_1$$

Als A een vierkante matrix is, dan zal met de definitie van de singulier waarden μ_i van A volgens 3. voor de 2-norm van A gelden:

$$\|A\|_2 = \mu_1\{A\}$$

Als A, $(n*n)$ symmetrisch en positief definiet is (dus als $A = A^t$ en $x^tAx > 0$ voor alle $x \neq 0$) dan geldt dus:

$$\|A\|_2 = \lambda_1\{A\} \quad ; \lambda_1 \text{ is de max. eigenwaarde van } A.$$

Naast de reeds geïntroduceerde normen is er nog een matrixnorm die voor de hierna volgende analyses van bijzonder belang is. Dit is de zogenaamde Euclidische of Schur norm, gedefinieerd door:

$$\|A\|_E = \left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij})^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\text{Trace}\left\{A^t A\right\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wij merken nog op dat deze definitie alleen bruikbaar is voor vierkante matrices.

7. <u>Enige eigenschappen van matrixnormen</u>.

a. $\|A\|_p > \lambda_i \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots n \quad ; \quad A, (n*n)$

b. als $x^t A x > 0$ voor alle $x \neq 0 \Rightarrow \|A\|_p$ is een bovengrens voor de grootste eigenwaarde λ_1

c. $\|A.B\|_E \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_E \; ; \; \|AB\|_E \leq \|A\|_E \cdot \|B\|_2 \quad ; \; A, (n*n) \; ; \; B, (n*n)$

d. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

<u>Klassieke</u> <u>eigenwaarde</u> <u>probleem</u> (special eigenvalue problem).

Zij gegeven een vierkante matrix A van orde $n*n$. Gevraagd de waarden van λ waarvoor

$$Ax = \lambda x$$

een niet-triviale oplossing $(x \neq 0)$ heeft.

Wij zullen veronderstellen dat A reëel en symmetrisch is (dus $A = A^t = A^*$). Dan kan worden aangetoond dat er n waarden van λ bestaan waarvoor $Ax = \lambda x$ een oplossing $x \neq 0$ heeft. Deze waarden zijn reëel en worden genummerd op een zodanige wijze dat $\lambda_i \geqslant \lambda_j$ als $i < j$, dus:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \text{--------} \geqslant \lambda_n .$$

Deze waarden van λ worden eigenwaarden van de matrix A genoemd. De bijbehorende oplossingen $x_1, x_2, \text{----}\ x_n$ zijn de eigenvectoren van deze matrix. Voor de met λ_i corresponderende eigenvector, x_i, zal dus gelden:

$$A x_i = \lambda_i \cdot x_i \qquad (x_i \neq 0).$$

Wij bergen deze eigenvectoren kolomsgewijze op in een matrix X, $(n*n)$ die (uiteraard) de matrix van eigenvectoren genoemd zal worden:

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{------} \quad x_n]$$

Als de eigenwaarden verschillend zijn dan zijn de bijbehorende eigenvectoren orthogonaal, dus:

<u>als</u> $\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$ <u>dan</u> $x_i^t \cdot x_j = 0$

Omdat A symmetrisch is zijn, behalve de eigenwaarden ook de eigenvectoren alle reëel.

Als niet alle eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \text{---}\ \lambda_n$ verschillend zijn dan kan, door gebruik te maken van $A = A^t$, worden bewezen dat er een set van n eigenvectoren bestaat die orthogonaal is, dus:

<u>als</u> $\lambda_i = \lambda_j$ $(i \neq j)$ dan kunnen de eigenvectoren x_i en x_j zodanig gekozen worden dat $x_i^t . x_j = 0$.

Het bewijs van deze bewering is eenvoudig te leveren.

De eigenvectoren zijn, op een constante factor na, eenduidig bepaald. Immers, als x_i een eigenvector is dan is ook $\alpha_i . x_i$ $(\alpha_i \neq 0)$ een eigenvector. Hiervan wordt gebruik gemaakt om deze vectoren op lengte 1 te normeren, zodat zal gelden:

$$x_i^t . x_i = 1.$$

Zorgen wij er bovendien voor dat de eigenvectoren orthogonaal zijn, dan kunnen wij schrijven:

$$x_i^t . x_j = \delta_{ij} \qquad (\delta_{ij} : \text{Kronecker delta})$$

De matrix van eigenvectoren, X, is dan orthonormaal, dus:

$$X^t . X = X . X^t = I$$

Bovendien zal gelden:

$$X^t A X = \Lambda$$

waarbij Λ, $(n * n)$ een diagonaalmatrix is waarvan de componenten op de hoofddiagonaal gelijk is aan λ_i, dus:

$$\Lambda = \lceil \lambda_i \rfloor$$

Dit laatste resultaat kan met:

$$A x_i = \lambda_i . x_i \Rightarrow x_j^t A x_i = \lambda_i . x_j^t . x_i = \lambda_i . \delta_{ij}$$

eenvoudig worden aangetoond.

Het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen $Ax = \lambda x$ kan dus worden getransformeerd naar een stelsel van de vorm $X^t A X = \Lambda$. Een alternatieve formulering voor het oorspronkelijke eigenwaardeprobleem is dus: zoek die orthonormale matrix X, $(n * n)$ die voldoet aan $X^t A X = \lceil \lambda_i \rfloor$.

Algemene eigenwaarde probleem (general eigenvalue problem).

Wij beschouwen het volgende eigenwaardeprobleem:

$$Ax = \lambda . B . x$$

waarbij de matrices A en B voldoen aan:

$$A, (n*n); \quad A = A^t; \quad x^t A x \geqslant 0 \text{ voor alle } x \neq 0$$

$$B, (n*n); \quad B = B^t; \quad x^t B x > 0 \text{ voor alle } x \neq 0$$

Deze eisen houden dus onder andere in dat A en B semi-positief definiete, respectievelijk positief definiete matrices moeten zijn.

Het gegeven probleem kan eenvoudig worden getransformeerd in een eigenwaardeprobleem van de vorm $Dx = \lambda x$ door $Ax = \lambda Bx$ vóór te vermenigvuldigen met B^{-1}. Deze werkwijze is echter practisch ongeschikt omdat de matrix $D = B^{-1}A$ niet symmetrisch zal zijn. Wij zullen hier dan ook een andere werkwijze volgen.

Omdat B een positief definiete matrix is kan deze matrix met de methode volgens Choleski worden gesplitst in het product $R^t.R$, waarbij R een (rechtsboven)driehoeksmatrix is met positieve getallen op de hoofddiagonaal, dus:

$$B = R^t.R \; ; \quad R[i,j] = 0 \text{ als } i > j \; ; \quad R[i,i] > 0$$

Stellen wij nu:

$$y = R.x$$

en vermenigvuldigen wij $Ax = \lambda Bx$ vóór met R^{-t} dan ontstaat:

$$R^{-t}.A.R^{-1}.(Rx) = \lambda . R^{-t}.(R^t R x) = \lambda . (Rx)$$

en dus:

$$D.y = \lambda y$$

waarbij de matrix D voldoet aan:

$$D, (n*n) \; ; \quad D = R^{-t}.A.R^{-1} \; ; \quad D = D^t.$$

Op de geschetste wijze kan het <u>algemene</u> eigenwaarde probleem $Ax = \lambda Bx$ worden overgevoerd in het <u>klassieke</u> eigenwaarde probleem $Dy = \lambda . y$ met symmetrische matrix D

De eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, --- \lambda_n$ van $Dy = \lambda y$ zijn gelijk aan die van het oorspronkelijke probleem, terwijl de eigenvectoren $x_1, x_2, --- x_n$ van $Ax = \lambda Bx$ m

$$x_i = R^{-1}.y_i$$

bepaald kunnen worden uit de eigenvectoren $y_1, y_2, ----y_n$ van $Dy = \lambda . y$.

Omdat D symmetrisch is zullen alle eigenwaarden λ_i en eigenvectoren y_i (en dus ook de eigenvectoren x_i) reëel zijn. Daar A semi-positief definiet en B positief definiet is volgt dat D, evenals A, semi-positief definiet is. Daaruit kan worden afgeleid dat alle eigenwaarden positief zijn, dus:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant ----- \geqslant \lambda_n > 0$$

Definiëren wij weer de diagonaalmatrix $\Lambda = [\lambda_i]$ en de matrix van eigenvectoren $Y = [y_1 \; y_2 \; y_3 ------- y_n]$ dan kunnen wij het eigenwaarde probleem ook schrijven in de volgende vorm:

$$D.Y = Y.\Lambda$$

en dus:

$$Y^{-1}.D.Y = \Lambda$$

$Y^{-1}.D.Y$ vormt een similarity transformatie van D. In het algemeen geldt dat de eigenwaarden van een probleem niet veranderen als op dat probleem een dergelijke transformatie wordt losgelaten!

De eigenvectoren $y_1, y_2, --- y_n$ kunnen onderling loodrecht gekozen worden. In het algemeen worden zij bovendien genormeerd op lengte 1, dus:

$$y_i^t . y_j = \delta_{ij}$$

De matrix Y is dan orthonormaal. Voor de matrix X van de eigenvectoren $x_1, x_2, --- x_n$ van het oorspronkelijke probleem zal dan dus gelden:

$$X = R^{-1}Y$$

en met $Y^t.Y = I$ volgt:

$$X^t.R^t.R.X = I \Rightarrow X^t.B.X = I$$

Wij zeggen dan dat de eigenvectoren $x_1, x_2, --- x_n$ zijn genormeerd met de matrix B als kern.

Wij vermelden nog dat het oorspronkelijke eigenwaarde probleem met $A.X = B.X.\Lambda$ en met $X^t.B.X = I$ kan worden overgevoerd in:

$$X^tAX = \Lambda$$

Een aantal van de hiervoor gegeven resultaten zijn ook geldig als D een hermitische matrix is (dus als $D^* = D$). Voor nadere informatie hierover zij verwezen naar de betreffende ISD-rapporten en de overige literatuur op dit gebied.

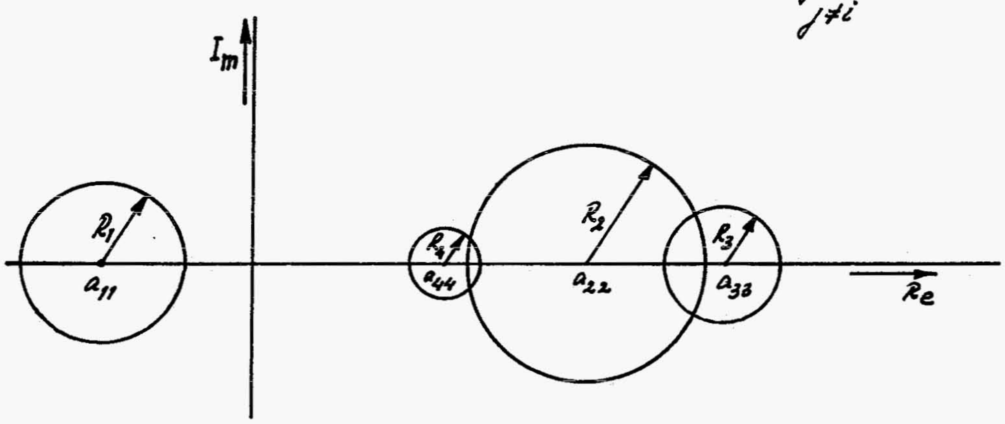
Bij de verdere analyse en bespreking van de diverse procedures in DYNAN is het van belang in het oog te houden dat de filosofie van het ISD over DYNAN zeer in het kort en zeer onvolledig als volgt kan worden samengevat:

niet de snelheid en efficientie van een methode zijn doorslaggevend bij een keuze uit meerdere mogelijke methoden. Ook de numerieke stabiliteit en de mogelijkheid de berekende resultaten te controleren spelen bij die keuze een zeer belangrijke rol.

Pertubatie - theorie.

Het is mij in de lezingen van Brönlund niet helemaal duidelijk geworden wat onder pertubatie - theorie verstaan moet worden. Uit zijn lezinge is bij mij overgekomen dat met deze theorie boven- en ondergrenzen bepaald kunnen worden voor elk van de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ van de matrix A, $(n*n)$. Deze grenzen zijn in het algemeen veel "scherper" dan de grenzen die volgen uit de theorema's van Gerschgorin. De pertubatie-theorie levert derhalve betere schattingen van de maximale fout in de berekende eigenwaarden.

Wij beginnen met de theorema's van Gerschgorin. Zij A een vierkante matrix van orde $n*n$. Teken voor $i=1,2,\cdots n$ in het complexe vlak de cirkel met middelpunt in a_{ii} en met straal $R_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|$.



Het eerste theorema van Gerschgorin luidt dan:

in elk van deze cirkels ligt tenminste één eigenwaarde.

Uit dit theorema kunnen grenzen worden afgeleid voor de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Als de cirkels elkaar gedeeltelijk overlappen kan het tweede theorema van belang zijn:

als m van deze cirkels elkaar (gedeeltelijk) overlappen dan liggen er tenminste m eigenwaarden in het gebied van die cirkels.

Voor de bepaling van die grenzen beschouwen wij een vierkante, hermitische matrix A ($A, (n*n)$; $A = A^*$). De eigenwaarden en eigenvectoren van deze matrix stellen wij gelijk aan $\lambda_1, \lambda_2, --- \lambda_n$ respectievelijk $x_1, x_2, ---- x_n$.

Laat $u_1, u_2, --- u_m$ vectoren zijn met Euclidische lengte 1, dus:

$$\| u_i \|_2 = 1 \qquad (i = 1, 2, --- m)$$

Bij elke vector u_i definiëren wij een vector y_i. Deze wordt gegeven door:

$$y_i = A.u_i - \mu.u_i$$

waarbij μ een willekeurig reëel getal is. Voor deze vector kan dan de volgende gelijkheid bewezen worden:

$$\min_{\mu} \| y_i \|_2 = \| A.u_i - \mu_i.u_i \|_2$$

waarbij μ_i, het zogenaamde Rayleigh-quotient, voldoet aan:

$$\mu_i = u_i^t.A.u_i$$

Het bewijs hiervan is eenvoudig. Immers:

$$(\| y_i \|_2)^2 = y_i^t.y_i = (u_i^t.A^* - \mu.u_i^t).(A.u_i - \mu.u_i)$$
$$= u_i^t A^* A.u_i - \mu.(u_i^t.A^*.u_i + u_i^t.A.u_i) + \mu^2.u_i^t.u_i$$

en uit :

$$u_i^t.u_i = 1 \ ; \ A^* = A \ ; \ (\min \| y_i \|_2)^2 = \min (\| y_i \|_2)^2$$

volgt dan direct dat $\| y_i \|_2$ minimaal is voor $\mu = u_i^t.A.u_i$.

Wij voeren nu bovendien bij elke vector u_i het zogenaamde residu (Engels: residual) r_i in:

$$r_i = A.u_i - \mu_i.u_i \qquad (A = A^* ; \ \| u_i \| = 1 \ ; \ \mu_i = u_i^t.A.u_i)$$

Dan zal dus voor de twee-norm van r_i gelden:

$$\| r_i \|_2 = \| A.u_i - \mu_i.u_i \|_2$$

en hieruit volgt direct dat $\| r_i \|_2$ gelijk is aan $\min_{\mu} \| A.u_i - \mu_i.u_i \|_2$.

Als de gekozen vector u_i een eigenvector zou zijn van $Ax = \lambda x$ dan zou μ_i een eigenwaarde zijn van A en zou bovendien gelden $\|r_i\|_2 = 0$. Veronderstellen wij nu dat u_i een schatting is voor één van de eigenvectoren van A dan kunnen wij blijkbaar uit de grootte van $\|r_i\|_2$ informatie krijgen over de juistheid van die schatting.

Met de theorema's van Gerschgorin kan worden bewezen dat er tenminste één eigenwaarde ligt in de cirkel met straal $\varepsilon_i = \|r_i\|_2$ en middelpunt in $\mu_i = u_i^t A . u_i$. Nemen wij aan dat de betreffende eigenwaarde de i^e eigenwaarde λ_i van A is dan moet dus gelden:

$$|\mu_i - \lambda_i| \le \varepsilon_i$$

λ_i → exacte waarde

μ_i → schatting.

De boven- en ondergrenzen voor de eigenwaarden, die op de hier geschetste wijze bepaald zijn, zijn over het algemeen vrij grof. Brönlund gebruikt in dit verband het woord "lineair bounds" om grenzen van dit type aan te geven. Hij zal in de volgende lezingen een methode schetsen waarmee veel scherpere grenzen voor de eigenwaarden bepaald kunnen worden.

Cursus DYNAN, maandag 8 november 1971 (namiddag)

Wij zoeken de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ en de eigenvectoren $x_1, x_2, \cdots x_m$ van de matrix $A, (n*n)$. Uiteraard zal m steeds kleiner dan of gelijk aan n zijn. Voor deze gezochte grootheden geldt:

$$A.x_i - \lambda_i . x_i = 0$$

In werkelijkheid kunnen wij noch λ_i noch x_i exact bepalen. Wel kunnen wij schattingen μ_i en u_i $(i=1,2,\cdots m)$ bepalen voor de eigenwaarden en eigenvectoren. Het is dan uiteraard van zeer groot belang om te weten hoe nauwkeurig die schattingen zijn.

Op grond van het voorgaande is de twee-norm $\varepsilon_i = \| r_i \|_2$ van de residu-vector $r_i = A.u_i - \mu_i . u_i$ een maat voor de nauwkeurigheid van de berekende grootheden. De maat is betrekkelijk grof en wij zullen nu nagaan of betere ("scherpere") schattingen voor de maximale afwijkingen tussen λ_i en μ_i aangegeven kunnen worden.

Wij kunnen elk van de vectoren u_i $(i=1,2,\cdots m)$ schrijven als een lineaire combinatie van de eigenvectoren $x_1, x_2, \cdots x_n$. Dit is mogelijk omdat wij ons beperken tot symmetrische matrices $(A = A^*)$; voor matrices van dit type bestaat er een set van onderling loodrechte (en dus zeker onafhankelijke) eigenvectoren. Wij nemen aan dat deze eigenvectoren, evenals de vectoren u_i, op lengte 1 zijn genormeerd. Dan zal dus gelden:

$$\| x_i \|_2 = 1 \quad ; \quad x_i^t . x_j = \delta_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots n ; \; j=1,2,\cdots n)$$

Voor elk van de vectoren u_i kunnen wij schrijven

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} . x_k \qquad i=1,2,\cdots m$$

en omdat $\| u_i \|_2 = 1$ zullen de coefficienten α_{ik} voldoen aan:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^2 = 1. \tag{1}$$

Ook de residu-vector r_i en het residu $\varepsilon_i = \| r_i \|_2$ kunnen worden uitgedrukt in α_{ik} en x_k. Wij vinden dan:

$$r_i = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \alpha_{ik} \cdot (A x_k - \mu_i \cdot x_k) \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \alpha_{ik} \cdot (\lambda_k - \mu_i) \cdot x_k \right\}$$

$$\varepsilon_i^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \alpha_{ik} \cdot \alpha_{ij} \cdot (\lambda_k - \mu_i) \cdot (\lambda_j - \mu_i) \cdot x_k^t \cdot x_j \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \alpha_{ik}^2 \cdot (\lambda_k - \mu_i)^2 \right\} \tag{2}$$

Voor μ_i volgt tenslotte:

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \alpha_{ik} \cdot \alpha_{ij} \cdot (x_k^t \cdot A \cdot x_j) \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \alpha_{ik}^2 \cdot \lambda_k \right\}$$

en met (1) kan deze gelijkheid worden overgevoerd in:

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ (\lambda_k - \mu_i) \cdot \alpha_{ik}^2 \right\} = 0 \tag{3}$$

Deze resultaten zijn algemeen geldig. Veronderstel nu dat μ_i en u_i een schatting zijn voor de i^e eigenwaarde λ_i, respectievelijk de i^e eigenvector x_i van de matrix A. Wij zijn geïnteresseerd in de maximale grootte van $|\lambda_i - \mu_i|$, dus in de maximale fout in de berekende eigenwaarde (de schatting) μ_i.

Bij de berekening van $|\lambda_i - \mu_i|$ nemen wij voorlopig aan dat λ_i een enkelvoudige eigenwaarde van A is en dat alle andere eigenwaarden voldoende veel verschillen van λ_i. Dan bestaat er een getal $a > 0$, zodanig dat:

$$|\lambda_k - \mu_i| \geq a \quad \text{voor} \quad k = 1, 2, \ldots n \; ; \; k \neq i. \tag{4}$$

Door substitutie hiervan in (2) en (3) volgt:

$$\varepsilon_i^2 = \alpha_{ii}^2 (\lambda_i - \mu_i)^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_{ik}^2 \cdot (\lambda_k - \mu_i)^2 \geq \alpha_{ii}^2 \cdot (\lambda_i - \mu_i)^2 + a^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_{ik}^2$$

$$|\lambda_i - \mu_i| \cdot \alpha_{ii}^2 \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |\lambda_k - \mu_i| \cdot \alpha_{ik}^2 \leq a \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_{ik}^2$$

Met behulp van de uit (1) volgende gelijkheid:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_{ik}^2 = 1 - \alpha_{ii} \tag{1.a}$$

kunnen wij deze ongelijkheden overvoeren in:

$$\varepsilon_i^2 \geqslant a^2(1-\alpha_{ii}^2) + (\lambda_i - \mu_i)^2 \cdot \alpha_{ii}^2 \tag{5}$$

$$|\lambda_i - \mu_i| \cdot \alpha_{ii}^2 \leqslant a(1-\alpha_{ii}^2) \tag{6}$$

Door combinatie van (1.a) en (5) vinden wij dat voor α_{ii} moet gelden:

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \leqslant \alpha_{ii}^2 \leqslant 1 \tag{7}$$

terwijl met dit resultaat uit (6) voor $|\lambda_i - \mu_i|$ kan worden afgeleid:

$$0 \leqslant |\lambda_i - \mu_i| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}} \tag{8}$$

Voor kleine waarden van $\frac{\varepsilon}{a}$ zal een ongelijkheid van het bovenstaande type leiden tot aanzienlijk betere schattingen voor de maximale afwijking dan de "linear bounds" die met de theorema's van Gerschgorin kunnen worden bepaald.

De moeilijkheid bij de hiervoor geschetste methode is dat het getal a onbekend is. Volgens Brönlund kunnen wij echter met:

$$\tilde{a} = \min_j \left(|\mu_i - \lambda_j| - \varepsilon_j \right)$$

een benedengrens $\tilde{a}$ voor a bepalen. Hoe de berekening van $\tilde{a}$ dan moet verlopen is mij niet helemaal duidelijk.

De gegeven afleiding is gebaseerd op de veronderstelling dat de te berekenen eigenwaarde λ_i een enkelvoudige eigenwaarde is die duidelijk verschillend is van de overige eigenwaarden van A. Als deze eigenwaarde tot een cluster van eigenwaarden behoort gaat deze afleiding niet meer op. Wij zullen nu een methode gaan bekijken die ook in dat geval tot bruikbaze schattingen van de maximale fout in de berekende eigenwaarden le..

Daartoe voeren wij eerst het begrip "invariante deelruimte" (Engels: invariant subspace) van de matrix $A, (n*n)$ in. De matrix $R, (n*m)$ is ee.. invariante deelruimte van A als R voldoet aan:

$$R^t.R = I \; ; \quad I, (m*m) \quad ;$$

$$A.R = R.D \; ; \quad D, (m*m) \quad ; \quad D = \lceil d_i \rfloor$$

Uiteraard zal $m \leq n$ moeten zijn. Als $m=1$ vormen de hier gegeven eisen ee.. alternatieve formulering van het klassieke eigenwaardeprobleem. Het za.. dan ook duidelijk zijn dat de componenten op de hoofddiagonaal van D eigenwaarden zijn van A terwijl de kolommen van R kunnen worden opge vat als eigenvectoren van A.

Zij $Q, (n*n)$ een orthonormale matrix, die op de volgende wijze wordt gepartitioneerd in deelmatrices:

$$Q = [\, Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots\cdots \quad Q_r \,]$$

Elk van de deelmatrices Q_i $(i = 1, 2, \cdots r)$ heeft uiteraard n rijen. Het aanta.. kolommen van Q_i zij n_i; in ieder geval moet gelden:

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n.$$

Wij eisen nu dat Q_i een invariante deelruimte is van A, dus:

$$A.Q_i = Q_i . D_i \; ; \quad D_i, (n_i * n_i) \; ; \quad D_i \text{ diagonaalmatrix}$$

$$Q_i^t . Q_i = I \quad ;$$

Laat $P_i, (n_i * n_i)$ een matrix zijn die voldoet aan:

$$P_i^t . P_i = I$$

Ter wille van de duidelijkheid wijzen wij erop dat niet wordt geëist dat P_i een invariante deelruimte van A is.

Zij C een matrix van orde $n_i * n_i$. Definieer een matrix $Y, (n*n_i)$ als:

$$Y = Y(C) = A.P_i - P_i.C.$$

Hieruit kan de Euclidische norm van Y, $\|Y\|_E$, worden bepaald als functie van C. Volgens Brönlund geldt:

$$\min_C \|Y\|_E = \| A.P_i - P_i.K_i \|_E$$

met:

$$K_i = P_i^t.A.P_i \quad ; \quad K_i,\ (n_i * n_i)$$

Wij zien hieraan dat K_i kan worden opgevat als een generalisatie van de Rayleygh-coëfficiënt.

Naar analogie van de voorgaande theorie voeren wij de residu-deelruimte η_i en het residu E_i in. Deze worden gedefinieerd door:

$$\eta_i = A.P_i - P_i.K_i \quad ; \qquad K_i = P_i^t A.P_i$$

$$E_i = \|\eta_i\|_E = (\text{Trace}\{\eta_i^t.\eta_i\})^{\frac{1}{2}}$$

Laat ω_j $(j=1,2,\cdots n_i)$ de eigenwaarden zijn van K_i en nummer deze eigenwaarden zodanig dat $\omega_j \geq \omega_{j-1}$ voor $j=2,3,\cdots n_i$. Tekenen wij dan de cirkels met middelpunt in ω_j en straal E_i dan kan worden aangetoond dat er tenminste één eigenwaarde ligt in het gebied dat door zo'n cirkel wordt omsloten. Bij een geschikt gekozen nummering van de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ van A geldt dan bovendien:

$$\sum_{j=1}^{n_i} (\lambda_j - \omega_j)^2 \leq 2 E_i^2$$

Analoog aan de werkwijze in het voorgaande, waarbij de vector u_i werd opgevat als een lineaire combinatie van de eigenvectoren van A, schrijven wij P_i nu als een combinatie van de invariante deelruimten $Q_1, Q_2, \cdots Q_r$:

$$P_i = Q.T_i$$

waarbij de matrix T_i is opgebouwd uit r deelmatrices $T_{1i}, T_{2i}, \cdots T_{ri}$:

$$T_i^t = [\ T_{1i}^t \quad T_{2i}^t \ \cdots\cdots\ T_{ri}^t\ ]$$

T_{ji} is een matrix van orde $n_j * n_i$ $(i=1,2,\cdots r;\ j=1,2,\cdots r)$.

Omdat $P_i^t.P_i = I$ en $Q^t.Q = I$ kan eenvoudig worden bewezen dat de matrix T_i moet voldoen aan:

$$T_i^t.T_i = I$$

Wij kunnen ook K_i, η_i en E_i uitdrukken in T_i. Dit levert:

$$K_i = T_i^t.Q^t.A.Q.T_i = T_i^t.Q^t.Q.D.T_i = T_i^t.D.T_i$$

$$\eta_i = A.Q.T_i - Q.T_i.T_i^t.D.T_i = Q.(I - T_i.T_i^t).D.T_i$$

$$E_i^2 = \| T_i^t.D^t.(I - T_i.T_i^t).(I - T_i.T_i^t).D.T_i \|_E = \| T_i^t.D^t.(I - T_i.T_i^t).D.T_i \|_E$$

Hierin is D een diagonaalmatrix waarvan de componenten op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \text{----} \lambda_n$ van A. Wij nummeren deze eigenvectoren zodanig dat $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \text{----} \geqslant \lambda_n$ en bergen de bij λ_j behorende eigenvector x_j op in de j^e- kolom van Q. Dan geldt:

$$AQ = Q\Lambda \quad ; \quad \Lambda = \lceil \lambda_j \rfloor \quad ; \quad \lambda_j \geqslant \lambda_{j-1}$$

zodat de matrix D gelijk is aan Λ. Wij kunnen dan de bovenstaande resultaten als volgt samenvatten ($i = 1, 2, \text{---} r$):

$$T_i^t.T_i = I$$

$$K_i = T_i^t.\Lambda.T_i$$

$$\eta_i = Q(I - T_i.T_i^t).\Lambda.T_i$$

$$E_i^2 = \| T_i^t.\Lambda.\Lambda.T_i - T_i^t.\Lambda.T_i.T_i^t.\Lambda.T_i \|_E$$

Veronderstel nu dat de n_i kolommen van P_i schattingen zijn voor de n_i eigenvectoren $x_{m+1}, x_{m+2}, \text{------}, x_{m+n_i}$ van de matrix A; hierbij is:

$$m = \sum_{j=1}^{i-1} n_j .$$

Uit $K_i = P_i^t.A.P_i$ volgt dan dat de eigenwaarden ω_j ($j = 1, 2, \text{---} n_i$) van K_i schattingen zijn voor de eigenwaarden λ_{m+j} van de matrix A.

Wij nemen nu aan dat de overige eigenwaarden van A, dus de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \text{----} \lambda_m$ en $\lambda_{m+n_i+1}, \lambda_{m+n_i+2}, \text{----} \lambda_n$, voldoen aan de volgende ongelijkheid:

$$|\lambda_k - \omega_j| \geqslant a \qquad k = 1, 2, \cdots m,\ m+n_i+1, \cdots n\ ;\ j = 1, 2, \cdots n_i .$$

Dan kan volgens Brönlund worden aangetoond dat T_{ii} en ω_j voldoen aan de onderstaande ongelijkheden:

$$1 - \frac{E_i^2}{a^2} \leqslant \| T_{ii} \|_2^2 \leqslant 1 \qquad ; \quad E_i < a \qquad (1)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n_i} (\lambda_{m+j} - \omega_j)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\frac{E_i^2}{a}}{1 - \left(\frac{E_i}{a}\right)^2} \left[1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{n_i} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{E_i}{a}\right)^2 \right\} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_{m+n_i}}{a} \right] \qquad (2)$$

Voor de onbekende grootheid a kunnen wij een schatting bepalen op een wijze die analoog is aan die van pag. 19.

De door (1) en (2) gegeven grenzen voor de eigenvectoren en de eigenwaarden zijn veel scherper dan de grenzen die uit de theorema's van Gerschgorin bepaald kunnen worden, als tenminste $E_i \ll a$.

De hier geschetste werkwijze is zeer geschikt als er meervoudige eigenwaarden optreden of als een aantal eigenwaarden weinig van elkaar verschillen (dus als er clusters van eigenwaarden optreden). Daarbij moet dan wel geëist worden dat P_i schattingen bevat voor <u>alle</u> eigenvectoren die behoren bij de eigenwaarden in dat cluster.

Ervaringen van het ISD leren bovendien dat de ongelijkheden (1) en (2) van deze pagina zeer bruikbaar zijn bij de analyse van de optredende fouten bij simultane vector iteratie.

<u>Cursus</u> <u>DYNAN</u>, <u>dinsdag</u> 9 november t.m. <u>vrijdag</u> 12 november.

Het gedeelte van de cursus na de eerste dag was tamelijk onsamenhangend, in die zin dat allerlei aspecten van DYNAN te hooi en te gras ter sprake zijn gekomen zonder een duidelijk te onderkennen systematiek in de volgorde van de onderwerpen. Het lijkt daarom weinig zinvol een chronologisch verslag te geven van het verdere verloop van deze cursus. Wij zullen hier dan ook een andere werkwijze volgen en de onderwerpen uit de cursus bespreken in een -naar onze mening- systematischer volgorde.

Het uitgangspunt bij de beschouwingen wordt gevormd door een stelsel lineaire, inhomogene, tweede orde differentiaalvergelijkingen van de volgende vorm:

$$\bar{M}.\ddot{\bar{q}} + \bar{C}.\dot{\bar{q}} + \bar{K}.\bar{q} = \bar{R}(t) \qquad (1.)$$

Als wij ons beperken tot de analyse van het dynamische gedrag van mechanische constructies kunnen de in dit stelsel optredende grootheden op de volgende wijze geïnterpreteerd worden:

$\bar{q}$: tijdsafhankelijke verplaatsingsvector van de constuctie

$\bar{R}$: tijdsafhankelijke belastingsvector van de constructie

$\bar{M}$: massamatrix van de constructie

$\bar{C}$: dempingsmatrix van de constructie

$\bar{K}$: stijfheidsmatrix van de constructie.

Tenzij anders vermeld zullen wij steeds veronderstellen dat de matrices $\bar{M}$, $\bar{C}$ en $\bar{K}$ symmetrische matrices van orde $n*n$ zijn. Op fysische gronden volgt bovendien dat $\bar{M}$ en $\bar{K}$ minstens semi-positief definiet zijn. In formulevorm:

$$\bar{M},\ (n*n)\ ; \quad \bar{M}^t = \bar{M}\ ; \quad x^t.\bar{M}.x \geq 0 \text{ voor alle } x,\ (n*1)$$

$$\bar{C},\ (n*n)\ ; \quad \bar{C}^t = \bar{C} \qquad (2.)$$

$$\bar{K},\ (n*n)\ ; \quad \bar{K}^t = \bar{K}\ ; \quad x^t.\bar{K}.x \geq 0 \text{ voor alle } x,\ (n*1)$$

Van deze eigenschappen zullen wij veelvuldig gebruik maken.

De verplaatsingsvector $\bar{q}$ wordt gepartitioneerd in een drietal deelvectoren $\bar{q}_m$, $\bar{q}_d$ en $\bar{q}_p$:

$$\bar{q}^t = [\ \bar{q}_m^t \quad \bar{q}_d^t \quad \bar{q}_p^t\ ] \qquad (3.)$$

waarbij aan deze deelvectoren de volgende betekenis wordt gehecht:

$\bar{q}_m$: vector van master degrees of freedom

$\bar{q}_d$: vector van de afhankelijke vrijheidsgraden (dependent degrees of freedom)

$\bar{q}_p$: vector van de voorgeschreven vrijheidsgraden ongelijk aan nul (prescribed degrees of freedom)

De fysische interpretatie van $\bar{q}_m$ en $\bar{q}_d$ zal hierna wel duidelijk worden.

Indien wij de vector $\bar{R}$ en de matrices $\bar{M}$, $\bar{C}$ en $\bar{K}$ op overeenkomstige wijze partitioneren dan kunnen wij in plaats van (1.) ook schrijven:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{mm} & \bar{M}_{md} & \bar{M}_{mp} \\ \bar{M}_{dm} & \bar{M}_{dd} & \bar{M}_{dp} \\ \bar{M}_{pm} & \bar{M}_{pd} & \bar{M}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}}_m \\ \ddot{\bar{q}}_d \\ \ddot{\bar{q}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_{mm} & \bar{C}_{md} & \bar{C}_{mp} \\ \bar{C}_{dm} & \bar{C}_{dd} & \bar{C}_{dp} \\ \bar{C}_{pm} & \bar{C}_{pd} & \bar{C}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_m \\ \dot{\bar{q}}_d \\ \dot{\bar{q}}_p \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{mm} & \bar{K}_{md} & \bar{K}_{mp} \\ \bar{K}_{dm} & \bar{K}_{dd} & \bar{K}_{dp} \\ \bar{K}_{pm} & \bar{K}_{pd} & \bar{K}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_m \\ \bar{q}_d \\ \bar{q}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_m \\ \bar{R}_d \\ \bar{R}_p \end{bmatrix} \qquad (4)$$

De krachtvectoren $\bar{R}_m$ en $\bar{R}_d$ zijn bekend terwijl de componenten van $\bar{R}_p$ nader te bepalen functies van de tijd zijn. Ook de componenten van $\bar{q}_m$

en $\bar{q}_d$ zijn onbekend. Stellen wij het aantal componenten van $\bar{q}_m$, $\bar{q}_d$ en $\bar{q}_p$ gelijk aan respectievelijk n_m, n_d en n_p dan is het totaal aantal onbekende verplaatsingsgrootheden gelijk aan $n_u = n_m + n_d$.

Meestal zal n_u zo groot zijn dat het om practische redenen (rekentijd en - zij het in mindere mate - numerieke stabiliteit van het oplossingsproces!) niet mogelijk is een exacte oplossing van (4.) te bepalen. Wij zullen hier een benaderingsmethode schetsen waarmee het mogelijk is om - op een practisch bruikbare manier - een benaderingsoplossing van (4.) te berekenen. Het kernpunt van die methode is dat het aantal relevante vergelijkingen in (4.) drastisch wordt gereduceerd door de vector $\bar{q}_d$ te "elimineren". Daarbij kunnen vele werkwijzen gekozen worden. Wij beperken ons hier tot de Guyan-reductie (ook wel statische condensatie genoemd), omdat dit de werkwijze is die in DYNAN gehanteerd wordt.

Uit het stelsel differentiaalvergelijkingen in gepartitioneerde vorm volgt:

$$\bar{M}_{dm}\cdot\ddot{\bar{q}}_m + \bar{M}_{dd}\cdot\ddot{\bar{q}}_d + \bar{M}_{dp}\cdot\ddot{\bar{q}}_p + \bar{C}_{dm}\cdot\dot{\bar{q}}_m + \bar{C}_{dd}\cdot\dot{\bar{q}}_d + \bar{C}_{dp}\cdot\dot{\bar{q}}_p +$$
$$+ \bar{K}_{dm}\cdot\bar{q}_m + \bar{K}_{dd}\cdot\bar{q}_d + \bar{K}_{dp}\cdot\bar{q}_p = \bar{R}_d(t) \qquad (5)$$

Nemen wij nu aan dat de invloed van de traagheidskrachten en de dempingskrachten veel kleiner is dan de invloed van $\bar{K}_{dm}\cdot\bar{q}_m$ en $\bar{K}_{dp}\cdot\bar{q}_p$ dan kan (5) worden vereenvoudigd tot:

$$\bar{K}_{dm}\cdot\bar{q}_m + \bar{K}_{dd}\cdot\bar{q}_d + \bar{K}_{dp}\cdot\bar{q}_p = \bar{R}_d(t). \qquad (6)$$

Wij nemen nu verder aan dat beweging als star lichaam van de constructie (of van een gedeelte van de constructie) onmogelijk is als wij $\bar{q}_m$ en $\bar{q}_p$ gelijk zouden nemen aan nul. Dit betekent dat de matrix $\bar{K}_{dd}$, $(n_d * n_d)$ positief definiet zal zijn, zodat uit (6) $\bar{q}_d$ kan worden opgelost:

$$\bar{q}_d = -(\bar{K}_{dd})^{-1} \cdot \bar{K}_{dm} \cdot \bar{q}_m - (K_{dd})^{-1} \cdot \bar{K}_{dp} \cdot \bar{q}_p + (\bar{K}_{dd})^{-1} \cdot \bar{R}_d \qquad (6$$

Hiermee kan het aantal onbekenden in (4) worden gereduceerd van $n_u = n_m + n_d$ tot n_m. Het is hier weinig zinvol om dit verder uit te werk omdat bij het reductieproces, dat in DYNAN gevolgd wordt, nog een aant. extra veronderstellingen gehanteerd worden. Daar wordt namelijk aangenomen dat zowel de matrix $\bar{K}_{dp}$, die statisch de afhankelijke verpla singen $\bar{q}_d$ koppelt aan de voorgeschreven verplaatsingen $\bar{q}_p$, als de bela stingsvector $\bar{R}_d$ gelijk zijn aan nul. Vergelijking (6) gaat dan over in:

$$\bar{q}_d = -(\bar{K}_{dd})^{-1} \cdot \bar{K}_{dm} \cdot \bar{q}_m \qquad (7.$$

Het zal duidelijk zijn dat deze werkwijze grote consequenties heeft voo de keuze van de afhankelijke vrijheidsgraden. Allereerst volgt uit $\bar{R}_d = 0$ al direct dat iedere onbekende vrijheidsgraad, waarop een voorgeschreven belasting werkt, master gekozen <u>moet</u> worden. Uit $\bar{K}_{dp} = 0$ volgt bovendien dat voor een element, waarvan een van de vrijheidsgraden een voorgeschreven waarde ongelijk aan nul heeft, alle andere onbekende vrijheidsgraden master gedeclareerd moeten worden. Deze beperking is iets scherper dan in werkelijkheid nodig is; geëist moet worden dat iedere onbekende vrijheidsgraad, die in de stijfheidsmatrix $\bar{K}$ gekoppeld is met een voorgeschreven vrijheidsgraad ($\neq 0$), als master degree of freedom gedeclareerd moet worden. In de DYNAN User's Reference Manual worden deze eisen als volgt omschreven (zie User's Manual, uitgave 1971, pag. 2.1.4):

b. "concentrated excitation forces may only act on master degrees of freedom"

c. "time-dependent prescribed deflections may only be coupled to master degrees of freedom"

De genoemde beperkingen kunnen van zeer groot belang zijn, bijv. als een groot aantal knooppunten uitwendig belast worden (denk aan een tijdsafhankelijke druk op een plaat of een schaal) op als in veel knooppunten een verplaatsing is voorgeschreven als functie van de tijd. Het aantal master degrees of freedom, n_m, kan dan erg groot worden en de dynamische berekeningen zullen dan zeer veel rekentijd gaan vergen. Het is ons niet duidelijk geworden waarom het ISD deze beperkingen in DYNAN heeft ingebouwd. Op een desbetreffende vraag gaf Brönlund het nogal onbevredigende antwoord "Wij hebben er gewoon niet aan gedacht om een andere werkwijze te volgen". Brönlund liet wel doorschemeren dat hij erg geïnteresseerd is in andere, meer algemene werkwijzen waarin deze beperkingen niet zouden optreden.

Wij zullen ons nu verder beperken tot de werkwijze die in DYNAN gevolgd is. Met:

$$T_2 = -(K_{dd})^{-1} \cdot K_{dm} \tag{8}$$

kan voor $\bar{q}_d$ geschreven worden:

$$\bar{q}_d = T_2 \cdot \bar{q}_m \tag{9}$$

Dit resultaat substitueren wij in (4). Na enig rekenwerk volgt dan:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{mp} \\ M_{pm} & M_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{mm} & C_{mp} \\ C_{pm} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mp} \\ K_{pm} & K_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m \\ R_p \end{bmatrix} \tag{10}$$

waarbij voor de optredende matrices en vectoren geldt:

$$\left.\begin{aligned} M_{mm} &= M_{mm}^t = \bar{M}_{mm} + T_2' \cdot \bar{M}_{dm} + \bar{M}_{md} \cdot T_2' + T_2' \bar{M}_{dd} \cdot T_2 \\ M_{mp} &= M_{pm}^t = \bar{M}_{mp} + T_2' \cdot \bar{M}_{dp} \\ M_{pp} &= M_{pp}^t = \bar{M}_{pp} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} C_{mm} &= C_{mm}^t = \bar{C}_{mm} + T_2' \cdot \bar{C}_{dm} + \bar{C}_{md} \cdot T_2' + T_2' \cdot \bar{C}_{dd} \cdot T_2 \\ C_{mp} &= C_{pm}^t = \bar{C}_{mp} + T_2' \cdot \bar{C}_{md} \\ C_{pp} &= C_{pp}^t = \bar{C}_{pp} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{array}{l} K_{mm} = K_{mm}^{t} = \bar{K}_{mm} - \bar{K}_{md} \cdot (\bar{K}_{dd})^{-1} \cdot \bar{K}_{dm} \\ K_{mp} = K_{pm}^{t} = \bar{K}_{mp} \\ K_{pp} = K_{pp}^{t} = \bar{K}_{pp} \end{array}\right\} \quad (13.)$$

$$q_m = \bar{q}_m \; ; \qquad q_p = \bar{q}_p \qquad (14.)$$

$$k_m = \bar{k}_m \; ; \qquad k_p = \bar{k}_p \qquad (15)$$

Voor het opstellen van de matrices $\bar{K}$ en $\bar{M}$ uit het stelsel vergelijkingen (1) zal meestal gebruik worden gemaakt van het ASKA programmasysteem. Daarvoor zijn in ASKA de processoren SM en BM ingebouwd die, wat hun functie betreft, vergelijkbaar zijn met respectievelijk SK en BK. Hierbij moeten echter de volgende opmerkingen worden geplaatst:

a. verplaatsingsgrootheden die in DYNAN de rol vervullen van master degree of freedom (vector $q_m = \bar{q}_m$), dependent degree of freedom (vector $\bar{q}_d$) en prescribed degree of freedom (vector $q_p = \bar{q}_p$) moeten voor berekeningen met ASKA worden gedeclareerd als respectievelijk external degrees of freedom (vector r_c), local degrees of freedom (vector r_ℓ) en prescribed degrees of freedom (vector r_p).

b. met de processor BK wordt de deelmatrix $\bar{K}_{pp}$ niet gevuld. Voor het opstellen van $\bar{K}_{pp}$ moet de processor BKX worden aangeroepen (zie de Programmers Manual en de voorbeelden met voorgeschreven verplaatsingen in de Lecture Notes). Volgens de DYNAN U.R.M (User's Reference Manual, pag. 2.1.3) wordt, in tegenstelling met het bovenstaande, bij de aanroep van de processor BM wel de matrix $\bar{M}_{pp}$ opgesteld.

c. Indien de matrices $\bar{M}$ en $\bar{K}$ worden bepaald met de huidige versie van ASKA zullen $\bar{M}$ en $\bar{K}$ qua structuur gelijk zijn. Dit betekent echter dat $\bar{M}_{dp}$ een nulmatrix zal zijn als $\bar{K}_{dp} = 0$. Uit de beschrijvingen in de

DYNAN U.R.M. is mij niet duidelijk geworden of hiervan bij het condenseren gebruik wordt gemaakt.

d. In het ASKA-systeem zijn geen faciliteiten ingebouwd om de dempingmatrix $\bar{C}$ op te stellen. De reden daarvan zal duidelijk zijn.

Wij zullen later nog terugkomen op de processoren die in ASKA zijn opgenomen ten behoeve van dynamische berekeningen.

Als de constructie of een gedeelte van de constructie als star lichaam kan bewegen dan zal de matrix K_{mm} singulier zijn. Nemen wij aan dat het aantal rigid body modes n_s bedraagt dan zal de rang van K_{mm} niet gelijk zijn aan n_m maar aan $n_e = n_m - n_s$. Wij noemen n_e het aantal elastic modes. Nemen wij nu aan dat de rigid body modes en de elastic modes worden beschreven door de componenten van de vectoren q_s, $(n_s * 1)$ respectievelijk q_e, $(n_e * 1)$. Wij zullen die componenten ook wel aanduiden met de namen rigid body degrees of freedom en elastic degrees of freedom.

De vector van master degrees of freedom, q_m, kan geschreven worden als een lineaire combinatie van q_e en q_s:

$$q_m = \begin{bmatrix} S_e & X_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_e \\ q_s \end{bmatrix} \equiv S \cdot \begin{bmatrix} q_e \\ q_s \end{bmatrix} = S_e \cdot q_e + X_s \cdot q_s \qquad (16)$$

waarbij $S = [S_e \quad X_s]$ de rigid body transformatiematrix is.

Wij wijzen erop dat de componenten van q_s door de gebruiker zelf bepaald worden; hij moet namelijk inlezen welke bewegingen als star lichaam op kunnen treden. De componenten van q_s zullen dan ook een fysisch te interpreteren betekenis hebben (zie bijv. DYNAN U.R.M., pag. 2.2.10). Dit laatste is in het algemeen niet het geval voor de componenten van q_e.

De componenten van de matrix X_s kunnen eenvoudig bepaald worden door gebruik te maken van het gegeven dat de componenten van de vector $X_s \cdot q_s$ gelijk zijn aan de verplaatsingen die optreden bij een willekeurig door q_s gekarakteriseerde beweging als star lichaam. Het zal duidelijk zijn dat voor de berekening van X_s de knooppuntskoordinaten nodig zijn. Eenvoudig kan worden aangetoond dat X_s voldoet aan:

$$K_{mm} \cdot X_s = 0 \tag{17}$$

Immers, uit het stelsel vergelijkingen (10) volgt voor het statische geval:

$$K_{mm} \cdot X_s \cdot q_s + K_{mm} \cdot S_e \cdot q_e = R_m - K_{mp} \cdot q_p$$

Beschouwen wij nu bewegingen als star lichaam (dus $q_s \neq 0$; $q_e = 0$; $R_m = 0$; $q_p = 0$) dan volgt direct:

$$K_{mm} \cdot X_s \cdot q_s = 0 \quad \text{voor alle } q_s$$

en dus $K_{mm} \cdot X_s = 0$.

De matrix S_e kan niet eenduidig bepaald worden uit (16). Wij eisen nu dat S_e voldoet aan:

$$S_e^t \cdot M \cdot X_s = 0 \tag{18}$$

Ook dan is S_e echter nog niet eenduidig vastgelegd. Van de nog overblijvende vrijheid in de keuze van S_e maken wij gebruik door te eisen:

$$S_e^t \cdot S_e = I. \tag{19}$$

Volgens het ISD kan nu bewezen worden dat S_e wel eenduidig is.

Wij kunnen nu van (16) gebruik maken om het stelsel vergelijkingen (10) te transformeren. Daartoe schrijven wij eerst (10) in een iets andere vorm:

$$M_{mm} \cdot \ddot{q}_m + C_{mm} \cdot \dot{q}_m + K_{mm} \cdot q_m = R_m - M_{mp} \cdot \ddot{q}_p - C_{mp} \cdot \dot{q}_p - K_{mp} \cdot q_p \tag{20}$$

$$R_p = M_{pm} \cdot \ddot{q}_m + C_{pm} \cdot \dot{q}_m + K_{pm} \cdot q_m + M_{pp} \cdot \ddot{q}_p + C_{pp} \cdot \dot{q}_p + K_{pp} \cdot q_p \tag{21}$$

Het stelsel vergelijkingen (21) is voor ons op dit moment nauwelijks intereszant; wij zullen er alleen gebruik van maken om de krachten te bereke-nen die nodig zijn om de voorgeschreven verplaatsingen te realiseren.

Stellen wij het rechterlid in stelsel (20) gelijk aan $P(t)$, dus:

$$P(t) = R_m(t) - M_{mp}.\ddot{q}_p - C_{mp}.\dot{q}_p - K_{mp}.q_p , \qquad (2$$

dan kunnen wij met (16) in plaats van (20) ook schrijven:

$$S^t.M_{mm}.S.\begin{bmatrix}\ddot{q}_e\\ \ddot{q}_s\end{bmatrix} + S^t.C_{mm}.S.\begin{bmatrix}\dot{q}_e\\ \dot{q}_s\end{bmatrix} + S^t.K_{mm}.S.\begin{bmatrix}q_e\\ q_s\end{bmatrix} = S^t.P$$

Op grond van de eigenschappen (17), (18) en (19) van de deelmatrices X_s en S_e hebben de matrices $S^t.M_{mm}.S$ en $S^t.K_{mm}.S$ een eenvoudige vorm. Er geldt:

$$S^t.M_{mm}.S = \begin{bmatrix} S_e^t.M_{mm}.S_e & S_e^t.M_{mm}.X_s \\ X_s^t.M_{mm}.S_e & X_s^t.M_{mm}.X_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_e^t.M_{mm}.S_e & 0 \\ 0 & X_s^t.M_{mm}.X_s \end{bmatrix}$$

$$S^t.K_{mm}.S = \begin{bmatrix} S_e^t.K_{mm}.S_e & S_e^t.K_{mm}.X_s \\ X_s^t.K_{mm}.S_e & X_s^t.K_{mm}.X_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_e^t.K_{mm}.S_e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jammer genoeg geldt er – in het algemeen – niet een soortgelijk resultaat voor $S^t.C_{mm}.S$. Daarvoor volgt:

$$S^t.C_{mm}.S = \begin{bmatrix} S_e^t.C_{mm}.S_e & S_e^t.C_{mm}.X_s \\ X_s^t.C_{mm}.S_e & X_s^t.C_{mm}.X_s \end{bmatrix}$$

Wij voeren nu een aantal – erg voor de hand liggende – afkortingen in en stellen:

$$\left.\begin{array}{lll} K_{ee} = S_e^t.K_{mm}.S_e & & \\ M_{ee} = S_e^t.M_{mm}.S_e \ ; & M_{ss} = X_s^t.M_{mm}.X_s & \\ C_{ee} = S_e^t.C_{mm}.S_e \ ; & C_{ss} = X_s^t.C_{mm}.X_s \ ; & C_{es} = S_e^t.C_{mm}.S_e \\ R_e = S_e^t.P \ ; & R_s = X_s^t.P & \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Hiermee kunnen wij in plaats van (21) nu ook schrijven:

$$\begin{bmatrix} M_{ee} & 0 \\ 0 & M_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_e\\ \ddot{q}_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ee} & C_{es} \\ C_{se} & C_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_e\\ \dot{q}_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ee} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_e\\ q_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_e\\ R_s\end{bmatrix} \qquad (24)$$

Uit (24) blijkt dat de vergelijkingen voor q_e en q_s dan en slechts dan ontkoppeld zijn als $C_{es} = C_{se}^t$ een nulmatrix is. Dit zal in het algemeen niet het geval zijn. Het is misschien mogelijk om de matrix S_e zodanig te kiezen dat $S_e^t . C_{mm} . S_e = 0$ en $S_e^t . M_{mm} . S_e = 0$ maar niet meer $S_e^t . S_e = I$. Het ISD heeft daarvoor op dit moment in ieder geval nog geen bruikbare methode ontwikkeld. Voor willekeurige, symmetrische dempingsmatrices C_{mm} kunnen op dit moment met DYNAN dan ook alleen de complexe eigenwaarden en eigenvectoren worden berekend. Het is nog niet mogelijk responsieberekeningen uit te voeren; bij de nu bekende methoden zou dit soort berekeningen namelijk zeer veel rekentijd vereisen. Voor een beschrijving van de in DYNAN aanwezige faciliteiten voor het rekenen met willekeurige, symmetrische dempingsmatrices verwijzen wij naar de Lecture Notes en de DYNAN U.R.M. pag. 2.2.21 t/m 2.2.31.

Wij zullen ons nu verder beperken tot het geval dat de demping proportioneel is, d.w.z. dat de dempingsmatrix C_{mm} een lineaire combinatie is van de stijfheidsmatrix K_{mm} en de massamatrix M_{mm}:

$$C_{mm} = \alpha . K_{mm} + \beta . M_{mm} \qquad (25)$$

waarbij α en β reëel zijn. Dan volgt echter:

$$C_{ee} = S_e^t . (\alpha . K_{mm} + \beta . M_{mm}) . S_e = \alpha . K_{ee} + \beta . M_{ee}$$

$$C_{ss} = X_s^t . (\alpha . K_{mm} + \beta . M_{mm}) . X_s = \beta . M_{ss}$$

$$C_{se} = C_{es}^t = X_s^t (\alpha . K_{mm} + \beta . M_{mm}) . S_e = 0$$

Voor proportionele demping zijn de differentiaalvergelijkingen voor q_e dus ontkoppeld van die voor q_s. Dan geldt:

$$M_{ee} . \ddot{q}_e + (\alpha . K_{ee} + \beta . M_{ee}) . \dot{q}_e + K_{ee} . q_e = R_e \qquad (26)$$

$$M_{ss} . \ddot{q}_s + \beta . M_{ss} . \dot{q}_s = R_s \qquad (27)$$

Wij hebben ons tot nu toe nog niet bekommerd om de begincondities die bij de gegeven differentiaalvergelijkingen behoren. Deze luiden:

$$q_m(t=t_0) = q_{m0} \quad ; \quad \dot{q}_m(t=t_0) = \dot{q}_{m0}$$

Voor berekeningen met de stelsels vergelijkingen (26) en (27) moeten deze beginvoorwaarden worden getransformeerd naar condities in de vectoren q_e en q_s. Omdat de matrix $S = [S_e \quad X_s]$ regulier is geldt:

$$\begin{bmatrix} q_{e0} \\ q_{s0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_e(t=t_0) \\ q_s(t=t_0) \end{bmatrix} = S^{-1} \cdot q_{m0} ; \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_{e0} \\ \dot{q}_{s0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_e(t=t_0) \\ \dot{q}_s(t=t_0) \end{bmatrix} = S^{-1} \cdot \dot{q}_{m0} \qquad (28)$$

Voor de berekening van de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen voor q_e bepalen wij eerst (een aantal van) de (laagste) eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van het algemene eigenwaarde probleem

$$M_{ee} \cdot x = \lambda . K_{ee} \cdot x \qquad (29.$$

dat met $q_e = x . e^{\mu t}$ en $\lambda = -\frac{1}{\mu^2}$ direct is af te leiden uit

$$M_{ee} \cdot \ddot{q}_e + K_{ee} \cdot q_e = 0$$

Omdat de bewegingen als star lichaam zijn geëlimineerd zal K_{ee} positief definiet zijn terwijl M_{ee} minstens semi-positief definiet is. Omdat K_{ee} en M_{ee} bovendien symmetrisch zijn volgt dat alle eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{ne}$ positief zijn. Wij stellen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{ne} > 0$. De bijbehorende eigenvectoren $x_1, x_2, \ldots x_{ne}$ bergen wij op in de matrix X. wij mogen eisen dat X voldoet aan:

$$X^t \cdot K_{ee} \cdot X = I \qquad (30.$$

en op grond van (29) geldt dan (zie ook de voorgaande aantekeningen over het algemene eigenwaarde probleem):

$$X^t \cdot M_{ee} \cdot X = \Lambda = \lceil \lambda_i \rfloor \qquad (31)$$

Stellen wij nu:

$$q_e = X . \eta(t) = \sum_{i=1}^{n_e} x_i . \eta_i(t) , \qquad (32$$

waarbij η de vector der zogenaamde gegeneraliseerde coordinaten is. dan kan het stelsel vergelijkingen voor q_e door voorvermenigvuldiging met X^t en substitutie van (32) worden overgevoerd in:

$$\Lambda . \ddot{\eta} + (\alpha . I + \beta . \Lambda) . \dot{\eta} + \eta = X^t . R_e = F \qquad (33.$$

Dit is een stelsel van n_e ongekoppelde differentiaalvergelijkingen van de vorm:

$$\lambda_i . \ddot{\eta}_i + (\alpha + \beta . \lambda_i) . \dot{\eta}_i + \eta_i = F_i(t) \qquad (34$$

In het algemeen zijn slechts een zeer beperkt aantal van de (eerste) componenten van de vector η van belang bij de beschrijving van het dynamisch gedrag van de constructie. Stel dat dit aantal gelijk is aan n_x. Als dit aantal kleiner is dan n_e dan zullen wij ook slechts de eerste n_x componenten van η berekenen. Nu kan eenvoudig worden aangetoond dat dan voor de hierboven aangegeven transformatie alleen de eerste n_x eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, --- \lambda_{n_x}$ en eigenvectoren $x_1, x_2, --- x_{n_x}$ nodig zijn. Bij de oplossing van het eigenwaarde probleem (29) beperken wij ons dan uiteraard tot de berekening van deze grootheden. De vector q_e wordt dan niet bepaald uit (32) maar uit:

$$q_e = \sum_{i=1}^{n_x} x_i . \eta_i(t) \qquad (35)$$

Bij deze werkwijze doet zich echter een kleine complicatie voor. Immers om vergelijking (34) te kunnen oplossen voor $i = 1, 2, --- n_x$ moeten de begincondities $\eta_{io} = \eta_i(t = t_o)$ en $\dot{\eta}_{io} = \dot{\eta}_i(t = t_o)$ bekend zijn. Als $n_x = n_e$ kunnen deze condities met $\eta = X^{-1} . q_e$ eenvoudig bepaald worden uit de beginvoorwaarden voor q_e en $\dot{q}_e$. Als $n_x < n_e$ is X^{-1} echter niet bekend omdat niet alle kolommen van X (d.w.z. niet alle eigenvectoren) bekend zijn. Wij kunnen dan echter gebruik maken van de uit (30) en (31) af te leiden gelijkheden:

$$X^{-1} = X^t . K_{ee} ; \qquad X^{-1} = \Lambda^{-1} . X^t . M_{ee}$$

Volgens de DYNAN U.R.M. (pag 2.2.33) kan worden aangetoond dat de uit:

$$\eta_o = \eta(t=t_o) = X^t . K_{ee} . q_{eo}$$

$$\dot{\eta}_o = \dot{\eta}(t=t_o) = \Lambda^{-1} . X^t . M_{ee} . \dot{q}_{eo}$$

berekende randcondities voor $\eta(t)$ en $\dot{\eta}(t)$ de best mogelijke condities zijn voor het geval dat in de berekeningen slechts een beperk aantal componenten van η in rekening worden gebracht.

De oplossing van de differentiaalvergelykingen (34) voor η_i ($i = 1, 2, \cdots n_x$) wordt, evenals de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen (27) voor de rigid body degrees of freedom q_s, in het algemeen bepaald met een numerieke integratieprocedure; voor een beschrijving van de gebruikte procedure verwijzen wij naar de Lecture Notes. Indien echter alle componenten van R_e en van R_s een harmonische functie zijn van de tijd, dan wordt een andere methode gevolgd waarin optimaal gebruik wordt gemaakt van de byzondere vorm van dit soort functies. Het lijkt ons niet zinvol deze werkwijze hier verder te bespreken.

Zodra de interessante componenten van η en de componenten van q_s bepaald zijn als functie van de tijd, kunnen q_m, $\dot{q}_m$ en $\ddot{q}_m$ eenvoudig berekend worden. Desgewenst kan daarna de vector R_p (van de krachten die nodig zijn om de voorgeschreven verplaatsingen q_p te realiseren) worden bepaald.

Er zijn nog enkele belangrijke, invoerbeperkende faciliteiten in het DYNAN programmasysteem ingebouwd die hier nog niet ter sprake zijn gekomen en die samenhangen met het inlezen van de krachtvectoren R_e en R_s als functie van de tijd t. Volgens (23) worden deze vectoren met

$$R_e = S_e^t \cdot P \quad ; \quad R_s = X_s^t \cdot P$$

afgeleid uit de vector $P = P(t)$ die volgens (22) is gedefinieerd door

$$P = R_m - M_{mp} \cdot \ddot{q}_p - C_{mp} \cdot \dot{q}_p - K_{mp} \cdot q_p$$

Veelal zullen de componenten van R_m die ongelijk zijn aan nul kunnen worden afgeleid van een zeer beperkt aantal (stel n_f) functies van de tijd t, dus:

$$R_m(t) = A_F \cdot F(t)$$

waarbij $R_m, (n_m * 1)$; $A_F, (n_m * n_f)$ en $F, (n_f * 1)$. Meestal zal n_f veel kleiner zijn dan n_m. Het is duidelijk dat het vastleggen van de n_f componenten van $F = F(t)$ dan veel minder werk zal zijn dan het vastleggen van de n_m componenten van R_m. De hoeveelheid invoer kan verder drastisch beperkt worden doordat het mogelijk is de componenten van F zowel numeriek als in functie-vorm in te voeren.

Voor de voorgeschreven verplaatsingen q_p is een zelfde faciliteit aanwezig:

$$q_p(t) = A_G \cdot G(t)$$

waarbij $q_p, (n_p * 1)$; $A_G, (n_p * n_g)$ en $G, (n_g * 1)$ en waarbij veelal zal gelden $n_g \ll n_p$. Ook de componenten van $G = G(t)$ kunnen zowel numeriek als in functievorm worden ingelezen.

De voordelen van deze invoerbeperkende faciliteiten worden voor een niet onbelangrijk gedeelte te niet gedaan door de eis dat A_G en A_F boolean matrices moeten zijn. Het is ons volslagen onduidelijk waarom deze beperking is ingebouwd. Op een desbetreffende vraag is ons door Brönlund verzekerd dat deze beperking op korte termijn zal worden opgeheven.

Enige slotopmerkingen.

Wij zijn er ons van bewust dat het voorgaande verslag allermin de gehele inhoud van de cursus DYNAN dekt. Met name twee b langrijke onderwerpen zijn hier niet ter sprake gekomen. Dit zijn:

1. Het DYN2 IO input-output systeem voor matrices
2. De bespreking van de uitgereikte voorbeelden.

Over het eerst genoemde onderwerp heeft H.T. Kiesbauer van het ISL een aantal voordrachten gehouden die in ieder geval voor de schrijver van dit verslag geen daverend hoog nuttig effect gehad hebben. Een beschrijving van deze voordrachten lijkt meer een taak voor iemand die meer kaas gegeten heeft van de organisatie van grote computersystemen dan de schrijver van dit verslag. Ir. J.H. R.M. Elst van de N.V. Philips Gloeilampenfabriek zal zich waarschijnlijk met deze taak belasten.

Wat de bespreking van de uitgereikte voorbeelden betreft (zie de Lecture Notes) lijkt het ons beter om hiermee te wachten tot deze voorbeelden ook verwerkt zijn met de systemen in Eindhoven en Delft. In de rapportage over deze testproblemen kunnen dan de opmerkingen van Brönlund over deze voorbeelden worden verwerkt. Met name zal daarbij duidelijk worden waarin in de cursus (en in dit verslag) zoveel aandacht is besteed aan de pertubatie-theorie.

Eindhoven, 17 december 1971