

Enige beschouwingen over het genereren van numerieke random excitatie

Citation for published version (APA):

Kraker, de, A. (1983). *Enige beschouwingen over het genereren van numerieke random excitatie*. (DCT rapporten; Vol. 1983.021). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1983

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Enige beschouwingen over
het genereren van numerieke
random excitatie.

Eindhoven, dec. 1983
Vakgroep Fundamentele
Werktuigbouwkunde
Dr. Ir. A. de Kraker
THE rapport WE 83.21

Inhoud

	pag.
Inleiding	
1. Formulering vanuit het tijddomein	1
2. Formulering vanuit het frequentiedomein	26

Literatuur

- [1] A. de Kraker ; Random Trillingen, collegedictaat THE, Dictaatnr. 4.547, 1983.
- [2] Benjamin, J.R., Cornell, C.A., Probability, Statistics, and Decision For Civil Engineers, Mc. Graw-Hill book co., 1970

Inleiding

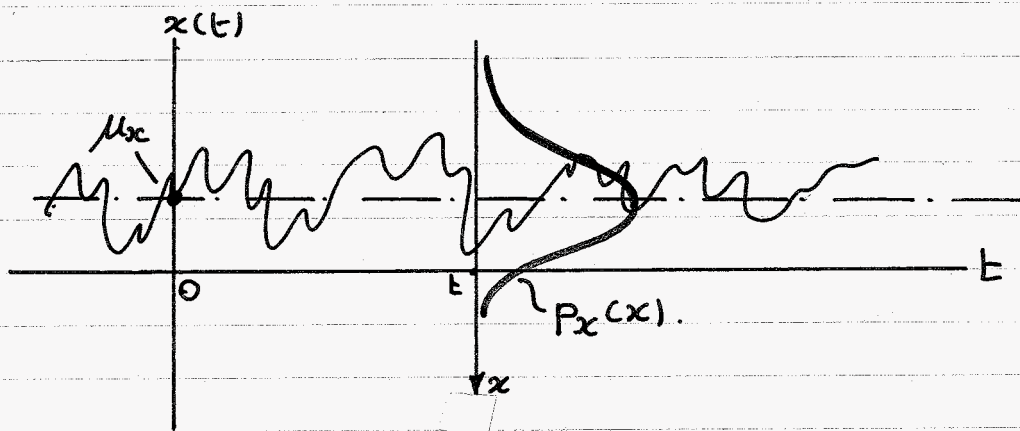
Bij het genereren van ruis-signalen kan men in principe twee wegen bewandelen. Op de eerste plaats kan men in het tijddomein een serie (onafhankelijke) trekkingen realiseren uit een kansdichtheidsfunctie waarmee men het random proces wil beschrijven. Dit resulteert in een frequentie-spectrum met zekere (statistische) eigenschappen. Het voordeel van deze methode is dat zij zeer weinig rekentijd vergt; het nadeel is dat men na middelen van een aantal realisaties steeds uitkomt op een spectrum waarin alle frequenties even sterk voorkomen met een fase beschreven door een uniforme kansdichtheidsfunctie.

De tweede methode gaat uit van een bepaald spectrum (bijv. bandwith-limited-white noise) en transformeert dit terug naar het tijddomein. Dit kost wat extra rekentijd maar biedt veel vrijheid in het op te leggen spectrum. In het algemeen impliceert dit dat de diskrete tijdrealisaties niet meer statistisch onafhankelijk verondersteld mogen worden.

In dit rapport worden beide invalshoeken nader belicht en geïllustreerd aan de hand van een aantal concrete voorbeelden.

1. Formulering vanuit het tijddomein.

We gaan uit van een stationair random proces $x(t)$, beschreven door een kansdichtheidsfunctie $p_x(x)$, zoals weergegeven in de onderstaande figuur.



Figuur 1. Stationair random proces.

Voor het gemiddelde μ_x (niet afhankelijk van t) van het random proces geldt:

$$\mu_x = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_x(x) dx \quad (1.1)$$

De autocorrelatie functie $R_{xx}(\tau)$ is gedefinieerd als:

$$R_{xx}(\tau) := E[x(t)x(t+\tau)] \quad (1.2)$$

Voor de uitwerking hiervan beschouwen wij de random variabelen $x_1 = x(t)$ en $x_2 = x(t+\tau)$. Deze random variabelen worden beschreven door de kansdichtheidsfuncties $p_{x_1}(x_1)$ respectievelijk $p_{x_2}(x_2)$.

Verder definiëren wij nog de simultane kansdichtheidsfunctie $P_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$ van de random variabelen x_1 en x_2 .

Voor de autocorrelatiefunctie $R_{xx}(\tau)$ geldt nu:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.3)$$

Wij nemen aan dat de random variabelen x_1 en x_2 statistisch onafhankelijk zijn, zodat

$$P_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = P_{x_1}(x_1) \cdot P_{x_2}(x_2) \quad (1.4)$$

Hiermee krijgen wij nu:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} x_1 P_{x_1}(x_1) dx_1 \int_{x_2=-\infty}^{\infty} x_2 P_{x_2}(x_2) dx_2$$

$$R_{xx}(\tau) = \mu_{x_1} \cdot \mu_{x_2} = \mu_x^2 \quad (\tau \neq 0) \quad (1.5)$$

Voor $\tau=0$ krijgen wij:

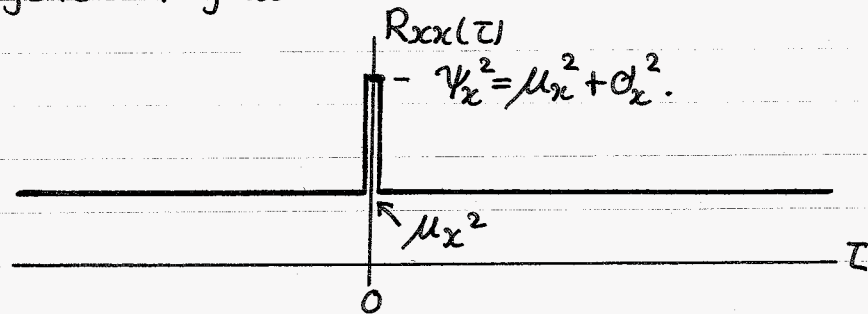
$$R_{xx}(0) = E[x(t)^2] = \int_{x=-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x) dx = \gamma_x^2 \quad (1.6)$$

Hierbij is γ_x^2 de "mean-square-value" van de random variabele $x(t)$.

Wij krijgen dus:

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} \mu_x^2 & \text{voor } \tau \neq 0 \\ \gamma_x^2 & \text{voor } \tau = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Deze functie $R_{xx}(\tau)$ is schematisch weergegeven in de volgende Figuur.



Figuur 2. Autocorrelatie functie van het beschouwde proces.

Het doel van dit hoofdstuk is na te gaan op welke wijze het hiervoor geschetste random proces beschreven zal worden in het frequentiedomein. Wij maken daartoe gebruik van de Fouriertransformatie voor het bepalen van de Fouriergetransformeerde $X(f)$ van $x(t)$:

$$X(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (1.8)$$

In de praktijk is het veelal niet mogelijk deze integraal exact te bepalen. Wij maken daarom gebruik van de Fast-Fourier-Transformatie methode waarmee een benadering voor deze integraal bepaald kan worden via:

$$X[n * \Delta f] = \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} x(k \Delta T) W^{n * k} \quad (1.9)$$

$n=0, 1, 2, \dots, N-1.$

Hierbij is :

$\Delta T = T/N$: de tijdstapgrootte

$\Delta f = 1/T$: de frequentiestapgrootte

$W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$: een complexe constante.

Met het symbool X geven wij nu voortaan de via FFT bepaalde benadering aan. (zie ook [1])

De bepaalde benadering X voor een bepaalde frequentie $f = n \times \Delta f$ wordt dus bepaald als som van de random variabelen $x(k\Delta T)$, elk vermenigvuldigd met een complexe constante. Alle random variabelen $x(k\Delta T)$ $k=0,1,2,\dots,N-1$ hebben dezelfde kansdichtheidsfunctie $p_x(x)$ en zijn ook nog allemaal onderling statistisch onafhankelijk. Volgens de Centrale Limietstelling zal dan voor voldoende grote N en voor een willekeurige kansdichtheidsfunctie $p_x(x)$ de random variabele $X[n \times \Delta f]$ in goede benadering bepaald worden door een normale kansdichtheidsfunctie. Deze kansdichtheidsfunctie geven wij aan met $p_X(X)$, waarbij X een complex getal is. Voor het gemiddelde $\mu_X(n \times \Delta f)$ geldt:

$$\begin{aligned} \mu_X(n \times \Delta f) &= E[X(f)] = E\left[\Delta T \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) W^{n \times k}\right] \\ &= \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} \mu_x W^{n \times k} = \mu_x \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} W^{n \times k} \quad (1.10) \end{aligned}$$

Voor $n=0$ (dus $f=0$) geldt:

$$\mu_X(0) = \mu_x \Delta T \cdot N = \mu_x T \quad (1.11)$$

Voor $n \neq 0$ (dus $f \neq 0$) geldt:

$$\mu_X(f) = 0 \quad (1.12)$$

We krijgen dus:

$$\mu_X(f) = \begin{cases} T \mu_x & f=0 \\ 0 & f \neq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

In de limiet $T \rightarrow \infty$ leidt dit tot het exakte resultaat:
 $\mu_X(f) = \mu_x \cdot \delta(f)$.
 Het gemiddelde blijkt dus zuiver reëel te zijn
 zodat:

$$\mu_R(f) := E[\operatorname{Re}(X(f))] = \begin{cases} T \mu_x & f=0 \\ 0 & f \neq 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\mu_I(f) := E[\operatorname{Im}(X(f))] = 0 \quad \text{elke } f. \quad (1.15)$$

In de praktijk zal men er meestal voor zorgen dat
 $\mu_x = 0$ zodat dan $\mu_R(f) = \mu_I(f)$ voor elke frequentie
 f .

We beschouwen vervolgens de "mean-square-value"
 $\psi_X^2(f)$ van $X(f)$:

$$\begin{aligned} \psi_X^2(f) &= E[X^2(f)] = E \left[\Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) W^{n \times k} \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta T) W^{n \times p} \right] \\ &= \Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \left[E[x(k\Delta T)x(p\Delta T)] W^{n \times p} \right] W^{n \times k} \right\} \quad (1.16) \end{aligned}$$

Verder hebben wij gevonden:

$$E[x(k\Delta T)x(p\Delta T)] = \begin{cases} \psi_x^2 & \text{voor } p=k \\ \mu_x^2 & \text{voor } p \neq k \end{cases} \quad (1.17)$$

Hieruit volgt:

$$\psi_X^2(f) = \Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(\mu_x^2 \sum_{p=0}^{N-1} W^{n \times p} \right) + \psi_x^2 W^{k \times n} \right\} W^{n \times k} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \gamma_X^2(f) &= \Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mu_x^2 \begin{bmatrix} N & \text{voor } n=0 \\ 0 & \text{voor } n \neq 0 \end{bmatrix} + \sigma_x^2 W^{k \times n} \right\} W^{k \times n} \\ &= \mu_x^2 \Delta T^2 \begin{bmatrix} N^2 & \text{voor } n=0 \\ 0 & \text{voor } n \neq 0 \end{bmatrix} + \Delta T^2 \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{N-1} W^{2k \times n} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Het eindresultaat luidt:

$$\gamma_X^2(f) = \begin{cases} 0 & \text{voor } f \neq 0 \quad (n \neq 0) \\ \mu_x^2 T^2 + \sigma_x^2 \frac{T^2}{N} & f = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Voor de variantie $\sigma_X^2(f)$ volgt nu:

$$\sigma_X^2(f) = \begin{cases} 0 & \text{voor } f \neq 0 \\ \sigma_x^2 \frac{T^2}{N} & \text{voor } f = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Uit het voorgaande volgt dus dat complexe grootheid $X(f)$ na FFT beschreven wordt door een random variabele met normale kansdichtheidsfunctie met gemiddelde nul en variantie nul met uitzondering van het punt $f=0$ waarvoor geldt: $\mu_X(0) = T \mu_x$ en $\sigma_X^2(0) = \sigma_x^2 T^2 / N$. Afgezien van het punt $f=0$ kan dit resultaat verklaart worden door te bedenken dat de Fouriergetransformeerde $X(f)$ voor dit proces $x(t)$ in het complexe vlak beschreven wordt door een vector met konstante amplitude maar met een random fase op basis van een uniforme kansdichtheidsfunctie op het interval $[-\pi, \pi]$. Wij komen hier nog uitgebreid op terug.

Om een beter inzicht te krijgen in het karakter van de Fouriergetransformeerde $X(f)$ beschouwen wij afzonderlijk het reële deel $R_X(f)$ en het Imaginaire deel $I_X(f)$.

Voor het reële deel $R = R_X(f)$ geldt:

$$R(f) = \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (1.22)$$

Voor het gemiddelde hiervan volgt:

$$\mu_R(f) = E[R(f)] = \mu_x \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (1.23)$$

ofwel:

$$\mu_R(f) = \begin{cases} \mu_x T & f \neq 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

We beperken ons in het volgende tot de situatie $\mu_x = 0$ dus $\mu_R(f) = 0$ voor alle f . Hetzelfde volgt voor het imaginaire deel n.l. $\mu_I(f) = 0$. Toepassing van de centrale limietstelling op vergelijking (1.22) levert dat R en I in de limiet beschreven worden door een normale kansdichtheidsfunctie voor elke willekeurige basisfunctie $p_x(x)$.

Voor de mean square value ψ_R^2 van R krijgen wij:

$$\begin{aligned} \psi_R^2 &= E[R^2(f)] = E\left[\Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ x(k\Delta T) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\} \sum_{p=0}^{N-1} \left\{ x(p\Delta T) \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \right\}\right] \\ &= \Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \left[\begin{array}{l} \sigma_x^2 \text{ voor } p=k \\ 0 \text{ voor } p \neq k \end{array} \right] \cos\left(\frac{2\pi pn}{N}\right) \right\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \\ &= \sigma_x^2 \Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (1.25) \end{aligned}$$

Voor $p=0$ ($n=0$) leidt dit tot: $\gamma_p^2 = \sigma_x^2 \Delta T^2 N$
Eenvoudig kan nagegaan worden dat:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) = \frac{N}{2} \quad \text{voor } n \neq 0 \quad (1.26)$$

Wij krijgen dus:

$$\sigma_R^2 = \gamma_R^2 = \begin{cases} \sigma_x^2 \frac{T^2}{N} & \text{voor } p=0 \\ \sigma_x^2 \frac{T^2}{2N} & \text{voor } p \neq 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Op analoge wijze volgt:

$$\sigma_I^2 = \gamma_I^2 = \begin{cases} 0 & \text{voor } p=0 \\ \sigma_x^2 \frac{T^2}{2N} & \text{voor } p \neq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Voor de modulus $|X|$ geldt nu:

$$|X(p)|^2 = R^2 + I^2$$

dus:

$$E[|X(p)|^2] = \sigma_x^2 \frac{T^2}{N} \quad \text{voor alle } p. \quad (1.29)$$

Om na te gaan of er statistische afhankelijkheid bestaat tussen het reële deel R en het imaginaire deel I bekijken wij $E[RI] = \text{covariantie}(R, I)$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(R, I) &= E\left[\Delta T^2 \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \sum_{p=0}^{N-1} -x(p\Delta T) \sin\left(\frac{2\pi pn}{N}\right)\right] \\ &= -\Delta T^2 \cdot \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \end{aligned}$$

$$\text{cov}(R, I) = 0 \quad \text{voor elke } n. \quad (1.30)$$

Het reële deel R en het imaginaire deel I blijken dus statistisch onafhankelijk te zijn voor elke discrete frequentie f .

Resumerend:

$$\begin{aligned} R_X(f) : & \text{ normale kansdichtheidsfunctie} \\ & \mu_R = 0 ; \quad \sigma_R^2 = \sigma_x^2 \frac{T^2}{N} \quad (f=0) \\ & \sigma_R^2 = \sigma_x^2 \frac{T^2}{2N} \quad (f \neq 0) \\ I_X(f) : & \text{ normale kansdichtheidsfunctie} \\ & \mu_I = 0 ; \quad \sigma_I^2 = 0 \quad \text{voor } f=0 \\ & \sigma_I^2 = \sigma_x^2 \frac{T^2}{2N} \quad (f \neq 0) \\ \text{cov}(R_X, I_X) &= 0 \quad \text{voor alle } f. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Ter controle beschouwen wij :

$$E[X(f)^2] = E[R_X^2] - E[I_X^2] + 2i E[R_X \cdot I_X]$$

$$\text{voor } f=0 : \quad \sigma_x^2 \frac{T^2}{N} = \sigma_x^2 \frac{T^2}{N} - 0 + 0 \quad \text{ok} \tag{1.32}$$

$$\text{voor } f \neq 0 \quad 0 = \sigma_x^2 \frac{T^2}{2N} - \sigma_x^2 \frac{T^2}{2N} + 0 \quad \text{ok.}$$

Voor het argument φ van $X(f)$ geldt:

$$\varphi = \arg(X(f)) = \arctan\left(\frac{I_X}{R_X}\right) \tag{1.33}$$

Wij beschouwen eerst de random variabele $z(f)$, gegeven door :

$$z(P) = \frac{I(P)}{R(P)} \quad (1.34)$$

Voor $P=0$ geldt: $I(0) = 0$ ($\mu_I = \sigma_I^2 = 0$) dus $z=0$
dus $\varphi=0$

Voor $P \neq 0$ moeten wij het quotiënt beschouwen van twee normaal verdeelde random variabelen met gelijke kansdichtheidsfunctie welke statistisch onafhankelijk zijn. Hun gemiddelde $\mu=0$ en de variantie $\sigma^2 = \sigma_x^2 T^2 / 2N$

Volgens lit[2], pag 117 volgt dan voor de kansdichtheidsfunctie $p_z(z)$:

$$p_z(z) = \int_{R=-\infty}^{\infty} |R| p_{IR}(zR, R) dR \quad (1.35)$$

Hierbij is $p_{IR}(I, R)$ de simultane kansdichtheidsfunctie van I en R . Vanwege de statistische onafhankelijkheid geldt nu:

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |R| p_I(zR) p_R(R) dR \quad (1.36)$$

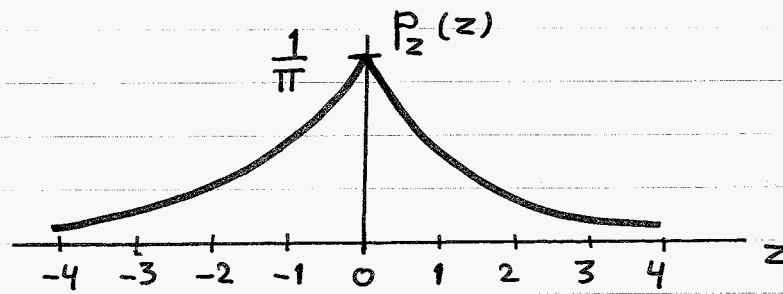
Voor $p_I(I)$ resp. $p_R(R)$ geldt:

$$p_y(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad \text{met } y=R \text{ resp. } I$$

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 T^2 / 2N. \quad (1.37)$$

Dit leidt tot:

$$p_z(z) = \frac{1}{\pi \sigma^2} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{y^2(1+z^2)}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\pi(z^2+1)} \quad (1.38)$$



Figuur 3. Functie $P_z(z)$.

Er moet natuurlijk gelden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_z(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = 1 \quad (1.39)$$

Voor de fasehoek φ geldt:

$$\tan(\varphi) = z \quad (1.40)$$

zodat:

$$P_\varphi(\varphi) = P_z(z(\varphi)) \left| \frac{dz(\varphi)}{d\varphi} \right| = \frac{1}{\pi(1+\tan^2(\varphi))} \cdot \frac{d}{d\varphi}(\tan\varphi).$$

ofwel:

$$P_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\pi} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

In de praktijk wordt veelal de fasehoek gedefinieerd op het interval $-\pi < \varphi < \pi$. Eenvoudig kan nagegaan worden dat in dat geval de kansdichtheidsfunctie $P_\varphi(\varphi)$ gegeven wordt door:

$$P_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (-\pi < \varphi < \pi) \quad (1.41)$$

De fasehoek φ wordt dus beschreven door een uniforme kansdichtheidsfunctie welke onafhankelijk is van de frequentie.

Tenslotte beschouwen wij de modulus $M(\beta) = |X(\beta)|$:

$$M(\beta) = \sqrt{R^2(\beta) + I^2(\beta)} \quad (1.42)$$

We gaan over op standaard normale kansdichtheidsfuncties voor R en I via de definities:

$$\left. \begin{aligned} R_N &:= R/\sigma \\ I_N &:= I/\sigma \\ M_N &:= M/\sigma \end{aligned} \right\} \sigma = \frac{\sigma_x^2 T^2}{2N} \quad (1.43)$$

zodat:

$$M_N = \sqrt{R_N^2 + I_N^2} \quad (1.44)$$

De random variabele $Y = R_N^2 + I_N^2$ wordt nu beschreven door een χ^2 kansdichtheidsfunctie met twee graden van vrijheid ($\nu=2$): (zie [2])

$$p_Y(Y) = \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{Y}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) ; Y \geq 0, \nu=2 \quad (1.45)$$

hierbij is $\Gamma(x)$ de Gamma functie, gegeven door:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1.46)$$

Voor het gemiddelde μ_Y en de variantie σ_Y^2 van de kansdichtheidsfunctie $p_Y(Y)$ geldt:

$$\left. \begin{aligned} \mu_Y &= \nu \\ \sigma_Y^2 &= 2\nu \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \mu_Y &= 2 \\ \sigma_Y^2 &= 4 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Voor de grootheid M_N geldt:

$$M_N = +\sqrt{Y} \quad (1.48)$$

Voor de kansverdelingsfunctie $P_{M_N}(M_N)$ geldt:

$$\begin{aligned} P_{M_N}(m) &= P[M_N < m] = P[\sqrt{Y} < m] \\ &= P[Y < m^2] = P_Y(m^2) \end{aligned} \quad (1.49)$$

Voor de kansdichtheidsfunctie $P_{M_N}(M_N)$ volgt nu:

$$\begin{aligned} P_{M_N}(M_N) &= \frac{dP_{M_N}(M_N)}{dM_N} = P_Y(M_N^2) \cdot 2M_N \\ &= \frac{M_N \left(\frac{M_N^2}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}M_N^2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (\nu=2, M_N \geq 0) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Deze kansdichtheidsfunctie is bekend als de chi- of χ kansdichtheidsfunctie.

Het gemiddelde μ_{M_N} wordt gegeven door:

$$\mu_{M_N} = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (1.51)$$

en de variantie $\sigma_{M_N}^2$ door:

$$\sigma_{M_N}^2 = \nu - 2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (1.52)$$

Voor het voor ons geldende geval volgt nu ($\nu=2$):

$$\mu_{M_N} = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \sqrt{2} \frac{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \quad (1.53)$$

Eenvoudig kan aangetoond worden dat :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1\end{aligned}\tag{1.54}$$

Hieruit volgt dan :

$$\mu_{M_N} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\tag{1.55}$$

$$\sigma_{M_N}^2 = 2 - \frac{\pi}{2}\tag{1.56}$$

Wij krijgen daardoor :

$$\mu_M = \frac{\sigma_x T \sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}}\tag{1.57}$$

$$\sigma_M^2 = \frac{\sigma_x^2 T^2}{N} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\tag{1.58}$$

Voor het beschouwde random proces $x(t)$ volgt dus in het frequentiedomein :

$\varphi = \arg(X(f))$:

- * uniforme kansdichtheidsfunctie
- * $p_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi < \varphi < \pi$
- * geen functie van f .

$M = |X(f)|$

* χ kansdichtheidsfunctie

* $\mu_M = \frac{\sigma_x T \sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}}$

* $\sigma_M^2 = \frac{\sigma_x^2 T^2}{N} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

* geen functie van f .

In het hiernavolgende zijn twee voorbeelden weergegeven betreffende de hiervoor beschreven eigenschappen van de Fouriergetransformeerde. Allereerst wordt een random proces beschouwd dat gecreëerd wordt via onafhankelijke trekkingen uit een normale kansdichtheidsfunctie (Fig 4). Het hierna bepaalde histogram voor $x(t)$ is weergegeven in Fig 5. Vervolgens worden R_x , I_x , $|X|$ en $\arg(X)$ beschouwd met de voor de discrete resultaten bepaalde kansdichtheidsfuncties. In de Figuren worden steeds de theoretische resultaten eveneens vermeld.

Hetzelfde recept is nogmaals uitgevoerd maar nu voor onafhankelijke trekkingen uit een uniforme kansdichtheidsfunctie voor $x(t)$. (Fig 11 t/m 17)

Voorbeeld
I

Fig 4

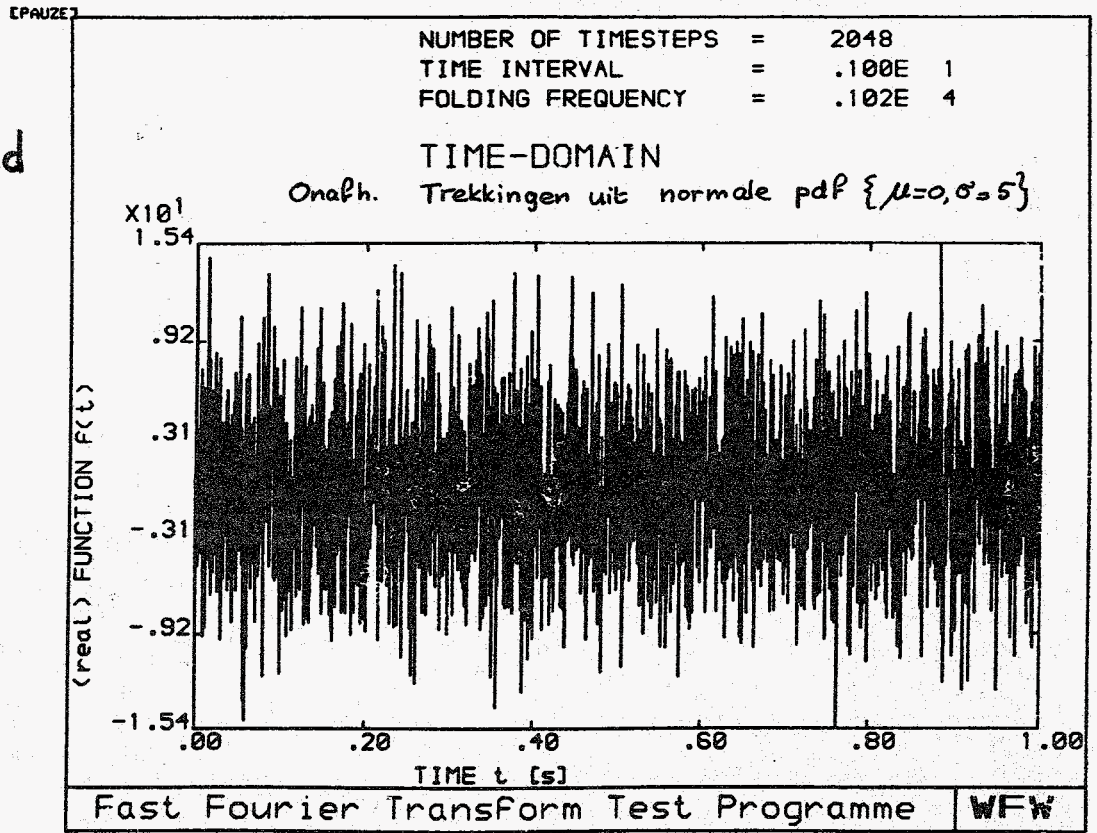
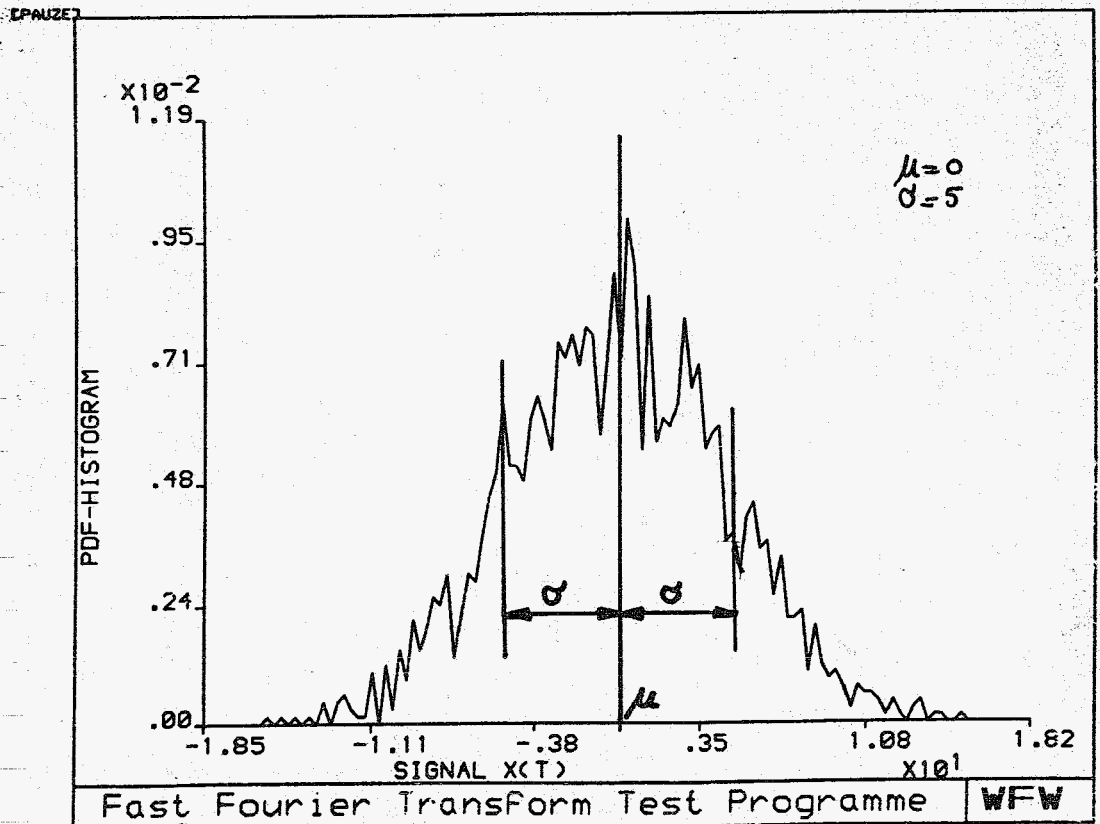


Fig 5



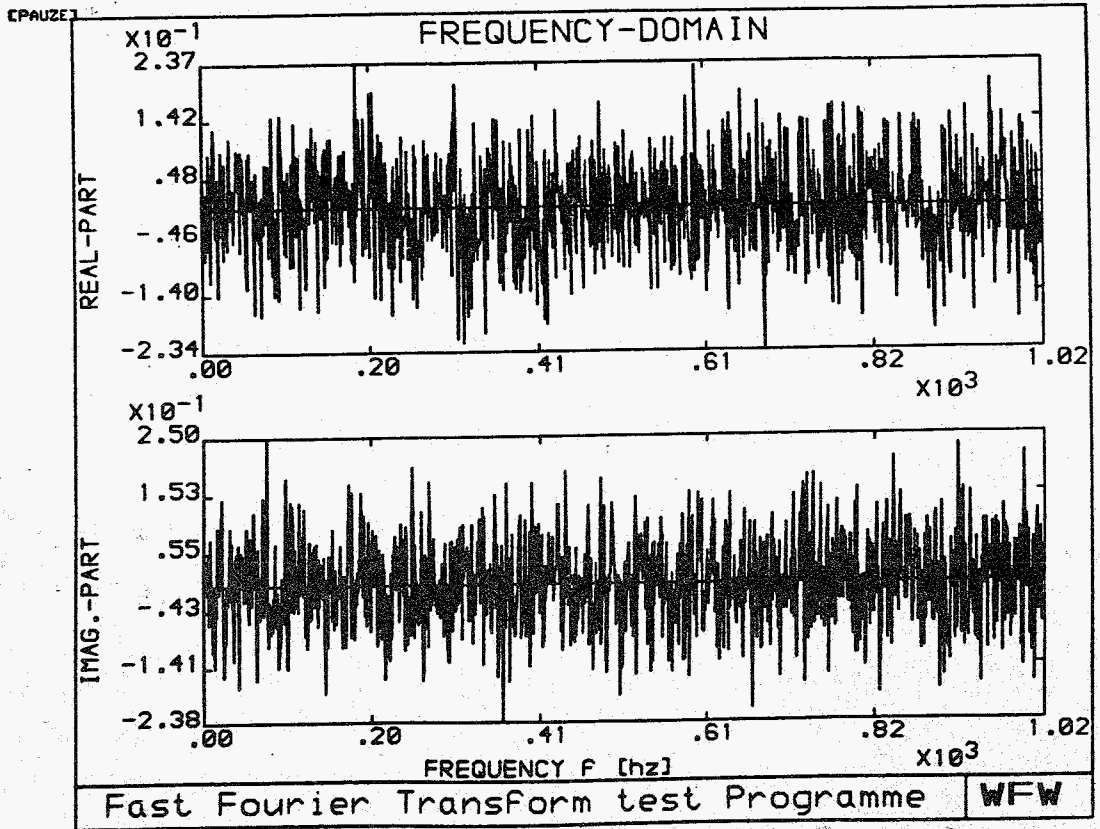


Fig 6

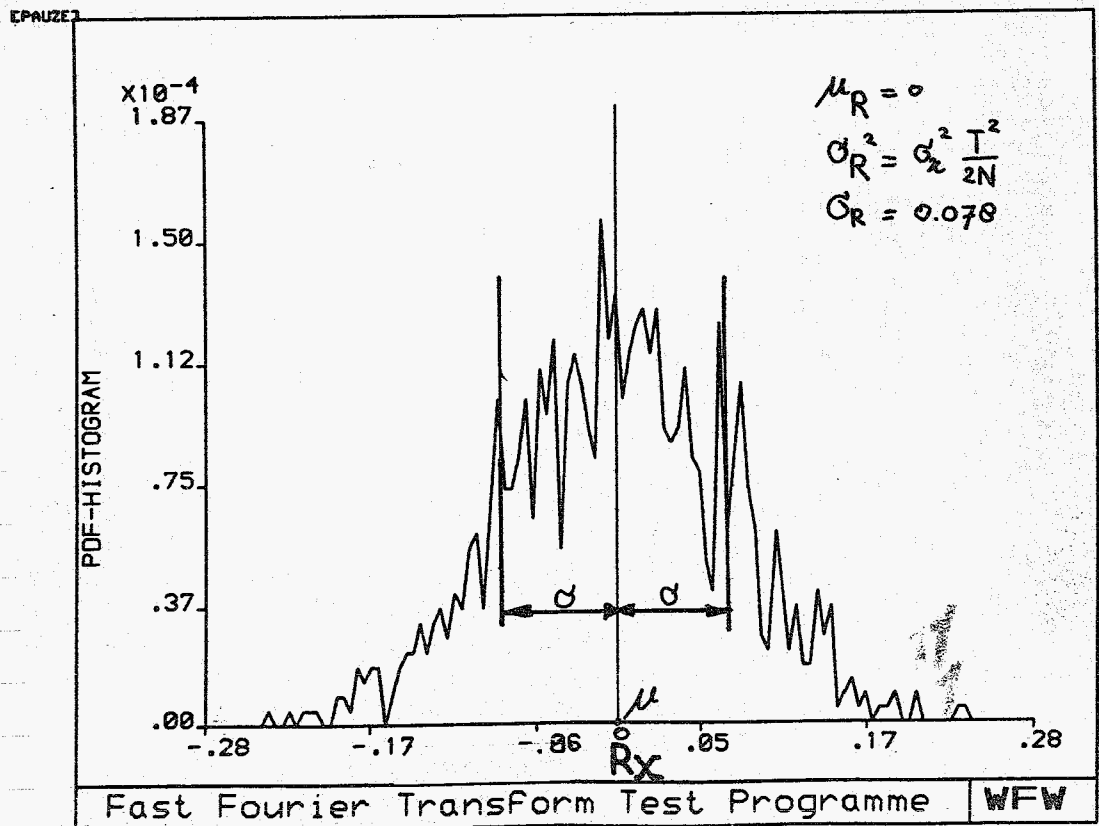
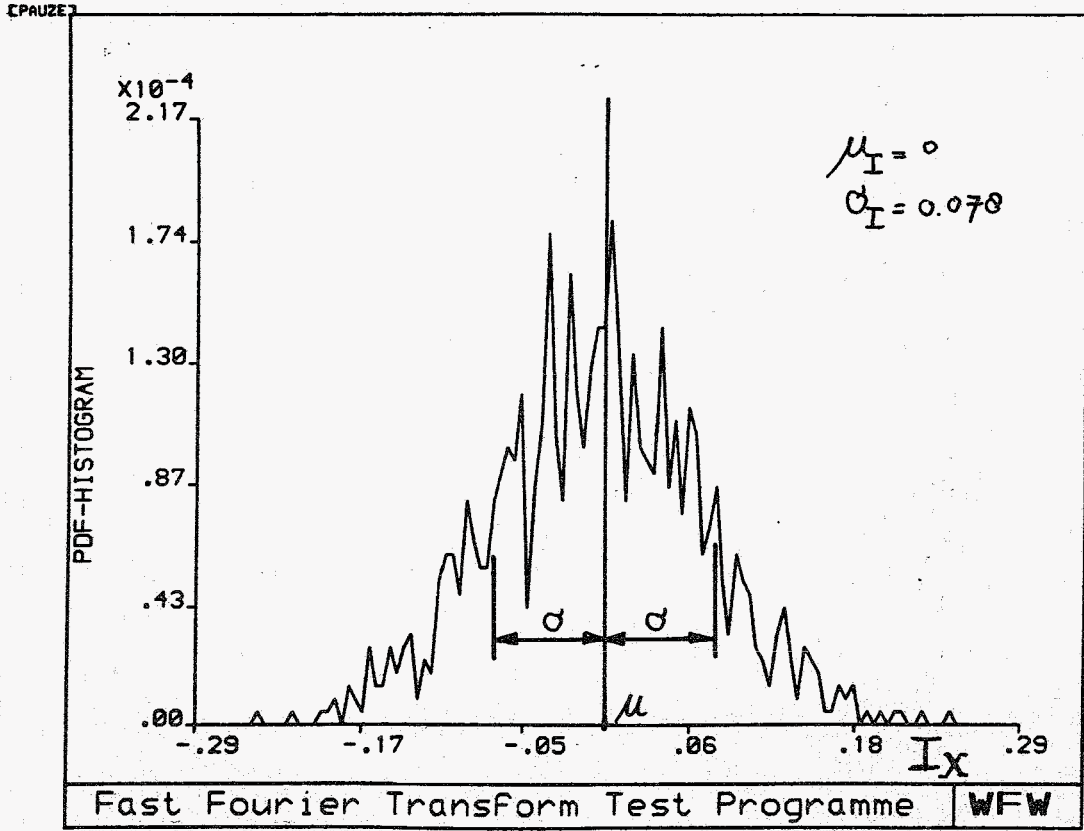
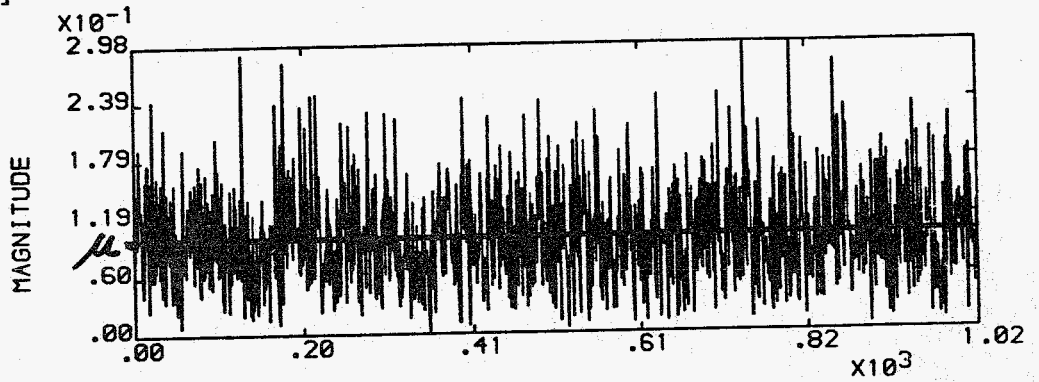


Fig 7



figs.

CPAUZE3



CPAUZE3

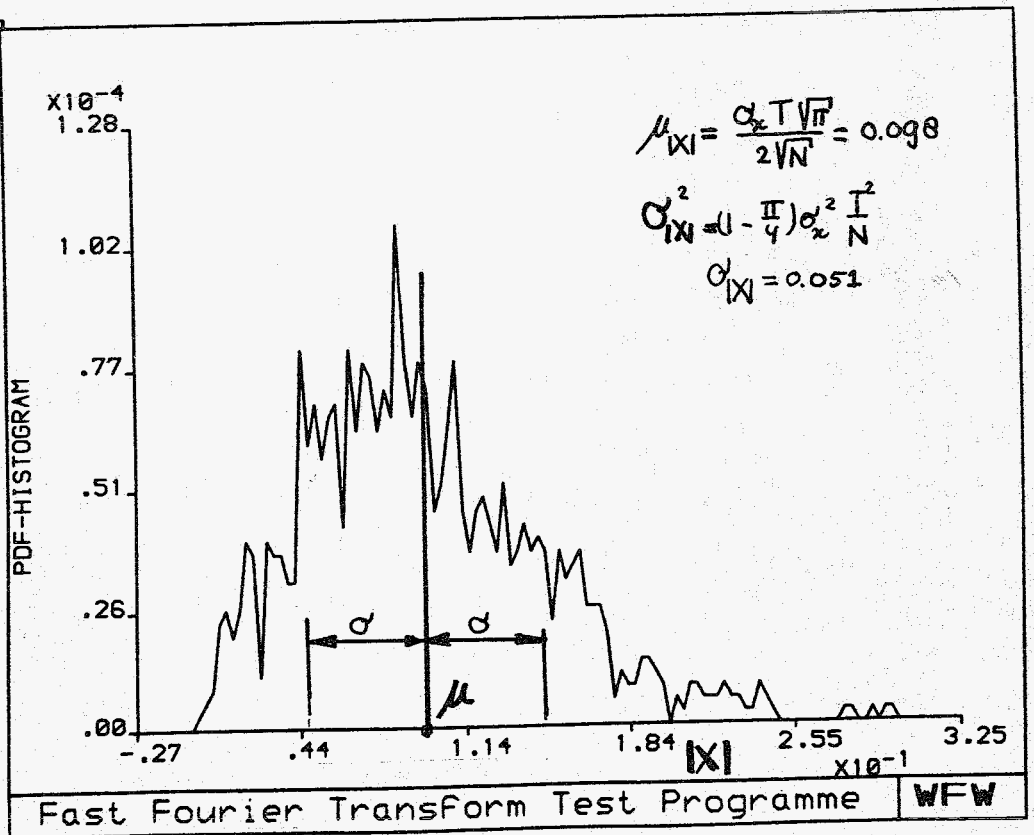


Fig 9

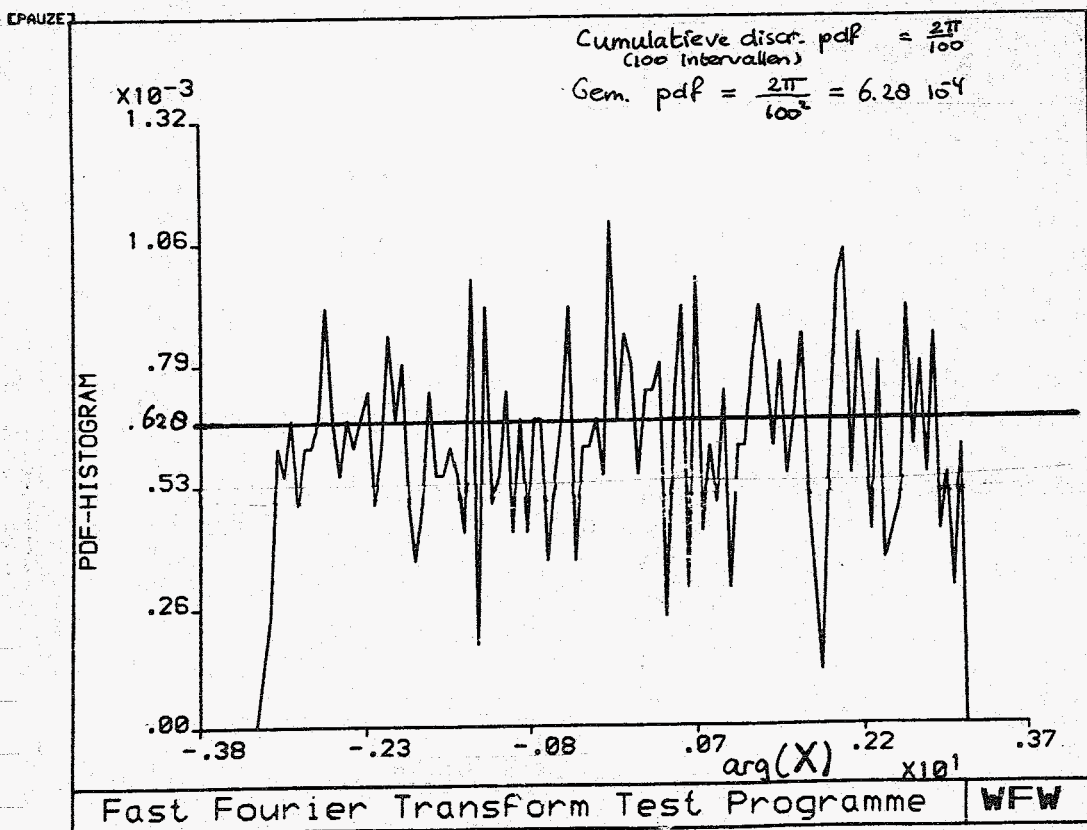
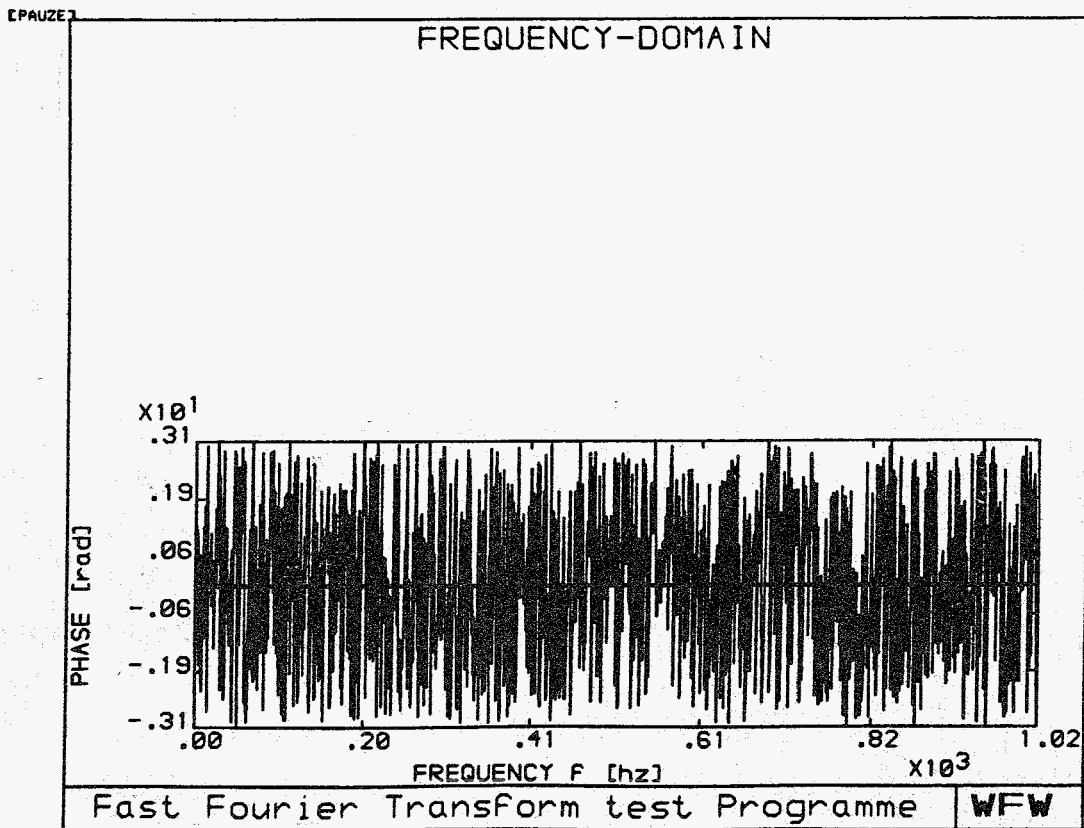


Fig 10

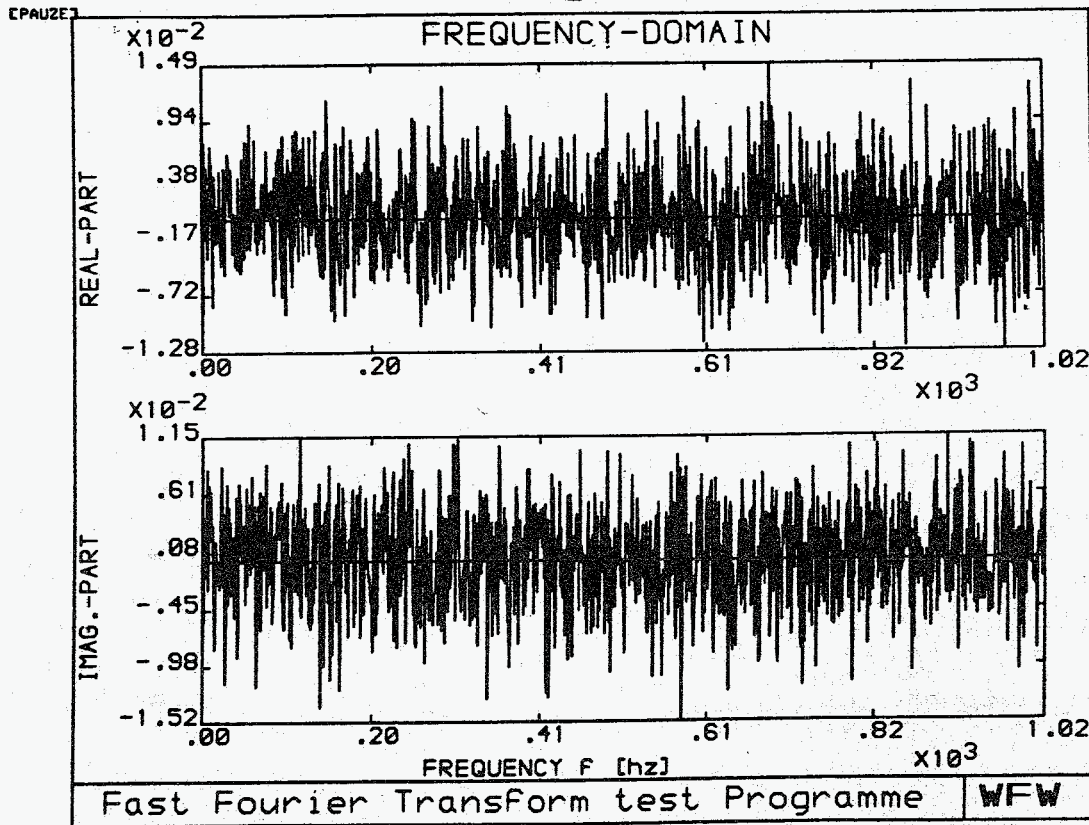


Fig 13

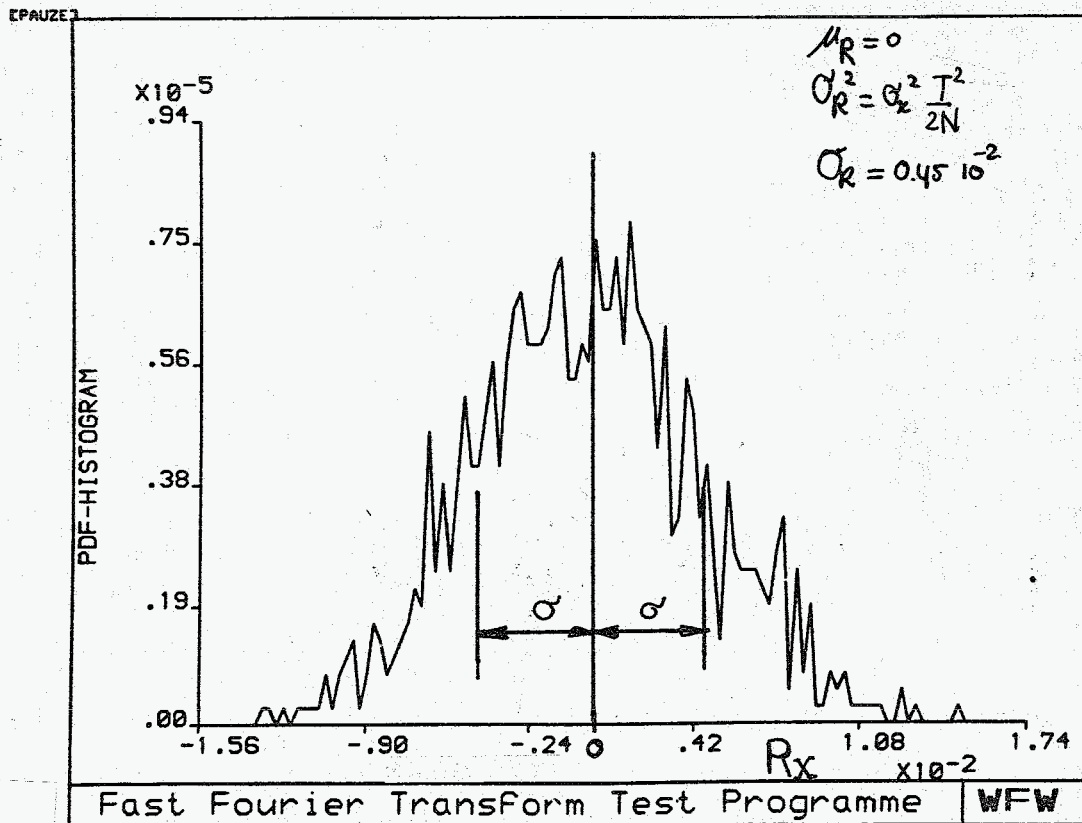


Fig 14

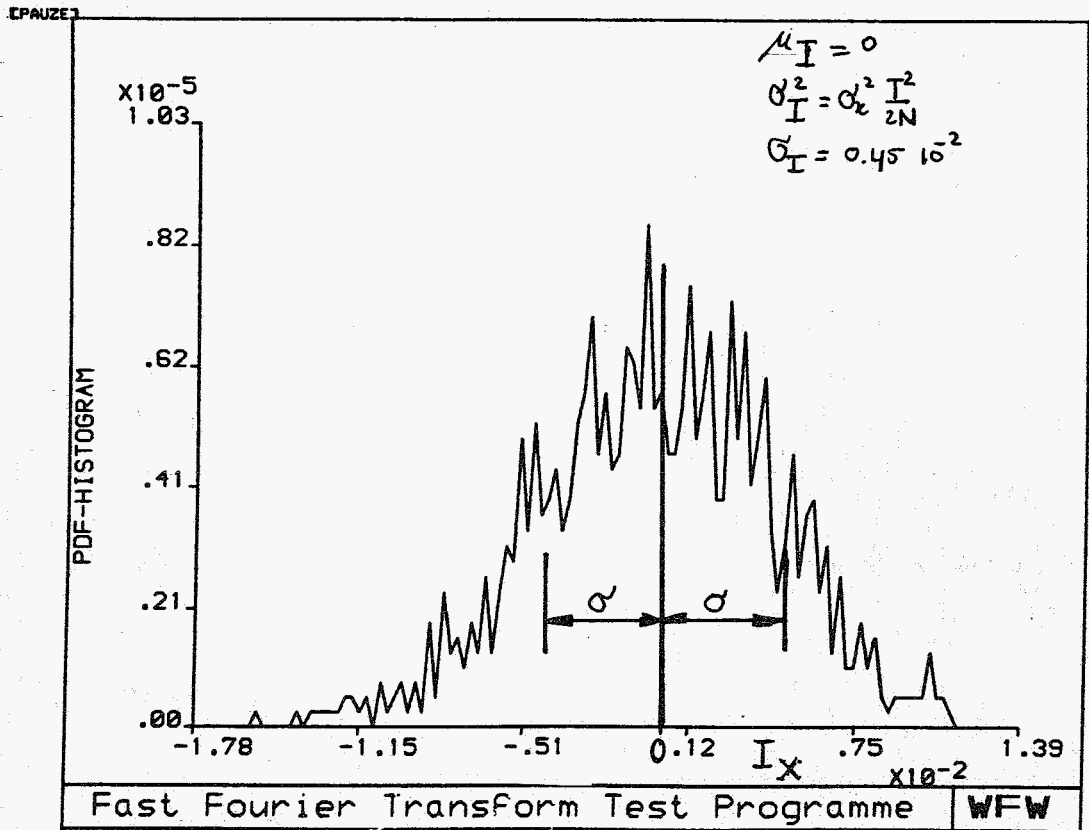


Fig 15

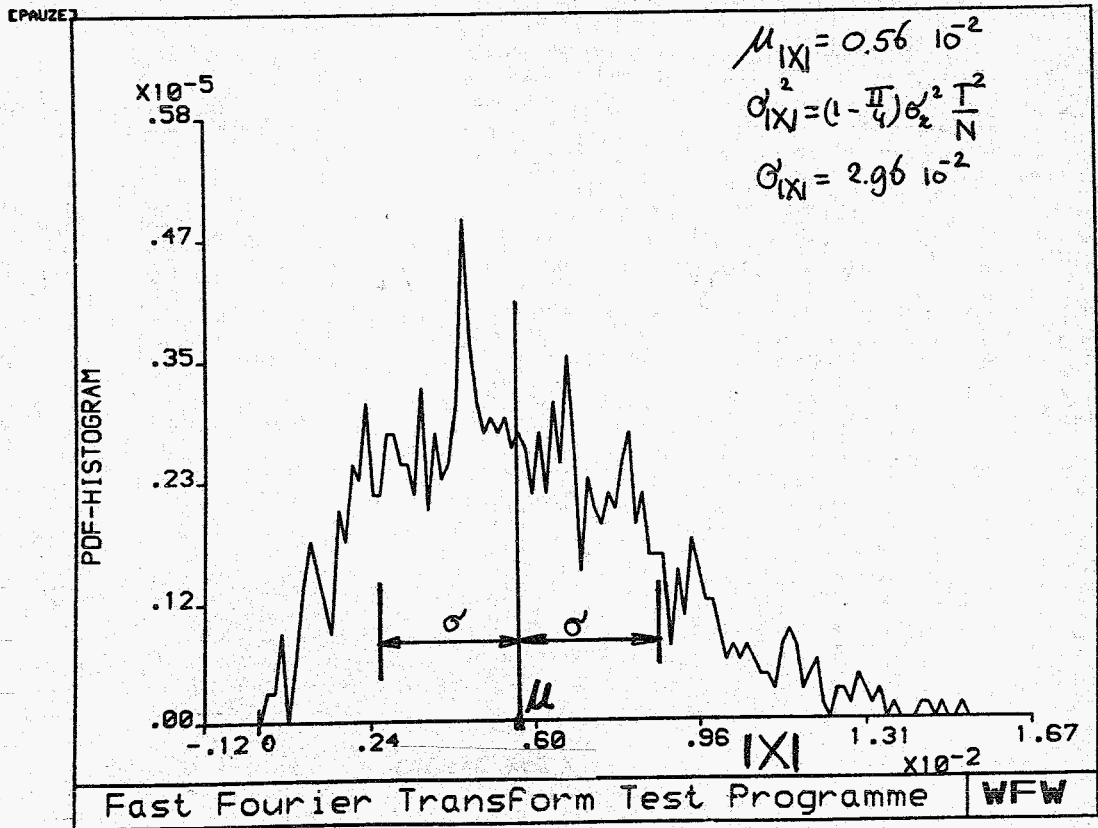
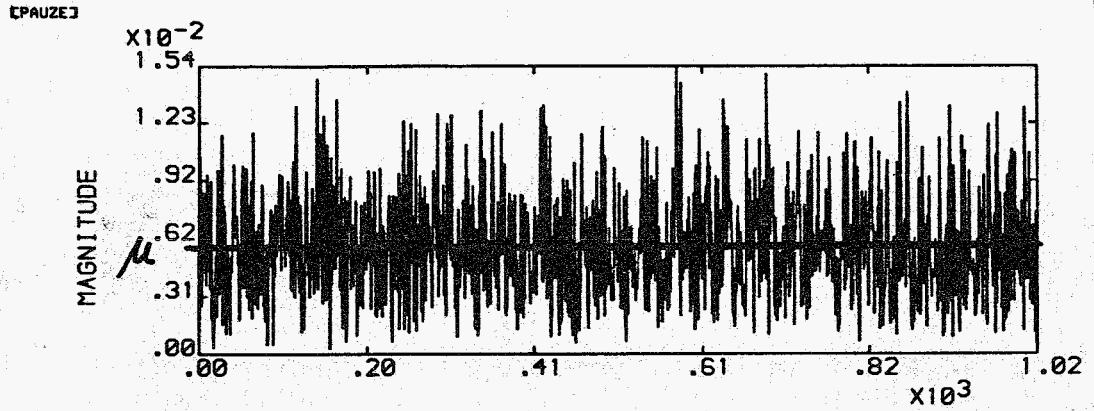


Fig 16

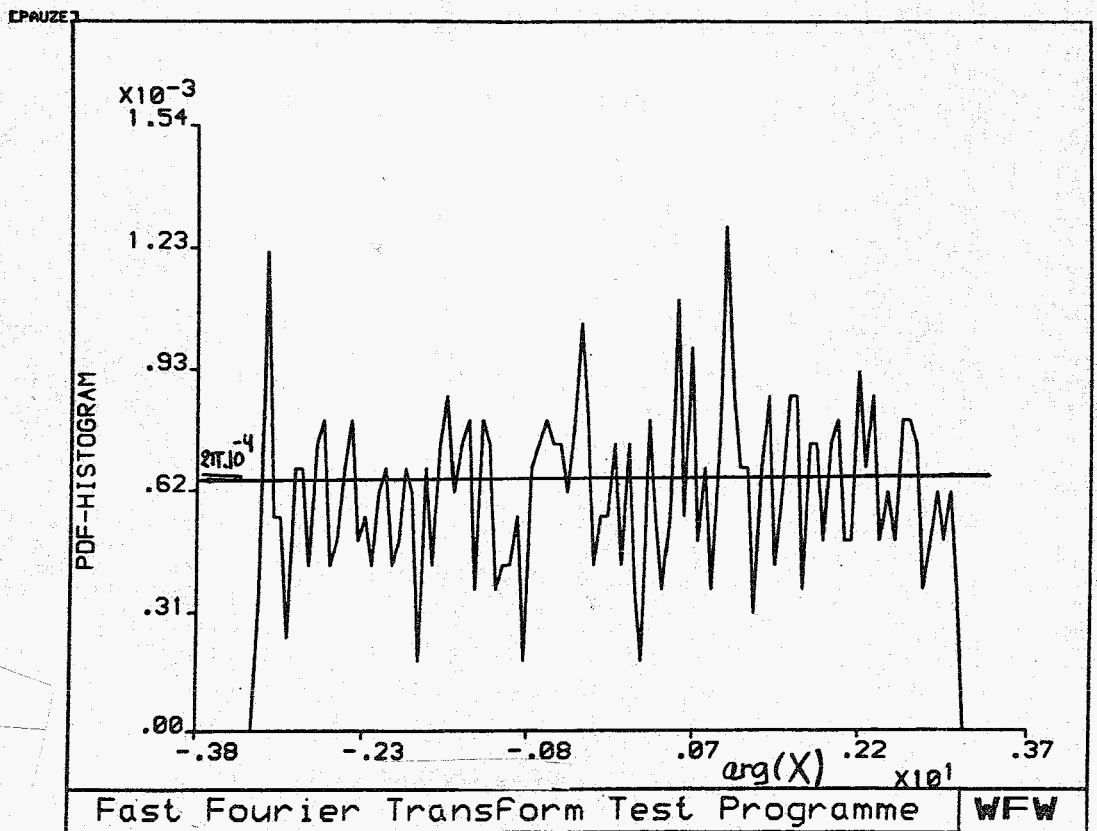
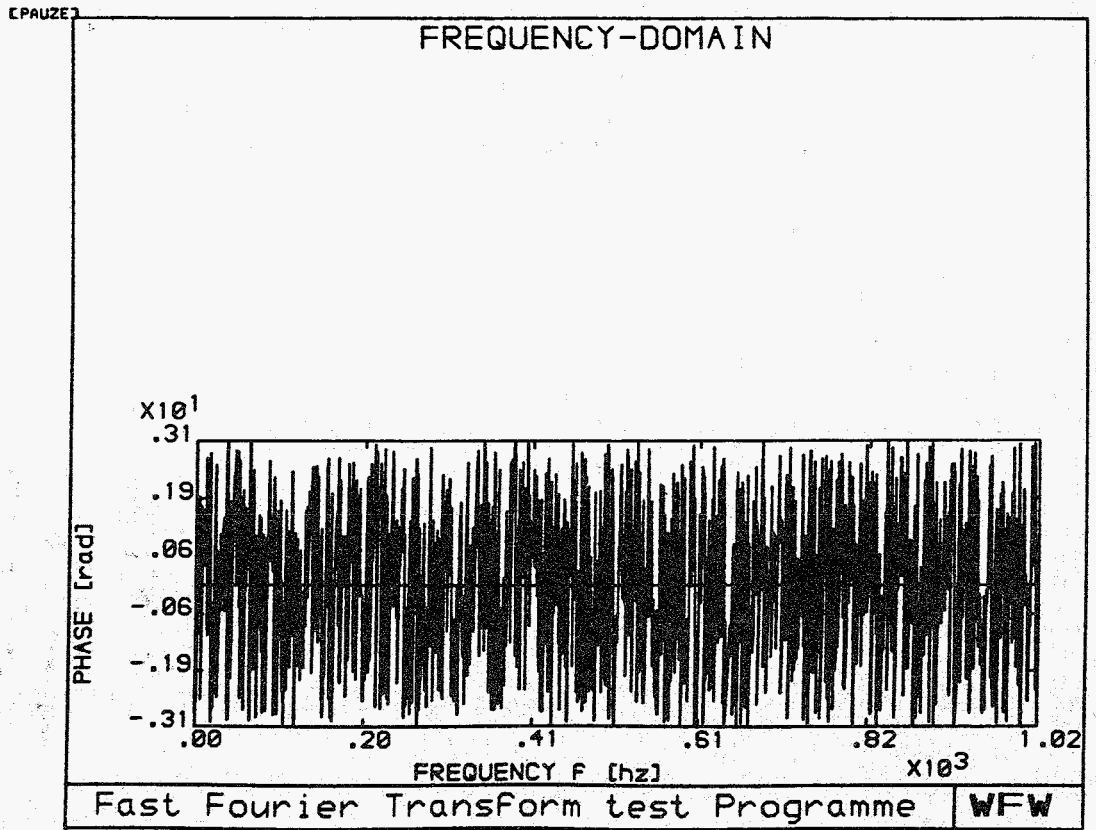


Fig 17

2. Formulering vanuit het frequentiedomein

We gaan uit van een frequentiespectrum waarvan de amplitude constant verondersteld wordt en waarvan de fase een random variabele is, beschreven door een uniforme kansdichtheidsfunctie op het interval $[-\pi, \pi]$. De op deze wijze gedefinieerde Fouriergetransformeerde geldt voor het frequentiegebied $0 \leq f \leq f_N$ en wordt beschreven door N diskrete waarden voor amplitude en fase voor elke frequentie $f = n \Delta f$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$)

Er geldt:

$$f_N = \frac{N}{T} \quad ; \quad \Delta f = \frac{1}{T} \quad ; \quad f_{\text{fold}} = \frac{f_N}{2} \quad (2.1)$$

$$X(f_{\text{fold}} - f) = X^*(f_{\text{fold}} + f) \quad (2.2)$$

Het via de inverse Fouriertransformatie ontstane signaal zal dan zuiver reëel zijn. We gaan dus uit van de in de onderstaande figuur schematisch aangegeven situatie.

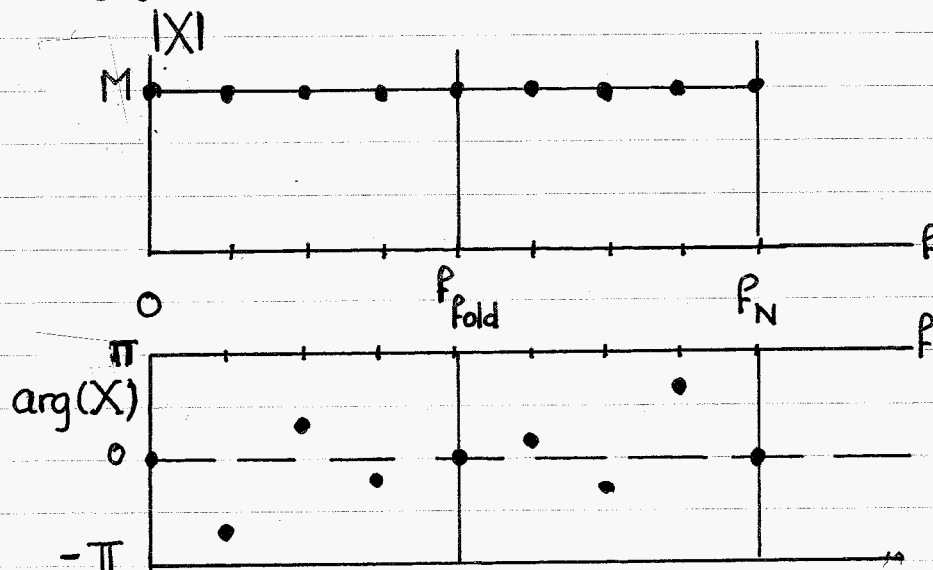


Fig 18 . Basis spectrum.

Indien wij via de Diskrete (inverse) Fourier Transformatie het hierbij behorende tijdsignaal bepalen zal dit zuiver reëel zijn en gedefinieerd zijn op het interval $0 \leq t < T$ op de diskrete tijdstippen $t = k\Delta T$ met $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Voor deze inverse DFT geldt:

$$\begin{aligned} x(k\Delta T) &= \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} X(n\Delta f) e^{2\pi i(n\Delta f)(k\Delta T)} \\ &= \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} X(n\Delta f) V^{n \times k} \end{aligned} \quad (2.3)$$

waarbij $V := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ (2.4)

Wij nemen aan dat het argument $\varphi = \arg(X)$ gecreëerd wordt via N onafhankelijke trekkingen uit een uniforme kansdichtheidsfunctie $p_\varphi(\varphi)$. De zo ontstane tijdserie heet witte ruis.

We beschouwen de Fouriergetransformeerde $X(f)$ voor een zekere frequentie $f = n\Delta f$. Dan is $X(f)$ een random variabele met constante modulus (aangegeven door M) en een random fase φ .

Voor het bij $X(f)$ behorende reële deel geldt:

$$R(f) := R_X(f) = M \cos(\varphi(f)) \quad (2.5)$$

Duiden we de bij $R(f)$ behorende kansdichtheidsfunctie aan met $p_R(R)$ dan geldt:

$$P_R(R) = 2 P_\varphi(\varphi(R)) \left| \frac{d\varphi(R)}{dR} \right| \quad (2.6)$$

De factor 2 komt voort uit het feit dat zowel voor $\varphi = \varphi_0$ als voor $\varphi = -\varphi_0$ een en dezelfde waarde voor R resulteert.

Met:

$$P_\varphi(\varphi(R)) = \frac{1}{2\pi} ; \quad \varphi(R) = \arccos\left(\frac{R}{M}\right) \quad (2.7)$$

volgt dan:

$$P_R(R) = \frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - R^2}} \quad \text{voor } |R| \leq M \quad (2.8)$$

Het zal zonder meer duidelijk zijn dat het imaginaire deel $\mathbf{I}(f)$ van $X(f)$ eveneens beschreven zal worden door de bovengegeven kansdichtheidsfunctie. Deze kansdichtheidsfuncties blijken onafhankelijk te zijn van de frequentie f .

Voor de reële tijdsfunctie $x(k\Delta T)$ volgt nu:

$$x(k\Delta T) = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} \{R(n\Delta f) + i\mathbf{I}(n\Delta f)\} V^{n \times k} \quad (2.9)$$

Uit de definitie voor V (2.4) volgt:

$$V^{k(\frac{N}{2}+p)} = V^{k(\frac{N}{2}+p-N)} = V^{k(p-\frac{N}{2})} = \left\{ V^{k(\frac{N}{2}-p)} \right\}^* \quad (2.10)$$

De complexe grootheid V voor $n = \frac{N}{2} - p$ is dus gelijk aan de toegevoegd complexe van V voor $n = \frac{N}{2} + p$. Dit impliceert op complex geconjugeerde wijze spiegelen ten opzichte van de frequenties

$$f = j \times f_{\text{old}} \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Voor $x(k\Delta T)$ volgt daardoor:

$$x(k\Delta T) = 2\Delta f \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ R(n\Delta f) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - I(n\Delta f) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right\} \quad (2.11)$$

Volgens de centrale limietstelling zal voor voldoende grote N de random variabele $x(k\Delta T)$ in goede benadering beschreven worden door een normale kansdichtheidsfunctie. Deze is dan volledig bepaald door het gemiddelde μ_x en de variantie σ_x^2 .

Voor het gemiddelde $\mu_x(k\Delta T)$ geldt:

$$\mu_x(k\Delta T) = E[x(k\Delta T)] = 2\Delta f \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ E[R(n\Delta f)] \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - E[I(n\Delta f)] \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right\} \quad (2.12)$$

$R(n\Delta f)$ en $I(n\Delta f)$ werden beschreven door de kansdichtheidsfuncties:

$$P_R(R) = P_I(I) = \frac{1}{\pi\sqrt{M^2 - y^2}} \begin{cases} y = R \text{ resp. } I \\ |y| \leq M \end{cases}$$

Hieruit volgt direct:

$$\mu_R (= E[R]) = \mu_I (= E[I]) = 0 \text{ voor elke } f. \quad (2.13)$$

Voor de mean square value γ^2 van deze kansdichtheidsfunctie geldt:

$$\gamma^2 = E[y^2] = \int_{-M}^M y^2 \frac{1}{\pi\sqrt{M^2 - y^2}} dy$$

Uitwerking hiervan levert:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-M}^M y \, d(\sqrt{M^2 - y^2}) = \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M \sqrt{M^2 - y^2} \, dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^M \sqrt{M^2 - y^2} \, dy = \frac{2}{\pi} \frac{M^2 \pi}{4} = \frac{1}{2} M^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Voor de varianties σ_M^2 resp. σ_I^2 volgt dus:

$$\sigma_M^2 = \sigma_I^2 = \frac{1}{2} M^2 \quad \text{voor elke } f. \quad (2.15)$$

Omdat $E[R] = E[I] = 0$ voor elke n (elke f) volgt uit (2.12):

$$\mu_x = E[x(k\Delta T)] = 0 \quad \text{voor elke } k, \text{ dus elke } t. \quad (2.16)$$

Voor de mean square value van $x(k\Delta T)$ volgt:

$$\begin{aligned} \gamma_x^2(k\Delta T) &= E[x^2(k\Delta T)] = \\ &= 4\Delta f^2 E \left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ R(n\Delta f) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - I(n\Delta f) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\} * \right. \\ &\quad \left. * \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ R(m\Delta f) \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) - I(m\Delta f) \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right\} \right] \\ &= 4\Delta f^2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ E[R(n)R(m)] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right\} \right. \\ &\quad - \left\{ E[R(n)I(m)] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right\} \\ &\quad - \left\{ E[I(n)R(m)] \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right\} \\ &\quad \left. + \left\{ E[I(n)I(m)] \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

We hanteren hierbij de notatie $n\Delta f \rightarrow n$; $m\Delta f \rightarrow m$.
 Voor het uitwerken van deze uitdrukking dienen wij eerst de covarianties $E[R(n)I(m)]$ etc. te beschouwen.

Voor $m \neq n$ krijgen wij voor $\text{cov}(R(n), R(m))$:

$$E[R(n)R(m)] = \int_{\varphi_n = -\pi}^{\pi} \int_{\varphi_m = -\pi}^{\pi} M^2 \cos(\varphi_n) \cos(\varphi_m) P_{\varphi_n \varphi_m}(\varphi_n, \varphi_m) d\varphi_n d\varphi_m \quad (2.18)$$

Hierbij is $P_{\varphi_n \varphi_m}(\varphi_n, \varphi_m)$ de simultane kansdichtheidsfunctie van de random variabelen φ_n en φ_m . Omdat deze laatste statistisch onafhankelijk zijn geldt:

$$P_{\varphi_n \varphi_m}(\varphi_n, \varphi_m) = P_{\varphi_n}(\varphi_n) \cdot P_{\varphi_m}(\varphi_m) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4\pi^2} \quad (2.19)$$

Hieruit volgt dus:

$$E[R(n)R(m)] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M}{2\pi} \cos(\varphi_n) d\varphi_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M}{2\pi} \cos(\varphi_m) d\varphi_m = 0 \quad (2.20)$$

De random variabelen $R(n)$ en $R(m)$ zijn dus ook statistisch onafhankelijk. Herhaling van dit procedé toont aan dat alle "Expected values" in relatie (2.17) identiek nul zijn voor $m \neq n$, dus de random variabelen $R(n)$, $R(m)$, $I(o)$ en $I(p)$ zijn alle onderling statistisch onafhankelijk voor ongelijke indices n, m, o en p .

We beschouwen vervolgens het geval $m=n$:

$$E[R(n)^2] = \int_{-\pi}^{\pi} M^2 \cos^2(\varphi) \cdot \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} M^2 \quad (2.21)$$

Op dezelfde wijze volgt:

$$E[R(n) \cdot I(n)] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M^2}{2\pi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = 0 \quad (2.22)$$

$$E[I^2(n)] = \frac{1}{2} M^2 \quad (2.23)$$

Dus ook de random variabelen $R(n\Delta f)$ en $I(n\Delta f)$ blijken statistisch onafhankelijk te zijn (zie ook hoofdstuk 1.)

Substitutie van de gevonden resultaten in (2.17) leidt tot:

$$\gamma_x^2(k\Delta T) = 4\Delta f^2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ \frac{1}{2} M^2 \cos^2\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \frac{1}{2} M^2 \sin^2\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\} \quad (2.24)$$

$$= 4\Delta f^2 \cdot \frac{1}{2} M^2 \cdot \frac{N}{2} = \frac{M^2 N}{T^2} \text{ (onafh. van } t \text{)}. \quad (2.25)$$

Omdat $\mu_x = 0$ volgt dus:

$$\sigma_x^2 = \frac{M^2 N}{T^2} \quad (2.25)$$

Dit resultaat is dus identiek met relatie (1.28) uit hoofdstuk 1.

Tenslotte beschouwen wij de verwachte waarde van $x(k\Delta T)$ en $x(l\Delta T)$ n.l.: $E[x(k\Delta T) \cdot x(l\Delta T)]$. Dit levert een resultaat dat veel overeenkomst vertoont met relatie (2.17), echter nu luidt een tussenresultaat:

$$\begin{aligned} E[x(k\Delta T) \cdot x(l\Delta T)] &= 2\Delta f^2 M^2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi ln}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi ln}{N}\right) \right\} \\ &= 2\Delta f^2 M^2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\frac{2\pi(k-l)n}{N}\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

We stellen $l = k + p$ ($p \neq 0$):

$$E[x(k)x(k+p)] = 2\Delta f^2 M^2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \cos\left(\frac{2\pi p n}{N}\right) \quad (2.27)$$

Hieruit volgt:

$$E[x(k)x(k+p)] = \begin{cases} 2\Delta f^2 M^2 & p = \text{oneven} \\ 0 & p = \text{even} \end{cases} \quad (2.28)$$

De random variabelen $x(k\Delta T)$ en $x((k+2i)\Delta T)$ voor $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ zijn dus statistisch onafhankelijk.

De variabelen $x(k\Delta T)$ en $x((k+j)\Delta T)$ met $j = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ zijn statistisch afhankelijk.

De statistische afhankelijkheid kan worden beschreven via de z.g. correlatiecoëfficiënt ρ :

$$\rho = \frac{\text{cov}[x(k), x(l)]}{\sqrt{\text{var}[x(k)] \text{var}[x(l)]}} = \frac{E[x(k) \cdot x(l)]}{\sqrt{\sigma_{x_k}^2 \cdot \sigma_{x_l}^2}} \quad (2.29)$$

Dit leidt tot: ($p = l - k$)

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{voor even } p \\ \frac{2}{N} & \text{voor oneven } p \end{cases} \quad (2.30)$$

In de limiet $N \rightarrow \infty$ blijken alle discrete punten $x(k\Delta T)$ statistisch onafhankelijk te mogen worden verondersteld.

Resumerend kan gesteld worden dat uitgaande van een frequentiespectrum met constante amplitude en uniform verdeelde random fase (op het interval $0 \leq f \leq f_{\text{fold}}$) blijkt te gelden:

$$\left. \begin{array}{l} R = \text{Re}[X(f)] : \\ I = \text{Im}[X(f)] : \end{array} \right\} \text{ kansdichtheidsfunctie}$$

$$P_x(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - x^2}}$$

$$\text{cov}[R, I] = 0$$

Tijdsignaal $x(t)$: Normale kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} \mu_x &= 0 \\ \sigma_x^2 &= \frac{M^2 N}{T^2} \end{aligned}$$

$$P[x[k], x[k+p]] = \begin{cases} 0 & p = \text{even} \\ \frac{2}{N} & p = \text{oneven} \end{cases}$$

In veel gevallen zijn wij niet direct geïnteresseerd in witte ruis maar in de frequentiespectrum dat constant is in een bepaalde bandbreedte $f_1 \leq f \leq f_2$ (z.g. bandwith-limited-white-noise) of zelfs in een spectrum waarbij in een bepaalde bandbreedte de amplitude niet constant is maar waarin sommige frequenties sterker vertegenwoordigd zijn dan andere frequenties. (z.g. gekleurde ruis).

We beschouwen in eerste instantie bandwith-limited white noise waarvoor de complexe grootte $X(f)$ gedefinieerd wordt als:

$$|X(f)| = M \quad 0 < f_1 \leq f \leq f_2 < f_{\text{fold}} \quad (2.31)$$

$\arg(X(f)) =$ random variabele met uniforme kansdichtheidsfunctie.

In het discrete geval betekent dit:

$$|X(f)| = M \quad \begin{array}{l} n_1 \leq n \leq n_2 \\ n_1 > 0 \\ n_2 < \frac{N}{2} - 1 \end{array} \quad (2.32)$$

Uit vergelijking (2.11) volgt direct dat ook in het geval de sommatie niet gaat van $n=0$ tot $n=\frac{N}{2}-1$ maar van $n=n_1$ tot $n=n_2$ de tijdfunctie $x(t)$ goed beschreven zal worden door een normale kansdichtheidsfunctie indien $n_2 - n_1$ voldoende groot is. Voor het gemiddelde μ_x volgt uit (2.12) :

$$\left| \mu_x = 0 \quad \text{voor elke } t. \right. \quad (2.33)$$

Voor de mean square value ψ_x^2 volgt uit (2.24) :

$$\left| \psi_x^2(t) = 4\Delta f^2 \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{2} M^2 = 2 \frac{M^2 N_B}{T^2} \right. \quad (2.34)$$

waarbij N_B het aantal spectraallijnen is waarvoor geldt $|X| = M$ ($N_B = n_2 - n_1 + 1$), $N_B < N/2$. Voor de variantie σ_x^2 geldt dus :

$$\left| \sigma_x^2 = \frac{2M^2 N_B}{T^2} \right. \quad (2.35)$$

Voor de covariantie $\text{cov}[x(k), x(k+p)]$ ($p \neq 0$) volgt :

$$\text{cov}[x(k), x(k+p)] = 2\Delta f^2 M^2 \sum_{n=n_1}^{n_2} \cos\left(\frac{2\pi p n}{N}\right) \quad (2.36)$$

Het afleiden van een algemene uitdrukking voor deze relatie biedt problemen. We zullen daarom in het hiernavolgende een iets andere weg bewandelen via de Fourierintegraal i.p.v. via de D.F.T.

Wij beschouwen weer een discreet frequentiespectrum $X(n\Delta f)$ waarvoor geldt: $|X(n\Delta f)| = M$ voor alle n in het interval $0 \leq n \leq N-1$. De fase wordt weer beschreven met een uniforme kansdichtheidsfunctie. De functie $X(n\Delta f)$ wordt weer op toegevoegd complexe wijze gespiegeld gedacht ten opzichte van de voorfre-
quentie.

Voor de hierbij behorende continue autopowerspectrum-
functie $S_{xx}(f)$ veronderstellen wij:

$$S_{xx}(f) = \begin{cases} S & (0 \leq f \leq f_N) \\ 0 & \text{elders.} \end{cases} \quad (2.37)$$

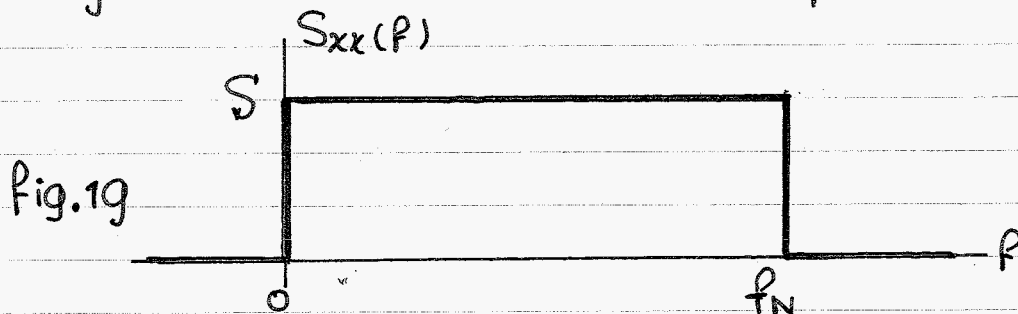
Er moet dan gelden:

$$S \cdot f_N = (M \cdot \Delta f)^2 \cdot N \quad (2.38)$$

de totale energie inhoud van beide spectra is dan gelijk. Dit leidt tot:

$$S = \frac{M^2}{T} \quad (2.39)$$

We gaan dus uit van het continue spectrum:



Voor de bij dit spectrum behorende autocorrelatie-
functie $R_{xx}(\tau)$ geldt:

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^{f_N} S e^{2\pi i f \tau} df \quad (2.40)$$

Voor de toegevoegd complexe hiervan: $R_{xx}^*(\tau)$ geldt dus:

$$R_{xx}^*(\tau) = S \int_0^{P_N} e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (2.41)$$

Deze relatie beschrijft de gewone Fouriertransformatie indien wij de parameters f en τ verwisselen. Bepalen wij dus de Fouriergetransformeerde van de blokfunctie $S_{xx}(t)$ en vervangen wij daarna f door τ dan resulteert:

$$\begin{aligned} R_{xx}^*(\tau) &= S \cdot P_N \cdot \frac{\sin(\pi \tau P_N)}{\pi \tau P_N} \cdot e^{-2\pi i \tau \frac{P_N}{2}} \\ &= \frac{M^2 N}{T^2} \frac{\sin(\pi \tau \frac{1}{\Delta T})}{\pi \tau \frac{1}{\Delta T}} \cdot e^{-\pi i \tau \frac{1}{\Delta T}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Wij bepalen voor deze functie nu alleen functiewaarden voor $\tau = p \Delta T$ ($p = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$) zodat:

$$R_{xx}(p \Delta T) = \frac{M^2 N}{T^2} \frac{\sin(\pi p)}{\pi p} \cdot \cos(p \pi) \quad (\text{reële functie})$$

Deze functie is alleen ongelijk aan nul voor $p = 0$, er volgt dan:

$$R_{xx}(0) = \frac{M^2 N}{T^2} \quad (2.43)$$

Omdat $R_{xx}(p \Delta T) = E[x(k)x(k+p)]$ volgt:

$$E[x(k)^2] = \gamma_x^2 = \frac{M^2 N}{T^2} \quad (2.44)$$

$$E[x(k)x(k+p)] = 0 \quad \text{voor } p \neq 0 \quad (2.45)$$

Relatie (2.44) stemt volledig overeen met relatie (2.25) terwijl (2.45) nagenoeg overeenstemt met (2.28). Bij dit laatste ontstaat het geringe verschil doordat bij de afleiding van (2.28) uitgegaan is van de D.F.T. in plaats van de Fourierintegraal.

We beschouwen vervolgens bandwith limited white noise waarbij voor het discrete spectrum aangenomen wordt:

$$|X(n\Delta f)| = M \quad 0 \leq n_1 \leq n \leq n_2 \leq \frac{N}{2} \quad (2.46)$$

Verder nemen wij aan dat voor $n > \frac{N}{2}$ de functie weer gevonden wordt door op toegevoegd complexe wijze te spiegelen t.o.v. $n = \frac{N}{2}$.

We gaan weer over op een continue spectrum

$S_{xx}(f)$:

$$S_{xx}(f) = S \quad 0 \leq f_1 \leq f \leq f_2 \leq \frac{f_N}{2} \quad (2.47)$$

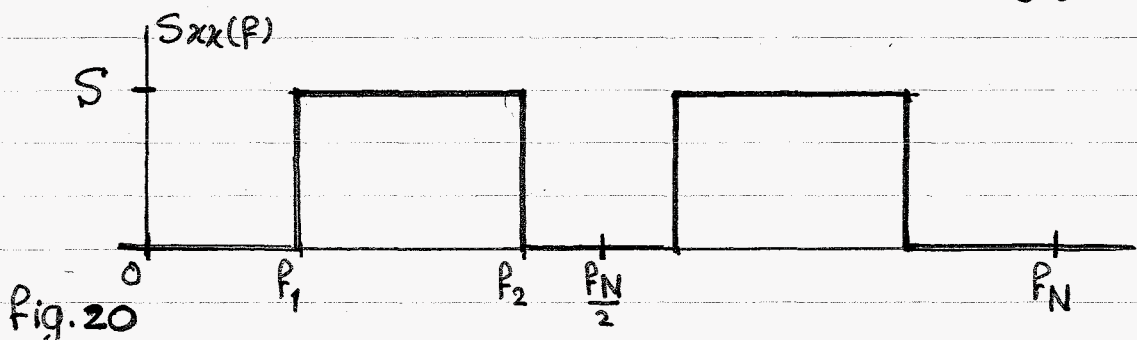
Er moet dan weer gelden:

$$S \cdot (f_2 - f_1) = (M\Delta f)^2 (n_2 - n_1)$$

Stellen wij $(n_2 - n_1) = N_B$; $(f_2 - f_1) = N_B \cdot \Delta f$ dan wordt S :

$$S = \frac{M^2}{T} \quad (2.48)$$

De functie $S_{xx}(f)$ is hieronder schematisch weergegeven.



Voor de autocorrelatiefunctie $R_{xx}^*(\tau)$ volgt nu:

$$R_{xx}^*(\tau) = S(f_2 - f_1) \frac{\sin(\pi\tau(f_2 - f_1))}{\pi\tau(f_2 - f_1)} \cdot e^{-2\pi i\tau f_m} + S(f_2 - f_1) \frac{\sin(\pi\tau(f_2 - f_1))}{\pi\tau(f_2 - f_1)} \cdot e^{-2\pi i\tau(f_N - f_m)} \quad (2.49)$$

Hierbij is $f_m = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) := N_m \cdot \Delta f$

We bekijken weer enkel functiewaarden voor $\tau = p \Delta T$ zodat:

$$R_{xx}^*(p\Delta T) = \frac{M^2 N_B}{T^2} \cdot \frac{\sin(\pi p \frac{N_B}{N})}{\pi p \frac{N_B}{N}} \cdot \left\{ e^{-2\pi i p \frac{N_m}{N}} + e^{-2\pi i p \frac{N_m}{N}} \right\}$$

$$= \frac{M^2 N_B}{T^2} \cdot \frac{\sin(\pi p \frac{N_B}{N})}{\pi p \frac{N_B}{N}} \cdot 2 \cos(2\pi p \frac{N_m}{N})$$

Zoals te verwachten was is dit weer een reële functie zodat:

$$R_{xx}(p\Delta T) = \frac{2M^2 N_B}{T^2} \cdot \frac{\sin(\pi p \frac{N_B}{N})}{\pi p \frac{N_B}{N}} \cos(2\pi p \frac{N_m}{N}) \quad (2.50)$$

Voor $p=0$ krijgen wij:

$$R_{xx}(0) = \gamma_2^2 = \frac{2M^2 N_B}{T^2} \quad \text{zie ook (2.34).}$$

Indien $N_B = N/2$; $N_m = N/4$ (continue spectrum op interval $0 \leq f \leq f_N$ zoals hiervoor beschreven) krijgen wij hetzelfde resultaat als gegeven door (2.44) en (2.45).

Voor bandwidth limited white noise van willekeurige samenstelling kunnen we de covariantie : $\text{cov}[x(k), x(k+p)]$ af schatten door de omhullende te schetsen van de functie $R_{xx}(p\Delta T)$ volgens relatie (2.50). De hieruit resulterende correlatiecoëfficiënt is hieronder schematisch aangegeven.

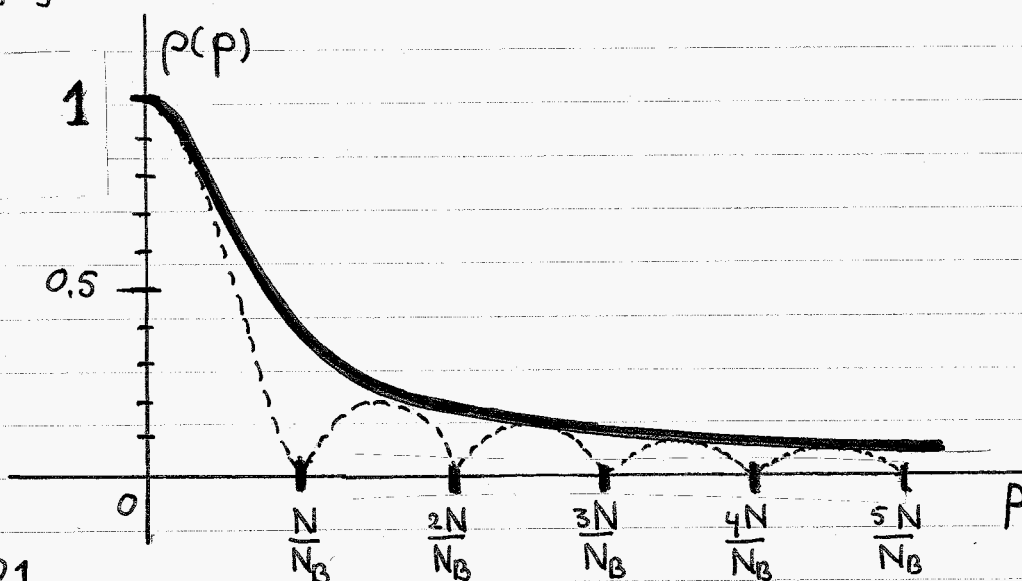


Fig. 21

Grofweg kan gesteld worden dat $\rho(p) < 0.1$ indien $p > 4N/N_B$. Voor grote N_B impliceert dit dat slechts een gering aantal opeenvolgende discrete random variabelen $x(k)$ statistisch afhankelijk zullen zijn. Voor kleine N_B zal deze statistische afhankelijkheid zich over een groot gebied uitstrekken. Indien bijvoorbeeld :

$$N_B = \frac{N}{4} \quad : \quad p > 16 \rightarrow \rho < 0.1$$

$$N_B = \frac{N}{20} \quad : \quad p > 80 \rightarrow \rho < 0.1$$

In het hierna volgende voorbeeld 3 is witte ruis beschouwd, gecreëerd in het frequentiedomein. Fig 22. geeft de amplitude, fig 23 de fase, Fig. 24 het reële deel en fig 25 het imaginaire deel van $X(f)$. Na inverse Fouriertransformatie ontstaat het tijdsignaal volgens fig. 26 met de daarbij behorende kansdichtheidsfunctie zoals in fig 27. Ook nu zijn in de figuren weer de theoretische waarden aangegeven.

Fig 28 tenslotte toont het discrete autopowerspectrum van bandwith limited white noise voor een bepaald geval. De hieruit bepaalde autocorrelatiefunctie $R_{xx}(p)$ is weergegeven in fig. 29. Hieruit volgt dat indien $p < \frac{4N}{N_B}$ inderdaad de correlatiecoëfficiënt $\rho(p)$ voor de random variabelen $x(k\Delta T)$ en $x((k+p)\Delta T)$ kleiner dan 0.1 blijkt te zijn.

Voorbeeld 3

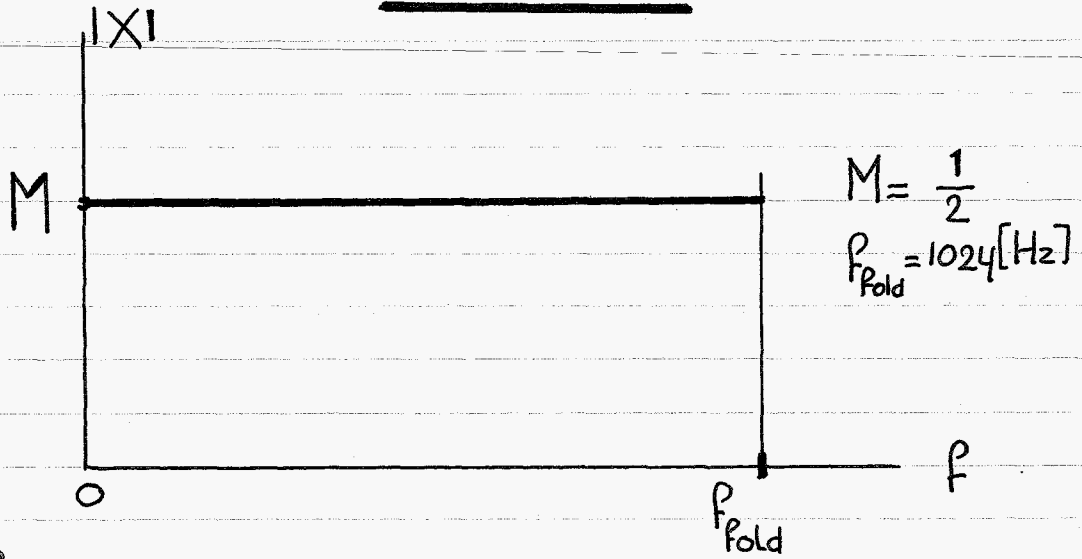


Fig 22

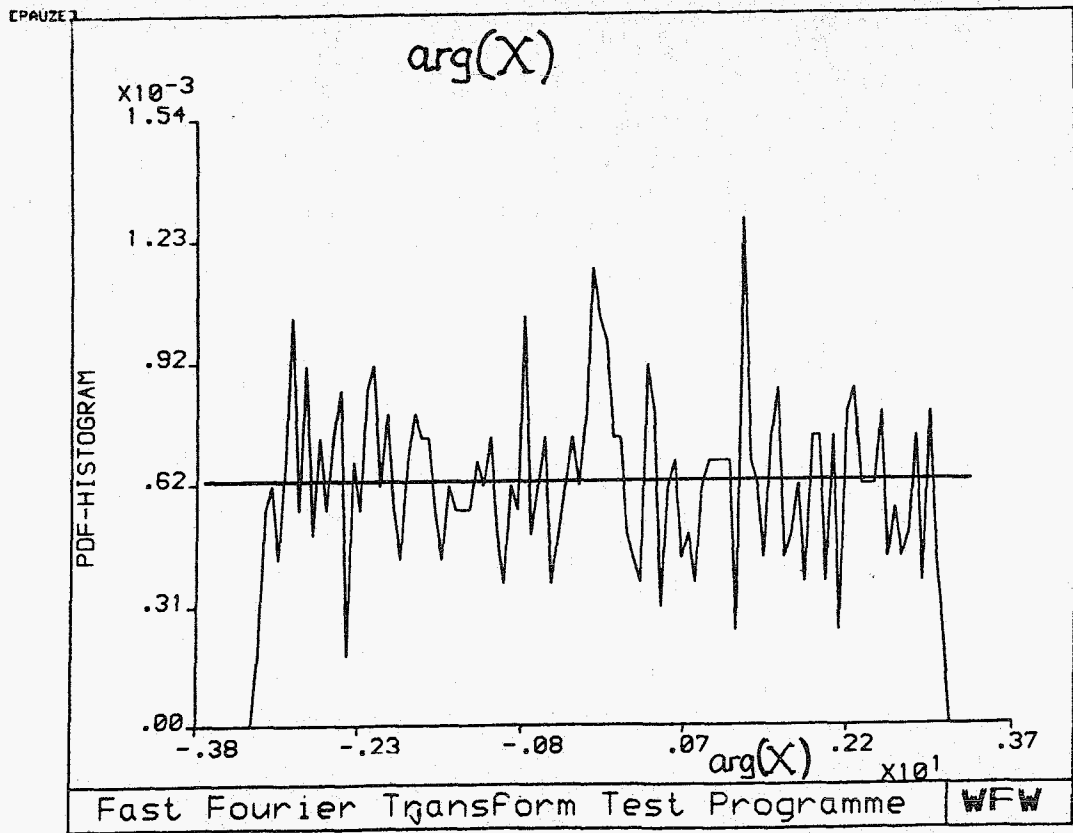


Fig 23

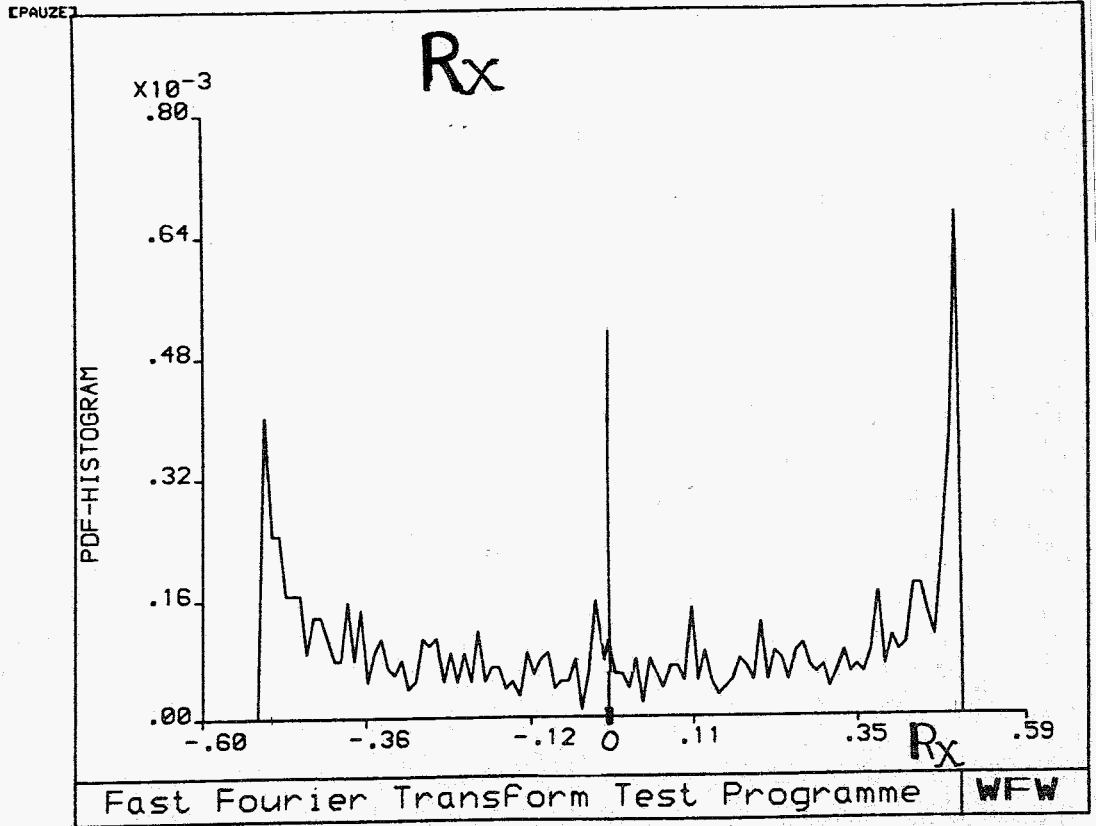


Fig. 24

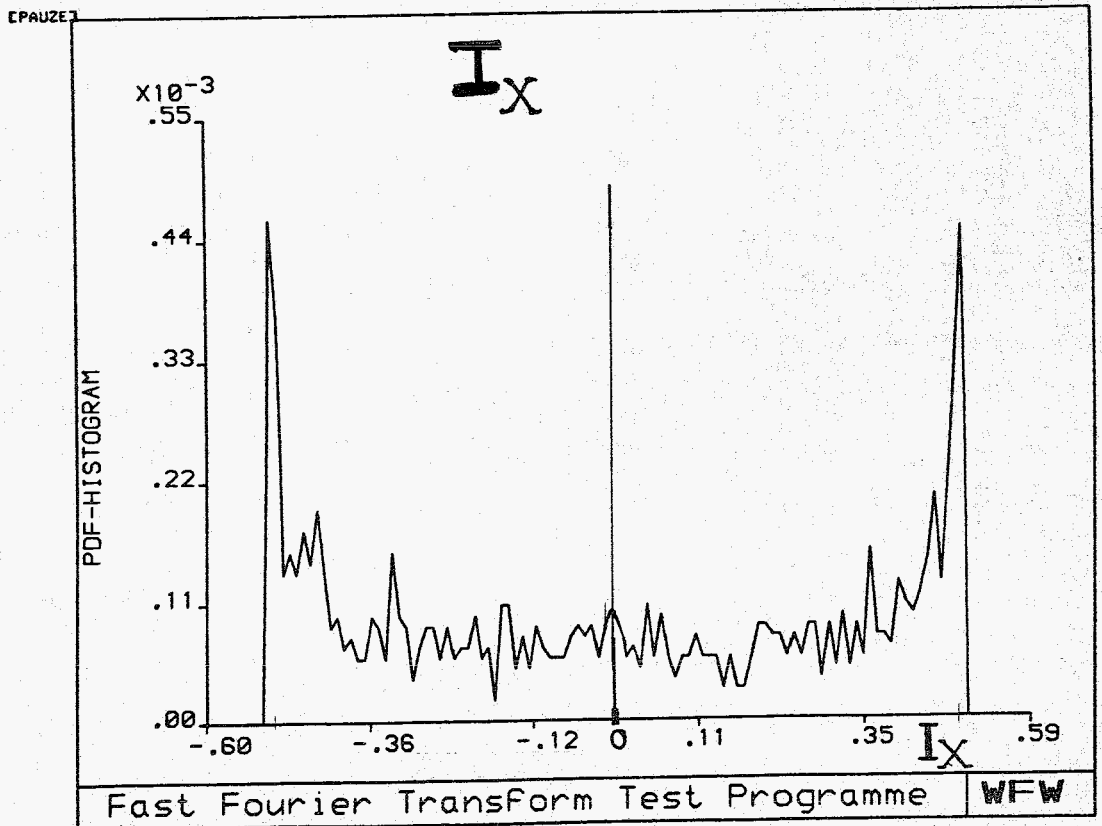


Fig. 25

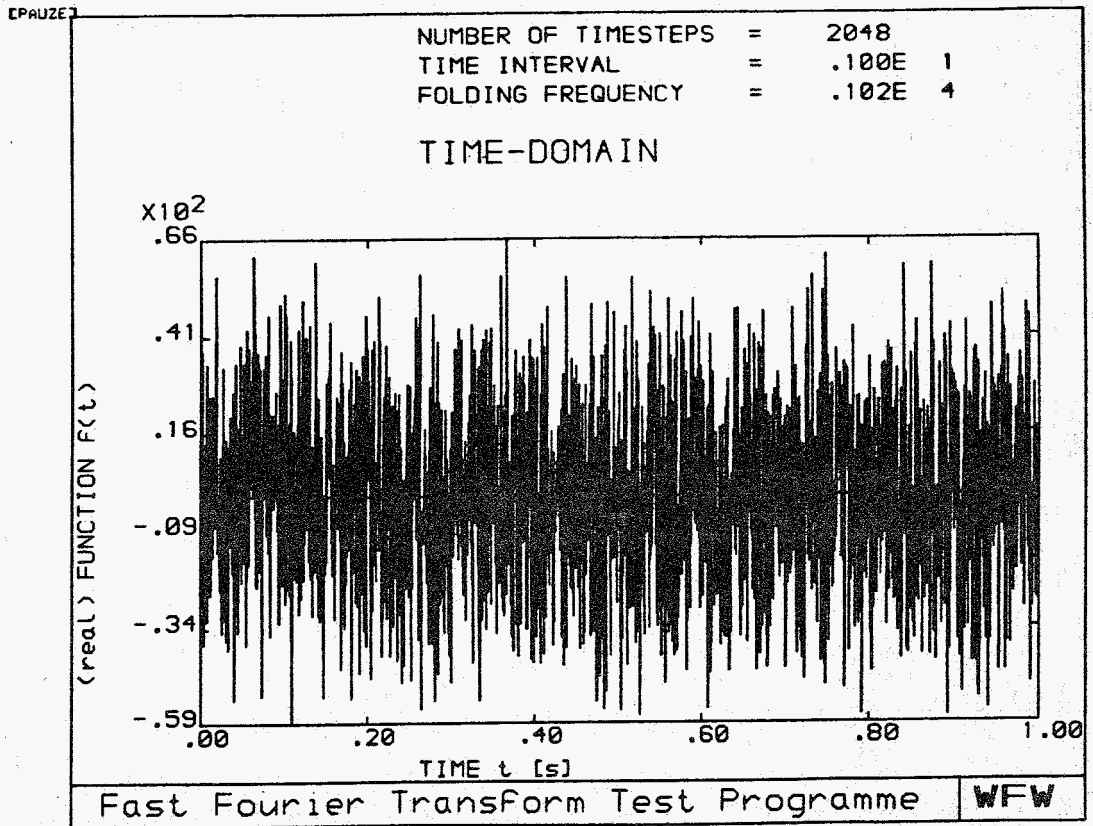


Fig. 26

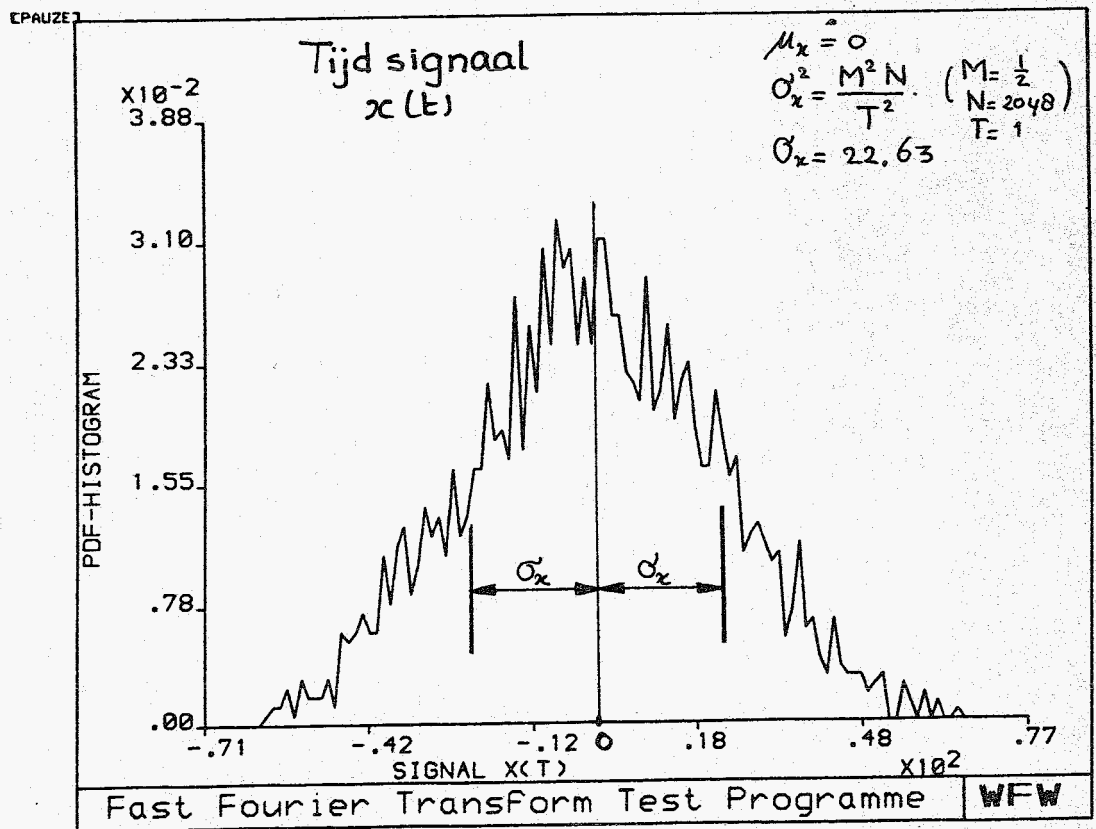


Fig. 27

FREQUENCY-DOMAIN

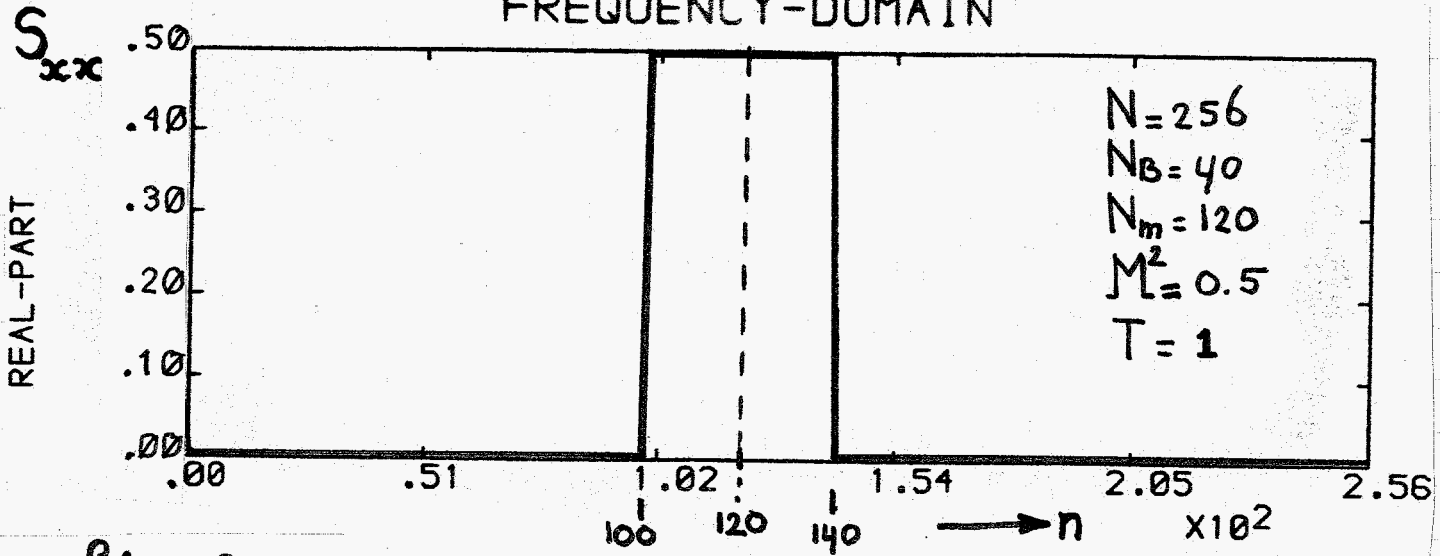
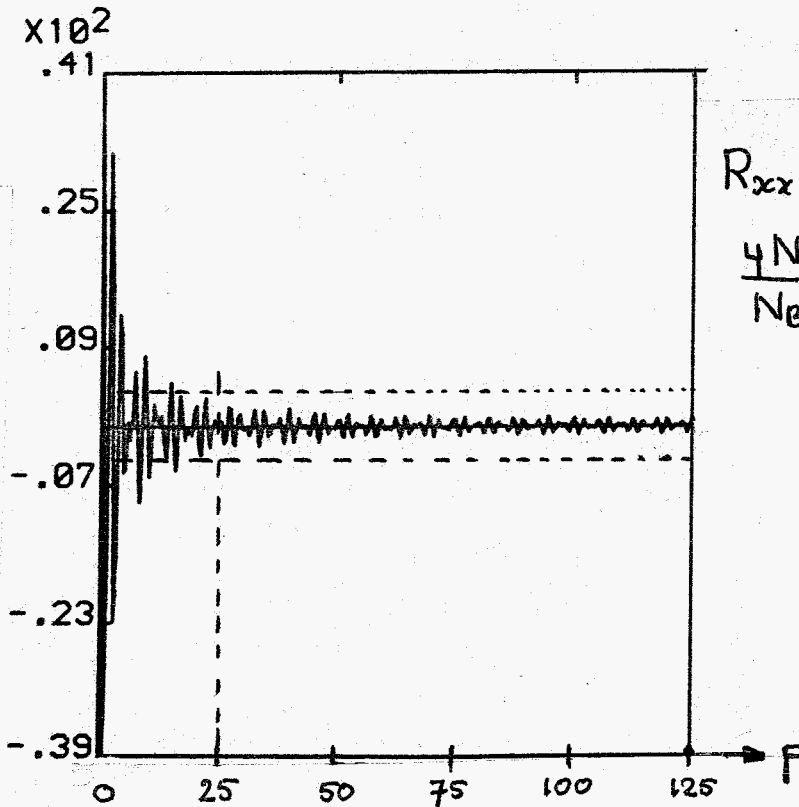


Fig 28

NUMBER OF TIMESTEPS = 512
 TIME INTERVAL = .100E 1
 FOLDING FREQUENCY = .256E 3

$R_{xx}(p)$

TIME-DOMAIN



$$R_{xx}(0) = \frac{2M^2 N_B}{T^2} = 40.$$

$$\frac{4N}{N_B} \approx 25$$

Fig 29.